

Identificación de un Modelo no Lineal Tipo Péndulo Invertido Rotativo

Miguel F. Arevalo, C. H. Rodríguez-G., Álvaro A. Patiño

Ingeniería en Automatización, Universidad de La Salle, Bogotá, Colombia

marevalo30@unisalle.edu.co, cerodriguez@unisalle.edu.co, alapatino@unisalle.edu.co

Abstract— The application of control systems is a critical task for automation process and it's necessary to achieve the technological advancement in any industrial sector. Nowadays, nonlinear control is one of the most discussed problems from different approaches, because in the real world all the systems are nonlinear, modeling and control methods only apply for approximation models, around a fixed operating point. In addition, the lack in general methodologies for nonlinear systems analysis and controls design, is an open field to research. This article shows the non-linear modeling of a Quanser rotary pendulum and its respective simulation, it will be a background for the development of Takagi-Sugeno identification methodology.

Keywords— Nonlinear control, Takagi-Sugeno Fuzzy Identification, Rotary Inverted Pendulum.

I. INTRODUCCIÓN

Los sistemas de control son una herramienta muy útil al momento de optimizar procesos, buscando un beneficio tanto en funcionamiento, como económico; con el avance de la tecnología, el desarrollo en los sistemas de control no se queda atrás, día a día se busca ampliar las características que involucran el desarrollo de los mismos, así como ampliar el campo de aplicabilidad en donde es posible implementar dichos sistemas. Para obtener el control de un sistema, regularmente, se busca que este tenga un comportamiento de carácter lineal, con el fin de lograr un control mucho más eficiente; sin embargo, esto en la industria es visto casi siempre como un ideal, ya que es muy difícil encontrar un sistema con comportamiento completamente lineal, razón por la cual es necesario, implementar técnicas de linealización para poder lograr un óptimo funcionamiento, o desarrollar técnicas de control que acepten la no linealidad de los sistemas. Al manejar un sistema no lineal, las técnicas de control convencional, no son capaces de solventar la magnitud de su implementación, por lo que el sistema no responde como se predetermina [1]. Es por esta razón que es necesario el desarrollo de técnicas de control avanzado, y es las que se encuentra el control difuso-óptimo, las cuales buscan de cierta manera, moldear dicho sistema no lineal, para que la respuesta del control sea cada vez más eficiente. Dentro de estas temáticas de control, el método más utilizado actualmente, es

el método de Linear Quadratic Regulator (LQR) [2] aplicado a un conjunto de plantas lineales que se mezclan de forma paralela para emular el comportamiento real de un sistema; estos algoritmos pueden llegar a ser implementados de diferente manera [3], sin embargo la base para su desarrollo, recae en la apropiada identificación del modelo a trabajar; la identificación de un sistema no lineal requiere de la implementación de un control básico inicial para lograr la excitación del sistema en un amplio rango de operación. El presente trabajo parte de una referencia teórica mostrada en la sección dos, en la sección tres se observa la metodología para el modelamiento e identificación de una planta de péndulo rotatorio invertido, cuyos resultados se pueden observar en la sección cuatro. Finalmente, en la sección cinco se presenta el análisis de las pruebas realizadas con la metodología planteada.

II. MARCO TEÓRICO

Dentro de los sistemas de control, es común encontrarse con sistemas de control no lineales, dado la naturaleza del funcionamiento de las ciencias físicas que recaen sobre el comportamiento de los sistemas. Para la identificación e implementación de técnicas de control adecuadas para este tipo de sistemas, se hace énfasis en una técnica de control, capaz de definir una serie de intervalos o puntos de operación, en donde bajo una metodología heurística, es posible obtener una salida del sistema a partir de la respuesta de un sensor; este tipo de control se conoce como control difuso o control borroso, denominado así, por el concepto de inferencia que maneja como explicación al funcionamiento de este tipo de control, ya que en este caso, las variables se describen a través de conjuntos de pertenencia a un concepto, no se opera con valores concretos; sin embargo es una estrategia factible para el desarrollo de controles no lineales, ya que al no manejar puntos específicos, sino regiones de operación, es posible llegar a considerar el sistema completo en todos sus puntos de operación dinámica, como una serie de subsistemas que pueden linealizarse, o que permiten una aproximación más accesible para el desarrollo de un control [4].

Este control difuso o borroso, puede llegar a ser implementado bajo diferentes principios dependiendo de la aplicación que se esté desarrollando, uno de ellos es el controlador difuso tipo Takagi Sugeno [14], el cual permite la integración de una serie de combinaciones lineales, para obtener una respuesta de acuerdo a las características del sistema, con lo cual, es la metodología más apropiada para la identificación de sistemas

y manejo de variables dentro de las ecuaciones en diferencia de cada modelo [5]. Esta metodología permite el desarrollo de inferencias que pueden ser comprendidas como sub-sistemas lineales en donde su respectivo control puede ser fácilmente realizable.

La implementación de estas estrategias de control mencionadas requiere en ocasiones de un gasto computacional elevado, y a su vez requerir de metodologías específicas para su implementación. A este respecto, un investigador en el área del control de la Universidad Politécnica de Madrid, el doctor Agustín Jiménez, ha desarrollado a lo largo de los últimos 10 años una serie de investigaciones acerca de la unión entre un controlador óptimo LQR y un controlador difuso tipo Takagi Sugeno, buscando minimizar al máximo el gasto computacional que éste genera, sin afectar los resultados propios del control, en cuanto a eficiencia; son varios los resultados que se reportan en la literatura, llevados a cabo, no solamente en la unión y desarrollo de estas metodologías de control [1][2], sino que ha buscado el desarrollo de nuevas metodologías de implementación, como por ejemplo el Linear Quadratic Gaussian (LQG) mediante el uso de filtros de Kalman.

El caso de estudio donde se aplicará la identificación del modelo, es una planta de péndulo rotatorio invertido; en sistemas dinámicos, este es uno de los principales modelos a ser tomados en cuenta por su complejidad, y por su conocido comportamiento no lineal; al ser un péndulo rotatorio, el brazo y el servomotor mezclan su dinámica en formas no lineales, y esto conlleva a la dificultad del modelamiento mediante las leyes de Newton, es por esta razón se utilizan las ecuaciones de Euler Lagrange basadas en la energía del sistema.[5][6]

III. METODOLOGÍA

El presente trabajo se realizará en cuatro fases:

Fase 1: se selecciona un sistema pendular acoplado a un sistema rotatorio, que permita su accionamiento por medio de un servomotor. Para tal fin, se utilizará una planta comercial tipo péndulo invertido Quanser, con la cual cuenta la facultad de Ingeniería de la Universidad de La Salle.

Fase 2: se realizará el proceso de modelado del sistema físico tipo péndulo invertido, aplicando los conceptos sobre leyes fundamentales y realizando una revisión bibliográfica de trabajos relacionados con el modelamiento de sistemas pendulares, esto con el propósito de replicar el comportamiento dinámico del dispositivo en un ambiente simulado donde sea eficiente evaluar la calidad de distintas alternativas de control. La primera aproximación al conocimiento de la planta será la linealización del modelo obtenido y el correspondiente diseño de un controlador lineal. Luego, se tomarán datos sobre simulación, para de forma cuantitativa, generar criterios de calidad y rendimiento del controlador en su primera versión lineal.

Fase 3: utilizando el modelo obtenido en la fase 2, se desarrollará una estrategia de identificación para el estabilizador pendular simulado. El objetivo es lograr un

modelo computacional basado en lógica difusa en un rango amplio de operación; los métodos de linealización conocidos logran un modelo con un rango de pendulación de +/- 10 grados aproximadamente; se espera, producto de la metodología de identificación, llegar a un modelo computacional que posea un rango de mínimo +/-20 grados.

La estrategia consiste en introducir, de forma progresiva, perturbaciones en un rango cada vez mayor en el sistema simulado, en todos los posibles puntos de operación razonables, con el propósito de extraer datos de funcionamiento entrada-salida y de esta forma poder construir un modelo difuso fiel al modelo matemático original.

Fase 3: se repite el procedimiento de la fase 3, pero con datos tomados de la planta real, para obtener un modelo T-S del péndulo Quanser.

IV. ESTRATEGIA DE CONTROL Y RESULTADOS

El desarrollo de las pruebas para obtener los resultados del trabajo, se llevan a cabo de manera secuencial, de acuerdo a la metodología presentada previamente, en los resultados que se mostrarán en este artículo, se hará énfasis en el modelo del sistema para su identificación real a través de un conjunto de sistemas lineales acoplados en una estructura difusa Takagi Sugeno.

En la fase 1, se hace una selección del mecanismo pendular a utilizarse, en este caso, como se menciona en la metodología, se trabaja con un péndulo rotatorio invertido de QUANSER, el cual se puede observar en la figura 1.



Figura 1. Péndulo rotatorio Quanser

A partir del péndulo seleccionado se busca la identificación del sistema con base en el modelamiento utilizado bajo las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (1)$$

La variable Q_i es llamada coordenada generalizada, para el sistema de un péndulo rotatorio invertido, se tiene que:

$$q^T = [\theta \quad \alpha] \quad (2)$$

Esta ecuación describe las variables a ser utilizadas en el sistema, el cual se presenta en la figura 2.

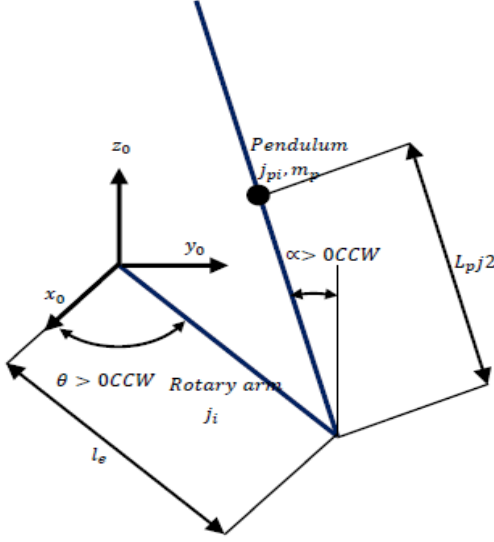


Figura 2. Esquema del péndulo rotatorio

A partir de esta imagen y de las ecuaciones 1 y 2, se determina que, α representa el ángulo del péndulo medido sobre un plano vertical en donde se toma un valor positivo en dirección anti-horaria, y negativo en dirección horaria; por otro lado, θ corresponde al ángulo de la base rotativa, relativa al plano horizontal del sistema, con una magnitud positiva en sentido anti-horario, y negativa en sentido horario; L_p es la longitud total del péndulo y por la uniformidad del brazo, $L_p/2$ es el centro de masa del sistema, los cuales poseen un momento de inercia representado por la variable J_p . La longitud del brazo rotatorio es L_r y su respectivo momento de inercia está representado como J_r . Aplicando la Ecuación de Euler-Lagrange mostrada en (1), el sistema del péndulo se define como:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \theta} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_1 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \alpha} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q_2 \quad (4)$$

Donde las fuerzas manejadas en cada eslabón son:

$$Q_1 = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (5)$$

$$Q_2 = -B_p \dot{\alpha} \quad (6)$$

En estas ecuaciones, las variables B_r y B_p son los coeficientes de fricción del brazo rotatorio y el péndulo respectivamente, y τ es el torque suministrado al sistema por medio del servomotor, a partir de estos valores es posible obtener el Lagrangiano, el cual se define como:

$$L \equiv T - V \quad (7)$$

Donde T es la energía cinética total y V es la energía potencial total del sistema, esta relación es conocida como el principio de mínima acción; para obtener el modelo dinámico del sistema se usa este Lagrangiano tomando las posiciones y las derivadas propuestas por las ecuaciones de Euler-Lagrange, el modelo obtenido para el péndulo rotatorio invertido es:

$$\left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4} m_p L_p^2 - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha)^2 + J_r\right) \ddot{\theta} - \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha)\right) \ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)\right) \dot{\theta} \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha)\right) \dot{\alpha} = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (8)$$

$$-\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2\right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) = -B_p \dot{\alpha} \quad (9)$$

El torque es la entrada del control del sistema, razón por la que es necesario considerar que cuando se implementa un sistema electromecánico, como el servomotor encargado de suministrar el torque del sistema, es necesario tener en cuenta este sistema dentro del modelamiento, la ecuación que define la dinámica del motor es:

$$\tau = \frac{n_g K_g n_m k_t (V_m - K_g k_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (10)$$

Las constantes n_g , n_m y K_g son parámetros que corresponden a constante de funcionamientos del motor internamente; el parámetro k_t es la constante de corriente del motor; V_m es la entrada de voltaje del sistema y R_m es la resistencia de armadura del modelo.

La deducción matemática y el valor de las constantes para obtener las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema mediante análisis de energía se han tomado del manual del fabricante Quanser [15].

A partir del desarrollo de todos estos cálculos, se desarrolla la implementación del modelo no lineal en Matlab, para la verificación y validación de la identificación del sistema, en la figura 3, se observa el modelo del sistema en simulink, en donde se puede realizar la verificación del funcionamiento.

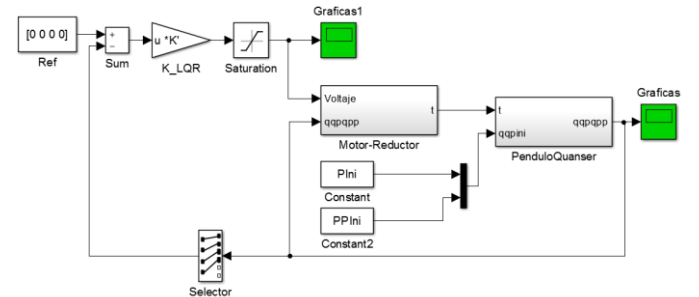


Figura 3. Diagrama de Bloques del Modelo Péndulo Invertido

A la dinámica del péndulo que se observa en la figura 3, es necesario incluir la dinámica del motor reductor que genera el movimiento de los eslabones, en este caso se trata de un motor DC de 6V nominales, el cual trabaja a una velocidad máxima de 6000 rpm con un torque máximo de 40.756 g-cm; en este caso la caja reductora amplifica el torque y disminuye la velocidad angular en una relación de 70. La implementación del modelo, debe tener en cuenta la relación entre la componente eléctrica del motor y su contra parte mecánica saturada en velocidad, dada las restricciones físicas del motor, se muestra en la Figura 4 el diagrama de bloques implementado para completar la simulación del sistema.

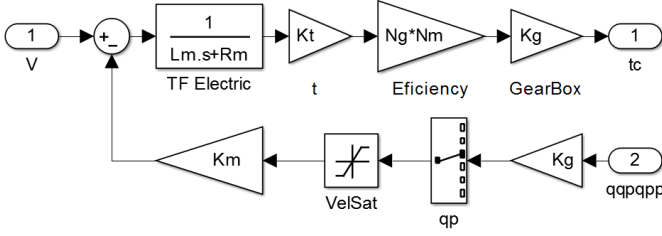


Figura 4. Diagrama de Bloques del Motor reductor del sistema

Para realizar la identificación apropiada del sistema, es necesario capturar los datos del sistema en equilibrio para un conjunto de estados que caractericen el sistema, usando el modelo de la Figura 3; los datos que se almacenan para la identificación son: la posición del brazo y polo, q , sus velocidades y aceleraciones, así como la entrada de excitación, u . El comportamiento de la posición del polo bajo diferentes condiciones iniciales se observa en la Figura 5. En la Figura 6, se presenta la correspondiente señal de voltaje para motor del brazo.

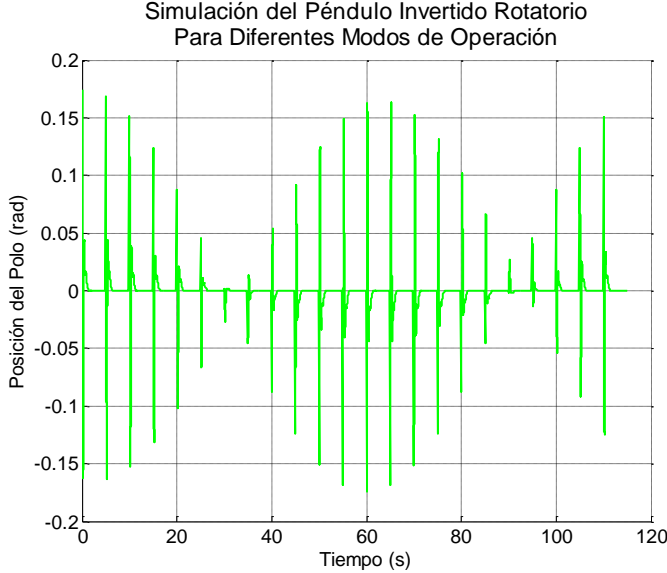


Figura 5. Datos capturados de la posición del péndulo.
Simulación del Péndulo Invertido Rotatorio
Para Diferentes Modos de Operación

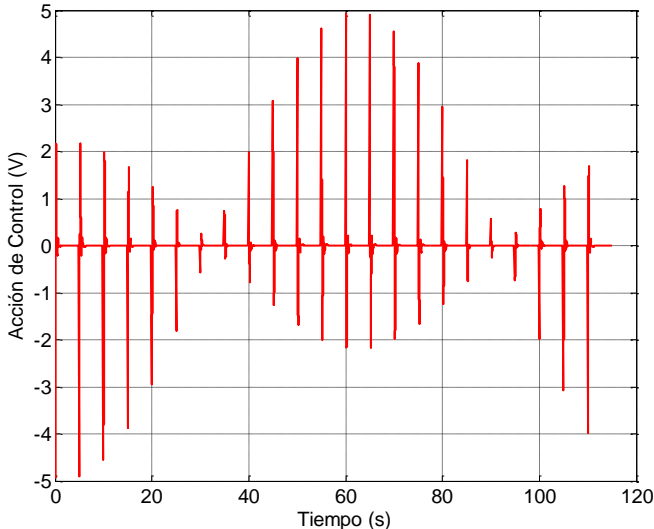


Figura 6. Datos capturados voltaje de excitación.

A partir de la respuesta del sistema en equilibrio, se plantea el método de identificación del sistema, un modelo difuso T-S de la forma:

$$R^1: \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^1, \dots, y \text{ } x_k \text{ es } A_k^1 \\ \text{entonces } y = p_0^1 + p_1^1 x_1 + \dots + p_k^1 x_k$$

$$R^n = \text{Si } x_1 \text{ es } A_1^n, \dots, y \text{ } x_k \text{ es } A_k^n \\ \text{entonces } y = p_0^n + p_1^n x_1 + \dots + p_k^n x_k$$

En donde la síntesis del modelo Takagi-Sugeno se representa como:

$$y = \sum_{i=1}^n (p_0^i B_i + p_1^i x_1 B_i + \dots + p_k^i x_k B_i) \quad (8)$$

Si un conjunto entrada-salida es disponible de la forma $J = \{x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{kj} \rightarrow y_j\}$ ($j = 1, \dots, m$) es posible obtener los parámetros del consecuente del sistema a través del método de Mínimos cuadrados, buscando la minimización del error en la salida generada por el modelo y los valores esperados, de la siguiente manera

$$J = \sum_{j=1}^m (y_j - \hat{y}_j)^2 = \|Y - XP\|^2 \quad (9)$$

En donde X, Y y P se arman respectivamente:

$$X = \begin{bmatrix} B_{11}, \dots, B_{n1}, B_{11}x_{11}, \dots, B_{n1}x_{11}, \dots, B_{11}x_{k1}, \dots, B_{n1}x_{k1} \\ \vdots \\ B_{1m}, \dots, B_{nm}, B_{1m}x_{1m}, \dots, B_{nm}x_{1m}, \dots, B_{1m}x_{km}, \dots, B_{nm}x_{km} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$Y = [y_1, \dots, y_m]^T \quad (11)$$

$$P = [p_0^1, \dots, p_0^n, p_1^1, \dots, p_1^n, \dots, p_k^1, \dots, p_k^n]^T \quad (12)$$

En donde los coeficientes B_{ij} se definen como:

$$B_{ij} = \frac{A_1^i(x_{1j}) \wedge \dots \wedge A_k^i(x_{kj})}{\sum_{i=1}^n (A_1^i(x_{1j}) \wedge \dots \wedge A_k^i(x_{kj}))} \quad (13)$$

La solución del problema de mínimos cuadrados es:

$$P = (X^T X)^{-1} X^T Y \quad (14)$$

Esta solución no aplica para conjunto solapados, para esto, se utiliza una variación, agregando un factor en el índice J de minimización, dejando la fórmula de la siguiente manera:

$$J = \|Y_a - X_a P\|^2 \quad (15)$$

En este caso, la matriz X_a es de rango completo, y, por lo tanto, la solución al problema de la minimización del error puede ser calculado; con los datos obtenidos en la captura de datos, se aplica la metodología de identificación Takagi-Sugeno para obtener las aceleraciones del modelo pendular

propuestos por las ecuaciones dinámicas; la respuesta del sistema se muestra en la figura 7.

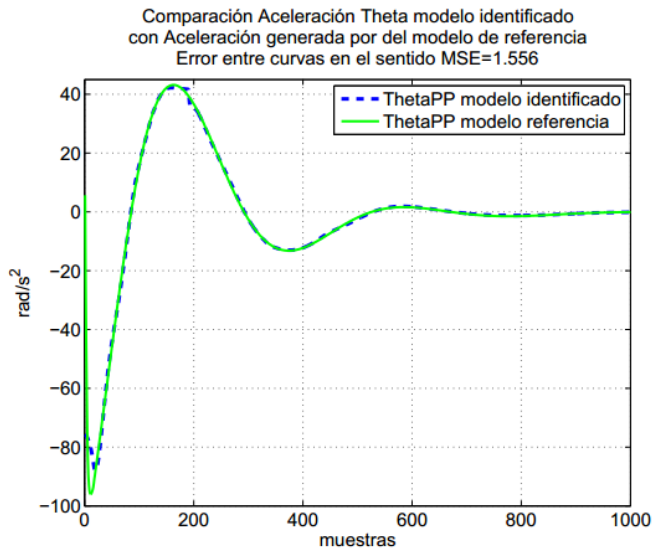


Figura 7. Señal de aceleración correspondiente al brazo del péndulo invertido.

Se puede observar que la identificación del sistema se lleva a cabo con una buena precisión con respecto al sistema original tomado como referencia, error mínimo cuadrático de 1.55. Comprobando así la metodología de identificación T-S.

Finalmente, se repite el experimento de identificación, pero esta vez, los datos de estado y de excitación son tomados de la planta real. En la Figura 8 se muestra las señales de posición del brazo y del polo, en la Figura 9 aparecen las señales de velocidad, y en la Figura 10, la señal de entrada al péndulo Quanser.

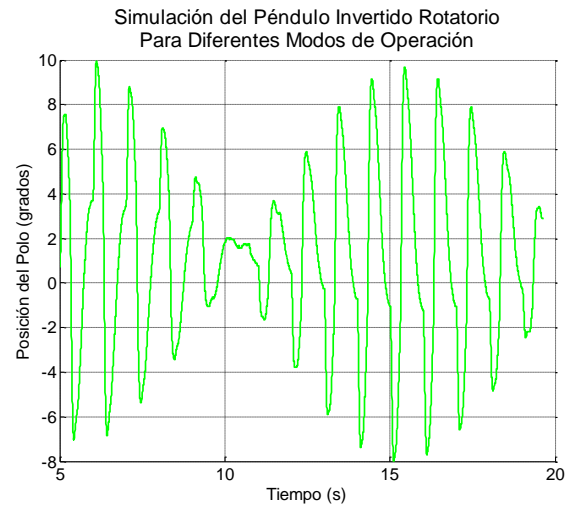
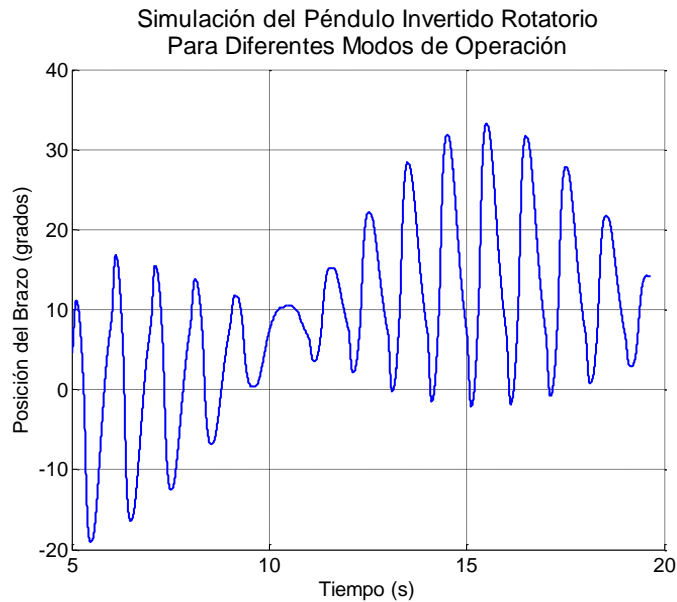


Figura 8. Señales de posición, correspondientes al brazo y al polo del péndulo invertido real.

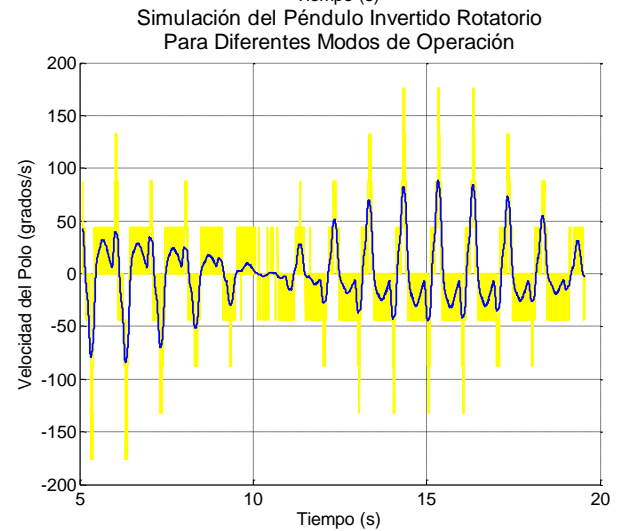
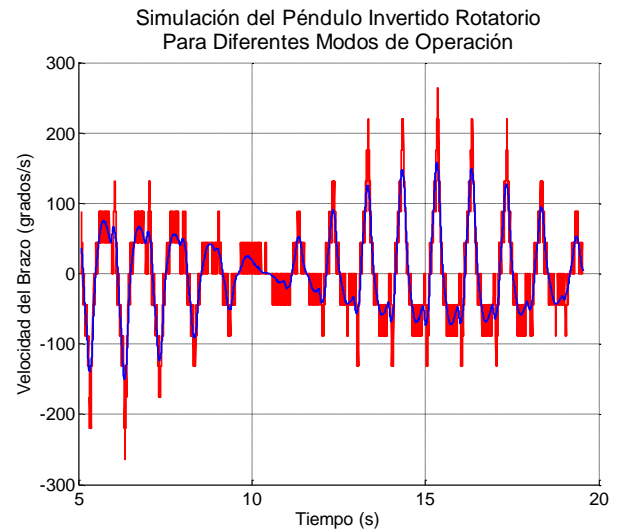


Figura 9. Señales de velocidad, correspondientes al brazo y al polo del péndulo invertido real. En azul, las señales filtradas.

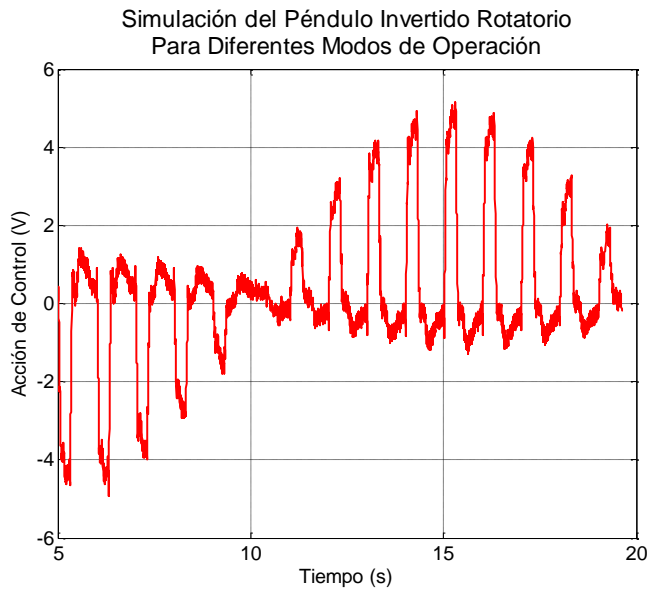


Figura 10. Señal de entrada al motor del péndulo invertido real.

Aplicando la estrategia de identificación Fuzzy T-S, modificada por Jiménez, con los datos reales de la planta, se obtiene un modelo consistente de un conjunto de sistemas lineales, para el experimento se utilizaron 3 universos de discurso, $[\alpha, \theta, \dot{\alpha}]$, dado que como se aprecia en las ecuaciones (8) y (9), la posición del brazo no interviene en las ecuaciones de aceleraciones del brazo y polo, respectivamente. Así mismo, para realizar el ajuste de mínimos cuadrados con los grados de libertad suficientes se emplearon particiones por universo de 7 conjuntos triangulares con solapamiento de 50%. La salida de del sistema identificado, es decir, las aceleraciones de la posición del brazo y polo, se pueden apreciar en la figura 11.

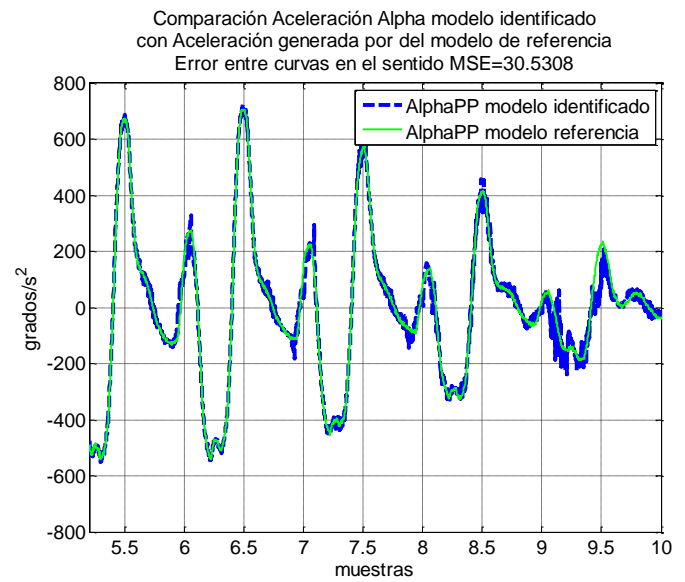
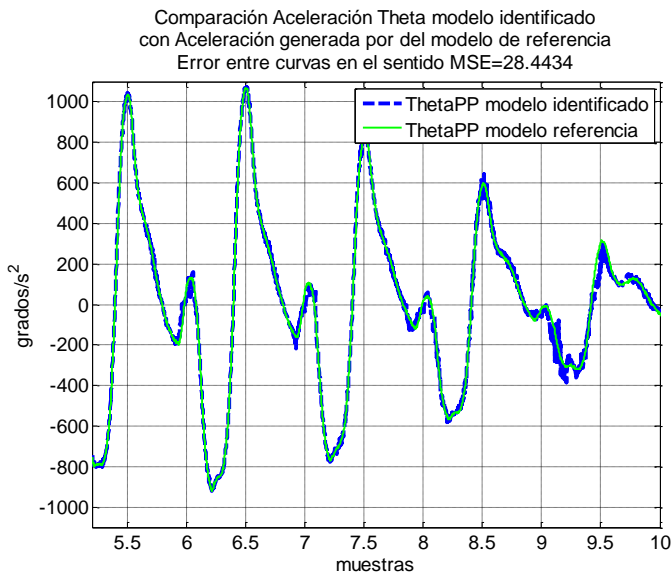


Figura 11. Señales de aceleración, correspondientes al brazo y al polo del péndulo invertido real.

V. CONCLUSIÓN

La identificación de un sistema de control no lineal, de carácter complejo como lo es un péndulo rotatorio invertido, necesita de un conocimiento bastante amplio de modelamiento de sistemas, dado que al tener mecánicas adicionales generadas no solamente por el péndulo, sino también por el servomotor y el brazo rotatorio, genera una dificultad para el modelamiento por leyes físicas naturales (Leyes de Newton), por lo cual, es necesario el uso de principios de robótica, como las ecuaciones de Lagrange-Euler.

Es necesario el desarrollo de una técnica de control básica, para poder hacer una correcta identificación del sistema, el péndulo rotatorio al ser un modelo no lineal, dificulta la captura de datos del modelo físico, dado que, bajo condiciones iniciales, es un sistema bastante inestable, y sin ningún tipo de controlabilidad.

A raíz de la complejidad del sistema, se implementó un control LQR para estabilizar en un punto de equilibrio y así poder realizar la toma de datos para posteriormente identificar el sistema. El control óptimo LQR es el mejor controlador posible respecto a un criterio de calidad, en la práctica este tipo de controladores exhibe una gran inmunidad ante perturbaciones, con lo cual es ideal para permitir la excitación del modelo no lineal controlado en el punto de equilibrio, a través de un conjunto de estímulos externos que actúan como perturbaciones, o a través de la toma de datos entrada salida partiendo de un conjunto de condiciones iniciales diferentes.

La estrategia de control utilizada para estabilizar el péndulo alrededor del punto de equilibrio, asume un modelo lineal en un rango de operación reducido, esta condición dificulta la correcta excitación del modelo no lineal fuera de dicho rango.

Los datos tomados sobre el sistema real, requieren ser filtrados para su correcta utilización dentro del algoritmo de

identificación. Para el experimento descrito se utilizó un filtro promedio en una ventana de 40 muestras. Sin embargo, el uso de un filtro de Kalman permitirá, en un trabajo posterior, observar el vector de estados en tiempo real, estimando la componente de ruido coloreado que contenga el proceso.

El análisis de las gráficas de movimiento del péndulo real, aparte del ruido observable, evidencian una componente dinámica de alta frecuencia generada por el controlador estabilizador, que mantiene el polo equilibrado en valores diferentes de cero por periodos pequeños de tiempo, aplicando un movimiento oscilatorio muy rápido. Para una mejor identificación se puede sintonizar el controlador para lograr trayectorias de control que terminen en el origen del espacio de estados,

El desarrollo de una correcta identificación del modelo dinámico del sistema tipo Takagi-Sugeno, permitirá la aplicación de cualquier ley de control sobre los subsistemas lineales que conforman el modelo, el cual será el paso a seguir dentro en la metodología de desarrollo, involucrando el sistema dentro de un caso de estudio donde se pueda validar la implementación desarrollada.

VI. BIBLIOGRAFÍA

- [1] B. Al-Hadithi, A. Jiménez y F. Matía, A new approach to fuzzy estimation of Takagi-Sugeno model and its applications to optimal control for nonlinear systems, *Applied Soft Computing*, nº 12, pp. 281-290, 2011.
- [2] A. Jiménez, B. Al-Hadithi y R. Haber-Haber, Improvement Of Takagi-Sugeno Fuzzy Model For The Estimation Of Nonlinear Functions, Madrid, 2012.
- [3] B. Al-Hadithi, A. Jiménez y M. Fernando, New methods for the estimation of Takagi-Sugeno model based extended Kalman filter and its applications to optimal control for nonlinear systems, Madrid, 2012.
- [4] B. Al-Hadithi, A. Jiménez y F. Matía, Variable Structure Control With Chattering Reduction Of A Generalized T-S Model, Madrid, 2013.
- [5] B. Al-Hadithi, A. J. Barragán, J. M. Andújar y A. Jiménez, Variable Structure Control with chattering elimination and guaranteed stability for a generalized T-S model, *Applied Soft Computing*, nº 13, pp. 4802-4812, 5 Septiembre 2013.
- [6] A. J. Barragán, B. M. Al-Hadithi, A. Jiménez y J. M. Andújar, A general methodology for online TS fuzzy modeling by the extended Kalman filter, *Applied Soft Computing*, nº 18, pp. 277-289, 27 Octubre 2014.
- [7] J. M. Andújar, A. J. Barragán, B. M. Al-Hadithi, F. Matía y A. Jiménez, Suboptimal Recursive Methodology for Takagi-Sugeno Fuzzy Models Identification, *Fuzzy Modeling and Control: Theory and Applications*, nº 9, pp. 25-47, 2014.
- [8] B. M. Al-Hadithi, A. Jiménez y R. Galán López, Fuzzy optimal control using generalized Takagi-Sugeno model for multivariable nonlinear systems, *Applied Soft Computing*, nº 30, pp. 205-213, 7 Febrero 2015.
- [9] Shiriaev, A.S.; Freidovich, L.B.; Spong, M.W., "Controlled Invariants and Trajectory Planning for Underactuated Mechanical Systems," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol.59, no.9, pp.2555,2561, Sept.2014 doi: 10.1109/TAC.2014.2308641.
- [10] Ortega, R.; Spong, M.W.; Gomez-Estern, F.; Blankenstein, G., "Stabilization of a class of underactuated mechanical systems via interconnection and damping assignment," *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol.47, no.8, pp.1218,1233, Aug 2002.doi: 10.1109/TAC.2002.800770
- [11] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd ed. Upper Saddle River, New Jersey. U.S. A.: Prentice-Hall, 2002.
- [12] Etienne, L.; Gennaro, S.Di; Barbot, J.-P., "Event Triggered observer-based control for linear systems with time varying uncertainties," *American Control Conference (ACC)*, 2015, vol., no., pp.1531,1536, 1-3 July 2015 doi: 10.1109/ACC.2015.7170950
- [13] Salgado, I.; Chairez, I.; Moreno, J.; Fridman, E., "Design of mixed Luenberger and sliding continuous mode observer using sampled output information," *Decision and Control (CDC)*, 2010 49th IEEE Conference on, vol., no., pp.5138,5143, 15-17 Dec. 2010 doi: 10.1109/CDC.2010.5717346.
- [14] Takagi, T., & Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE transactions on systems, man, and cybernetics*, (1), 116-132.
- [15] Apkarian J., Karam P., & Lévis M. Inverted Pendulum Experiment for Matlab. Quanser Innovate, Educate. 2011.