Calculs d'intégrales et de primitives

On s'assurera aisément par notre méthode que l'intégrale $\int \frac{e^x}{x} dx$, dont les Géomètres se sont beaucoup occupés, est impossible sous forme finie...

(Liouville - 1835)

On ne calcule une primitive que sur un intervalle ouvert !

1 Propriétés de l'intégrale

Rappel : si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, $C^0(I,\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$ et $C^1(I,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{C}$ dérivables de dérivée continue.

Théorème 1 [relation de Chasles]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0(I,\mathbb{C})$. Alors pour tous $a,b,c \in I$,

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Théorème 2 [linéarité de l'intégrale]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f,g \in C^0(I,\mathbb{C})$ et $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$. Alors

$$\int_a^b \alpha f(t) + \beta g(t)dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$$

Théorème 3 [croissance de l'intégrale]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f,g \in C^0(I,\mathbb{R})$ et $a,b \in I$ tels que $a \leqslant b$.

$$\text{Si } (\forall x \in [a,b], f(x) \leqslant g(x)) \text{ alors } \int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$$

Si $a > b$, il faut changer l'ordre : $f \leqslant g \Rightarrow \int_a^b f \geqslant \int_a^b g$. On aura donc intérêt à toujours vérifier l'ordre des bornes et éventuellement à mettre un signe moins pour rétablir l'ordre.

Théorème 4 [inégalité triangulaire]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in C^0(I,\mathbb{C})$ et $a,b \in I$ tels que $a \leqslant b$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt$$

L'ordre des bornes est essentiel. Il faudra donc éventuellement les permuter en mettant un signe moins.

Théorème 5 [intégrale fonction de sa borne supérieure]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0(I,\mathbb{C})$. Soit $c \in I$. Posons $F : \left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_c^x f(t)dt \end{array} \right.$. Alors F est dérivable et $F' = f$.

Exemple 1 $F : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^4}dt \end{array} \right.$.

Exemple 2 $G : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} e^{t^2} dt \end{array} \right.$.

Le théorème précédent va nous permettre de relier intégrales et primitives. Rappelons tout d'abord la définition des primitives :

Définition 1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \to \mathbb{C}$. On dit que g est une primitive de f sur I ssi g est dérivable sur I et $g' = f$.

Proposition 1 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0(I, \mathbb{C})$. Soit $x_0 \in I$. Alors les primitives de f sont les fonctions : $\left| \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \int_{x_0}^x f(t)dt + \lambda \end{array} \right.$ où λ décrit $\mathbb{C}$.

Ce résultat important signifie que pour calculer une primitive d'une fonction continue, il suffit de calculer une intégrale. Mais l'inverse est également vrai :

Théorème 6 [fondamental de l'analyse]
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in C^0(I, \mathbb{C})$. Soit F une primitive de f. Alors pour tous a et b dans I

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

On peut également l'écrire sous la forme

$$\boxed{\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a)}$$

si f est C^1 puisqu'alors f est une primitive de f' qui est bien continue.

2 Techniques de calcul

2.1 Calcul "à vue" par primitive

Le résultat précédent nous dit que pour calculer $\int_a^b f(x)dx$ il suffit de trouver une primitive de f. Avec un peu de chance, ceci peut se faire à vue.

Exemple 3 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$.

Exemple 4 Calculer $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x^2}dx$.

Exemple 5 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$.

Exemple 6 Calculer $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{x\ln(x)}dx$.

Entraînement 1 Calculer $\displaystyle\int_2^4 \frac{\ln(x)}{x}dx$.

2.2 Calcul par intégration par parties

Théorème 7 Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, u et $v \in C^1(I,\mathbb{C})$ et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

où $[f]_a^b$ désigne $f(b) - f(a)$.

▶ Cette méthode est souvent utilisée quand il y a un polynôme, pour abaisser le degré :

Exemple 7 Calculer $\displaystyle\int_0^\pi t^2\sin(t)dt$.

Rappelons qu'il est souvent intéressant de passer par les exponentielles complexes pour de telles intégrales. C'est ce que l'on ferait ici si l'on avait besoin également de $\displaystyle\int_0^\pi t^2\cos(t)dt$, un seul calcul donnant les deux intégrales.

▶ On l'utilise aussi quand on a une fonction dont on connaît bien la dérivée :

Exemple 8 Calculer $\displaystyle\int_1^2 \ln(t)dt$.

Entraînement 2 Calculer $\int_1^2 x\ln(x)dx$.

► C'est enfin une technique fréquente pour obtenir une relation de récurrence sur une intégrale dépendant de paramètres :

Exemple 9 Calculer $I_{n,m} = \int_0^1 t^n(1-t)^m dt$ avec n et $m \in \mathbb{N}$.

2.3 Calcul par changement de variable

Théorème 8 Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $g \in C^1(J, I)$, $f \in C^0(I, \mathbb{C})$. Soient $(\alpha, \beta) \in J^2$. Alors

$$\int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)dt$$

Quand on applique cette formule, c'est que l'on espère trouver immédiatement (à vue) une primitive de $t \mapsto f(g(t))g'(t)$ alors que l'on n'y arrive pas pour $x \mapsto f(x)$.

⚠ Il faut bien vérifier à chaque changement de variable que l'on a bien réalisé trois opérations :

1. changer x en $g(t)$,
2. changer dx en $g'(t)dt$,
3. changer les bornes.

Exemple 10 Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Exemple 11 Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$.

Exemple 12 Calculer $\displaystyle\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$.

Exemple 13 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{3+\cos(x)}dx$.

Entraînement 3 Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\sin(x)+\cos(x)}dx$ en posant $t = \tan(x)$.

3 Calculs de primitives

Comme nous l'avons vu, calculer une primitive d'une fonction continue revient à calculer une intégrale. Mais les primitives nous intéressent seulement à une constante près. Ainsi, en pratique, au lieu de noter $\int_{x_0}^x f(t)dt$, on notera simplement $\int f(t)dt$, écriture qui désigne une primitive de f à une constante près.

Exemple 14 On écrira $\int \cos(x)dx = \sin(x)$, la constante étant sous-entendue.

Cette notation est réservée exclusivement au calcul de primitives et ne doit jamais apparaître dans un autre contexte. C'est uniquement un raccourci bien commode qui évite de répéter sans cesse "une primitive de (blabla) est (blabla)".

Ainsi, toutes les techniques de calcul vues précédemment sont encore valables pour les primitives mais on ne note plus les bornes dans les intégrales, sachant qu'il s'agit toujours d'égalités à une constante près.

Lors d'un calcul de primitive par changement de variable, celui-ci doit être C^1 et bijectif (en précisant bien les intervalles) pour pouvoir revenir à l'ancienne variable (contrairement au calcul d'une intégrale sur un segment où la bijectivité est inutile).

▶ Voici tout d'abord un tableau de primitives à bien connaître :

Fonction	Primitive	Intervalle
$x^\alpha,\ \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$
$\cos$	$\sin$	$\mathbb{R}$
$\sin$	$-\cos$	$\mathbb{R}$
$\tan$	$-\ln(\lvert\cos\rvert)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi[,\ k\in\mathbb{Z}$
ch	sh	$\mathbb{R}$
sh	ch	$\mathbb{R}$
th	$\ln(\mathrm{ch})$	$\mathbb{R}$
$\exp$	$\exp$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x\ln(x)-x$	$]0,+\infty[$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$

▶ D'autres primitives sont importantes et il faut savoir les retrouver très rapidement :

Exemple 15 $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$ avec $a>0$:

Exemple 16 $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2}dx$

Exemple 17 $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2}dx$ avec $a>0$:

Exemple 18 $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$ avec $a>0$:

► On dispose toujours du calcul à vue :

Exemple 19 $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx$:

► Les primitives de la forme $\displaystyle\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$ se ramènent aux précédentes par la mise sous forme canonique du dénominateur ou factorisation :

Exemple 20 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$:

Exemple 21 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-3x+2}dx$:

► D'une manière générale, la décomposition en éléments simples permet de calculer les primitives de fractions rationnelles :

Exemple 22 Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{2x+5}{(x-1)^2(x+2)}$.

Exemple 23 Calculer une primitive de $x \mapsto \dfrac{x+1}{x(x^2-x+1)}$.

▶ Pour calculer des primitives de la forme $\displaystyle\int e^{ax}\cos(bx)dx$ ou $\displaystyle\int e^{ax}\sin(bx)dx$, on passe par l'exponentielle complexe :

Exemple 24 Calculer une primitive de $x \mapsto e^{2x}\sin(3x)$.

▶ Rappelons également l'importance de la linéarisation en trigonométrie :

Exemple 25 Calculer $\displaystyle\int \cos(2x)\cos^2(x)dx$.

▶ Terminons par quelques exemples utilisant des changements de variable ou des intégrations par parties :

Exemple 26 Calculer une primitive de $x \mapsto x\mathrm{ch}(x)$.

Exemple 27 Calculer une primitive de $t \mapsto \dfrac{e^{2t}}{1+e^t}$.

Exemple 28 Calculer $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx$ et $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx$.

Exemple 29 Calculer $\int \frac{1}{\sin(x)} dx$ en posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exemple 30 En déduire $\int \frac{1}{\cos(x)} dx$.

Exemple 31 Calculer $\int \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} dx$ en posant $t = e^x$.

Entraînement 4 Calculer $\int \frac{1}{\mathrm{sh}(x)} dx$ en posant $t = e^x$.