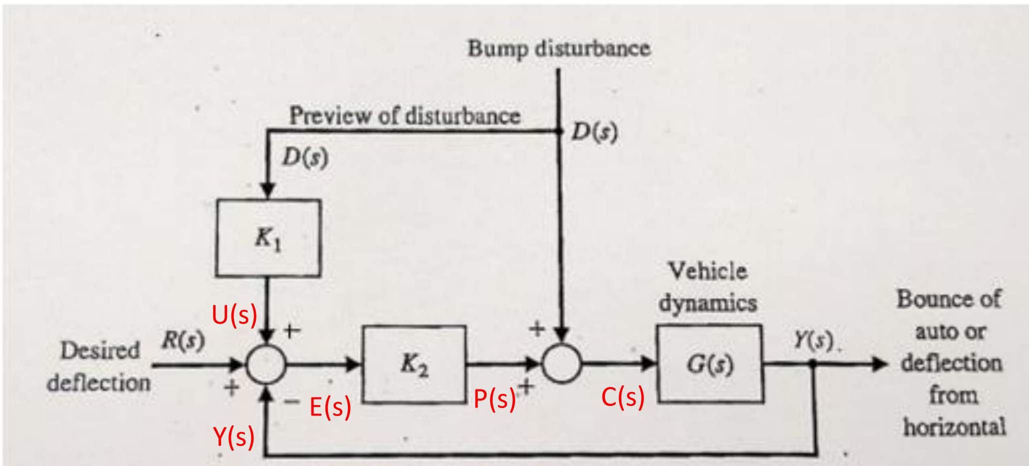
קבוצה 5 מגישים-
שחר אופיר 206442121
רותם גל 314949405
מתן בן שמעון 208632919
אורן מורגניש 211601257

תרגיל בית תאורטי 2

תרגיל 1

רכבי שטח חווים הפרעות רבות כאשר הם נוסעים במסלולים קשים. עבור רכבים אלה ניתן להתקין מערכת השהייה פעילה אשר יכולה להישלט ע"י חיישן ש"מסתכל קדימה" על תנאי הכביש. דוגמה למערכת השעיה פשוטה שיכולה לשלב את הבלמים מוצגת בתרשים המצורף. מצא את k_1 המתאים במושגי הפרמטרים הנתונים כדי שהרכב לא יקפוץ כאשר הסטייה הרצויה היא $R(s) = 0$ וההפרעה היא $D(s)$.



נחשב באמצעות הכלל- פלט/קלט ונעזר במשתנים שהוספנו לתרשים:

$$\frac{U(s)}{D(s)} = k_1 \quad , \quad \frac{P(s)}{E(s)} = k_2$$

$$\frac{Y(s)}{C(s)} = G(s)$$

לפי כללי הצומת-

$$E(s) = R(s) + U(s) - Y(s)$$

$$C(s) = D(s) + P(s)$$

נציב:

$$P(s) = k_2 * E(s) = k_2 * [R(s) + U(s) - Y(s)]$$

$$C(s) = D(s) + [R(s) + U(s) - Y(s)]k_2$$

$$Y(s) = G(s) * [D(s) + [R(s) + k_1 * D(s) - Y(s)]k_2]$$

$$Y(s)=\frac{G(s)*D(s)*(1+k_1k_2)+G(s)*k_2*R(s)}{1+G(s)*k_2}$$

כדי שהרכב לא יקפוץ נדרוש ש- G(s)=0 וזה יקרה רק אם Y(s)=0

ובנוסף לפי נתוני השאלה גם R(s)=0 ולכן-

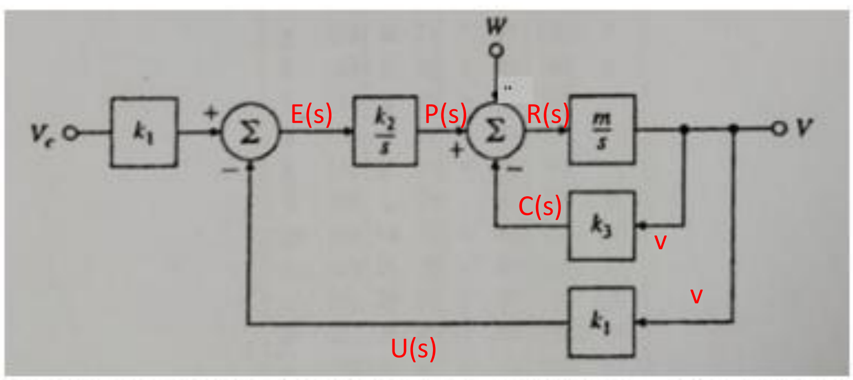
$$1+k_1k_2=0$$

יאפס את Y(s)

$$k_1=\frac{-1}{k_2}$$

<u>תרגיל 2</u>

ייצוג אפשרי של מערכת בקרת מהירות ברכב עם בקר אינטגרלי נתונה ע"י השרטוט



1. בהינתן מהירות התחלתית $v_c=0$, יש למצוא את פונקציית המעבר שמקשרת את המהירות להפרעת הרוח W.

1. נחשב באמצעות הכלל- פלט/קלט ונעזר במשתנים שהוספנו לתרשים:

$$\frac{U(s)}{V}=k_1$$

$$\frac{P(s)}{E(s)}=\frac{k_2}{s}$$

$$\frac{C(s)}{V}=k_3$$

$$C(s)=k_3*V$$

$$\frac{V}{R(s)} = \left(\frac{m}{s}\right)$$

לפי כללי הצומת-

$$R(s) = \mathrm{P(s)} - C(s) - w$$

$$E(s) = k_1 * Vc - U(s)$$

$$Vc = 0$$

$$E(s) = -U(s)$$

$$\frac{U(s)}{V} = k_1$$

$$E(s) = -k_1 V$$

$$\frac{P(s)}{E(s)} = \frac{k_2}{s} \text{ --> } P(s) = -\frac{k_1 V k_2}{s}$$

$$R(s) \ = -\frac{k_1 V k_2}{s} - k_3 * V - w$$

$$V = \left(\frac{m}{s}\right) * R(s) = \left(\frac{m}{s}\right) * \left[-\frac{k_1 V k_2}{s} - k_3 * V - w\right] =$$

$$\left(\frac{m}{s}\right) * \left[\frac{-k_1 V k_2 - s * k_3 * V - s * w}{s}\right] = \left[\frac{-m * k_1 V k_2 - s * m * k_3 * V - s * m * w}{s^2}\right]$$

$$V = -V * \left[\frac{m * k_1 k_2}{s^2} + \frac{m * k_3}{s}\right] - \frac{m * \mathrm{w}}{s}$$

$$V + V * \left[\frac{m * k_1 k_2}{s^2} + \frac{m * k_3}{s}\right] = -\frac{m * \mathrm{w}}{s}$$

$$V[1 + \left[\frac{m * k_1 k_2}{s^2} + \frac{m * k_3}{s}\right]] = -\frac{m * \mathrm{w}}{s}$$

$$V = \frac{-\frac{m * w}{s}}{1 + \left[\frac{m * k_1 k_2}{s^2} + \frac{m * k_3}{s}\right]}$$

2. יש למצוא את התגובה במצב היציב של V (עבור $v_c = 0$), בהינתן ש-W פונקצית המדרגה הבאה:

$$w(x) = \{0, \quad x < 0\,, 6 \;\; x \geq 0\}$$

3. פונקציית התמסורת של המערכת היא:

$$H(s) = \frac{2 + s^2}{s^2 + (b-3)s + a}$$

יש למצוא את הערכים a ו-b עבורם המערכת במצב יציב.

2. לפי הסעיף הקודם:

$$V = \frac{-\dfrac{m * w}{s}}{1 + \left[\dfrac{m * k_1 k_2}{s^2} + \dfrac{m * k_3}{s}\right]}$$

נציב: $w = \frac{6}{s}$

$$V = \frac{-6 * \mathrm{m}}{1 + \left[\dfrac{m * k_1 k_2}{s^2} + \dfrac{m * k_3}{s}\right]}$$

$$\lim\ \mathrm{V}(t)_{t\to\infty} = \lim{}_{s\to 0} \frac{-6 * \mathrm{m}}{1 + \left[\dfrac{m * k_1 k_2}{s^2} + \dfrac{m * k_3}{s}\right]} = 0$$

3. נבדוק 2 מקרים לפי הדסקרמיננטה של פונקציית המכנה-

$$s_{1,2=} \frac{-(b-3) \mp \sqrt{(b-3)^2 - 4a}}{2}$$

מקרה 1- אם בתוך השורש הערך שלילי אז נרצה שהחלק הממשי יהיה שלילי

$-(b-3) < 0$ וגם $(b-3)^2 - 4a < 0$

$3 < b$ וגם $-4a < 0$

אז תשובה סופית

$b > 3\,, a > 0$

מקרה 2- אם בתוך השורש הערך חיובי אז כל הביטוי שלילי

$-(b-3) + \sqrt{(b-3)^2 - 4a} < 0$ וגם $(b-3)^2 - 4a > 0$

a>0 ואין הגבלה על b.

פיתרון סופי -

$b > 3\ , a > 0$

4. נתון לנו מרחב המצבים ומטריצה A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\dot{X} = A(t)X + B(t)u$$

$$Y = C(t)X + D(t)u$$

האם המערכת יציבה?

פתור באמצעות מציאת ערכים עצמיים למטריצה A.

מהסעיף הזה ועד סוף העבודה נפתור בכתב (ראינו בפורום שאפשר להגיש בכתב) (:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

$$Y = C(t)x + D(t)u$$

שורשי המכנה הם הע"ע של מטריצה A :

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -2 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 0) - 1(-\lambda - 0) - 2(1-0) = \lambda^2(2-\lambda) + \lambda - 2 =$$

$$= \lambda^2(2-\lambda) - (2-\lambda) = 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2 + \lambda = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\lambda_3 = -1$$

מכיוון שישנם ע"ע חיוביים המערכת לא יציבה.

תרגיל 3

פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית הבאה עבור $0 < y''(t) + 4y'(t) + 4y(t) = 4t$:

עם תנאי התחלה: $y'(0) = 0 \quad y(0) = 4,$.

1. פתרון במישור לפלס.
2. מצאו את תגובת המערכת במצב היציב.

$y(0)=4 \quad , y'(0)=0$

$L(y''(t)+4y'(t)+4y(t)) = L(4)$

$s^2 y(s) - s y(0) - y'(0) + 4(s y(s) - y(0)) + 4y(s) = \frac{4}{s}$

נציב תנאי התחלה:

$s^2 y(s) - s\cdot 4 + 4s y(s) - 16 + 4y(s) = \frac{4}{s}$

$s^2 y(s) + 4s\, y(s) + 4y(s) = \frac{4}{s} + 4s + 16$

$y(s) = \dfrac{\frac{4}{s} + 4s + 16}{s^2+4s+4} = \dfrac{4s^2+4+16s}{s(s+2)^2}$

שברים חלקיים:

$\dfrac{4s^2+4+16s}{s(s+2)^2} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{C}{(s+2)^2}$

$= \dfrac{A(s+2)^2 + B\cdot s(s+2) + C\cdot s}{s(s+2)^2}$

רק מונה $\leftarrow$ $As^2+4As+4A+Bs^2+2Bs+Cs$

$s^2(A+B) + s(4A+2B+C) + 4A$

$$\begin{cases} A+B=4 & B=3 \\ 4A+2B+C & C=16-4-6=6 \\ 4A=4 & A=1 \end{cases}$$

$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3}{s+2} + \frac{6}{(s+2)^2}$

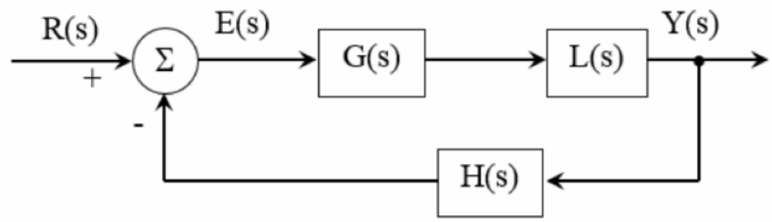
2) נמצא התמרת לפלס הפוכה:

$y(t) = L^{-1}(y(s)) = 1 + 3e^{-2t} - 6te^{-2t}$

$\lim_{t\to\infty} y(t) = 1 + \cancel{3e^{-2\infty}} - \cancel{6te^{-2\infty}} = 1$

תרגיל 4

1. החליטו לבקר את עבודת המערכת ע"י הוספת לולאת בקרה סטנדרטית:



תלמיד א' ותלמיד ב' התלבטו בינם לבין עצמם מהו הבקר שעדיף להם להשתמש בו על מנת לייצב את היציאה $Y(s)$ על ערך הכניסה $R(s)$.

תלמיד א' טוען שבקר PI מתאים יותר מכיוון שהוא ידאג להתייצבות המערכת בדיוק על הערך הרצוי.
תלמיד ב' טוען שמספיק להשתמש בבקר P, מכיוון שהוא זול יותר ובכל מקרה הם מעוניינים אך ורק במצב המתמיד ולכן במצב המתמיד הערך Y ישאף לערך R.

מי מבין שניהם צודק?

הוכיחו עבור הנתונים הבאים: $R(s) = \frac{100}{s}$, $L(s) = \frac{4}{s+2}$, $H = 1$. k_i ,k_p-ו הם קבועים שניתנים למשחק בטווח הבא: $k_p > 1$, $k_i < 5000$. (שימו לב ש-H איננה פונקציית תמסורת של המערכת אלא חיישן).

תלמיד ב' - מבקר P: $k_p = G(s)$

נשתמש במשוואות הכלליות-

$$y(s) = R(s) \cdot \left(\frac{G(s) \cdot L(s)}{1 + G(s) \cdot L(s) \cdot H(s)} \right)$$

נציב ערכים נתונים-

$$y(s) = \frac{100}{s} \cdot \left(\frac{k_p \cdot \frac{4}{s+2}}{1 + k_p \cdot \frac{4}{s+2} \cdot 1} \right) =$$

$$= \frac{100}{s} \cdot \left[\frac{k_p \cdot 4}{s+2} : \frac{s+2+4k_p}{s+2} \right] = \frac{100}{s} \cdot \frac{4k_p}{4k_p+s+2}$$

מכנה גדול ממונה

$$\lim_{s \to 0} s \cdot y(s) = s \cdot \frac{100}{s} \cdot \frac{4k_p}{4k_p+s+2} = 100 \cdot \frac{4k_p}{s+2+4k_p} < 100$$

תלמיד ג'- בקר PI $\quad G(s) = k_p \cdot \frac{k_I}{s}$

$$Y(s) = R(s) \cdot \left(\frac{G(s) \cdot L(s)}{1 + G(s) \cdot L(s) \cdot H(s)} \right)$$

נציב ערכים נתונים-

$$Y(s) = \frac{100}{s} \cdot \left(\frac{\left(k_p \cdot \frac{k_I}{s}\right) \frac{4}{s+2}}{1 + \left(k_p \cdot \frac{k_I}{s}\right) \cdot \frac{4}{s+2} \cdot 1} \right) =$$

$$= \frac{100}{s} \cdot \left[\frac{\left(k_p \cdot \frac{k_I}{s}\right) \cdot 4}{s+2} : \frac{s+2+4 \cdot \left(k_p \cdot \frac{k_I}{s}\right)}{s+2} \right] = \frac{100}{s} \cdot \frac{\left(k_p \cdot \frac{k_I}{s}\right) \cdot 4}{s+2+4 \cdot \left(k_p \cdot \frac{k_I}{s}\right)}$$

$$= \frac{100}{s} \cdot \frac{4(k_p \cdot s + K_I)}{s^2 + 2s + 4(k_p s + k_I)}$$

$$\lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to 0} s \, \frac{100}{s} \cdot \frac{4(k_p \cdot s + K_I)}{s^2 + 2s + 4(k_p s + k_I)} = 100$$

נעדיף את המקרה של תלמיד ג' כי הערך
שווה בדיוק ל- 100 ובמקרה של תלמיד ב' הערך
קטן מ- 100.

2. בסופו של דבר שני התלמידים החליטו להתפשר על בקר *PD* עם קבועים $k_p = k_d = 2$. מצא את תגובת המערכת עבור כניסת מדרגה בגובה 3 ותנאי התחלה אפס. מהו הערך עליו תתייצב המערכת?

$$G(t) = k_p + s k_d = 2 + 2s \, , \quad R(t) = 3 \xrightarrow[\text{לפלס}]{} R(s) = \frac{3}{s}$$

$$Y(s) = R(s) \left(\frac{G(s) \cdot L(s)}{1 + G(s) \cdot L(s) \cdot H(s)} \right) =$$

$$= \frac{3}{s} \cdot \frac{2+2s \, \frac{4}{s+2}}{1 + (2+2s) \frac{4}{s+2}} = \frac{3}{s} \cdot \frac{8(s+1)}{9s+10} =$$

$$= \frac{1}{s} \cdot \frac{24s + 24}{9s+10}$$

$$\lim_{s \to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{24s+24}{9s+10} = \frac{24}{10} = 2.4$$