재귀필터, Kalman Filter의 이해

Kalman Filter

Seunghan Han

2018.04.20

접근 태도

- 식을 처음 보는 것이고,
- 전부 이해하려고 하면 설명을 듣는다 해도 놓치게 되어 하나도 이해가 되지 않고
- 머리만 아플 것이기 때문에
- 식은 그냥 있는데
- 이것이 이런 의미를 지니고,
- 이런 논리를 통해 진행되며
- 이 식은 그래서 이렇게 가져다 쓰면 되겠구나.
- 라는 느낌으로 의미에 집중하며
- 편하게 보시면 되겠습니다.
- 3시간이기 때문에 천천히 보면서 이해를 하고 넘어가기만 해도 목표달성.

Recursive Filter : 평균필터, 이동평균 필터, 저주파 통과 필터

What is a Kalman Filter ?: 개요, 추정, 예측, 시스템 모델

Let's apply Kalman filter : 예제 1, 2, 3, 4

Kalman filter and nonlinear system : 확장 칼만 필터, Unscented 칼만필터

평균

$$\bar{x}_k = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_k}{k}$$

- 이 식은 이전 결과를 다시 활용하는 재귀식이 아님.
- 재귀식은 이전 결과를 재사용하기 때문에 계산 효율이 좋음.
- 평균을 계산하는 식을 재귀식으로 바꿔보자.

평균 필터

$$\bar{x}_{k-1} = \frac{x_1+x_2+....+x_{k-1}}{k-1}$$

- 이전 슬라이드 식에서,

$$k\bar{x}_k = x_1+x_2+....+x_k$$

- 이 식을 k-1로 나누면,

$$\boxed{\frac{k}{k-1}\bar{x}_k} = \frac{x_1+x_2+....+x_k}{k-1} = \frac{x_1+x_2+....+x_{k-1}}{k-1} + \frac{x_k}{k-1} = \boxed{\bar{x}_{k-1} + \frac{x_k}{k-1}}$$

- 양변을 k-1/k를 곱해주면,

$$\boxed{\bar{x}_k = \frac{k-1}{k}\bar{x}_{k-1} + \frac{x_k}{k}} \qquad \boxed{\bar{x}_k = \alpha\cdot\bar{x}_{k-1} + (1-\alpha)\cdot x_k}$$

- 평균필터의 재귀식 유도 완성

이동 평균

$$\bar{x}_k = \frac{x_{k-n+1} + x_{k-n+2} + \ldots + x_k}{n}$$

- 이동평균은 모든 측정 데이터가 아니라, 지정된 개수의 최근 측정값만 가지고 계산한 평균.
- 즉, 새로운 데이터가 들어오면 가장 오래된 데이터를 버리는 방식.
- 데이터 개수를 일정하게 유지하면서 평균을 구함.
- 이동평균을 계산하는 식을 재귀식으로 바꿔보자.

이동 평균 필터

$$\bar{x}_{k-1} = \frac{x_{k-n} + x_{k-n+1} + \ldots + x_{k-1}}{n}$$

- 위의 식을 가지고,

$$\boxed{\bar{x}_k - \bar{x}_{k-1}} = \frac{x_{k-n+1} + x_{k-n+2} + \ldots x_{k-1} + x_k}{n} - \frac{x_{k-n} + x_{k-n+1} + \ldots + x_{k-1}}{n} = \boxed{\frac{x_k - x_{k-n}}{n}}$$

- 정리하면,

$$\boxed{\bar{x}_k = \bar{x}_{k-1} + \frac{x_k - x_{k-n}}{n}}$$

이동 평균 필터의 단점

- 이동평균 필터를 실제로 사용하면 잡음을 제거하면서 변화추이를 반영하는 게 쉽지가 않음.
- 왜 그럴까?

$$\bar{x}_k = \frac{x_{k-n+1}+x_{k-n+2}+\ldots+x_k}{n} = \boxed{\frac{1}{n}}x_{k-n+1}+\boxed{\frac{1}{n}}x_{k-n+2}+\ldots+\boxed{\frac{1}{n}}x_k$$

- 이 식을 보면, 이동평균은 모든 데이터에 동일한 가중치를 부여.(1/n)
- 재귀식에서도 마찬가지로, 위의 식을 토대로 만들어졌기 때문에,
- 가장 최근의 데이터와 가장 오래된 데이터를 같은 비중으로 평균에 반영.
- 이는 최근 데이터가 현재 상태의 값을 추정할 때 적합한 데이터라 해도 과거 데이터와 동일한 비중을 주고 합산하기 때문에 실제 값과 거리가 멀어질 수 있고, 이는 추정값이 정확하지 않을 수 있음.

1차 저주파 통과 필터

$$\bar{x}_k = \alpha \cdot \bar{x}_{k-1} + (1-\alpha) \cdot x_k$$

- 1차 저주파 통과 필터의 재귀식을 바로 제시하면 위와 같음.
- 평균 필터의 식과 동일함. (0 < a < 1)
- 평균필터와 다른점은 a의 값을 지정할 수가 있다는 것.
- 평균필터는 a가 데이터 개수에 따라 자동으로 지정됨.
- 저주파 통과 필터부터는, 추정값 이라는 단어를 사용.
- 왜 그런지 이유를 살펴보면 다음과 같음.

$$\bar{x}_k = \boxed{\frac{k-1}{k}} \bar{x}_{k-1} + \frac{x_k}{\boxed{k}}$$

1차 저주파 통과 필터

$$\bar{x}_{k-1} = \alpha \cdot \bar{x}_{k-2} + (1-\alpha) \cdot x_{k-1}$$

- 위의 식을 이용하여,

$$\begin{aligned} \bar{x}_k &= \alpha \cdot \bar{x}_{k-1} + (1-\alpha) \cdot x_k = \alpha \cdot \{\alpha \cdot \bar{x}_{k-2} + (1-\alpha) \cdot x_{k-1}\} + (1-\alpha) \cdot x_k \\ &= \alpha^2 \cdot \bar{x}_{k-2} + \boxed{\alpha \cdot (1-\alpha)} \cdot x_{k-1} + \boxed{(1-\alpha)} x_k \end{aligned}$$

- 측정데이터에 곱해진 비율값을 놓고 본다면, (0 < a < 1)
- 과거 데이터로 갈수록 더 작은 계수가 곱해짐.
- 즉, 이전 측정값일수록 추정값 계산에 반영되는 비중이 작아짐.
- 그래서 1차 저주파 통과 필터를 지수가중 이동필터 라고도 부름.

Recursive Filter : 평균필터, 이동평균 필터, 저주파 통과 필터

What is a Kalman Filter ?: 개요, 추정, 예측, 시스템 모델

Let’s apply Kalman filter : 예제 1, 2, 3, 4

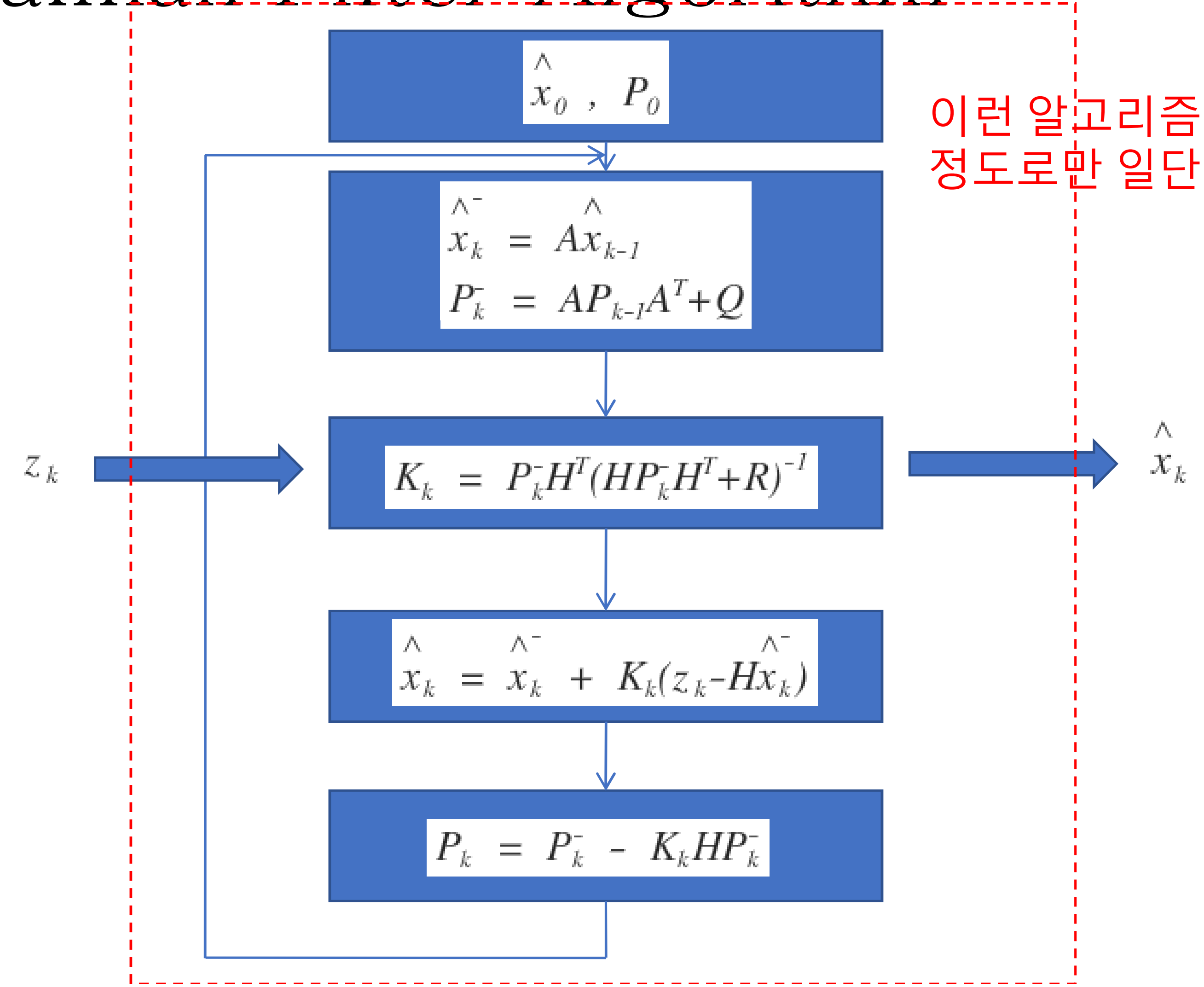
Kalman filter and nonlinear system : 확장 칼만 필터, Unscented 칼만필터

칼만 필터

- 칼만 필터에 대한 논문은 1960년대에 처음으로 발표됨.
- 칼만 필터를 유도하거나 그 과정을 이해하려면 상당한 수학 지식이 필요.
- 만만치 않은 수학 지식이 동원됨.
- 그런데 우리는 일단은, 가져다 쓰는 관점에서 바라보고 이용할 줄만 알면 됨.
- 그렇다면 그 다음의 깊은 내용은 내가 필요하다면 유도과정까지 공부하면 됨.
- 칼만 필터의 알고리즘은 이미 명확히 정립되어 있고,
- 당장 칼만 필터를 적용하고자 한다면
- 이미 나와있는 알고리즘 절차대로 구현을 할 수 있도록 하는 접근 선행이 필요.
- 즉, 큰 그림을 그려놓고 나중에 작은 부분을 건드리는 접근이 필요.
- 추후 문제가 생겼을 때에는 이론적 배경을 확실히 해놓고 대처하는 것이 필요.

Kalman Filter Algorithm

Kalman Filter Algorithm



이런 알고리즘의 구조를 가진다.
정도로만 일단 확인

윗첨자 ‘–’ 은 예측값을 의미

$$\hat{x}_0 \,,\; P_0$$

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1}$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T+Q$$

z_k

$$K_k = P_k^- H^T(HP_k^- H^T+R)^{-1}$$

$\hat{x}_k$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

$$P_k = P_k^- - K_k H P_k^-$$

Kalman Filter Algorithm 단계

1. 초기값 선정

$$\hat{x}_0 \,,\; P_0$$

2. 추정값과 오차 공분산 예측

$$\hat{x}^-_k = A\hat{x}_{k-1}$$

$$P^-_k = AP_{k-1}A^T+Q$$

3. 칼만 이득 계산

$$K_k = P^-_k H^T(HP^-_k H^T+R)^{-1}$$

4. 추정값 계산

$$\hat{x}_k = \hat{x}^-_k + K_k(z_k - H\hat{x}^-_k)$$

5. 오차 공분산 계산

$$P_k = P^-_k - K_k H P^-_k$$

z_k

측정값

$\hat{x}_k$

추정값

최종 출력	$\hat{x}_k$
외부 입력	z_k
시스템 모델	$A,\ H,\ Q,\ R$
내부 계산용	$\hat{x}^-_k \,,\; P^-_k \,,\; P_k \,,\; K_k$

Kalman Filter Algorithm 단계

1. 초기값 선정 $\hat{x}_0 , \ P_0$

2. 추정값과 오차 공분산 예측

$$\hat{x}^-_k = A\hat{x}_{k-1}$$
$$P^-_k = AP_{k-1}A^T+Q$$

3. 칼만 이득 계산

$$K_k = P^-_kH^T(HP^-_kH^T+R)^{-1}$$

4. 추정값 계산

$$\hat{x}_k = \hat{x}^-_k + K_k(z_k-H\hat{x}^-_k)$$

5. 오차 공분산 계산

$$P_k = P^-_k - K_kHP^-_k$$

z_k **측정값** → (3–5) → $\hat{x}_k$ **추정값**

최종 출력	$\hat{x}_k$
외부 입력	z_k
시스템 모델	$A, \ H, \ Q, \ R$
내부 계산용	$\hat{x}^-_k , \ P^-_k , \ P_k , \ K_k$

큰그림을 읽고 일단 넘어간다.

1. 시스템 모델은 칼만필터를 구현하기 전에 미리 정한다.
2. 예측, 추정. 두 가지 의미를 기준으로 동작한다.

칼만필터의 분석 접근방식

- 앞의 이미 제시된, 증명된 식을 가지고 분석을 하며 의미를 이해하고 활용하는 방식으로 접근한다.
- 즉, Top -> Down 방식으로 접근한다.
- 시작해보자.

Kalman Filter 추정 과정

추정과정.

- 앞의 3 ~ 5단계가 추정과정에 해당한다.
- 추정 과정의 목표는 칼만 필터의 최종 결과물인 추정값을 계산해 내는 것이다.

3. 칼만 이득 계산

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1}$$

4. 추정값 계산

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

5. 오차 공분산 계산

$$P_k = P_k^- - K_k H P_k^-$$

이 식만 떼놓고 분석해보자.
앞의 저주파필터의 식과 비교하며
이해를 시도한다.

칼만 필터의 실체 – 1

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

- 이 식을 전개해 보자.

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-) \\ &= \hat{x}_k + K_k z_k - K_k H\hat{x}_k^- \\ &= \boxed{(I - K_k H)\hat{x}_k^- + K_k z_k}\end{aligned}$$

- 무언가 비슷하다.
- H가 뭔지 모르겠지만 I로 치환해서 다시 계산해보면,

$$\begin{aligned}&(I - K_k H)\hat{x}_k^- + K_k z_k \\ &= (I - K_k I)\hat{x}_k^- + K_k z_k \\ &= \boxed{(I - K_k)\hat{x}_k^- + K_k z_k}\end{aligned}$$

칼만 필터의 실체 – 2

$$(I - K_k)\hat{x}^-_k + K_k z_k$$

- 결과적으로 나오게 된 식.
- 앞에서 만든 1차 저주파 통과 필터 수식을 가져와보자.

$$\bar{x}_k = \alpha \cdot \bar{x}_{k-1} + (1-\alpha) \cdot x_k$$

- 비교하기 쉽게 $\alpha = 1 - K$ 를 대입해보면,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha \cdot \bar{x}_{k-1} + (1-\alpha) \cdot x_k \\ &= \boxed{(1-K) \cdot \bar{x}_{k-1} + K \cdot x_k} \end{aligned}$$

- 1차 저주파 필터 : $(1 - K) \cdot \bar{x}_{k-1} + K \cdot x_k$
- 칼만 필터 : $(I - K_k)\hat{x}^-_k + K_k z_k$

칼만 필터의 실체 – 3

- 1차 저주파 필터 : $(1 - K)\cdot\underbrace{\boxed{\bar{x}_{k-1}}}_{\text{직전 추정값}} + K\cdot\underbrace{\boxed{x_k}}_{\text{측정값}}$
- 칼만 필터 : $(I - K_k)\underbrace{\boxed{\hat{x}_k^-}}_{\text{예측값}} + K_k\underbrace{\boxed{z_k}}_{\text{측정값}}$

- 1차 저주파 필터는 직전 추정값과 측정값에 가중치를 주고 더해서 추정값 계산
- 칼만 필터는 예측값과 측정값에 적절한 가중치를 곱한 다음, 두 값을 더해서 최종 추정값을 계산.

- 직전 추정값 대신 예측값을 사용한다는 점만 다를 뿐, 가중치를 부여하는 방식까지 같음.
- 즉, 칼만필터도 저주파 통과 필터와 똑같은 방법으로 추정값을 계산.
- 그러나 완전히 같지는 않다. 앞의 계산처럼 H를 I로 두었기에 같은 형태를 가지게 된 것.

저주파 필터와 구별되는 칼만 필터만의 특징

- 앞에서의 추정 과정에 해당하는 3부분.
- 저주파 필터와 구별되는 부분은 이 두 부분이다.
- 칼만 필터는 알고리즘을 반복하면서 K_k 와 P_k 값을 새로 계산한다.

3. 칼만 이득 계산

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + R)^{-1}$$

4. 추정값 계산

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

5. 오차 공분산 계산

$$P_k = P_k^- - K_k H P_k^-$$

오차 공분산

- 오차 공분산을 구하는 식은 아래와 같이 주어졌다.

  $$P_k = P_k^- - K_k H P_k^-$$

- 중요한 것은 오차 공분산의 의미를 아는 것이다.
- 오차 공분산은 칼만 필터의 추정값이 참값에서 얼마나 차이가 나는지를 나타내는 척도이다.
- 즉, 오차 공분산은 추정값의 정확도에 대한 척도.
- P_k 가 크면 추정 오차가 크고, P_k 가 작으면 추정 오차도 작다.

오차 공분산

- x_k 와 추정값($\hat{x}_k$), 오차 공분산(P_k) 사이에는 다음과 같은 관계가 성립.

$$x_k \sim N(\hat{x}_k \ , \ P_k)$$

- 변수 x_k 가 평균이 $\hat{x}_k$ 이고 공분산이 P_k 인 정규분포를 따른다는 뜻.
- 여기에 상당히 심오한 의미가 있다.
- 칼만 필터에는 변수 x_k 의 추정값에 대한 확률분포를 따져서 가장 확률이 높은 값을 추정값으로 선택한다는 의미. 라고 일단 받아들이고 넘어가자.

Kalman Filter 예측 과정

예측과정.

- 앞의 2단계가 예측과정에 해당한다.
- 예측 과정에서는 시각이 t_k 에서 t_{k+1} 로 바뀔 때, 추정값 $\hat{x}_k$ 가 어떻게 바뀌는지 추측한다.
- 즉, 현재시각의 추정값이 다음시각 t_{k+1} 에서는 어떤 값이 될지를 예측한다.
- **2. 추정값과 오차 공분산 예측**

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1}$$

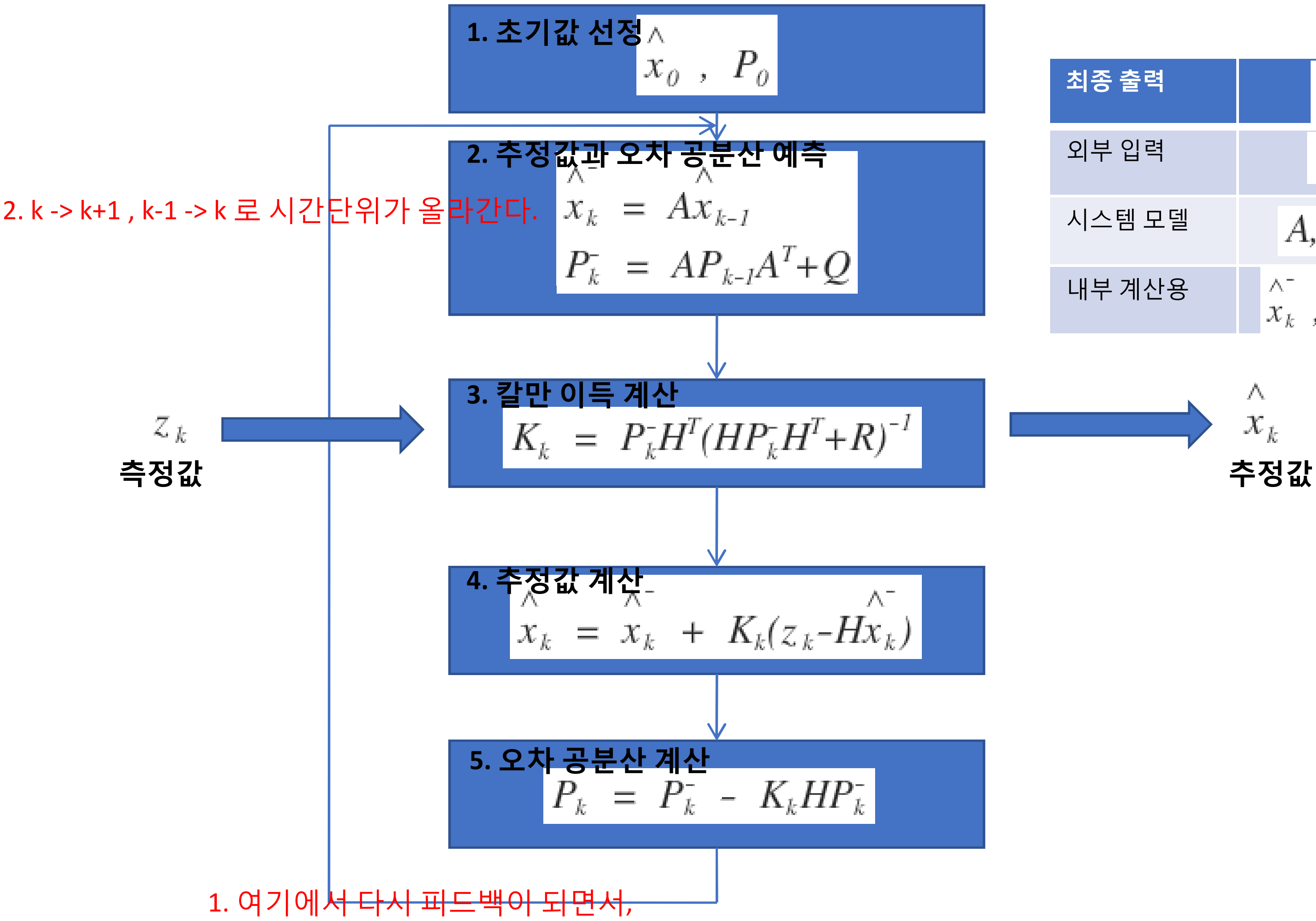
$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q$$

- 위의 식이 어떻게 나왔는지는 아직 몰라도 된다. 지금은 구현에 초점이 있다.
- 이 슬라이드에서는 유도과정을 아는 것보다,
- 예측값과 추정값의 차이를 이해하는 것이 더 중요하다.

예측과정.

- 전 단계인 추정 단계에서의 시간 단위가 t_k 였다면,
- 다시 예측단계로 돌아오는 단계에서의 시간단위는 t_{k+1} 이다.
- 다시 한번 알고리즘을 살펴보자.

Kalman Filter Algorithm 단계

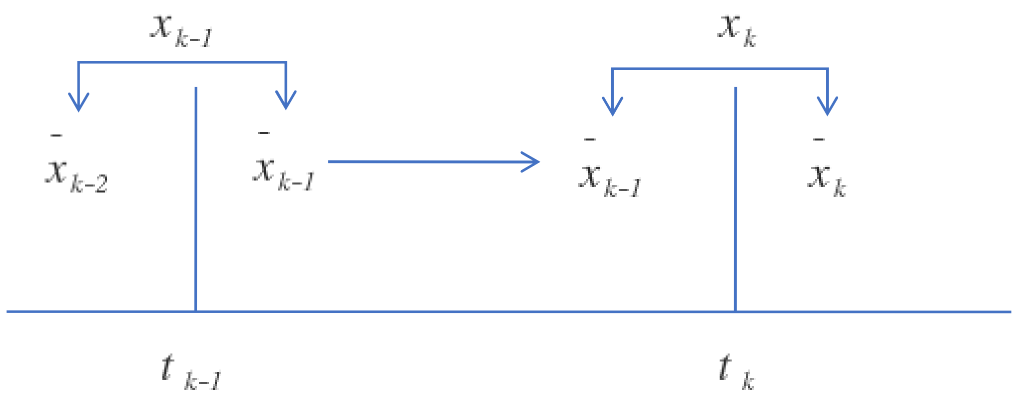


최종 출력	$\hat{x}_k$
외부 입력	z_k
시스템 모델	$A,\ H,\ Q,\ R$
내부 계산용	$\hat{x}^-_k$, P^-_k , P_k , K_k

예측과 추정의 차이

- 1차 저주파 통과 필터의 추정값 계산식을 먼저 살펴보자.

$$\bar{x}_{k-1} = \alpha \cdot \bar{x}_{k-2} + (1-\alpha) \cdot x_{k-1}$$



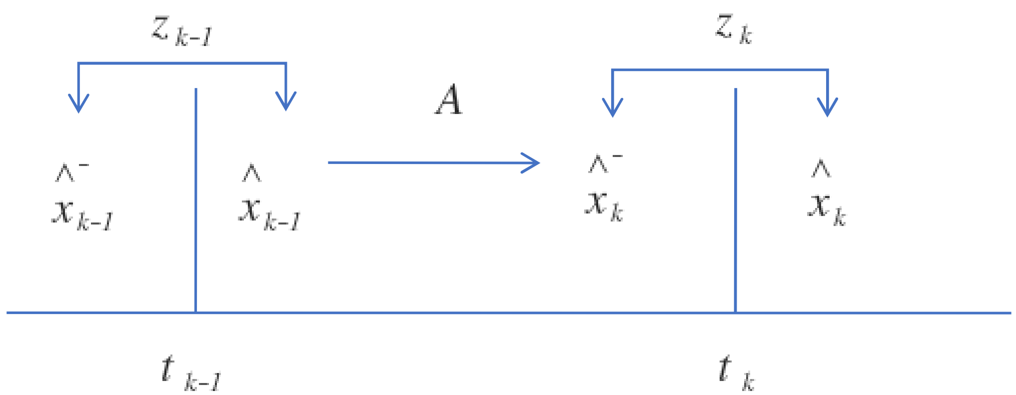
- 중간에 별도의 단계를 거치지 않고, 새로운 추정값 계산에 직전 추정값 $\bar{x}_{k-1}$ 을 그대로 사용.
- 시간 t_{k-1} 에서 t_k 로 넘어갈 때, 직전 추정값에 어떤 변화도 주지 않음.

예측과 추정의 차이

- 칼만 필터의 추정값 계산식을 살펴보자.

$$\hat{x}_k = \boxed{\hat{x}^-_k} + K_k(z_k - H\hat{x}^-_k)$$

예측값이 자리를 잡고 있다. 이 예측값은 $\hat{x}^-_k = A\hat{x}_{k-1}$ 수식으로 구해진다.



- 칼만 필터에는 추정값을 계산할 때, 직전 추정값을 바로 쓰지 않고 예측 단계를 거침.
- 양쪽화살표는 추정이고, A를 거치는 과정이 예측

Kalman Filter 시스템 모델

시스템 모델의 중요성.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - H\hat{x}_k^-)$$

- 위의 추정 계산식을 다시 한번 살펴보면, $H\hat{x}_k^-$ 는 측정값의 예측값.
- $z_k - H\hat{x}_k^-$ 는 실제 측정값과 측정값의 예측값의 차이. 즉, 측정값의 예측오차.
- 그렇다면, 칼만 필터의 추정식의 의미는,
- 측정값의 예측오차로 예측값을 적절히 보정해서 더한 후 최종 추정값을 계산한다 라고 할 수 있음.
- 즉, 중요한건 예측값의 정확성.
- 그런데 예측값의 정확성은 시스템모델의 A와 Q가 관여.
- 두 값이 예측값에 결정적인 영향을 끼치게 됨.
- 즉, 칼만 필터는 시스템 모델을 제대로 설정하는 것이 정말 중요함.

시스템 모델의 중요성.

- 시스템 모델을 알면 코드 몇번 두드리면 칼만필터를 구현해 내는 것은 어렵지 않음.
- 문제는 시스템을 수학적으로 모델링하여 시스템 모델을 유도해 내는 일이 너무나 중요함.

- 칼만필터에는 선형 모델과 비선형 모델을에 대한 대응책이 있음.
- 세상 모든 것들은 거의 비선형 모델임.
- 그러나, 우리는 접하기 쉽게 가기 위해 먼저 선형모델부터 살펴볼 필요가 있음.

시스템 모델

$$x_{k+1} = Ax_k + w_k$$

$$z_k = Hx_k + v_k$$

상태공간모델 : 운동방정식을 상태변수 벡터에 대해 방정식으로 표현한 모델.

x_k : 상태변수, (nx1) 열벡터

z_k : 측정값, (mx1) 열벡터

A : 상태 전이행렬, (mxn) 행렬

H : (mxn) 행렬

w_k : 잡음, (nx1) 열벡터

v_k : 측정 잡음, (mx1) 열벡터

상태공간모델의 선형모델과 비선형모델 비교

1. 상태공간모델

$$x_{k+1} = \boxed{Ax_k} + w_k \quad \Longleftrightarrow \quad x_{k+1} = \boxed{f(x_k)} + w_k$$

$$z_k = \boxed{Hx_k} + v_k \quad \Longleftrightarrow \quad z_k = \boxed{h(x_k)} + v_k$$

2. 예측값 수식

$$\hat{x}_k^- = \boxed{A\hat{x}_{k-1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{x}_k^- = \boxed{f(\hat{x}_{k-1})}$$

3. 추정값 수식

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - \boxed{H\hat{x}_k^-}) \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - \boxed{h(\hat{x}_k^-)})$$

단지 선형함수가 비선형함수로 바뀌었다는 점이 보이면 됩니다.

시스템 모델

$$\boxed{x_{k+1}} = A\boxed{x_k} + w_k$$

상태변수 : 거리, 속도, 무게 등 우리가 관심있는 물리적인 변수

$$z_k = Hx_k + v_k$$

$\boxed{x_k \quad \text{: 상태변수, (nx1) 열벡터}}$

z_k : 측정값, (mx1) 열벡터

A : 상태 전이행렬, (mxn) 행렬

H : (mxn) 행렬

w_k : 잡음, (nx1) 열벡터

v_k : 측정 잡음, (mx1) 열벡터

시스템 모델

$$x_{k+1} = Ax_k + \boxed{w_k}$$

$$z_k = Hx_k + \boxed{v_k}$$

잡음 : 백색잡음으로 가정.(모든 주파수 성분을 다 가지고 있는 잡음.)

x_k : 상태변수, (nx1) 열벡터

z_k : 측정값, (mx1) 열벡터

A : 상태 전이행렬, (mxn) 행렬

H : (mxn) 행렬

w_k : 잡음, (nx1) 열벡터

v_k : 측정 잡음, (mx1) 열벡터

w_k : 시스템에 유입되어 상태변수에 영향을 주는 잡음

v_k : 센서에서 측정되는 잡음

시스템 모델

$$x_{k+1} = \boxed{A}x_k + w_k$$

$$z_k = \boxed{H}x_k + v_k$$

A, H : 모든 성분이 상수인 행렬.

x_k : 상태변수, (nx1) 열벡터

z_k : 측정값, (mx1) 열벡터

A : 상태 전이행렬, (mxn) 행렬

H : (mxn) 행렬

w_k : 잡음, (nx1) 열벡터

v_k : 측정 잡음, (mx1) 열벡터

A : 시간에 따라 시스템이 어떻게 움직이는지 나타냄. 즉, 운동방정식을 담고 있음.

H : 측정값과 상태 변수의 관계를 나타냄.

시스템 모델과 관련된 두 식.

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - \boxed{H}\hat{x}_k^-)$$

$$\hat{x}_k^- = \boxed{A}\hat{x}_{k-1}$$

이 행렬값을 어떻게 구하나?
⇒어떤 물리적인 변수의 값을 칼만 필터를 통해 추정해갈 것인가에 따라 달라진다.
⇒ 뒷편의 예제에서 어떻게 구해가는지 확인하여 감을 익히면 되겠다.

잡음의 공분산

- 보통 잡음은 다음에 어떤 값이 나올지 예측할 수 없음.
- 즉, 순전히 통계적인 추정이 없으면 값을 예측하기 힘듬.
- 그래서 잡음을 표현할 때에는 통계학을 사용.
- 그런데, 이 잡음이 상당히 불규칙적일 수 있지만,
- 칼만 필터에서는 잡음이 표준정규분포를 따른다고 가정한다.
- 즉, 잡음의 분산만 알면 된다. (표준정규분포에서는 평균은 0)
- 이전에서 칼만 필터 알고리즘을 다시 살펴보면,

Kalman Filter Algorithm 단계

1. 초기값 선정

$$\hat{x}_0 , \ P_0$$

2. 추정값과 오차 공분산 예측

$$\hat{x}^-_k = A\hat{x}_{k-1}$$

$$P^-_k = AP_{k-1}A^T + \boxed{Q}$$

3. 칼만 이득 계산

$$K_k = P^-_k H^T (HP^-_k H^T + \boxed{R})^{-1}$$

4. 추정값 계산

$$\hat{x}_k = \hat{x}^-_k + K_k(z_k - H\hat{x}^-_k)$$

5. 오차 공분산 계산

$$P_k = P^-_k - K_k H P^-_k$$

z_k
측정값

$\hat{x}_k$
추정값

최종 출력	$\hat{x}_k$
외부 입력	z_k
시스템 모델	$A,\ H,\ \boxed{Q},\ \boxed{R}$
내부 계산용	$\hat{x}^-_k ,\ P^-_k ,\ P_k ,\ K_k$

잡음의 공분산행렬

- 칼만 필터의 상태 모델의 잡음을 아래의 공분산 행렬로 표현함.
- Q = w_k 의 공분산 행렬, (nxn) 대각행렬
- R = v_k 의 공분산 행렬, (mxm) 대각행렬
- 참고

공분산 행렬 : 변수의 분산으로 구성된 행렬.

대각행렬 : (1,1), (2,2),…,(n,n)을 제외한 대각선 위치 외의 성분은 모두 0인 행렬.

w_k : 시스템에 유입되어 상태변수에 영향을 주는 잡음

v_k : 센서에서 측정되는 잡음

잡음의 공분산

- 행렬 Q와 R은 잡음의 특성을 정확히 해석해서 정하는게 사실은 원칙.
- 그러나, 여러 오차가 작용하므로, 해석적으로 결정하기에는 사실 어려움.
- 내가 칼만 필터를 도입하고자 하는 시스템에 대한 시행착오를 겪어야 한다는 의미. (잡음의 특성을 분석하기 위해)
- 잡음의 정보를 최대한 활용하면서 시행착오를 거쳐 보정을 하며 적절한 값을 찾아 가야 한다는 의미.

- 근데 사실 말이 그렇지 이건 어느정도의.. 주먹구구식
- 그래도 어느 정도 값을 정하는 기준은 있지 않을까?
- 다음 슬라이드는 참고로만 이해하길..

잡음의 공분산 (R)

- 먼저 R이 들어간 식을 보면,

$$K_k = P_k^- H^T (H P_k^- H^T + \boxed{R})^{-1}$$

- R만 추출하고 싶으면, 이 행렬식이 모두 스칼라값이라고 가정하면,
- 식을 아래와 같이 쓸 수 있음.

$$K_k = \frac{P_k^- H^T}{H P_k^- H^T + \boxed{R}}$$

- R이 커지면 칼만 gain이 작아짐.
- 칼만 gain이 작아지면, 추정값의 식을 보았을 때, $(I - K_k)\hat{x}_k^- + K_k z_k$
- 예측값 비율이 올라가고, 측정값 비율이 올라감.
- 반대로 R이 작아져서 칼만 gain이 커지면
- 측정값 비율이 올라가고 예측값 비율이 작아짐.

잡음의 공분산 (Q)

- Q가 들어간 식을 보면,

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + \boxed{Q}$$

- Q가 커지면, 오차 공분산 예측값도 커짐.

$$K_k = \frac{P_k^- H^T}{HP_k^- H^T + \boxed{R}}$$

- 그러면 칼만 gain을 보면, R의 영향으로 분자가 약간 더 증가함. (임의값으로 확인해보면 됨)
- 즉, Q가 커지면 칼만 gain이 커지고, $(I - K_k)\hat{x}_k^- + K_k z_k$
- 측정값이 더 많이 반영됨을 알 수 있음.

잡음의 공분산

- 이러한 상관관계를 이해하고,
- 추후에 주먹구구이든, 실제로 잡음을 분석하든
- R과 Q값을 정해서 넣어야 한다.

- 다음 슬라이드는 물리모델을 칼만 필터를 적용하여 어떻게 설계하고 구현하느지의 절차를 아주 간단한 예제로 접목해보고자 한다.

Recursive Filter : 평균필터, 이동평균 필터, 저주파 통과 필터

What is a Kalman Filter ?: 개요, 추정, 예측, 시스템 모델

Let’s apply Kalman filter : 예제 1, 2, 3, 4

Kalman filter and nonlinear system : 확장 칼만 필터, Unscented 칼만필터

Recursive Filter : 평균필터, 이동평균 필터, 저주파 통과 필터

What is a Kalman Filter ?: 개요, 추정, 예측, 시스템 모델

Let's apply Kalman filter : 예제 1, 2, 3, 4

Kalman filter and nonlinear system : 확장 칼만 필터, Unscented 칼만필터