

# Charakterystyka czasowa

Marcin Gruchała 248982

Jan Bronicki 249011

## 1 Cel ćwiczenia.

Badanie charakterystyk czasowych, dla różnych równań

## 2 Rozwiązanie analityczne równania różniczkowego i jego wykres.

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) - 2x(t) = u(t), u(t) = 1, \dot{x}(0) = 0, x(0) = 2$$

Rozwiązanie swobodne:

$$\ddot{x}_s(t) + \dot{x}_s(t) - 2x_s(t) = 0$$

$$x_s(t) = Ae^{\lambda t}, \dot{x}_s(t) = \lambda Ae^{\lambda t}, \ddot{x}_s(t) = \lambda^2 Ae^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 Ae^{\lambda t} + \lambda Ae^{\lambda t} - 2Ae^{\lambda t} = 0 / : Ae^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$\Delta = 9, \lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$$

$$x_s(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^t - \text{rozwiązanie swobodne}$$

Rozwiązanie wymuszone:

$$\ddot{x}_w(t) + \dot{x}_w(t) - 2x_w(t) = 1$$

$$u(t) = 1, \dot{u}(t) = 0, \ddot{u}(t) = 0$$

$$x_w(t) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + C_3 \cdot 0$$

$$\dot{x}_w(t) = 0, \ddot{x}_w(t) = 0$$

$$-2C_1 = 1 \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2} \Rightarrow X_w(t) = -\frac{1}{2} - \text{rozwiązanie wymuszone}$$

Rozwiązanie ogólne:

$$x(t) = x_s(t) + x_w(t)$$

$$x(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^t - \frac{1}{2} - \text{rozwiązanie ogólne}$$

Rozwiązanie szczególne:

$$x(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^t$$

$$\dot{x}(t) = -2A_1 e^{-2t} + A_2 e^t$$

$$x(0) = A_1 + A_2 - \frac{1}{2} = 2$$

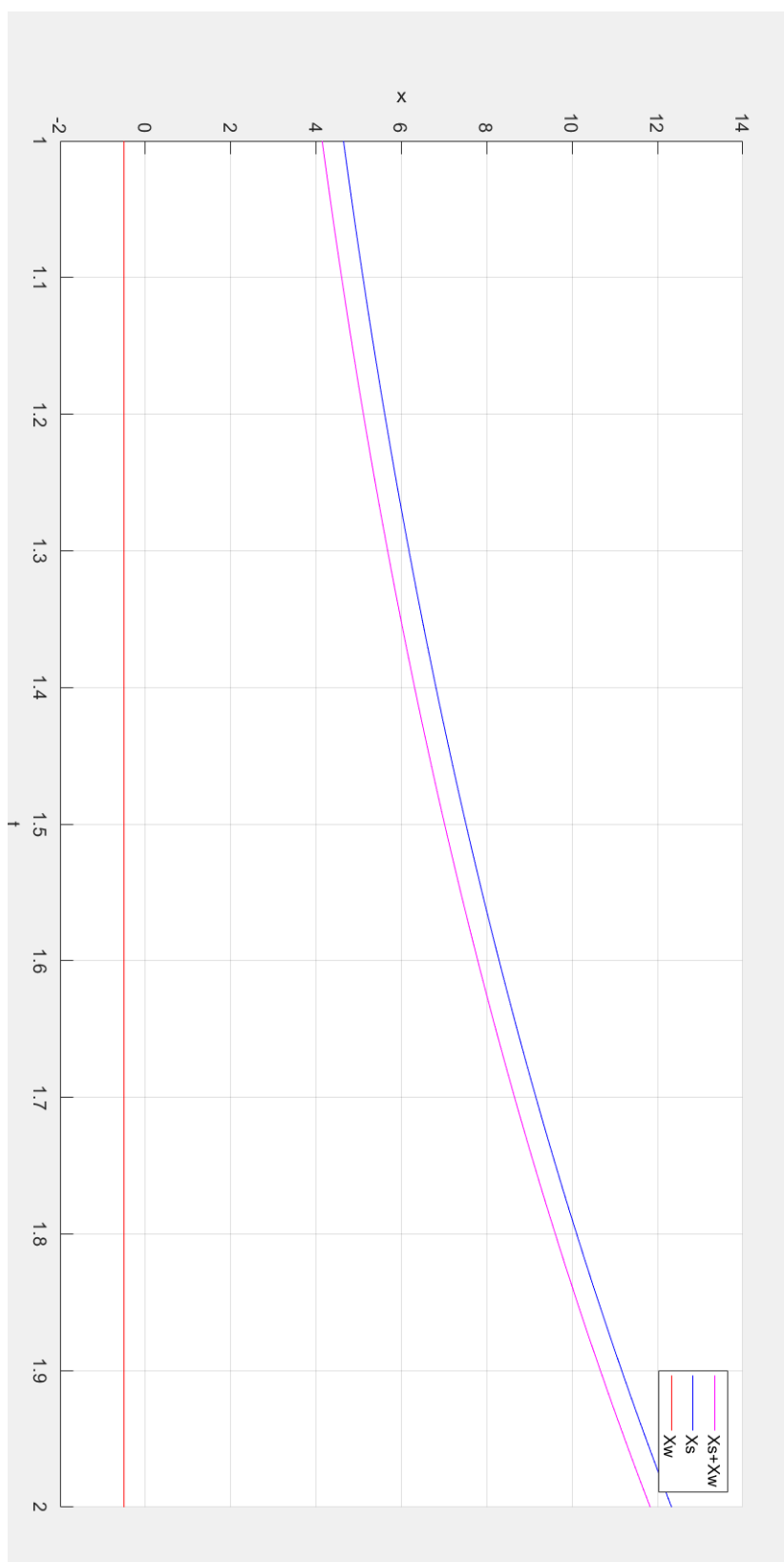
$$\dot{x}(0) = -2A_1 + A_2 = 0$$

$$A_1 = \frac{A_2}{2}$$

$$\frac{A_2}{2} + A_2 - \frac{1}{2} = 2 \Rightarrow A_2 = \frac{5}{3} = \frac{10}{6} \Rightarrow A_1 = \frac{5}{6}$$

$$x(t) = \frac{5}{6} e^{-2t} + \frac{10}{6} e^t - \frac{1}{2} - \text{rozwiązanie szczególne}$$

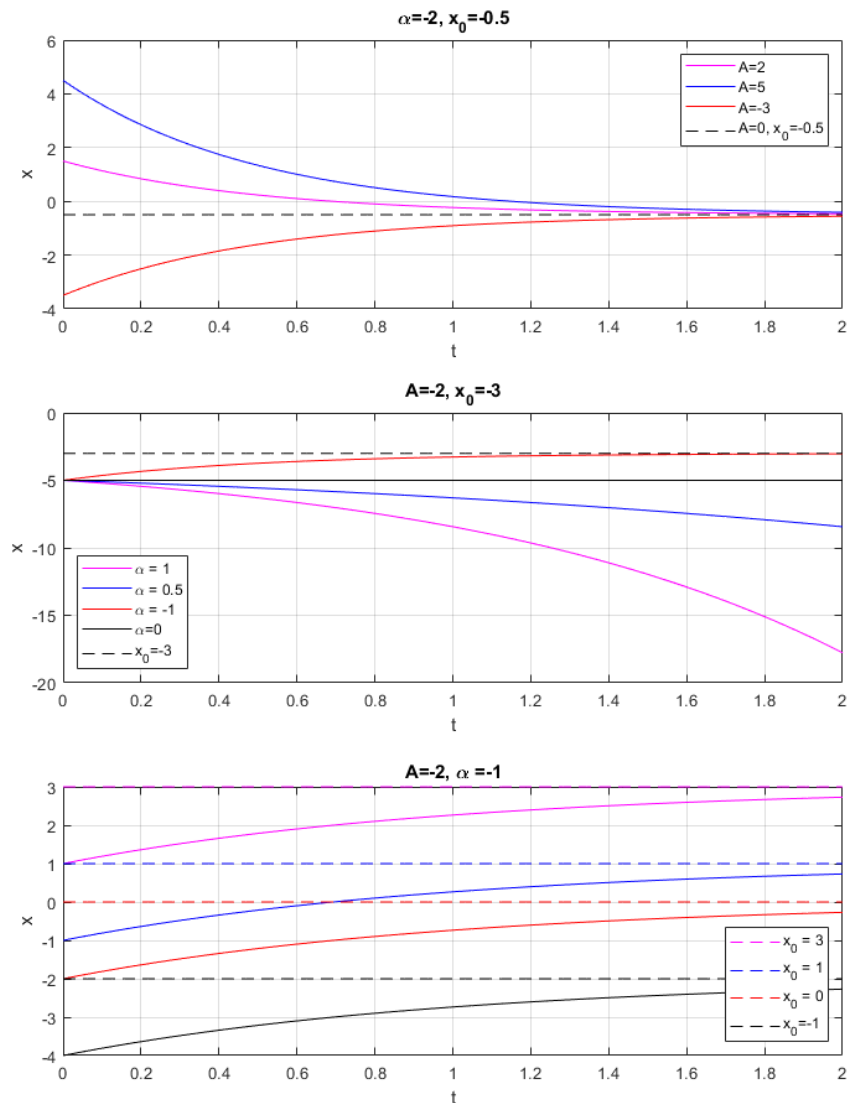
Wykres:



### 3 Badanie wpływu parametrów.

#### 3.1 $A, \alpha, x_0$

$$x(t) = Ae^{\alpha t} + x_0$$



Wniosk:

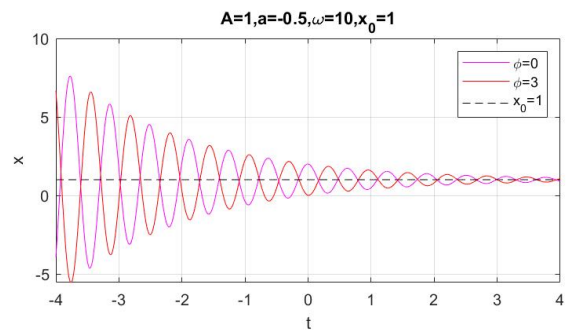
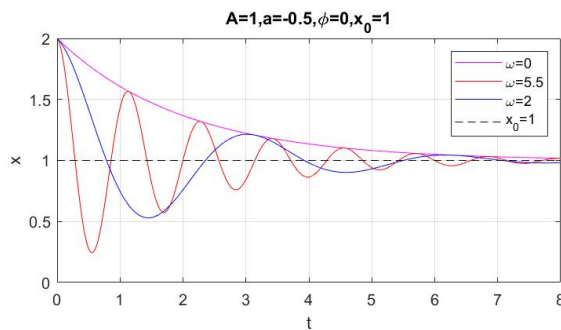
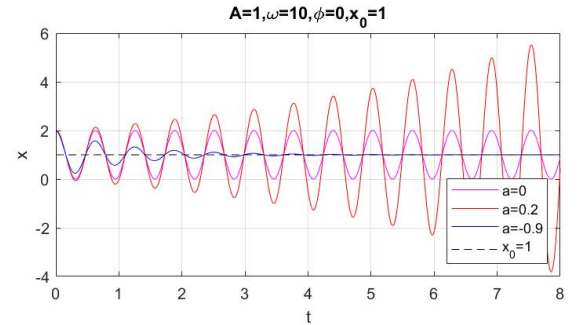
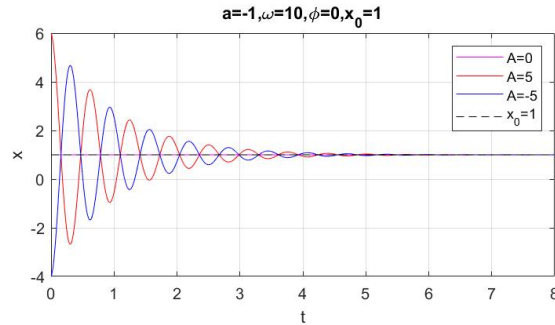
Parametr  $A$  nie ma wpływu na stabilność układu. Wpływa na to czy wykres maleje czy rośnie w zależności od tego czy jest ujemny czy dodatni oraz gdzie spotyka się z osią pionową.

Parametr  $\alpha$  wpływa na stabilność układu. Dla  $\alpha > 0$  układ jest niestabilny a dla  $\alpha < 0$  układ jest stabilny.

Parametr  $x_0$  nie wpływa na stabilność układu. Decyduje o wartości na jakiej układ się ustabilizuje. Przesuwa wykres w górę lub w dół zależnie od wartości parametru.

### 3.2 $\alpha, \omega, \phi$

$$x(t) = Ae^{\alpha t} \cos(\omega t + \phi) + x_o$$



Wnioski:

Parametr  $\alpha$  wpływa znacząco na zanikanie funkcji. Dla  $\alpha < 0$  funkcja zanika do zera (układ się stabilizuje).

Dla  $\alpha > 0$  funkcja będzie uciekać od zera (układ jest nie stabilny).

Parametr  $\omega$  wpływa na częstotliwość oscylacji funkcji. Dla dużych  $\omega$  oscylacje funkcji będą się pojawiać częściej funkcja będzie bardziej zagęszczona.

Parametr  $\phi$  wpływa na przesunięcie fazowe funkcji.

### 3.3 $\alpha_i, A_i$

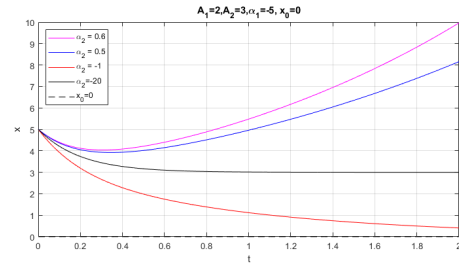
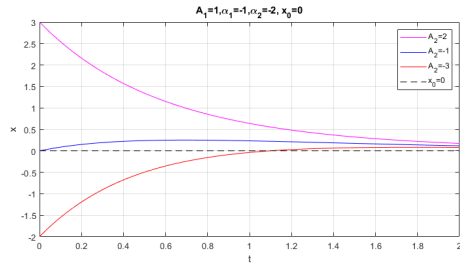
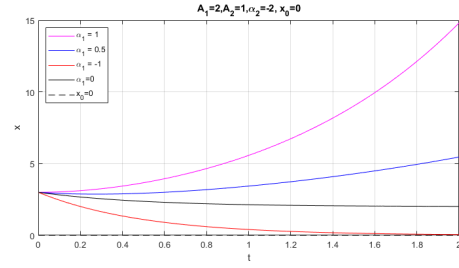
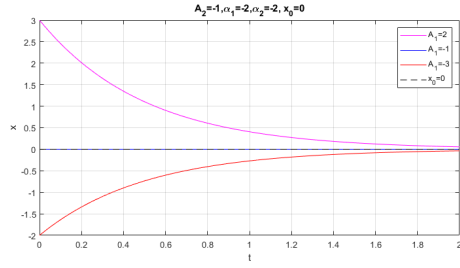
a)

$$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} + x_o$$

Wnioski:

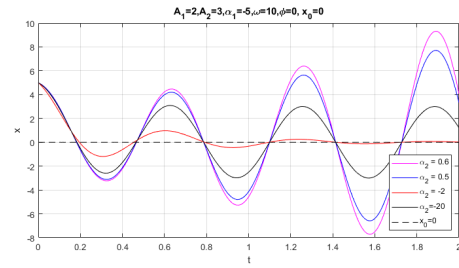
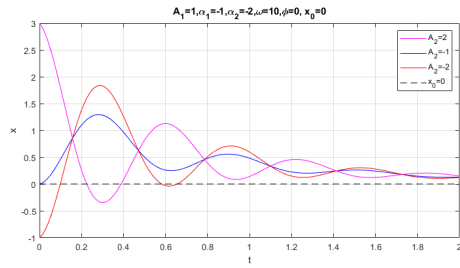
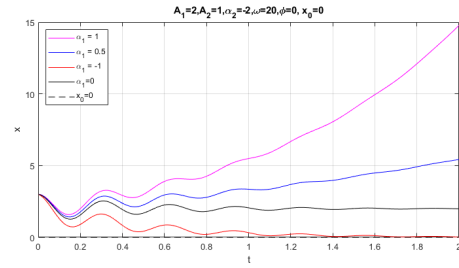
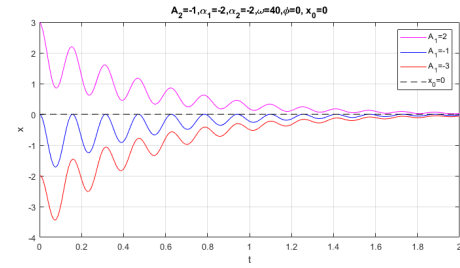
Sumowanie parametr  $\alpha_i$  wpływa znacząco na to czy funkcja zanika. Dla dwóch parametrów  $\alpha_i$  o ujemnych znakach funkcja zanika, lecz gdy tylko jeden z parametrów  $\alpha_i$  jest dodatni to funkcja już nie zanika.

Sumowanie parametru  $A_i$  jest bardzo intuicyjne. Gdy dwie składowe mają taki sam znak ich wpływ na kształt funkcji jest zsumowany. W przypadku gdzie parametry  $A_i$  mają różne znaki najbardziej znaczący jest ten który ma większą wartość bezwzględną.



b)

$$x(t) = A_1 e^{\alpha_1 t} + A_2 e^{\alpha_2 t} \cos(\omega t + \varphi)$$



Wnioski:

Sumowanie parametr  $\alpha_i$  ma duży wpływ na to czy funkcja zanika. Dla dwóch parametrów  $\alpha_i < 0$  funkcja zanika, w sytuacji gdzie tylko jeden z parametrów  $\alpha_i < 0$  a drugi parametr  $\alpha_i > 0$  to funkcja nie zanika. Sumowanie parametr  $A_i$  w tej funkcji działa analogicznie do funkcji w podpunkcie 3.3a. Jeśli znaki parametrów  $A_i$  są takie same ich ewekt się dodaje, jeśli znaki parametrów  $A_i$  są różne to najważniejszy jest parametr z większą wartością bezwzględną.

## 4 Wnioski.

Jak pokazały powyższe przykłady zanaając jeden z parametrów funkcji możemy w mniejszym lub większym stopniu oszacować jego wygląd. Można to przełożyć na ocenianie opisów modeli i w szybki sposób stwierdzić czy model się ustabilizuje czy nie, ponieważ niektóre parametry nie mają wpływu na to czy funkcja zanika do jakiejś wartości czy nie.

## 5 Załączniki.

```
clear all;
t=1:0.001:2;
x=5/6*exp(-2*t)+10/6*exp(t)-1/2;
hold on;
plot(t,x,'m');
v=5/6*exp(-2*t)+10/6*exp(t);
plot(t,v,'b');
xw=0;
for i=1:length(t)
    xw(i)=-1/2;
end
plot(t,xw,'r');
legend('Xs+Xw','Xs','Xw');
ylabel('x');
xlabel('t');
```

```

1  clear;
2  close all;
3
4
5  %x_sz=Ae^alpha*t+x0;
6  %AAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAAA
7  subplot(3,1,1);
8  x_sz=0:0.001:2;
9  t=0:0.001:2;
10 a=-2;
11 xw=-0.5;
12
13 A1=2;
14 for i=1:(length(t))
15     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
16 end
17 plot(t,x_sz,'m-');
18 hold on;
19 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
20 A1=5;
21 for i=1:(length(t))
22     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
23 end
24 plot(t,x_sz,'b-');
25
26 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
27 A1=-3;
28 for i=1:(length(t))
29     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
30 end
31 plot(t,x_sz,'r-');
32 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
33 A1=0;
34 for i=1:(length(t))
35     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
36 end
37 plot(t,x_sz,'k--');
38 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
39 title('\alpha=-2, x_{0}=-0.5');
40 legend('A=2', 'A=5', 'A=-3', 'A=0, x_{0}=-0.5');
41 xlabel('t');
42 ylabel('x');
43 grid on;
44 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
45
46
47
48
49
50
51 %aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa
52 subplot(3,1,2);
53
54 A1=-2;
55 xw=-3;
56
57 a=1;
58 for i=1:(length(t))
59     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
60 end
61 plot(t,x_sz,'m-');
62 hold on;
63 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
64 a=0.5;
65 for i=1:(length(t))
66     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
67 end
68 plot(t,x_sz,'b-');
69 hold on;
70 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```
64 a=0.5;
65 for i=1:(length(t))
66     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
67 end
68 plot(t,x_sz,'b-');
69 hold on;
70 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
71 a=-2;
72 for i=1:(length(t))
73     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
74 end
75 plot(t,x_sz,'r-');
76 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
77 a=0;
78 for i=1:(length(t))
79     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
80 end
81 plot(t,x_sz,'k-');
82 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
83 A1=0;
84 for i=1:(length(t))
85     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
86 end
87 plot(t,x_sz,'k--');
88 title('A=-2, x_{0}=-3');
89 legend({'\alpha = 1','\alpha = 0.5','\alpha = -1','\alpha=0','x_{0}=-3'},
'Location','southwest');
90 xlabel('t');
91 ylabel('x');
92 grid on;
93
94
95
96
97 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
98 subplot(3,1,3);
99 A1=-2;
100 a=-1;
101
102 xw=3;
103 for i=1:(length(t))
104     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
105 end
106 plot(t,x_sz,'m-');
107
108 hold on;
109 A1=0;
110 for i=1:(length(t))
111     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
112 end
113 A1=-2;
114 p1=plot(t,x_sz,'m--');
115 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
116 xw=1;
117 for i=1:(length(t))
118     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
119 end
120 plot(t,x_sz,'b-');
121
122 hold on;
123 A1=0;
124 for i=1:(length(t))
125     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
126 end
127 A1=-2;
128 p2=plot(t,x_sz,'b--');
129 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
130 xw=0;
131 for i=1:(length(t))
132     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
133 end
134 plot(t,x_sz,'r-');
```



```

129 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
130 xw=0;
131 for i=1:1:(length(t))
132     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
133 end
134 plot(t,x_sz,'r-');
135
136 A1=0;
137 for i=1:1:(length(t))
138     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
139 end
140 A1=-2;
141 p3=plot(t,x_sz,'r--');
142 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
143 xw=-2;
144 for i=1:1:(length(t))
145     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
146 end
147 plot(t,x_sz,'k-');
148 A1=0;
149 for i=1:1:(length(t))
150     x_sz(i)=A1*exp(a*t(i))+xw;
151 end
152 A1=-2;
153 p4=plot(t,x_sz,'k--');
154 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
155
156 title('A=-2, \alpha =-1');
157 legend([p1,p2,p3,p4],{'x_{0} = 3','x_{0} = 1','x_{0} = 0','x_{0}=-1'},'Location',
        'southeast');
158 xlabel('t');
159 ylabel('x');
160 grid on;

```