Jean-Paul Delahaye

La traversée du pont

Les problèmes d'organisation sont parfois de vrais casse-tête. La résolution de la traversée du pont, à l'apparence très simple, a exigé plusieurs années de recherche.

Il suffit de passer le pont
C'est tout de suite l'aventure.
Georges Brassens

La traversée des ponts est source de légende au Moyen Âge, qu'il s'agisse du Pont du Diable ou du Pont de l'Épée : Lancelot traverse la rivière sur son glaive effilé. Les ponts sont lieux de maléfices et il faut parfois un anneau magique pour les franchir impunément. Dans notre franchissement de pont, objet de la rubrique de ce mois, le talisman sera mathématique.

La formulation du problème *princeps* est simple : quatre voyageurs V_1, V_2, V_3 et V_4 sont sur la rive gauche d'une rivière à côté d'un pont fragile qui ne peut pas supporter le poids de plus de deux voyageurs à la fois. Ils souhaitent se rendre sur la rive droite de la rivière. Il fait nuit et ils ne disposent que d'une torche lumineuse indispensable à la traversée du pont. Il n'est pas possible de lancer la torche et donc celle-ci doit faire des allers et retours pour permettre le passage des voyageurs en plusieurs fois, des voyageurs traversant la rivière de droite à gauche pour ramener la torche.

Les voyageurs ont des capacités physiques différentes : le premier traverse en une minute ($t_1 = 1$), le second a besoin de deux minutes ($t_2 = 2$), le troisième de cinq minutes ($t_3 = 5$) et le quatrième de dix minutes ($t_4 = 10$). Bien sûr, quand deux voyageurs traversent ensemble, le plus lent impose sa vitesse. Comment les voyageurs doivent-ils organiser leurs traversées pour faire au plus vite et ainsi économiser l'énergie de leur torche ?

On ignore l'inventeur de cette énigme, mais la plus ancienne attestation semble être le livre de Saul Levmore et Elizabeth Cook, *Super Strategies For Puzzles and Games*, publié en 1981. Ce problème fut utilisé, raconte-t-on, par Bill Gates pour choisir de nouvelles recrues chez *Microsoft* : il fallait répondre en moins de cinq minutes. On raconte aussi que posé à un groupe de 50 candidats chez *Motorola*, aucun ne sut trouver la bonne réponse dans le temps imparti.

Un ingénieur à qui l'on avait soumis cette colle et qui craignait de se faire piéger trouva la bonne solution en écrivant un programme en langage C... mais cela lui prit plus d'une demi-heure ! Ce problème n'est en effet pas aussi simple qu'il en a l'air et si vous ne prenez pas la peine d'y réfléchir, vous risquez de passer à côté de la solution qui autorise une traversée de tous les voyageurs en 17 minutes au total.

Faire ramener la torche par le plus rapide des porteurs ?

Il est tentant de croire que le plus rapide des voyageurs doit accompagner chacun des autres et revenir seul pour ramener la torche : V_1 accompagne V_2, puis revient, puis accompagne V_3, puis revient, puis accompagne V_4. Cette organisation de la traversée se représente de manière symbolique par :

$$[V_1\ V_2 \rightarrow]\ [V_1 \leftarrow]\ [V_1\ V_3 \rightarrow]\ [V_1 \leftarrow]\ [V_1\ V_4 \rightarrow]$$

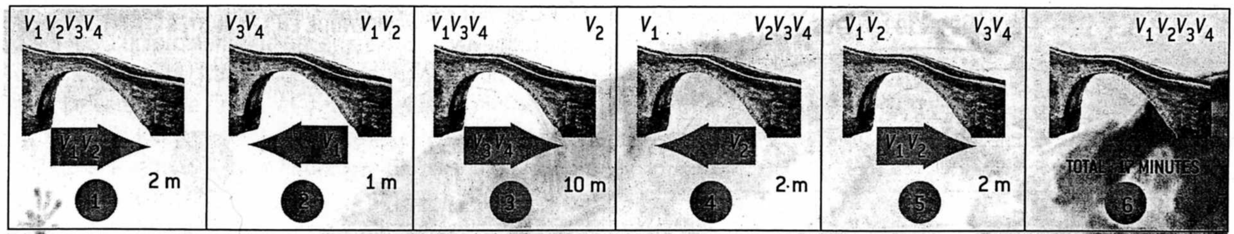
La durée totale des traversées est $t_2 + t_1 + t_3 + t_1 + t_4$, soit $2 + 1 + 5 + 1 + 10 = 19$ minutes. Bien que fondée sur ce qui semble une évidence – on y utilise toujours le voyageur le plus rapide pour rapporter la torche –, cette organisation des traversées n'est pas la meilleure.

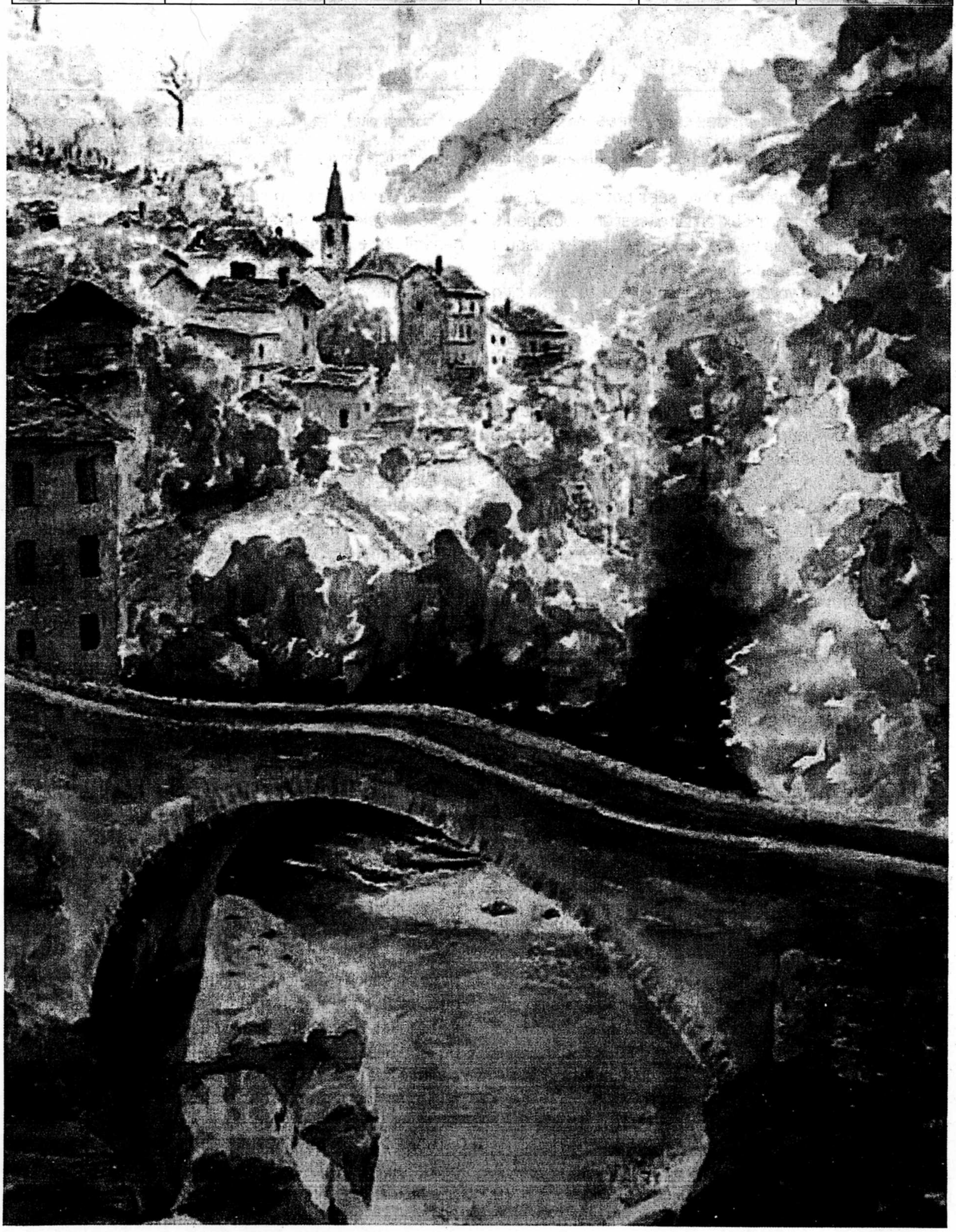
Peut-être faut-il faire traverser deux personnes lentes ensemble et donc commencer les traversées par $[V_3\ V_4 \rightarrow]$? Mais alors, l'une d'elles devra revenir, ce qui fera perdre du temps. L'astuce en fait consiste à faire voyager ensemble les deux personnes les plus lentes, mais pas au début. Cela conduit à l'organisation des traversées :

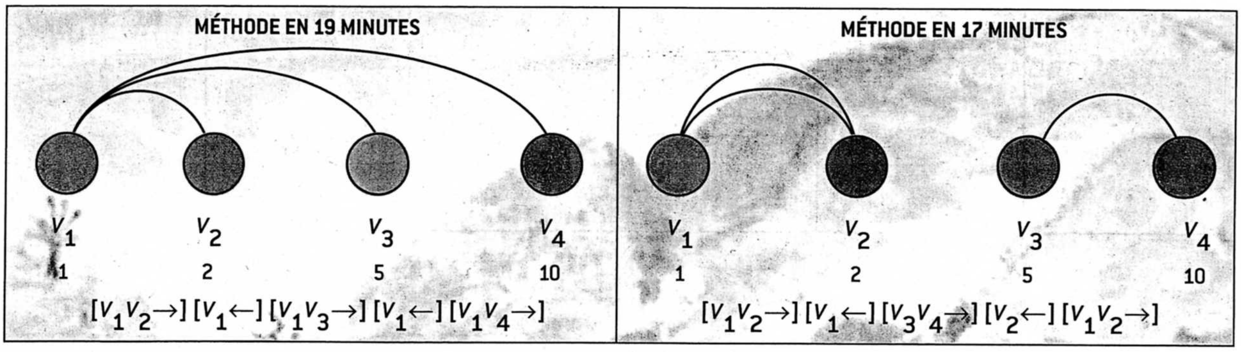
$$[V_1\ V_2 \rightarrow]\ [V_1 \leftarrow]\ [V_3\ V_4 \rightarrow]\ [V_2 \leftarrow]\ [V_1\ V_2 \rightarrow]$$

Cette fois, le temps total est égal à $t_2 + t_1 + t_4 + t_2 + t_2$, soit $2 + 1 + 10 + 2 + 2 = 17$ minutes. Remarquez, caractéristique inattendue, que deux fois les voyageurs V_1 et V_2 ont traversé ensemble de la rive gauche à la rive droite. Est-ce la meilleure façon de s'y prendre ? Oui, et en voici la démonstration en quatre étapes.

1. Solution optimale (en 17 minutes) du problème de la traversée du pont par quatre voyageurs. Aquarelle de Daniel Veysseyre.


$V_1V_2V_3V_4$
V_1V_2
2 m
1
V_3V_4
V_1V_2
V_1
1 m
2
$V_1V_3V_4$
V_2
V_3V_4
10 m
3
V_1
$V_2V_3V_4$
V_2
2 m
4
V_1V_2
V_3V_4
V_1V_2
2 m
5
$V_1V_2V_3V_4$
TOTAL 17 MINUTES
6





2. À chaque organisation des traversées, on associe un graphe dont les nœuds sont les voyageurs et dont les arcs relient deux voyageurs qui traversent ensemble dans le sens direct (de la rive gauche vers la rive droite). À gauche, le graphe associé à une mauvaise organisation où, V_1, le voyageur le plus rapide, va et vient. À droite, le graphe associé à la bonne solution illustrée sur la figure 1.

(a) Il y a au moins cinq traversées pour que chaque voyageur passe, car, au mieux, on fait passer deux voyageurs de gauche à droite, puis un seul de droite à gauche, jusqu'à ce qu'il ne reste plus personne sur la rive gauche, et donc pour que les quatre voyageurs passent, il faut au moins cinq traversées. Dans le cas de n voyageurs, il faudra au moins $n - 1$ voyages aller avec deux personnes et $n - 2$ retours pour ramener la torche, soit, au mieux, $2n - 3$ traversées.

(b) Le voyageur V_4 doit traverser au moins une fois. Comme il est le plus lent, une traversée au moins exigera 10 minutes.

(c) Si le voyageur V_3 ne traverse pas avec V_4, la durée totale des traversées sera 10 + 5 (pour les traversées de V_4 et V_3) + 3 (au moins, pour les trois autres traversées). Cela dépasse 17. Donc les voyageurs V_3 et V_4, dans la meilleure organisation des traversées, passent ensemble.

(d) Si V_3 et V_4 voyagent ensemble, – ce qui est nécessaire d'après *(c)* –, seules quatre possibilités d'organisation en cinq traversées donnent un temps total inférieur ou égal à 17 :

1) 10 + 1 + 1 + 1 + 1 2) 10 + 1 + 1 + 1 + 2
3) 10 + 2 + 2 + 1 + 1 4) 10 + 2 + 2 + 2 + 1

La première somme n'est pas possible, car V_2 ne traverserait pas. La seconde ne l'est pas non plus, car elle signifierait que V_1 traverse seul trois fois, le nombre de voyageurs passant de l'autre côté du pont serait alors de trois et donc l'un resterait du mauvais côté. La troisième somme n'est pas possible à nouveau, car le voyageur V_2 traverserait deux fois et donc se retrouverait du mauvais côté à la fin des opérations. La meilleure somme n'est pas inférieure à 10 + 2 + 2 + 2 + 1 = 17 (en toute rigueur, des solutions composées de 7 traversées ou 9 traversées, etc. devraient être envisagées, mais on s'aperçoit vite qu'aucune ne dure moins de 17 minutes. La solution proposée plus haut est donc optimale.

Puisque vous maîtrisez bien le problème, vous pouvez traiter les cas suivants, soumis par divers auteurs :

Version européenne : $t_1 = 5$, $t_2 = 10$, $t_3 = 20$, $t_4 = 25$.
La durée minimale des traversées est 60 minutes.

Version de Torsten Sillke : $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, $t_3 = 5$, $t_4 = 8$.
La durée minimale des traversées est 19 minutes.

Version de Plastilina : $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$, $t_4 = 8$, $t_5 = 12$.
La durée minimale des traversées est 29 minutes.

Version de Dick Hess : $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 4$, $t_4 = 6$, $t_5 = 8$, $t_6 = 9$.
La durée minimale des traversées est 31 minutes.

Ces deux derniers problèmes vous demanderont sans doute un petit moment et nous allons étudier le problème général de l'organisation optimale des traversées.

Dans toutes ces versions, le nombre de voyageurs étant petit, avec un peu de patience et d'attention, nous sommes certains de trouver la solution optimale. Lorsque le nombre de voyageurs augmente, il ne peut pas être envisagé de travailler par tâtonnements. La solution générale, difficile à découvrir, ne l'a été que récemment par Günter Rote, de l'Institut d'informatique de l'Université de Berlin, après la publication de plusieurs articles incomplets ou même gravement erronés par d'autres auteurs.

Nous allons décrire cette solution qui est exemplaire, car elle montre comment, en transformant le problème d'organisation initial en un problème de graphe, tout se simplifie jusqu'à se ramener à un simple petit calcul qu'on peut traiter à la main, même s'il y a 1 000 voyageurs. La démonstration exige un effort, si vous ne voulez pas vous y coller immédiatement, vous pouvez consulter la recette en fin d'article.

Avec plus de voyageurs

Considérons donc le problème général de la traversée avec torche pour n voyageurs. Les données du problème sont simplement le nombre n et la liste des durées des traversées de chacun des voyageurs t_1, t_2, t_3, t_4, ..., t_n, durées que nous classons de la plus courte à la plus longue.

L'utilisation de programmes informatiques est envisageable : en nous y prenant bien, nous pourrons résoudre chaque cas particulier. En effet, le problème appartient à la classe P des problèmes qu'on sait traiter en temps polynomial : le problème de la traversée avec torche est d'ailleurs utilisé dans certains cours d'informatique pour illustrer les techniques de programmation dynamique (une méthode de programmation qui construit progressivement les solutions recherchées). Cependant, l'utilisation brutale d'une méthode de recherche de la meilleure organisation des traversées par un calcul informatique ne permet pas d'en comprendre le schéma général. En revanche, l'analyse menée par G. Rote nous conduit à un résultat simple et à une programmation aisée.

On peut programmer directement, ou réfléchir, puis programmer ; ici la seconde méthode est bien meilleure. Mieux, une fois en possession de la bonne analyse, le problème peut être résolu sans programme !

Un premier résultat – sans surprise – est que la solution optimale à un problème de traversée pour n voyageurs comporte toujours $n-1$ traversées de deux voyageurs de la rive gauche vers la rive droite, et $n-2$ traversées d'un voyageur seul avec la torche dans le sens opposé. Il est clair qu'on ne peut pas faire moins (c'est le point *(a)* du raisonnement précédent), il faut cependant mener un autre raisonnement pour être certain qu'une organisation optimale des traversées ne pourrait pas se faire avec plus de traversées. Ce raisonnement, dont nous passerons les détails, montre que si une organisation des traversées ne respecte pas le principe de l'alternance « 2 voyageurs de gauche à droite », puis « 1 voyageur de droite à gauche », etc., alors cette organisation peut être transformée en une autre organisation d'une durée totale plus courte. Le raisonnement est soigneusement rédigé dans l'article de G. Rote téléchargeable sur Internet (demander à votre moteur de recherche *Crossing the bridge at night*).

Avec des graphes

Pour trouver la solution dans le cas général, la méthode de G. Rote consiste à associer un graphe à chaque organisation des traversées.

Le graphe a pour nœuds les voyageurs $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Pour chaque traversée $[V_iV_j\rightarrow]$, qui apparaît dans l'organisation, on dessine un arc reliant V_i et V_j (on le note V_i-V_j).

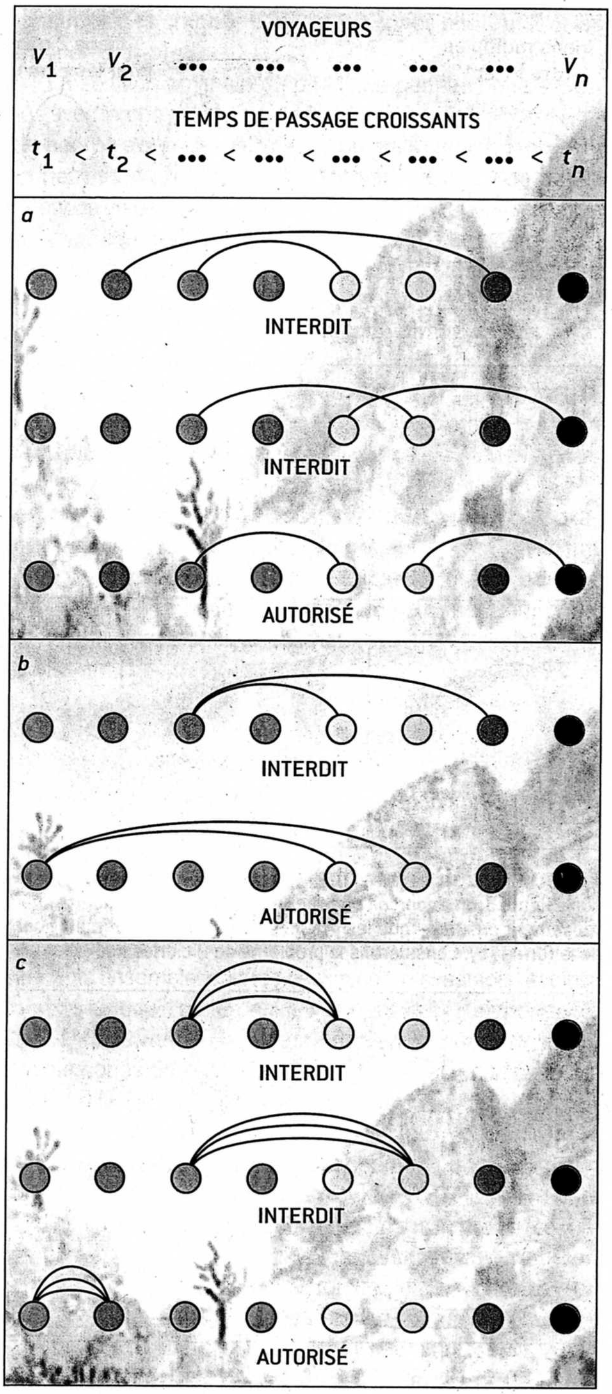
Puisque certaines traversées identiques peuvent avoir lieu plusieurs fois (c'était le cas de la traversée $[V_1V_2\rightarrow]$ dans l'organisation optimale des traversées du problème des quatre voyageurs), notre graphe comportera éventuellement plusieurs fois le même arc V_i-V_j.

On sait que le nombre de traversées directes est nécessairement $n-1$. Donc dans le graphe de la meilleure organisation des traversées, le nombre d'arcs est $n-1$ (condition 1).

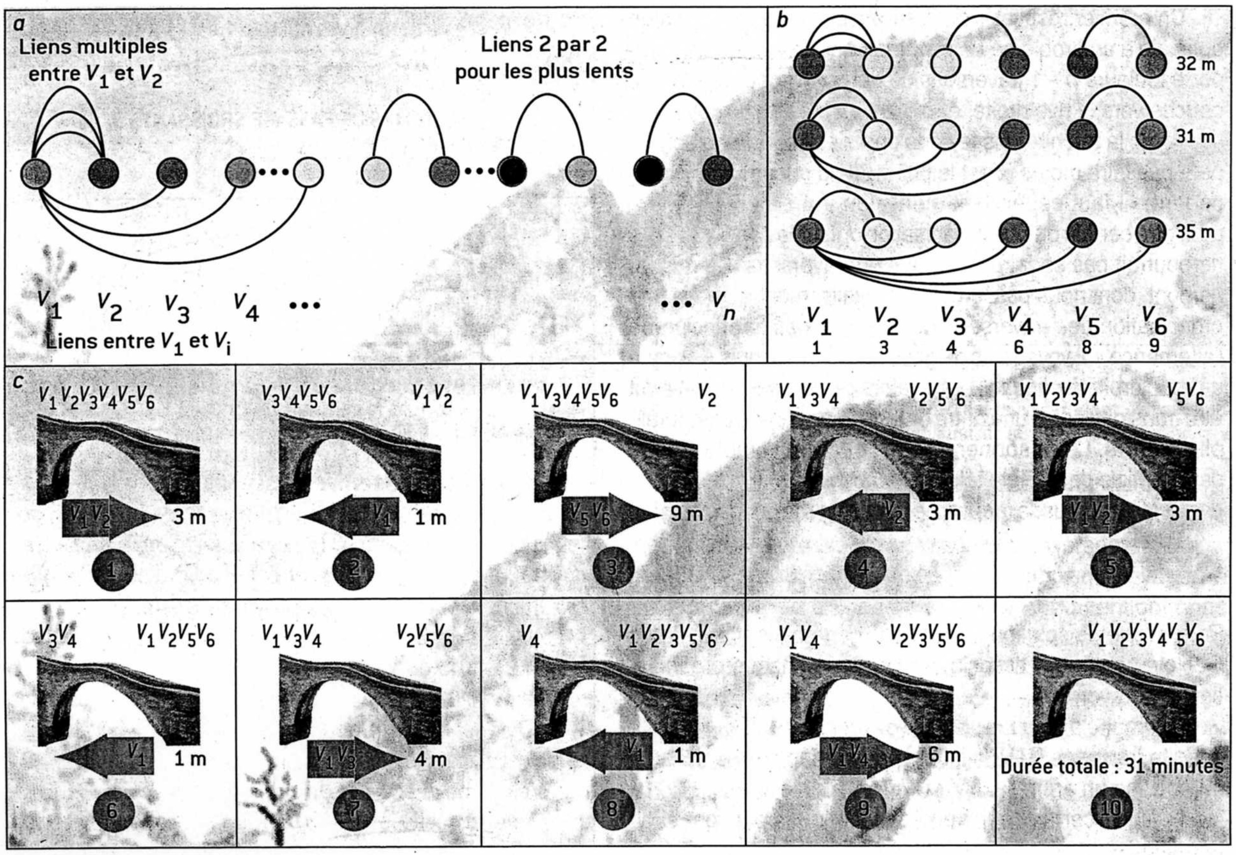
Le degré D_i d'un nœud V_i (c'est-à-dire le nombre d'arcs qui partent du nœud V_i) est le nombre de voyages directs effectués par le voyageur V_i. Si D_i est égal à 3, cela signifie que V_i fait 3 fois le voyage de la gauche vers la droite, donc il fait deux fois le voyage de la rive droite vers la rive gauche pour revenir (la durée totale de ces retours est ici $2 \times t_i$, $(D_i - 1) \times t_i$ dans le cas général). Puisque chaque voyageur traverse, de chaque sommet du graphe de la meilleure organisation des traversées part au moins un arc : pour tout nœud i, le degré D_i est supérieur ou égal à 1 (condition 2).

Notre but maintenant est de trouver parmi tous les graphes ayant n nœuds $V_1V_2V_3\ldots V_n$, comportant $n-1$ arcs et de chaque nœud partant au moins un arc, ceux dont la durée totale des traversées est la plus courte. Nous les appellerons graphes optimaux. Il n'est pas évident *a priori* que tous les graphes vérifiant ces conditions donnent une organisation satisfaisante des traversées (c'est-à-dire respectant absolument toutes les contraintes du problème), mais si les graphes optimaux que nous trouvons peuvent donner lieu à des organisations de traversées (et ce sera le cas), alors ces graphes optimaux représenteront les solutions optimales de notre problème.

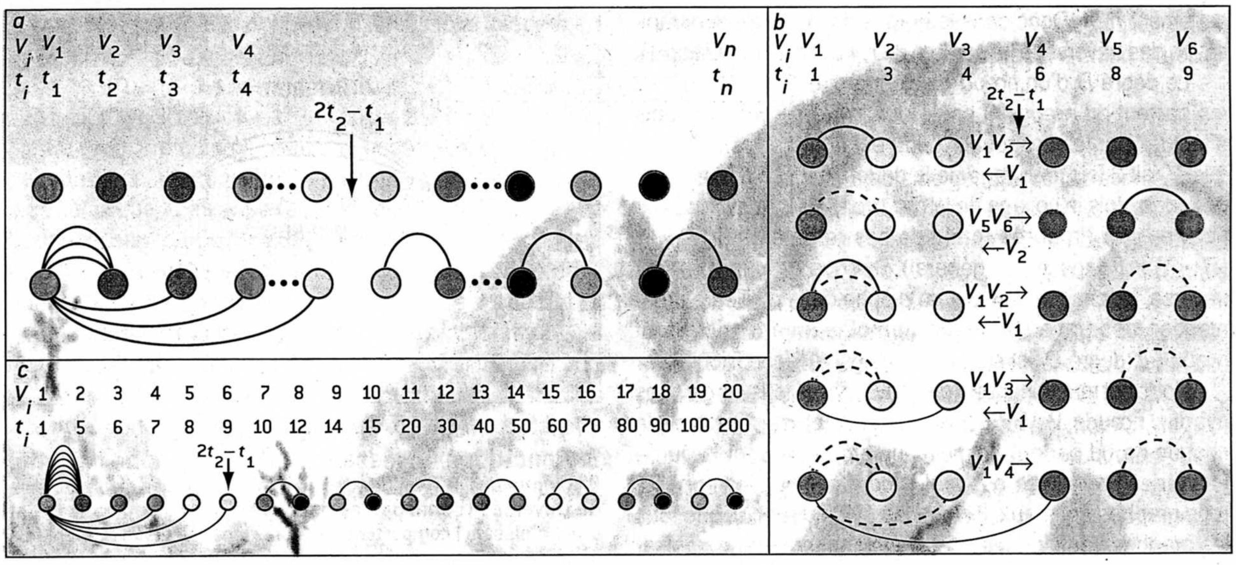
Nous verrons que la durée totale des traversées associée à un graphe possible peut se lire sur le graphe : c'est la somme de deux coefficients A et B que nous allons examiner.



3. Conditions nécessaires pour un graphe optimal. On montre que les graphes des solutions optimales d'un problème de traversée (défini par les données $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ rangés par ordre croissant) comportent $n-1$ arcs, chaque nœud étant relié à un arc au moins (pas de nœuds isolés) et qu'en plus ils vérifient les propriétés *a*, *b* et *c* suivantes.
(a) Si deux arcs d'un graphe optimal relient quatre nœuds de numéro i, j, k, l vérifiant $i < j < k < l$, alors les arcs sont nécessairement V_i-V_j et V_k-V_l.
(b) Si deux arcs différents d'un graphe optimal ont une extrémité commune (V_i-V_j et V_i-V_k, $j \neq k$), alors nécessairement cette extrémité est V_1 ($i = 1$).
(c) Si deux arcs d'un graphe optimal ont les mêmes deux extrémités, alors nécessairement ces extrémités sont V_1 et V_2 (autrement dit, le seul arc qui peut être présent plusieurs fois dans un graphe optimal est l'arc V_1-V_2).



4. Seuls graphes possibles. À partir des propriétés décrites sur la figure 3, on s'aperçoit par tâtonnements – et on démontre rigoureusement ensuite – que les graphes des solutions optimales sont de la forme *(a)*. Considérons le problème de Dick Hess où n est égal à 6 ; $t_1=1$, $t_2=3$, $t_3=4$, $t_4=6$, $t_5=8$, $t_6=9$. Les trois graphes candidats sont indiqués à droite *(b)*. Les durées totales sont 32 minutes, 31 minutes et 35 minutes. La traversée optimale est donc donnée par le deuxième graphe qui conduit à l'organisation *(c)* des traversées.



5. Plus aucun programme n'est nécessaire ! Une dernière astuce permet de repérer parmi les graphes candidats, lequel est le bon : on sépare *(a)* les voyageurs qui ont un temps de traversée supérieur à $2t_2-t_1$. Puis on les regroupe par deux (si le nombre des voyageurs lents est impair, on en laisse un à gauche). Le voyage des paires de voyageurs lents est précédé, à chaque fois, d'une traversée du couple V_1-V_2 qui rapportera la torche. Les autres voyageurs voyagent accompagnés de V_1 qui rapporte à chaque fois la torche.
Exemple *(b)* : on reprend le problème de Dick Hess : $t_1=1$, $t_2=3$, $t_3=4$, $t_4=6$, $t_5=8$, $t_6=9$. On a $2t_2-t_1=5$, donc les voyageurs V_5 et V_6 qui ont un temps de traversée plus grand que 5 traverseront ensemble. Le voyageur V_4 a bien un temps de traversée plus grand que 5, mais il ne peut s'apparier avec aucun autre, il traversera donc accompagné de V_1, comme les voyageurs V_2 et V_3. On retrouve directement la solution de la figure 4*c*. Autre exemple avec 20 voyageurs *(c)* : $t_1=1$, $t_2=5$, $t_3=6$, $t_4=7$, $t_5=8$, $t_6=9$, $t_7=10$, $t_8=12$, $t_9=14$, $t_{10}=15$, $t_{11}=20$, $t_{12}=30$, $t_{13}=40$, $t_{14}=50$, $t_{15}=60$, $t_{16}=70$, $t_{17}=80$, $t_{18}=90$, $t_{19}=100$, $t_{20}=200$. Cette fois $2t_2-t_1=9$ donc les voyageurs V_{20} et V_{19} voyageront ensemble ainsi que V_{18} et V_{17}, V_{16} et V_{15}, V_{14} et V_{13}, V_{12} et V_{11}, V_{10} et V_9, V_8 et V_7 (chaque traversée des paires lentes aura été précédée de V_1 et V_2 qui rapportent la torche). Les autres voyageurs traversent avec V_1 qui accompagnera à chaque fois la torche.

A : Pour chaque arc $V_i - V_j$ du graphe, nous prenons le plus grand des deux nombres t_i et t_j (nous le notons $\max(t_i, t_j)$). C'est la durée de la traversée du couple (i, j). La somme A de tous ces nombres $\max(t_i, t_j)$ correspond à la durée totale des voyages de gauche à droite.

B : Il faut maintenant considérer les voyages retours. La somme des durées des voyages retours de tous les voyageurs est obtenue en considérant qu'un voyageur V_i qui fait D_i voyages allers, fait nécessairement $D_i - 1$ voyages retours. Le second coefficient B est donc la somme des $(D_i - 1) \times t_i$.

Le problème est maintenant de dessiner un graphe à n nœuds vérifiant les conditions 1 et 2 et qui, en même temps, minimise la somme $A + B$.

L'astuce de G. Rote est de remarquer que $t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ est une constante et donc que minimiser $A + B$ est équivalent à minimiser $A + B + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$. Or nous allons voir que la somme $S = A + B + t_1 + t_2 + \ldots + t_n$ est simplement la somme prise pour tous les arcs $V_i - V_j$ de $t_i + t_j + \max(t_i, t_j)$.

En effet, le coefficient B est réécrit, car $(D_i - 1) \times t_i + t_i$ est égal à $D_i \times t_i$. À chaque arc du graphe correspond, dans la somme S, le coût de l'aller des deux voyageurs, $\max(t_i, t_j)$, et le coût du retour individuel des deux voyageurs V_i et V_j. Le problème est maintenant ramené à celui d'envisager tous les graphes possibles vérifiant les conditions 1 et 2 et de repérer ceux qui rendent la somme des $t_i + t_j + \max(t_i, t_j)$ la plus petite possible. Formuler de cette façon simplifiée, le problème de la traversée avec torche se prête à des raisonnements élémentaires qui établissent les trois propriétés suivantes.

a) Si deux arcs d'un graphe optimal relient quatre nœuds de numéro i, j, k, l vérifiant $i < j < k < l$, alors nécessairement, les arcs sont $V_i - V_j$ et $V_k - V_l$.

b) Si deux arcs différents d'un graphe optimal ont une extrémité commune ($V_i - V_j$, $V_i - V_k$, $j \neq k$), alors nécessairement cette extrémité est V_1 ($i = 1$).

c) Si deux arcs d'un graphe optimal ont les mêmes deux extrémités, alors nécessairement ces extrémités sont V_1 et V_2 (autrement dit, le seul arc qui peut être présent plusieurs fois dans un graphe optimal est l'arc $V_1 - V_2$). Ces propriétés sont illustrées sur la figure 3.

Chacune de ces propriétés se démontre très facilement grâce à l'astuce de G. Rote. Considérons par exemple la propriété *c*). Imaginons que l'arc $V_3 - V_4$ soit présent plusieurs fois dans un graphe optimal. En enlevant un des arcs $V_3 - V_4$ et en le remplaçant par l'arc $V_1 - V_2$, les conditions 1 et 2 restent vraies (on ne change pas le nombre d'arcs, et on n'isole pas de nœud), mais en revanche on diminue la quantité S où le terme $t_3 + t_4 + \max(t_3, t_4)$ a été remplacé par $t_1 + t_2 + \max(t_1, t_2)$ qui est plus petit (n'oublions pas que les t_i sont classés par ordre croissant). Le graphe comportant plusieurs arcs $V_3 - V_4$ n'est donc pas optimal. Autrement dit, dans un graphe optimal, seul l'arc $V_1 - V_2$ peut être présent plusieurs fois, CQFD.

Si maintenant vous dessinez des graphes vérifiant à la fois les conditions 1 et 2 et les propriétés *a)-b)-c)*, vous découvrirez que votre graphe est d'une forme très spéciale représentée sur la figure 4*a*. Ces graphes candidats sont peu nombreux, au nombre de $n/2$ au pire. Là encore, un raisonnement établit rigoureusement ce que nous constatons et qui devient évident pour qui essaye un moment de construire des graphes vérifiant les conditions 1 et 2 et les propriétés *a)-b)-c)*.

La solution optimale du problème général de la traversée avec torche est alors à portée de main. Elle s'obtient simplement en examinant le coût des graphes candidats qui sont en petit nombre. On retient le moins coûteux : ce travail demande un temps de calcul proportionnel à $n/2$ *(voir l'exemple traité en figure 4)*. On constate (ce qui n'était pas évident d'avance) que ce graphe donne bien une organisation des traversées *(figure 4c)*. Celle-ci s'obtient en combinant le principe utilisé dans le problème à quatre voyageurs (les voyageurs les moins rapides voyagent par 2 après avoir été précédés de la traversée groupée de V_1 et V_2 qui permet de ramener la torche), et celui, naturel, de faire ramener la torche par le voyageur le plus rapide qui accompagne les autres voyageurs.

Une dernière astuce permet même d'éviter le court examen des graphes candidats : le graphe optimal s'obtient en regardant où se place $2t_2 - t_1$ dans la liste ordonnée des t_i. Le graphe optimal est celui où se regroupent par 2 (autant que c'est possible) tous les voyageurs dont le temps t_i dépasse $2t_2 - t_1$.

La recette finale

La solution générale se résume donc en quelques lignes : tous les voyageurs qui, pour traverser, ont besoin d'un temps t_i supérieur à $2t_2 - t_1$ doivent traverser par deux après que V_1 et V_2 se sont rendus sur la rive droite selon le schéma $[V_1\ V_2 \rightarrow]$ $[V_2 \leftarrow]$ $[V_i\ V_j \rightarrow]$ $[V_1 \leftarrow]$. Les regroupements par deux doivent se faire en respectant l'ordre : les deux voyageurs les plus lents ensemble, puis les deux plus lents restants, et ainsi de suite tant qu'il reste deux voyageurs lents (t_i supérieur à $2t_2 - t_1$). Les autres voyageurs doivent ensuite traverser accompagnés de V_1 qui ramène la torche selon le schéma $[V_1\ V_i \rightarrow]$ $[V_1 \leftarrow]$.

Notons pour conclure que la meilleure organisation des traversées est obtenue uniquement par une combinaison judicieuse de deux idées (et pas trois). Il y a, d'une part, l'idée intuitive qui tend un piège dans le problème initial, et qui cependant n'est pas toujours mauvaise : utiliser le plus rapide pour ramener la torche ; et, d'autre part, il y a l'idée utilisée dans la meilleure solution du problème initial (faire voyager les lents deux par deux) qui, seule, n'est pas toujours bonne.

Auteur & Bibliographie

Jean-Paul DELAHAYE est professeur d'informatique à l'Université de Lille.

Günter ROTE, *Crossing the Bridge at Night*, in *Bulletin de l'EATCS (European Association for Theoretical Computer Science)*, n° 78, pp. 241-246, 2002.

Voir aussi : http://www.inf.fu-berlin.de/inst/ag-ti/publications/rote.en.html

Moshe SNIEDOVICH, *The Bridge and Torch Problem* :
http://www.tutor.ms.unimelb.edu.au/bridge/

Torsten SILLKE, *Crossing the Bridge* :
http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/