COURS : SUITES

Table des matières

1 Suites réelles et complexes

1.1 Définition

Définition 1. *On appelle suite numérique toute famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels (ou complexes) indexée par $\mathbb{N}$.*

Remarques :

⇨ On dit qu'une suite (u_n) est en progression arithmétique de raison $r \in \mathbb{C}$ lorsque $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si tel est le cas, $u_n = u_0 + nr$. De même, on dit qu'une suite (u_n) est en progression géométrique de raison $r \in \mathbb{C}$ lorsque $u_{n+1} = ru_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si tel est le cas, $u_n = u_0 r^n$.

Définition 2.

— *On dit qu'une suite (u_n) vérifie la propriété $\mathcal{P}$ à partir d'un certain rang lorsqu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(u_n)_{n\geqslant N}$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.*

— *On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ est asymptotique lorsque quelles que soient les suites (u_n) et (v_n) égales à partir d'un certain rang, $\mathcal{P}((u_n))$ est vrai si et seulement si $\mathcal{P}((v_n))$ est vrai.*

Exemples :

⇨ La propriété « est nulle » est-elle asymptotique ? Montrer que la propriété « s'annule une infinité de fois » l'est.

Remarques :

⇨ Pour montrer qu'une propriété $\mathcal{P}$ est asymptotique, il suffit de se donner deux suites (u_n) et (v_n) égales à partir d'un certain rang telles que $\mathcal{P}(u)$ est vrai et de montrer que $\mathcal{P}(v)$ est vrai.

1.2 Suites et relation d'ordre

Définition 3. *On dit qu'une suite réelle (u_n) est :*

— *croissante lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant u_{n+1}$$

— *décroissante lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$$

— *monotone lorsqu'elle est croissante ou décroissante.*

— *strictement croissante lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1}$$

— *strictement décroissante lorsque :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$$

— *strictement monotone lorsqu'elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Remarques :

⇨ Pour étudier la monotonie de la suite (u_n), il est souvent utile de simplifier $u_{n+1} - u_n$ afin de déterminer son signe. Si la suite (u_n) est à valeurs strictement positives, on peut comparer u_{n+1}/u_n à 1. Par exemple, si $a > 0$, la suite de terme général a^n est croissante si $a \geqslant 1$ et décroissante si $a \leqslant 1$.

⇨ Pour étudier la monotonie d'une suite donnée par son terme général, on peut aussi l'écrire $u_n = f(n)$ et étudier la fonction f.

⇨ Les suites constantes sont à la fois croissantes et décroissantes ; ce sont d'ailleurs les seules. Certaines suites ne sont ni croissantes ni décroissantes.

Exemples :

⇨ Étudier la monotonie des suites de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \qquad \binom{2n}{n} \qquad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Définition 4. *On dit qu'une suite réelle (u_n) est :*
- *majorée lorsque :*
$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$$
- *minorée lorsque :*
$$\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$$

Les propriétés « est majorée » et « est minorée » sont asymptotiques.

Définition 5. *On dit qu'une suite (u_n) est bornée lorsque :*
$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M$$
La propriété « est bornée » est asymptotique.

Remarques :
⇨ Une suite réelle est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.
⇨ Une combinaison linéaire de suites bornées est bornée. De même, le produit de deux suites bornées est bornée.

2 Notion de limite

2.1 Limites finies

Définition 6. *Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{C}$. On dit que (u_n) converge vers l et on note $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ lorsque :*
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad |u_n - l| \leqslant \varepsilon$$
La propriété « converge vers l » est asymptotique.

Remarques :
⇨ Une suite réelle (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad l - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant l + \varepsilon$$
⇨ Si $l \in \mathbb{C}$, la suite constante égale à l converge vers l.
⇨ Si (u_n) est une suite et $l \in \mathbb{C}$, alors (u_n) converge vers l si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad |u_n - l| < \varepsilon$$
Cependant, conformément aux bonnes manières de l'analyse, nous éviterons soigneusement d'utiliser cette définition car elle fait intervenir une inégalité stricte à un endroit où l'inégalité large suffit.

Exemples :
⇨ Soit A un ensemble non vide et α un majorant de A. Montrer que si il existe une suite d'éléments de A convergeant vers α, alors α est la borne supérieure de A.

Définition 7.
- *On dit qu'une suite (u_n) est convergente lorsqu'il existe $l \in \mathbb{C}$ tel que :*
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$
Si tel est le cas, l est unique ; on l'appelle limite de la suite (u_n).
- *Dans le cas contraire, on dit que (u_n) est divergente.*

Exemples :
⇨ Soit (u_n) une suite convergente d'entiers. Montrer qu'elle est constante à partir d'un certain rang. En déduire que la suite de terme général $(-1)^n$ diverge.

Proposition 1. *Toute suite convergente est bornée.*

Proposition 2. *Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{C}$. Alors :*
$$\overline{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \bar{l} \quad \text{et} \quad |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |l|$$

Proposition 3. *Soit (u_n) et (v_n) des suites convergent respectivement vers l_1 et $l_2 \in \mathbb{C}$.*
- *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, alors :*
$$\lambda u_n + \mu v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda l_1 + \mu l_2$$
- *De plus :*
$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2$$
- *Enfin, si $l_1 \neq 0$, la suite (u_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang et :*
$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l_1}$$

Exemples :
⇨ Soit (u_n) une suite réelle positive telle que la suite de terme général $u_n/(1+u_n)$ converge vers 0. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
⇨ On souhaite montrer que la suite de terme général $\sin n$ diverge. Raisonner par l'absurde en supposant qu'elle converge, montrer que la suite de terme général $\cos n$ converge et aboutir à une absurdité.

Proposition 4. *Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{C}$. Alors :*
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\mathrm{Re}\,(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}\,l \ \text{ et } \ \mathrm{Im}\,(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}\,l\right]$$

2.2 Limites infinies

Définition 8. *Soit (u_n) une suite réelle.*

— *On dit que u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque :*

$$\forall m \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad u_n \geqslant m$$

Si tel est le cas, on note :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

— *On dit que u_n tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ lorsque :*

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant N \quad u_n \leqslant M$$

Si tel est le cas, on note :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Ces propriétés sont asymptotiques. De plus u_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si $-u_n$ tend vers $-\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemples :

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $n + \alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Proposition 5. *Si u_n admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors cette limite est unique ; on l'appelle limite de la suite (u_n) et on la note :*

$$\lim_{n\to\infty} u_n$$

Remarques :

⇨ Une suite qui tend vers $+\infty$ est divergente. On dit aussi qu'elle diverge vers $+\infty$.

Exemples :

⇨ Une suite non majorée diverge-t-elle toujours vers $+\infty$? Une suite divergeant vers $+\infty$ est-elle toujours croissante à partir d'un certain rang ?

Proposition 6. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.*

— *Si u_n tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée, alors :*

$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

— *Si u_n tend vers $+\infty$ et (v_n) est minorée par $m > 0$, alors :*

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Proposition 7. *Soit (u_n) une suite réelle.*

— *Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors il existe un rang à partir duquel $u_n > 0$ et :*

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

— *Si (u_n) converge vers 0 et est strictement positive, alors :*

$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

2.3 Limites et relation d'ordre

Proposition 8. *Soit (u_n) une suite réelle admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite.*

— *Si (u_n) est majorée par $M \in \mathbb{R}$, alors $l \leqslant M$.*

— *Si (u_n) est minorée par $m \in \mathbb{R}$, alors $l \geqslant m$.*

Proposition 9. *Soit (u_n) une suite réelle admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ pour limite.*

— *Si M est un réel tel que $l < M$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\forall n \geqslant N \quad u_n \leqslant M$$

— *Si m est un réel tel que $l > m$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\forall n \geqslant N \quad u_n \geqslant m$$

Proposition 10. *Soit (a_n), (b_n) et (u_n) des suites réelles telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leqslant u_n \leqslant b_n$$

On suppose que a_n et b_n admettent la même limite finie $l \in \mathbb{R}$. Alors :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

Exemples :

⇨ Donner le limite éventuelle de la suite de terme général $\frac{E(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

⇨ Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$ telles que $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. Que dire des suites (u_n) et (v_n) ?

Proposition 11. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n$$

— *si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$*

— *si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$*

Exemples :

⇨ Donner la limite éventuelle de la suite de terme général $n + \sin n$.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle telle que la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge vers $\alpha > 0$. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Proposition 12. *Soit (u_n) une suite, $l \in \mathbb{C}$ et (v_n) une suite réelle positive telle que :*
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - l| \leqslant v_n$
- $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors :
$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

Exemples :

⇨ Étudier la convergence de la suite de terme général
$$\frac{\cos 1 + \cos 2 + \cdots + \cos n}{n}$$

⇨ Une suite réelle strictement positive convergeant vers 0 est-elle décroissante à partir d'un certain rang ?

2.4 Théorèmes usuels et limites usuelles

Proposition 13. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles ayant pour limites respectives l_1 et $l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$.*
- *Si $l_1 + l_2$ n'est pas une forme indéterminée :*
$$u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 + l_2$$
- *Si $l_1 l_2$ n'est pas une forme indéterminée :*
$$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1 l_2$$
- *Si $1/l_1$ n'est pas une forme indéterminée :*
$$\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{l_1}$$

Proposition 14. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors :*
$$\frac{1}{n^k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \text{ et } n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Proposition 15. *Soit ω un réel positif. Alors :*
- *Si $\omega > 1$, $\omega^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$*
- *Si $\omega < 1$, $\omega^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*

Proposition 16. *Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que :*
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \omega \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$
Alors :
- *Si $\omega < 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$*
- *Si $\omega > 1$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$*

Exemples :

⇨ Déterminer la limite éventuelle des suites de terme général
$$\frac{e^n}{n!} \qquad \frac{(1+i)^n}{n}$$

Proposition 17. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. On suppose que :*
$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$
avec $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si (u_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{D}_f$ admettant a pour limite, alors :
$$f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

2.5 Suites extraites

Définition 9. *On appelle extractrice toute application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*

Remarques :

⇨ Les applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définies par
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_1(n) = n+1 \qquad \varphi_2(n) = 2n \qquad \varphi_3(n) = 2n+1$$
sont des extractrices.

⇨ Si A est une partie infinie de $\mathbb{N}$, l'énumération de A est une extractrice. Réciproquement, si φ est une extractrice, c'est l'énumération de $\varphi(\mathbb{N})$. En conclusion, se donner une extractrice revient à se donner une partie infinie de $\mathbb{N}$.

Proposition 18. *Si φ est une extractrice :*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) \geqslant n$$

Définition 10. *Soit (u_n) une suite. On appelle suite extraite (ou sous-suite) de (u_n) toute suite du type $\left(u_{\varphi(n)}\right)$ où φ est une extractrice.*

Proposition 19. *Si (u_n) est une suite réelle (resp. complexe) admettant $l \in \overline{\mathbb{R}}$ (resp. $l \in \mathbb{C}$) pour limite, toute sous-suite de (u_n) tend vers l.*

Remarques :

⇨ Pour montrer qu'une suite (u_n) n'est pas convergente, il suffit de trouver deux extractrices φ_1 et φ_2 telles que le suites de terme général $u_{\varphi_1(n)}$ et $u_{\varphi_2(n)}$ convergent vers des limites différentes.

Exemples :

⇨ Montrer que la suite de terme général $\frac{1}{n} + (-1)^n$ diverge.

⇨ Soit (u_n) une suite réelle non majorée. Montrer qu'on peut en extraire une suite divergeant vers $+\infty$.

3 Suites monotones

3.1 Suites monotones

Théorème 1. *Toute suite croissante majorée est convergente.*

Exemples :

⇨ Soit $\alpha > 1$ et (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

Montrer que pour tout $k \geqslant 2$

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$$

En déduire la convergence de la suite (u_n).

⇨ La limite de l'exemple précédent est notée $\zeta(\alpha)$. On définit ainsi une fonction ζ de $]1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ (cette fonction est appelée fonction zéta de Riemann). Montrer que ζ est décroissante sur $]1, +\infty[$.

Proposition 20. *Soit (u_n) une suite croissante.*
- *Si elle est majorée, alors elle est convergente.*
- *Sinon, elle diverge vers $+\infty$.*

Exemples :

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Montrer que $u_{2n} - u_n$ est minoré par un réel $\alpha > 0$. En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

Proposition 21. *Toute suite décroissante minorée est convergente.*

Proposition 22. *Soit (u_n) une suite décroissante.*
- *Si elle est minorée, alors elle est convergente.*
- *Sinon, elle diverge vers $-\infty$.*

3.2 Étude des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$

Exemples :

⇨ Soit $\alpha \geqslant 0$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 = \alpha \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{3}$$

Étudier la convergence de la suite (u_n).

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par $u_0 = \alpha$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \cos(u_n)$. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Remarques :

⇨ Lorsqu'on étudie une suite définie par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, on procède comme suit :
- **Étude de f et tracé de son graphe :**
  On commencera toujours par tracer la graphe de la fonction f en prenant soin de placer correctement ce graphe par rapport à la droite d'équation $y = x$. En pratique, on étudiera les variations de f, ses limites aux bornes du domaine de définition, ainsi que le signe de $f(x) - x$.
- **Conjectures :**
  Remarquons que si la suite (u_n) admet une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$ et que cette limite est dans le domaine de définition de la fonction f que l'on suppose continue, alors l est un point fixe de f. La limite éventuelle de la suite (u_n) est donc à chercher parmi les points fixes de f et les bornes de son domaine de définition (éventuellement $\pm\infty$). En s'aidant du graphe établi plus haut, on fera ensuite des conjectures quant au comportement de la suite (u_n) selon la valeur de u_0.
- **Démonstration des résultats annoncés :**
  Enfin, on démontre rigoureusement ce que l'on a avancé lors de l'étape précédente. Supposons que l'on souhaite prouver que pour tout $\alpha \in I$ (où I est un intervalle), la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ tende vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On procède ainsi :
  - **On prouve que I est stable par f**, c'est-à-dire que $f(I) \subset I$. Lorsque ce n'est pas évident, on en profite pour justifier l'existence de la suite (u_n).
  - **On prouve l'existence d'une limite pour (u_n) par un argument de monotonie avant de calculer cette même limite** :
    - *Si f est croissante sur I :* Dans ce cas, la suite (u_n) sera monotone (mais pas forcément croissante) et c'est la position de u_1 par rapport à u_0, c'est-à-dire le signe de $f(\alpha) - \alpha$, qui déterminera son sens de variation. Étant monotone, elle admet une limite que l'on déterminera en procédant par élimination parmi les limites éventuelles trouvées plus haut.

— *Si f est décroissante sur I :* Dans ce cas, on étudie les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}). Ces suites vérifient une relation de récurrence faisant intervenir $f \circ f$. Comme f est décroissante sur I, on en déduit que $f \circ f$ est croissante sur I. On est donc ramené au cas précédent et on en déduit que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (remarquez qu'il est souvent inutile de déterminer leur monotonie même si l'une sera croissante et l'autre décroissante). Elles admettent donc des limites qui sont à chercher parmi les points fixes de $f \circ f$ et les bornes de I. Si ces deux suites admettent la même limite $l \in \mathbb{R}$ alors (u_n) converge vers l. Dans le cas contraire, la suite (u_n) est divergente.

3.3 Suites adjacentes

Définition 11. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes lorsque :*
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n$
- *(u_n) est croissante et (v_n) est décroissante*
- $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Remarques :

⇨ Si deux suites (u_n) et (v_n) vérifient les deux derniers points, alors elles vérifient le premier point. En théorie il est donc inutile de le vérifier, mais l'usage veut qu'on le fasse.

Proposition 23. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes. Alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$. De plus :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant l \leqslant v_n$$

Exemples :

⇨ Montrer que les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \text{ et } v_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$$

sont adjacentes. En utilisant une comparaison avec des intégrales, montrer qu'elles convergent vers $\ln 2$.

4 Suites équivalentes, suite négligeable devant une autre

4.1 Suites équivalentes

Définition 12. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) lorsqu'il existe une suite (α_n) convergent vers 1 et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$\forall n \geqslant N \quad u_n = \alpha_n v_n$$

Si tel est le cas, on note :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

La propriété « est équivalente à » est asymptotique.

Remarques :

⇨ Il est possible qu'une suite (u_n) soit équivalente à une suite (v_n) sans qu'il n'existe de suite (α_n) convergeant vers 1 telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha_n v_n$.

⇨ Si (u_n) est équivalente à (v_n) et que cette dernière admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors (u_n) admet la même limite. Cependant il est possible que deux suites admettent la même limite sans être équivalentes.

Proposition 24. *La relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.*

Remarques :

⇨ La relation étant symétrique, on dira désormais « les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes » plutôt que « la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) ».

Proposition 25. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Remarques :

⇨ Si $a_0, a_1, \dots, a_p \in \mathbb{C}$ avec $a_p \neq 0$, alors $a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0 \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p n^p$. Si de plus $b_0, b_1, \dots, b_q \in \mathbb{C}$ sont tels que $b_q \neq 0$, alors

$$\frac{a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0}{b_q n^q + \cdots + b_1 n + b_0} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} \cdot n^{p-q}$$

⇨ Contrairement à ce qu'on pourrait être tenté de dire, on n'a pas toujours $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n$.

Exemples :

⇨ Donner des équivalents simples des suites de terme général

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k \quad \text{où } a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k!$$

⇨ Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Proposition 26. *Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{C}^*$. Alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} l \iff u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$

De plus, u_n est équivalent à 0 lorsque n tend vers $+\infty$ si et seulement si la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang.

Remarques :

⇨ Si $l \neq 0$, dire que u_n est équivalent à l signifie que la suite (u_n) converge vers l. On ne conclura donc jamais un raisonnement de la sorte. Si $l = 0$, dire que u_n est équivalent à 0 signifie que la suite (u_n) est nulle à partir d'un certain rang. Si vous obtenez un tel résultat, c'est sûrement que vous avez fait une erreur.

Proposition 27. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$$

- *Alors, il existe un rang à partir duquel (u_n) et (v_n) s'annulent simultanément.*
- *Si de plus elles sont réelles, il existe un rang à partir duquel elles sont de même signe.*

Proposition 28.

- *Soit (a_n), (b_n), (c_n), (d_n) des suites telles que :*

$$a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n \text{ et } c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} d_n$$

Alors :

$$a_n c_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n d_n$$

Si de plus (c_n) et (d_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang :

$$\frac{a_n}{c_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{b_n}{d_n}$$

- *Soit (u_n) et (v_n) deux suites et $\alpha \in \mathbb{R}$. Si u_n^α et v_n^α ont un sens à partir d'un certain rang, alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \implies u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$$

Remarques :

⇨ Les autres opérations usuelles sur les équivalents conduisent le plus souvent à des résultats faux. Il est donc interdit de sommer, d'élever à une puissance dépendant de n et de composer les équivalents.

⇨ Nous utiliserons cependant le fait que si deux suites équivalentes (u_n) et (v_n) tendent vers 0 ou $+\infty$, alors $\ln u_n$ est équivalent à $\ln v_n$. En particulier, si $a_0, a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ avec $a_p > 0$, alors

$$\ln\left(a_p n^p + \cdots + a_1 n + a_0\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} p \ln n$$

Exemples :

⇨ Donner des équivalents simples de

$$\sqrt{n^4 + 2n^2 - 1} \text{ et } \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$$

Remarques :

⇨ **Comparaison série-intégrale** :
Soit f une fonction monotone de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+$, telle que

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ Alors, un encadrement de $f(k)$ par

$$\int_k^{k-1} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

permet de trouver simplement un équivalent de u_n. Cette technique *essentielle* est appelée technique de comparaison série-intégrale.
En suivant cette méthode, montrer que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

4.2 Suite négligeable devant une autre

Définition 13. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est négligeable devant (v_n) lorsqu'il existe une suite (ε_n) convergent vers 0 et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$\forall n \geqslant N \quad u_n = \varepsilon_n v_n$$

Si tel est le cas, on note :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$$

La propriété « est négligeable devant » est asymptotique.

Remarques :

⇨ Si (u_n) est négligeable devant (v_n), il existe un rang à partir duquel u_n est nul dès que v_n est nul.

Proposition 29. *Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Alors :*

$$\left[u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \text{ et } v_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)\right] \implies u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(w_n)$$

Proposition 30. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :*

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarques :

⇨ La suite $(|u_n|)$ est négligeable devant la suite $(|v_n|)$ si et seulement si (u_n) est négligeable devant (v_n).

Exemples :

⇨ Soit (u_n) une suite réelle divergeant vers $+\infty$. Démontrer qu'il existe une suite (v_n), négligeable devant (u_n) qui diverge aussi vers $+\infty$.

Proposition 31.

— *Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$n^a = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^b\right) \iff a < b$$

Autrement dit :

$$\frac{1}{n^a} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^b}\right) \iff a > b$$

— *Soit $(\omega_a, \omega_b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$. Alors :*

$$\omega_a^n = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\omega_b^n\right) \iff |\omega_a| < |\omega_b|$$

— *Soit $\alpha, \beta > 0$ et $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $|\omega| > 1$. Alors :*

$$(\ln n)^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}\left(n^\beta\right) \qquad n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\omega^n\right) \qquad n^\alpha = \underset{n\to+\infty}{o}\left(e^{\beta n}\right)$$

$$\omega^n = \underset{n\to+\infty}{o}(n!) \qquad e^{\beta n} = \underset{n\to+\infty}{o}(n!)$$

Exemples :

⇨ Comparer les suites suivantes données par leur terme général :

$$n^n, \qquad n^{\ln n}, \qquad e^{n^2}, \qquad (\ln n)^{n \ln n}$$

Proposition 32. *Soit (u_n) une suite. Alors :*

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{o}(1) \iff u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Proposition 33.

— *Soit (u_n) une suite. Alors :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \quad \lambda \underset{n\to+\infty}{o}(u_n) + \mu \underset{n\to+\infty}{o}(u_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n)$$

— *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n v_n)$$

cette égalité pouvant se lire dans les deux sens.

— *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Alors :*

$$\underset{n\to+\infty}{o}(u_n) \underset{n\to+\infty}{o}(v_n) = \underset{n\to+\infty}{o}(u_n v_n)$$

Remarques :

⇨ Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. Une suite est négligeable devant (u_n) si et seulement si elle est négligeable devant (v_n).

⇨ Soit (u_n) une suite et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Une suite est négligeable devant (u_n) si et seulement si elle est négligeable devant (λu_n).

Proposition 34. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. Alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \iff u_n = v_n + \underset{n\to+\infty}{o}(v_n)$$

4.3 Suite dominée par une autre

Définition 14. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est dominée par (v_n) lorsqu'il existe une suite bornée (B_n) et un rang $N \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$\forall n \geqslant N \quad u_n = B_n v_n$$

Si tel est le cas, on note :

$$u_n = \underset{n\to+\infty}{O}(v_n)$$

La propriété « est dominée par » est asymptotique.

Proposition 35.

- *Soit (u_n) une suite. Alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(u_n)$$

- *Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Alors :*

$$\left[u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \text{ et } v_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)\right] \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(w_n)$$

  De plus si dans l'hypothèse, un des O est un o, alors (u_n) est négligeable devant (w_n).

Proposition 36. *Soit deux suites (u_n) et (v_n). Alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n) \implies u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$$

Proposition 37. *Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Alors :*

$$u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n) \iff \frac{u_n}{v_n} \text{ est bornée}$$