Devoir maison n° 6

3 janvier 2020

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Équation du pendule pesant

Partie I

1. (a) Soit f la fonction définie sur $[0,\alpha]$ par :

$$\forall x \in [0,\alpha] \quad f(x) = x - \sin x$$

D'après les théorèmes usuels, f est dérivable sur $[0,\alpha]$ et :

$$\forall x \in [0,\alpha] \quad f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0$$

De plus :

$$\begin{aligned}\forall x \in [0,\alpha] \quad f'(x) = 0 \quad &\iff \quad \cos x = 1\\ &\iff \quad x = 0\end{aligned}$$

Donc f est strictement croissante sur $[0,\alpha]$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \,]0,\alpha]$. En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \,]0,\alpha[\quad \sin x < x}$$

Soit f la fonction définie sur $[0,\alpha]$ par :

$$\forall x \in [0,\alpha] \quad f(x) = \sin x - x \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

On remarque que $f(0) = f(\alpha) = 0$. D'après les théorèmes usuels, f est dérivable sur $[0,\alpha]$ et :

$$\forall x \in [0,\alpha] \quad f'(x) = \cos x - \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

Puisque $0 \leqslant (\sin\alpha)/\alpha \leqslant 1$, on définit $\beta = \operatorname{Arccos}((\sin\alpha)/\alpha) \in [0,\pi/2]$. On a donc :

$$\forall x \in [0,\pi] \quad \cos x - \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 0 \quad \iff \quad x = \beta$$

Comme f est continue sur $[0,\alpha]$, dérivable sur $]0,\alpha[$ et que $f(0) = f(\alpha)$, on en déduit, d'après le théorème de Rolle que f' s'annule au moins une fois sur $[0,\alpha]$. En conséquence, $\beta \in [0,\alpha]$. Enfin, en utilisant la stricte décroissance de cos sur $[0,\alpha]$, on obtient le tableau de variation suivant :

x	0		β		α
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On en déduit donc que :

$$\forall x \in \,]0,\alpha[\quad f(x) > 0$$

Donc :

$$\boxed{\forall x \in \,]0,\alpha[\quad x \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} < \sin x}$$

(b) Soit $x \in \,]-\alpha,\alpha[$. Alors :

$$\begin{aligned}\cos x - \cos\alpha &= -2\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}\\ &= 2\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-x}{2}\end{aligned}$$

Comme $x \in \,]-\alpha,\alpha[$, on en déduit que :

$$0 < \frac{x+\alpha}{2} < \alpha \quad \text{et} \quad 0 < \frac{\alpha-x}{2} < \alpha$$

D'après l'inégalité de la question précédente, qui est une inégalité entre nombres strictements positifs, on en déduit que :

$$0 < 2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \frac{x+\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha-x}{2} \leqslant \cos x - \cos\alpha \leqslant 2\frac{x+\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha-x}{2}$$

donc

$$0 < \frac{\sin\alpha}{\alpha}\sqrt{\alpha^2 - x^2} \leqslant \sqrt{2(\cos x - \cos\alpha)} \leqslant \sqrt{\alpha^2 - x^2}$$

donc

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2(\cos x - \cos\alpha)}} \leqslant \frac{\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall x \in \,]-\alpha,\alpha[\quad \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} \leqslant \varphi(x) \leqslant \frac{\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}}$$

Soit $x \in [0,\alpha[$. Puisque :

$$\forall t \in [0,x] \quad \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}} \leqslant \varphi(t) \leqslant \frac{\alpha}{\sin\alpha}\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - t^2}}$$

on en déduit que :

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\alpha^2-t^2}} \leqslant \int_0^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \frac{\alpha}{\sin\alpha}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\alpha^2-t^2}}$$

Or, on a :

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\alpha^2-t^2}} &= \int_0^{\frac{x}{\alpha}} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-\alpha^2u^2}}\,\mathrm{d}u \quad \text{avec } t=\alpha u\\ &= \int_0^{\frac{x}{\alpha}} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}\\ &= \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall x\in[0,\alpha[\quad \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{x}{\sin\alpha}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\alpha}\right)}$$

2. (a) Soit $x\in\,]-\alpha,\alpha[$. Alors :

$$\begin{aligned}\Phi(-x) &= \int_0^{-x}\varphi(t)\ \mathrm{d}t\\ &= \int_0^x -\varphi(-u)\ \mathrm{d}u \quad \text{avec } u=-t\\ &= -\int_0^x \varphi(u)\ \mathrm{d}u \quad \text{car } \varphi \text{ est paire}\\ &= -\Phi(x)\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\Phi \text{ est impaire.}}$$

Puisque :

$$\forall x\in\,]-\alpha,\alpha[\quad \Phi'(x)=\varphi(x)\geqslant 0$$

on en déduit que :

$$\boxed{\Phi \text{ est croissante sur }]-\alpha,\alpha[.}$$

(b) D'après la question I.1.b. :

$$\forall x\in[0,\alpha[\quad \varphi(x)\leqslant \frac{\alpha}{\sin\alpha}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\alpha}\right)\leqslant \frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\sin\alpha}$$

Donc Φ est croissante majorée sur $[0,\alpha[$. On en déduit qu'elle admet une limite finie en α. En notant $T/4$ cette limite, et en utilisant le fait que :

$$\forall x\in[0,\alpha[\quad \operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leqslant \Phi(x) \leqslant \frac{\alpha}{\sin\alpha}\operatorname{Arcsin}\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

on obtient, par passage à la limite :

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{T}{4}\leqslant\frac{\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\pi}{2}$$

En conclusion :

$$\boxed{\begin{array}{c}\varphi \text{ admet } T/4 \text{ pour limite en } \alpha \text{ et :}\\ 2\pi\leqslant T\leqslant \dfrac{\alpha}{\sin\alpha}2\pi\end{array}}$$

On prolonge Φ par continuité en α en posant $\Phi(\alpha)=T/4$. On remarque que :

$$\forall x\in[0,\alpha[\quad \Phi'(x)=\varphi(x)=\frac{1}{2\sqrt{\cos x-\cos\alpha}}\xrightarrow[x\to\alpha]{}+\infty$$

Comme Φ est continue sur $[0,\alpha]$ et dérivable sur $[0,\alpha[$, on en déduit que :

$$\frac{\Phi(x)-T/4}{x-\alpha}\xrightarrow[x\to\alpha]{}+\infty$$

En conclusion :

$$\boxed{\frac{x-\alpha}{\Phi(x)-\frac{T}{4}}\xrightarrow[x\to\alpha]{}0}$$

Partie II

1. Soit $a,b\in I$ tels que $a\leqslant b$ et $x\in[a,b]$. Montrons que $x\in I$. Puisque

$$\forall t\in\,]0,b]\quad f'(t)\neq 0$$

et $0<x<b$, on en déduit que :

$$\forall t\in\,]0,x]\quad f'(t)\neq 0$$

Autrement dit $x\in I$. En conclusion :

$$\boxed{I \text{ est un intervalle.}}$$

2. (a) On sait que f est deux fois dérivable et que :

$$\forall t\in\mathbb{R}\quad f''(t)=-\sin(f(t))$$

Comme f est dérivable deux fois, elle est continue, donc $\sin f$ est continue donc f'' est continue. En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Puisque :

$$f''(0)=-\sin(f(0))=-\sin\alpha<0\quad \text{car } \alpha\in\,]0,\pi[$$

et que f'' est continue en 0, on en déduit que :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Il existe } a>0 \text{ tel que :}\\ \forall t\in[0,a]\quad f''(t)<0\end{array}}$$

(b) Puisque :
$$\forall t \in [0, a] \quad f''(t) < 0$$
on en déduit que f' est strictement décroissante sur $[0, a]$. Comme $f'(0) = 0$, on en déduit que :
$$\forall t \in]0, a] \quad f'(t) < 0$$
Donc $a \in I$ ce qui prouve que I n'est pas vide. Montrons que :
$$\forall t \in I \quad f'(t) < 0$$
On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $t \in I$ tel que $f'(t) \geqslant 0$. Comme $f'(a) < 0$ et que f est continue sur l'intervalle I, on en déduit qu'il existe, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $t_0 \in I$ tel que $f'(t_0) = 0$. C'est absurde par définition de I. En conclusion :
$$\boxed{\begin{array}{l} I \text{ est non vide et :} \\ \forall t \in I \quad f'(t) < 0 \end{array}}$$

3. Puisque :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f''(t) + \sin[f(t)] = 0$$
on en déduit que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) f''(t) + f'(t) \sin[f(t)] = 0$$
Par intégration, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2} f'^2(t) - \cos[f(t)] = c$$
En prenant $t = 0$, il vient :
$$c = \frac{1}{2} f'^2(0) - \cos[f(0)] = -\cos\alpha$$
On a donc :
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'^2(t) = 2(\cos[f(t)] - \cos\alpha)$$
On en déduit que :
$$\forall t \in I \quad \cos(f(t)) > \cos\alpha$$
Puisque f est strictement décroissante sur $[0, a]$ et que $f(0) = \alpha$, on en déduit que $f(a) < \alpha$. Puisque f est continue sur l'intervalle $[0, a]$, on en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe $t_0 \in]0, a[\subset I$ tel que $f(t_0) \in]-\alpha, \alpha[$. Montrons que :
$$\forall t \in I \quad f(t) \in]-\alpha, \alpha[$$
Puisque $\cos(f(t)) > \cos\alpha$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $f(t) \in]-\alpha + k2\pi, \alpha + k2\pi[$. Montrons que $k = 0$. On raisonne par l'absurde et on suppose $k \neq 0$. Si $k \geqslant 1$, en appliquant le théorème des valeur intermédiaires à la fonction continue f sur l'intervalle « $[t_0, t]$ », on en déduit qu'il existe $t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $f(t_1) = \pi$. On aurait dont $-1 = \cos(f(t_1)) > \cos\alpha$ ce qui est absurde. De même, si $k \leqslant -1$, on aboutit à une absurdité. Donc :
$$\boxed{\forall t \in I \quad f(t) \in]-\alpha, \alpha[}$$
Comme
$$\forall t \in I \quad f'^2(t) = 2(\cos[f(t)] - \cos\alpha)$$
et $f'(t) < 0$ pour tout $t \in I$, on en déduit que :
$$\boxed{\forall t \in I \quad f'(t) = -\sqrt{2(\cos[f(t)] - \cos\alpha)}}$$

4. (a) Puisque f est dérivable sur I, à valeurs dans $]-\alpha, \alpha[$ et que Φ est dérivable sur $]-\alpha, \alpha[$, on en déduit que g est dérivable comme composée de deux fonctions dérivables. De plus :
$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad g'(t) &= f'(t) \Phi'(f(t)) \\ &= -\sqrt{2(\cos(f(t)) - \cos\alpha)} \frac{1}{\sqrt{2(\cos(f(t)) - \cos\alpha)}} \\ &= -1 \end{aligned}$$
Donc :
$$\boxed{\begin{array}{c} g \text{ est dérivable sur } I \text{ et :} \\ \forall t \in I \quad g'(t) = -1 \end{array}}$$

(b) Puisque I est un intervalle, on obtient, après intégration, l'existence de $c \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall t \in I \quad g(t) = c - t$$
Comme :
$$g(t) = \Phi(f(t)) \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{T}{4}$$
on en déduit que $c = T/4$. Donc :
$$\boxed{\forall t \in I \quad g(t) = \frac{T}{4} - t}$$

(c) On raisonne par l'absurde et on suppose que I n'est pas borné. On a alors $I = \mathbb{R}_+^*$. Donc :
$$\forall t > 0 \quad \Phi(f(t)) = g(t) = \frac{T}{4} - t \xrightarrow[t \to +\infty]{} -\infty$$
ce qui est absurde car Φ est bornée. Donc :
$$\boxed{I \text{ est borné. On note } M \text{ sa borne supérieure.}}$$

(d) Puisque M est la borne supérieure de l'intervalle I, on en déduit que $]0, M[\subset I$. Donc :
$$\forall t \in]0, M[\quad f'(t) < 0$$
Puisque f' est continue en M, par passage à la limite, on obtient $f'(M) \leqslant 0$. Montrons que $f'(M) = 0$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $f'(M) < 0$. Puisque f' est continue en M, on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
$$\forall t \in [M - \varepsilon, M + \varepsilon] \quad f'(t) < 0$$

Donc $M+\varepsilon \in I$ ce qui est contradictoire avec le fait que M soit la borne supérieure de I. Donc $f'(M)=0$. Comme :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'^2(t) = 2\left(\cos\left[f(t)\right] - \cos\alpha\right)$$

on en déduit, pour $t=M$, que $\cos(f(M)) = \cos\alpha$. Puisque :

$$\forall t \in I \quad -\alpha < f(t) < \alpha$$

on en déduit, par passage à la limite, que $-\alpha \leqslant f(M) \leqslant \alpha$. On a donc $f(M)=\alpha$ ou $f(M) = -\alpha$. Comme f est strictement décroissante sur I, on en déduit que $f(M) = -\alpha$. Donc :

$$\boxed{f'(M) = 0 \quad \text{et} \quad f(M) = -\alpha}$$

On a :

$$g(t) = \frac{T}{4} - t \xrightarrow[t \to M]{} \frac{T}{4} - M$$

Comme de plus, on a :

$$g(t) = \Phi(f(t)) \xrightarrow[t \to M]{} -\frac{T}{4}$$

on en déduit que $T/4 - M = T/4$.

$$\boxed{M = \frac{T}{2}}$$

5. (a) On suppose que f et h sont toutes deux solutions de $(\star)$. On en déduit que :

$$\forall t \in \left]0, \frac{T}{2}\right[\quad \Phi(f(t)) = \Phi(h(t))$$

Puisque Φ est injective car strictement croissante, on en déduit que :

$$\forall t \in \left]0, \frac{T}{2}\right[\quad f(t) = h(t)$$

Enfin, par continuité de f et h, on en déduit que :

$$\boxed{\forall t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \quad f(t) = h(t)}$$

(b) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h(t) = -f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

Puisque f est dérivable deux fois, il en est de même pour h et :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad h''(t) = -f''\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R} \quad h''(t) + \sin(h(t)) &= -f''\left(t + \frac{T}{2}\right) + \sin\left(-f\left(t + \frac{T}{2}\right)\right) \\ &= -\left[f''\left(t + \frac{T}{2}\right) + \sin\left(f\left(t + \frac{T}{2}\right)\right)\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

De plus, $h(0) = -f(T/2) = \alpha$ et $h'(0) = -f'(T/2) = 0$. D'après la question précédente, on en déduit que :

$$\boxed{\forall t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \quad f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)}$$

(c) En appliquant la question précédente à la fonction h, on obtient :

$$\forall t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \quad -f(t+T) = f\left(t + \frac{T}{2}\right)$$

Autrement dit :

$$\forall t \in \left[\frac{T}{2}, T\right] \quad f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

Donc :

$$\forall t \in [0, T] \quad f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

On montre alors, par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que :

$$\forall t \in \left[0, k\frac{T}{2}\right] \quad f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

Puisque $t \mapsto f(-t)$ est aussi solution de $(\star)$, on en déduit que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad f\left(-t - \frac{T}{2}\right) = -f(-t)$$

donc

$$\forall t \in \mathbb{R}_- \quad f\left(t - \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

De plus, toujours en utilisant le fait que $t \mapsto f(-t)$ est aussi solution de $(\star)$, on a :

$$\forall t \in \left[0, \frac{T}{2}\right] \quad f(-t) = f(t)$$

En regroupant ces inégalités, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f\left(t + \frac{T}{2}\right) = -f(t)$$

En appliquant deux fois cette relation, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+T) = f(t)$$

Donc f est T-périodique. De plus T est la plus petite période de f. En effet si $T' \in]0,T[$ était une période plus petite de f, on aurait $f(T') = f(0) = \alpha$ ce qui est impossible car f est strictement décroissante sur $[0,T/2]$, strictement croissante sur $[T/2,T]$ et $f(T) = f(0) = \alpha$. Donc :

$$\boxed{f \text{ est périodique de plus petite période } T.}$$

6. Nous savons déjà que f vérifie ces trois conditions, la dernière étant une conséquence du caractère injectif de Φ. Réciproquement, si h vérifie ces trois points, f et h coïncident sur $]0,T/2[$ d'après le dernier point et sont égales en 0 d'après le premier point. Elles coïncident donc sur $[0,T/2[$. Comme $T/2$ est une antipériode de ces deux fonctions, elles sont donc égales.