LISTA04: Podstawowe człony (obiekty) dynamiki

Przygotowanie

1) Wymień i opisz własności podstawowych członów (obiekty) dynamiki – postać transmitancji, nazwy i ograniczenia parametrów
2) Wymień podstawowe człony dynamiki dla których transmitancja jest funkcją wymierną
3) Przedstaw następujące transmitancje: a) model Küpfmüllera; b) model Strejca;
4) Na czym polega, gdzie jest stosowany: a) rozkład transmitancji na ułamki proste; b) rozkład transmitancji na podstawowe człony (iloczyn podstawowych członów)

Zadania 1 - na podstawie transmitancji wyznacz parametry

Ogólnie polecenia typu:

a) Przedstaw obiekt w postaci podstawowych członów dynamiki - rozłóż model na podstawowe człony dynamiki.
b) Podaj parametry członów (stałe czasowe, wzmocnienie członu, tłumienie, pulsację drgań, itp.).
c) Podaj wzmocnienie układu,
d) Podaj punkt równowagi - przy skoku jednostkowym, przy wymuszeniu impulsowym, dla stałego wymuszenia $u(t)=u_0$.

Przykłady szczegółowe:

1) Wykonaj polecenia a÷d dla następujących obiektów:
$$\frac{2}{3s+2},\ \frac{1}{2s^2+10s+4},\ \frac{a}{s^2+3s},\ \frac{1}{2s^2+5s+4},\ \frac{1}{2s^2+9s+4}$$
2) Dla obiektu $10\ddot{x}+7\dot{x}+x=2u$ podaj stałe czasowe, wzmocnienie układu i punkt równowagi dla skoku jednostkowego
3) Jakie stałe czasowe, wzmocnienie i stan ustalony dla u=2 ma obiekt opisany równaniem $4\ddot{x}+9\dot{x}+2x=6u$
4) Podaj wartość stałych czasowych, wzmocnienia i punkt równowagi przy wymuszeniu impulsowym dla $2\ddot{x}+7\dot{x}+3x=10u$
5) Rozłóż na podstawowe człony i podaj ich parametry $2\ddot{x}+7\dot{x}+3x=12u$
6) Przedstaw w postaci członów inercyjnych $3\ddot{x}+7\dot{x}+2x=6u$
7) Podaj stałe czasowe i wzmocnienie dla $4\ddot{x}+21\dot{x}+5x=10u$
8) Przedstaw $6\ddot{x}+13\dot{x}+2x=3u$ w postaci podstawowych członów
9) Podaj stałe czasowe, wzmocnienie i punkt równowagi przy wymuszeniu u=2 dla obiektu o transmitancji $\frac{2}{3s^2+7s+2}$
10) Przedstaw w postaci członu inercyjnego 2 rzędu $\frac{10s}{4s^2+21s+5}$. Wyznacz stan ustalony dla u=2.
11) Rozłóż na podstawowe człony i podaj ich parametry $\frac{28}{2s^3+9s^2+4s}$
12) Rozłóż na podstawowe człony i podaj parametry $\ddot{x}+4\dot{x}+8x=32u$

W odpowiedzi należy podać postać członu oraz wymienić wartości parametrów

Zadania 2 - na podstawie parametrów wyznacz transmitancję

a) Przed wyznaczeniem modelu określ jego własności – czego się należy się spodziewać na podstawie podanych własności, np. którego rzędu jest układ, jakie ma tłumienie ($\xi<0$ czy $\xi>0$, $\xi<1$ czy $\xi>1$), stabilność, oscylacje, ...
b) Przedstaw model w postaci transmitancji.
c) Wyznacz podstawowe człony dynamiki i podaj właściwe parametry (stałe czasowe, tłumienie układu, okres lub pulsację drgań własnych, ...).

Przykłady:

1) Układ ma dwa bieguny: -10 i -2.
2) Układ ma parę biegunów: -3±j2.
3) Układ ma podwójny biegun: -2, a dla u=5, jest w stanie równowagi na poziomie 10.

4) Układ ma podwójny biegun: -2, a wzmocnienie układu wynosi 10.
5) Układ dwa bieguny $s_1 = -2$, $s_2 = -½$, a jego wzmocnienie wynosi 3.
6) Układ ma biegun -2 i -1/5. Wzmocnienie układu wynosi 4.
7) Układ ma parę biegunów $s_{1,2} = -2 \pm j2$ i wzmocnienie równe 4. Podaj stałe czasowe, tłumienie i okres drgań własnych.
8) Układ ma podwójny biegun = -½, a przy wymuszeniu 2 stan równowagi wynosi 2. Przedstaw model w postaci członu oscylacyjnego i podaj tłumienie i okres drgań własnych układu.
9) Układ ma stałe czasowe = ½ i 6, wzmocnienie układu wynosi 3/2

Zadania 3 – Porównywanie modeli na podstawie parametrów
Porównaj własności przedstawionych układów, tzn.:
a) Który z układów szybciej się ustabilizuje?
b) Który z układów ma większe wzmocnienie?

Przykłady:

1) $\dfrac{6}{7s+2}$ i $\dfrac{3}{4s+1}$

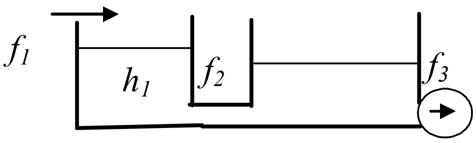
2) $\dfrac{1}{s^2+3s+2}$ i $\dfrac{3}{s^2+6s+8}$ 3) $\dfrac{1}{s^2+3s+2}$ i $\dfrac{3}{s^2+2s+13}$

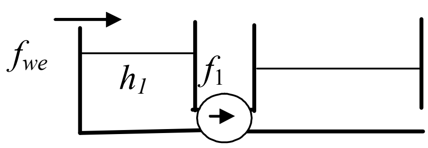
Zadania 4 - Upraszczanie modeli
a) Zaproponuj uproszczenie modelu (jeśli to możliwe)
b) Sprawdź czy operacja została wykonana poprawnie

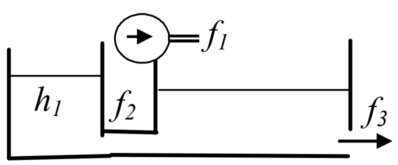
1) $\dfrac{a}{(s+10)(s+2)}$,   2) $\dfrac{1}{s^2+3s+2}$, 3) $\dfrac{3}{s^2+6s+8}$, 4) $\dfrac{3}{s^2+2s+13}$

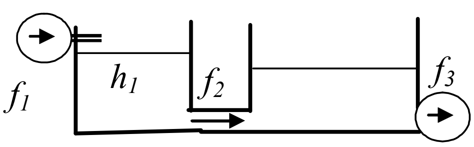
Zadania 5. Zastosowanie podstawowych członów dynamiki w modelach obiektów
Wykorzystaj zlinearyzowane modele podanych przykładów kaskad zbiorników
a) Przedstaw model kaskady w postaci członu oscylacyjnego.
b) Czy kaskadę można przedstawić w postaci członu inercyjnego?

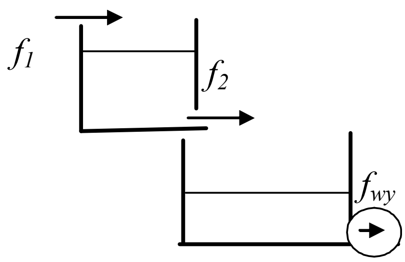
Przykłady:

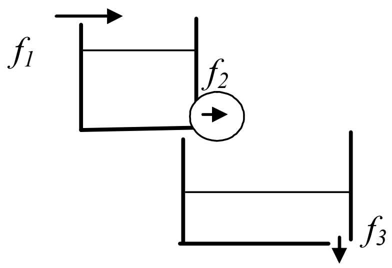
1)


2)


3)


4)


5)


6)


<u>Rozwiązania, uwagi i podpowiedzi:</u>

- W odpowiedziach zastosowano następujące oznaczenia:
  T_1, T_2 – stałe czasowe, T_d – czas różniczkowania, T_i – czas całkowania
  T – okres drgań (okres drgań własnych niettłumionych),
  ω – pulsacja drgań (pulsacja drgań własnych niettłumionych),
  ξ – tłumienie (dokładnie - współczynnik tłumienia względnego),
  k - wzmocnienie członu (ogólnie),
  k_u – wzmocnienie układu (nie zależy od postaci transmitancji),
  x_0 – punkt równowagi przy zadanym wymuszeniu (stan ustalony).
- Jeśli jest pytanie o wzmocnienie to dotyczy całego układu (wzmocnienie układu przy stałym wymuszeniu). Natomiast pytanie o współczynnik wzmocnienia członu dynamiki oznacza współczynnik k występujący w danej postaci członu dynamiki, np:
  $\frac{k}{T_1 s+1}$, $\frac{k}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$, $\frac{k}{T_n^2 s^2+2\xi T_n s+1}$
- Jeśli jest pytanie o stałe czasowe to wiadomo, że chodzi o człony inercyjne. Parametr T w członie oscylacyjnym to okres drgań własnych (a nie stała czasowa)
- Jeśli należy rozłożyć na podstawowe człony i może to być człony inercyjny lub oscylacyjny, to przedstawiamy obie możliwości
- Dobra odpowiedź to prawidłowy wynik i metoda rozwiązania (nawet w prostych przykładach podajemy metodę).

<u>Rozwiązanie zadań 1 – przykład 1</u>

$\frac{2}{3s+2}$	$\frac{1}{2s^2+10s+4}$	$\frac{a}{s^2+3s}$

a) Przedstaw obiekt w postaci podstawowych członów dynamiki - rozłóż model na podstawowe człony dynamiki

b) Podaj parametry członów (stałe czasowe, wzmocnienie członu, tłumienie, pulsacja, itp.).

$\frac{2}{3s+2}=\frac{2}{2\left(\frac{3}{2}s+1\right)}=\frac{1}{1.5s+1}$ Cz. inercyjny $\frac{k}{T_1 s+1}$ $\boldsymbol{T_1}$=1.5; $\boldsymbol{k}$=1	$\frac{1}{2s^2+10s+4}=\frac{1}{2\left(s^2+5s+2\right)}$ Cz. oscylacyjny $\frac{k}{s^2+2\xi\omega_n\,s+\omega_n^2}$ $\boldsymbol{\omega_n}=\sqrt{2}$, $2\xi\omega_n=5$ $\xi=\frac{5}{2\omega_n}=\frac{5}{2\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\quad>1$ $\boldsymbol{k}=0.5$	$\frac{a}{s^2+3s}=\frac{a}{s(s+3)}=\frac{a}{3s\left(\frac{1}{3}s+1\right)}$ Cz. całkujący i inercyjny $\frac{1}{T_i s}\cdot\frac{k}{T_1 s+1}$ $\boldsymbol{T_i}=3$; $\boldsymbol{T_1}=1/3$; $\boldsymbol{k}=a$ lub $\boldsymbol{T_i}=1$; $\boldsymbol{T_1}=1/3$; $\boldsymbol{k}=a/3$
	$\frac{1}{2s^2+10s+4}=\frac{1}{4\left(\frac{1}{2}s^2+\frac{10}{4}s+1\right)}$ Cz. oscylacyjny $\frac{k}{T_n^2 s^2+2\xi T_n\,s+1}$ $\boldsymbol{T_n}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\omega_n}$, $2\xi\,T_n=\frac{5}{2}$ $\xi=\frac{5}{4\cdot 1/\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{4}\quad>1$ $\boldsymbol{k}=0.25$	Cz. całkujący, inercyjny i proporcjonalny $\frac{1}{T_i s}\cdot\frac{k}{T_1 s+1}\cdot k_p$ $\boldsymbol{T_i}=1$; $\boldsymbol{T_1}=1/3$; $\boldsymbol{k}=1$; $\boldsymbol{k_p}=a/3$

Ponieważ w przypadku $\frac{1}{2s^2+10s+4}$ jest $\xi \ge 1$, więc możliwe jest także drugie rozwiązanie:

$$\frac{1}{2s^2+10s+4}=\frac{1}{2(s-s_1)(s-s_2)}, \qquad \text{gdzie} \quad s_{1,2}=\frac{-10\pm\sqrt{68}}{4}=\frac{-10\pm2\sqrt{17}}{4}\rightarrow$$

$$\rightarrow s_1=\frac{-5-\sqrt{17}}{2},\ s_2=\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$$

$$=\frac{1}{2\left(s+\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(s+\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right)}=\frac{1}{2\cdot\frac{5+\sqrt{17}}{2}\cdot\frac{5-\sqrt{17}}{2}\left(\frac{2}{5+\sqrt{17}}s+1\right)\left(\frac{2}{5-\sqrt{17}}s+1\right)}$$

Cz. inercyjny 2.rzędu $\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}$, gdzie $\boldsymbol{T_1}=\frac{2}{5+\sqrt{17}}$; $\boldsymbol{T_2}=\frac{2}{5-\sqrt{17}}$;

$$\boldsymbol{k}=\frac{2}{(5+\sqrt{17})(5-\sqrt{17})}=\frac{2}{5^2-\sqrt{17}^2}=\frac{2}{25-17}=\frac{2}{8}=0.25$$

Warto sprawdzić przekształcenie: $\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{k}{T_1T_2s^2+(T_1+T_2)s+1}=\frac{1}{4\left(\frac{1}{2}s^2+\frac{5}{2}s+1\right)}$

$$T_1T_2=\frac{2}{5+\sqrt{17}}\frac{2}{5-\sqrt{17}}=\frac{4}{5^2-\sqrt{17}^2}=\frac{4}{25-17}=\frac{4}{8}=0.5$$

$$T_1+T_2=\frac{2}{5+\sqrt{17}}+\frac{2}{5-\sqrt{17}}=2\frac{5-\sqrt{17}+5+\sqrt{17}}{(5+\sqrt{17})(5-\sqrt{17})}=2\frac{10}{5^2-\sqrt{17}^2}=\frac{20}{25-17}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

c) Podaj wzmocnienie układu

$\lim_{s\to0}s\frac{2}{3s+2}\frac{1}{s}=\lim_{s\to0}\frac{2}{3s+2}=1$	$\lim_{s\to0}s\frac{1}{2s^2+10s+4}\frac{1}{s}=0.25$	Układ całkujący – nie ma wzmocnienia (przy stałym wymuszeniu brak stanu równow.). Gdyby jednak było liczone to otrzymamy $\lim_{s\to0}s\frac{a}{s^2+3s}\frac{1}{s}=\infty$
$\lim_{s\to0}s\frac{1}{1.5s+1}\frac{1}{s}=\lim_{s\to0}\frac{1}{1.5s+1}=1$	$\lim_{s\to0}s\frac{1}{2(s^2+5s+2)}\frac{1}{s}=0.25$	
	$\lim_{s\to0}s\frac{k}{(T_1s+1)(T_2s+1)}\frac{1}{s}=k=0.25$	

Wzmocnienie układu nie zależy od postaci transmitancji, co można wykorzystać do sprawdzenia przekształceń (rozłożenia na podstawowe człony dynamiki).

d) Podaj punkt równowagi:

- przy skoku jednostkowym $\rightarrow u(t)=1(t)\rightarrow u(s)=1/s$,
- przy wymuszeniu impulsowym $\rightarrow u(t)=\delta(t)\rightarrow u(s)=1$,
- dla stałego wymuszenia $u(t)=u_0\rightarrow u(s)=u_0/s$.

$\lim_{s\to0}s\frac{2}{3s+2}\frac{1}{s}=1$	$\lim_{s\to0}s\frac{1}{2s^2+10s+4}\frac{1}{s}=0.25$	$\lim_{s\to0}s\frac{a}{s^2+3s}\frac{1}{s}=\infty$, brak
$\lim_{s\to0}s\frac{2}{3s+2}1=0$	$\lim_{s\to0}s\frac{1}{2s^2+10s+4}1=0$	$\lim_{s\to0}s\frac{a}{s^2+3s}1=a/3$
$\lim_{s\to0}s\frac{2}{3s+2}\frac{u_0}{s}=u_0$	$\lim_{s\to0}s\frac{1}{2s^2+10s+4}\frac{u_0}{s}=0.25u_0$	$\lim_{s\to0}s\frac{a}{s^2+3s}\frac{u_0}{s}=\infty$, brak

Wynik nie zależy od postaci transmitancji (można wykorzystać przy sprawdzaniu przekształceń)

Rozwiązanie zadanie 2 – przykład 1

Układ ma dwa bieguny: -10 i -2.

Stąd przewidywane własności - układ 2.rzędu, stabilny, bez oscylacji, tłumienie ξ>1

Transmitancja: $$\frac{a}{(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{a}{(s-(-10))(s-(-2))}=\frac{a}{(s+10)(s+2)}$$

gdzie a – dowolne wzmocnienie (nie można określić wartości)

Rozkład na człony (1): $$\frac{a}{(s+10)(s+2)}=\frac{a}{20\left(\frac{1}{10}s+1\right)\left(\frac{1}{2}s+1\right)}\rightarrow \boldsymbol{T_1}=0.1,\ \boldsymbol{T_2}=0.5,\ \boldsymbol{k}=a/20$$

Rozkład na człony (2): $$\frac{a}{(s+10)(s+2)}=\frac{a}{s^2+12s+20}\rightarrow \boldsymbol{\omega_n}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$$

$$2\xi\omega_n=12\rightarrow \xi=\frac{12}{2\cdot 2\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\quad >1$$

Parametry: stałe czasowe 0.1 i 0.5, wzmocnienie układu a/20, tłumienie $3/\sqrt{5}$

Rozwiązanie zadanie 2 – przykład 2

Układ ma parę biegunów: -3±j2.

Stąd przewidywane własności - układ 2.rzędu, stabilny, z oscylacjami, tłumienie 0<ξ<1

Transmitancja: $$\frac{a}{(s-s_1)(s-s_2)}=\frac{a}{(s-(-3+j2))(s-(-3-j2))}=\frac{a}{(s+3-j2)(s+3+j2)}=$$

$$=\frac{a}{(s+3)^2-(j2)^2}=\frac{a}{s^2+6s+9+4}=\frac{a}{s^2+6s+13}$$

gdzie a – dowolne wzmocnienie (nie można określić wartości)

Rozkład na człony: $$\frac{a}{s^2+6s+13}\quad\rightarrow \boldsymbol{\omega_n}=\sqrt{13}$$

$$2\xi\omega_n=6\rightarrow \xi=\frac{6}{2\cdot\sqrt{13}}=\frac{3}{\sqrt{13}}\quad <1$$

Parametry: stałe czasowe – nie ma, wzmocnienie układu a/13, tłumienie $3/\sqrt{13}$

Rozwiązanie zadanie 2 – przykład 3

Układ ma podwójny biegun: -2

Stąd przewidywane własności - układ 2.rzędu, stabilny, bez oscylacji, tłumienie ξ=1

Postać transmitancji: $$\frac{a}{(s-s_1)^2}=\frac{a}{(s+2)^2}$$

Dla *u*=5, jest w stanie równowagi na poziomie 10.

Stąd $$\lim_{s\to 0} s\frac{a}{(s+2)^2}\frac{5}{s}=10\qquad\rightarrow\frac{5a}{4}=10\rightarrow\quad a=8$$

Transmitancja ostatecznie: $$\frac{8}{(s+2)^2}$$

Sprawdzenie: $$\lim_{s\to 0} s\frac{8}{(s+2)^2}\frac{5}{s}=\frac{40}{4}=10$$

Rozkład na człony (1): $$\frac{8}{(s+2)^2}=\frac{8}{4\left(\frac{1}{2}s+1\right)^2}=\frac{2}{(0.5s+1)^2}\rightarrow \boldsymbol{T_{1,2}}=0.5,\ \boldsymbol{k}=2$$

Rozkład na człony (2): $$\frac{8}{(s+2)^2}=\frac{8}{s^2+4s+4}\rightarrow \boldsymbol{\omega_n}=\sqrt{4}=2$$

$$2\xi\omega_n=4\rightarrow \xi=1$$

Parametry: stałe czasowe – 0.5, wzmocnienie układu 2, tłumienie 1

Rozwiązanie zadanie 2 – p rzykład 4

Układ ma podwójny biegun: -2.

Postać transmitancji: $\frac{a}{(s-s_1)^2}=\frac{a}{(s+2)^2}$

Wzmocnienie układu wynosi 10.

Stąd $\lim_{s\to 0} s\frac{a}{(s+2)^2}\frac{1}{s}=10 \quad \to \frac{a}{4}=10 \to \ a=40$

Transmitancja ostatecznie: $\frac{40}{(s+2)^2}$

Rozwiązanie zadanie 4 – przykład 1

Uprościć $\frac{a}{(s+10)(s+2)}$. Są dwa bieguny **-10 i -2**. Mniej znaczący jest biegun -10.

Propozycja uproszczenia: $\frac{a}{(s+10)(s+2)}\approx\frac{a}{(s+2)}k$

Stan ustalony dla $1(t)$: $\lim_{s\to 0} s\frac{a}{(s+10)(s+2)}\frac{1}{s}=\frac{a}{20} \qquad \lim_{s\to 0} s\frac{a}{(s+2)}\frac{1}{s}=\frac{a}{2}$

Stąd korekta k=0.1

Ostatecznie: $\frac{a}{(s+10)(s+2)}\approx\frac{a}{10(s+2)}$

Sprawdzenie dla $1(t)$: $\lim_{s\to 0} s\frac{a}{(s+10)(s+2)}\frac{1}{s}=\frac{a}{20} \qquad \lim_{s\to 0} s\frac{a}{10(s+2)}\frac{1}{s}=\frac{a}{20}$

Sprawdzenie (część odpowiedzi):

Zadania 1

1)
2) Stałe czasowe = 2 i 5 , wzmocnienie = 2, dla u=1(t) punkt równowagi = 2
3) Stałe czasowe = ½ i 4 , wzmocnienie = 3, dla u=2 stan ustalony = 6
4) Stałe czasowe = 1/3 i 2 , wzmocnienie = 10/3, dla u=δ(t) punkt równowagi = 0
5) Człon inercyjny 2-ego rzędu o stałych czasowych = 1/3 i 2 oraz wzmocnieniu = 4,
   lub człon oscylacyjny o pulsacji = $\sqrt{3/2}$, tłumieniu = $7/4\sqrt{2/3} = 7/(2\sqrt{6})$, współczynniku wzmocnienia członu oscylacyjnego = 6 (wzmocnienie układu = 4)
   lub człon oscylacyjny o okresie drgań = $\sqrt{2/3}$, tłumieniu = $7/4\sqrt{2/3} = 7/(2\sqrt{6})$, współczynniku wzmocnienia członu oscylacyjnego = 4 (wzmocnienie układu = 4)

6) Stałe czasowe = ½ i 3, wzmocnienie członu = 3
7) Stałe czasowe = 1/5 i 4, wzmocnienie członu = 2
8) Stałe czasowe = ½ i 6, wzmocnienie =3/2 lub ...
9) Stałe czasowe = ½ i 3, wzmocnienie = 1, dla u=2 punkt równowagi = 2
10) Stałe czasowe = 1/5 i 4, wzmocnienie = 2, dla u=2 stan ustalony = 0
11) Człon inercyjny 2-ego rzędu o stałych czasowych = ¼ i 2 oraz wzmocnieniu = 7,
   lub człon oscylacyjny o pulsacji = $\sqrt{2}$, tłumieniu = $\frac{9}{4\sqrt{2}}$, współczynniku wzmocnienia członu oscylacyjnego = 14 (wzmocnienie układu = 7)
   lub człon oscylacyjny o okresie = $\sqrt{1/2}$, tłumieniu = $\frac{9}{4\sqrt{2}}$, współczynniku wzmocnienia członu oscylacyjnego = 7 (wzmocnienie układu = 7)

Zadania 2

5b) $\frac{6}{(s+2)(2s+1)}$, 6b) $\frac{8}{(s+2)(5s+1)}$, 7b) $\frac{32}{s^2+4s+8}$, 8b) $\frac{1}{(2s+1)^2}$, 9b) $\frac{3}{6s^2+13s+2}$

Zadania 3