Prop 19 :

Preuve : (i) Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose de plus qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} \ell$$

Montrons que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = \ell$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} \ell$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\} \qquad |x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f'(x) - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in ([x_0 - \eta, x_0[\cup]x_0, x_0 + \eta]) \cap I$. Montrons que

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \right| \leq \varepsilon$$

Pour fixer les idées, on suppose que $x > x_0$. Puisque f est continue sur $[x_0, x]$ et dérivable sur $]x_0, x[$, il existe, d'après le théorème des accroissements finis, $c \in]x_0, x[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

Donc

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \ell \right| = |f'(c) - \ell| \leq \varepsilon$$

On a donc prouvé que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} \ell$$

Donc f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$

Supposons maintenant que $f : I \to \mathbb{C}$ est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et qu'il existe $\ell \in \mathbb{C}$ tel que

$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} \ell$$

Alors $\mathrm{Re}(f)$ est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. De plus

$$[\mathrm{Re}(f)]'(x) \xrightarrow[x \neq x_0]{x \to x_0} \mathrm{Re}(\ell)$$

Comme $\mathrm{Re}(f)$ est une fonction à valeurs réelles, on peut appliquer le théorème et en déduire que $\mathrm{Re}(f)$ est dérivable en x_0 et $(\mathrm{Re}(f))'(x_0) = \mathrm{Re}(\ell)$. De même, on montre que $\mathrm{Im}(f)$ est dérivable en x_0 et $(\mathrm{Im}(f))'(x_0) = \mathrm{Im}(\ell)$.
On en déduit que f est dérivable en x_0 et que

$$f'(x_0) = \mathrm{Re}(\ell) + i\,\mathrm{Im}(\ell) = \ell$$

(ii) On suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose de plus que

$$f'(x) \xrightarrow[x \neq x_0]{x \to x_0} +\infty$$

Montrons que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$$

Soit $m \in \mathbb{R}$. Puisque $f'(x) \xrightarrow[x \neq x_0]{x \to x_0} +\infty$, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad |x - x_0| \leq \eta \implies f(x) \geq m.$$

Soit $x \in ([x_0-\eta, x_0[\cup]x_0, x_0+\eta]) \cap I$. Pour fixer les idées on suppose cette fois que $x < x_0$. Puisque f est continue sur $[x, x_0]$ et dérivable sur $]x, x_0[$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, x_0[$ tel que :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

Comme de plus $c \in]x, x_0[$, on en déduit que $|x - x_0| \leq \eta$. Donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c) \geq m.$$

On a donc prouvé que : $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty.$

Pour prouver le théorème lorsque la limite est $-\infty$, il suffit d'appliquer ce qu'on vient de prouver à $-f$.

Exemple : Montrons que
$$\frac{\mathrm{Arcsin}(-1+h)+\pi/2}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} +\infty.$$
Soit f la fonction définie sur $[-1,1]$ par :
$$\forall x\in[-1,1] \quad f(x) = \mathrm{Arcsin}\, x.$$
Alors f est continue sur $[-1,0]$ et dérivable sur $]-1,0]$
De plus :
$$\forall x\in\,]-1,0] \quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \xrightarrow[x\to -1]{} +\infty.$$
Donc, d'après le théorème de la limite de la dérivée
$$\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} +\infty.$$
donc
$$\frac{\mathrm{Arcsin}(-1+h)+\pi/2}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} +\infty$$

Proposition : Soit $k\in\mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{C}$ et $x_0\in I$.
On suppose que f est continue sur I et de classe C^k sur $I\setminus\{x_0\}$. On suppose de plus que pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, il existe $a_i\in\mathbb{C}$ tel que
$$f^{(i)}(x) \xrightarrow[x\neq x_0]{x\to x_0} a_i$$
Alors f est de classe C^k sur I et :
$$\forall i\in[\![1,k]\!] \quad f^{(i)}(x_0) = a_i$$

Preuve : Elle se fait par récurrence sur k, en posant, pour tout $k\in\mathbb{N}$

$\mathcal{H}_k$ = " Soit $f : I\to\mathbb{C}$, $x_0\in I$. On suppose que f est continue sur I et de classe C^k sur $I\setminus\{x_0\}$. On suppose de plus que pour tout $i\in[\![1,k]\!]$, il existe $a_i\in\mathbb{C}$ tel que
$$f^{(i)}(x) \xrightarrow[x\neq x_0]{x\to x_0} a_i$$
Alors f est de classe C^k sur I et

$\forall i \in [\![1,k]\!] \quad f^{(i)}(x) = a_i$ "

<u>$\mathcal{H}_0$ est vraie</u> : Il n'y a rien à prouver car si f est continue sur I elle est bien évidemment de classe C^0 (puisque "de classe C^0" signifie "continue").

<u>$\mathcal{H}_k \Rightarrow \mathcal{H}_{k+1}$</u> : Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_k$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I et de classe C^{k+1} sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose de plus que pour tout $i \in [\![1, k+1]\!]$, il existe $a_i \in \mathbb{C}$ tel que

$$f^{(i)}(x) \xrightarrow[x \neq x_0]{x \to x_0} a_i.$$

Puisque f est continue sur I et de classe C^k sur $I \setminus \{x_0\}$. Comme pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ on a :

$$f^{(i)}(x) \xrightarrow[x \neq x_0]{x \to x_0} a_i$$

Or $\mathcal{H}_k$ est vraie, donc f est de classe C^k sur I. Montrons que f est de classe C^{k+1} sur I. Il reste à montrer que $f^{(k)}$ est de classe C^1 sur I. Or $f^{(k)}$ est continue sur I et de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$. Comme de plus

$$f^{(k)\,\prime}(x) \xrightarrow[x \neq x_0]{x \to x_0} a_{k+1}$$

on en déduit, d'après le théorème de la limite de la dérivée, que $f^{(k)}$ est dérivable en x_0 et que

$$f^{(k)\,\prime}(x_0) = a_{k+1}.$$

Donc $f^{(k+1)}$ est défini en x_0 et $f^{(k+1)}(x_0) = a_{k+1}$. Comme on sait que

$$f^{(k+1)}(x) \xrightarrow[x \neq x_0]{x \to x_0} a_{k+1} = f^{(k+1)}(x_0)$$

on en déduit que $f^{(k+1)}$ est continue en x_0. Comme de plus $f^{(k+1)}$ est continue sur $I \setminus \{x_0\}$, on en déduit qu'elle est continue sur I. Donc f est de classe C^{k+1} sur I. Donc $\mathcal{H}_{k+1}$ est vraie.

Par récurrence sur k, on en déduit que $\mathcal{H}_k$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme de plus "être de classe C^∞" signifie "être de classe C^k pour tout $k \in \mathbb{N}$", on en déduit que le théorème est "vrai" pour "$k=\infty$".

Exemple : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrons que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. D'après les théorèmes usuels, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Mq f est continue en 0. On a, pour $x \leqslant 0$.

$$f(x) = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f(0)$$

Donc $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x \leqslant 0}]{} f(0)$. De plus, pour $x > 0$

$$f(x) = e^{-1/x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0 = f(0)$$

Donc $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} f(0)$. En conclusion $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} f(0)$

- On montre par récurrence que :

$\mathcal{H}_n$ = " Il existe un polynôme P_n tel que
$$\forall x > 0 \quad f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^n} \cdot e^{-1/x} \text{ "}$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie : En effet $P_0(x) = 1$ convient

$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Il existe un polynôme P tel que :

$$\forall x > 0 \quad f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$$

Donc, d'après les théorèmes usuels, on a :

$$\forall x > 0 \quad f^{(n+1)}(x) = \frac{x^{2n} P'(x) - 2n x^{2n-1} P(x)}{x^{4n}} \cdot e^{-1/x}$$
$$+ \frac{P(x)}{x^{2n}} \left(\frac{1}{x^2}\right) e^{-1/x}$$

$$= \frac{\overbrace{x^2 P'(x) - (2n x - 1) P(x)}^{= Q(x)}}{x^{2(n+1)}} e^{-1/x}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence sur n, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

. Montrons que

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, il existe un polynôme P tel que

$$\forall x > 0 \qquad f^{(n)}(x) = \frac{P(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}.$$

Il existe $a_0, \dots, a_m \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x > 0 \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k . x^k$$

Donc

$$\forall x > 0 \qquad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k . x^{k-2n} . e^{-1/x}.$$

Montrons que

$$\forall p \in \mathbb{Z} \qquad x^p . e^{-1/x} \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0$$

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Alors, pour $x > 0$:

$$x^p . e^{-1/x} \underset{u = 1/x \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} +\infty}{=} u^{-p} e^{-u} \xrightarrow[u \to +\infty]{} 0 \text{ par croissances comparées.}$$

Donc $f^{(n)}(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 0$. Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit d'après le théorème de la limite de la dérivée (version C^k), que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad f^{(n)}(0) = 0.$$