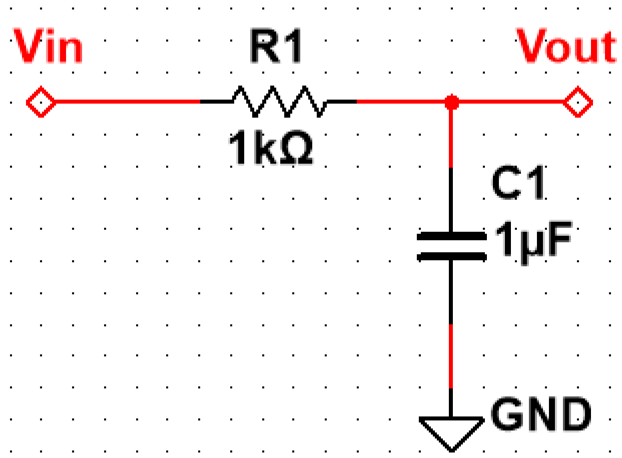
RC Filter Design

Innova Lee(이상훈)
gcccompil3r@gmail.com

먼저 RC Filter 의 회로를 생각해보도록 하자!

아래와 같은 RC 회로에 대해 해석해보도록 한다.



이를 해석하기에 앞서서 먼저 라플라스 변환을 수행하기 위한 적절한 형태로 저항, 인덕터, 커패시터를 설정한다.

$$q = CV, \qquad q = \frac{di}{dt}$$

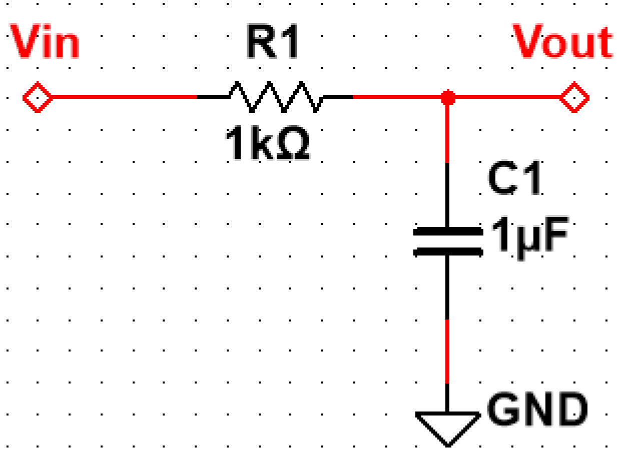
$$V_c(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \rightarrow \mathcal{L}[V_c(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt\right] \Rightarrow V_c(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$$ 커패시터

$$V_L(t) = L\frac{di(t)}{dt} \rightarrow \mathcal{L}[V_L(t)] = \mathcal{L}\left[L\frac{di(t)}{dt}\right] \Rightarrow V_L(s) = LsI(s)$$ 인덕터

$$V_R(t) = Ri(t) \rightarrow \mathcal{L}[V_R(t)] = \mathcal{L}[Ri(t)] \Rightarrow V_R(s) = RI(s)$$ 저항

먼저 입력에 대한 식을 세우도록 한다.

$$V_{in}(t) = Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \rightarrow \mathcal{L}[V_{in}(t)] = \mathcal{L}\left[Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt\right] \Rightarrow V_{in}(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = \left(R + \frac{1}{Cs}\right)I(s)$$



다음으로 출력 전압을 계산한다.

$$V_{out}(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C}\int_0^t i\,dt \rightarrow \mathcal{L}[V_{out}(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{1}{C}\int_0^t i\,dt\right] \Rightarrow V_{out}(s) = \frac{1}{Cs}I(s)$$

입출력비를 계산한다.

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{\frac{1}{Cs}}{\frac{RCs+1}{Cs}} = \frac{1}{RCs+1}$$

편의를 위해 RC 를 시정수 τ 라고 표현하도록 하고 출력을 Y, 입력을 X 로 치환하도록 한다.

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{\tau s + 1} \Rightarrow (\tau s + 1)Y = X$$

$$\mathcal{L}^{-1}[(\tau s + 1)Y] = \mathcal{L}^{-1}[X] \longrightarrow \tau\frac{d}{dt}y(t) + y(t) = x(t)$$

디지털 처리에 적합하게 차분 형태의 식으로 바꾼다.

$$\tau\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{t_{sample}}\right) + y_n = x_n \longrightarrow \tau(y_n - y_{n-1}) + y_n t_{sample} = x_n t_{sample} \longrightarrow (\tau + t_{sample})y_n = \tau y_{n-1} + t_{sample}x_n$$

이제 y_n 에 대해 정리해준다.

$$y_n = \frac{\tau}{\tau + t_{sample}}y_{n-1} + \frac{\tau}{\tau + t_{sample}}(x_n - x_{n-1})$$

해당 회로에서 차단 주파수를 찾고자 한다면 정의를 활용하도록 한다.

이 경우 임피던스 관점에서 회로를 해석해야 한다.
즉 DC 해석이 아닌 AC 해석을 수행해야 하는데 우선적으로 주파수 시스템에 대해 살펴볼 필요가 있다.

$$f = \frac{1}{T}, \qquad \lambda = \frac{c}{f} \Leftrightarrow \lambda = cT$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \Leftrightarrow v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{t} = \frac{2\pi}{T} \Leftrightarrow \theta = \omega t$$

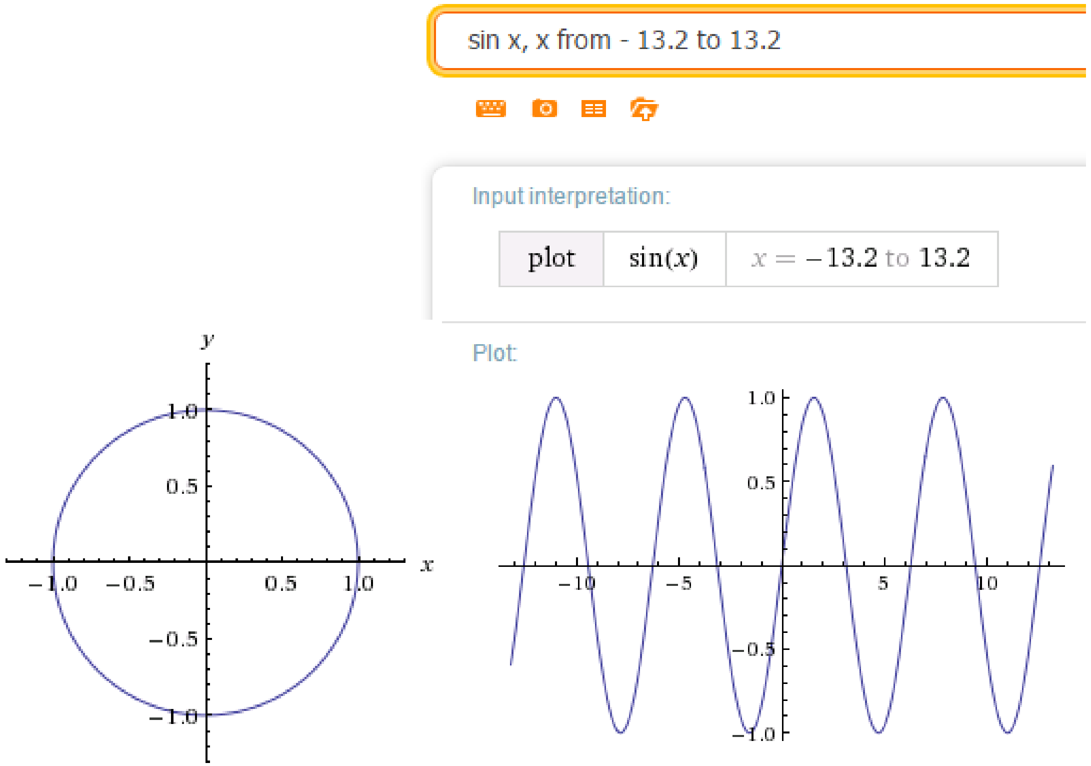
$$S = vt = r\theta \Leftrightarrow v = \frac{r\theta}{t} = r\omega = Sf$$

$$v = 2\pi r f = r\omega \Leftrightarrow \omega = 2\pi f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$S = \frac{v}{f} = \frac{2\pi}{\omega} r\omega = 2\pi r$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} r\omega = \frac{dr}{dt}\omega + \mathrm{r}\frac{d\omega}{dt} = v\omega + 0$$

$$a = v\omega = v\frac{v}{r} = \frac{v^2}{r}$$



$2\pi r$은 원의 둘레이고
한바퀴 돌았다는 것은 0 ~ 360도까지 회전하였다는 뜻이며
sin파의 입장에서는 1주기를 동작했음을 의미한다.

Phasor Domain

Domain Transformation은 어떤 정의역에 있는 일련의 변수를 다른 정의역에서 정의된 변수로 변환하는 수학적 과정이다.

이제 Time Domain에서 정의된 전류 및 전압이 Phasor Domain의 관련 전류 및 전압으로 어떻게 변환되며 이러한 변환으로 어떻게 AC Circuit을 쉽게 해석할 수 있는지 알아보도록 할 것이다.

AC System에서 KVL과 KCL은 Capacitor와 Inductor를 포함할 경우 미적분식으로 구성된다.
Phasor Analysis를 통해서 이를 미적분식이 아닌 단순한 방정식으로 전환시킬 수 있다.
특정 전압 혹은 전류를 Phasor Domain에서 해석한 후 이를 다시 Time Domain으로 가져오면 된다.
이 절차가 다소 복잡하지만 익숙해지면 별로 어렵지 않으며 무엇보다도 미분방정식을 푸는 것을 회피할 수 있다.

아무튼 전압 또는 전류를 나타내는 cos 함수 형태의 시변함수(Time-Varying Function) $x(t)$ **는 아래와 같이 표현할 수 있다.**

$$x(t) = \mathcal{R}e[Xe^{i\omega t}]$$

그리고 앞서 살펴봤던 Phasor가 추가될 경우를 생각해보도록 하자!

$$x(t) = \mathcal{R}e\left[Xe^{i\phi}e^{i\omega t}\right] = \mathcal{R}e\left[Xe^{i(\phi+\omega t)}\right] = |X|cos(\omega t + \phi)$$

이제 시간 영역과 페이저 영역을 살펴보도록 하자!

Time Domain	*Phasor Domain*
$v(t) = V_0 cos(\omega t)$	$V = V_0$
$v(t) = V_0 cos(\omega t + \phi)$	$V = V_0 e^{i\phi}$

Phasor Domain에서 위상이 0이므로 무조건 1이 곱해져서 위와 같은 결과가 되는 것이다.

$\phi = -\frac{\pi}{2}$라면 $v(t) = V_0 cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow V = V_0 e^{-i\pi/2}$

$v(t) = V_0 cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow V_0 sin(\omega t)$

$v(t) = V_0 sin(\omega t) \Leftrightarrow V = -iV_0$

$v(t) = V_0 sin(\omega t + \phi) \Leftrightarrow V = V_0 e^{i(\phi - \pi/2)}$

$sinx = \pm cos(x \mp 90^\circ)$

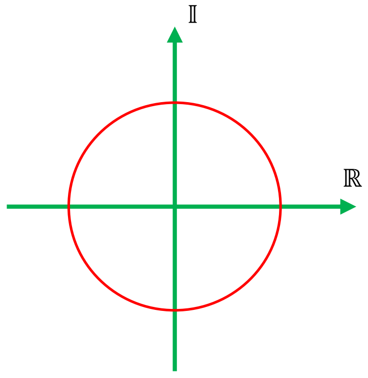
$-1 = e^{i\pi} = e^{-i\pi} = 1^{\angle 180^\circ}$

$i = e^{i\pi/2} = 1^{\angle 90^\circ}$

$-i = -e^{i\pi/2} = e^{-i\pi/2} = 1^{\angle -90^\circ} = 1^{\angle 270^\circ}$

$\sqrt{i} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{1/2} = \pm e^{i\pi/4} = \pm\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}$

$\sqrt{-i} = \pm e^{-i\pi/4} = \pm\frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$



또 이 값들을 미분 또는 적분을 거쳐야 할 경우가 있으므로 살펴볼 필요가 있다.

$$i(t) = \mathcal{R}e\left[Ie^{j\omega t}\right] = \mathcal{R}e\left[Xe^{i(\phi+\omega t)}\right] = |X|cos(\omega t + \phi)$$

커패시터나 인덕터를 살펴봐야할 때 미분과 적분이 필요할 수 있다.

고로 이 값을 살펴볼 필요성이 있다.

$$i(t) = \mathcal{R}e\left[Ie^{j\omega t}\right]$$

복소수와 전류가 서로 혼동을 줄 수 있으므로 복소수를 j로 표기하고 전류는 i로 표기한다.

$$\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\Re e\left(Ie^{j\omega t}\right)\right] = \Re e\left[\frac{d}{dt}\left(Ie^{j\omega t}\right)\right] = \Re e\left[j\omega Ie^{j\omega t}\right]$$

$$\frac{di}{dt} = j\omega I$$

그리고 적분은 아래와 같을 것이다.

$$\int i\,dt = \int \Re e\left[Ie^{i\omega t}\right] dt = \Re e\left[\int Ie^{i\omega t}\,dt\right] = \Re e\left[\frac{I}{i\omega}e^{i\omega t}\right] \Leftrightarrow \frac{I}{i\omega}$$

$Time\ Domain$	$Phasor\ Domain$
$A\cos(\omega t)$	A
$A\cos(\omega t + \phi)$	$Ae^{i\phi}$
$-A\cos(\omega t + \phi)$	$Ae^{i(\phi \pm \pi)}$
$A\sin(\omega t)$	$Ae^{-i\pi/2} = -iA$
$A\sin(\omega t + \phi)$	$Ae^{-i(\phi - \pi/2)}$
$-A\sin(\omega t + \phi)$	$Ae^{-i(\phi + \pi/2)}$
$\frac{d}{dt}\left(x(t)\right)$	$i\omega X$
$\frac{d}{dt}\left[A\cos(\omega t + \phi)\right]$	$i\omega Ae^{i\phi}$
$\int x(t)\,dt$	$\frac{1}{i\omega}X$
$\int A\cos(\omega t + \phi)\,dt$	$\frac{1}{i\omega}Ae^{i\phi}$

Impedance of Resistance

저항, 커패시터, 인덕터에 대한 임피던스를 알아볼 필요가 있다.

우선 저항부터 알아보도록 하자!
저항 R에 대한 V-I 관계는 아래와 같다.

$$v_R = i_R R$$

시간 영역의 물리량인 v_R i_R과 은 아래와 같이 Phasor Domain의 값과 연결된다.

$$v_R = \Re e\left[V_R e^{i\omega t}\right]$$

$$i_R = \Re e\left[I_R e^{i\omega t}\right]$$

임피던스상에서의 옴의 법칙을 적용하면 아래와 같다.

$$\Re e\left[V_R e^{i\omega t}\right] = R\,\Re e\left[I_R e^{i\omega t}\right] = \Re e\left[I_R R e^{i\omega t}\right]$$

양변을 정리하면 아래와 같은 식을 만들 수 있다.

$$\Re e\left[(V_R - I_R R)e^{i\omega t}\right] = 0$$

cos 방식이 아닌 sin 방식은 아래와 같이 표기할 수 있다.

$$\mathbb{I}m\left[(V_R - I_R R)e^{i\omega t}\right] = 0$$

$e^{i\omega t} \neq 0$ 이므로 아래와 같은 결과가 도출된다.

$$V_R - I_R R = 0$$

Phasor Domain에서 회로 소자의 임피던스(Impedance) Z는
플러스 전극을 통해 들어오는 Phasor Current에 대한 Phasor Voltage의 비율로 정의된다.

$$Z = \frac{V}{I}\,\Omega$$

Z의 단위는 ohm으로 저항의 경우 최종적으로 아래와 같이 표기할 수 있다.

$Z_R = \dfrac{V_R}{I_R} = R$ 즉, 저항은 Time Domain에서나 Phasor Domain에서나 모두 동일함을 볼 수 있다.

Impedance of Inductance

이번에는 인덕터에 대한 임피던스에 대해 알아보도록 하자!

시간 영역에서 인덕터 L의 전압 V_L 은 아래와 같이 i_L 로 표기된다.

$$v_L = L\frac{di_L}{dt}$$

Phasor V_L과 I_L 은 아래와 같이 Time Domain에서 대응된다.

$$v_L = \Re e\left[V_L e^{i\omega t}\right]$$

$$I_L = \Re e\left[I_L e^{i\omega t}\right]$$

결과적으로 아래의 식이 성립한다.

$$\Re e\left[V_L e^{i\omega t}\right] = L\frac{d}{dt}\left[\Re e\left(I_L e^{i\omega t}\right)\right] = \Re e\left[i\omega L I_L e^{i\omega t}\right]$$

위 식을 정리하면 아래와 같은 결과를 도출한다.

$$V_L = i\omega L I_L$$

고로 인덕터의 임피던스는 아래와 같다.

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = i\omega L$$

Phasor Domain에서 인덕터는 직류에서 단락 회로와 같이 작용하며
매우 높은 주파수에서는 개방 회로와 같이 동작한다.

Impedance of Capacitance

이번에는 커패시터에 대한 임피던스에 대해 알아보도록 하자!

시간 영역에서 커패시터 C 의 전류 i_C 는 아래와 같이 V_C 로 표기된다.

$$i_C = C\frac{dV_C}{dt}$$

Phasor V_C 과 I_C 은 아래와 같이 Time Domain에서 대응된다.

$$v_C = \Re e\left[V_C e^{i\omega t}\right]$$

$$I_C = \Re e\left[I_C e^{i\omega t}\right]$$

결과적으로 아래의 식이 성립한다.

$$\Re e\left[I_C e^{i\omega t}\right] = C\frac{d}{dt}\Re e\left[V_C e^{i\omega t}\right] = \Re e\left[i\omega C V_C e^{i\omega t}\right]$$

위 식을 정리하면 아래와 같은 결과를 도출한다.

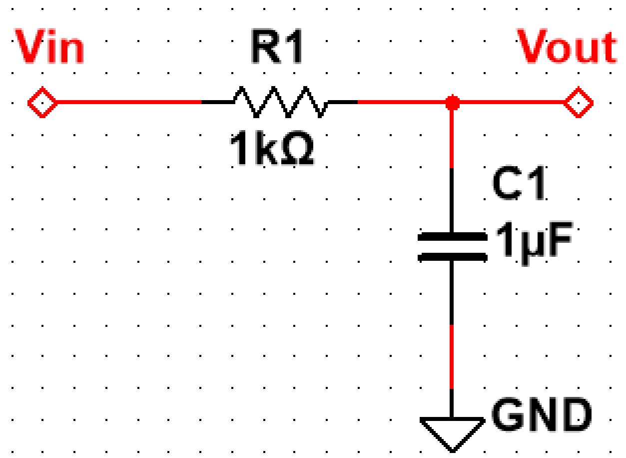
$$I_C = i\omega C V_C$$

고로 커패시터의 임피던스는 아래와 같다.

$$Z_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{i\omega C}$$

Phasor Domain에서 커패시터는 직류에서 개방 회로와 같이 작용하며
매우 높은 주파수에서는 단락 회로와 같이 동작한다.

Cut-off-Frequency



차단 주파수에 대해 알아보자!

앞서서 살펴본 임피던스 결과들을 보면 주파수가 증가함에 따라
유도성 리액턴스는 증가하고 용량성 리액턴스는 감소했음을 볼 수 있다.
이때 만약 저항과 리액턴스가 같아지는 주파수가 존재하면 이 주파수를 차단 주파수라고 하게 된다.
즉 우리의 시스템에서는 이 값을 설정하기가 아주 쉬운데 임피던스 값들을 쭉 열거 해보자!

$$Z_C = \frac{V_C}{I_C} = \frac{1}{i\omega C}, \qquad Z_R = \frac{V_R}{I_R} = R, \qquad Z_L = \frac{V_L}{I_L} = i\omega L$$

우리가 사용하는 저항과 커패시터가 같다고 가정하고 계산한다.

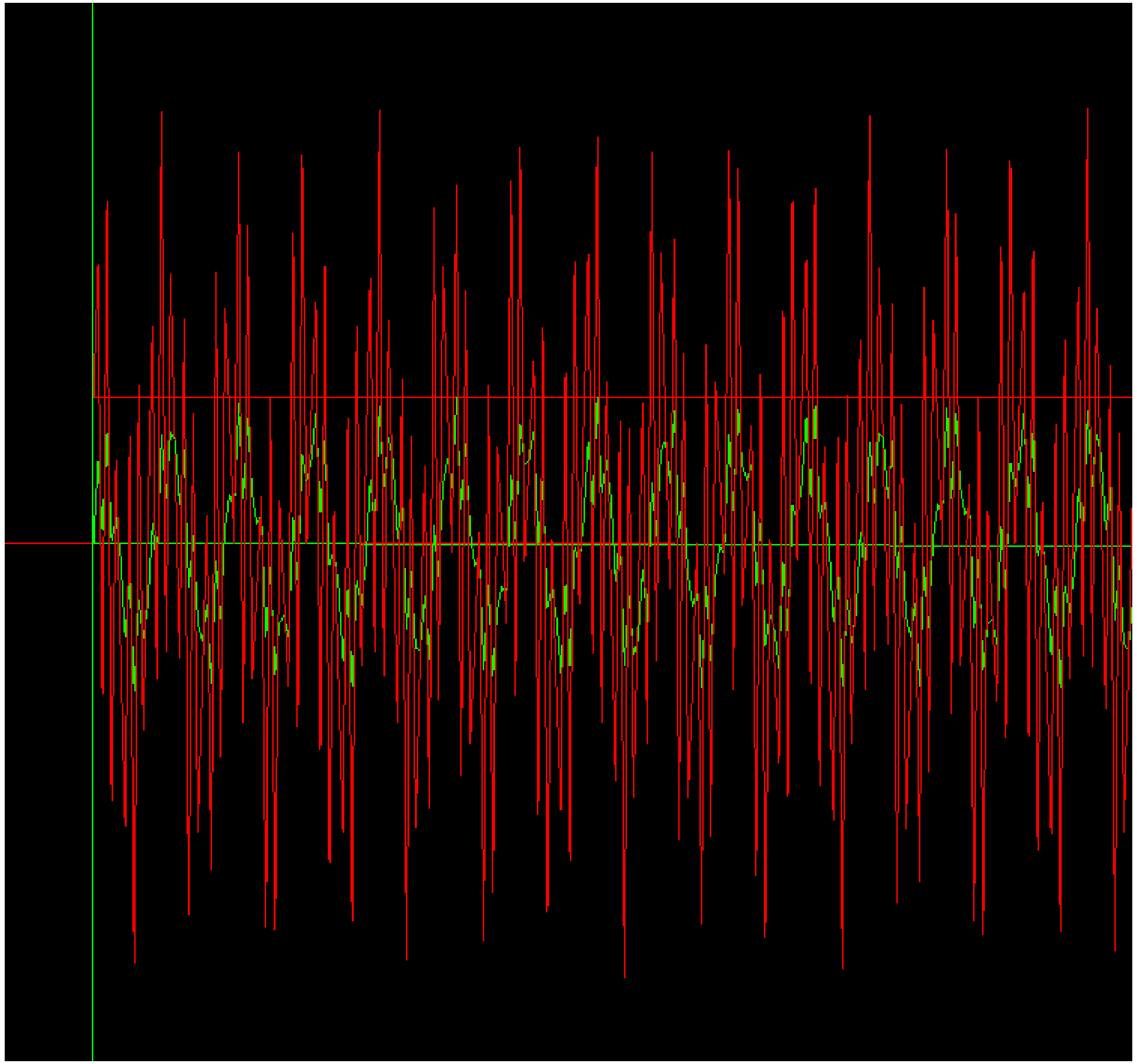
$$R = \frac{1}{\omega_{cut} C} \Longrightarrow \omega_{cut} = RC \longrightarrow f_{cut} = \frac{1}{2\pi RC} (\because \omega = 2\pi f)$$

이것에 입각하여 걸러내고자 하는 주파수를 차단 주파수에 맞추면 된다.

C Based Implementation Results

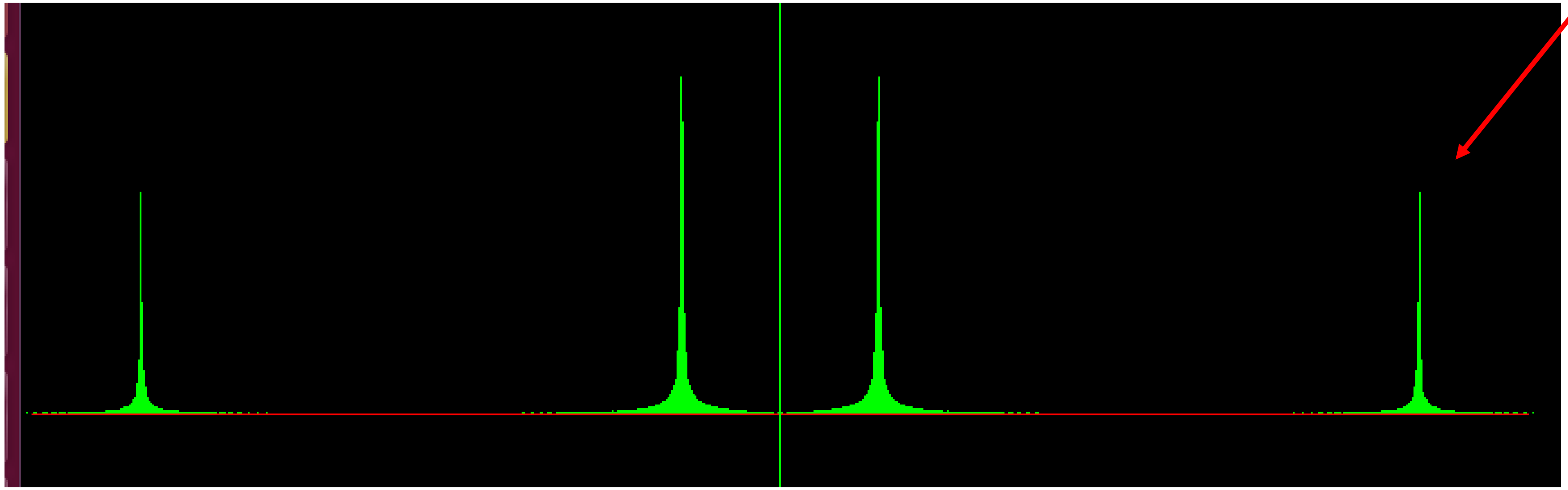
그래픽 처리는 OpenGL 로 작업하였다.

RED: Non-Filter
GREEN: Filter



C Based FFT Results

고주파 성분을 죽였음



그러나 만족할만큼 좋은 성능의 LPF 라고 볼 수는 없다.