COURS : DÉRIVATION

Table des matières

1 Fonction dérivable, dérivées successives

1.1 Définition

Définition 1. *On dit qu'une fonction f est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque le taux d'accroissement*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0 ; si tel est la cas, on note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé de f en x_0. La propriété « est dérivable en x_0 » est locale en x_0.

Remarques :

⇨ Si f est dérivable en x_0, son graphe admet une tangente d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Cette tangente est horizontale si et seulement si $f'(x_0) = 0$. Lorsque le taux d'accroissement de f en x_0 tend vers $\pm\infty$, son graphe admet une tangente verticale.

Définition 2.
- *On dit qu'une fonction f est dérivable à gauche en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque le taux d'accroissement*
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par la gauche ; si tel est la cas, on note $f'_g(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé à gauche de f en x_0. La propriété « est dérivable à gauche en x_0 » est locale à gauche (au sens large) en x_0.
- *On dit qu'une fonction f est dérivable à droite en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque le taux d'accroissement*
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par la droite ; si tel est la cas, on note $f'_d(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé à droite de f en x_0. La propriété « est dérivable à droite en x_0 » est locale à droite (au sens large) en x_0.

Proposition 1. *Une fonction f est dérivable en un point $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si les objets ci-dessous susceptibles d'avoir un sens*

$$f'_g(x_0) \text{ et } f'_d(x_0)$$

existent et sont égaux. Si tel est le cas, $f'(x_0)$ est cette valeur commune.

Exemples :

⇨ Étudier la dérivabilité des fonctions d'expression

$$|x| \text{ et } \frac{x}{1+|x|}$$

en 0.

Proposition 2. *Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

Remarques :

⇨ La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0.

Proposition 3. *Une fonction f est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 1. Si tel est le cas :*

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

Définition 3. *On dit qu'une fonction est dérivable lorsqu'elle est dérivable en tout point de son domaine de définition.*

Remarques :

⇨ Une fonction est dérivable sur A lorsque sa restriction à A est dérivable en tout point de A. Attention, selon cette définition, la fonction d'expression $|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ alors qu'elle n'est pas dérivable en 0. Les propriétés « f est dérivable sur A » et « f est dérivable en tout point de A » ne sont donc pas équivalentes.
Remarquons cependant que si f est dérivable en tout point de A, elle est dérivable sur A. Réciproquement, si f est dérivable sur A, elle est dérivable en tout point $x_0 \in A$ pour lequel il existe $\eta > 0$ tel que $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap \mathcal{D}_f \subset A$.

1.2 Théorèmes usuels

Proposition 4. *Soit f et g deux fonctions dérivables en x_0.*

- *Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et :*
$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$
- *fg est dérivable en x_0 et :*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$
- *Si $f(x_0) \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de x_0 et $1/f$ est dérivable en x_0. De plus :*
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$
- *Si $g(x_0) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de x_0 et f/g est dérivable en x_0. De plus :*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Proposition 5. *Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :*
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Remarques :

⇨ Soit $f = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \cdots g_n^{\alpha_n}$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Sans se soucier du signe des fonctions, on écrit formellement $\ln f = \alpha_1 \ln g_1 + \alpha_2 \ln g_2 + \cdots + \alpha_n \ln g_n$. En dérivant cette relation, on obtient
$$\frac{f'}{f} = \alpha_1 \frac{g_1'}{g_1} + \alpha_2 \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \alpha_n \frac{g_n'}{g_n}$$
ce qui permet de calculer symboliquement f'.

Exemples :

⇨ Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

Proposition 6. *Soit f une bijection continue d'un intervalle I sur un intervalle J et $y_0 \in J$. Si f est dérivable en $x_0 = f^{-1}(y_0)$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. De plus, si tel est le cas :*
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Proposition 7. *Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.*

- *Alors $\overline{f}$ est dérivable en x_0 si et seulement si f l'est. De plus, si tel est le cas :*
$$\overline{f}\,'(x_0) = \overline{f'(x_0)}$$
- *De même, f est dérivable en x_0 si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. De plus, si tel est le cas :*
$$f'(x_0) = \mathrm{Re}(f)'(x_0) + i\, \mathrm{Im}(f)'(x_0)$$
- *Enfin, si f est dérivable en x_0, il en est de même pour e^f et :*
$$\left(e^f\right)'(x_0) = f'(x_0)\, e^{f(x_0)}$$

Exemples :

⇨ Calculer
$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x \text{ et } \int (x+1) \sin x \,\mathrm{d}x$$

1.3 Fonction dérivée, dérivées successives

Définition 4. *Si f est une fonction, on note $\mathcal{D}_{f'}$ l'ensemble des points $x \in \mathcal{D}_f$ en lesquels f est dérivable. Si $\mathcal{D}_{f'} \neq \varnothing$, on définit la fonction dérivée de f, notée f', par :*
$$\begin{array}{rcl} f' : \mathcal{D}_{f'} & \longrightarrow & \mathbb{R} \quad (\text{ou } \mathbb{C}) \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Définition 5. *Si f est une fonction, on définit par récurrence la dérivée n-ième de f (lorsqu'elle existe) de la manière suivante :*

- *On pose $f^{(0)} = f$.*
- *Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^{(n+1)}$ comme étant la dérivée (lorsqu'elle existe) de $f^{(n)}$.*

Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, on dit que f est dérivable n fois en x_0 lorsque $f^{(n)}$ est définie en x_0 ; cette notion est locale en x_0.

Remarques :

⇨ On dit qu'une fonction est dérivable n fois lorsqu'elle est dérivable n fois en tout point de son domaine de définition.

Proposition 8. *Soit f et g deux fonctions dérivables n fois.*

— *Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois et*

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)$$

— *fg est dérivable n fois et*

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

Cette formule est appelée formule de Leibniz.

— *Si g ne s'annule pas, alors f/g est dérivable n fois.*

Proposition 9. *Si f et g sont deux fonctions dérivables n fois, alors $g \circ f$ est dérivable n fois.*

Remarques :

⇨ Si f est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$, la fonction g d'expression $f(ax)$ est dérivable n fois et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax)$$

Exemples :

⇨ Donner la dérivée n-ième des fonctions $x \mapsto x^2 f(x)$ et $x \mapsto f(x)e^x$.

⇨ Calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x^2}$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée.

Proposition 10. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J dérivable n fois. Alors f^{-1} est dérivable n fois si et seulement si*

$$\forall x \in I \quad f'(x) \neq 0$$

1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 6. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ lorsqu'elle est dérivable n fois et sa dérivée n-ième est continue. Si $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}^n(\mathcal{D}, \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}))$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de classe $\mathcal{C}^n$.*

Remarques :

⇨ Les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues.

⇨ Une fonction peut être dérivable sur $\mathbb{R}$ sans que sa dérivée soit continue. Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

⇨ Si on note $\mathcal{D}^n$ l'ensemble des fonctions dérivables n fois, on a

$$\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{D}^2 \supset \mathcal{C}^2 \cdots$$

On peut montrer que toutes ces inclusions sont strictes.

⇨ Si A est une partie de $\mathcal{D}_f$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur A lorsque la restriction de f à A est de classe $\mathcal{C}^n$.

Définition 7. *On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarques :

⇨ Une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si elle est dérivable n fois quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 11. *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.*

— *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.*

— *fg est de classe $\mathcal{C}^n$.*

— *Si g ne s'annule pas, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^n$.*

Proposition 12. *La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$.*

Définition 8. *Soit f une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit que f est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme de I sur J lorsque f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^n$.*

Proposition 13. *Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Une bijection f de classe $\mathcal{C}^n$ de l'intervalle I sur l'intervalle J est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme si et seulement si f' ne s'annule pas.*

Exemples :

⇨ Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^5(x) + f(x) + x = 0$$

⇨ Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe xe^x. Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme et calculer le développement limité de f^{-1} en 0 à l'ordre 3.

2 Théorème de Rolle et applications

2.1 Extremum local

Définition 9. *Soit f une fonction réelle et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que :*
- *f présente un maximum global en x_0 lorsque :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

- *f présente un maximum local en x_0 lorsque :*

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$$

- *f présente un minimum global en x_0 lorsque :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$

- *f présente un minimum local en x_0 lorsque :*

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x_0)$$

Remarques :

⇨ On peut indifféremment utiliser « maximums » et « maxima » pour le pluriel de « maximum ».

Proposition 14. *Soit f une fonction admettant un extremum local en un point x_0 intérieur à $\mathcal{D}_f$. Si elle est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

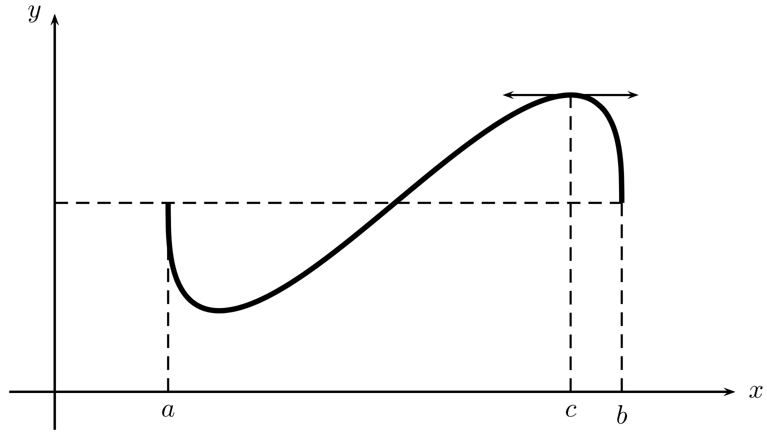
Remarques :

⇨ Attention, ce n'est pas parce que f' s'annule en x_0 que f y admet un extremum local. Par exemple la fonction d'expression x^3 a une dérivée qui s'annule en 0 mais n'admet pas d'extremum local en ce point.

⇨ Les extremums locaux d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ sont donc à chercher parmi les bornes de $\mathcal{D}$, les points où f n'est pas dérivable et ceux où la dérivée de f est nulle.

2.2 Théorème de Rolle, accroissements finis

Théorème 1. *Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.*



Exemples :

⇨ Soit f une fonction dérivable n fois sur l'intervalle I admettant $n + 1$ zéros. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I. Retrouver le fait qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ degré n admet au plus n racines réelles.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\forall x \in [0, 1] \quad f(x) = x^n (1 - x)$$

Montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Remarques :

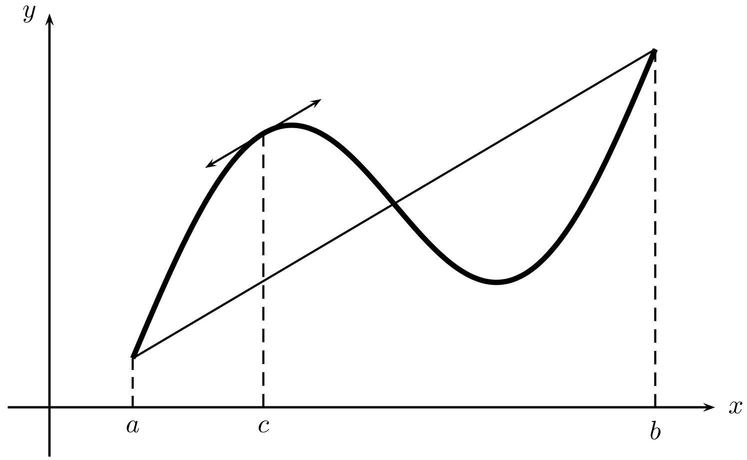
⇨ Cette proposition est fausse si f est à valeurs complexes. Par exemple, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{ix}$$

alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(0) = f(2\pi)$ mais f' ne s'annule pas.

Théorème 2. *Soit f une fonction réelle continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Remarques :

⇨ Remarquons que le taux d'accroissement $(f(b)-f(a))/(b-a)$ est une grandeur invariante par échange de a et b ; l'hypothèse $a < b$ est donc inutile dans ce théorème. De plus, comme $c \in$ « $]a,b[$ », il arrive de l'écrire $c = \theta a + (1-\theta)b$ où $\theta \in]0,1[$.

Proposition 15. *Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in]a,b[\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

Alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Proposition 16. *Soit f une fonction réelle (ou complexe) dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\forall x \in I \quad |f'(x)| \leqslant M$$

Alors f est M-Lipschitzienne.

Remarques :

⇨ Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne.

⇨ On dit qu'une fonction f est contractante lorsqu'elle est M-Lipschitzienne avec $M < 1$. Si f est contractante sur un intervalle I qu'elle laisse stable et si elle admet un point fixe $x_0 \in I$, alors, quel que soit $u_0 \in I$, la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers x_0.

Exemples :

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \cos(u_n)$$

est convergente.

2.3 Dérivation et monotonie

Proposition 17. *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I. Alors*

— *f est croissante si et seulement si*

$$\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$$

— *f est décroissante si et seulement si*

$$\forall x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$$

— *f est constante si et seulement si*

$$\forall x \in I \quad f'(x) = 0$$

Remarques :

⇨ Pour montrer que f est croissante sur I, il suffit de montrer qu'elle est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et que f' est positif sur cet intérieur. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) = \sqrt{x}e^{-x}$$

est croissante sur $[0, 1/2]$.

⇨ Le dernier point de cette proposition reste vrai lorsque f est une fonction à valeurs complexes.

Exemples :

⇨ Rechercher les extremums de la fonction d'expression $|x(x-1)|$ sur $[0,2]$.

⇨ Calculer

$$\inf_{x,y>0} \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

⇨ Soit $\alpha > 0$. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est α-Hölderienne lorsqu'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$$

Montrer que si $\alpha > 1$, alors f est constante.

Proposition 18. *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I. Alors f est strictement croissante si et seulement si*

— $\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$

— *Il n'existe pas d'intervalle non trivial sur lequel f' est nulle.*

Remarques :

⇨ Rappelons au passage qu'une fonction croissante qui n'est pas strictement croissante est constante sur un intervalle non trivial.

2.4 Théorème de la limite de la dérivée

Proposition 19.
— *Soit f une fonction réelle (ou complexe) définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que*

$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} l \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}$$

Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.
— *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que*

$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} \pm\infty$$

Alors

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \pm\infty$$

Autrement dit, le graphe de f admet une demi-tangente verticale en x_0. En particulier, la fonction f n'est pas dérivable en x_0.

Exemples :

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

⇨ Montrer que

$$\frac{\operatorname{Arcsin}(-1 + h) + \frac{\pi}{2}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty$$

3 Convexité

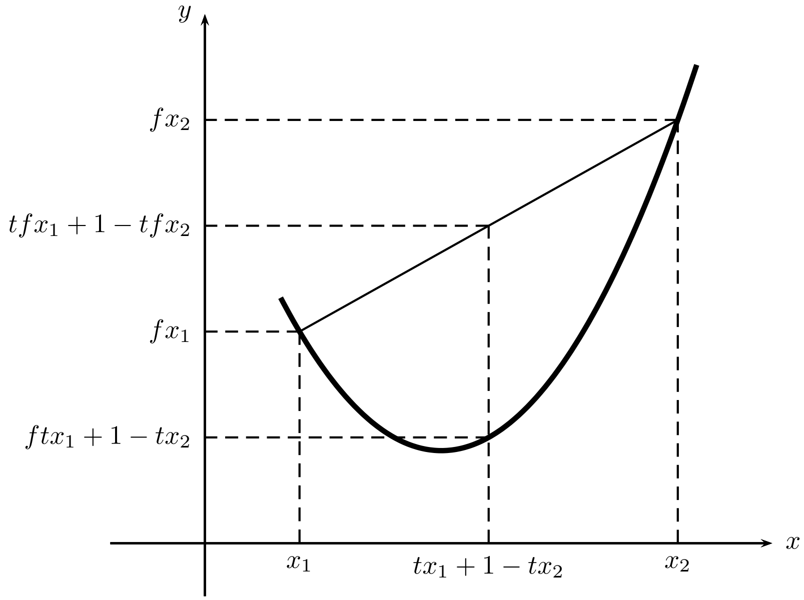
3.1 Définition, propriétés élémentaires

Proposition 20. *Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ avec $x_1 \neq x_2$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une unique fonction affine φ sur « $[x_1, x_2]$ » telle que $\varphi(x_1) = y_1$ et $\varphi(x_2) = y_2$. De plus :*

$$\forall t \in [0,1] \quad \varphi(tx_1 + (1-t)x_2) = t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2)$$

Définition 10. *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On dit que f est convexe lorsque :*

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad \forall t \in [0,1] \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \leqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$



Remarques :

⇨ Les fonctions affines sont convexes sur $\mathbb{R}$.

⇨ Une combinaison linéaire positive de fonctions convexes est convexe. Cependant, si f est une fonction convexe qui n'est pas affine, $-f$ n'est pas convexe.

Exemples :

⇨ Montrer que les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Proposition 21. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Alors :*

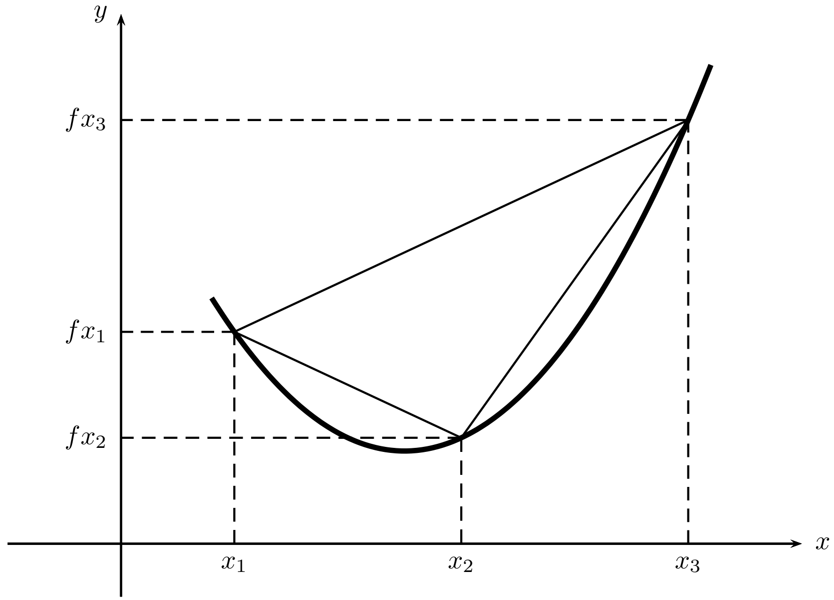
$$\forall x_1, \dots, x_n \in I \quad \forall t_1, \dots, t_n \in [0,1]$$

$$t_1 + \dots + t_n = 1 \Longrightarrow f(t_1 x_1 + \dots + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + \dots + t_n f(x_n)$$

3.2 Convexité et dérivation

Proposition 22. *Soit f une fonction réelle convexe sur un intervalle I. Alors, quels que soient $x_1, x_2, x_3 \in I$ tels que $x_1 < x_2 < x_3$, on a :*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{x_3 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}$$



Remarques :

⇨ Soit f une fonction convexe sur I et $x_0 \in I$. Alors la fonction τ_{x_0} définie sur $I \setminus \{x_0\}$ par

$$\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad \tau_{x_0}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est croissante.

⇨ Une fonction convexe est dérivable à droite et à gauche en tout point intérieur à I. En particulier, elle est continue en tout point intérieur à I.
Remarquons qu'une fonction convexe peut très bien ne pas être dérivable en un point intérieur à I comme le montre l'exemple de la valeur absolue en 0. De même, une fonction convexe peut être discontinue en les bornes de son intervalle de définition comme le montre l'exemple de la fonction

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

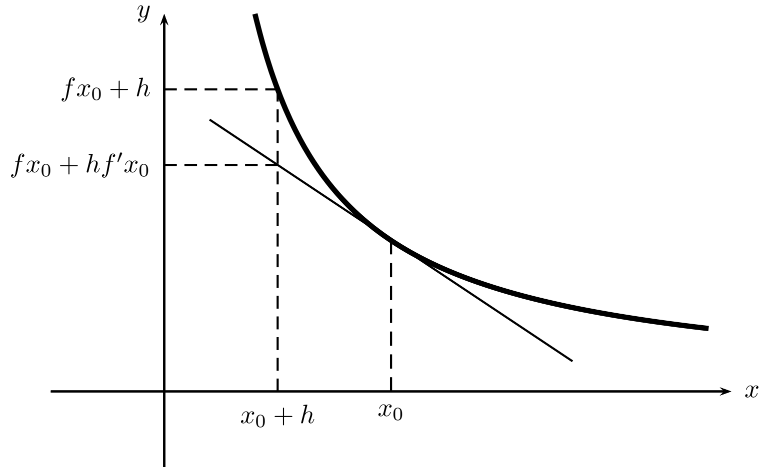
Exemples :

⇨ Montrer que sur $\mathbb{R}$, une fonction convexe majorée est constante.

Proposition 23. *Soit f une fonction convexe sur un intervalle I. Si $x_0 \in I$ est un point en lequel f est dérivable, alors :*

$$\forall h \in \mathbb{R} \quad x_0 + h \in I \Longrightarrow f(x_0 + h) \geqslant f(x_0) + hf'(x_0)$$

Autrement dit, le graphe de f est au dessus de ses tangentes.



Proposition 24. *Soit f une fonction réelle, dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.*

Proposition 25. *Soit f une fonction réelle deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe si et seulement si :*

$$\forall x \in I \quad f''(x) \geqslant 0$$

Remarques :

⇨ La fonction exp est convexe sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto 1/x$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarques :

⇨ On dit qu'une fonction réelle définie sur un intervalle I est concave lorsque

$$\forall x_1, x_2 \in I \quad \forall t \in [0,1] \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \geqslant tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

Une fonction f est concave si et seulement si $-f$ est convexe. On en déduit que toutes les propositions énoncées pour les fonctions convexes ont leur équivalent pour les fonctions concaves. En particulier, les fonctions concaves sont en dessous de leur tangentes et une fonction deux fois dérivable sur un intervalle est concave si et seulement si sa dérivée seconde est négative.

Exemples :

⇨ Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geqslant 1 + x \qquad \forall x \in \left]-1, +\infty\right[\quad \ln(1+x) \leqslant x$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2}{\pi} \cdot x \leqslant \sin x \leqslant x$$

⇨ Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

(C'est l'inégalité arithmético-géométrique qui se démontre facilement pour $n = 2$.)

Remarques :

⇨ **Convergence de la méthode de Newton dans le cas d'une fonction convexe :**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$f(a) < 0 < f(b) \qquad f' > 0 \text{ et } f'' > 0 \text{ sur } [a, b]$$

Alors la fonction f admet un unique racine sur $]a, b[$ notée α. De plus, la suite définie par :

$$u_0 = b \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

est bien définie, décroissante et converge vers alpha en moyenne quadratique, c'est à dire que si (ε_n) est la suite des erreurs définie par $\varepsilon_n = |u_n - \alpha|$, on a

$$\frac{\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

En particulier, si (p_n) est la suite définie par $p_n = -\log_{10} \varepsilon_n$ (intuitivement, p_n est le nombre de chiffres après la virgule exacts lorsque l'on considère u_n comme valeur approchée de α), on a :

$$p_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} 2p_n$$

Autrement dit, le nombre de chiffre exacts donnés par la méthode de Newton double à chaque itération. Rappelons qu'avec la méthode de dichotomie, le nombre de chiffres exacts augmente de 1 toutes les 3 itérations.