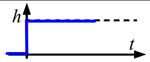
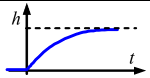
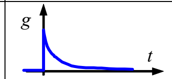
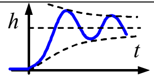
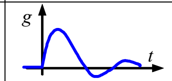
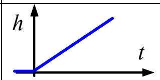
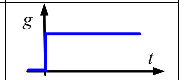
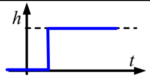
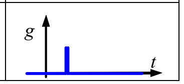
7. Podstawowe obiekty dynamiki

7.1. Parametry i odpowiedzi członów dynamiki

Najprostsze przypadki transmitancji nazywane są **podstawowymi członami dynamiki**. Służą one do opisu najprostszych obiektów i jako składniki złożonych schematów, ale również do uogólnienia różnych metod badania i projektowania własności dynamicznych układów ⓘ[1].

Wykorzystuje się praktycznie jedynie stabilne warianty tych członów, to znaczy przy założeniu określonych ograniczeń na wartości parametrów (Tab. I-1).

Tab. I-1. Podstawowe człony dynamiki i ich odpowiedzi czasowe ⓘ[2]

człon	transmitancja $G(s)$	parametry	odp.skokowa $h(t)$	odp.impulsowa $g(t)$
proporcjonalny	K	K – wzmocnienie		
inercyjny	$\frac{K}{Ts+1}$	K – wzmocnienie T – stała czasowa, $T>0$		
oscylacyjny	$\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2}$	ξ – tłumienie ω_n – pulsacja własna, $\omega_n>0$		
całkujący	$\frac{1}{T_i s}$	T_i – czas całkowania		
różniczkujący	$T_d s$	T_d – czas różniczkowania		
opóźniający	e^{-sT_0}	T_0 – czas opóźnienia, $T_0>0$		

Transmitancje podstawowych członów dynamiki (poza opóźnieniem) mają postać funkcji wymiernych, która wynika z transformaty odpowiednich równań różniczkowych (⇨). Wśród I.7.2.2 parametrów członów dynamiki część z nich to parametry czasowe, które mają swoją interpretację geometryczną na podstawowych charakterystykach czasowych (⇨), II.10 a szczególnie w odpowiedzi skokowej i impulsowej[3]. Można ją wykazać na podstawie znanego rozwiązania odpowiedniego równania różniczkowego przy danym wymuszeniu. Własności te są wykorzystywane do identyfikacji modelu na podstawie charakterystyk czasowych uzyskanych na drodze eksperymentalnej (⇨). I.7.2

Człon proporcjonalny (wzmacniający, bezinercyjny) to proste wzmocnienie sygnału wejściowego – bez opóźnienia i zniekształcenia. Tak prosty opis obiektu stosuje się wówczas gdy jego reakcja na zmiany jest bardzo szybka[4] (⇨). Dla porządku zalicza się go do członów I.10.4 dynamiki choć jest to jednocześnie statyczny opis prostych obiektów.

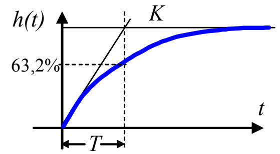
Człon inercyjny z dodatnią stałą czasową T odpowiada stabilnemu obiektowi pierwszego rzędu, który w aperiodyczny sposób osiąga stan ustalony (Rys. I-17). Analizując wzór na odpowiedź skokową układu (⇨) można wykazać, że styczna w punkcie t=0 przecina poziom I.7.2.2 stanu ustalonego po czasie równym stałej czasowej T, natomiast wartość rozwiązania w chwili t=T wynosi 63,2% wartości stanu ustalonego.

ⓘ[1] Różne metody projektowania układów opracowuje się często dla określonej postaci transmitancji, a jeśli jest to prosta postać (np. typowy człon dynamiki lub złożenie członów) to zadanie jest łatwiejsze a opracowana metoda prostsza w zastosowaniu – patrz: podstawy do teorii sterowania, metody projektowania np. [5]

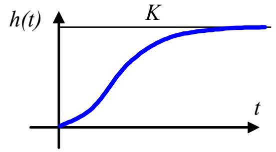
ⓘ[2] Więcej o charakterystykach czasowych podstawowych członów dynamiki np. [3/r.2.2.6, 3.2.5]

[3] odpowiedź skokowa i impulsowa są reakcjami układu na standardowe sygnały: odpowiedź skokowa $h(t)$ = reakcja na skok jednostkowy $1(t)$; odpowiedź impulsowa $g(t)$ = reakcja na idealny impuls $\delta(t)$

[4] następuje prawie natychmiast (tzn. w porównaniu do innych obserwowanych procesów)



Rys. I-17. Interpretacja parametrów członu inercyjnego dla odpowiedzi skokowej



Rys. I-18. Odpowiedź skokowa członu inercyjnego rzędu większego niż 1

Szeregowe połączenie n członów inercyjnych przedstawione w postaci:

$$\frac{K}{(T_1 s+1)\ldots(T_n s+1)} \quad \text{lub} \quad \frac{K}{a_n s^n+\ldots+a_1 s+a_0} \tag{I-73}$$

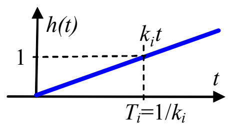
nazywa się członem inercyjnym n-tego rzędu. Jeśli stałe czasowe są dodatnie, to układ osiąga stan ustalony a odpowiedź skokowa (Rys. I-18) ma aperiodyczny przebieg z punktem I.10.4 przegięcia[1]. Człony inercyjne są podstawowym sposobem opisu własności dynamicznych I.10.4 większości obiektów technologicznych (⇨), stąd też znajdują szczególne zastosowanie I.7.2 w eksperymentalnych metodach identyfikacji modelu (⇨).

Człon oscylacyjny opisuje układy 2 rzędu i jest przedstawiany w dwóch wariantach:

$$\frac{1}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad \text{lub} \quad \frac{1}{T^2 s^2+2\xi Ts+1}, \quad \text{gdzie } T=\frac{1}{\omega_n}>0 \tag{I-74}$$

z zastosowaniem pulsacji ω_n lub okresu T drgań własnych członu oscylacyjnego. Transmitancja (I-74) dla $\xi \geq 1$ ma dwa rzeczywiste bieguny, więc można ją przedstawić jako I.3.2 człon inercyjny drugiego rzędu (⇨). Natomiast człon oscylacyjny *sensu stricto* występuje w przypadku gdy wartość współczynnika tłumienia $|\xi|<1$, to znaczy że układ ma parę biegunów zespolonych, a więc rozwiązanie oscylacyjne (tzn. w reakcji na zakłócenia faktycznie pojawiają się oscylacje).

Człon całkujący realizuje operację idealnego całkowania (Rys. I-19) i w zapisie operatorowym ma postać:



Rys. I-19. Interpretacja parametrów członu całkującego dla odpowiedzi skokowej

$$\frac{1}{T_i s} \quad \text{lub} \quad \frac{k_i}{s} \tag{I-75}$$

gdzie: T_i – czas całkowania, k_i – wzmocnienie.

Stosuje się również człony całkujące n-tego rzędu:

$$\frac{1}{T_i s^n} \quad \text{lub} \quad \frac{k_i}{s^n} \tag{I-76}$$

Specyficzną cechą transmitancji (I-75), (I-76) są bieguny o wartości zero, leżące na osi Im, czyli na granicy stabilności. Członu całkującego nie można zaliczyć do obiektów stabilnych, I.10.1 ponieważ przetwarza stały sygnał wejściowy na nieograniczony sygnał na wyjściu[2]. Można I.10.4 wskazać proste obiekty fizyczne o własnościach całkujących (⇨), ale szczególne znaczenie ma ten człon w konstrukcji urządzeń sterujących ⓘ[3].

Podobne zastosowanie ma idealny **człon różniczkujący**, reprezentowany za pomocą transmitancji:

$$T_d s \quad \text{lub} \quad k_d s \tag{I-77}$$

z parametrem nazywanym czasem różniczkowania (T_d) lub wzmocnieniem (k_d). W układach I.10.4 fizycznych idealne różniczkowanie praktycznie nie występuje (⇨) – zawsze jest związane z występowaniem pewnej (niewielkiej) inercji, co opisuje rzeczywisty człon różniczkujący:

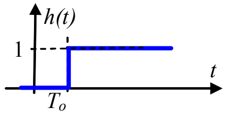
$$\frac{T_d s}{Ts+1} \quad \text{lub} \quad \frac{k_d s}{Ts+1} \tag{I-78}$$

[1] Zależnie od zróżnicowania stałych czasowych punkt przegięcia może być bardziej lub mniej widoczny

[2] Jedna z definicji stabilności mówi, że sygnał na wyjściu układu stabilnego jest ograniczony, jeśli tylko pobudzenie było ograniczone.

ⓘ[3] Patrz: regulator PID, PI

Uzupełnieniem kolekcji podstawowych członów dynamiki jest **opóźnienie** (Rys. I-20), które przenosi sygnał wejściowy bez zmian, tylko przesunięty w czasie (⇨). I.10.4



Rys. I-20. Odpowiedź skokowa członu opóźniającego

Transmitancja członu opóźniającego jest funkcją liniową ale niewymierną. Jeśli to konieczne można ją przybliżyć za pomocą funkcji wymiernej, stosując aproksymację Padé, zwykle pierwszego rzędu ⓘ[1]:

$$e^{-sT_0} \approx \frac{1-sT_0/2}{1+sT_0/2} \qquad \text{(I-79)}$$

Podstawowe człony dynamiki opisujące nawet najprostsze obiekty fizyczne są tylko przybliżeniem rzeczywistości, ale często są stosowane w praktyce inżynierskiej.

1º Znane są stałe czasowe układu: T_1 i T_2. Przedstaw transmitancję i podaj bieguny układu. Co można powiedzieć o stabilności układu?
2º Układ ma dwa bieguny: -5 i -1. Podaj stałe czasowe.
3º Równanie charakterystyczne układu ma parę pierwiastków zespolonych -3±jb. Określ jaki to człon dynamiki i jakie ma parametry.
4º Przedstaw szeregowe połączenie dwóch członów inercyjnych w postaci członu oscylacyjnego i wyznacz jego parametry. Co można powiedzieć na temat wartości ξ?
5º Podaj typ i parametry członu dynamiki, który spełnia następujące warunki:
   a) stała czasowa wynosi 10s, a przy wymuszeniu o wartości 10 na wyjściu jest wartość 2,
   b) obiekt ma 2 bieguny: -2, -1, a stan ustalony w odpowiedzi skokowej wynosi 3.
6º Określ warunki równoważności następujących transmitancji: (*26)
   a) dwóch postaci członu oscylacyjnego (I-74),
   b) członu inercyjnego 2 rzędu zdefiniowanego za pomocą stałych czasowych T_1 i T_2 oraz za pomocą biegunów układu s_1 i s_2.

7.2. Podstawowe człony w przekształceniach

7.2.1. Równania różniczkowe a podstawowe człony dynamiki

Transmitancje podstawowych obiektów dynamiki są związane z prostymi równaniami różniczkowymi (Tab. I-2). W trakcie przekształcania jednych modeli w drugie można zauważyć, że w transmitancjach pojawiają się możliwości uproszczenia modelu, jednak zastosowane uproszczenia nie mogą zmieniać rzędu układu ⓘ[2].

Tab. I-2. Równania różniczkowe a podstawowe człony dynamiki

	$G(s)$	K	T	T_i	T_d	ξ	bieguny
$c\ddot{x}+b\dot{x}=mu$							
$c\ddot{x}+ax=mu$							
$b\dot{x}+ax=mu$							
$c\ddot{x}=mu$							
$b\dot{x}=mu$							
$ax=mu$							
$c\ddot{x}+b\dot{x}=n\dot{u}$							
$c\ddot{x}+ax=n\dot{u}$							
$b\dot{x}+ax=n\dot{u}$							
$c\ddot{x}=n\dot{u}$							
$b\dot{x}=n\dot{u}$	$\frac{ns}{bs}$	$\frac{n}{b}$		1	1		
$ax=n\dot{u}$							

ⓘ[1] przybliżenie wynika z rozwinięcia funkcji e^{-sT} w szereg potęgowy – patrz: aproksymacja Padé, np. [3/r.3.2]
ⓘ[2] Patrz: hipoteza skracalności, np. [8], [3/r.4.4.3]

1º Uzupełnij Tab. I-2 – zamień równania różniczkowe na transmitancje i przekształć do postaci podstawowych członów lub iloczynu takich członów. Wyznacz bieguny układu.
2º Sprawdź uzupełnioną tabelę pod kątem zgodności rzędów równania różniczkowego i odpowiadającej jej transmitancji. Wskaż transmitancje, które po uproszczeniu miałby inny rząd niż równanie różniczkowe i zinterpretuj to uproszczenie na podstawie równania różniczkowego (*27).

7.2.2. Rozkładanie transmitancji na człony podstawowe

Jednym z typowych zadań wykonywanych podczas analizy transmitancji obiektów jest przekształcenie jej do równoważnego wyrażenia zawierającego człony podstawowe. W szczególności transmitancje można rozłożyć na:
a) człony podstawowe, czyli przedstawić w postaci iloczynu prostych transmitancji,
b) ułamki proste, czyli wyrazić transmitancję za pomocą sumy transmitancji

Iloczyn członów podstawowych znajduje bardzo praktyczne zastosowanie podczas tworzenia i wykorzystywania charakterystyk częstotliwościowych (co jest przedmiotem rozważań w kolejnym punkcie ⇨). I.6.18

Natomiast suma ułamków prostych jest wykorzystywana przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej, czyli przejścia od funkcji zmiennej s do funkcji czasu t ⓘ[1].

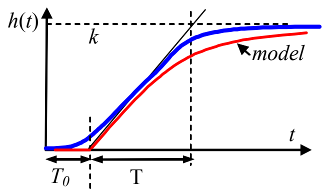
7.3. Identyfikacja dynamiki metodą charakterystyk czasowych

Graficzna interpretacja parametrów podstawowych członów dynamiki na charakterystykach czasowych jest wykorzystywana jako jedna z metod identyfikacji modelu na podstawie reakcji obiektu na skokową zmianą sygnału wejściowego.

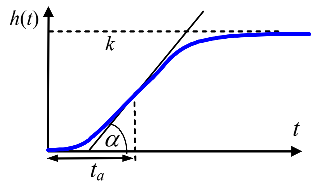
Zazwyczaj identyfikowany obiekt ma charakter inercyjny – w najprostszym przypadku jest to inercja pierwszego rzędu, którą łatwo rozpoznać na podstawie reakcji obiektu i wyznaczyć wartości parametrów (Rys. I-17). Dla obiektów inercyjnych drugiego rzędu i wyższych stosuje się modele przybliżone o trzech parametrach:

- model Küpfmüllera o transmitancji $\frac{K}{Ts+1}e^{-sT_0}$ (I-80)
- model Strejca o transmitancji $\frac{K}{(Ts+1)^n}$ (I-81)

Wartości parametrów wyznacza się na podstawie pomiaru parametrów prostej stycznej w punkcie przegięcia – dla modelu (I-80) są to wprost wartości parametrów modelu[2] (Rys. I-21), natomiast dla modelu (I-81) konieczne są dodatkowe obliczenia (Rys. I-22) ⓘ[3].



Rys. I-21. Identyfikacja modelu Küpfmüllera



Rys. I-22. Identyfikacja modelu Strejca

Poza tymi najprostszymi przypadkami znane są także inne sposoby identyfikacji parametrów modelu, na przykład metoda momentów ⓘ[4]. Niektóre z metod są wykorzystywane do automatycznej identyfikacji modelu w urządzeniach automatyki.

1º Na czym polega inercyjny charakter obiektu (jak rozpoznać obiekt inercyjny)?
2º Zaproponuj algorytm automatycznego obliczenia parametrów modelu Küpfmüllera na podstawie zarejestrowanej odpowiedzi skokowej.
3º Znajdź w literaturze jeden ze sposobów wyznaczania parametrów modelu Strejca.

ⓘ[1] Patrz: transformata odwrotna, rozwiązywanie równań różniczkowych metodą operatorową, np.[3/r.3.2.2,D2]
[2] jeśli wymuszenie skokowe ma wartość a różną od 1, to wzmocnienie $K = k/a$
ⓘ[3] Patrz: model Sterjca, np. [11], [3/r.5.3.2]
ⓘ[4] Patrz: identyfikacja parametrów modelu, metoda momentów, np. [6], [3/r.5.3.2]