Exercice 1.2 :

On souhaite trouver les fonctions y, dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$(E) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) = |y(x)|$$

Analyse : Soit y une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) = |y(x)|$$

Alors : $\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) = |y(x)| \geqslant 0$
Donc y est croissante sur $\mathbb{R}$.

Supposons que y ne s'annule pas : Alors, puisque y est continue, on en déduit qu'elle est strictement positive ou strictement négative.

- Supposons que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) > 0$

Alors $\forall t \in \mathbb{R} \quad y'(t) = y(t)$

donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad y'(t)e^{-t} - y(t)e^{-t} = 0$

donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-t}\right) = 0$

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t)e^{-t} = c$$

donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = ce^{t}$

Comme y est strictement positive, on en déduit que $y(0) > 0$. Donc $c > 0$.

- Supposons que : $\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) < 0$

De la même manière, on montre qu'il existe $c < 0$ tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = ce^{-t}$$

Supposons maintenant qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(t_0) = 0$

Par croissance de f, on en déduit que

$$\forall t \geqslant t_0 \quad y(t) \geqslant 0$$

Donc $\forall t \in [t_0, +\infty[\quad y'(t) = y(t)$

On en déduit (cf raisonnement plus haut) qu'il existe $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in [t_0, +\infty[\quad y(t) = c_1 e^{t}$$

Mais $y(t_0) = 0$ donc $c_1 e^{t_0} = 0$ donc $c_1 = 0$ car $e^{t_0} \neq 0$.

De même, par croissance de f

$$\forall t \in]-\infty, t_0] \quad y(t) \leqslant 0$$

donc $\forall t \in]-\infty, t_0] \quad y'(t) = -y(t)$

Donc, par intégration de l'équation différentielle, il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t \in]-\infty, t_0] \quad y(t) = c_2 e^{-t}$$

Or $y(t_0) = 0$ donc $c_2 e^{-t_0} = 0$ donc $c_2 = 0$ car $e^{-t_0} \neq 0$. On en déduit donc que y est la fonction nulle.

Synthèse :
- La fonction nulle est solution de (E)
- Si $c \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction

$$y_c \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow ce^{t} \end{array} \right.$$

est bien solution de (E). En effet, elle est positive et : $\forall t \in \mathbb{R} \quad y_c'(t) = y_c(t) = |y_c(t)|$

- Si $c \in \mathbb{R}_-^*$, la fonction

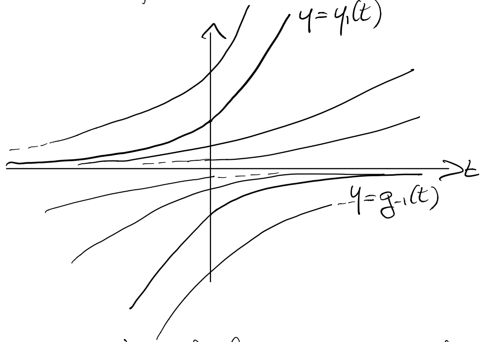
$$g_c \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow ce^{-t} \end{array} \right.$$

est bien solution de (E). En effet, elle est négative et : $\forall t \in \mathbb{R} \quad g_c'(t) = -g_c(t) = |g_c(t)|$

En conclusion, les solutions de (E) sont :

- la fonction nulle
- Les fonctions $t \longrightarrow ce^{t}$ où $c > 0$
- Les fonctions $t \longrightarrow ce^{-t}$ où $c < 0$

Le graphe de ces fonctions est



On peut démontrer facilement que quel que soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, le problème de Cauchy admet une unique solution, même si cette équation différentielle ne tombe pas dans les hypothèses du théorème de Cauchy énoncé dans le cours (elle n'est pas linéaire).

exercice 1.4

1) Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors
y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$

$\iff \forall t > 0 \quad |t|\, y'(t) + (t-1)\, y(t) = 0$

$\iff \forall t > 0 \quad y'(t) + \left(1 - \frac{1}{t}\right) y(t) = 0$

Or $\int \left(1 - \frac{1}{t}\right) dt = t - \ln t$

$\iff \forall t > 0 \quad y'(t)\, e^{t - \ln t} + \left(1 - \frac{1}{t}\right) e^{t - \ln t}\, y(t) = 0$

$\iff \forall t > 0 \quad \frac{d}{dt}\left(y(t)\, e^{t - \ln(t)} \right) = 0$

$\iff \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \quad y(t) \frac{e^{t}}{t} = c$

$\iff \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall t > 0 \quad y(t) = c\, t\, e^{-t}$

Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$. Alors
y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

$\iff \forall t < 0 \quad |t|\, y'(t) + (t-1)\, y(t) = 0$

$\iff \forall t < 0 \quad -t\, y'(t) + (t-1)\, y(t) = 0$

$\iff \forall t < 0 \quad y'(t) + \left(\frac{1}{t} - 1\right) y(t) = 0$

Or $\int \left(\frac{1}{t} - 1\right) dt = \ln t - t$

$\iff \forall t < 0 \quad y'(t)\, e^{\ln t - t} + \left(\frac{1}{t} - 1\right) e^{\ln t - t}\, y(t) = 0$

$\iff \forall t < 0 \quad \frac{d}{dt}\left(y(t)\, e^{\ln t - t} \right) = 0$

$\iff \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall t < 0 \quad y(t) . t . e^{-t} = c$

$\iff \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall t < 0 \quad y(t) = \frac{c}{t} . e^{t}$

2) On souhaite résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

Analyse : Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Alors y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Il existe donc $c_1 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t > 0 \quad y(t) = c_1 t e^{-t}$$

De même, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$ donc il existe $c_2 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall t < 0 \quad y(t) = \frac{c_2}{t} e^{t}$$

De plus, y est dérivable en 0, donc continue en 0.
Or

$$\frac{1}{t}e^{t} \xrightarrow[t<0]{t\to 0} -\infty.$$

Donc $c_2=0$. De plus, comme y est solution, on a, pour $t=0$

$$|0|y'(0)+(0-1)y(0)=0$$

donc $\quad -y(0)=0$
donc $\quad y(0)=0$

Donc, pour $h>0$

$$\frac{y(0+h)-y(0)}{h}=\frac{c_1he^{-h}-0}{h}=c_1e^{-h}\xrightarrow[h>0]{h\to 0}c_1$$

Mais comme $c_2=0$, on a, pour $h<0$

$$\frac{y(0+h)-y(0)}{h}=\frac{0-0}{h}=0\xrightarrow[h<0]{h\to 0}0$$

Mais comme y est dérivable en 0, sa dérivée à gauche est égale à sa dérivée à droite. Donc $c_1=0$.
En conclusion :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad y(t)=0$$

Synthèse : Il est immédiat que la fonction nulle est dérivable et solution de (E) sur $\mathbb{R}$

En conclusion l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est la fonction nulle.

Exercice 1.5

1) Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors
y est solution de (E)

$\iff \forall t>0\quad ty'(t)-(t+2)y(t)=0$

$\iff \forall t>0\quad y'(t)-\left(1+\frac{2}{t}\right)y(t)=0$

Or $\displaystyle\int -\left(1+\frac{2}{t}\right)dt=-t-2\ln t$

$\iff \forall t>0\quad y'(t)e^{-t-2\ln t}-\left(1+\frac{2}{t}\right)e^{-t-2\ln(t)}y(t)=0$

$\iff \forall t>0\quad \frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-t-2\ln t}\right)=0$

$\iff \exists c\in\mathbb{R}\quad \forall t>0\quad y(t)e^{-t-2\ln t}=c$

$\iff \exists c\in\mathbb{R}\quad \forall t>0\quad y(t)=ct^2e^t$

Soit y une fonction dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$.
y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$

$\iff \forall t<0\quad ty'(t)-(t+2)y(t)=0$

$\iff \forall t<0\quad y'(t)-\left(1+\frac{2}{t}\right)y(t)=0$

Or, sur $\mathbb{R}_-^*$, $\displaystyle\int -\left(1+\frac{2}{t}\right)dt=-t-2\ln|t|$

$\iff \forall t<0\quad y'(t)e^{-t-2\ln|t|}-\left(1+\frac{2}{t}\right)e^{-t-2\ln|t|}y(t)=0$

$\iff \forall t<0\quad \frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-t-2\ln|t|}\right)=0$

$\iff \exists c\in\mathbb{R}\quad \forall t<0\quad y(t)e^{-t-2\ln|t|}=c$

$\iff \exists c\in\mathbb{R}\quad \forall t<0\quad y(t)=ct^2e^t$

2) On cherche les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Analyse : Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Alors y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Il existe donc $c_1\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall t>0\quad y(t)=c_1t^2e^t$$

De même, y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.
Il existe donc $c_2\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall t<0 \quad y(t) = c_2 t^2 e^t$$

De plus y est solution de (E), donc pour $t=0$,

$$0y'(0) - (0+2)y(0) = 0$$

donc $\quad 2y(0) = 0$

donc $\quad y(0) = 0$

Synthèse : Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. On définit y sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \begin{cases} c_1 t^2 e^t & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t=0 \\ c_2 t^2 e^t & \text{si } t<0 \end{cases}$$

Alors y est solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.
Montrons qu'elle est dérivable en 0.
Pour $h>0$.

$$\frac{y(1+h)-y(0)}{h} = \frac{c_1 h^2 e^h - 0}{h} = c_1 h e^h \xrightarrow[h>0]{h\to 0} 0$$

Donc y est dérivable à droite en 0 et $y'_d(0) = 0$
Pour $h<0$

$$\frac{y(1+h)-y(0)}{h} = \frac{c_2 h^2 e^h - 0}{h} = c_2 h e^h \xrightarrow[h<0]{h\to 0} 0$$

Donc y est dérivable à gauche en 0 et $y'_g(0) = 0$.
Donc y est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$.

De plus $\quad 0y'(0) - (0+2)y(0) = 0$

Donc y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$y_{c_1,c_2} \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow \begin{cases} c_1 t^2 e^t & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t=0 \\ c_2 t^2 e^t & \text{si } t<0 \end{cases} \end{array} \right.$$

3) Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. On cherche les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ telles que $y(t_0) = y_0$

- Si $t_0 = 0$: Si $y_0 = 0$: Toutes les solutions de (E) vérifient $y(0)=0$. Donc il y a une infinité de solution au problème de Cauchy

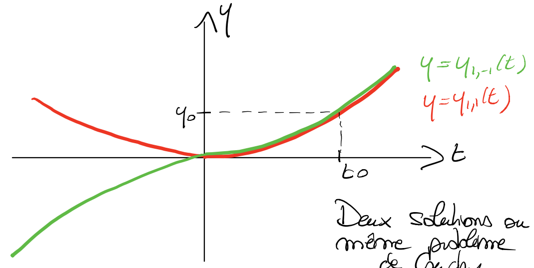
  Si $y_0 \neq 0$: Il n'y a aucune solution de (E) telle que $y(0) = y_0$, donc le problème de Cauchy n'a aucune solution

- Si $t_0 < 0$: Alors :

$$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad y_{c_1,c_2}(t_0) = y_0$$
$$\Leftrightarrow \quad c_2 t_0^2 e^{t_0} = y_0$$
$$\Leftrightarrow \quad c_2 = \frac{y_0 e^{-t_0}}{t_0^2}$$

Comme il n'y a aucune condition sur c_1, il y a une infinité de solutions au problème de Cauchy

- Si $t_0 > 0$: De même, il y a une infinité de solutions au problème de Cauchy



Deux solutions au même problème de Cauchy.