(i) Sont $a \in \mathbb{R}$. On cherche le n-ième terme de la suite (u_n) défini par
$$u_0 = a \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n = 5.$$

- On cherche les suites vérifiant :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n = 0$$
Ce sont les suites (u_n) telles qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \cdot \alpha.$$

- On cherche une suite constante solution de :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n = 5. \qquad (E)$$
Sont $c \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite défini par : $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = c$.
Alors (u_n) vérifié (E) si et seulement si :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad c - \frac{3}{2}c = 5$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}c = 5$$
$$\Leftrightarrow c = -10$$

Donc les solutions de (E) sont les suites (u_n) telles qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n - 10 .$$

Sont $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors
$$\alpha \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^0 - 10 = a \Leftrightarrow \alpha = a + 10.$$
Donc la suite vérifiant la relation de récurrence d'origine vérifié :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (a+10)\left(\frac{3}{2}\right)^n - 10$$

(ii) On résont l'équation caractéristique associée.
$$\forall z \in \mathbb{C} \quad z^2 = z + 1 \Leftrightarrow z^2 - z - 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$\Delta = (-1)^2 + 4 = 5$$

Donc les suites (u_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

sont les suites telles qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

où $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. En particulier, pour la suite de Fibonacci, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Or $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$. Donc $\lambda + \mu = 0$ et $\lambda r_1 + \mu r_2 = 1$.
Donc $\lambda(r_1 - r_2) = 1$. Donc $\lambda = 1/\sqrt{5}$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

(iii) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 6u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n = 0.$$

On résout l'équation caractéristique :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad 6z^2 + 5z - 6 = 0 \iff z = \frac{-5 \pm 13}{2 \times 6}$$

$$\Delta = 25 + 4 \times 6^2 = 169 = 13^2$$

$$\iff z = \frac{2}{3} \text{ ou } z = -\frac{3}{2}$$

Donc il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda\left(\frac{2}{3}\right)^n + \mu \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^n.$$

Or $u_0 = 1$ et $u_1 = -1$ donc $\lambda + \mu = 1$ et $\frac{2}{3}\lambda - \frac{3}{2}\mu = -1$

Donc $\left(\frac{2}{3} + \frac{3}{2}\right)\mu = \frac{2}{3} + 1$ donc $\frac{13}{6}\mu = \frac{10}{6}$ donc $\mu = \frac{10}{13}$

Or $\lambda\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ car $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ et $\left(\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right)$ diverge car $\left|\left(-\frac{3}{2}\right)\right| > 1$. Donc, comme $\mu \neq 0$, on en déduit que (u_n) diverge.