Exercice 5.2 (Feuille, révisions d'analyse)

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt = \int_{\pi/2}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}-u\right)(-du)$$

$u = \frac{\pi}{2} - t$
$du = -dt$

$$= -\int_{\pi/2}^{0} \cos^n u.du = \int_0^{\pi/2} \cos^n u.du = J_n$$

On a donc prouvé que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = J_n}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\forall t \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \qquad \sin t \geqslant 0$$
$$\sin^n t \geqslant 0$$

Donc $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t.dt \geqslant 0$ car $0 \leqslant \frac{\pi}{2}$.

On a donc prouvé que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = J_n \geqslant 0}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$ $\quad I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1} t\,dt - \int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$

$$= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\underbrace{\sin^n t}_{\geqslant 0}\,\underbrace{(\sin t - 1)}_{\leqslant 0}}_{\leqslant 0}\,dt$$

Donc $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ car $0 \leqslant \frac{\pi}{2}$. En conclusion, on a prouvé que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} \leqslant I_n}$$

Donc (I_n) est décroissante positive. Il en est donc de même pour $(J_n)_n$.

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 t \, dt = \int_0^{\pi/2} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt = \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = 0-(-1)=1$$

Donc $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } I_1 = 1}$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t \, dt = \int_0^{\pi/2} \overbrace{\sin t}^{\uparrow} . \underbrace{\sin^{n+1} t}_{\downarrow} . dt$$

$$= \left[-\cos t . \sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos t)(n+1)\cos t \sin^n t \, dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t . \sin^n t . dt$$

$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t) \sin^n t \, dt$$

$$= (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t . dt\right)$$

$$= (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

donc $(n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$.

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n}$

4) Montrons que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}_n = " I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)} "$$

<u>$\mathcal{H}_0$ est vraie :</u> En effet $I_0 I_1 = \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2(0+1)}$

<u>$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$:</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$I_{n+2} \cdot I_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \cdot I_n \cdot I_{n+1} \quad \text{d'après la question 3}$$

$$= \frac{\cancel{n+1}}{n+2} \cdot \frac{\pi}{2\cancel{(n+1)}} = \frac{\pi}{2(n+2)}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence sur n, on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n \cdot I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}}$$

5) Montrons que $\dfrac{I_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_{n+1} \leqslant I_n \leqslant I_{n-1}$$

donc $$I_{n+1} I_n \leqslant I_n^2 \leqslant I_{n-1} I_n$$

donc $$\frac{\pi}{2(n+1)} \leqslant I_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2n}$$

donc $$\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

donc $$\sqrt{\frac{n}{n+1}} \leqslant I_n \cdot \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leqslant 1$$

donc $\qquad \underbrace{\sqrt{\frac{1}{1+1/n}}}_{\substack{\downarrow n\infty \\ 1}} \leqslant I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leqslant \underset{\substack{\downarrow n\infty \\ 1}}{1}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes

$$I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$$

Donc $\boxed{I_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.}$

Exercice 3 : TD Primitives

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}.$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int (1+x^2)^{-n} . dx$$

$$= \int \underset{\uparrow}{1}. \underbrace{(1+x^2)^{-n}}_{\downarrow} dx$$

$$= x.(1+x^2)^{-n} - \int x(-n).2x.(1+x^2)^{-n-1} dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}.dx.$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{(x^2+1-1)}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left[\int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \right]$$

$$= \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\left(I_n - I_{n+1}\right)$$

Donc $\quad 2n\, I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1) I_n$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n} . I_n .$$

On a donc prouvé que :

$$\boxed{\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1}{2n}\frac{x}{(1+x^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\int \frac{dx}{(1+x^2)^n}}$$

En particulier

$$\boxed{I_1 = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x}$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x)}.$$

Donc $\quad I_3 = \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4} I_2$

$$= \frac{1}{4}\frac{x}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{4}\left(\frac{x}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{Arctan} x\right)$$

$$\boxed{I_3 = \frac{x}{4(x^2+1)^2} + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{3}{8}\operatorname{Arctan} x}$$

Exercice 4 : TD Primitives

On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \, dt$$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \overbrace{1}^{\uparrow} \cdot \underbrace{(1-t^2)^{n+1}}_{\downarrow} \, dt$$

$$= \Big[t(1-t^2)^{n+1} \Big]_0^1 - \int_0^1 t(-2t)(n+1)(1-t^2)^n \, dt$$

$$= 2(n+1) \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n \, dt$$

$$= 2(n+1) \int_0^1 \Big[(t^2-1) + 1 \Big] (1-t^2)^n \, dt$$

$$= 2(n+1) \left(-I_{n+1} + I_n \right)$$

$$(2n+3) I_{n+1} = (2n+2) I_n.$$

On a donc prouvé :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n}$$

2) On a donc

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} = \frac{2n}{(2n+1)} \cdot \frac{2(n-1)}{2(n-1)+1} I_{n-2}$$

$$= \frac{2n \times 2(n-1) \cdots \times 2 \times 1}{(2n+1)(2n-1) \cdots \times 3} I_0$$

$$= \frac{2^n . n! \, (2n) \times \cdots \times 2}{(2n+1)(2n)(2n-1) \cdots \times 3 \times 2} . I_0$$

$$= \frac{2^n . n! \, 2^n . n!}{(2n+1)!} I_0$$

$$= \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!} \int_0^1 1 dt$$

$$= \frac{2^{2n} . (n!)^2}{(2n+1)!}$$

Donc on a prouvé que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}}$$

Si on veut éviter une preuve avec les ..., on peut une fois la formule intuitée, démontrer la relation par récurrence sur n. Mais cela passera très bien en devoir, sans faire la récurrence.