Prop 15 :

Preuve : Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

On suppose que

$$\forall x \in]a,b[\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

Donc $m \leqslant f'(c) \leqslant M$. Donc

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant M$$

Or $b-a \geqslant 0$. Donc

$$m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$$

Prop 16 :

Preuve : Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur I telle qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in I \quad |f'(x)| \leqslant M$$

Montrons que f est M-lipschitzienne.

Soit $x, y \in I$. Mq $|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$.

- Si $x=y$: C'est immédiat car $|f(x)-f(y)| = 0$
- Si $x<y$: D'après le théorème des accroissements finis, puisque f est continue sur $[x,y]$ (car dérivable sur $[x,y]$) et dérivable sur $]x,y[$, il existe $c \in]x,y[$ tel que

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c)$$

Donc $$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |f'(c)| \leqslant M$$

Donc $$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$$

- Si $y<x$: En appliquant ce qui précède, on a

$$|f(y)-f(x)| \leqslant M|y-x|$$

Donc $$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$$

Donc f est M-lipschitzienne.

On admet que le théorème reste vrai lorsque f est à valeurs dans $\mathbb{C}$.

__Remarques__ : (i) Soit f une fonction de classe C^1 sur un segment $[a,b]$. Alors f' est continue sur le segment $[a,b]$. Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :

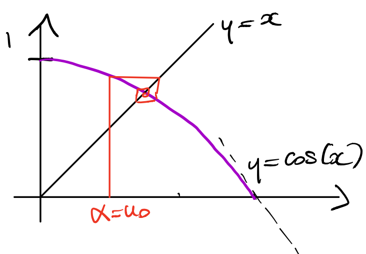
$$\forall x \in [a,b] \quad |f'(x)| \leqslant M.$$

Donc d'après l'inégalité des accroissements finis, f est M-lipschitzienne.

(ii) On dit qu'une fonction f est contractante lorsqu'elle est M-lipschitzienne avec $M<1$.

__Exemple__ : (i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par

$$u_0 = \alpha \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \cos(u_n)$$



Mq (u_n) converge vers l'unique point fixe de cos.

- Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \cos(x) - x$$

D'après les théorèmes usuels, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -\sin(x) - 1 \leqslant 0$$

De plus $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = 0 \iff -\sin(x) - 1 = 0$
$\iff \sin(x) = -1$
$\iff x \equiv -\frac{\pi}{2} \; [2\pi]$

Donc g' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle non trivial. Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Or

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \cos(x) - x \leqslant 1 - x \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$$

Donc $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$. De plus

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad g(x) = \cos x - x \geqslant -1 - x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$$

Donc $g(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$. Donc, puisque g est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule sur $\mathbb{R}$. De plus g est strictement décroissante donc g s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$. On note ℓ cette valeur. Donc

$$g(\ell) = 0 \quad \text{donc} \quad \cos(\ell) = \ell$$

- $\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$

En effet $u_0 \in \mathbb{R}$ donc $u_1 = \cos(u_0) \in [-1, 1]$. Or

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant -1 \leqslant 0 \leqslant 1 \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Comme cos est croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ et décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, on en déduit que

$$0 \leqslant \cos(1) \leqslant u_2 = \cos(u_1) \leqslant 1$$

Par récurrence immédiate, comme : $\forall x \in [0,1] \quad \cos(x) \in [0,1]$ on en déduit que

$$\forall n \geqslant 2 \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \cos(x).$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = -\sin(x)$

Or sin est croissante sur $[0, \pi/2]$, donc sur $[0,1]$. Donc f' est décroissante sur $[0,1]$. On en déduit que :

$$\forall x \in [0,1] \quad -\sin(1) \leqslant f'(x) \leqslant 0$$
$$|f'(x)| \leqslant \underbrace{\sin(1)}_{=M} < 1$$

Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$\forall x, y \in [0,1] \quad |\cos(x) - \cos(y)| \leqslant M|x-y|$$

En particulier :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad |\cos(u_n) - \cos(\ell)| \leqslant M\,|u_n - \ell|$$
$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant M\,|u_n - \ell|$$

Par récurrence immédiate : $\forall n \geqslant 2 \quad |u_n - \ell| \leqslant M^{n-2}|u_2 - \ell|$

Or $0 \leq M < 1$, donc $M^{n-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Donc
$$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$$

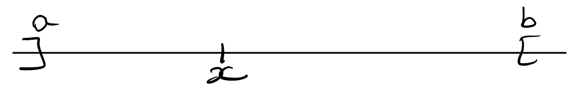
2.3

Prop 17 :

Preuve : (i) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

$\Rightarrow$ On suppose que f est croissante. Montrons que :
$$\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0.$$

Soit $x \in I$. (On suppose que x n'est pas la borne supérieure de I).



$(I =]a,b[)$

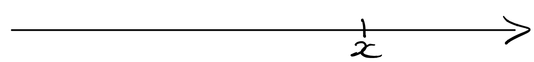
Alors :
$$\forall y \in]x,+\infty[\cap I \qquad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0.$$

En effet, soit $y \in]x,+\infty[\cap I$. Alors $x \leq y$. Donc, $f(x) \leq f(y)$ car f est croissante. Donc
$$f(y)-f(x) \geq 0$$

Or $y-x>0$, donc
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0.$$

On fait tendre y vers x et on obtient, par passage à la limite
$$f'(x) \geq 0.$$

. Si x est la borne supérieure de I



Montrons que :
$$\forall y \in]-\infty,x[\cap I \quad \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0.$$

En effet, soit $y \in]-\infty,x[\cap I$. Alors $y \leq x$. Or f est croissante sur I, donc
$$f(y) \leq f(x)$$