

Charakterystyki Statyczne

Kacper Szczepanowski
Wiktor Springer

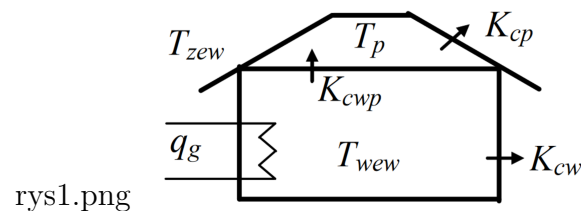
22 października 2019

1 Cel ćwiczenia:

Rozwiązanie problemu układu "Domu z grzejnikiem" ze względu na wartości współczynników przenikalności ciepła, a następnie ze względu na wartości temperatur w budynku.

2 Wstęp

2.1 Rysunek układu



Rysunek 1: Dom z Grzejnikiem

Oznaczenia:

T_{zew} -Temperatura zewnętrzna; T_{wew} -Temperatura wewnętrzna; T_p -temperatura na poddaszu; q_g -wartość ciepła dostarczanego przez grzejnik; K_{cp} -współczynnik ciepła oddawanego przez dach; K_{cwp} -współczynnik ciepła oddawanego na poddasze; K_{cw} -współczynnik ciepła oddawanego przez ściany boczne.

2.2 Wstęp teoretyczny

Statyczny model układu jest uproszczeniem modelu dynamicznego, to uproszczenie może być dokonane na etapie konstruowania modelu lub jako uproszczenie równań modelu.

Charakterystyka statyczna jest to przedstawienie w sposób graficzny zależności między danymi wejściowymi i wyjściowymi w modelu statycznym. Interpretacja modelu fizycznego prowadzi do ustalenia, które zmienne traktować jako wejście, a które jako wyjście. Wejście jest niezależne od stanu obiektu, natomiast wyjście jest efektem pracy układu.

3 Rozwiązywanie układu równań metodą algebraiczną

3.1 Ze względu współczynniki K

$$1 \begin{cases} 0 = q_g - K_{cw}(T_{wew} - T_{zew}) - K_{cwp}(T_{wew} - T_p) \\ 0 = K_{cwp}(T_{wew} - T_p) - K_{cp}(T_p - T_{zew}) \end{cases}$$

Oraz:

$$K_{cwp} = 0.25K_{cp}$$

I)

$$q_g = K_{cw}(T_{wew} - T_{zew}) + 0.25K_{cw}(T_{wew} - T_p)$$

$$q_g = K_{cw}(1.25T_{wew} - T_{zew} - 0.25T_p)$$

$$K_{cw} = \frac{q_g}{1.25T_{wew} - T_{zew} - 0.25T_p}$$

II)

$$0 = K_{cwp}(T_{wew} - T_p) - K_{cp}(T_p - T_{zew})$$

$$K_{cp} = K_{cwp} \frac{(T_{wew} - T_p)}{(T_p - T_{zew})}$$

$$K_{cp} = 0.25K_{cw} \frac{(T_{wew} - T_p)}{(T_p - T_{zew})}$$

III)

$$K_{cwp} = 0.25K_{cw}$$

Dla stałych wartości: $q_g = 1000W$; $T_{wew} = 20^\circ C$; $T_{zew} = -20^\circ C$; $T_p = 10^\circ C$
wyliczone współczynniki mają wartość:

$$K_{cw} = 23.529$$

$$K_{cp} = 1,96$$

$$K_{cwp} = 5,88$$

3.2 Ze względu na T_{wew} i T_p

$$2 \begin{cases} 0 = q_g - K_{cw}(T_{wew} - T_{zew}) - K_{cwp}(T_{wew} - T_p) \\ 0 = K_{cwp}(T_{wew} - T_p) - K_{cp}(T_p - T_{zew}) \end{cases}$$

Oraz:

$$T_{zew} = -20^\circ C$$

I)

$$0 = q_g - K_{cw}(T_{wew} - T_{zew}) - K_{cwp}(T_{wew} - T_p)$$

$$0 = q_g - K_{cw}T_{wew} + K_{cw}T_{zew} - K_{cwp}T_{wew} + K_{cwp}T_p$$

$$q_g + K_{cw}T_{zew} + K_{cwp}T_p = T_{wew}(K_{cw} + K_{cwp})$$

$$T_{zew} = \frac{q_g + K_{cw}T_{zew} + K_{cwp}T_p}{K_{cw} + K_{cwp}}$$

II)

$$\begin{aligned} 0 &= K_{cwp}(T_{zew} - T_p) - K_{cp}(T_p - T_{zew}) \\ 0 &= K_{cwp}T_{zew} - K_{cwp}T_p - K_{cp}T_p + K_{cp}T_{zew} \\ T_p(K_{cp} + K_{cwp}) &= K_{cp}T_{zew} + K_{cwp}T_{zew} \\ T_p &= \frac{K_{cp}T_{zew} + K_{cwp}T_{zew}}{K_{cp} + K_{cwp}} \end{aligned}$$

Po podstawienie T_{zew} z poprzedniego równania mamy

$$T_p = \frac{K_{cp}T_{zew} + K_{cwp} \frac{q_g + K_{cw}T_{zew} + K_{cwp}T_p}{K_{cw} + K_{cwp}}}{K_{cp} + K_{cwp}}$$

Po przekształceniach i wyznaczeniu z równia II T_p otrzymujemy:

$$T_p = \frac{K_{cp}T_{zew}(K_{cw}K_{cwp}) + K_{cwp}(q_g + K_{cw}T_{zew})}{(K_{cp} + K_{cwp})(K_{cw} + K_{cwp}) - K_{cwp}^2}$$

Po podstawieniu danych: $T_{zew} = -20^\circ C$; $q_g = 1000W$; $K_{cw} = 23.529$; $K_{cp} = 1,96$; $K_{cwp} = 5,88$ wyniki wynoszą:

$$T_{zew} = 20^\circ C$$

$$T_p = 10^\circ C$$

```
%algebraiczne rozwiązanie Modelu Domu z grzejnikiem
%ze względu na współczynniki K
qg=1000;
Tzew=-20;
Twew=20;
Tp=10;

%ze względu na współczynniki K
Kcw=qg/(1.25*Twew-Tzew-0.25*Tp)
Kcp=(0.25*Kcw*(Twew-Tp))/(Tp-Tzew)
Kcwp=0.25*Kcw

%ze względu na Twew i Tp
Tp=(Kcp*Tzew*(Kcw+Kcwp)+Kcwp*(qg+Kcw*Tzew))/((Kcp+Kcwp)*(Kcw+Kcwp)-Kcwp^2)
```

Rysunek 2: Kod programu, punkt 3

4 Rozwiązanie układu metodą macierzową

4.1 Ze względu na współczynniki K

Aby wyznaczyć współczynniki charakteryzujące szybkość oddawania ciepła przez ścianę, trzeba na samym początku uporządkować równanie:

$$1 \begin{cases} 0 = q_g - K_{cw}(T_{wew} - T_{zew}) - K_{cwp}(T_{wew} - T_p) \\ 0 = K_{cwp}(T_{wew} - T_p) - K_{cp}(T_p - T_{zew}) \end{cases}$$

Ponieważ $K_{cwp} = 0,25K_{cw}$

$$2 \begin{cases} q_g = K_{cw}(T_{wew} - T_{zew}) + 0,25K_{cw}(T_{wew} - T_p) \\ 0 = 0,25K_{cw}(T_{wew} - T_p) - K_{cp}(T_p - T_{zew}) \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} q_g = K_{cw}(1,25T_{wew} - T_{zew} - 0,25T_p) \\ 0 = 0,25K_{cw}(T_{wew} - T_p) - K_{cp}(T_p - T_{zew}) \end{cases}$$

kolejnym krokiem jest zbudowanie odpowiednich macierzy i zależności między nimi

W = kolumna wyrazów wolnych

C = macierz współczynników

X = kolumna niewiadomych

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} q_p \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1,25T_{wew} - T_{zew} - 0,25T_p & 0 \\ T_{wew} - T_p & T_p - T_{zew} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} K_{cw} \\ K_{cp} \end{pmatrix}$$

Zależność macierzowa:

$$W = CX$$

$$\Downarrow$$

$$X = C^{-1}W$$

Operacja zrealizowana w programie MATLAB:

Wynik działania kodu:

```

1 - clear
2 - Qp=1000
3 - Tzew=-20
4 - Twew=20
5 - Tp=10
6
7 %Obliczanie macierzowo wspolczynnikow Kcw Kcwp Kcp
8 - W=[Qp ; 0]
9 - C=[ 1.25*Twew-Tzew-0.25*Tp, 0 ; 0.25*Twew-0.25*Tp, -Tp+Tzew]
10 - X=inv(C)*W
11
12
13 %Przypisanie wartosci kolumny niewiadomych do odpowiednich wielkosci
14 - Kcw=X(1,1)
15 - Kcp=X(2,1)
16 - Kcwp=0.25*Kcw

```

Kcw =	Kcwp =	W =
23.5294	5.8824	1000
		0
Kcp =	C =	X =
1.9608	42.5000 0	23.5294
	2.5000 -30.0000	1.9608

4.2 Ze względu na temperature

Kolejnym celem jest wyznaczenie temperatury sposobem macierzowym. Proces realizacji tego etapu wygląda analogicznie jak w przypadku wyznaczania stałych K. T_{wew} oraz T_p są zmiennymi wejściowymi.

$$1 \begin{cases} 0 = q_g - K_{cw}(T_{wew} - T_{zew}) - K_{cwp}(T_{wew} - T_p) \\ 0 = K_{cwp}(T_{wew} - T_p) - K_{cp}(T_p - T_{zew}) \end{cases}$$

$$2 \begin{cases} q_g = K_{cw}T_{wew} - K_{cw}T_{zew} + 0,25K_{cw}T_{wew} - 0,25K_{cw}T_p \\ 0 = 0,25K_{cw}T_{wew} - 0,25K_{cw}T_p - K_{cp}T_p + K_{cp}T_{zew} \end{cases}$$

$$3 \begin{cases} q_g + K_{cw}T_{zew} = T_{wew}(1,25K_{cw}) + T_p(-0,25K_{cw}) \\ -K_{cp}T_{zew} = T_{wew}(0,25K_{cw}) + T_p(-0,25K_{cw} - K_{cp}) \end{cases}$$

Na podstawie powyższego układu równań w łatwy sposób możemy zbudować macierz i kolumny potrzebne do wyliczenia temperatur.

W_T = kolumna wyrazów wolnych

C_T = macierz współczynników

X_T = kolumna niewiadomych

$$\mathbf{W}_T = \begin{pmatrix} q_g + K_{cw}T_{zew} \\ -K_{cp}T_{zew} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_T = \begin{pmatrix} 1,25K_{cw} & -0,25K_{cw} \\ 0,25K_{cw} & -0,25K_{cw} - K_{cp} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X}_T = \begin{pmatrix} T_{zew} \\ T_p \end{pmatrix}$$

Relacja Macierzowa:

$$W_T = C_T X_T$$

⇓

$$X_T = C_T^{-1} W_T$$

Operacja zrealizowana w programie MATLAB:

```

18
19 %Obliczanie temperatur macierzowo
20 - WT=[Qp+Kcw*Tzew ; -Tzew*Kcp]
21 - CT=[1.25*Kcw, -0.25*Kcw; 0.25*Kcw, -0.25*Kcw-Kcp]
22 - XT=inv(CT)*WT
23

```

Command Window

XT =

20.0000

10.0000

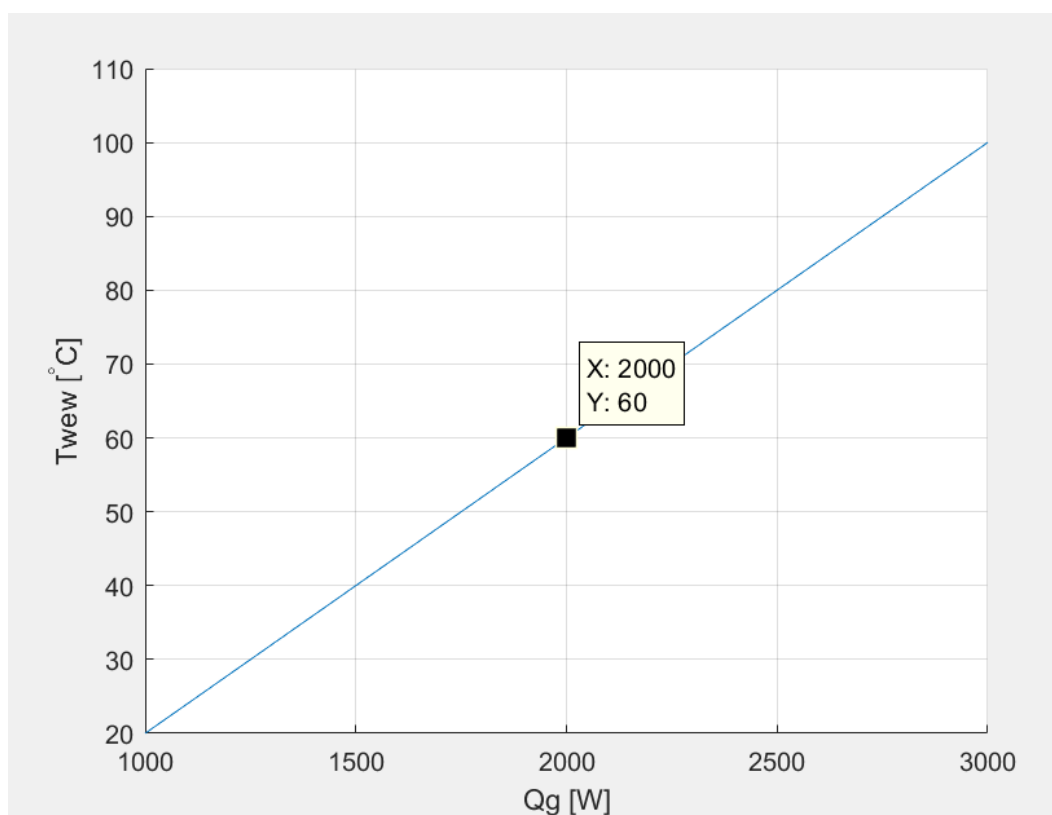
fx >>

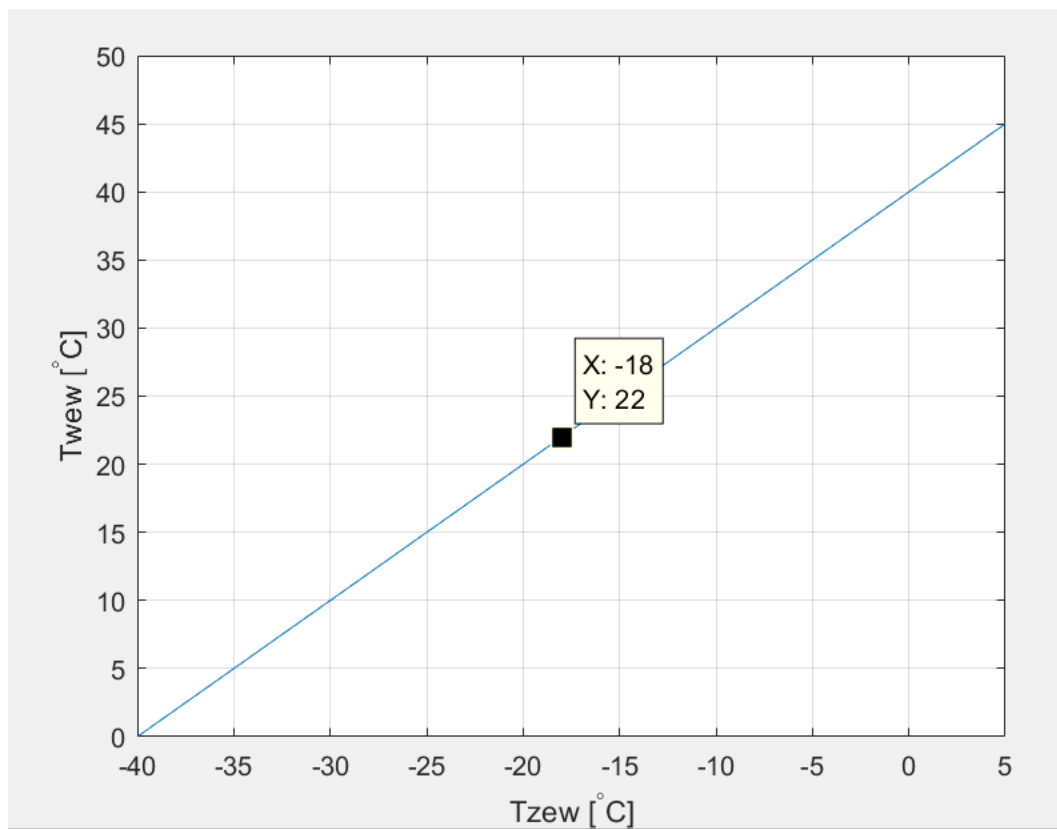
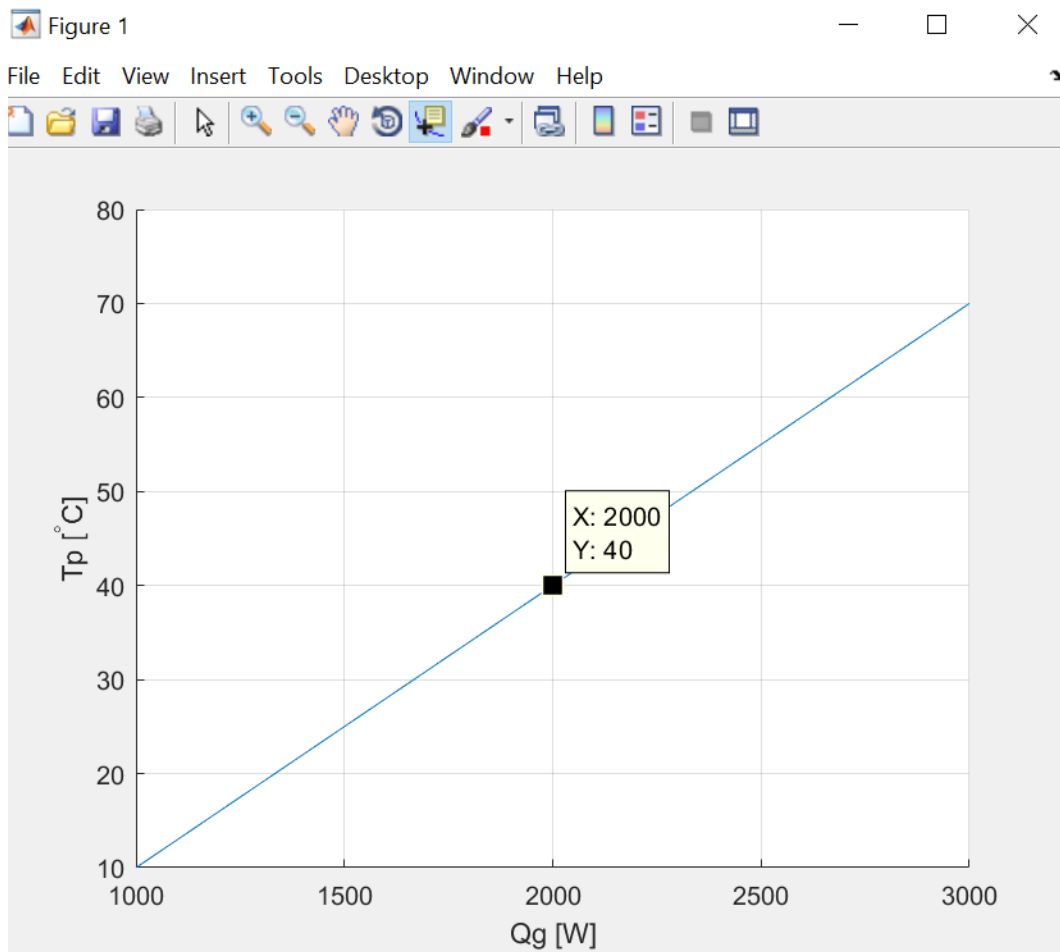
5 Charakterystyki statyczne

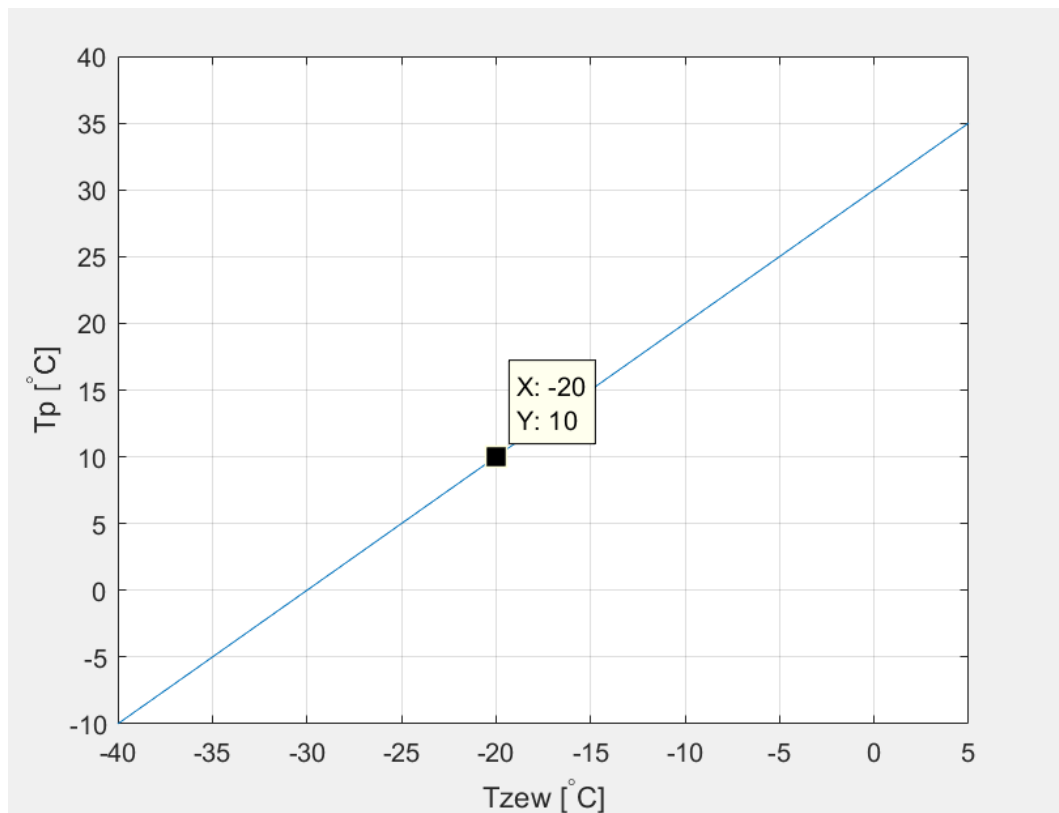
Charakterystyki statyczne zostały wykonane w programie MATLAB przy użyciu funkcji plot. Efekt został pokazany na obrazkach na ostatnich stronach

6 Wnioski

Charakterystyka statyczna jest podstawowym działaniem przy opisie modelu matematycznego, który charakteryzuje jakieś zjawisko fizyczne, obiekt lub proces. Termin ten jest związany z statycznym modelem. Układ, który jest w rzeczywistości obiektem zmieniającym się w dynamiczny sposób można uprościć do obiektu statycznego. Celem takiego zabiegu jest zrozumienie podstawowych własności obiektu i powierzchniowa analiza jego zachowania, pomijamy sposób dojścia do określonego stanu. Charakterystyka statyczna pozwala nam określić jaki będzie efekt końcowy (wyjście) na zadaną wielkość (wejście).







```

1 - clear
2 - Qp=1000
3 - Tzew=-20
4 - Twew=20
5 - Tp=10
6
7 - %Obliczanie macierzowo wspolczynikow Kcw Kcwp Kcp
8 - W1=[Qp ; 0]
9 - C1=[ 1.25*Twew-Tzew-0.25*Tp, 0 ; 0.25*Twew-0.25*Tp, -Tp+Tzew]
10 - K=inv(C1)*W1
11
12
13 - %Przypisanie wartosci kolumny niewiadomych do odpowiednich wielkosci
14 - Kcw=K(1,1)
15 - Kcp=K(2,1)
16 - Kcwp=0.25*Kcw
17
18
19 - %Obliczanie temperatur macierzowo
20 - W2=[Qp+Kcw*Tzew ; -Tzew*Kcp]
21 - C2=[1.25*Kcw, -0.25*Kcw; 0.25*Kcw, -0.25*Kcw-Kcp]
22 - T=inv(C2)*W2
23
24
25 - %Charakterystyka statyczna
26 - Qp=1000:10:3000
27 - hold on
28
29 - for i=1:length(Qp)
30
31 -     W2=[Qp(i)+Kcw*Tzew ; -Tzew*Kcp]
32 -     C2=[1.25*Kcw, -0.25*Kcw; 0.25*Kcw, -0.25*Kcw-Kcp]
33 -     T=inv(C2)*W2
34 -     Twew(i)=T(1,1)
35 -     Tp(i)=T(2,1)
36 - end
37 - figure(1);
38
39
40 - plot(Qp,Twew);
41 - ylabel('Twew [^\circ C]');
42 - xlabel('Qg [W]');
43 - grid on
44
45
46 - figure(2);

```

```

49 - ylabel('Tp [\circ C] ');
50 - xlabel('Qg [W] ');
51 - grid on
52
53
54
55 - Qp=1000
56 - Tzew=-40:1:5
57 - Twew=0
58 - Tp=0
59 - for i=1:length(Tzew)
60
61 - W2=[Qp+Kcw*Tzew(i) ; -Tzew(i)*Kcp]
62 - C2=[1.25*Kcw, -0.25*Kcw; 0.25*Kcw, -0.25*Kcw-Kcp]
63 - T=inv(C2)*W2
64 - Twew(i)=T(1,1)
65 - Tp(i)=T(2,1)
66 - end
67
68 - figure(3)
69
70 - plot(Tzew,Twew)
71 - ylabel('Twew [\circ C] ');
72 - xlabel('Tzew [\circ C] ');
73 - grid on
74
75 - figure(4)
76
77 - plot(Tzew,Tp)
78 - ylabel('Tp [\circ C] ');
79 - xlabel('Tzew [\circ C] ');
80 - grid on
81
82 - hold off
83
84

```