• Soit (u_n) la suite définie par $u_0, u_1 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \frac{1}{u_{n+1}^2 \cdot u_n}$$

On montre facilement par récurrence sur n, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien définie et $u_n > 0$. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \frac{1}{u_{n+1}^2 \cdot u_n}$$

$$\ln(u_{n+2}) = -2\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

$$\ln(u_{n+2}) + 2\ln(u_{n+1}) + \ln(u_n) = 0$$

On définit la suite (v_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \ln(u_n)$$

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+2} + 2v_{n+1} + v_n = 0.$$

On résout l'équation caractéristique

$$\forall r \in \mathbb{C} \quad r^2 + 2r + 1 = 0 \iff (r+1)^2 = 0 \iff r = -1$$

Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = e^{(\lambda n + \mu)(-1)^n}$$

En particulier, pour $n=0$ et $n=1$, on a :

$$u_0 = e^{\mu}$$
$$u_1 = e^{(\lambda+\mu)(-1)} = e^{-(\lambda+\mu)}$$

Donc $\mu = \ln(u_0)$ et $\lambda + \mu = -\ln(u_1)$ donc $\lambda = -\ln(u_0 u_1)$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = e^{(\ln(u_0 u_1) n - \ln(u_0))(-1)^{n+1}}$$

(ix) Soit (u_n) la suite défini par :

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n.$$

On résout l'équation caractéristique :

$$\forall r \in \mathbb{C} \quad r^2 = 2r - 4 \iff r^2 - 2r + 4 = 0$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4\times 4 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$$

$$\iff r = \frac{2 \pm i\,2\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff r = 1 \pm \sqrt{3}i$$

$$\iff r = 2\left(\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\iff r = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

On en déduit qu'il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(\lambda \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \mu \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)2^n$$

En particulier, pour $n=0$ et $n=1$, on obtient

$$1 = u_0 = \lambda$$

$$0 = u_1 = \left(\frac{1}{2}\lambda + \frac{\sqrt{3}}{2}\mu\right)2$$

Donc $\lambda = 1$ et $\sqrt{3}\mu + 1 = 0$ donc $\mu = -1/\sqrt{3}$.

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)2^n$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)2^n$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) - \cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)\right)2^n$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3}n\right)2^n$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right)2^n$$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $\quad u_n=0 \iff -\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right)2^n=0$

$$\iff \sin\left((n-1)\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\iff (n-1)\frac{\pi}{3}\equiv 0 \quad [\pi]$$

$$\iff n-1\equiv 0 \quad [3]$$

$$\iff n\equiv 1 \quad [3]$$

Donc $u_n=0$ si et seulement si $n\equiv 1$ $[3]$.

(iii) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et (u_n) la suite défini par $u_0,u_1\in\mathbb{R}$ et

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_{n+2}=2\cos(\alpha)u_{n+1}-u_n.$$

On résout l'équation caractéristique :

$$\forall r\in\mathbb{C} \quad r^2=2\cos(\alpha)r-1$$

$$\iff r^2-2\cos(\alpha)r+1=0$$

$$\Delta=(-2\cos(\alpha))^2-4$$
$$=4(\cos^2\alpha-1)$$
$$=-4\sin^2\alpha$$
$$=(2\sin(\alpha)\,i)^2$$

$$\iff r=\frac{2\cos(\alpha)\pm 2i\sin(\alpha)}{2}$$

$$\iff r=e^{\pm i\alpha}$$

Or $\quad e^{i\alpha}\in\mathbb{R} \iff e^{i\alpha}=\overline{e^{i\alpha}}$

$$\iff e^{i\alpha}=e^{-i\alpha}$$

$$\iff e^{i2\alpha}=1$$

$$\iff 2\alpha\equiv 0 \quad [2\pi]$$

$$\iff \alpha\equiv 0 \quad [\pi]$$

<u>Si $\alpha\equiv 0$ $[2\pi]$</u> : Alors $r=1$ est racine double. On en déduit qu'il existe $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\lambda n+\mu$$

En évaluant en 0 et 1, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (u_1 - u_0)n + u_0.$$

Si $\alpha \equiv \pi \; [2\pi]$: Alors $r = -1$ est une racine double.
Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (\lambda n + \mu)(-1)^n$$

En évaluant en $n=0$ et $n=1$, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = (-(u_1 + u_0)n + u_0)(-1)^n$$

Sinon : Alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $e^{i\alpha}$ et $e^{-i\alpha}$.
Il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = \lambda \cos(\alpha n) + \mu \sin(\alpha n)$$

On évalue en 0 et en 1 et on obtient

$$\lambda = u_0.$$
$$\lambda \cos(\alpha) + \mu \sin(\alpha) = u_1$$

Donc $\qquad \mu = \dfrac{u_1 - u_0 \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n = u_0 \cos(\alpha n) + \frac{u_1 - u_0 \cos(\alpha)}{\sin \alpha} \sin(\alpha n)$$

(iv) La notion de base sera vue en dimension finie.

Exemples (Comparaisons)

(i) Mq $\quad 1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$

$$\frac{1 - \cos x}{x^2/2} = \frac{-2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(-\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$= \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2 \xrightarrow[x \to 0]{} 1$$

car $\dfrac{\sin u}{u} \xrightarrow[u \to 0]{} 1$

(ii) On a $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

Donc $\ln(1+x)\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$

(iii)
$$\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}} \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \frac{x}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \sqrt{2}$$

Donc $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} \sqrt{2}$.

(iv) Soit
$$f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longrightarrow xe^{x} \end{array} \right.$$

Alors f est bien défini sur $\mathbb{R}_+$. De plus f est strictement croissante comme produit de fonctions strictement croissantes positives. Comme de plus

$$f(0)=0 \qquad \text{et} \qquad f(x) = xe^{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

et que f est continue, on en déduit d'après le théorème de la bijection, que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. On pose $g = f^{-1}$.

Montrons que $g(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$. Puisque f est strictement croissante, on en déduit que $g = f^{-1}$ est aussi strictement croissante. Donc g admet une limite en $+\infty$. Montrons que $g(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$. On raisonne par l'absurde et on suppose que g admet une limite finie. Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$g(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} \ell$$

Donc

$$\forall y \geq 0 \quad g(y) \leq \ell$$

Donc
$$\forall x \geq 0 \quad \underbrace{g(f(x))}_{=x} \leq \ell$$

C'est absurde. Donc $g(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$

De plus :

$$\forall y>0 \quad f(g(y)) = y$$
$$g(y)e^{g(y)} = y$$
$$\ln g(y) + g(y) = \ln y$$

Donc $\forall y>1$ $$\frac{\ln y}{g(y)} = 1 + \underbrace{\frac{\ln(g(y))}{g(y)}}_{\substack{\downarrow y\to+\infty \\ 0}}$$

car $g(y) \xrightarrow[y\to+\infty]{} +\infty$

et $\frac{\ln(u)}{u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$

Donc $\frac{\ln y}{g(y)} \xrightarrow[y\to+\infty]{} 1$. Donc $g(y) \underset{y\to+\infty}{\sim} \ln(y)$

(v) On a $\ln(1+u) \underset{u\to0}{\sim} u$ et $\tan x \xrightarrow[x\to0]{} 0$ donc

$$\ln(1+\tan x) \underset{x\to0}{\sim} \tan x$$

Or $\tan x \underset{x\to0}{\sim} x$ donc $\ln(1+\tan x) \underset{x\to0}{\sim} x$.

. $\arcsin(-1+x)+\frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to0]{} 0$ et $\sin u \underset{u\to0}{\sim} u$ donc

$$\arcsin(-1+x)+\frac{\pi}{2} \underset{x\to0}{\sim} \sin\left(\arcsin(-1+x)+\frac{\pi}{2}\right)$$

Or $\sin(\arcsin(-1+x)+\pi/2) = \cos(\arcsin(-1+x))$

$$= \sqrt{1-\sin^2(\arcsin(-1+x))} \quad \text{car } \theta = \arcsin(-1+x) \in [-\pi/2, \pi/2]$$
$$= (1-(-1+x)^2)^{1/2}$$
$$= (1-(1+x^2-2x))^{1/2}$$
$$= (2x-x^2)^{1/2} = \sqrt{2x}\underbrace{\left(1-\frac{x}{2}\right)^{1/2}}_{\substack{\downarrow x\to0 \\ 1}}$$

Donc $\arcsin(-1+x)+\frac{\pi}{2} \underset{x\to0}{\sim} \sqrt{2x}$.