Devoir maison n° 3

Vendredi 18 octobre

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Premier problème

Solutions d'une équation différentielle

1. (a) Soit $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$. On note M le point de coordonnées (α, β). Alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_\lambda &\iff f_\lambda(\alpha) = \beta \\ &\iff \frac{\ln \alpha + \lambda}{1+\alpha^2} = \beta \\ &\iff \lambda = \beta\left(1+\alpha^2\right) - \ln \alpha \end{aligned}$$

On trouve bien une et une seule solution. Donc :

$$\boxed{\text{Par } M \text{ passe une et une seule courbe } (\mathcal{C}_\lambda)}$$

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. la fonction ln étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit par les théorèmes usuels que f_λ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda,\ f_\lambda \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

(c) D'après les théorèmes usuels :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad f'_\lambda(x) &= \frac{\frac{1}{x}\left(1+x^2\right) - 2x(\ln x + \lambda)}{\left(1+x^2\right)^2} \\ &= \frac{\left(1+x^2\right) - 2x^2(\ln x + \lambda)}{x\left(1+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

Or, $x\left(1+x^2\right)^2 > 0$ pour tout $x > 0$, donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Pour tout } x > 0,\ f'_\lambda(x) \text{ est du signe de :} \\ g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2(\ln x + \lambda)\end{array}}$$

(d) D'après les théorèmes usuels, g_λ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad g'_\lambda(x) &= 2x - 4x(\ln x + \lambda) - 2x^2\frac{1}{x} \\ &= -4x(\ln x + \lambda) \end{aligned}$$

Puisque $4x > 0$ pour tout $x > 0$, $g'_\lambda(x)$ est du signe de $-(\ln x + \lambda)$. Donc :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad g'_\lambda(x) = 0 &\iff -(\ln x + \lambda) = 0 \\ &\iff x = e^{-\lambda} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad g'_\lambda(x) \geqslant 0 &\iff -(\ln x + \lambda) \geqslant 0 \\ &\iff \ln x + \lambda \leqslant 0 \\ &\iff x \leqslant e^{-\lambda} \end{aligned}$$

De plus, par croissances comparées, $x^2 \ln x$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0, donc :

$$g_\lambda(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x - 2x^2\lambda \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

Toujours par croissances comparées :

$$g_\lambda(x) = -2x^2 \ln x \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2 \ln x} - \frac{1}{2}\frac{1-2\lambda}{\ln x}\right)}_{\xrightarrow[x \to +\infty]{} 1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

Enfin :

$$g_\lambda\left(e^{-\lambda}\right) = 1 + e^{-2\lambda} - 2e^{-2\lambda}\left(\ln e^{-\lambda} + \lambda\right) = 1 + e^{-2\lambda}$$

On en déduit le tableau de variations de g_λ :

x	0		$e^{-\lambda}$		$+\infty$
$g'_\lambda(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$g_\lambda(x)$	‖ 1	↗	$1+e^{-2\lambda}$	↘	$-\infty$

Puisque $g_\lambda\left(e^{-\lambda}\right) = 1 + e^{-2\lambda} \geqslant 0$, que $g_\lambda(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ et que g_λ est continue sur $\left[e^{-\lambda}, +\infty\right[$, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires (généralisé) que l'équation $g_\lambda(x) = 0$ admet au moins une solution sur $\left[e^{-\lambda}, +\infty\right[$. g_λ étant *strictement* décroissante sur cet intervalle, on en déduit que cette solution est unique sur cet intervalle. Comme de plus $g_\lambda(x) \geqslant 1$ pour tout $x \in \left]0, e^{-\lambda}\right[$, on en déduit que cette solution est unique sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\boxed{\text{L'équation } g_\lambda(x)=0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

(e) Le tableau de variation de g_λ nous donne le signe de $f'_\lambda(x)$. De plus :

$$f_\lambda(x)=\frac{\ln x+\lambda}{1+x^2}\xrightarrow[x\to 0]{}-\infty$$

Et par croissances comparées :

$$f_\lambda(x)=\frac{\ln x}{x^2}\frac{1+\frac{\lambda}{\ln x}}{1+\frac{1}{x^2}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Enfin, en utilisant le fait que $g_\lambda(m_\lambda)=0$, c'est-à-dire que $1+m_\lambda^2-2m_\lambda^2(\ln m_\lambda+\lambda)=0$, il vient :

$$f_\lambda(m_\lambda)=\frac{\ln m_\lambda+\lambda}{1+m_\lambda^2}=\frac{1+m_\lambda^2}{2m_\lambda^2}\frac{1}{1+m_\lambda^2}=\frac{1}{2m_\lambda^2}$$

On en déduit le tableau de variations de f_λ :

x	0		m_λ		$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	$\|$	$+$	0	$-$	
$f_\lambda(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2m_\lambda^2}$	$\searrow$	0

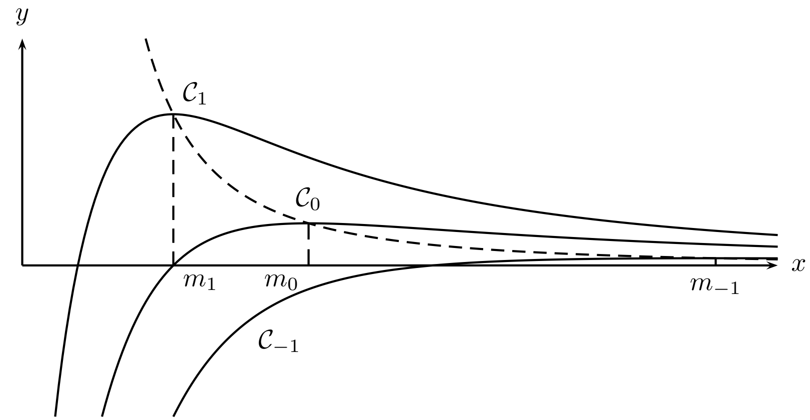
(f) En utilisant la méthode de dichotomie en s'aidant de la calculatrice, on obtient :

$$4,58\leqslant m_{-1}\leqslant 4,59 \text{ et } 1,89\leqslant m_0\leqslant 1,90$$

De plus, pour $\lambda=1$, on remarque que :

$$g_1(1)=1+1^2-2(\ln 1+1)=0$$

Donc $m_1=1$.



2. (a) Pour $\lambda>0$:

$$\begin{aligned} g_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right) &= 1+\frac{1}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda^2}\left(\ln\frac{1}{\lambda}+\lambda\right)\\ &= 1+\frac{1}{\lambda^2}+2\frac{\ln\lambda}{\lambda^2}-\frac{2}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}1\end{aligned}$$

Il existe donc un réel α_1 tel que pour tout $\lambda\geqslant\alpha_1$ on ait $g_\lambda(1/\lambda)\geqslant 0$. De même, pour $\lambda>0$

$$\begin{aligned} g_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right) &= 1+\frac{1}{\lambda}-\frac{2}{\lambda}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\lambda}}+\lambda\right)\\ &= -1+\frac{1}{\lambda}+\frac{\ln\lambda}{\lambda}\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{}-1\end{aligned}$$

Il existe donc un réel α_2 tel que pour tout $\lambda\geqslant\alpha_2$ on ait $g_\lambda\left(1/\sqrt{\lambda}\right)\leqslant 0$. Donc en posant $\alpha=\max\{1,\alpha_1,\alpha_2\}$, on a pour tout $\lambda\geqslant\alpha$:

$$g_\lambda\left(\frac{1}{\lambda}\right)\geqslant 0 \text{ et } g_\lambda\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\leqslant 0$$

Donc :

$$\boxed{\text{Pour } \lambda\geqslant\alpha :\quad \frac{1}{\lambda}\leqslant m_\lambda\leqslant\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$$

(b) Nous avons vu que $f_\lambda(m_\lambda) = 1/\left(2m\lambda^2\right)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\ln m_\lambda + \lambda}{1+m_\lambda^2} &= \frac{1}{2m_\lambda^2} \\
\text{donc} \quad \ln m_\lambda + \lambda &= \frac{1}{2m_\lambda^2} + \frac{1}{2} \\
\text{donc} \quad \frac{1}{2\lambda m_\lambda^2} - 1 &= \frac{\ln m_\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}
\end{aligned}$$

Or $1/\lambda \leqslant m_\lambda \leqslant 1/\left(\sqrt{\lambda}\right)$, donc :

$$-\ln\lambda \leqslant \ln m_\lambda \leqslant -\frac{1}{2}\ln\lambda$$

Donc :

$$\underbrace{-\frac{\ln\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}}_{\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0} \leqslant \frac{1}{2\lambda m_\lambda^2} - 1 \leqslant \underbrace{-\frac{1}{2}\frac{\ln\lambda}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda}}_{\xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0}$$

Donc d'après les théorème dit des gendarmes :

$$\frac{1}{2\lambda m_\lambda^2} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 1$$

Donc, puisque $m_\lambda \geqslant 0$:

$$\sqrt{2\lambda}m_\lambda = \sqrt{2\lambda m_\lambda^2} \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 1$$

Finalement :

$$\boxed{m_\lambda \underset{\lambda\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}}$$