



הפקולטה למדעי ההנדסה- המחלקה להנדסת תעשייה וניהול  
אוטומציה וייצור ממוחשב 364-1-3321  
אוניברסיטת בן גוריון בנגב

## תרגיל בית תיאורטי (4) - בקרת PID של מטוטלת הפוכה

קבוצה 1 - דניאלה הדס , עדן דפה , ענוג שטורפר , ניר משולם

209476399 | 314821182 | 314943572 | 318657962

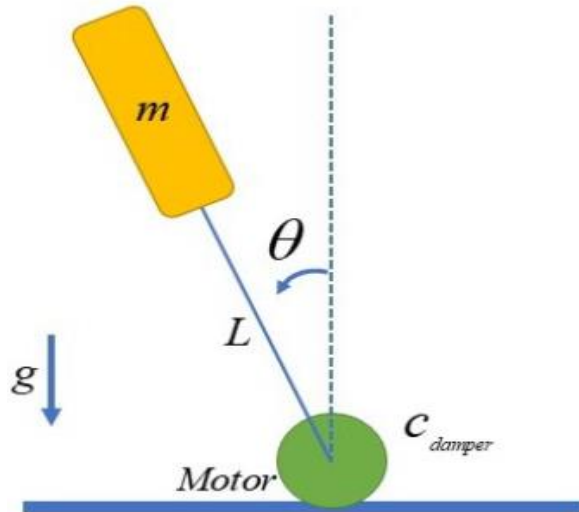
מטרת התרגיל: התנסות במידול וכיול בקר PID, עבודת צוות וכתובת דוח.

$$m = n \cdot 4.5 \text{ gr (n number of nuts, n=3)}$$

$$L = 10 \text{ cm}$$

$$c = 3 \cdot 10^{-3} \text{ Nmsec/rad}$$

$$I = mL^2$$



1. a. מידול המערכת המבוקרת כמערכת מסדר שני:

מודל דינאמי:

$$I\ddot{\theta} = mgL\sin(\theta) - c\dot{\theta} + \tau$$

$I$  – מומנט התמד (משפיע על תאוצה)

$\theta$  – זווית

$m$  – מסה

$g$  – תאוצת כובד

$L$  – אורך למרכז מסה

$c$  – מקדם חיכוך (משפיע על מהירות)

$\tau$  – כוח שהבקרה מפעילה

עבור  $\theta_0 = 0$ :

לינאריות  $f(\theta) = f(\theta_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_0} \cdot (\theta - \theta_0)$

פיתוח טיילור  $f(\theta) = \sin(\theta_0) + \cos(\theta_0) \cdot (\theta - \theta_0) = \theta$

ולכן המודל הדינאמי:

$$I\ddot{\theta} = mgL\theta - c\dot{\theta} + \tau$$



הפקולטה למדעי ההנדסה- המחלקה להנדסת תעשייה וניהול  
אוטומציה וייצור ממוחשב 364-1-3321  
אוניברסיטת בן גוריון בנגב

$$\tau = I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} - mgL\theta$$

$$\dot{\theta} = -\frac{I}{c}\ddot{\theta} + \frac{mgL}{c}\theta + \frac{1}{c}\tau$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{c}{I}\dot{\theta} + \frac{mgL}{I}\theta + \frac{1}{I}\tau$$

**מידול מרחב המצבים:**

נגדיר:

$$X = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad \dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad Y = \theta$$

$$\dot{X} = Ax + Bu$$

$$Y = Cx + Du$$

**מודל המערכת:**

$$\begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{mgL}{I} & -\frac{c}{I} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{I} \end{bmatrix} \cdot \tau$$

$$Y = [1 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \tau$$

**מודל המערכת המבוקרת ( $G_{system}$ ):**

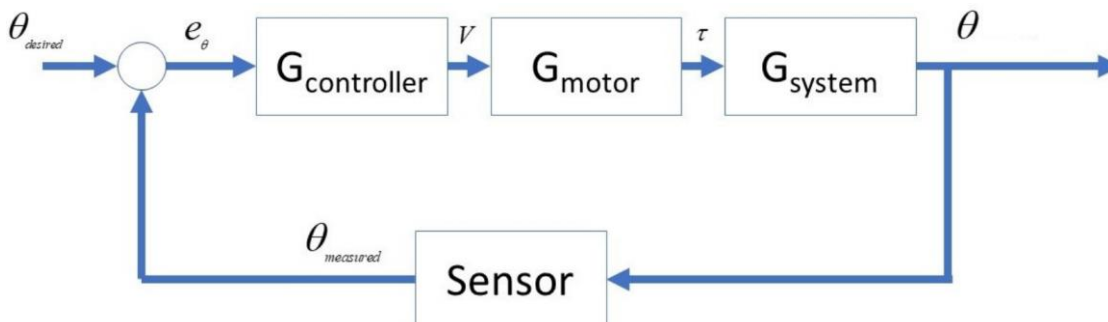
$$\tau = I\ddot{\theta} + c\dot{\theta} - mgL\theta \xrightarrow{Laplace} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \rightarrow \theta s^2 \\ \dot{\theta} \rightarrow \theta s \\ \theta \rightarrow \theta \\ \tau \rightarrow T \end{bmatrix} \xrightarrow{Laplace}$$

$$T(s) = I \cdot s^2 \theta + c \cdot s \theta - mgl \theta$$

$$\frac{T(s)}{\theta} = I \cdot s^2 + c \cdot s - mgl \rightarrow G_{system} = \frac{\theta}{T(s)} \quad \text{תמסורת}$$

$$G_{system} = \frac{1}{Is^2 + cs - mgL}$$

b. דיאגרמת הבקרה של החוג הסגור:





הפקולטה למדעי ההנדסה- המחלקה להנדסת תעשייה וניהול  
 אוטומציה וייצור ממוחשב 364-1-3321  
 אוניברסיטת בן גוריון בנגב

$$e = \theta_{desire} - \theta \quad \theta_{desire} = [-15, 15] \quad \theta = output$$

2. מודל מנוע לינארי עם תמסורת  $G_{motor}=K=1/6$  ותמסורת החישה  $1=sensor$ .  
 תכנון בקר  $P$  עבור המערכת:

a. פונקציית התמסורת של כל בלוק בדיאגרמה באופן פרמטרי:

$$G_{motor} = \frac{1}{6} = K$$

$$G_{sensor} = 1$$

$$G_{controller} = K_p$$

$$G_{system} = \frac{1}{Is^2 + cs - mgL}$$

b. פונקציית התמסורת של המערכת בחוג סגור באופן פרמטרי:

$$H = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_{system} \cdot G_{controller} \cdot G_{motor}}{1 + G_{system} \cdot G_{controller} \cdot G_{motor}}$$

$$= \frac{K_p \cdot K \cdot \frac{1}{Is^2 + cs - mgL}}{1 + K_p \cdot K \cdot \frac{1}{Is^2 + cs - mgL}} = \frac{\frac{K_p \cdot K}{Is^2 + cs - mgL}}{\frac{Is^2 + cs - mgL + K_p \cdot K}{Is^2 + cs - mgL}}$$

$$= \frac{K_p \cdot K}{Is^2 + cs - mgL + K_p \cdot K}$$

$$H = \frac{\frac{K_p \cdot K}{I}}{s^2 + \frac{c}{I}s - \frac{mgL}{I} + \frac{K_p \cdot K}{I}} \quad \text{תמסורת}$$

c. מציאת פרמטר הבקרה המתאים עבור  $\text{Overshoot} \leq 20\%$ :

$$\zeta \geq \frac{-\ln(0.2)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(0.2)}} = 0.456$$

$$s^2 + \frac{c}{I}s - \frac{mgL}{I} + \frac{K_p \cdot K}{I} = s^2 + \zeta \omega_n s + \omega_n^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c}{I} = 2\zeta \omega_n \rightarrow \omega_n = \frac{c}{2I\zeta} \\ \frac{K_p \cdot K}{I} - \frac{mgL}{I} = \omega_n^2 \rightarrow K_p = \frac{I\omega_n^2 + mgL}{K} \end{array} \right.$$

פרמטר הבקרה:



הפקולטה למדעי ההנדסה- המחלקה להנדסת תעשייה וניהול  
אוטומציה וייצור ממוחשב 364-1-3321  
אוניברסיטת בן גוריון בנגב

$$K_p = \frac{0.0135 \cdot 0.1^2 \cdot \left( \frac{0.003}{2 \cdot 0.0135 \cdot 0.1^2 \cdot 0.456} \right)^2 + 0.0135 \cdot 0.1 \cdot 0.1}{\frac{1}{6}}$$

$$= 0.1$$

**חישוב שגיאת המצב המתמיד  $e_{ss,p}$ :**

$$e_{ss,p} = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H(s) \cdot \frac{1}{s} = 1 - \frac{K_p \cdot K}{K_p \cdot K - mgL}$$

$$e_{ss,p} = -\frac{mgL}{K_p \cdot K - mgL} = -\frac{0.0135 \cdot 0.1 \cdot 10}{0.1 \cdot \frac{1}{6} - 0.0135 \cdot 0.1 \cdot 10} = 4.263$$

3. תכנון בקר PD עבור המערכת:

a. פונקציית התמסורת של כל בלוק בדיאגרמה באופן פרמטרי:

$$G_{motor} = \frac{1}{6} = K$$

$$G_{sensor} = 1$$

$$G_{controller} = K_p + sK_d$$

$$G_{system} = \frac{1}{Is^2 + cs - mgL}$$

b. פונקציית התמסורת של המערכת בחוג סגור באופן פרמטרי:

$$H = \frac{G_{system} \cdot G_{controller} \cdot G_{motor}}{1 + G_{system} \cdot G_{controller} \cdot G_{motor}} = \frac{\frac{K(K_p + sK_d)}{Is^2 + cs - mgL}}{1 + \frac{K(K_p + sK_d)}{Is^2 + cs - mgL}}$$

$$= \frac{K(K_p + sK_d)}{Is^2 + cs - mgL + K(K_p + sK_d)}$$

$$H = \frac{\frac{K(K_p + sK_d)}{I}}{s^2 + \frac{c}{I}s - \frac{mgL}{I} + \frac{K(K_p + sK_d)}{I}} \quad \text{תמסורת}$$

c. פרמטרי הבקרה המתאימים עבור  $\text{Overshoot} \leq 20\%$  וגם

$$|e_{ss,pd}| \leq 0.5 |e_{ss,p}|$$

$\zeta$  כמו סעיף קודם -



הפקולטה למדעי ההנדסה- המחלקה להנדסת תעשייה וניהול  
 אוטומציה וייצור ממוחשב 364-1-3321  
 אוניברסיטת בן גוריון בנגב

$$0.5 = 0.2 \rightarrow \zeta = 0.456$$

סידור משוואה:

$$s^2 + \frac{c}{I}s - \frac{mgL}{I} + \frac{K(K_p + sK_d)}{I} = s^2 + \frac{c + K \cdot K_d}{I}s + \frac{-mgL + K \cdot K_p}{I}$$

$$s^2 + \frac{c + K \cdot K_d}{I}s + \frac{-mgL + K \cdot K_p}{I} = s^2 + \zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

$$\frac{c + K \cdot K_d}{I} = 2\zeta\omega_n \rightarrow \omega_n = \frac{c + K \cdot K_d}{2I\zeta}$$

$$K_d = \frac{2I\zeta\omega_n - c}{K}$$

$$\frac{-mgL + K \cdot K_p}{I} = \omega_n^2 \rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K \cdot K_p - mgL}{I}}$$

$$K_p = \frac{I\omega_n^2 + mgL}{K}$$

חישוב שגיאת המצב המתמיד  $e_{ss,p}$ :

$$e_{ss,pd} = 1 - \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot H(s) \cdot \frac{1}{s} = 1 - \frac{K_p \cdot K}{K_p \cdot K - mgL} = -\frac{mgL}{K_p \cdot K - mgL}$$

נרצה ש  $|e_{ss,pd}| \leq 0.5 |e_{ss,p}|$  כלומר:

$$\left| \frac{-mgL}{K \cdot K_{p,pd} - mgL} \right| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{-mgL}{K \cdot K_{p,p} - mgL} \right| = \frac{1}{2} \cdot e_{ss,p}$$

$$\frac{mgL}{K \cdot K_{p,pd}} \leq \frac{1}{2} \cdot e_{ss,p} = \frac{1}{2} \cdot 4.263 = 2.1315$$

$$\frac{mgL}{K \cdot K_{p,pd} - mgL} = 2.1315$$

$$K_{p,pd} = 0.119$$

פרמטרי בקרה:

$$K_{p,pd} = \frac{0.0135 \cdot 0.1^2 \omega_n^2 + 0.0135 \cdot 0.1 \cdot 0.1}{\frac{1}{6}} = 0.119$$

$$\omega_n^2 = 145.91 \rightarrow \omega_n = 12.079$$

$$K_d = \frac{2 \cdot 0.0135 \cdot 0.1^2 \cdot \omega_n - 0.003}{\frac{1}{6}} = 0.00156$$