## Równania stanu

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2 \\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1 \\ u_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

$\dot{x} = Ax + Bu$ równania stanu

$y = Cx + Du$ równania wyjściowe

1

## Równanie n-tego rzędu → układ n równań 1-ego rzędu

$$a_3\dddot{x}(t) + a_2\ddot{x}(t) + a_1\dot{x}(t) + a_0x(t) = u(t) \qquad a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

rząd ?

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ \dot{x}_1 &= x_2 &&= \dot{x} \\ \dot{x}_2 &= x_3 &&= \ddot{x} \\ \dot{x}_3 & &&= \dddot{x}\end{aligned}$$

$$a_3\dot{x}_3(t) + a_2x_3(t) + a_1x_2(t) + a_0x_1(t) = u(t)$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \left[u(t) - a_0x_1(t) - a_1x_2(t) - a_2x_3(t)\right]/a_3\end{cases}$$

rząd ?

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ \frac{-a_0}{a_3} & \frac{-a_1}{a_3} & \frac{-a_2}{a_3}-\lambda\end{vmatrix} = 0 \qquad a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0$$

stopień ?

2

## Badanie układów liniowych: 1) punkt równowagi

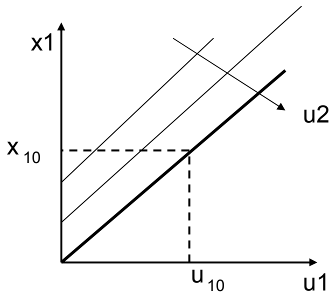
(składowa wymuszona przy stałym wymuszeniu)

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + a_{m-1} u^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$a_0 x = b_0 u$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \\ \dot{x}_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 \\ 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 \\ 0 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_{31}u_1 + b_{32}u_2 \end{cases}$$




charakterystyka statyczna
(punkt równowagi)

3

## Badanie układów liniowych: 2) stabilność

(składowa swobodna)

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = 0$$

Rozwiązanie swobodne:
- równanie charakterystyczne -> pierwiastki
- suma przebiegów wykładniczych
- przebiegi sin/cos z nałożonym przebiegiem wykładniczym
- układ jest stabilny jeśli Re($\lambda_i$) < 0

Równanie charakterystyczne – własności wielomianu

↓

kryteria położenia pierwiastków

↓

kryteria stabilności

4

## Kryteria stabilności

$$a_n\lambda^n + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

**kryterium Routha**

1) wszystkie współczynniki wielomianu są różne od zera i mają jednakowy znak, czyli

$a_i > 0$ , dla *i=0,1,...n*

2) wszystkie współczynniki pierwszej kolumny tablicy Routha są dodatnie:

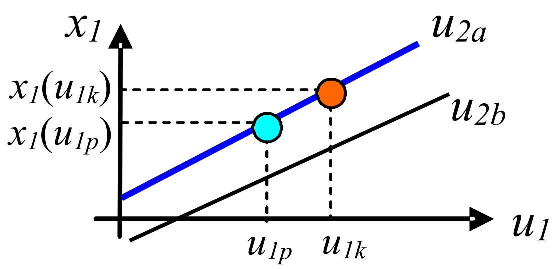
$$\begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ c_1 & c_2 & c_3 & \ldots \\ d_1 & d_2 & d_3 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{bmatrix} \quad b_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \quad b_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}} \quad b_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}}{-a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{-b_1} \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{-b_1}$$

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{-c_1}$$



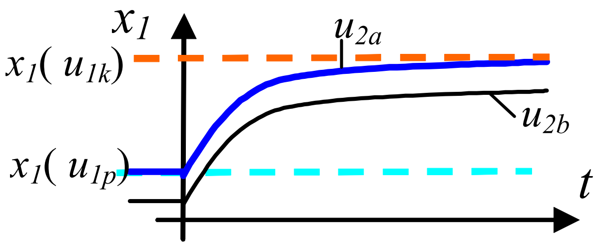
***Charakterystyki statyczne i dynamiczne (czasowe)***




$$x_1 = f(u_1, u_2)$$

$$x_1 = f_1(u_1);\ u_2 = u_{2a}$$

$$x_1 = f_2(u_1);\ u_2 = u_{2b}$$




***Eksperymentalne wyznaczanie charakterystyk czasowych***

## Transmitancja

$$a_n x^{(n)} + \ldots + a_1 \dot{x} + a_0 x = b_m u^{(m)} + \ldots + b_1 \dot{u} + b_0 u$$

$$a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

---

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_m u^{(m)}(t) + \ldots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t)$$

| | | |
|---|---|---|
| $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = f(s)$ | $\mathcal{L}\left[af(t)\right] = af(s)$ | $\mathcal{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sf(s) - f(0_+)$ |

$$a_n s^n X(s) + \ldots + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_m s^m U(s) + \ldots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

$$\left(a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0\right) X(s) = \left(b_m s^m + \ldots + b_1 s + b_0\right) U(s)$$

$$\boxed{G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \ldots + b_0}{a_n s^n + \ldots + a_0} = \frac{L(s)}{M(s)}}$$

## Transmitancja – równanie charakterystyczne

$$M(s) = 0$$

$$a_n s^n + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

7

## Transmitancja – stan ustalony (punkt równowagi)

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} \longrightarrow X(s) = G(s)U(s)$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{s \to 0} sG(s)U(s)$$ , jeśli granica istnieje

| | |
|---|---|
| Dla *u(t)=1(t)*, czyli *U(s) = 1/s* | $\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} G(s)$ |
| Dla *u(t)=δ(t)*, czyli *U(s) = 1* | $\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sG(s)$ |
| Dla *u(t)=sin t*, czyli $U(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ | $\lim_{t \to \infty} x(t) = \lim_{s \to 0} sG(s) \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ <br> Granica? |

8

## Warunki początkowe

$$a_n x^{(n)}(t) + \ldots + a_1 \dot{x}(t) + a_0 x(t) = b_0 u(t)$$

$$x^{(n)}(0) = x_{0n};\ x^{(n-1)}(0) = x_{0n-1};\ \ldots;\ \dot{x}(0) = x_{01};\ x(0) = x_0$$

---

$$a_n s^n X(s) + \ldots + a_1 s X(s) + a_0 X(s) = b_0 U(s)$$

$$\mathscr{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = af_1(s) + bf_2(s)$$

$$\mathscr{L}\left[\dot{f}(t)\right] = sf(s) - f(0_+) = \quad sf(s)$$

$$f(0_+) = 0$$

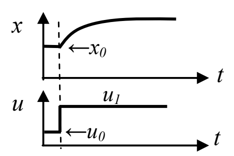
Zerowe warunki początkowe:

$$x^{(n-1)}(0) = 0; \quad \ldots; \quad \dot{x}(0) = 0$$

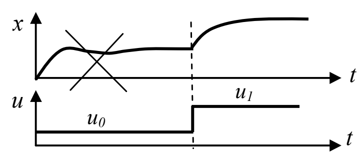
$$u(0) = 0;\ x(0) = 0$$

9

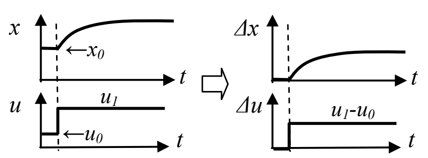
## Reakcja skokowa od dowolnego stanu ustalonego



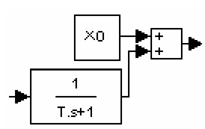

Symulacja od stanu ustalonego




Symulacja od przypadkowego stanu




Przesunięcie układu odniesienia




Ustalenie punktu pracy w modelu

10

## Transmitancje układów wielowymiarowych

Przykład $\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1x_1(t) - a_2x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1x_1(t) + b_2x_2(t) = u_2(t) \end{cases}$

Operacje macierzowe

$$s\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-a_1}{m_1} & \frac{a_2}{m_1} \\ \frac{b_1}{m_2} & \frac{-b_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$s\mathbf{x}(s) = \mathbf{A}\mathbf{x}(s) + \mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{x}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{a_1}{m_1} & \frac{-a_2}{m_1} \\ \frac{-b_1}{m_2} & s + \frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

11

## Transmitancje układów wielowymiarowych

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{a_1}{m_1} & \frac{-a_2}{m_1} \\ \frac{-b_1}{m_2} & s + \frac{b_2}{m_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\frac{\det\left(\frac{m_2s + b_2}{m_2}\right)}{\det(sI - A)} & (-1)^{2+1}\frac{\det\left(\frac{-a_2}{m_1}\right)}{\det(sI - A)} \\ (-1)^{1+2}\frac{\det\left(\frac{-b_1}{m_2}\right)}{\det(sI - A)} & (-1)^{2+2}\frac{\det\left(\frac{m_1s + a_1}{m_1}\right)}{\det(sI - A)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \left(\frac{m_1s + a_1}{m_1}\right)\left(\frac{m_2s + b_2}{m_2}\right) - \frac{b_1a_2}{m_1m_2}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_2s + b_2}{M(s)} & \frac{a_2}{M(s)} \\ \frac{b_1}{M(s)} & \frac{m_1s + a_1}{M(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$

$$M(s) = (m_1s + a_1)(m_2s + b_2) - b_1a_2$$

12

## Transmitancje układów wielowymiarowych

Przykład $\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1x_1(t) - a_2x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1x_1(t) + b_2x_2(t) = u_2(t) \end{cases}$

Równania operatorowe

$$\begin{cases} (m_1s + a_1)x_1(s) = a_2x_2(s) + u_1(s) \\ (m_2s + b_2)x_2(s) = b_1x_1(s) + u_2(s) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_1(s)x_1(s) = a_2x_2(s) + u_1(s) \\ M_2(s)x_2(s) = b_1x_1(s) + u_2(s) \end{cases} \longrightarrow \quad x_1(s) = \frac{a_2x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)}$$

$$M_2(s)x_2(s) = b_1\frac{a_2x_2(s) + u_1(s)}{M_1(s)} + u_2(s) \quad \Big|\cdot M_1(s)$$

$$M_1(s)M_2(s)x_2(s) = b_1a_2x_2(s) + b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s)$$

$$\boxed{x_2(s) = \frac{b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - b_1a_2}}$$

$$M_1(s)x_1(s) = a_2x_2(s) + u_1(s) = \quad a_2\frac{b_1u_1(s) + M_1(s)u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - b_1a_2} + u_1(s)$$

$$x_1(s) = \frac{a_2b_1u_1(s) + a_2M_1(s)u_2(s) + (M_1(s)M_2(s) - b_1a_2)u_1(s)}{M_1(s)(M_1(s)M_2(s) - b_1a_2)}$$

$$\boxed{x_1(s) = \frac{M_2(s)u_1(s) + a_2u_2(s)}{M_1(s)M_2(s) - b_1a_2}}$$

13

## Transmitancje układów wielowymiarowych

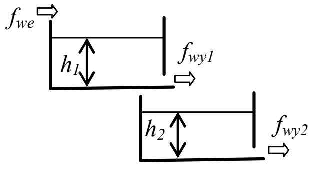
Przykład $\begin{cases} m_1\dot{x}_1(t) + a_1x_1(t) - a_2x_2(t) = u_1(t) \\ m_2\dot{x}_2(t) - b_1x_1(t) + b_2x_2(t) = u_2(t) \end{cases}$

$$x_1(s) = \frac{m_2s + b_2}{M(s)}u_1(s) + \frac{a_2}{M(s)}u_2(s)$$

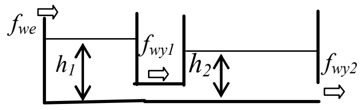
$$x_2(s) = \frac{b_1}{M(s)}u_1(s) + \frac{m_1s + a_1}{M(s)}u_2(s)$$

$$M(s) = (m_1s + a_1)(m_2s + b_2) - b_1a_2$$

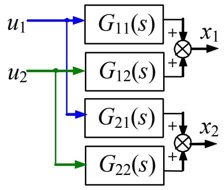
### Kaskada niewspółdziałająca




### Kaskada współdziałająca




$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1(s) \\ u_2(s) \end{bmatrix}$$




14

## Własności układów liniowych

- zasada superpozycji - składowe swobodne i wymuszone
- znana postać rozwiązania swobodnego
- parametry rozwiązania swobodnego - algebraiczne równanie charakterystyczne
- stabilność układu - kryteria położenia pierwiastków równania charakter.
- rozwiązanie swobodne decyduje o własnościach dynamicznych układu
- własności dynamiczne układu nie zależą od wymuszenia
- odpowiedź na pochodną sygnału = pochodnej odpowiedzi na ten sygnał

  - $u(t)=1(t)$ $x(t)$ $u(t)=\delta(t)$ $dx(t)/dt$
- jeden punkt równowagi
- stabilność / niestabilność globalna
- transmitancja (przekształcenie Laplace'a / Fourier'a)

15