Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \frac{f(2x) - f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Mq $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x}{2^k}\right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x}{2^{k}}\right) - \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x}{2^k}\right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

$$= f(x) - f\left(\frac{x}{2^n}\right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$$

Donc

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| = \left| \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n} \left(f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right) \right) + f\left(\frac{x}{2^n}\right) \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{f\left(\frac{x}{2^{k-1}}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\frac{x}{2^k}} \cdot \frac{1}{2^k} \right| + \left| \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \left| \frac{f\left(2 \cdot \frac{x}{2^k}\right) - f\left(\frac{x}{2^k}\right)}{\frac{x}{2^k}} \right| + \left| \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right|$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [-\eta, \eta] \setminus \{0\} \quad \left| \frac{f(2x) - f(x)}{x} \right| \leqslant \varepsilon$$

car $\dfrac{f(2x) - f(x)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Soit $x \in [-\eta, 0[\cup]0, \eta]$. Alors.

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \underbrace{\left| \frac{f\left(2 \cdot \frac{x}{2^k}\right) - f(x)}{x} \right|}_{\leqslant \varepsilon \text{ car } \left|\frac{x}{2^k}\right| \leqslant |x| \leqslant \eta} + \left| \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \varepsilon + \left| \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right|$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^n}}{\cancel{1-\frac{1}{2}}} + \left| \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right|$$

$$\leqslant \varepsilon + \left| \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right|$$

Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut faire tendre n vers $+\infty$. Or $f(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$, donc

$$\left| \frac{f\left(\frac{x}{2^n}\right)}{x} \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Par passage à la limite, on en déduit que

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leqslant \varepsilon .$$