Kalman Filter 估计自回归模型系数

autuanliu@163.com

1 自回归模型

1.1 MVAR 模型

$$\mathbf{x}_n = \sum_{m=1}^{p} \mathbf{A}_m(n)\mathbf{x}_{n-m} + \mathbf{e}_n \tag{1.1.1}$$

式(1.1.1)中 $\mathbf{x}_n = [x_1(n), x_2(n), \cdots, x_K(n)]^T$ 代表 $K \times 1$ 的信号矩阵，K 是信号的个数。$\mathbf{e}_n = [e_1(n), e_2(n), \cdots, e_K(n)]^T$ 是 $K \times 1$ 的矩阵包含于信号不相关的白噪音，p 是模型的阶数，$\mathbf{A}_m(n)$ 是在时刻 n，延迟为 m 的 $K \times K$ 系数矩阵。

1.2 NMVAR 模型

$$\begin{aligned} y(t) = & \sum_{n=1}^{M}\sum_{p=0}^{n}\sum_{k_1,k_{p+q}}^{K} c_{p,q}(k_1,\cdots,k_{p+q}) \\ & \times \prod_{i=1}^{p} y(t-k_i) \prod_{i=p+1}^{p+q} x(t-k_i) + e_y(t) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

式(1.2.1)中 n 表示模型的非线性次数，M 表示模型的子系统个数，$p+q$，$k_1 = 1, \cdots, K$，$\sum_{k_1,k_{p+q}=1}^{K} \equiv \sum_{k_1=1}^{K} \cdots \sum_{k_{p+q}=1}^{K}$，$K$ 是模型的最大延迟，p,q 分别是输出项和输入项的次数。

1.3 NARMAX 模型

假设一个离散多元非线性随机控制系统有 m 个输出，r 个输入，那么该系统可以被描述为：

（mathtype 不能用了，这里打算新起一个文档，使用 AxMath 编辑公式了，难受）

2 State-Space 模型

状态空间模型包含一个系统转态方程和测量方程（MIMO case）。

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{F}\mathbf{x}_{n-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{n-1} + \mathbf{w}_n. \tag{2.1.1}$$

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{H}\mathbf{x}_n + \mathbf{v}_n \tag{2.1.2}$$

$$p(w) \sim N(0, Q) \tag{2.1.3}$$

$$p(v) \sim N(0, R) \tag{2.1.4}$$

式(2.1.1)中 $\mathbf{x}_n$ 是时间点 n 的状态向量，$\mathbf{u}_n$ 是时间点 n 的系统控制向量，$\mathbf{F}$ 是状态转移矩阵，$\mathbf{B}$ 是控制转移矩阵，$\mathbf{w}_n$ 是时间点 n 的过程噪音，$\mathbf{B}\mathbf{u}_{n-1}$ 这一项有时候可以省略，式(2.1.2)中 $\mathbf{z}_n$ 是观测序列，$\mathbf{H}$ 是测量矩阵，$\mathbf{v}_n$ 是时间点 n 的测量噪音。

3 Kalman Filter

Kalman Filter 是评估状态空间模型的状态的一种算法。

3.1 线性 Kalman Filter

线性系统可以被状态空间模型表示为：

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k \tag{3.1.1}$$

$$z_k = Cx_k + v_k \tag{3.1.2}$$

$$p(w) \sim N(0, Q) \tag{3.1.3}$$

$$p(v) \sim N(0, R) \tag{3.1.4}$$

预测过程：

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k \tag{3.1.5}$$

$$P_k = AP_{k-1}A^T + Q \tag{3.1.6}$$

更新过程：

$$G_k = P_k C^T \left(CP_k C^T + R\right)^{-1} \tag{3.1.7}$$

$$x_k \leftarrow x_k + G_k\left(z_k - Cx_k\right) \tag{3.1.8}$$

$$P_k \leftarrow \left(I - G_k C\right)P_k \tag{3.1.9}$$

以上的预测过程和更新过程是在观测值上的迭代。= 表示赋值操作，$\leftarrow$表示更新操作。

3.2 非线性 Extend Kalman Filter

非线性系统可以被状态空间模型表示为：

$$x_k = f\left(x_{k-1}, u_k\right) + w_k \tag{3.2.1}$$

$$z_k = h\left(x_k\right) + v_k \tag{3.2.2}$$

$$p(w) \sim N(0, Q) \tag{3.2.3}$$

$$p(v) \sim N(0, R) \tag{3.2.4}$$

预测过程：

$$x_k = f\left(x_{k-1}, u_k\right) \tag{3.2.5}$$

$$P_k = F_{k-1}P_{k-1}F_{k-1}^T + Q_{k-1} \tag{3.2.6}$$

更新过程：

$$G_k = P_k H_k^T \left(H_k P_k H_k^T + R\right)^{-1} \tag{3.2.7}$$

$$x_k \leftarrow x_k + G_k\left(z_k - h\left(x_k\right)\right) \tag{3.2.8}$$

$$P_k \leftarrow \left(I - G_k H_k\right)P_k \tag{3.2.9}$$

以上的预测过程和更新过程是在观测值上的迭代，F_{k-1}、H_k 分别为函数 f, h 的雅克比矩阵。= 表示赋值操作，$\leftarrow$表示更新操作。

4 自回归模型的 State-Space 形式

根据以上几个章节可知，自回归模型只有转化为状态空间模型才可以很好的使用卡尔曼滤波来估计系数。因为我们要评估模型的系数，所以模型的系数矩阵自然而然成为状态空间模型的状态，而时间序列的数值成为状态空间模型的观测值。

4.1 MVAR 模型的状态空间模型形式

对于 MVAR 模型我们做如下转化：（紧承 1.1 节符号表示）

$$\mathbf{a}_n = \mathrm{vec}\left(\left[\mathbf{A}_1(n), \mathbf{A}_2(n), \cdots, \mathbf{A}_p(n)\right]^T\right) \tag{4.1.1}$$

$$\mathbf{X}_n = \left(\mathbf{x}_{n-1}^T, \mathbf{x}_{n-2}^T, \cdots, \mathbf{x}_{n-p}^T\right) \tag{4.1.2}$$

$$\mathbf{C}_n = \mathbf{I}_K \otimes \mathbf{X}_n^T \tag{4.1.3}$$

式(4.1.1)中 $\mathrm{vec}(\bullet)$ 表示向量化函数，也即将 $\left[\mathbf{A}_1(n), \mathbf{A}_2(n), \cdots, \mathbf{A}_p(n)\right]^T$ 展开为向量，其维度为 $pK^2 \times 1$，其向量化方式应当是（举例），这个步骤是为了保证矩阵乘法的成立，具体理解可结合式(4.1.5)：

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0.5 \\ 0.7 & 1.2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a}_n = \mathrm{vec}([\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]^T) = \mathrm{vec}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0.5 \\ 0 & 4 & 0.7 & 1.2 \end{pmatrix}^T\right)$$

$$= \mathrm{vec}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 0.7 \\ 0.5 & 1.2 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0.5 \\ 0 \\ 4 \\ 0.7 \\ 1.2 \end{pmatrix}$$

式(4.1.2)中 $\mathbf{X}_n$ 是一个 $1\times Kp$ 的向量，包含之前 p 个时间点的观测值，式(4.1.3)中 $\mathbf{I}_K$ 是一个维度为 $K\times K$ 的单位矩阵，$\otimes$ 表示 Kronecker 乘积，$\mathbf{C}_n$ 是维度为 $pK^2\times K$ 的矩阵，用以代表测量转移矩阵。

假设自回归模型的系数是一个随机变化的模型，进一步可以假设状态转移矩阵是一个单位矩阵，也即式(2.1.1)中的 $\mathbf{F}$ 为单位阵，其维度为 $pK^2\times pK^2$。将式(4.1.1)代入式(2.1.1)，将式(4.1.2)和式(4.1.3)代入式(2.1.2)可以得到 MVAR 模型的状态空间模型表示形式为：

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{F}\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{w}_n = \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{w}_n \tag{4.1.4}$$

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{C}_n^T\mathbf{a}_n + \mathbf{v}_n \tag{4.1.5}$$

$$p(w) \sim N(0, \mathbf{Q}_n) \tag{4.1.6}$$

$$p(v) \sim N(0, \mathbf{R}_n) \tag{4.1.7}$$

式(4.1.4)中 $\mathbf{a}_n$ 是状态向量（$pK^2\times 1$），$\mathbf{w}_n$（$pK^2\times 1$）是过程噪音，其是均值为 0，方差矩阵为 $\mathbf{Q}_n$ 的高斯白噪音，式(4.1.5)中 $\mathbf{x}_n$ 是时间点 n 时的 $K\times 1$ 的信号观测值，$\mathbf{C}_n^T$ 是维度为 $K\times pK^2$ 的测量转移矩阵，$\mathbf{v}_n$（$K\times 1$）是测量噪音，其是均值为 0，方差矩阵为 $\mathbf{R}_n$ 的高斯白噪音。

根据以上的转化，我们已经将多变量线性自回归模型转化为状态空间模型，那么，就可以直接使用卡卡曼滤波的递归预测、更新步骤进行计算状态（模型的系数矩阵）。与标准卡尔曼滤波不同的是其需要动态更新 $\mathbf{Q}_n$ 和 $\mathbf{R}_n$。同时引入更新系数 λ，初始化方案为：$\mathbf{P}_0$ 为 $pK^2\times pK^2$ 的单位矩阵，$\mathbf{Q}_0 = \lambda\mathbf{I}_L$，$\mathbf{I}_L$ 为 $pK^2\times pK^2$ 的单位矩阵。$\mathbf{a}_0$ 初始化为均值 0，方差 $\mathbf{P}_0$ 的随机数值。文献[1][3]对 $\mathbf{Q}_n$ 的定义不相同，这里我们均做尝试，选出最好的方式。文献 3 中涉及光滑化，效果应当更好。综合文献[1][2][3][4],这里我们采用并实现文献[3]的光滑化方案，并比较文献[1]的更新方案。

5 估计系数

采用文献[3]提到的双 kalman 滤波器方法，即先正向（forward）构造一个滤波器得到系数的估计 a_n^f 和预测误差 P_n^f，之后使用 forward 步骤中最后得到的状态来初始化一个滤波器，反向（backward）构造一个滤波器得到系数的估计 a_n^b 和预测误差 P_n^b，最后将得到的结果进行光滑处理，那么最终的系数估计为：

$$a_n^s = \left(\left(P_n^f \right)^{-1} + \left(P_n^b \right)^{-1} \right)^{-1} \left(\left(P_n^f \right)^{-1} a_n^f + \left(P_n^b \right)^{-1} a_n^b \right) \tag{5.1.1}$$

smoother 光滑器得到的结果。

6 参考文献

1. Accurate epileptogenic focus localization through time-variant functional connectivity analysis of intracranial electroencephalographic signals
2. A new Kalman filter approach for the estimation of high-dimensional time-variant multivariate AR models and its application in analysis of laser-evoked brain potentials
3. Dynamic Granger causality based on Kalman filter for evaluation of functional network connectivity in fMRI data
4. Seizure-Onset Mapping Based on Time-Variant Multivariate Functional Connectivity Analysis of High-Dimensional Intracranial EEG: A Kalman Filter Approach