Exercices : Suites

1 Limites

1.1 Quelques calculs de limite

Montrer que les suites suivantes, définies par leur terme général, admettent une limite que l'on calculera.

$$\frac{\sin(n^3)}{n} \qquad \frac{n^3+5n}{5n^3+\cos n+\frac{1}{n^2}} \qquad \frac{2n+(-1)^n}{5n+(-1)^{n+1}} \qquad \sqrt[n]{3+\sin n}$$

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{n^2-n\cos n+(-1)^n}{\ln n+n^2}\right) \qquad \left(5\sin\frac{1}{n^2}+\frac{1}{5}\cos n\right)^n$$

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(kx) \qquad \left(a+\frac{b}{n}\right)^n \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont réels et } a \geqslant 0$$

1.2 Calcul de limite

1. Montrer que :

$$\forall p\in\mathbb{N}^* \quad \frac{1}{p+1}\leqslant \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)\leqslant\frac{1}{p}$$

2. En déduire la limite de la suite de terme général :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

1.3 Minimum et Maximum

Soit u et v deux suites réelles convergeant respectivement vers l_u et l_v. Montrer que les suites de terme général $\max(u_n,v_n)$ et $\min(u_n,v_n)$ sont convergentes et calculer leurs limites.

2 Définition de la convergence

2.1 Une manipulation fine d'ε

Soit u une suite réelle telle que :

$$\forall k,n\geqslant 1 \quad 0\leqslant u_n\leqslant\frac{k}{n}+\frac{1}{k}$$

Le but de cet exercice est de montrer que u converge vers 0 de deux manières distinctes :

1. (a) Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe une constante C telle que :

$$\forall n\geqslant 1 \quad |u_n|\leqslant\frac{C}{n}+\varepsilon$$

   (b) En déduire que u converge vers 0. (On montrera qu'il existe un rang à partir duquel $|u_n|\leqslant 2\varepsilon$).

2. Montrer directement ce résultat en choisissant judicieusement k en fonction de n.

2.2 Théorème de Césaro

Soit u une suite complexe convergeant vers $l\in\mathbb{C}$. Le but des deux premières questions est de montrer que la suite c définie ci-dessous converge vers l.

$$\forall n\geqslant 1 \quad c_n=\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}u_k$$

1. On suppose que le résultat est démontré lorsque $l=0$. En déduire le cas général.
2. Dans cette question, on suppose que $l=0$.
   (a) Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe un entier N tel que :

$$\forall n\geqslant N \quad |c_n|\leqslant\frac{|u_1|+\cdots+|u_{N-1}|}{n}+\varepsilon$$

   (b) En déduire qu'il existe un entier N' tel que :

$$\forall n\geqslant N' \quad |c_n|\leqslant 2\varepsilon$$

   et conclure.
3. Réciproquement, si on suppose c convergente. Peut-on en déduire que u est convergente ?
4. Que dire si u est une suite réelle divergeant vers $+\infty$?

3 Suites extraites

3.1 Suites divergentes

Montrer que les suites suivantes, définies par leur terme général, sont divergentes :

$$\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right), \qquad \frac{5n^2+\sin n}{2(n+1)^2\cos\frac{n\pi}{5}}, \qquad \frac{2+n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right)}$$

3.2 Autour de la notion d'extractrice

1. Soit u une suite réelle prenant un nombre fini de valeurs. Montrer que l'on peut en extraire une suite constante.
2. Soit u une suite réelle ne divergeant pas vers $+\infty$. Montrer que l'on peut en extraire une suite majorée.
3. Soit u une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$. Montrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
   — Il existe une suite extraite de u convergeant vers l.
   — Quelque soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble :
   $$A_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} : |u_n - l| \leqslant \varepsilon\}$$
   est infini.
   Donner une exemple d'une suite non convergente vérifiant cette propriété.
4. Montrer que de toute suite réelle divergeant vers $+\infty$, on peut extraire une suite croissante.

3.3 Convergence et suites extraites

Soit u une suite complexe.

1. Soit u une suite réelle croissante. On suppose que u admet une suite extraite convergente. Montrer que u converge.
2. Montrer que si les suites extraites de terme général u_{3n}, u_{3n+1} et u_{3n+2} convergent vers le même complexe l, alors u converge vers l.
3. On suppose qu'il existe un réel l tel que pour tout entier $k \geqslant 2$, la suite extraite de terme général u_{kn} converge vers l. Peut-on en déduire la convergence de la suite u ? (On pourra penser à construire une suite u dont la valeur en n dépend de la primalité de n)

4 Suites monotones

5 Suites adjacentes

5.1 Moyenne arithmético-géométrique

Soit a et b deux réels positifs. Soit u et v les suites initialisées par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et définies par la récurrence :

$$\forall n \geqslant 0 \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. (a) Montrer que u et v sont bien définies, puis que :
   $$\forall n \geqslant 1 \quad u_n \leqslant v_n$$
   (b) En déduire la monotonie des suites u et v.
   (c) Montrer que u et v sont convergentes et ont même limite que l'on note $M(a, b)$.
2. (a) Calculer $M(0, 1)$ et $M(1, 1)$.
   (b) Montrer que si $0 \leqslant x \leqslant y$, alors $M(1, x) \leqslant M(1, y)$.

5.2 e est irrationnel

Le but de cet exercice est de montrer que e est un nombre irrationnel.

1. Soit u est v les suites définies par :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad v_n = u_n + \frac{1}{nn!}$$
   (a) Montrer que u et v sont adjacentes.
   (b) On note l leur limite commune. On suppose que l est rationnel et on note $l = \frac{p}{q}$. Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{nn!}$$
   (c) Conclure à une absurdité en choisissant $n = q$.
2. Le but de cette question est de montrer que $l = e$.
   (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e = u_n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt$$
   (b) Montrer que :
   $$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
   et conclure.

6 Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

6.1 Quelques applications directes du cours

Étudier les suites (u_n) telles que : :

1. $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2\ln(1 + x)$
2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$
3. $u_0 \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{3}{2+u_n}$

6.2 Un point fixe attractif, puis répulsif

Soit $a > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) = a \cdot \frac{1+a^2}{1+x^2}$$

Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \geqslant 0$ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$. Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n).

1. (a) Étudier la monotonie de f ainsi que sa position de son graphe par rapport à la première bissectrice. On montrera en particulier que $x \in \mathbb{R}_+$ est un point fixe de f si et seulement si il est racine de $P = (X-a)(X^2 + aX + (1+a^2))$.
   (b) Tracer sur le même dessin le graphe de f et la première bissectrice.
2. (a) Étudier la monotonie de $f \circ f$.
   (b) Montrer que $x \in \mathbb{R}_+$ est un point fixe de $f \circ f$ si et seulement si il est racine du polynôme $Q = (X-a)(X^2 + aX + (1+a^2))(X^2 - a(1+a^2)X + 1)$.
   (c) Étudier la position du graphe de $f \circ f$ par rapport à la première bissectrice en discutant selon les valeurs de a. Dans les différents cas, on tracera le graphe de $f \circ f$ et la première bissectrice.

Dans la suite de l'exercice, on définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{2n}$$

On remarquera que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = (f \circ f)(v_n)$.

3. Montrer que la suite (v_n) est monotone et bornée.
4. On suppose dans cette question que $a \leqslant 1$.
   (a) Montrer que (v_n) converge et calculer sa limite.
   (b) Qu'en déduire pour la suite (u_n) ?
5. Dans cette question, on suppose que $a > 1$.
   (a) Si $u_0 < a$, montrer que (v_n) converge vers un réel α strictement inférieur à a. En déduire que la suite (u_n) diverge.
   (b) Que dire si $u_0 > a$? si $u_0 = a$?

7 Comparaison de suites

7.1 Calcul d'équivalents

Donner un équivalent simple des suites de terme général

$$\ln(n+1) - \ln n \qquad n(\sqrt[n]{3} - 1) \qquad \sum_{k=1}^{n} k^{k^2}$$

7.2 Équivalents

Soit (u_n) une suite réelle de limite nulle telle que

$$u_n + u_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

1. Montrer que si u_n est décroissante alors $u_n \sim 1/(2n)$.
2. Étudier le cas de la suite
$$u_n = \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

7.3 Constante d'Euler

Soit (H_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

1. En utilisant une intégrale, montrer que
$$\forall n > 0 \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$
2. En déduire que $\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$.
3. Déterminer la limite, puis un équivalent de H_n.
4. Montrer que $u_n = H_n - \ln(n)$ est décroissante et positive. En déduire qu'il existe une constante (la constante d'Euler) γ telle que
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(1)$$