Cours : Réels

Table des matières

1 L'ensemble ordonné $\mathbb{R}$

1.1 La relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Définition 1. *La relation d'ordre $\leqslant$ définie sur $\mathbb{R}$ possède les propriétés suivantes :*
- *Elle est totale :*
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leqslant b \quad \text{ou} \quad b \leqslant a$$
- *Elle est compatible avec l'addition :*
$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \leqslant b \Longrightarrow a + c \leqslant b + c$$
- *Elle est compatible avec la multiplication :*
$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad [0 \leqslant a \text{ et } 0 \leqslant b] \Longrightarrow 0 \leqslant ab$$

Remarques :

⇨ La relation $\leqslant$ étant antisymétrique sur $\mathbb{R}$, 0 est le seul réel à la fois positif et négatif.

⇨ Si $a, b \in \mathbb{R}$, la négation de « $a \leqslant b$ » est « $a > b$ ».

⇨ Deux réels a et b sont de même signe si et seulement si $ab \geqslant 0$. On dit qu'ils sont de même signe au sens strict lorsque $ab > 0$.

⇨ Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $a^2 \geqslant 0$.

Exemples :

⇨ Soit a, b deux réels positifs. Montrer que
$$\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$$

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$. Montrer que $a = b = c$.

Proposition 1. *On a :*
$$\begin{array}{rl} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} & [a \leqslant b \text{ et } c \leqslant d] \Longrightarrow a + c \leqslant b + d \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & [a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c] \Longrightarrow ac \leqslant bc \\ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} & [0 \leqslant a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \leqslant d] \Longrightarrow 0 \leqslant ac \leqslant bd \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} & 0 \leqslant a \leqslant b \Longrightarrow 0 \leqslant a^n \leqslant b^n \end{array}$$

Remarques :

⇨ On peut multiplier une inégalité de signe quelconque par un réel négatif. Dans ce cas, l'inégalité change de sens.

Exemples :

⇨ L'assertion suivante est-elle vraie ?
$$\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad [a \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \leqslant d] \Longrightarrow ac \leqslant bd$$

Proposition 2. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :*
$$0 < a \leqslant b \Longrightarrow 0 < \frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{a}$$

Proposition 3. *On a :*
$$\begin{array}{rl} \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} & [a \leqslant b \text{ et } c < d] \Longrightarrow a + c < b + d \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & [a < b \text{ et } 0 < c] \Longrightarrow ac < bc \\ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} & [0 \leqslant a < b \text{ et } 0 \leqslant c < d] \Longrightarrow 0 \leqslant ac < bd \\ \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* & 0 \leqslant a < b \Longrightarrow 0 \leqslant a^n < b^n \end{array}$$

Définition 2. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leqslant b$. On définit :*
$$\begin{array}{rr} [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\} &]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ ]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\} & [a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\} \\ [a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\} &]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\ ]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant b\} &]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \end{array}$$

1.2 Valeur absolue

Définition 3. *Pour tout réel a, on définit sa valeur absolue, notée $|a|$ par :*

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geqslant 0 \\ -a & si\ a \leqslant 0 \end{cases}$$

Remarques :

⇨ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $|a|^2 = a^2$.

⇨ Si a et b sont deux réels, on définit la distance de a à b, notée $\mathrm{d}(a,b)$ par :

$$\mathrm{d}(a,b) = |a-b|$$

Exemples :

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Exprimer $\min(a,b)$ et $\max(a,b)$ à l'aide de a, b et de la valeur absolue.

Proposition 4. *On a :*

$$\begin{array}{rl} \forall a \in \mathbb{R} & |a| \geqslant 0 \\ \forall a \in \mathbb{R} & |a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \\ \forall a \in \mathbb{R} & |-a| = |a| \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & |ab| = |a|\,|b| \end{array}$$

Remarques :

⇨ De cette proposition, on déduit les résultats suivants sur la distance entre deux réels :

$$\begin{array}{rl} \forall a, b \in \mathbb{R} & \mathrm{d}(a,b) \geqslant 0 \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & \mathrm{d}(a,b) = 0 \Longleftrightarrow a = b \\ \forall a, b \in \mathbb{R} & \mathrm{d}(b,a) = \mathrm{d}(a,b) \end{array}$$

Exemples :

⇨ Soit $a > 0$ et $x, y \geqslant a$. Montrer que :

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}\,|x-y|$$

Proposition 5. *Soit a un réel. Alors :*

$$|a| = \max\{a, -a\}$$

Remarques :

⇨ En particulier, si M est un réel positif, pour montrer que $|a| \leqslant M$ il suffit de montrer que :

$$a \leqslant M \text{ et } -a \leqslant M$$

⇨ Soit a un réel et M un réel positif. Alors :

$$|a| \leqslant M \iff -M \leqslant a \leqslant M$$

$$|a| \geqslant M \iff [a \leqslant -M \text{ ou } a \geqslant M]$$

Exemples :

⇨ Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\cos x \sin y \geqslant -1$.

Proposition 6. *Soit a et b deux réels. Alors :*

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|$$

De plus, l'égalité a lieu si et seulement si a et b sont de même signe.

Exemples :

⇨ Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ et $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin\theta_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

Proposition 7. *Soit a et b deux réels. Alors :*

$$||a| - |b|| \leqslant |a-b| \;\; et \;\; |a+b| \geqslant |a| - |b|$$

Remarques :

⇨ Soit a, b, $c \in \mathbb{R}$. Alors :

$$|\mathrm{d}(a,b) - \mathrm{d}(b,c)| \leqslant \mathrm{d}(a,c) \leqslant \mathrm{d}(a,b) + \mathrm{d}(b,c)$$

Exemples :

⇨ Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont vraies ?

- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a-b| \leqslant |a| - |b|$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a^2 \leqslant b^2 \Longleftrightarrow |a| \leqslant |b|$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a-b| \leqslant |a| + |b|$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leqslant b \Longrightarrow |a| \leqslant |b|$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a-b| \geqslant |a| - |b|$.
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a| \leqslant |b| + |b-a|$.

1.3 Droite numérique achevée

Définition 4. *On appelle droite numérique achevée et on note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ auquel on adjoint deux éléments notés $-\infty$ et $+\infty$. On munit $\overline{\mathbb{R}}$ d'une relation d'ordre totale en prolongeant la relation d'ordre naturelle sur $\mathbb{R}$ et en posant :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty < x < +\infty$$

Remarques :

⇨ On prolonge aussi de manière naturelle l'addition et la multiplication sans toutefois définir $(+\infty) - (+\infty)$ et $0 \times (\pm\infty)$.

2 Propriétés de $\mathbb{R}$

2.1 Partie entière

Définition 5. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que :*

$$n \leqslant x < n+1$$

Cet entier est appelé partie entière de x et est noté $E(x)$.

Exemples :

⇨ Calculer $E(x) + E(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

⇨ Montrer que la partie entière est une fonction croissante.

⇨ Soit $\alpha \in [0, 1[$. Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{n-1}{n} \leqslant \alpha < \frac{n}{n+1}$$

Remarques :

⇨ Soit $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors, il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $na \leqslant x < (n+1)a$.

⇨ Si x est un réel, sa partie entière est aussi notée $\lfloor x \rfloor$. On définit de même la partie entière supérieure de x, notée $\lceil x \rceil$, comme l'unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 1 < x \leqslant n$. Si x est entier, alors $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$. Sinon, $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$.

2.2 Propriété de la borne supérieure

Définition 6. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A admet une borne supérieure lorsque l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément. Si tel est le cas, on le note* $\sup A$.

Remarques :

⇨ Soit $b \in \mathbb{R}$. Alors $]-\infty, b]$ et $]-\infty, b[$ admettent b pour borne supérieure.

⇨ Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément, alors elle admet une borne supérieure et $\sup A = \max A$. Cependant, il est possible que A admette une borne supérieure qui n'appartienne pas à A ; dans ce cas, A n'admet pas de plus grand élément.

⇨ Si une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure, alors elle est non vide et majorée.

Théorème 1. *Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure si et seulement si elle est non vide et majorée.*

Exemples :

⇨ Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$. On suppose que A est non vide et que B est majorée. Comparer $\sup A$ et $\sup B$.

Proposition 8. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. α est la borne supérieure de A si et seulement si :*

— *α est un majorant de A :*

$$\forall a \in A \quad a \leqslant \alpha$$

— *α est le plus petit des majorants de A :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a \geqslant \alpha - \varepsilon$$

Remarques :

⇨ Si A est partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, dire que α est un majorant de A s'écrit : $\forall a \in A \quad a \leqslant \alpha$. Par contre, pour montrer (ou exploiter le fait) que α est le plus petit des majorants de A, deux phrases équivalentes s'offrent à nous :

$$\forall \beta \in \mathbb{R} \quad [\forall a \in A \quad a \leqslant \beta] \Longrightarrow \alpha \leqslant \beta$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a \geqslant \alpha - \varepsilon$$

En pratique, nous emploierons le plus souvent la seconde. La première phrase, bien qu'utile, est rarement employée par les élèves, peut-être parce qu'elle comporte un symbole souvent très mal compris par ces derniers.

⇨ Pour exploiter le fait que α est le plus petit des majorants de A, on peut aussi utiliser la phrase suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a > \alpha - \varepsilon$$

Étant donné que cette phrase comporte une inégalité stricte à un endroit ou elle n'est pas indispensable, j'éviterai de l'utiliser. Dans quelques exercices, l'inégalité stricte est cependant bien utile, mais je m'efforcerai de vous montrer que l'on peut s'en sortir de manière élégante en n'utilisant que l'inégalité large.

Exemples :

⇨ Montrer que $A = \left\{\frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne supérieure que l'on calculera.

Définition 7. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A admet une borne inférieure lorsque l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément. Si tel est le cas, on le note* $\inf A$.

Exemples :

⇨ Montrer que $A = \left\{\frac{4}{n} + n : n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet une borne inférieure que l'on calulera.

Proposition 9. *Une partie A de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure si et seulement si elle est non vide et minorée.*

Proposition 10. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. α est la borne inférieure de A si et seulement si :*

— *α est un minorant de A :*

$$\forall a \in A \quad a \geqslant \alpha$$

— *α est le plus grand des minorants de A :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad a \leqslant \alpha + \varepsilon$$

2.3 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 8.
- *On dit qu'une partie S de $\mathbb{R}$ est un segment lorsqu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et :*
$$S = [a, b]$$
- *On dit qu'une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle lorsque :*
$$\forall a, b \in I \quad a \leqslant b \Longrightarrow [a, b] \subset I$$
L'intervalle I est dit non trivial lorsqu'il contient au moins deux points distincts.

Remarques :

⇨ L'intersection d'une famille d'intervalles est un intervalle. En général, l'union de deux intervalles n'est pas un intervalle.

⇨ Dans ce cours, lorsque a et b sont deux réels en position quelconque, le segment $[\min(a, b), \max(a, b)]$ sera parfois noté « $[a, b]$ ».

Proposition 11. *Soit $a, b, x \in \mathbb{R}$. Alors $x \in$ « $[a, b]$ » si et seulement si il existe $t \in [0, 1]$ tel que $x = ta + (1 - t)\, b$.*

Remarques :

⇨ Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si quels que soient $a, b \in I$ et $t \in [0, 1]$, $ta + (1 - t)b \in I$.

Théorème 2. *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les ensembles :*
$$\varnothing \qquad \mathbb{R} \qquad [a, b] \qquad]a, b[\qquad [a, b[\qquad]a, b]$$
$$[a, +\infty[\qquad]a, +\infty[\qquad]-\infty, b] \qquad]-\infty, b[$$
où $a, b \in \mathbb{R}$.

3 Nombres rationnels, nombres décimaux

3.1 Nombres rationnels

Définition 9. *On dit qu'un réel a est rationnel lorsqu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que :*
$$a = \frac{p}{q}$$
et qu'il est irrationnel dans le cas contraire.

Remarques :

⇨ $\sqrt{2}$ est irrationnel donc $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ n'est pas vide. On peut démontrer que e et π sont irrationnels.

⇨ L'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est stable par les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, et de division. Ce n'est pas de cas de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Par exemple $\sqrt{2} - \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{2}\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Par contre la somme d'un rationnel et d'un irrationnel est irrationnelle et le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel est irrationnel.

Exemples :

⇨ Montrer que $\log_{10} 2$ et $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

⇨ Montrer que
$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}_n \neq \mathbb{U}$$

⇨ Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}_+$ irrationnels tels que a^b est rationnel.

3.2 Nombres décimaux, approximations

Définition 10. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On appelle valeur approchée de a à la précision ε tout réel b tel que $|a - b| \leqslant \varepsilon$. Si $b \leqslant a$ (respectivement $b \geqslant a$), on dit que b est une valeur approchée de a par défaut (respectivement, par excès).*

Définition 11. *On dit qu'un réel a est décimal lorsqu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que :*
$$a = m \cdot 10^{-n}$$

Remarques :

⇨ Un nombre décimal est rationnel. Cependant $1/3$ est rationnel mais n'est pas décimal.

⇨ L'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres décimaux est stable par les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication mais pas par division.

Proposition 12. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $d = E\,(10^n a) \cdot 10^{-n} \in \mathcal{D}$ est une approximation par défaut de a à la précision 10^{-n}.*