Cours : Continuité, limites

Table des matières

1 Fonctions numériques, topologie élémentaire

Définition 1. *On appelle fonction numérique toute application à valeurs réelles (ou complexes) dont le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ est une partie de $\mathbb{R}$.*

Remarques :

⇨ Le plus souvent, $\mathcal{D}_f$ sera un intervalle, une union finie d'intervalles deux à deux disjoints. Par exemple : $\mathbb{R}$, $\quad \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\quad \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, $\quad \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

⇨ Il arrive que l'on définisse une fonction par son expression. C'est alors au lecteur de déterminer son domaine de définition en analysant l'expression de l'intérieur vers l'extérieur.

Définition 2. *Soit f une fonction numérique dont le domaine de définition est $\mathcal{D}_f$. Si A est une partie de $\mathcal{D}_f$, on dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ sur A lorsque la restriction de f à A vérifie la propriété $\mathcal{P}$.*

1.1 Symétries, fonctions lipschitziennes

Définition 3. *Soit f une fonction dont le domaine de définition est symétrique par rapport à 0, c'est-à-dire tel que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad -x \in \mathcal{D}_f$$

On dit que f est

- *paire lorsque :*
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(-x) = f(x)$$
- *impaire lorsque :*
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(-x) = -f(x)$$

Définition 4. *Soit $T \in \mathbb{R}$ et f une fonction dont le domaine de définition vérifie :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad x + kT \in \mathcal{D}_f$$

On dit que f est T-périodique, ou que T est une période de f, lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x+T) = f(x)$$

Lorsque f admet une période non nulle, on dit que f est périodique.

Remarques :

⇨ L'ensemble G des périodes d'une fonction f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. En particulier, si T est une période de f et si $k \in \mathbb{Z}$, alors kT est une période de f. Lorsque f admet une plus petite période strictement positive, notée T_0, ont dit que T_0 est la période de f. On montre dans ce cas que $G = T_0\mathbb{Z}$.

Définition 5. *Soit $k \in \mathbb{R}_+$. On dit qu'une fonction f est k-lipschitzienne lorsque :*

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad |f(x) - f(y)| \leqslant k\,|x - y|$$

Exemples :

⇨ Montrer que les fonctions valeur absolue et sinus sont 1-lipschitziennes.

Remarques :

⇨ L'ensemble des fonctions lipschitziennes est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, mais ce n'est pas une sous-algèbre. En effet, la fonction $f : x \mapsto x$ est lipschitzienne, mais f^2 ne l'est pas.

1.2 Fonctions réelles et ordre sur $\mathbb{R}$

Définition 6. *On dit qu'une fonction réelle f est :*

— *croissante lorsque :*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \quad x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$$

— *décroissante lorsque :*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \quad x_1 \leqslant x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

— *monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.*

— *strictement croissante lorsque :*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

— *strictement décroissante lorsque :*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

— *strictement monotone lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Remarques :

⇨ Une fonction réelle f est strictement monotone si et seulement si elle est monotone et injective.

⇨ Si f est une fonction réelle strictement croissante, alors :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f \quad f(x_1) \leqslant f(x_2) \Longrightarrow x_1 \leqslant x_2$$

Cette propriété caractérise d'ailleurs les fonctions strictement croissantes.

Proposition 1.

— *La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante).*

— *Le produit de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) positives est croissant (resp. décroissant).*

— *L'inverse d'une fonction croissante (resp. décroissante) de signe constant est décroissante (resp. croissante).*

— *La composée de deux fonctions monotone est monotone ; elle est croissante si les fonctions ont même sens de variations et décroissante si leurs sens de variation sont opposés.*

— *La bijection réciproque d'une fonction strictement croissante (resp. décroissante) est strictement croissante (resp. décroissante).*

Remarques :

⇨ Une fonction f est décroissante si et seulement si $-f$ est croissante. En utilisant la proposition précédente, on en déduit par exemple que le produit d'une fonction croissante positive et d'une fonction décroissante négative est décroissante négative.

Exemples :

⇨ Étudier la monotonie de la fonction $x \mapsto \sin\left(\left(e^{-x} - 1\right)\pi/2\right)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Définition 7. *On dit qu'une fonction réelle f est :*

— *majorée lorsque :*

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) \leqslant M$$

— *minorée lorsque :*

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) \geqslant m$$

Exemples :

⇨ Montrer que la fonction d'expression xe^{-x} est majorée sur $\mathbb{R}$.

Définition 8. *On dit qu'une fonction réelle ou complexe f est bornée lorsque :*

$$\exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |f(x)| \leqslant M$$

Exemples :

⇨ Montrer que la fonction d'expression $\frac{x}{1+x^2}$ est bornée par $1/2$ sur $\mathbb{R}$.

Remarques :

⇨ Une fonction réelle est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée.

Définition 9. *Soit f et g deux fonctions ayant le même domaine de définition $\mathcal{D}$ On dit que f est inférieure à g et on note $f \leqslant g$ lorsque :*

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) \leqslant g(x)$$

Remarques :

⇨ La négation de $f \leqslant g$ s'écrit

$$\exists x \in \mathcal{D} \quad f(x) > g(x)$$

⇨ La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ qui n'est pas totale.

1.3 Topologie élémentaire

Définition 10. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \quad |x - a| \leqslant \varepsilon$$

Remarques :

⇨ Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $a \in A$ tel que $x \leqslant a \leqslant y$.

Proposition 2. *Une partie A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de A convergeant vers x.*

Proposition 3. *$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

Remarques :

⇨ Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

⇨ L'ensemble $\mathcal{D}$ des nombres décimaux et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Exemples :

⇨ En remarquant que $(\sqrt{2}-1)^n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, montrer que

$$A = \left\{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

est dense dans $\mathbb{R}$.

Définition 11. *On dit qu'une partie O de $\mathbb{R}$ est un ouvert lorsque c'est une réunion d'intervalles ouverts.*

Définition 12. *On dit qu'un réel x_0 est intérieur à une partie A de $\mathbb{R}$ lorsqu'il existe $\eta > 0$ tel que $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \subset A$.*

Remarques :

⇨ Si x_0 est intérieur à A, alors $x_0 \in A$. Cependant, la réciproque est fausse ; par exemple $0 \in \{0\}$ mais 0 n'est pas intérieur à A.

⇨ Excepté les bornes, tous les points d'un intervalle sont intérieurs à celui-là.

⇨ Si A est un ouvert, tous les points de A sont intérieurs à A.

Définition 13. *Soit f une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est définie au voisinage de a lorsqu'il existe une suite d'éléments de $\mathcal{D}_f$ qui tend vers a.*

Remarques :

⇨ Si la fonction f est définie sur un intervalle I, f est définie au voisinage de tous les points de I et de ses bornes.

Théorème 1. *Soit $([a_n, b_n])$ une suite de segments non vides telle que :*

— *La suite est décroissante au sens de l'inclusion :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$$

— *La longueur des segments converge vers 0 :*

$$b_n - a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Alors l'ensemble $\cap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$ contient un unique élément $l \in \mathbb{R}$.

Théorème 2. *Toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente.*

Exemples :

⇨ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, (p_n) une suite d'entiers relatifs et (q_n) une suite d'entiers naturels non nuls tels que $\frac{p_n}{q_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$. Montrer que $q_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

1.4 Voisinages

Définition 14.

— *Soit $a \in \mathbb{R}$. On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un voisinage de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que*

$$\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leqslant \varepsilon\} = [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$$

— *On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $+\infty$ lorsqu'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\mathcal{V} = [m, +\infty[$$

— *On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{R}$ est un voisinage de $-\infty$ lorsqu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que :*

$$\mathcal{V} =]-\infty, M]$$

— *Soit $a \in \mathbb{C}$. On dit qu'une partie $\mathcal{V}$ de $\mathbb{C}$ est un voisinage de a lorsqu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :*

$$\mathcal{V} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant \varepsilon\}$$

Remarques :

⇨ Une intersection de deux voisinages d'un même élément est un voisinage. Plus généralement, une intersection d'un nombre fini de voisinages est un voisinage.

⇨ Une suite réelle (ou complexe) (u_n) converge vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) si et seulement si pour tout voisinage $\mathcal{V}$ de l, il existe un voisinage $\mathcal{W}$ de $+\infty$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \in \mathcal{W} \Longrightarrow u_n \in \mathcal{V}$$

⇨ En seconde année, vous verrez une autre définition des voisinages d'un élément $a \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$). Les voisinages, tels qu'ils sont définis dans ce cours, seront toujours des voisinages l'année prochaine, mais la réciproque est fausse.

Définition 15. *Soit f une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ au voisinage de a lorsqu'il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{V}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.*

Exemples :

⇨ La fonction sin est croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Elle est donc croissante au voisinage de 0.

⇨ Une fonction f est bornée au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\exists \eta > 0 \quad \exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)| \leqslant M$$

Une fonction f est bornée au voisinage de $+\infty$ si et seulement si

$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \exists M \in \mathbb{R}_+ \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \geqslant m \Longrightarrow |f(x)| \leqslant M$$

Définition 16. *On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est locale en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque quelles que soient les fonctions f et g définies au voisinage de a, si il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que*

$$\mathcal{D}_g \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{D}_f \text{ et } [\forall x \in \mathcal{D}_g \cap \mathcal{V} \quad g(x) = f(x)]$$

alors $\mathcal{P}(f) \Longrightarrow \mathcal{P}(g)$.

Remarques :

⇨ Toute personne comprenant les subtilités de cette définition gagnera une sucette géante.

2 Limites

2.1 Définition, propriétés élémentaires

Proposition 4. *Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a et on note*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

lorsque

- *Pour $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) :*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$
- *Pour $a \in \mathbb{R}$ et $l = -\infty$:*
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant M$$
- *Pour $a \in \mathbb{R}$ et $l = +\infty$:*
$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - a| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant m$$
- *Pour $a = -\infty$ et $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) :*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \leqslant A \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$
- *Pour $a = -\infty$ et $l = -\infty$:*
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant M$$
- *Pour $a = -\infty$ et $l = +\infty$:*
$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists A \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \leqslant A \Longrightarrow f(x) \geqslant m$$
- *Pour $a = +\infty$ et $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) :*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \geqslant B \Longrightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$
- *Pour $a = +\infty$ et $l = -\infty$:*
$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \leqslant M$$
- *Pour $a = +\infty$ et $l = +\infty$:*
$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists B \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \geqslant B \Longrightarrow f(x) \geqslant m$$

Remarques :

⇨ On montre que $f(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) lorsque x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si pour tout voisinage $\mathcal{W}$ de l, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{V} \quad f(x) \in \mathcal{W}$$

Exemples :

⇨ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante telle que

$$f(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Que dire si f n'est pas croissante ?

Proposition 5. *Soit f une fonction définie au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et $l\in\overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors*

$$f(x)\xrightarrow[x\to a]{}l$$

si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{D}_f$ tendant vers a, la suite $(f(u_n))$ tend vers l.

Remarques :

⇨ Si f est définie en $a\in\mathbb{R}$ et admet une limite en a, cette limite est $f(a)$.

⇨ Cette proposition est utile pour prouver qu'une fonction f n'a pas de limite en a. Pour cela, il suffit de trouver deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a \text{ et } v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a$$

et telles que les suites de terme général $f(u_n)$ et $f(v_n)$ aient des limites distinctes.

Exemples :

⇨ Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

⇨ Montrer que la fonction d'expression $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Proposition 6. *Si f admet une limite $l\in\overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) en $a\in\overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique ; si tel est le cas, on écrit :*

$$\lim_{x\to a}f(x)=l$$

Proposition 7. *Soit f une fonction définie au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et $l\in\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$). On suppose que :*

$$f(x)\xrightarrow[x\to a]{}l$$

Alors :

$$|f(x)|\xrightarrow[x\to a]{}|l| \quad \text{et } \overline{f}(x)\xrightarrow[x\to a]{}\bar{l}$$

Proposition 8. *Soit f une fonction complexe définie au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et $l\in\mathbb{C}$. Alors :*

$$f(x)\xrightarrow[x\to a]{}l \quad\Longleftrightarrow\quad \left[\mathrm{Re}\left[f(x)\right]\xrightarrow[x\to a]{}\mathrm{Re}(l) \text{ et } \mathrm{Im}\left[f(x)\right]\xrightarrow[x\to a]{}\mathrm{Im}(l)\right]$$

Proposition 9.

— *Les théorèmes usuels portant sur les combinaisons linéaires, les produits et les quotients de limites de suites restent vrais pour les fonctions.*

— *Soit f une fonction définie au voisinage de a tendant vers $l_1\in\overline{\mathbb{R}}$ en a et g une fonction définie au voisinage de l_1 tendant vers $l_2\in\overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) en l_1. Si $g\circ f$ est définie au voisinage de a, alors :*

$$(g\circ f)(x)\xrightarrow[x\to a]{}l_2$$

Remarques :

⇨ Comme pour les suites, la somme d'une fonction admettant une limite finie en a et d'une fonction n'admettant pas de limite en a n'admet pas de limite en a. Les autres théorèmes de ce type sont souvent faux ; par exemple, il est possible qu'une fonction f n'admette pas de limite en a bien que $g\circ f$ admette une limite en a.

⇨ Soit f et g sont deux fonctions réelles définies sur $\mathcal{D}$. On définit les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ par :

$$\forall x\in\mathcal{D}\quad \sup(f,g)(x)=\max(f(x),g(x)) \text{ et } \inf(f,g)(x)=\min(f(x),g(x))$$

Si f et g admettent pour limite respectives l_f et $l_g\in\mathbb{R}$ en $a\in\overline{\mathbb{R}}$, alors

$$\sup(f,g)(x)\xrightarrow[x\to a]{}\max(l_f,l_g) \text{ et } \inf(f,g)(x)\xrightarrow[x\to a]{}\min(l_f,l_g)$$

Exemples :

⇨ Déterminer la limite, si elle existe de

$$\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$$

en 0.

2.2 Limites et ordre sur $\mathbb{R}$

Proposition 10. *Soit f une fonction réelle ou complexe admettant une limite finie en a. Alors f est bornée au voisinage de a.*

Proposition 11. *Soit f une fonction réelle telle que $f(x)$ tende vers $l\in\mathbb{R}$ lorsque x tend vers $a\in\overline{\mathbb{R}}$.*

— *Si f est majorée par $M\in\mathbb{R}$, alors $l\leqslant M$.*

— *Si f est minorée par $m\in\mathbb{R}$, alors $l\geqslant m$.*

Proposition 12. *Soit f une fonction réelle telle que $f(x)$ tende vers $l\in\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a\in\overline{\mathbb{R}}$.*

— *Si M est un réel tel que $l<M$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que :*

$$\forall x\in\mathcal{D}_f\quad x\in\mathcal{V}\Longrightarrow f(x)\leqslant M$$

— *Si m est un réel tel que $l>m$, il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de a tel que :*

$$\forall x\in\mathcal{D}_f\quad x\in\mathcal{V}\Longrightarrow f(x)\geqslant m$$

Remarques :

⇨ En pratique, il conviendra d'expliciter les voisinages. Par exemple, si $f(x)$ tend vers $l < M$ lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x-a| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow f(x) \leqslant M$$

⇨ Si une fonction complexe f admet une limite $l \in \mathbb{C}$ non nulle en $+\infty$, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \geqslant m \Longrightarrow f(x) \neq 0$$

Proposition 13. *Soit a, b et f des fonctions réelles telles que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad a(x) \leqslant f(x) \leqslant b(x)$$

On suppose que a et b admettent la même limite finie $l \in \mathbb{R}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

Exemples :

⇨ Déterminer la limite, si elle existe, de la fonction d'expression $\frac{x}{2+\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ en 0.

Proposition 14. *Soit f et g deux fonctions réelles telles que*

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) \leqslant g(x)$$

et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
- *Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$, alors $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$.*
- *Si $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$.*

Proposition 15. *Soit f une fonction, $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et g une fonction réelle positive telle que :*
- $\forall x \in \mathcal{D} \quad |f(x) - l| \leqslant g(x)$
- $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$

Alors :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

2.3 Limite à gauche, à droite

Définition 17.
- *Soit f une fonction définie au voisinage à gauche de $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f admet l pour limite à gauche en a lorsque la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]-\infty, a[$ admet l pour limite en a. Si tel est le cas, on note :*

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x < a}]{} l$$

  La propriété « tend vers l lorsque x tend vers a par la gauche » est locale à gauche en a.
- *Soit f une fonction définie au voisinage à droite de $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$). On dit que f admet l pour limite à droite en a lorsque la restriction de f à $\mathcal{D}_f \cap]a, +\infty[$ admet l pour limite en a. Si tel est le cas, on note :*

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} l$$

  La propriété « tend vers l lorsque x tend vers a par la droite » est locale à droite en a.

Proposition 16. *Soit f une fonction définie au voisinage de a et $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a si et seulement si, les objets ci-dessous susceptibles d'avoir un sens*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x), \quad f(a) \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

existent et sont égaux à l.

Exemples :

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Montrer que $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$.

Proposition 17. *Soit f une fonction réelle croissante sur un intervalle I.*
- *Si $a \in I$ n'est pas une borne de I, f admet une limite finie à gauche et une limite finie à droite en a. De plus :*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \leqslant f(a) \leqslant \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$

- *Si a est la borne supérieure de I, f admet une limite en a. Cette limite est finie si f est majorée, et est égale à $+\infty$ sinon.*
- *Si a est la borne inférieure de I, f admet une limite en a. Cette limite est finie si f est minorée, et est égale à $-\infty$ sinon.*

Remarques :

⇨ Une proposition similaire existe pour les fonctions décroissantes.

⇨ Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, croissante et majorée, alors elle admet une limite $l \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant l$$

Si de plus f est strictement croissante

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) < l$$

3 Continuité

3.1 Continuité

Définition 18. *On dit qu'une fonction f est continue en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque :*

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$$

La propriété « est continue en x_0 » est locale en x_0. On appelle domaine de continuité de f l'ensemble des $x_0 \in \mathcal{D}_f$ en lesquels f est continue.

Remarques :

⇨ La continuité de f en x_0 s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

⇨ Une fonction f est continue en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si elle admet une limite en x_0.

⇨ Une fonction continue en x_0 est bornée au voisinage de x_0.

⇨ On dit qu'une fonction f est continue à droite en x_0 lorsque

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}]{} f(x_0)$$

De même, on définit la notion de continuité à gauche. Une fonction est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en x_0.

⇨ On dit qu'une fonction f admet une discontinuité de première espèce en x_0 lorsqu'elle admet des limites à droite et à gauche et lorsque l'une de ces limite est différente de $f(x_0)$. Par exemple, la fonction partie entière admet une discontinuité de première espèce en tout point $x_0 \in \mathbb{Z}$.

Exemples :

⇨ Toute fonction lipschitzienne est continue en tout point de son domaine de définition.

⇨ Les fonctions valeur absolue, puissance (en particulier les puissances entières et les racines n-ièmes), ln, exp, les fonctions trigonométriques circulaires et hyperboliques, directes et réciproques sont continues en tout point de leur domaine de définition.

⇨ La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ est discontinue en 0. Cette discontinuité n'est pas une discontinuité de première espèce.

Définition 19. *On dit qu'une fonction est continue lorsqu'elle est continue en tout point de son domaine de définition.*

Remarques :

⇨ Une fonction f est continue sur une partie A de $\mathcal{D}_f$ lorsque sa restriction à A est continue.

⇨ Soit g une restriction de f et $x_0 \in \mathcal{D}_g$. Si f est continue en x_0, alors il en est de même pour g. Cependant, il est possible que g soit continue en x_0 sans que f le soit. Par exemple la restriction de la partie entière à $[0, 1[$ est nulle donc continue en 0. Cependant, la partie entière n'est pas continue en 0.

⇨ On reprend les notations de la remarque précédente. Si x_0 est intérieur à $\mathcal{D}_g$, la continuité de g en x_0 implique celle de f.

⇨ En conclusion des deux remarques précédentes, si f est une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ et $A \subset \mathcal{D}_f$, la continuité de f en tout point de A implique sa continuité sur A. Par contre, la continuité f sur A implique seulement la continuité de f en tout point intérieur à A.

Proposition 18. *Soit f une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Alors f est continue en x_0 si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de $\mathcal{D}_f$ convergeant vers x_0 :*

$$f(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x_0)$$

Remarques :

⇨ Soit f une fonction continue sur l'intervalle I et (u_n) une suite telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

Alors, si (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, c'est une borne de I ou un point fixe de f.

⇨ Soit f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. Si elles coïncident sur $\mathbb{Q}$, alors $f = g$.

⇨ Cette proposition est utile pour prouver qu'une fonction f n'est pas continue en x_0. Pour cela, il suffit de trouver une suite (u_n) convergeant vers x_0 telle que la suite de terme général $f(u_n)$ ait une limite différente de $f(x_0)$.

Exemples :

⇨ Montrer que la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ est discontinue en tout point.

⇨ Quelles sont les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Proposition 19. *Soit f et g deux fonctions continues en x_0. Alors :*

- *Si λ, $\mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0.*
- *$f \cdot g$ est continue en x_0.*
- *Si $g(x_0) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de x_0 et f/g est continue en x_0.*

Remarques :

⇨ Si $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\mathcal{C}^0(\mathcal{D}, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre.

Proposition 20. *Soit f et g deux fonctions telles que $g \circ f$ soit défini au voisinage de x_0. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Remarques :

⇨ Les deux propositions précédentes sont regroupées sous la dénomination de « théorèmes usuels ».

⇨ La somme d'une fonction continue en x_0 et d'une fonction discontinue en x_0 est discontinue en x_0. Les autres propositions de ce type peuvent être fausses. Par exemple, si f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x \text{ et } g(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

alors f est continue en 0 et g ne l'est pas. Pourtant $f \cdot g$ l'est. On retiendra que les réciproques des théorèmes usuels peuvent être fausses.

Proposition 21. *Soit f une fonction continue en x_0. Alors $\overline{f}$ et $|f|$ sont continues en x_0.*

Proposition 22. *Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. Alors :*

$$[f \text{ est continue en } x_0] \iff [\mathrm{Re}(f) \text{ et } \mathrm{Im}(f) \text{ sont continues en } x_0]$$

Remarques :

⇨ Si f est une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ continue en x_0, alors e^f est continue en x_0.

Exemples :

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ix}-1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ i & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

3.2 Prolongement par continuité

Définition 20. *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ n'appartenant pas à $\mathcal{D}_f$. Lorsque $f(x)$ admet une limite finie $l \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) lorsque x tend vers a, on dit que f est prolongeable par continuité en a. La fonction*

$$\begin{array}{rcl} \hat{f} : \mathcal{D}_f \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \ (\text{ou } \mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ l & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

est alors appelée prolongement par continuité de f en a. C'est une fonction continue en a.

3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3. *Soit f une fonction réelle continue sur l'intervalle I, $a, b \in I$ et $y_0 \in$ « $[f(a), f(b)]$ ». Alors il existe $x_0 \in$ « $[a, b]$ » tel que $f(x_0) = y_0$.*

Remarques :

⇨ Une fonction réelle continue ne s'annulant pas sur un intervalle I est de signe constant.

⇨ Soit f une fonction continue sur un intervalle I telle que

$$\forall x \in I \quad [f(x) = 0 \text{ ou } f(x) = 1]$$

Alors f est constante. Plus généralement, si sur un intervalle, une fonction continue prend un nombre fini de valeurs, alors elle est constante.

Exemples :

⇨ Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Alors f admet un point fixe.

⇨ Sur un intervalle, une fonction continue injective est strictement monotone.

Proposition 23. *Soit f une fonction réelle continue sur $]a, b[$ où $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :*

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l_a \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } f(x) \xrightarrow[x \to b]{} l_b \in \overline{\mathbb{R}}$$

Alors, si $y_0 \in$ « $]l_a, l_b[$ », il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Exemples :

⇨ Tout polynôme réel de degré impair admet une racine réelle.

Proposition 24. *L'image d'un intervalle par une fonction réelle continue est un intervalle.*

Remarques :

⇨ Cette proposition est une reformulation du théorème des valeurs intermédiaires.

⇨ Lorsque f est une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle I dont les bornes sont a et $b \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(I)$ est un intervalle de même nature et ses bornes sont respectivement

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \text{ et } \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$$

⇨ En pratique, lorsque f est une fonction élémentaire (donc continue), on dresse son tableau de variations et on « lit » sur ce tableau l'image par f de l'intervalle étudié.

⇨ Il est possible que les intervalles I et $f(I)$ ne soient pas de même nature (ouvert, fermé, ouvert à gauche et fermé à droite). Par exemple, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

on a $f(]-\infty, +\infty[) =]0, 1]$.

Proposition 25. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle continue strictement monotone sur I. Alors f induit une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle $J = f(I)$. De plus, sa bijection réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue sur J.*

Remarques :

⇨ La fonction sin est strictement croissante sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Comme $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$, elle réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. Sa bijection réciproque, la fonction Arcsin est donc continue sur $[-1, 1]$.

Exemples :

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) = xe^x$$

Montrer que f réalise une bijection continue de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, que f^{-1} est continue et que $f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

3.4 Image continue d'un segment

Définition 21. *Soit f une fonction réelle définie sur un ensemble non vide X. Si f est majorée sur X, $\{f(x) : x \in X\}$ est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure notée :*

$$\sup_{x \in X} f(x)$$

On dit que cette borne est atteinte lorsqu'il existe $x_0 \in X$ tel que

$$f(x_0) = \sup_{x \in X} f(x)$$

c'est-à-dire lorsque l'ensemble $\{f(x) : x \in X\}$ admet un plus grand élément ; si tel est le cas, la borne supérieure est notée :

$$\max_{x \in X} f(x)$$

Remarques :

⇨ On définit de même la notion de borne inférieure.

Exemples :

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x(1-x)$$

Alors f est bornée et atteint ses bornes sur $[0, 1]$.

$$\sup_{x \in [0,1]} x(1-x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \text{ et } \inf_{x \in [0,1]} x(1-x) = f(0) = f(1) = 0$$

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

Alors f n'est pas majorée sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, elle est minorée mais n'atteint pas sa borne inférieure sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+^*} \frac{1}{x} = 0$$

Théorème 4. *Sur un segment, une fonction continue est bornée et atteint ses bornes.*

Exemples :

⇨ Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ telle que $\forall x \in [a, b] \quad 0 \leqslant f(x) < 1$. Montrer que si (u_n) est une suite d'éléments de $[a, b]$, alors :

$$f(u_n)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Proposition 26. *L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.*

3.5 Continuité uniforme

Définition 22. *On dit qu'une fonction f est uniformément continue lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Remarques :

⇨ Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exemples :

⇨ Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais n'est pas lipschitzienne.

Proposition 27. *Si f est uniformément continue, alors elle est continue.*

Remarques :

⇨ Soit f une fonction continue. Alors

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}_f \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Les deux premiers quantificateurs étant de même nature, on peut les échanger, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}_f \quad |x - y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Une fonction est donc uniformément continue lorsqu'on peut échanger les quantificateurs portant sur x et η, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de choisir η indépendamment de x.

Exemples :

⇨ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue.

Théorème 5. *Sur un segment, toute fonction continue est uniformément continue.*