Devoir maison n° 2 bis

Vendredi 4 octobre

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Calcul de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{\pi}{17}$

L'objet de ce problème est d'établir des formules permettant de calculer le cosinus de certains angles de la forme π/n à l'aide de radicaux emboîtés pour $n = 5$ et $n = 17$.

I - Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$

1. Soit l'équation :
$$z^5 - 1 = 0\,. \tag{1}$$
Résoudre (??) dans $\mathbb{C}$ en calculant les cinq racines sous forme module-argument.
2. Résoudre (??) dans $\mathbb{C}$ par radicaux carrés. On pourra pour cela procéder comme suit :
   (a) Déterminer le polynôme Q tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :
   $$z^5 - 1 = (z-1)Q(z)\,.$$
   (b) Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en effectuant le changement d'inconnue défini par : $z + \frac{1}{z} = Z$. Vérifier que les quatre zéros complexes de Q, que l'on calculera, s'expriment à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.
3. De la question précédente, déduire les expressions par radicaux de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

II - Calcul de quelques sommes trigonométriques

On désigne dans cette partie par a et h deux réels, et par n un élément de $\mathbb{N}^*$. On pose :

$$\begin{aligned} S(a,h) &= \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kh)\,, \\ \Sigma(a,h) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kh)\,. \end{aligned}$$

1. On suppose que $\sin\left(\frac{h}{2}\right) = 0$. Calculer $S(a,h)$ et $\Sigma(a,h)$ en fonction de a et de n.
2. On suppose que $\sin\left(\frac{h}{2}\right) \neq 0$. Démontrer les formules :
$$\begin{aligned} S(a,h) &= \frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)\cos\left[a+(n-1)\frac{h}{2}\right]}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\,, \\ \Sigma(a,h) &= \frac{\sin\left(\frac{nh}{2}\right)\sin\left[a+(n-1)\frac{h}{2}\right]}{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}\,. \end{aligned}$$
On pourra pour cela évaluer $S(a,h) + i\Sigma(a,h)$, cette méthode n'étant toutefois pas imposée.

III - Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{17}\right)$

Dans cette partie, θ désigne, pour alléger les notations, le réel $\frac{\pi}{17}$. Dans cette partie, le calcul de valeurs décimales approchées des radicaux n'est pas demandé. On pose

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos(3\theta) + \cos(5\theta) + \cos(7\theta) + \cos(11\theta)\,, \\ x_2 &= \cos(\theta) + \cos(9\theta) + \cos(13\theta) + \cos(15\theta)\,. \end{aligned}$$

1. Montrer que $x_1 > 0$.
2. Calculer $x_1 + x_2$ à l'aide de la partie II. On trouvera un rationnel très simple.
3. Calculer le produit x_1x_2. On devra pour cela :
   (a) développer le produit des deux sommes x_1 et x_2.
   (b) appliquer au résultat obtenu la formule de linéarisation du produit $\cos(a)\cos(b)$, où a et b sont deux réels quelconques
   (c) en conclure que $x_1x_2 = -2(x_1 + x_2)$;
   (d) vérifier finalement que x_1x_2 est un entier relatif que l'on précisera.
4. Déduire de ce qui précède des expressions de x_1 et x_2 par radicaux carrés.
5. On pose ici :
$$\begin{aligned} y_1 &= \cos(3\theta) + \cos(5\theta)\,, \\ y_2 &= \cos(7\theta) + \cos(11\theta)\,, \\ y_3 &= \cos(\theta) + \cos(13\theta)\,, \\ y_4 &= \cos(9\theta) + \cos(15\theta)\,. \end{aligned}$$
Calculer, en s'inspirant de la question précédente, les produits y_1y_2 et y_3y_4. En déduire des expressions de y_1, y_2, y_3, y_4 à l'aide de radicaux carrés, éventuellement superposés.
6. Déduire enfin de ce qui précède une expression de $\cos(\theta)$ à l'aide de radicaux carrés.