Exercice 5.3

Soit g la fonction d'expression

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{e^t}{1+x\sin t} \, dt$$

1) Montrons que g est définie sur $]-1,+\infty[$. Soit $x \in]-1,+\infty[$. Alors :

$$-1 < x$$

Soit $t \in [0, \pi/2]$.
- Si $t = \pi/2$, alors $1 + x\sin t = 1+x > 0$.
- Sinon, $t \in [0,\pi/2[$. On a $\sin t \geqslant 0$ donc

$$-\sin t \leqslant x \sin t$$
donc $$1 - \sin t \leqslant 1 + x\sin t.$$

Or $t \in [0, \pi/2[$ donc $1 - \sin t > 0$, donc

$$0 < 1 + x \sin t.$$

La fonction

$$\varphi_x \;\Big|\; \begin{array}{l} [0,\pi/2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longrightarrow \dfrac{e^t}{1+x\sin t} \end{array}$$

est donc bien définie. D'après les théorèmes usuels, φ_x est continue, donc $g(x)$ est bien définie. En conclusion

$$\boxed{g \text{ est définie sur }]-1,+\infty[}$$

2) Montrons que g est décroissante. Soit $x, y \in]-1,+\infty[$ tels que $x \leqslant y$. Alors

$$g(y) - g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{e^t}{1+y\sin t} \, dt - \int_0^{\pi/2} \frac{e^t}{1+x\sin t} \, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{e^t}{(1+y\sin t)(1+x\sin t)} \big((1+x\sin t) - (1+y\sin t)\big) \, dt$$

$$= (x-y) \int_0^{\pi/2} \frac{e^t \cdot \sin t}{(1+y\sin t)(1+x\sin t)} \, dt$$

Or
$$\forall t \in [0,\pi/2] \quad \frac{e^t \sin t}{(1+y\sin t)(1+x\sin t)} \geqslant 0$$

Donc $$\int_0^{\pi/2} \frac{e^t \sin t}{(1+y\sin t)(1+x\sin t)} \, dt \geqslant 0$$

De plus $x - y \leqslant 0$, donc $g(y) - g(x) \leqslant 0$
donc $g(y) \leqslant g(x)$

On en déduit que g est décroissante.

$$\boxed{g \text{ est décroissante sur }]-1,+\infty[}$$

Exercice 5.4

Soit f une fonction continue, croissante sur $[0,1]$.
On définit (u_n) par

$$\forall n \geqslant 1 \qquad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

1) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$.

$$\forall t \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right] \qquad \frac{k}{n} \leqslant t \leqslant \frac{k+1}{n}$$
$$f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant f(t) \leqslant f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$
(car f est croissante)

Par positivité de l'intégrale

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right) dt \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) dt$$

donc $$\left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt \leqslant \left(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}\right) f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

donc $$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\, dt \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Donc

$$\boxed{\forall k\in[\![0,n-1]\!]\quad \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)}$$

2) Soit $n\geqslant 1$. D'après la question 1

$$\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

$$\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

(On a fait le changement d'indice $k \leftarrow k-1$)

donc $\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant u_n$

Toujours d'après la question 1,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)\,dt$$

donc $\frac{1}{n}f(0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}f(1) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt$

donc $u_n + \frac{1}{n}\left(f(0)-f(1)\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt$

donc $u_n - \frac{1}{n}\left(f(1)-f(0)\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt$

Donc

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^* \quad u_n - \frac{1}{n}\left(f(1)-f(0)\right) \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt \leqslant u_n}$$

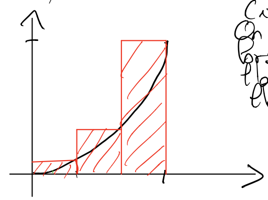
3) On a donc, pour tout $n\geqslant 1$

$$\int_0^1 f(t)\,dt \leqslant u_n \leqslant \int_0^1 f(t)\,dt + \underbrace{\frac{1}{n}\left(f(1)-f(0)\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes

$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$$

Géométriquement, u_n est l'aire hachurée en rouge (ici pour $n=3$).



On remarque bien que lorsque n tend vers $+\infty$ l'aire rouge s'approche de l'aire sous la courbe et donc que $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$

4) Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Alors $f : t \longrightarrow t^\alpha$ est croissante et continue sur $[0,1]$. Donc

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 t^\alpha\,dt = \left[\frac{1}{\alpha+1}t^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}$$

Donc $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^\alpha}{n^\alpha} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{\alpha+1}$

Donc, pour $n\geqslant 1$

$$v_n \cdot \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}} = (\alpha+1)\cdot\frac{1}{n^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{n} k^\alpha$$

$$= (\alpha+1)\,\underbrace{\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{k^\alpha}{n^\alpha}}_{\xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{\alpha+1}}$$

Donc $v_n\cdot\frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$. Donc $\boxed{v_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}}$

Exercice 5.1

Sur $\mathbb{R}$: $\int (x^2+x+1)e^x dx = (x^2+x+1)e^x - \int (2x+1)e^x dx$

$= (x^2+x+1)e^x - \left((2x+1)e^x - \int 2.e^x dx\right)$

$= (x^2+x+1)e^x - (2x+1)e^x + 2e^x$

$= (x^2-x+2)e^x$

Donc sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\int (x^2+x+1)e^x dx = (x^2-x+2)e^x}$

Sur $\mathbb{R}$

$\int (x^2-1)\cos x\, dx = (x^2-1)\sin x - \int 2x \sin x\, dx$

$= (x^2-1)\sin x - \left(2x(-\cos x) - \int 2.(-\cos x)dx\right)$

$= (x^2-1)\sin x + 2x\cos x - 2\int \cos x\, dx$

$= (x^2-3)\sin x + 2x\cos x.$

Donc sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\int (x^2-1)\cos x\, dx = (x^2-3)\sin x + 2x\cos x}$

Sur $\mathbb{R}_+^*$

$\int x^3.\ln x\, dx = \frac{1}{4}x^4\ln x - \int \frac{1}{4}x^4\frac{1}{x}dx$

$= \frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{4}\frac{1}{4}.x^4$

Donc, sur $\mathbb{R}_+^*$ $\boxed{\int x^3\ln x\, dx = \frac{1}{16}x^4(4\ln x - 1)}$

Sur $\mathbb{R}$

$\int \sin^2 x\cos^3 x\, dx = \int \sin^2 x.(1-\sin^2 x)\cos x\, dx$

$u = \sin x$
$du = \cos x.dx$

$= \int u^2(1-u^2)du = \int u^2 du - \int u^4 du = \frac{1}{3}u^3 - \frac{1}{5}u^5$

$= \frac{1}{15}\sin^3 x(5-3\sin^2 x)$

Donc sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\int \sin^2 x\cos^3 x\, dx = \frac{1}{15}\sin^3 x(5-3\sin^2 x)}$

Sur $\mathbb{R}$

$\int \sin x.\cos^2 x\, dx = \int -u^2.du = -\frac{1}{3}u^3 = -\frac{1}{3}\cos^3 x$

$u = \cos x$
$du = -\sin x\, dx$

Donc sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\int \sin x.\cos^2 x\, dx = -\frac{1}{3}\cos^3 x}$

Sur $\mathbb{R}$

$\int \sin^2 x\cos^2 x\, dx = \dots$

$\cos 2x = 1-2\sin^2 x$
$= 2\cos^2 x - 1$

On a $\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}.\frac{1+\cos(2x)}{2}$

$= \frac{1}{4}\left(1-\cos^2(2x)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1+\cos(4x)}{2}\right)$

$= \frac{1}{8}\left(1-\cos(4x)\right)$

Donc $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int \left(1 - \cos(4x)\right) dx$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin(4x)\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(4x - \sin(4x)\right)$$

Donc sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{32}\left(4x - \sin(4x)\right)}$

Sur $\mathbb{R}$

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Donc sur $\mathbb{R}$ $\boxed{\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$

Sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{1/x}{\ln x} . dx$$

$$= \ln|\ln x|$$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Donc, sur }]0,1[& \displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(-\ln x) \\ \text{sur }]1,+\infty[& \displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x) \end{array}}$$

Sur $\mathbb{R}_+^*$, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n = \int 1 . \ln^n x . dx = x\ln^n x - \int x . \frac{1}{x} . n . \ln^{n-1} x \, dx$$

$$= x \ln^n x - n I_{n-1}$$

On a donc $I_0 = x$

$I_1 = x\ln x - x = x(\ln x - 1)$

$I_2 = x(\ln^2 x - 2\ln x + 2)$

$I_3 = x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6)$

Montrons que

$$P_n = \text{"} \int \ln^n x \, dx = x\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \ln^{n-k} x\right) \text{"}.$$

par récurrence sur n

$\underline{P_0 \text{ est vraie}}$: En effet $\int \ln^0 x \, dx = x$

et $x \sum_{k=0}^{0} (-1)^k \frac{0!}{(0-k)!} \ln^{0-k} x$

$= x$.

Donc P_0 est vraie

$\underline{P_n \Rightarrow P_{n+1}}$: Soit $n \in \mathbb{N}$, On suppose que P_n est vraie
Montrons que P_{n+1} est vraie

$$I_{n+1} = x\ln^{n+1} x - (n+1) I_n$$

$$= x\ln^{n+1} x - (n+1)x\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{n!}{(n-k)!} \ln^{n-k} x\right)$$

$$= x\ln^{n+1} x - x\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(n+1)!}{(n-k)!} \ln^{n-k} x\right)$$

$$= x\ln^{n+1} x - x\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!} \ln^{n+1-k} x$$

(Changement $k \leftarrow k-1$)

$$= x\ln^{n+1} x + x\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!} \ln^{n+1-k} x$$

$$= x\left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \cdot \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!} \ln^{n+1-k} x\right)$$

Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence sur n, on en déduit que, sur $\mathbb{R}_+^*$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \int \ln^n x \cdot dx = x \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-k)!} \ln^{n-k} x.}$$