Cours : Fourzitou

Table des matières

1 Résolution des récurrences linéaires

Exemples :

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0 = a \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n = 5$$

Proposition 1. *Soit $a, b \in \mathbb{C}$ et (E) la récurrence linéaire :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.

— *Si cette équation admet deux racines distinctes r_1 et $r_2 \in \mathbb{C}$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

— *Si cette équation admet une racine double $r \in \mathbb{C}$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\lambda + \mu n)\, r^n$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

Exemples :

⇨ Calculer le n-ième terme de la suite de Fibonacci définie par

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1 \qquad u_1 = -1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad 6u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n = 0$$

Montrer que (u_n) diverge.

⇨ Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0, u_1 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \frac{1}{u_{n+1}^2 u_n}$$

Proposition 2. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et (E) la récurrence linéaire :*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $z^2 = az + b$.

— *Si cette équation admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— *Si cette équation admet une racine double $r \in \mathbb{R}$, alors alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = (\lambda + \mu n)\, r^n$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— *Si cette équation admet deux racines complexes conjuguées $re^{i\omega}$ et $re^{-i\omega}$, alors les solutions de (E) sont les suites (u_n) définies par*

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = [\lambda \cos(\omega n) + \mu \sin(\omega n)]\, r^n$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Remarques :

⇨ Dans le cas où l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, les solutions de (E) peuvent s'écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda \cos(\omega n - \varphi) r^n$$

où $\lambda, \varphi \in \mathbb{R}$.

Exemples :

⇨ Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 1 \quad u_1 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - 4u_n$$

Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $u_n = 0$.

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculer le n-ième terme de la suite (u_n) définie par

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 2\cos(\alpha)\, u_{n+1} - u_n$$

⇨ Donner une base de l'ensemble des suites réelles vérifiant la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

2 Comparaisons de fonctions

2.1 Fonctions équivalentes

Remarques :

⇨ On souhaite dire que deux fonctions f et g sont équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque le quotient $f(x)/g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers a. Cette définition à le défaut de ne pas avoir de sens lorsque g s'annule au voisinage de a. C'est pourquoi, nous utiliserons la définition plus générale suivante :

Définition 1. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ en a lorsqu'il existe une fonction α telle que :*
- *$f(x) = \alpha(x) g(x)$ au voisinage de a*
- *$\alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1$*

On note alors :

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$$

Proposition 3. *Soit f, g et h des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
- *La relation d'équivalence est réflexive :*

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$$

- *La relation d'équivalence est transitive :*

$$\left[f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \text{ et } g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x) \right] \Longrightarrow f(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$$

- *La relation d'équivalence est symétrique :*

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow g(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x)$$

Proposition 4. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
- *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :*

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$$

- *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a, alors :*

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff \left[\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1 \text{ et } f(a) = 0 \right]$$

Remarques :

⇨ Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k x^k$.
—Si $a_m \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_m x^m$. En particulier

$$1 + x^2 \underset{x \to 0}{\sim} 1 \text{ et } 3x + x^3 \underset{x \to 0}{\sim} 3x$$

—Si $a_n \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n x^n$. En particulier

$$1 + x^2 + 3x^3 \underset{x \to +\infty}{\sim} 3x^3$$

On a évidemment le même équivalent en $-\infty$.

⇨ Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
—Si f est continue en 0 et $f(0) \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} f(0)$. En particulier

$$e^x \underset{x \to 0}{\sim} 1 \text{ et } \cos x \underset{x \to 0}{\sim} 1$$

—Si f est dérivable en 0, $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$, alors $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} f'(0)\, x$. En particulier

$$\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x, \qquad \sin x \underset{x \to 0}{\sim} x \text{ et } \operatorname{Arctan} x \underset{x \to 0}{\sim} x$$

⇨ Si f et g sont deux fonctions telles que

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$$

et si $g(x)$ tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a, alors il en est de même pour $f(x)$. Cependant, la réciproque est fausse : il est possible que $f(x)$ et $g(x)$ admettent une même limite $l \in \{0, \pm\infty\}$ lorsque x tend vers a, sans que $f(x)$ et $g(x)$ soient équivalents en a.

Exemples :

⇨ Montrer que $1 - \cos x \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Proposition 5. *Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \neq 0$. Alors*

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} l \iff f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

De plus, $f(x)$ est équivalente à 0 en a si et seulement si la fonction f est identiquement nulle au voisinage de a.

Remarques :

⇨ En particulier, si vous obtenez lors d'un calcul $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} 0$, c'est que vous avez fait une erreur.

Proposition 6. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :*

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$$

Alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe et s'annulent simultanément.

Proposition 7.

— *Soit f_1, g_1, f_2, g_2 des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :*
$$f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) \text{ et } f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$$
Alors :
$$f_1(x) f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) g_2(x)$$
Si de plus, f_2 et g_2 ne sont pas identiquement nulles au voisinage de a :
$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$

— *Soit f, g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $f(x)^\alpha$ et $g(x)^\alpha$ aient un sens au voisinage de a. Alors :*
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$$

Remarques :

⇨ Attention, il n'est pas possible d'ajouter des équivalents. Par exemple
$$1 + x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \text{ et } -1 \underset{x\to 0}{\sim} -1$$
Pourtant $(1 + x) - 1 = x$ n'est pas équivalent à $1 - 1 = 0$ en 0.

⇨ De même, il n'est pas possible de composer des équivalents. Par exemple
$$1 + x \underset{x\to +\infty}{\sim} x$$
Pourtant e^{1+x} n'est pas équivalent à e^x en $+\infty$. En effet, $e^{x+1}/e^x = e \xrightarrow[x\to+\infty]{} e \neq 1$.

⇨ Soit f et g sont deux fonctions strictement positives, équivalentes au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si ces fonctions tendent vers $+\infty$ ou 0 lorsque x tend vers a, alors $\ln(f(x))$ et $\ln(g(x))$ sont équivalents en a. En particulier
$$\ln(1 + x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln x \text{ et } \ln(\sin x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \ln x$$

Exemples :

⇨ Donner un équivalent en 0 de $\ln(1 + x)\sin x$.

⇨ Chercher la limite à droite en 0 de
$$\frac{\ln(1 + x)}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe xe^x. Montrer que f est bijective, puis donner la limite et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$.

Proposition 8. *Soit $\overline{x}$ une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f_1, f_2 deux fonctions définies au voisinage de $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :*
$$\left[f_1(x) \underset{x\to b}{\sim} f_2(x) \text{ et } \overline{x}(t) \xrightarrow[t\to a]{} b\right] \Longrightarrow f_1(\overline{x}(t)) \underset{t\to a}{\sim} f_2(\overline{x}(t))$$

Exemples :

⇨ Donner un équivalent en 0 de $\ln(1 + \tan x)$, puis de $\operatorname{Arcsin}(-1 + x) + \frac{\pi}{2}$.

2.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ en a lorsqu'il existe une fonction ε telle que :*

— $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$ *au voisinage de a*

— $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

On note alors :
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$$

Proposition 9. *Soit f, g et h des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La relation « est négligeable devant » est transitive :*
$$\left[f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \text{ et } g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))\right] \Longrightarrow f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$$

Proposition 10. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

— *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :*
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

— *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a, alors :*
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \iff \left[\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \text{ et } f(a) = 0\right]$$

Proposition 11. *Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.*

— *On a :*
$$x^{\alpha_1} = \underset{x\to 0}{o}(x^{\alpha_2}) \iff \alpha_1 > \alpha_2$$

— *De plus :*
$$x^{\alpha_1} = \underset{x\to+\infty}{o}(x^{\alpha_2}) \iff \alpha_1 < \alpha_2$$

Proposition 12. *Soit $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Alors :*
$$x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\alpha x}) \qquad (\ln x)^\gamma = \underset{x\to+\infty}{o}(x^\beta)$$

Proposition 13. *Soit f une fonction définie au voisinage de a. Alors :*

$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(1) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Proposition 14.
- *Soit g une fonction définie au voisinage de a. Alors :*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda \underset{x\to a}{o}(g(x)) + \mu \underset{x\to a}{o}(g(x)) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$$

- *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors :*

$$f(x) \underset{x\to a}{o}(g(x)) = \underset{x\to a}{o}(f(x)\, g(x))$$

cette égalité pouvant se lire dans les deux sens.
- *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors :*

$$\underset{x\to a}{o}(f(x)) \underset{x\to a}{o}(g(x)) = \underset{x\to a}{o}(f(x)\, g(x))$$

Proposition 15.
- *Soit f et g deux fonctions équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, une fonction est négligeable devant f en a si et seulement si elle est négligeable devant g en a.*
- *Soit f une fonction définie au voisinage de a et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, une fonction est négligeable devant f en a si et seulement si elle est négligeable devant λf en a.*

Proposition 16. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :*

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$$

2.3 Fonction dominée par une autre

Définition 3. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est dominée par $g(x)$ en a lorsqu'il existe une fonction B telle que :*
- *$f(x) = B(x)\, g(x)$ au voisinage de a*
- *B est bornée au voisinage de a*

On note alors :

$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$$

Proposition 17. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
- *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :*

$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de } a$$

- *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a, alors :*

$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)) \Longleftrightarrow \left[\frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de } a \text{ et } f(a) = 0\right]$$

Proposition 18. *Soit f une fonction définie au voisinage de a. Alors :*

$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(1) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \text{ est bornée au voisinage de } a$$