Cours : Ensembles

Table des matières

1 Éléments de logique

1.1 Assertion, prédicat

Définition 1.
- *On appelle assertion toute phrase mathématique à laquelle on peut attribuer une et une seule valeur de vérité : vrai ou faux.*
- *Soit E un ensemble. On appelle prédicat sur E toute phrase mathématique dont la valeur de vérité dépend d'un élément $x \in E$.*

Exemples :

⇨ « 7 est un nombre premier » est une assertion vraie. L'assertion « 7 est divisible par 3 » est fausse.

⇨ « L'ensemble des nombres premiers est infini » est une assertion vraie. L'assertion « Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ est premier » est une assertion dont on ne connaît pas la valeur de vérité.

⇨ $P(x)$: « x est rationnel » est un prédicat sur $\mathbb{R}$. $P(3/4)$ est vrai alors que $P(\sqrt{2})$ est faux.

⇨ $P(a,b,c)$: « $a^2+b^2=c^2$ » est un prédicat sur $\mathbb{N}^3$.

Remarques :

⇨ On retiendra le principe du tiers exclu : Une assertion P prend la valeur vraie, ou bien la valeur fausse.

⇨ Si P est un prédicat, on dit que P est vrai lorsque quel que soit $x \in E$, l'assertion $P(x)$ est vraie. Dire que P n'est pas vrai signifie qu'il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ est faux.

⇨ Si P est une assertion ou un prédicat, écrire « P » signifie que P est vrai.

Définition 2.
- *Le quantificateur universel $\forall$ signifie : « pour tout »*
- *Le quantificateur existentiel $\exists$ signifie : « il existe »*

Remarques :

⇨ On utilise aussi parfois le quantificateur $\exists!$ qui signifie : « il existe un unique ».

Exemples :

⇨ Les assertions suivantes sont-elles vraies ?
1. $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad x+y \geqslant 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad x+y \geqslant 0$
3. $\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 \geqslant x$

⇨ Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + x^n$$

Définition 3. *Soit P et Q deux assertions.*
- *On définit l'assertion* (non P) *comme étant vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.*
- *On définit l'assertion* $[P$ et $Q]$ *comme étant vraie lorsque P et Q sont vraies et fausse sinon.*
- *On définit l'assertion* $[P$ ou $Q]$ *comme étant vraie lorsqu'au moins l'une des deux assertions est vraie, et fausse sinon.*

Remarques :

⇨ Les valeurs de vérité de ces nouvelles assertions sont donc données par les tables suivantes :

P	V	F
non P		

non P

P \ Q	V	F
V		
F		

P et Q

P \ Q	V	F
V		
F		

P ou Q

⇨ Lorsque le menu d'un restaurant vous propose « fromage ou dessert », le « ou » est employé au sens strict (ont dit aussi exclusif) : il n'est pas possible d'avoir les deux. En mathématiques, le « ou » est employé au sens large (on dit aussi inclusif) : lorsqu'on dit qu'un entier naturel n est divisible par 2 ou par 3, il peut très bien être divisible par 2 *et* par 3.

1.2 Implication, équivalence

Définition 4. *Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Longrightarrow Q$ comme étant fausse lorsque P est vraie et Q est fausse, et vraie sinon.*

Remarques :

- Montrer que $P \Longrightarrow Q$ est vraie revient à prouver que si P est vraie, alors Q est vraie.
- Si P et Q sont deux prédicats sur E, le prédicat $P \Longrightarrow Q$ est vrai si et seulement si $Q(x)$ est vraie dès que $P(x)$ est vraie. Si tel est le cas, on écrit
$$\forall x \in E \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$$
et on dit que P est une condition suffisante pour Q ou que Q est une condition nécessaire pour P.

Exemples :

- Dans les exemples suivants, dites si le prédicat P est une condition nécessaire ou une condition suffisante pour Q.
  — $E = \mathbb{R}$, $P(x)$: « $x \in \mathbb{Q}$ » et $Q(x)$: « $x^2 \in \mathbb{Q}$ ».
  — E est l'ensemble des triangles du plan euclidien, $P(T)$: « T est isocèle » et $Q(T)$: « T est équilatéral ».
  — $E = \mathbb{R}^2$, $P(x, y)$: « $x \equiv y\ [2\pi]$ » et $Q(x, y)$: « $x \equiv y\ [\pi]$ ».
- Montrer que
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad [xy > 0 \text{ et } x + y > 0] \quad \Longrightarrow \quad [x > 0 \text{ et } y > 0]$$
- Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \left[\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \quad |x| \leqslant \varepsilon\right] \quad \Longrightarrow \quad x = 0$$

Proposition 1. *Soit P et Q deux assertions. Si P et $P \Longrightarrow Q$ sont vraies, alors Q est vraie.*

Remarques :

- Cette règle est appelée « Modus ponens ».
- En pratique, on utilise cette proposition lorsque P et Q sont des prédicats. Si $P \Longrightarrow Q$ est vrai et x est un élément de E tel que $P(x)$ est vrai, alors $Q(x)$ est vrai. Dans ce cadre, on dit que $P \Longrightarrow Q$ est un théorème (ou une proposition), vérifier les hypothèses du théorème revient à vérifier que $P(x)$ est vrai et appliquer le théorème nous permet de conclure que $Q(x)$ est vrai.

Exemples :

- Traduisons mathématiquement le raisonnement suivant : « Socrate est un homme. Puisque tous les hommes sont mortels, alors Socrate est mortel ». Si $P(x)$: « x est un homme » et $Q(x)$: « x est mortel », alors l'énoncé « Tous les hommes sont mortels » s'écrit
$$\forall x \in U \quad P(x) \Longrightarrow Q(x)$$
Puisque Socrate est un homme (P (Socrate) est vrai), on en déduit que Socrate est mortel (Q (Socrate) est vrai).
- Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x < a \quad \Longrightarrow \quad x \leqslant b$$
Montrer que $a \leqslant b$.

Définition 5. *Soit P et Q deux assertions. On définit l'assertion $P \Longleftrightarrow Q$ comme étant vraie lorsque P et Q ont même valeur de vérité, et fausse sinon.*

Remarques :

- Les valeurs de vérité des assertions $P \Longrightarrow Q$ et $P \Longleftrightarrow Q$ sont regroupées dans les tableaux suivants :

P \ Q	V	F
V		
F		

$P \Longrightarrow Q$

P \ Q	V	F
V		
F		

$P \Longleftrightarrow Q$

- Les assertions $P \Longleftrightarrow Q$ et $Q \Longleftrightarrow P$ ont même valeur de vérité ; on dit que la relation d'équivalence est symétrique.
- Si P et Q sont deux prédicats sur E, le prédicat $P \Longleftrightarrow Q$ est vrai si et seulement si $Q(x)$ et $P(x)$ ont même valeur de vérité quel que soit $x \in E$. Si tel est le cas, on écrit
$$\forall x \in E \quad P(x) \Longleftrightarrow Q(x)$$
et on dit que P est une condition nécessaire et suffisante pour Q.

Proposition 2. *Soit P et Q deux assertions. Alors $P \Longleftrightarrow Q$ et $[(P \Longrightarrow Q)$ et $(Q \Longrightarrow P)]$ ont même valeur de vérité.*

Remarques :

- Pour démontrer que $P \Longleftrightarrow Q$, on pourra choisir de démontrer que $P \Longrightarrow Q$ puis que $Q \Longrightarrow P$; on dit alors qu'on raisonne par double implication.

Exemples :

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sin(\lambda x)$$
Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que f soit 2π-périodique.
- Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On note $P = aX^2 + bX + c$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b, c pour qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $P(x) = y$ et $P(y) = x$.

Proposition 3. *Soit P, Q, R trois assertions. Alors :*
$$[P \text{ et } (Q \text{ ou } R)] \quad \Longleftrightarrow \quad [(P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)]$$
$$[P \text{ ou } (Q \text{ et } R)] \quad \Longleftrightarrow \quad [(P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)]$$

Proposition 4. *Soit P et Q deux assertions. Alors :*

$$\begin{aligned} \text{non } (P \textit{ et } Q) &\iff [\text{non } P \textit{ ou } \text{non } Q] \\ \text{non } (P \textit{ ou } Q) &\iff [\text{non } P \textit{ et } \text{non } Q] \\ \text{non } (\text{non } P) &\iff P \end{aligned}$$

Proposition 5. *Soit P et Q deux assertions. Alors :*

$$[P \Longrightarrow Q] \iff [\text{non } Q \Longrightarrow \text{non } P]$$

Remarques :

⇨ Lorsque l'on démontre [non $Q \Longrightarrow$ non P] pour montrer que $[P \Longrightarrow Q]$, on dit que l'on raisonne par contraposée.

Exemples :

⇨ Supposons que l'on ait montré que π^2 est irrationnel. Peut-on en déduire que π est irrationnel ?

Proposition 6. *Soit P et Q deux assertions. Alors :*

$$[\text{non } (P \Longrightarrow Q)] \iff [P \textit{ et } (\text{non } Q)]$$

Proposition 7. *Soit P un prédicat sur l'ensemble E. Alors :*

$$\begin{aligned} \text{non } [\forall x \in E \quad P(x)] &\iff [\exists x \in E \quad \text{non } (P(x))] \\ \text{non } [\exists x \in E \quad P(x)] &\iff [\forall x \in E \quad \text{non } (P(x))] \end{aligned}$$

Exemples :

⇨ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Écrire les phrases suivantes avec des quantificateurs. En déduire leur négation.

« f est majorée », « f est croissante », « f est décroissante »

2 Ensembles

2.1 Ensemble, élément

Définition 6. *Les notions d'ensembles, d'éléments et d'appartenance sont des notions premières en mathématiques que l'on ne définit pas. Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets mathématiques appelés éléments. La notation $x \in E$ signifie que l'élément x appartient à l'ensemble E.*

Remarques :

⇨ Un objet mathématique peut très bien être à la fois être un élément et un ensemble. Par exemple, nous verrons que l'ensemble $\mathbb{N}$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

⇨ Si $x_1, \dots, x_n$ sont des objets mathématiques, l'ensemble constitué de ces éléments est noté $\{x_1, \dots, x_n\}$.

Définition 7. *Soit A et B deux ensembles. On dit que A est inclus dans B et on note $A \subset B$ lorsque :*

$$\forall x \in A \quad x \in B$$

Définition 8. *Deux ensembles A et B sont dits égaux lorsqu'ils possèdent les mêmes éléments, c'est-à-dire lorsque :*

$$A \subset B \textit{ et } B \subset A$$

Remarques :

⇨ En particulier $\{0, 1\} = \{1, 0\}$ et $\{0, 0, 1\} = \{0, 1\}$.

Définition 9. *Soit E un ensemble. On appelle partie de E tout ensemble A inclus dans E. L'ensemble des parties de E est noté $\mathcal{P}(E)$.*

Exemples :

⇨ Déterminer $\mathcal{P}(\{1, 2\})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$.

2.2 Opérations élémentaires

Définition 10. *Soit E un ensemble et P un prédicat défini sur E. On définit*

$$\{x \in E : P(x)\}$$

comme l'ensemble des éléments de E tels que $P(x)$ est vrai. C'est une partie de E.

Définition 11. *Soit A et B deux parties de E. On définit :*

$$A \cap B = \{x \in E : x \in A \textit{ et } x \in B\} \qquad A \cup B = \{x \in E : x \in A \textit{ ou } x \in B\}$$

$$A^c = \{x \in E : x \notin A\}$$

Remarques :

⇨ On dit que deux ensembles A et B sont disjoints lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Exemples :

⇨ Soit A et B deux parties d'un même ensemble. Montrer que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

⇨ Soit A, B, C trois parties d'un ensemble E non vide.

1. Si $A \cup B = A \cup C$, a-t-on $B = C$?
2. Si $A \cup B = A \cap B$, a-t-on $A = B$?
3. Montrer que si $A \cup B = A \cup C$ et $A \cap B = A \cap C$, alors $B = C$.
4. Montrer que si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \varnothing$, alors $A = B^c$ et $B = A^c$.

Définition 12. *Soit A et B deux parties de E. On définit :*

$$A \setminus B = \{x \in E : x \in A \text{ et } x \notin B\} \qquad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Proposition 8. *Soit A et B deux parties de E. Alors :*

$$\begin{array}{rcl} (A \cap B)^c &=& A^c \cup B^c \\ (A \cup B)^c &=& A^c \cap B^c \\ A \cap (B \cup C) &=& (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &=& (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (A^c)^c &=& A \end{array}$$

Définition 13.

- *Si A et B sont deux ensembles, on définit $A \times B$ comme l'ensemble des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. Deux couples (a_1, b_1) et $(a_2, b_2) \in A \times B$ sont dits égaux lorsque $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$.*
- *Si $A_1, \ldots, A_n$ sont n ensembles, on définit $A_1 \times \cdots \times A_n$ comme l'ensemble des n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ avec $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Deux n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in A^n$ sont dits égaux lorsque : $\forall k \in [\![1, k]\!] \quad a_k = b_k$.*
- *Si A est un ensemble et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit A^n comme :*

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois } A}$$

3 Applications

3.1 Définitions, exemples

Définition 14. *Soit E et F deux ensembles. Une application f de E dans F associe à tout élément x de E un unique élément $f(x) \in F$ appelé image de x par f. On note :*

$$\begin{array}{rcl} f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.

Remarques :

⇨ Deux applications sont égales lorsqu'elles ont même ensemble de départ et d'arrivée et qu'elles prennent la même valeur en chaque point de l'ensemble de départ.

⇨ « application » et « fonction » sont des synonymes. L'usage veut cependant que l'on emploie plus souvent le mot « fonction » lorsque les ensembles de départ et d'arrivée sont des parties de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

⇨ Si A est une partie de E, on appelle fonction caractéristique de A et on note 1_A l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\forall x \in E \quad 1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 15. *Si f est une application de E dans F, on appelle graphe de f l'ensemble :*

$$\{(x, y) \in E \times F : f(x) = y\}$$

Définition 16. *Soit $f : E \to F$ et $y \in F$. On appelle antécédent de y tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$.*

Exemples :

⇨ Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ qui au couple (x, y) associe le couple $(x + 2y, xy)$. Déterminer les antécédents de $(3, 1)$.

Définition 17. *Soit $f : E \to F$.*

- *Soit B une partie de F. On appelle image réciproque de B par f et on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B.*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E : f(x) \in B\}$$

- *Soit A une partie de E. On appelle image directe de A par f et on note $f(A)$ l'ensemble des éléments de F qui sont image d'un élément de A par f :*

$$\begin{array}{rcl} f(A) &=& \{y \in F : \exists x \in A \quad f(x) = y\} \\ &=& \{f(x) : x \in A\} \end{array}$$

L'ensemble $f(E)$ est appelé image de f et noté $\mathrm{Im}\, f$.

Exemples :

⇨ Soit f une application de E dans F. Si A est une partie de E, comparer $f^{-1}(f(A))$ et A. De même, si B est une partie de F, comparer $f(f^{-1}(B))$ et B.

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\frac{z+i}{z-i}$. Calculer $f^{-1}(\mathbb{U})$.

⇨ Soit f le fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

Calculer $f(\mathbb{R})$.

Définition 18. *Soit f une application de E dans F.*
- *Si A est une partie de E, l'application*
$$\begin{array}{rcl} \bar{f} : A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
est appelée restriction de f à A. On dit qu'une application g est un prolongement de f lorsque f est une restriction de g.
- *Si B est une partie de F et :*
$$\forall x \in E \quad f(x) \in B$$
l'application
$$\begin{array}{rcl} \bar{f} : E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
est appelée corestriction de f à B.

Définition 19. *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. On définit alors la fonction :*
$$\begin{array}{rcl} g \circ f : E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Proposition 9. *Soit $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$. Alors :*
$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$
On note cette application $h \circ g \circ f$.

3.2 Application injective, surjective, bijective

Définition 20. *Soit $f : E \to F$. On dit que f est injective lorsque*
$$\forall x_1, x_2 \in E \quad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$
c'est-à-dire lorsque tout élément y de F a au plus un antécédent.

Exemples :

⇨ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement monotone alors elle est injective. La réciproque est-elle vraie ?

⇨ Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$. Montrer qu'elle est injective.

⇨ Soit φ l'application qui à la fonction f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ associe la fonction $\varphi(f)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad [\varphi(f)](x) = f(\sin x)$$
Montrer que φ est injective.

⇨ Soit E un ensemble et A une partie de E. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que
$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \longmapsto & X \cap A \end{array}$$
soit injective.

Définition 21. *Soit $f : E \to F$. On dit que f est surjective lorsque :*
$$\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad f(x) = y$$
c'est-à-dire lorsque tout élément y de F a au moins un antécédent.

Proposition 10. *Une application $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.*

Exemples :

⇨ L'application
$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0) \end{array}$$
est-elle injective ? surjective ?

⇨ Soit $f : E \to F$ et $g : E \to G$. On définit l'application φ de E dans $F \times G$ par :
$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = (f(x), g(x))$$
Que dire des assertions « φ est injective si et seulement si f et g le sont » et « φ est surjective si et seulement si f et g le sont » ?

Définition 22. *On dit qu'une application $f : E \to F$ est bijective lorsqu'elle est injective et surjective, c'est-à-dire lorsque tout élément y de F a un unique antécédent.*

Exemples :

⇨ Montrer que la fonction f qui à x associe $\frac{1+ix}{1-ix}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

⇨ Montrer que l'application
$$\begin{array}{rrcl} f : & \mathbb{N}^2 & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (a, b) & \longmapsto & 2^a(2b+1) - 1 \end{array}$$
est bijective.

⇨ Soit X une ensemble et $f : X^2 \to X$ une bijection. Montrer que
$$\begin{array}{rrcl} g : & X^3 & \longrightarrow & X \\ & (x, y, z) & \longmapsto & f(x, f(y, z)) \end{array}$$
est une bijection.

Proposition 11.
- *La composée de deux applications injectives est injective.*
- *La composée de deux applications surjectives est surjective.*
- *La composée de deux applications bijectives est bijective.*

Exemples :

⇨ Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective. De même montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

⇨ Est-il vrai que si $g \circ f$ est bijective, f et g le sont ?

Définition 23. *Soit E un ensemble. On appelle application identique et on note Id_E l'application de E dans E définie par :*

$$\forall x \in E \quad \mathrm{Id}_E(x) = x$$

Si f est une application de E dans F :

$$f \circ \mathrm{Id}_E = f \text{ et } \mathrm{Id}_F \circ f = f$$

Proposition 12. *Soit f une application de E dans F.*

- *L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que :*

  $$g \circ f = \mathrm{Id}_E \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

  Si tel est le cas, g est unique ; on l'appelle bijection réciproque de f et on la note f^{-1}.
- *Si $f : E \to F$ est bijective, f^{-1} est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

Remarques :

⇨ Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$ et f une bijection de A dans B. Alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la première bissectrice des axes $[Ox)$ et $[Oy)$.

⇨ La fonction ln de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ est une bijection et sa bijection réciproque est la fonction exp de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. De même, la fonction sin de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$ est une bijection et sa bijection réciproque est la fonction Arcsin de $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$.

Exemples :

⇨ Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{Z}^2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ & (x, y) & \longmapsto & (2x + y, 5x + 3y) \end{array}$$

est bijective et calculer f^{-1}.

⇨ Soit f une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que si f est strictement croissante, il en est de même pour f^{-1}. Que dire si f est impaire ? paire ?

Proposition 13. *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et :*

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

3.3 Familles

Définition 24. *Soit E un ensemble et I un ensemble appelé ensemble d'indices. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application :*

$$\begin{array}{rccc} f : I & \longrightarrow & E \\ i & \longmapsto & f_i \end{array}$$

Cette application est notée $(f_i)_{i \in I}$. L'ensemble des familles d'éléments de E indexées par I est noté E^I.

Remarques :

⇨ Une famille indexée par $\mathbb{N}$ est une suite d'éléments de E.

⇨ On appelle sous-famille d'une famille $(f_i)_{i \in I}$ toute famille de la forme $(f_i)_{i \in J}$ où J est une partie de I.

⇨ Si A est un ensemble, on appelle famille des éléments de A l'application

$$\begin{array}{rccc} f : A & \longrightarrow & A \\ a & \longmapsto & f_a = a \end{array}$$

que l'on note $(f_a)_{a \in A}$ ou plus simplement $(f_i)_{i \in I}$ (où $I = A$, ce que l'on s'empresse d'oublier).

Définition 25. *Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. On définit alors :*

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in E : \forall i \in I \quad x \in A_i\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E : \exists i \in I \quad x \in A_i\}$$

Exemples :

⇨ Soit $f : E \to E$. On définit f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \text{ et } \left[\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{n+1} = f \circ f^n\right]$$

Soit A une partie de E. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = f^n(A)$. Enfin, on pose $B = \cup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Montrer que $A \subset B$ et que $f(B) \subset B$.

Proposition 14. *Soit E un ensemble et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Alors :*

$$\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c \text{ et } \left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$$

4 Relations binaires

4.1 Relation binaire

Définition 26. *Soit E un ensemble. On appelle relation binaire tout prédicat $\mathcal{R}$ défini sur $E \times E$. Si x et y sont deux éléments de E et $\mathcal{R}(x, y)$ est vrai, on écrit $x\mathcal{R}y$.*

Définition 27. *On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est :*

— *réflexive lorsque :*
$$\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$$

— *transitive lorsque :*
$$\forall x, y, z \in E \quad [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z$$

— *symétrique lorsque :*
$$\forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$$

— *antisymétrique lorsque :*
$$\forall x, y \in E \quad [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x] \Longrightarrow x = y$$

4.2 Relation d'ordre

Définition 28. *On dit qu'une relation binaire $\preceq$ définie sur un ensemble E est une relation d'ordre lorsqu'elle est :*

— *réflexive : $\forall x \in E \quad x \preceq x$*

— *transitive : $\forall x, y, z \in E \quad [x \preceq y \text{ et } y \preceq z] \Longrightarrow x \preceq z$*

— *antisymétrique : $\forall x, y \in E \quad [x \preceq y \text{ et } y \preceq x] \Longrightarrow x = y$*

On appelle ensemble ordonné tout ensemble muni d'une relation d'ordre.

Remarques :

⇨ La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. La relation $\leqslant$ définie sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par
$$\forall f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad f \leqslant g \quad \Longleftrightarrow \quad [\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant g(x)]$$
est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Si E est un ensemble, la relation d'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.

⇨ La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas réflexive.

⇨ Si $\preceq$ est une relation d'ordre sur E, la relation $\succeq$ définie par
$$\forall x, y \in E \quad x \succeq y \quad \Longleftrightarrow \quad y \preceq x$$
est aussi une relation d'ordre appelée relation d'ordre opposée à la première.

Exemples :

⇨ Montrer que la relation $|$ définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\forall a, b \in \mathbb{N} \quad a|b \quad \Longleftrightarrow \quad [\exists k \in \mathbb{N} \quad b = ka]$$
est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Définition 29. *On dit qu'une relation d'ordre $\preceq$ définie sur un ensemble E est totale lorsque :*
$$\forall x, y \in E \quad x \preceq y \text{ ou } y \preceq x$$

Remarques :

⇨ La relation d'ordre $\leqslant$ est totale sur $\mathbb{R}$. Par contre, les relations $\leqslant$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ et $|$ sur $\mathbb{N}$ ne sont pas totales.

Définition 30. *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.*

— *On dit que $M \in E$ est un majorant de A lorsque :*
$$\forall a \in A \quad a \preceq M$$

— *On dit que $m \in E$ est un minorant de A lorsque :*
$$\forall a \in A \quad m \preceq a$$

Exemples :

⇨ Soit $c > 0$. On définit la relation $\preceq$ sur $\mathbb{R}^2$ par
$$\forall (x, t), (x', t') \in \mathbb{R}^2 \quad (x, t) \preceq (x', t') \quad \Longleftrightarrow \quad |x' - x| \leqslant c \cdot (t' - t)$$
Vérifier que c'est une relation d'ordre. Dessiner l'ensemble des majorants et des minorants d'un couple (x_0, t_0). L'ordre est-il total ?

Définition 31. *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.*

— *On dit que A admet un plus grand élément lorsqu'il existe un majorant de A appartenant à A. Si un tel élément existe, il est unique et on l'appelle le plus grand élément de A.*

— *On dit que A admet un plus petit élément lorsqu'il existe un minorant de A appartenant à A. Si un tel élément existe, il est unique et on l'appelle le plus petit élément de A.*

Remarques :

⇨ Muni de l'ordre usuel, $[0, 1[$ admet un plus petit élément 0 mais n'admet pas de plus grand élément. Muni de la relation de divisibilité, $\{2, 3\}$ n'admet ni de plus grand ni de plus petit élément.

⇨ Un ensemble admettant un plus petit ou un plus grand élément est non vide.

⇨ Si E est totalement ordonné et A est une partie finie non vide de E, alors il admet un plus petit et un plus grand élément.

4.3 Relation d'équivalence

Définition 32. *On dit qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble E est une relation d'équivalence lorsqu'elle est :*
- *réflexive :* $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$
- *transitive :* $\forall x, y, z \in E \quad [x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}z] \Longrightarrow x\mathcal{R}z$
- *symétrique :* $\forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y \Longrightarrow y\mathcal{R}x$

Remarques :

⇨ Si E est un ensemble quelconque, le relation d'égalité est une relation d'équivalence. Si $n \in \mathbb{N}$, la relation $\mathcal{R}$ définie par « $\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a\mathcal{R}b \iff a \equiv b\ [n]$ » est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$. De même, si f est une application de E dans F, la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par « $\forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y)$ » est une relation d'équivalence.

Exemples :

⇨ Soit E une ensemble. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathcal{P}(E)$ par

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad A\mathcal{R}B \iff \text{« il existe une bijection de } A \text{ dans } B. \text{ »}$$

est une relation d'équivalence.

Définition 33. *Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E et $x \in E$. On appelle classe d'équivalence de x et on note $\mathrm{Cl}(x)$ l'ensemble des éléments de E en relation avec x :*

$$\mathrm{Cl}(x) = \{y \in E : x\mathcal{R}y\}$$

Exemples :

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre de classes d'équivalence sur $\mathbb{Z}$ pour la relation de congruence modulo n.

Définition 34. *Soit E un ensemble. On dit qu'une famille $(A_i)_{i\in I}$ des parties de E est une partition de E lorsque*

$$[\forall i, j \in I \quad A_i \cap A_j \neq \varnothing \Longrightarrow i = j] \text{ et } \bigcup_{i\in I} A_i = E$$

Proposition 15. *Soit E un ensemble.*
- *Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur E, la famille de ses classes d'équivalence forme une partition de E.*
- *Réciproquement, si $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de E, la relation $\mathcal{R}$ définie sur E par*

  $$\forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y \iff [\exists i \in I \quad x, y \in A_i]$$

  est une relation d'équivalence.