第八章练习参考答案

所有证明用到参照的已知NPC问题，直接引用，不必再证明。即已知XX是NPC问题，构造它到所证问题的映射，然后证明“当且仅当”即可。XX的NPC问题不管讲义或习题是否证明过，直接认可。

一、

1．二元可满足性问题 2SAT

例：给定布尔变量的一个有限集合$U=\{u_1, u_2, ..., u_n\}$及定义其上的子句$C=\{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$，其中$|C_k|=2$，$k=1, 2, \cdots, m$，

问：是否存在$U$的一个真赋值，使得$C$中所有的子句均被满足？

证明： 2SAT 是P一类问题。

证：为叙述方便，采用数理逻辑中的“合取式”表达逻辑命题，于是

$$C=c_1\wedge c_2\wedge\cdots\wedge c_m=\prod_{k=1}^{m}c_k=\prod_{k=1}^{m}(x_k+y_k)$$

其中$c_i.c_j$表示逻辑“与”，$x_k+y_k$ 表示逻辑“或”，$x_k, y_k$ 是某个$u_j$ 或 $\overline{u_i}$。

考虑表达式$C=\prod_{k=1}^{m}(x_k+y_k)$，如果有某个$x_k+y_k=u_i+\overline{u_i}$，则在乘积式中可以去掉该子句：$C'=C\setminus(x_k+y_k)$，可见$C$与$C'$的可满足性是等价的。所以我们可以假定$C$中不含有形如$u_i+\overline{u_i}$的子句。注意到此时$C$中的子句个数不会超过$n(n-1)$。

如果逻辑变量$u_n$或它的非$\overline{u_n}$在$C$的某个子句中出现，我们将$C$表示成

$C=G.(u_n+y_1)\cdots(u_n+y_k)(\overline{u_n}+z_1)\cdots(\overline{u_n}+z_h)$　　(1)

其中$G$是$C$的一部分子句，而且不出现逻辑变量$u_n$或它的非$\overline{u_n}$。令

$$C'=G.\prod_{1\le i\le k,1\le j\le h}(y_i+z_j)\qquad(2)$$

(2)式中不再含有变量$u_n$或它的非$\overline{u_n}$。记$U'=\{u_1, u_2, \cdots u_{n-1}\}$。如果存在$U$的真赋值，使得$C$满足，则一定存在$U'$的真赋值使得$C'$满足。

因为如果$u_n$取真值，则所有的$z_j$必然取真值；$u_n$取假值，所有的$y_i$必然

都取真值，不管那中情况，$C'$ 的乘积部分必然取真值。反之，假设存在$U'$ 的真赋值，使得$C'$ 满足。若有某个$y_i$ 取假值，则所有的$z_j$必然取真值，此时令$u_n$ 取真值，得到$U$ 的真赋值，使得$C$ 满足。若有某个$z_j$ 取假值，则令$u_n$ 取假值，得到$U$的真赋值，使得$C$ 满足。如果所有的$y_i$和$z_j$ 都取真值，$u_n$ 取假值得到$U$ 的真赋值，使得$C$ 满足。

至此我们得到：$C$ 与$C'$的可满足性是等价的。但是后者涉及的变量数比前者少1，子句数为$m-(k+h)+kh$。但是，我们可以像前面一样简化掉所有形如$u_i+\overline{u_i}$的子句，因而可以假定 $C'$ 中子句个数不超过 (n-1)(n-2)。

上述过程可以一直进行到判定只含有一个逻辑变量的逻辑语句的可满足性问题。这需要一个常数时间即可。注意到我们每一步简化都可以在多项式（关于$n$ 的）步骤内完成，总共需要至多n-1步简化，因而，在多项式时间内可以完成2SAT 可满足性问题的判定。即2SAT 是P－类问题。 证毕

2.证明：用提示的限制法。

给定$S'\subseteq S$，验证$|S'|\leqslant K$，需$|S|=O(n)$时间,验证任给$c\in C$，$S'\cap c$非空可在$|C|*|c|*|S'|=|C|*n^2$内完成，所以问题是多项式可验证的，相遇集问题∈NP。

下面证明顶点覆盖问题∝|c|=2的相遇集问题。任给图G(V,E)，设$E=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2)\cdots,(x_m,y_m)\}$，令S=V，$C=\{\{x_1,y_1\},\{x_2,y_2\}\cdots,\{x_m,y_m\}\}$，那么，若G存在顶点覆盖$V'$，$|V'|\leqslant K$，则$V'$覆盖E的每条边的至少一个顶点，即$V'$包含$x_i,y_i$至少一个,i=1,2,..,m。取$S'=V'$，显然，$S'$与C中任意子集$\{x_i,y_i\}$交集不空。反之，若存在相遇集$S'$，则令$V'=S'$，由于$S'$与C中子集交不空，则$S'$必含有$x_i,y_i$之一，说明它是G的顶点覆盖。至此我们证了明|c|=2的相遇集问题是NP难的，从而相遇集问题也是NP难的。相遇集问题∈NP，所以是NP完全问题。证毕。

**也可以用SAT证明**本题：任给SAT实例：$U=\{x_1,x_2,\cdots.x_n\}$，$C=\{c_1,c_2,\cdots c_m\}$，$Cj=z_1\wedge z_1\cdots\wedge z_s$。令$S=\{x_1,x_2,\cdots x_n,\neg x_1,\ \neg x_2,\cdots\neg x_n\}$，$c_j=\{x_i|zl=x_i,l=1,2,\cdots s\}\cup\{\neg x_i|z_1=\neg x_i,l=1,2,\cdots s\}$及$\{x_i,\ \neg x_i\}_{i=1,2,..n}$，k=n。

若SAT可满足，取S’= {xi|xi=1} ∪{ ¬xi|xi=0},因为任意Cj可满足，必有$z_1=1$，若$z_1=xi$则S’含有xi;若$z_1=\neg xi$则S’含有¬xi。S’与任何$c_j$子集及$\{x_i,\neg x_i\}_{i=1,2,..n}$相遇，且|s’|=n。

反之，若相遇集可满足，s’必含有xi或¬xi,对任意i。因为要与{xi, ¬Xi}相交。由于|S’|=n,S’不可能同时含有xi和¬xi。于是可令xi=1,if xi∈S’；xi=0，if ¬xi∈S’。由于S’与任意$c_j$相遇，比如$z_1$,此时它对应的xi或¬xi=1,从而子句Cj可满足。（2018赵*阳同学贡献）

3.证明：用提示的限制法。

将矩阵A和b的各行取相同值$a_{11}, a_{12}, \cdots a_{1n}$和$b_1$，则问题变为：判定是否存在X，$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots a_{1n}x_n \leqslant b_1$，判定且$C^TX \geqslant D$问题,这就是0/1背包判定问题。0/1背包判定问题是NPC，所以这个特殊整数规划问题也是NPC问题，从而一般的整数规划问题是NPC问题。

任给X，原问题的判定AX<=b和$C^TX$>=D需计算$mn^2+n$次乘法和加法及2次比较，可在多项式时间内完成，随意原问题∈NP。证毕。

（也可以令m=1，限制为0/1背包判定问题）

（也可以不用限制法，构造0/1背包问题∝整数规划问题：任给0/1背包实例，令A和b的第一行取w1,w2,..wn和M,其它m-1行取0，C=P，D=目标值K,则构成一个整数规划问题，而且0/1背包判定Y的充分必要条件是该整数规划问题回答Y）

# 5. 独立集问题：

例：对于给定的无向图$G(V,E)$和正整数$k$（≤|$V$|）

问：$G$ 是否包含一个于$k$—独立集V′，即是否存在一个子集V′⊆V|，|V′|=k，使得 V′ 中的任何两个顶点在图中$G$ 都不相邻。

证明独立集问题是 NPC 问题（提示：考虑独立集和团的关系：如果V′是图$G$ 的团，则 V′是G的补图$G^*$的独立集；反之亦然）。

证明：

思路：欲证明 $\Pi \in NPC$；选取一个已知的 NP 完全问题$\Pi'$；构造一个从$\Pi'$ 到 $\Pi$ 的变换$f$；证明$f$ 为一个多项式变换。

我们选取团问题作为参照物：给定一个无向图$G(V, E)$，存在$V' \subset V$，$|V'| = k$，且对于任意$u, v \in V'$有$(u, v) \in E$。我们构造新的无向图 $G^*(V,E^*)$使得$G^*$为$G$ 的补图，即对于任意$u, v \in V$，若$(u, v) \in E$，则 $(u,v) \notin E^*$；若$(u, v) \notin E$，则 $(u,v) \in E^*$。

(1)考虑独立集和团的关系：如果$V'$是图$G$ 的团，则$V'$是$G$ 的补图$G^*$的独立集；反之亦然。（详见（4）证明）

（2） 首先说明独立集问题是NP问题。因为无向图$G^*(V,E^*)$的团问题是一个NP问题，从而由其对应关系可知，$G(V,E)$的独立集问题也是一个 NP 问题。（也可仿照无向图的独立团问题的三个阶段的方法，证明独立集问题是NP问题）

（3） 已知团问题是NPC问题。

（4） 下面证明团问题到独立集的变换是一个多项式变换，只需要证明$G^*$包含一个k 独立集$V'$，当且仅当$G$ 包含一个k团。

（i）如果$G^*$包含一个k 独立集$V'$，则在无向图$G^*$中任何两个顶点$(u,v)\in V'$都不相邻，因为$G^*$ 为$G$的补图，故在无向图$G$ 中，对于顶点子集$V'$ ，任何两个顶点$u,v\in V'$ 必然都存在$(u,v)\in E$ ，即$G$ 包含一个k团。

（ii）如果$G$ 包含一个 k团，则对于无向图$G$ 中任意$(u,v \in V'$ 有$(u,v)\in E$ ，因为$G^*$为$G$ 的补图，所以在无向图$G^*$中对于顶点集 $V'$ ，任何两个顶点$u,v\in V'$必然都不相邻，即$G^*$包含一个k 独立集。

上述变换可以在多项式时间内完成，设无向图$G$ 中的顶点个数为n，即$|V|=n$ ，则对于$|G\cup G^*|=n(n-1)/2$，所以该变换可以在多项式时间内完成，即该变换为多项式变换。

**也可以用3SAT证明**：对任意$Cj=Z_1\wedge Z_2\wedge Z_3$， j=1,2,…m,构造以$z_1,z_2,z_3$为顶点的三角形，若顶点$z_i$和$z_1$为某$x_k$和$\neg x_k$则增加连接边，构成图G。

若3SAT有成真赋值，对每个Cj=1，必有某个$z_1=1$，将该元素对应顶点选入S,S一定是独立集，因为该顶点仅与$\neg z_1$相连，¬zl=0,在另一三角形中不会被选中。|S|=m。

反之，若存在独立集S，|S|=m，则每个三角形必须取一个点，因为取两个则不独立，不取则<m。令：if 取点对应的zi=xk,xk=1;zi=¬xk,xk=0,由于xk与¬xk之间有边，不可能同时取到，上述赋值不矛盾。如果(x1,x2,…,xn)里有未赋值着，可任意赋值。则对任意$Cj=Z_1\wedge Z_2\wedge Z_3$ ,取点zi=1,Cj可满足。(2018王*英贡献)

**用VC证明**：图G(V,E)有K顶点覆盖V’的充分必要条件是图G有n-k独立集V-V’。理由不难说明，略。(2018余*昌贡献)

6. 证明：

任给一个图G=(V,E)的一个顶点排序$v_1v_2..v_n$和数L，验证$(v_i, v_{i+1})\in E$和$(v_n, v_1)\in E$可在$O(n*|E|)\leqslant O(n^3)$完成，验证路径和<=L需O(n)时间，所以TSP问题是NP问题。

对于Hamilton问题实例I, 其图为G=(V,E)，构造一个新的图$G_1=(V,E_1)$它是一个完全图，各边赋权如下： 若$(u,v)\in E$, $w(u,v)=1$ ; 否则 $w(u,v)=k>1$。L=n是G的顶点数，得到旅行商问题实例$I'$。

则图G有Hamilton回路当且仅当图$G_1$有长为n的环游路线。因为，若G有Hamilton回路，则取此回路为G1的解，环路长度=n。反之，若G1存在一条长度<=n的环游回路，则回路的每条边权值一定为1，否则回路长>n。这说明，TSP的回路全在G的边E中，取此正是G的一条Hmilton回路。

Hamilton圈问题是NPC，所以旅行商问题也是NPC问题。

7.证明：

要得到$\max\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$需比较所有的$x=(x_1, x_2, ..x_n)$, $x_i\in\{0,1\}$，这有$2^n$个可能，以比较为基础的求最大问题复杂度下界O(n)，故本问题$O(2^n)$，不存在多项式时间算法，所以0/1背包问题$\notin$NP。

但0/1背包判定问题是NPC问题，0/1背包问题不比其更容易，所以，它是NP难问题。

8. 答：是。

二、

1.解：

（1）迭代计算：

$P_1(x)=a_n$

$P_2(x)=a_{n-1}+P_1(x)*x$

$P_3(x)=a_{n-2}+P_2(x)*x$

……

$P_{n+1}(x)=a_0+P_n(x)*x$

不难看出，$P_{n+1}(X)=P(x)$。顺序计算$P_1,P_2$，…$P_{n+1}$，每次需一次加法一次乘法，常数时间，所以计算整个多项式需$\Theta(n)$时间。

（2）证：多项式P(x)有n+1个系数，每个系数至少要被处理一次。如若不然，假设某个求值算法A不对系数$a_i$进行处理，考虑输入

$\langle a_0,a_1,\cdots,a_{i-1},a_i,a_{i+1},\cdots a_n\rangle$和$\langle a_0,a_1,\cdots,a_{i-1},b_i,a_{i+1},\cdots a_n\rangle$，其中$a_i\neq b_i$是不为0的数。那么这两个多项式对同一个x的求值一定不等。但是算法A的输出是不加区别的，因此算法A出错。于是任何算法至少需要n+1次运算，即时间复杂度为$\Omega(n)$。

2.解

（1）最长回路：任给带权无向图G=<V,E>和正整数L，问：G中有长度不小于L的初级(即顶点不重复)回路吗？

(2)图着色问题：任给无向图G=<V,E>和正整数K，问：能用不超过K种颜色给G的每个顶点涂一种颜色，要求任一边的两个端点的颜色都不相同吗？

3.解

证：

（1） 设|V|=n,对任意一条G的回路C,判断C是否为初级回路需O(n)，判断C的长度是否不小于L需|C|+1≤n，所以存在多项式时间判定算法，问题∈NP。

（2） 对V的顶点用M种颜色任一着色方案，检查每条边的两端是否同色，一次比较即可，最多n(n-1)条边，验证可在$O(n^2)$内完成，所以问题∈NP。