Devoir maison n° 2 bis

Vendredi 4 octobre

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Calcul de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{17}$

Dans ce problème, il n'est jamais fait appel à une calculatrice. Les raisonnements qui permettent de déterminer le signe d'une expression, ou de choisir qui est qui parmi les racines d'une équation du second degré, se basent uniquement sur les propriétés des fonctions usuelles.

1. Les racines de l'équation (1) sont les racines cinquièmes de l'unité :

$$\boxed{1,\ e^{\frac{2i\pi}{5}},\ e^{\frac{4i\pi}{5}},\ e^{\frac{6i\pi}{5}},\ e^{\frac{8i\pi}{5}}\ .}$$

2. Nous avons $z^5-1=(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1)$ pour tout $z\in\mathbb{C}$ et, si z est différent de zéro,

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^2(z^2+z^{-2}+z+z^{-1}+1)\,,\\ &= z^2\left(\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-2+\left(z+\frac{1}{z}\right)+1\right)\,,\\ &= z^2(Z^2+Z-1)\,. \end{aligned}$$

Après avoir remarqué que $Q(0)\neq 0$, on a l'équivalence $Q(z)=0$ si et seulement si $Z^2+Z-1=0$. Nous trouvons

$$z+\frac{1}{z}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\quad\text{ou}\quad z+\frac{1}{z}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,.$$

La première (*resp.* la seconde) équation s'écrit $z^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z+1=0$ (*resp.* $z^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}z+1=0$). Son discriminant vaut $\frac{3-\sqrt{5}}{2}-4=-\frac{5+\sqrt{5}}{2}$ (*resp.*$-\frac{5-\sqrt{5}}{2}$). Il est négatif dans les deux cas. Les quatres racines complexes de Q sont donc

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}+i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,,\\ z_2 &= -\frac{1+\sqrt{5}}{4}+i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\,,\\ z_3 &= -\frac{1+\sqrt{5}}{4}-i\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\,,\\ z_4 &= \frac{-1+\sqrt{5}}{4}-i\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,. \end{aligned}}$$

3. Compte-tenu du fait que $\pi/5$ et $2\pi/5$ appartiennent à $]0,\pi/2[$, que $4\pi/5\in\,]\pi/2,\pi[$, que $6\pi/5\in\,]\pi,3\pi/2[$, et enfin que $8\pi/5\in\,]3\pi/2,2\pi[$, les signes des sinus et cosinus nous permettent d'affirmer que $z_k=e^{2ik\pi/5}$ pour $k\in\{1,2,3,4\}$. Grâce aux relations $\cos(\pi-a)=-\cos(a)$ et $\sin(\pi-a)=\sin(a)$ appliquées avec $a=\pi/5$, nous obtenons

$$\boxed{\begin{array}{lcccl} \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) & & & = & \frac{-1+\sqrt{5}}{4}\,,\\ \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) & = & -\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) & = & \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,,\\ \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) & & & = & \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}\,,\\ \sin\left(\frac{\pi}{5}\right) & = & \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) & = & \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\,. \end{array}}$$

4. (a) L'hypothèse est ici que h est un multiple entier de 2π. Alors $\cos(a+nh)=\cos(a)$ et $\sin(a+nh)=\sin(a)$, d'où nous déduisons

$$\boxed{S(a,h)=n\cos(a)\quad\text{et}\quad\Sigma(a,h)=n\sin(a)\,.}$$

   (b) Le calcul a déjà été fait plusieurs fois (voir le cours en particulier).

5. (a) Les angles 5θ et 7θ sont dans $]0,\frac{\pi}{2}[$, donc leurs cosinus sont strictement positifs. Comme $\cos(11\theta)=-\cos(6\theta)$, que $0<3\theta<6\theta<\frac{\pi}{2}$ et que le cosinus est une fonction décroissante sur $]0,\frac{\pi}{2}[$, nous obtenons

$$\cos(6\theta)<\cos(3\theta)\,.$$

Par suite, $\cos(3\theta)+\cos(11\theta)>0$, et

$$x_1=[\cos(3\theta)+\cos(11\theta)]+\cos(5\theta)+\cos(7\theta)>0$$

en tant que somme de trois termes strictement positifs.

   (b) Posons ici $n=8$, $a=\theta$ et $h=2\theta$. Puisque $\sin(\frac{h}{2})\neq 0$, la question 4.b donne

$$x_1+x_2=\sum_{k=0}^{8-1}\cos(\theta+2k\theta)=S(a,h)=\frac{\sin(8\theta)\cos(8\theta)}{\sin(\theta)}=\frac{1}{2}\times\frac{\sin(16\theta)}{\sin(\theta)}=\frac{1}{2}\,,$$

car $\sin(16\theta)=\sin(\pi-16\theta)=\sin(\theta)$.

$$\boxed{x_1+x_2=\frac{1}{2}}$$

(c) Voici les étapes principales de cette question, à traiter avec minutie [le passage de la troisième à la quatrième égalité se fait en utilisant systématiquement les relations $\cos(\pi - a) = \cos(\pi + a) = -\cos(a)$] :

$$\begin{aligned}
2x_1x_2 &= 2\Big(\cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)\Big) \\
&\quad \times \Big(\cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)\Big), \\
&= \cos(2\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + \cos(12\theta) + \cos(10\theta) + \cos(16\theta) \\
&\quad + \cos(12\theta) + \cos(18\theta) + \cos(4\theta) + \cos(6\theta) + \cos(4\theta) + \cos(14\theta) \\
&\quad + \cos(8\theta) + \cos(18\theta) + \cos(10\theta) + \cos(20\theta) + + \cos(6\theta) + \cos(8\theta) \\
&\quad + \cos(2\theta) + \cos(16\theta) + \cos(6\theta) + \cos(20\theta) + \cos(8\theta) + \cos(22\theta) \\
&\quad + \cos(10\theta) + \cos(12\theta) + \cos(2\theta) + \cos(20\theta) + \cos(2\theta) + \cos(24\theta) \\
&\quad + \cos(4\theta) + \cos(26\theta), \\
&= 4\cos(2\theta) + 4\cos(4\theta) + 4\cos(6\theta) + 3\cos(8\theta) + 3\cos(10\theta) \\
&\quad + 3\cos(12\theta) + \cos(14\theta) + 2\cos(16\theta) + 2\cos(18\theta) + 3\cos(20\theta) \\
&\quad + \cos(22\theta) + \cos(24\theta) + \cos(26\theta), \\
&= -4\cos(15\theta) - 4\cos(13\theta) - 4\cos(11\theta) - 3\cos(9\theta) - 3\cos(7\theta) \\
&\quad - 3\cos(5\theta) - \cos(3\theta) - 2\cos(\theta) - 2\cos(\theta) - 3\cos(3\theta) \\
&\quad - \cos(5\theta) - \cos(7\theta) - \cos(9\theta), \\
&= -4\Big(\cos(\theta) + \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(9\theta) + \cos(11\theta) \\
&\quad + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)\Big).
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\boxed{x_1x_2 = -2(x_1 + x_2) = -1\,.}$$

(d) Les nombres x_1 et x_2 sont les racines de l'équation du second degré $X^2 - \frac{1}{2}X - 1 = 0$. Le produit des racines étant négatif et x_1 étant strictement positif d'après la question 5.a, on a

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= \frac{1+\sqrt{17}}{4}, \\ x_2 &= \frac{1-\sqrt{17}}{4}. \end{aligned}}$$

6. En développant comme ci-dessus, on trouve $y_1y_2 = \frac{1}{2}S(2\theta, 2\theta)$ et $y_3y_4 = -\frac{1}{2}S(\theta, 2\theta)$ avec $n = 8$. En tenant compte de ce que $\sin(17\theta) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
y_1y_2 &= \frac{\sin(8\theta)\cos(2\theta + 7\theta)}{2\sin(\theta)}, \\
&= \frac{\sin(17\theta) - \sin(\theta)}{4\sin(\theta)}, \\
&= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a déjà calculé $S(\theta, 2\theta) = \frac{1}{2}$, donc

$$y_3y_4 = -\frac{1}{4}.$$

Les nombres y_1 et y_2 sont les racines de l'équation du second degré $X^2 - \frac{1+\sqrt{17}}{4}X - \frac{1}{4} = 0$. Le produit des racines étant négatif et y_1 étant strictement positif comme on l'a prouvé à la question 5.a, on a

$$\boxed{\begin{aligned} y_1 &= \frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}, \\ y_2 &= \frac{1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{8}. \end{aligned}}$$

Les nombres y_3 et y_4 sont les racines de l'équation du second degré $X^2 - \frac{1-\sqrt{17}}{4}X - \frac{1}{4} = 0$. Le produit des racines étant négatif et y_3 étant strictement positif comme on l'a prouvé à la question 5.a, on a

$$\boxed{\begin{aligned} y_3 &= \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}, \\ y_4 &= \frac{1-\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}. \end{aligned}}$$

7. Remarquons que $\cos(\theta)\cos(13\theta) = \frac{1}{2}(\cos(12\theta) + \cos(14\theta)) = -\frac{1}{2}(\cos(5\theta) + \cos(3\theta))$ et, par suite,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) + \cos(13\theta) &= y_3, \\ \cos(\theta)\cos(13\theta) &= -\frac{1}{2}y_1. \end{aligned}$$

Les nombres $\cos(\theta)$ et $\cos(13\theta)$ sont les racines de l'équation du second degré

$$z^2 - \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{8}z - \frac{1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}}{16} = 0.$$

Le produit des racines étant négatif et $\cos(\theta)$ étant strictement positif, on a (les calculs intermédiaires, notamment celui du discriminant sont omis)

$$\boxed{\begin{gathered} \cos\left(\frac{\pi}{17}\right) = \\ \frac{1-\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{170-26\sqrt{17}}+4\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16} \end{gathered}}$$

Remarque. Le fait de pouvoir écrire le cosinus d'un angle $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ à l'aide de nombres rationnels, de symboles arithmétiques, et du symbole racine carrée est équivalent à la possibilité de construire le polygône régulier à n côtés *à la règle et au compas*. En particulier, le polygône régulier à 34 côtés est constructible à la règle et au compas. C'est déjà en soi un résultat intéressant.

On sait en fait plus. Pour $k \in \mathbb{N}$, posons $F_k = 2^{2^k} + 1$: c'est le $k^{\text{ième}}$ nombre de Fermat ($F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$). Alors le polygône régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est une puissance de 2 ou bien si

$$n = 2^j F_{k_1} F_{k_2} \dots F_{k_r}$$

où $j \in \mathbb{N}$ et où les F_{k_i} sont des nombres de Fermat deux à deux distincts et *premiers*. Ce résultat a été énoncé et partiellement prouvé par Gauss.

On ne connaît que cinq nombres de Fermat premiers : ceux qui sont mentionnés ci-dessus. Pour $p \geq 5$, ou bien on sait que F_p n'est pas premier, ou bien on ignore s'il est premier ou composé. La lectrice ou le lecteur intéressé par ces sujets fascinants pourra consulter le livre de Jean-Claude Carrega, *Théorie des corps, La règle et le compas*, publié chez Hermann en 1989.