

COURS : FONCTIONS USUELLES

Table des matières

1 Logarithme, exponentielle, puissance	1
1.1 Logarithme népérien	1
1.2 Exponentielle	2
1.3 Logarithme et exponentielle en base a	3
1.4 Fonction puissance	3
1.5 Croissances comparées	5
2 Fonctions trigonométriques	5
2.1 Fonctions trigonométriques directes	5
2.2 Fonction Arcsin	5
2.3 Fonction Arccos	6
2.4 Fonction Arctan	7
2.5 Formules de trigonométrie réciproque	8
3 Fonctions trigonométriques hyperboliques	8
3.1 Trigonométrie hyperbolique directe	8

1 Logarithme, exponentielle, puissance

1.1 Logarithme népérien

Définition 1. On appelle logarithme népérien et on note \ln l'unique primitive s'annulant en 1 de la fonction $x \mapsto 1/x$ définie sur \mathbb{R}_+^* .

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_1^x \frac{dt}{t} \end{aligned}$$

Proposition 1.

- \ln est continue sur \mathbb{R}_+^* .
- \ln est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln' x = \frac{1}{x}$$

- \ln est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Remarques :

\Rightarrow Sur \mathbb{R}^*

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x|$$

\Rightarrow Si f est une fonction dérivable ne s'annulant pas, la fonction d'expression

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

est appelée dérivée logarithmique de f . C'est la dérivée de la fonction d'expression $\ln |f(x)|$.

Proposition 2. On a :

$$\begin{aligned} \ln 1 &= 0 \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(xy) &= \ln x + \ln y \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln(1/x) &= -\ln x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \ln x^n &= n \ln x \end{aligned}$$

Proposition 3. \ln est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

Exemples :

\Rightarrow Résoudre l'inéquation $\ln |x+1| - \ln |2x+1| \leq \ln 2$.

Proposition 4.

- \ln est injectif : $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x = \ln y \implies x = y$
- \ln réalise une surjection de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} : $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x = y$

Définition 2. Il existe un unique réel noté e et appelé nombre de Néper tel que $\ln e = 1$.

Proposition 5. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \ln x$$

Proposition 6. On a :

$$\forall x \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+x) \leq x$$

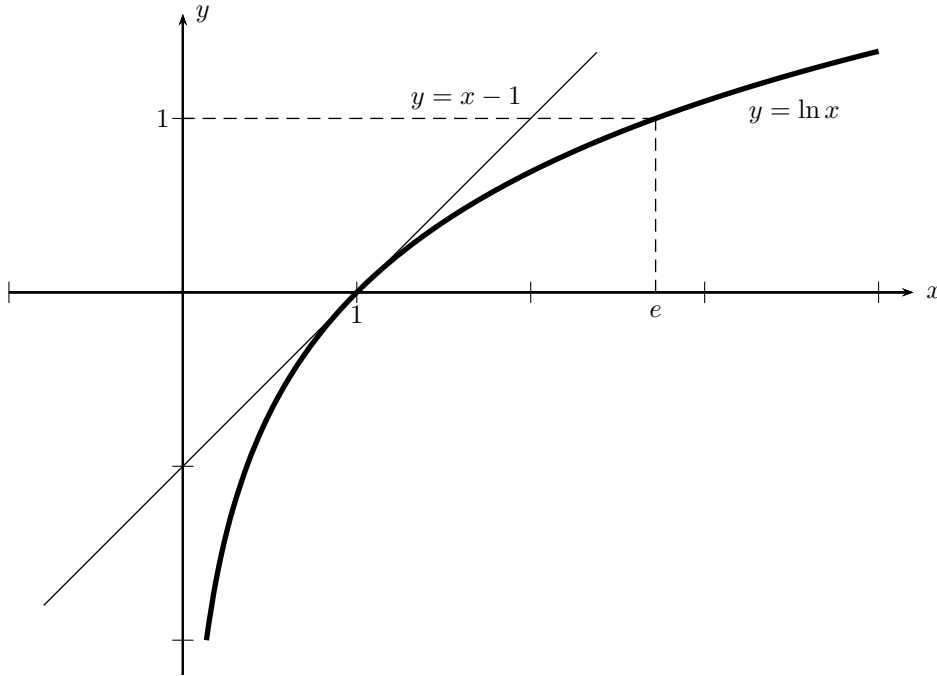
Exemples :

\Rightarrow Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

Proposition 7. On a :

$$\frac{x}{\ln x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad x \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$



1.2 Exponentielle

Définition 3. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln x = y$; on le note $x = \exp y$. On définit alors la fonction :

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \exp y \end{aligned}$$

Proposition 8. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \ln(\exp x) &= x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \exp(\ln x) &= x \end{aligned}$$

Proposition 9.

- \exp est injective : $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp x = \exp y \implies x = y$
- \exp réalise une surjection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}_+^* : $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \exp x = y$

Proposition 10.

$$\begin{aligned} \exp 0 &= 1 & \exp 1 &= e \\ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp(x+y) &= \exp(x) \exp(y) \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(-x) &= \frac{1}{\exp x} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \exp(nx) &= (\exp x)^n \end{aligned}$$

Proposition 11. \exp est strictement croissante sur \mathbb{R} et :

$$\exp x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \text{ et } \exp x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

Proposition 12.

- \exp est continue sur \mathbb{R} .
- \exp est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp' x = \exp x$$

- \exp est C^∞ sur \mathbb{R} .

Proposition 13. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp x \geq 1 + x$$

Exemples :

\Rightarrow Montrer que

$$\forall x < 1 \quad \exp x \leq \frac{1}{1-x}$$

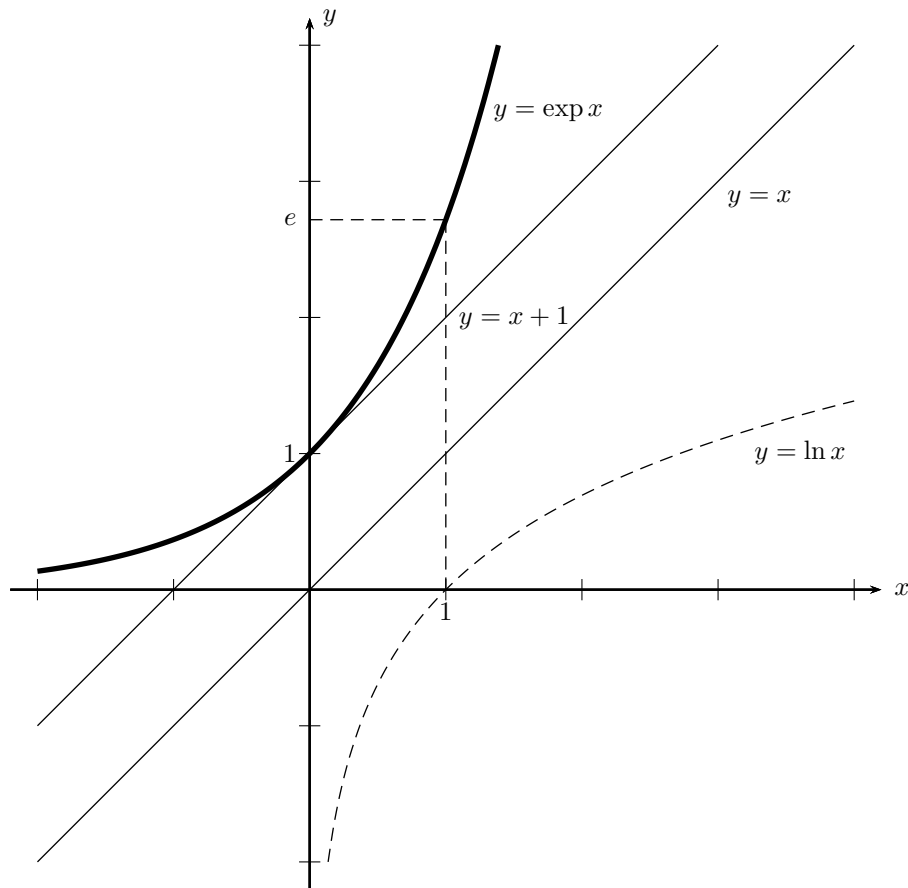
\Rightarrow Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 < b \exp(-ax) - a \exp(-bx) < b - a$$

Proposition 14. On a :

$$\frac{\exp x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad x \exp x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

$$\frac{\exp x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$



1.3 Logarithme et exponentielle en base a

Définition 4. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle logarithme en base a et on note \log_a la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \log_a x : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\ln x}{\ln a} \end{aligned}$$

Remarques :

- ⇒ Le logarithme népérien n'est rien d'autre que le logarithme en base e . Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal qui est utilisé en physique (décibels) et en chimie (pH). Enfin, si $a = 2$, on obtient le logarithme binaire, utilisé en informatique.

Exemples :

- ⇒ Résoudre le système

$$\begin{cases} 2 \log_x y + 2 \log_y x = -5 \\ xy = e \end{cases}$$

Proposition 15. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R}_+^* & \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \quad \log_a(1/x) = -\log_a x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} & \quad \log_a x^n = n \log_a x \end{aligned}$$

Définition 5. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\log_a x = y$; on le note $x = \exp_a y$ et on a :

$$\exp_a x = \exp(x \ln a)$$

On définit alors la fonction \exp_a :

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \exp(x \ln a) \end{aligned}$$

Remarques :

- ⇒ Lorsque $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle.

1.4 Fonction puissance

Définition 6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit x^y par :

$$x^y = \exp(y \ln x)$$

Remarques :

- ⇒ En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp x = e^x$. Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x$$

On utilisera désormais cette notation pour désigner l'exponentielle ainsi que l'exponentielle en base a .

- ⇒ Afin de dériver une fonction de la forme $f(x) = u(x)^{v(x)}$ où u et v sont des fonctions dérivables sur \mathcal{D} et u est une fonction à valeurs strictement positives, il est indispensable de la mettre sous la forme

$$f(x) = e^{v(x) \ln(u(x))}$$

Exemples :

- ⇒ Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$.
- ⇒ Calculer $\frac{d}{dx}(x^x)$.

Définition 7. Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance, la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$\begin{aligned} \varphi_a : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^a \end{aligned}$$

Proposition 16. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x^0 &= 1 & \forall a \in \mathbb{R} \quad 1^a &= 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad x^{a+b} &= x^a x^b \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad x^{-a} &= 1/x^a \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad (xy)^a &= x^a y^a \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad (x^a)^b &= x^{ab} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall a \in \mathbb{R} \quad \ln(x^a) &= a \ln x \end{aligned}$$

Proposition 17. Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_a : x \mapsto x^a$ définie sur \mathbb{R}_+^* est :

- continue sur \mathbb{R}_+^* .
- dérivable sur \mathbb{R}_+^* et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi'_a(x) = ax^{a-1}$$

- \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}_+^* .

Remarques :

\Rightarrow Soit f_1, \dots, f_n des fonctions dérivables à valeurs strictement positives sur \mathcal{D} et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. On définit la fonction f sur \mathcal{D} par

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) = f_1(x)^{\alpha_1} \dots f_n(x)^{\alpha_n}$$

Alors f est dérivable sur \mathcal{D} et

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha_1 \cdot \frac{f'_1(x)}{f_1(x)} + \dots + \alpha_n \cdot \frac{f'_n(x)}{f_n(x)}$$

Cette relation reste vraie si l'on suppose juste que les fonctions f_k sont dérivables et ne s'annulent pas, dans le cas bien sûr où l'expression $f_1(x)^{\alpha_1} \dots f_n(x)^{\alpha_n}$ conserve un sens (c'est-à-dire lorsque les α_k associés aux fonctions f_k prenant des valeurs strictement négatives sont entiers). On a donc :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f'(x) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \cdot f_1(x)^{\alpha_1} \dots f'_k(x) f_k^{\alpha_k-1}(x) \dots f_n(x)^{\alpha_n}$$

Cette relation reste d'ailleurs vraie si l'on suppose juste les fonctions f_k dérivables dans la mesure où l'expression $f_1(x)^{\alpha_1} \dots f_n(x)^{\alpha_n}$ conserve un sens (c'est-à-dire lorsque les α_k associés aux fonctions f_k pouvant s'annuler sont entiers naturels).

Exemples :

\Rightarrow Calculer

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}} \right), \quad \frac{d}{dx} \left(\frac{x+2}{\sqrt[3]{1+x^2}} \right)$$

Proposition 18. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$x^a \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ 0 & \text{si } a < 0 \end{cases} \text{ et } x^a \xrightarrow{x \rightarrow 0} \begin{cases} 0 & \text{si } a > 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \\ +\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Remarques :

\Rightarrow Si $a > 0$, on définit 0^a en posant $0^a = 0$. La fonction

$$\begin{aligned} \varphi_a : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^a \end{aligned}$$

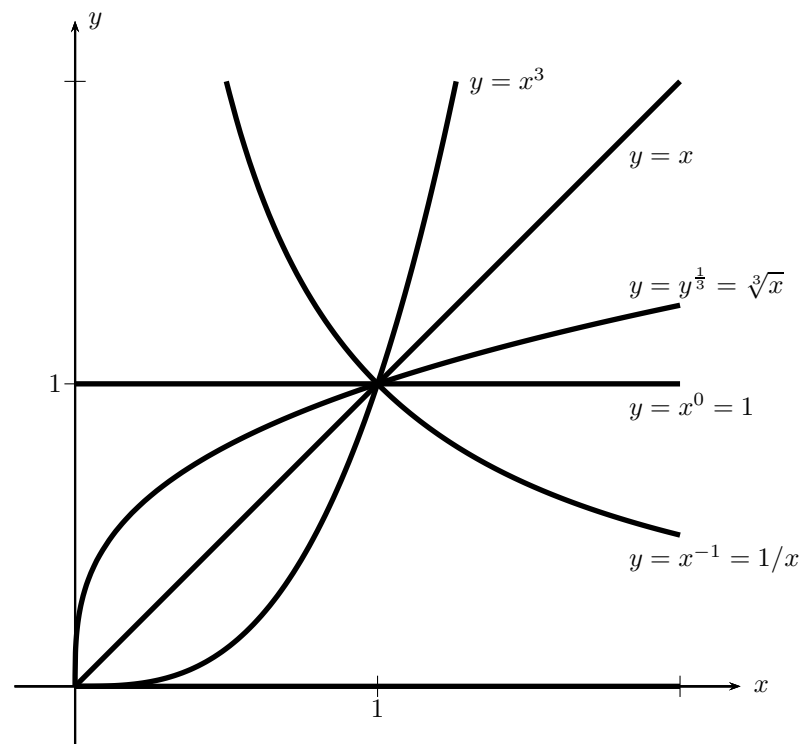
est alors continue sur \mathbb{R}_+ et dérivable sur :

— \mathbb{R}_+ lorsque $a \geq 1$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi'_a(x) = ax^{a-1}$$

— \mathbb{R}_+^* lorsque $a < 1$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi'_a(x) = ax^{a-1}$$



1.5 Croissances comparées

Proposition 19. Soit $\alpha, \beta > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$x^\alpha (\ln x)^n \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Remarques :

⇒ Mnémotechniquement, on dit qu'en 0 et en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

Exemples :

⇒ Calculer les limites suivantes

$$\frac{(\ln x)^2}{e^x} \text{ en } +\infty, \quad \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ en } 0, \quad |\ln x|^x \text{ en } 0$$

2 Fonctions trigonométriques

2.1 Fonctions trigonométriques directes

Proposition 20. Les fonctions \sin , \cos et \tan sont C^∞ sur leur ensemble de définition et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \sin^{(n)} x = \sin \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^{(n)} x = \cos \left(x + n \frac{\pi}{2} \right)$$

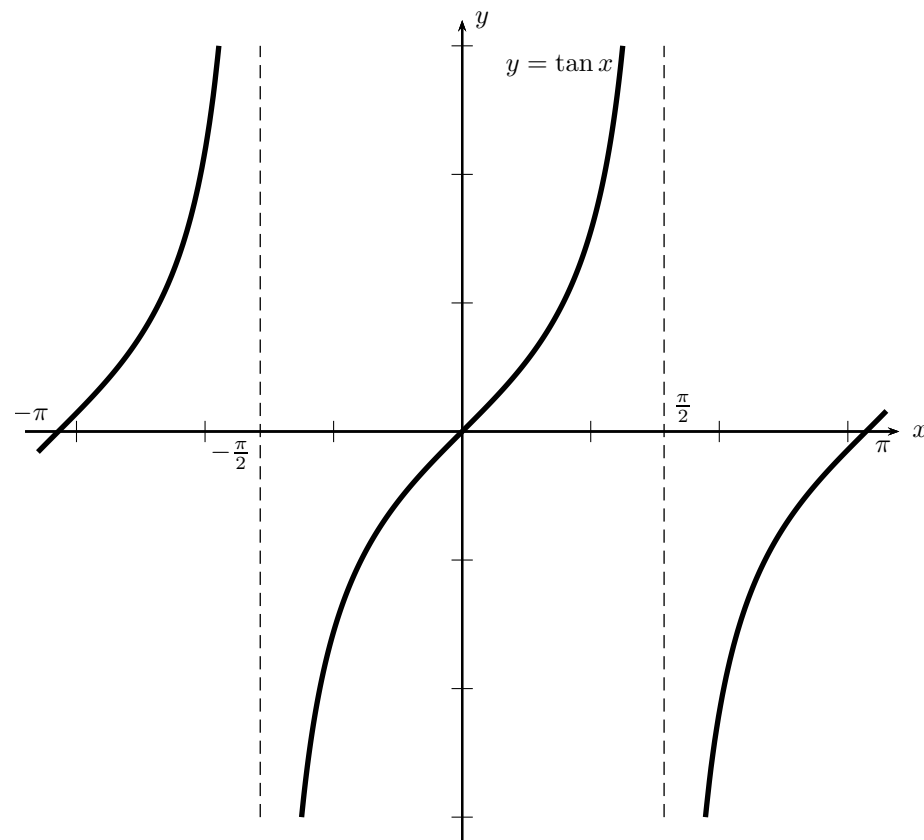
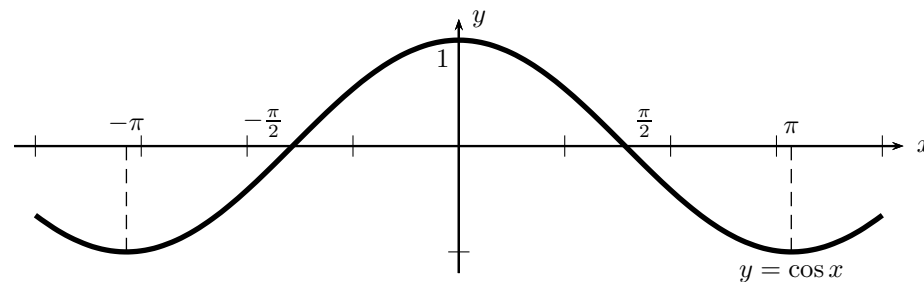
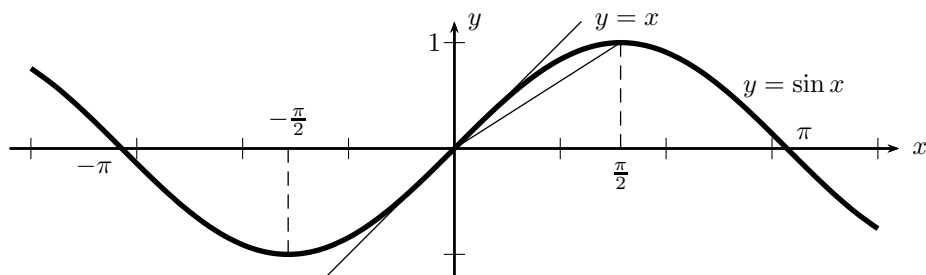
$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi \mathbb{Z} \right) \quad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Exemples :

⇒ Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sin x \leq x \text{ et } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad \sin x \geq \frac{2}{\pi} x$$

⇒ Calculer la dérivée n -ième de la fonction d'expression $\sin^2 x$.



2.2 Fonction Arcsin

Définition 8. Pour tout $y \in [-1, 1]$, il existe un unique $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tel que $\sin x = y$; on le note $x = \text{Arcsin } y$. On définit alors la fonction :

$$\begin{aligned} \text{Arcsin} : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \text{Arcsin } y \end{aligned}$$

Remarques :

⇒ Par définition de la fonction Arcsin

$$\forall x \in [-1, 1] \quad -\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arcsin} x \leq \frac{\pi}{2}$$

Proposition 21. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1] \quad \sin(\operatorname{Arcsin} x) &= x \\ \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \operatorname{Arcsin}(\sin x) &= x \end{aligned}$$

Exemples :

⇒ Calculer

$$\operatorname{Arcsin}(1), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin \frac{\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin \frac{5\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\cos \frac{\pi}{5}\right)$$

Proposition 22.

- Arcsin est injective : $\forall x, y \in [-1, 1] \quad \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} y \implies x = y$
- Arcsin réalise une surjection de $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$:

$$\forall y \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \exists x \in [-1, 1] \quad \operatorname{Arcsin} x = y$$

Proposition 23.

- Arcsin est strictement croissante sur $[-1, 1]$.
- Arcsin est impaire.

Exemples :

⇒ On pose

$$x = \operatorname{Arcsin} \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

Calculer $\cos(4x)$ puis en déduire x .

Proposition 24.

- Arcsin est continue sur $[-1, 1]$.
- Arcsin est dérivable sur $] -1, 1[$ et :

$$\forall x \in] -1, 1[\quad \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

- Arcsin est \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.

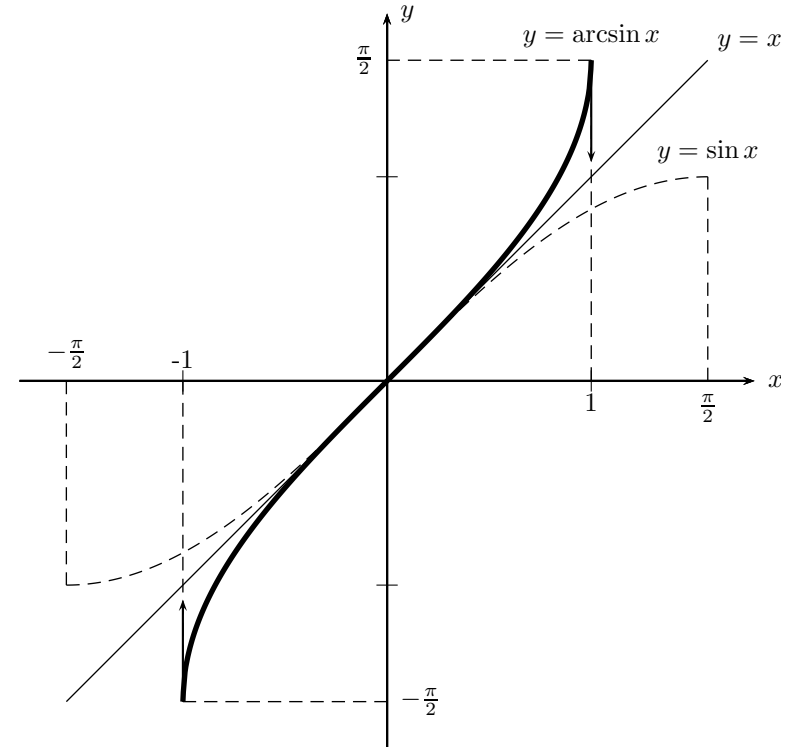
Exemples :

⇒ Montrer que

$$\forall x \in [0, 1] \quad x \leq \operatorname{Arcsin} x \leq \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

⇒ Calculer

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x - x^2}}, \quad \int \operatorname{Arcsin} x \, dx$$



2.3 Fonction Arccos

Définition 9. Pour tout $y \in [-1, 1]$, il existe un unique $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos x = y$; on le note $x = \operatorname{Arccos} y$. On définit alors la fonction :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arccos} : [-1, 1] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \operatorname{Arccos} y \end{aligned}$$

Remarques :

⇒ Par définition de la fonction Arccos

$$\forall x \in [-1, 1] \quad 0 \leq \operatorname{Arccos} x \leq \pi$$

Proposition 25. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in [-1, 1] \quad \cos(\operatorname{Arccos} x) &= x \\ \forall x \in [0, \pi] \quad \operatorname{Arccos}(\cos x) &= x \end{aligned}$$

Exemples :

⇒ Calculer

$$\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos \frac{4\pi}{3}\right)$$

⇒ Simplifier $\operatorname{Arccos}(\cos x) - \frac{1}{2} \operatorname{Arccos}(\cos(2x))$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.

⇒ Calculer $\cos(3 \operatorname{Arccos} x)$. Plus généralement, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n \operatorname{Arccos} x)$ est un polynôme en x .

Proposition 26.

- Arccos est injective : $\forall x, y \in [-1, 1] \quad \operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arccos} y \implies x = y$
- Arccos réalise une surjection de $[-1, 1]$ dans $[0, \pi]$:

$$\forall y \in [0, \pi] \quad \exists x \in [-1, 1] \quad \operatorname{Arccos} x = y$$

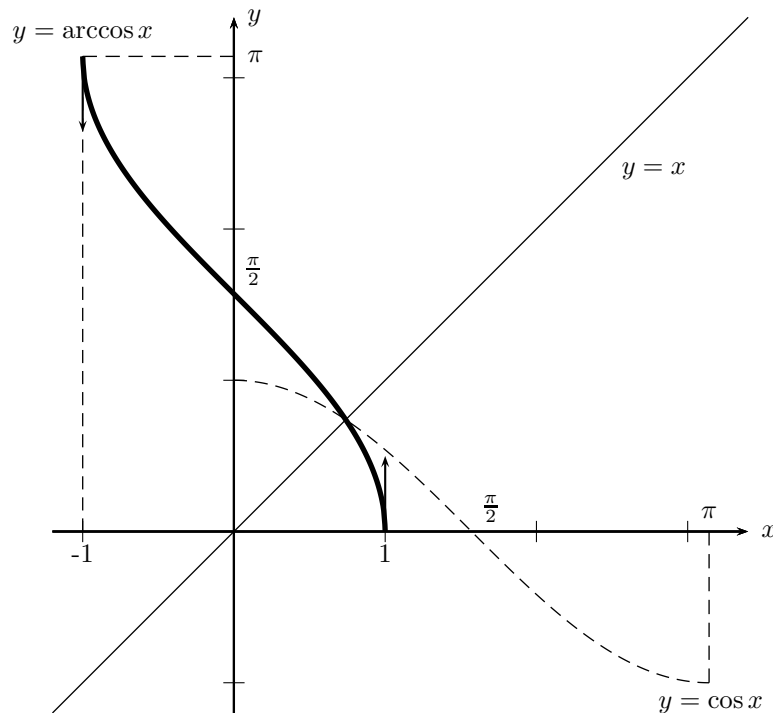
Proposition 27. Arccos est strictement décroissante sur $[-1, 1]$.

Proposition 28.

- Arccos est continue sur $[-1, 1]$.
- Arccos est dérivable sur $] -1, 1[$ et :

$$\forall x \in] -1, 1[\quad \operatorname{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Arccos est \mathcal{C}^∞ sur $] -1, 1[$.



Exemples :

⇒ À l'aide d'un changement de variable judicieux, déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\frac{\operatorname{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$$

2.4 Fonction Arctan

Définition 10. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ tel que $\tan x = y$; on le note $x = \operatorname{Arctan} y$. On définit alors la fonction :

$$\begin{aligned} \operatorname{Arctan} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \operatorname{Arctan} y \end{aligned}$$

Remarques :

⇒ Par définition de la fonction Arctan

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}$$

Proposition 29. On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \tan(\operatorname{Arctan} x) &= x \\ \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \operatorname{Arctan}(\tan x) &= x \end{aligned}$$

Exemples :

⇒ Calculer $\operatorname{Arctan}\left(\tan \frac{1789\pi}{45}\right)$.

⇒ Le langage de programmation **Shadok** dispose de la fonction Arctan mais pas des fonctions Arcsin et Arccos . Définissez ces dernières à partir de la fonction Arctan .

Proposition 30.

- Arctan est injective : $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} y \implies x = y$
- Arctan réalise une surjection de \mathbb{R} dans $]-\pi/2, \pi/2[$:

$$\forall y \in]-\pi/2, \pi/2[\quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Arctan} x = y$$

Proposition 31.

- Arctan est strictement croissante sur \mathbb{R} et :

$$\operatorname{Arctan} x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

- Arctan est impaire.

Exemples :

⇒ Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Proposition 32.

- Arctan est continue sur \mathbb{R} .
- Arctan est dérivable sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan}' x = \frac{1}{1+x^2}$$

- Arctan est C^∞ sur \mathbb{R} .

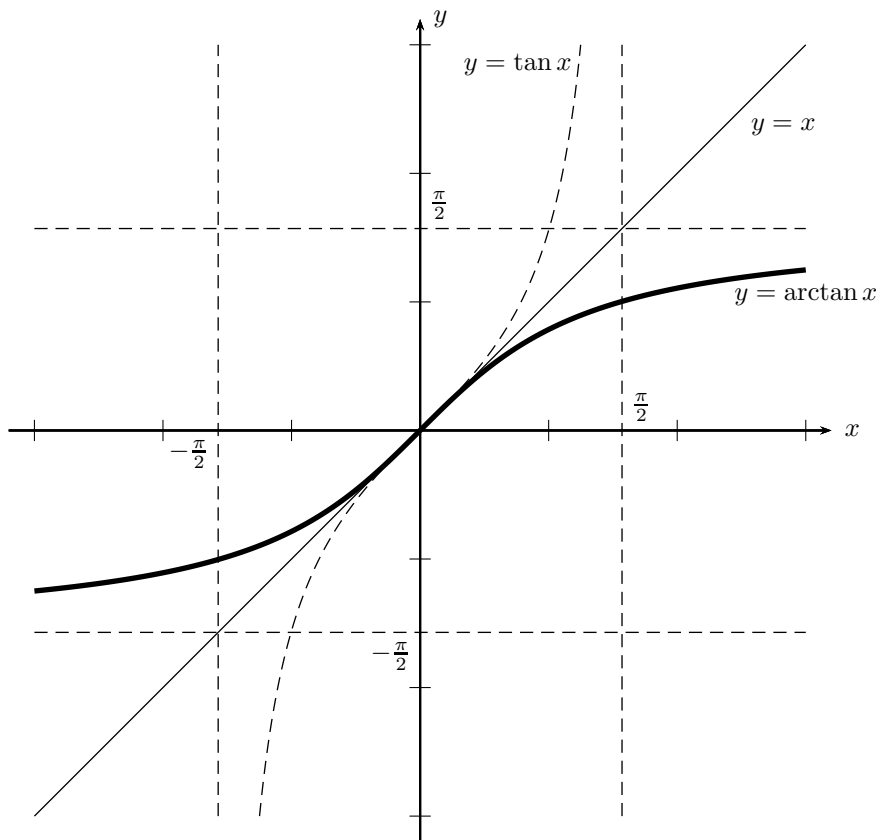
Exemples :

\Rightarrow Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\text{Arctan } x \leq x$. En déduire que

$$4 \text{Arctan } \frac{1}{5} - \text{Arctan } \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

\Rightarrow Calculer

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1} dx, \quad \int \text{Arctan } x \, dx$$

**2.5 Formules de trigonométrie réciproque****Proposition 33.** On a :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \sin(\text{Arcsin } x) = x \quad \cos(\text{Arcsin } x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \tan(\text{Arcsin } x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \cos(\text{Arccos } x) = x \quad \sin(\text{Arccos } x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\} \quad \tan(\text{Arccos } x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tan(\text{Arctan } x) = x \quad \cos(\text{Arctan } x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\text{Arctan } x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exemples :

\Rightarrow Résoudre l'équation $\text{Arctan } x = \text{Arcsin } \frac{2x}{1+x^2}$.

Proposition 34. On a :

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \text{Arcsin } x + \text{Arccos } x = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples :

\Rightarrow Calculer la dérivée de la fonction d'expression

$$-\frac{x}{2} + \text{Arcsin } \sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$$

En déduire une expression plus simple lorsque $x \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Retrouver ce résultat directement.

\Rightarrow Montrer que

$$\forall x \geq 0 \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan } x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}$$

3 Fonctions trigonométriques hyperboliques**3.1 Trigonométrie hyperbolique directe****Définition 11.** On définit les fonctions sh et ch sur \mathbb{R} par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Exemples :

⇒ Résoudre l'équation $7 \cosh x + 2 \sinh x = 9$.

Proposition 35. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh x + \sinh x &= e^x \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1\end{aligned}$$

Exemples :

⇒ Pour tout $x \geq 0$, on définit

$$y(x) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{\cosh x}$$

Montrer que $y(x) \in [0, \pi/2[$, calculer $1 + \tan^2 y(x)$ puis en déduire une autre expression de $y(x)$.

Proposition 36. \cosh et \sinh sont de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh' x = \sinh x \text{ et } \sinh' x = \cosh x$$

Proposition 37.

- \cosh est paire et \sinh est impaire.
- On a :

$$\begin{aligned}\cosh x &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } \cosh x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty \\ \sinh x &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ et } \sinh x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty\end{aligned}$$

Remarques :

⇒ Si f et g sont deux fonctions respectivement paires et impaires telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = f(x) + g(x)$$

alors $f = \cosh$ et $g = \sinh$. C'est pourquoi on dit parfois que \cosh est la partie paire de l'exponentielle et que \sinh est sa partie impaire.

Proposition 38.

- \cosh est strictement décroissante sur \mathbb{R}_- et strictement croissante sur \mathbb{R}_+ .
- \sinh est strictement croissante sur \mathbb{R} .
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cosh x \geq 1$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad [\sinh x = 0 \iff x = 0] \text{ et } [\sinh x \geq 0 \iff x \geq 0]$

Proposition 39.

- \sinh est injective :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \sinh x = \sinh y \implies x = y$$

- \sinh réalise une surjection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} :

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \sinh x = y$$

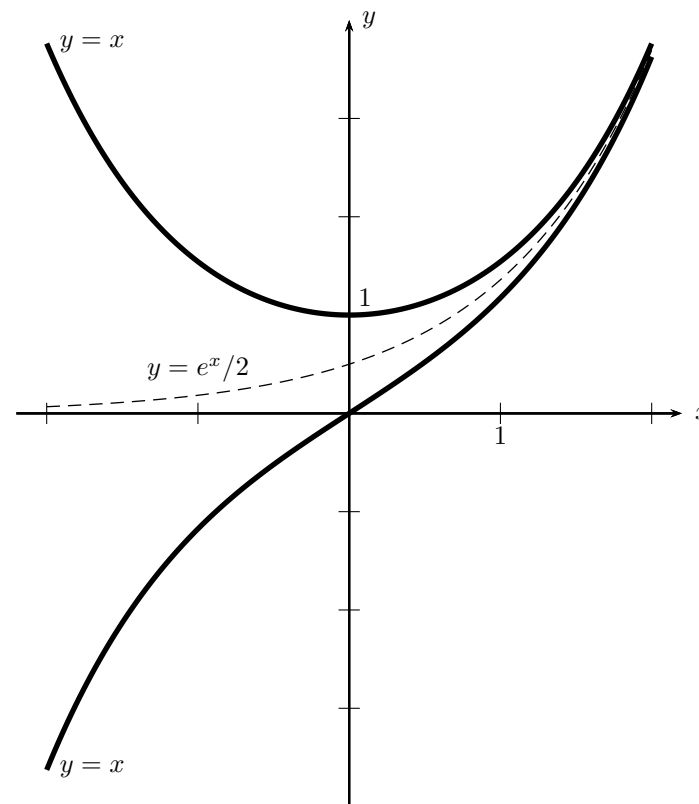
- \cosh n'est pas injective sur \mathbb{R} , mais :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \cosh x = \cosh y \implies [x = y \text{ ou } x = -y]$$

En particulier, \cosh est injective sur \mathbb{R}_+ .

- \cosh réalise une surjection de \mathbb{R}_+ dans $[1, +\infty[$:

$$\forall y \in [1, +\infty[\quad \exists x \in \mathbb{R}_+ \quad \cosh x = y$$



Remarques :

⇒ Le graphe de la fonction cosh est obtenu en laissant pendre une chaîne entre deux points. C'est pourquoi, le graphe de cette fonction est aussi appelé « chaînette ».

Définition 12. On définit la fonction th sur \mathbb{R} par :

$$\begin{aligned} \text{th} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \end{aligned}$$

Proposition 40. th est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{th}' x = 1 - \text{th}^2 x = \frac{1}{\text{ch}^2 x}$$

En particulier th est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Proposition 41.

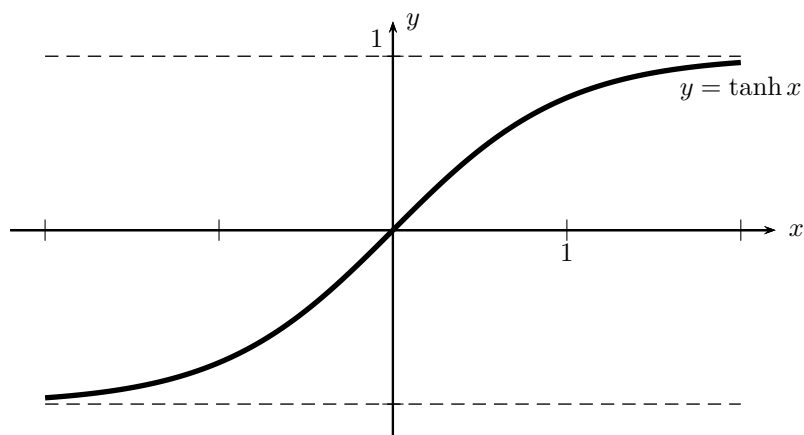
- th est impaire.
- On a :

$$\text{th } x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \text{ et } \text{th } x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -1$$

Proposition 42.

- th est injective : $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{th } x = \text{th } y \implies x = y$
- th réalise une surjection de \mathbb{R} dans $] -1, 1[$:

$$\forall y \in] -1, 1[\quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \text{th } x = y$$



Proposition 43. La substitution :

$$\begin{aligned} \cos &\rightarrow \text{ch} \\ \sin &\rightarrow i \text{sh} \\ \tan &\rightarrow i \text{th} \end{aligned}$$

transforme une formule de trigonométrie circulaire en une formule de trigonométrie hyperbolique.

Exemples :

\Rightarrow Calculer

$$\sinh \left(\ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) \text{ et } \cosh \left(\ln \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$$

En déduire les solutions de l'équation $\text{ch } x - \sqrt{5} \text{sh } x = 2 \text{sh}(3x)$.

\Rightarrow Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^n \text{sh}(kx)$$

\Rightarrow Calculer

$$\int \text{ch}^3 x \, dx, \quad \int \text{ch}^4 x \, dx$$