Aux Lazaristes *Sup1 année 2019–2020*

Devoir maison n° 4 bis

Le corrigé sera mis en ligne le 22 novembre

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

1. **Préliminaires**

(a) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad g(t) = \sin t - \frac{2}{\pi} t$$

D'après les théorèmes usuels, g est dérivable et :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad g'(t) = \cos t - \frac{2}{\pi}$$

g' est donc strictement décroissante sur $[0, \pi/2]$. De plus, puisque $0 < 2/\pi < 1$, $g'(0) > 0$ et $g'(\pi/2) < 0$. On en déduit qu'il existe (théorème des valeurs intermédiaires) un unique (par stricte monotonie) $t_0 \in [0, \pi/2]$ tel que $g'(t_0) = 0$. On obtient donc le signe de g', puis le tableau de variation de g :

t	0		t_0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On lit donc sur le tableau de variations que :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad g(t) \geqslant 0$$

c'est-à-dire :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$$

L'étude de la fonction $x \mapsto x - \sin x$ permet de montrer facilement que pour tout $x \geqslant 0$: $\sin x \leqslant x$.

(b) i. Sur $\mathbb{R}_+^*$ comme sur $\mathbb{R}_-^*$, l'équation (E') s'écrit $y'(t) + \frac{1}{2t} y(t) = 0$. Ses solutions sont les fonctions d'expression $\lambda_i \exp(-F(t))$, où F est une primitive de $t \mapsto \frac{1}{2t}$. Nous choisissons $F(t) = \frac{1}{2} \ln |t|$, de sorte que les solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions d'expression

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{-t}} ,$$

et que les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions d'expression

$$\frac{\lambda_2}{\sqrt{t}} ,$$

où λ_1 et λ_2 sont deux constantes réelles.

ii. Soit y une solution définie sur $\mathbb{R}$. Ses restrictions à $\mathbb{R}_-^*$ et à $\mathbb{R}_+^*$ ont les formes décrites ci-dessus. Nous en déduisons que (attention à ne pas dire que y tend vers $+\infty$ en zéro, sans tenir compte des différents cas possibles) :

$$\lim_{t \to 0,\, t<0} y(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \lambda_1 > 0, \\ 0 & \text{si } \lambda_1 = 0, \\ -\infty & \text{si } \lambda_1 < 0. \end{cases}$$

Comme y doit être continue en zéro à gauche (donc avoir une limite finie en zéro à gauche), il faut que $\lambda_1 = 0$. De même, il faut que $\lambda_2 = 0$. Alors y restreinte à $\mathbb{R}^*$ est la fonction nulle, et la continuité de y en zéro impose que $y(0) = 0$, donc que y soit la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, la fonction nulle est solution.

Finalement, il n'existe qu'une seule solution de (E') sur $\mathbb{R}$: la fonction nulle.

2. **Symétries de** (E)

(a) Posons $z = -y$. Alors $z' = -y'$ et $\sin(z) = -\sin(y)$, d'où nous déduisons que

$$2tz'(t) + \sin(z(t)) = -\left[2ty'(t) + \sin(y(t))\right] = 0 ,$$

puisque y est solution de (E). La fonction $-y$ est donc solution de (E) si y l'est.

(b) De même, nous calculons $z'(t) = -y'(-t)$, donc

$$\begin{aligned} 2tz'(t) + \sin(z(t)) &= -2ty'(-t) + \sin(y(-t)) , \\ &= 2(-t)y'(-t) + \sin(y(-t)) , \\ &= 0 , \end{aligned}$$

puisque y est solution de (E) [nous reconnaissons l'équation (E), écrite en la variable $-t$].

3. **Solutions sur** $\mathbb{R}$

(a) Si y est une solution constante, alors $y' = 0$, et y doit satisfaire $\sin(y(t)) = 0$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y(t) = k\pi$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, une telle fonction est constante, et solution de (E).

(b) L'équation (E) écrite pour $t = 0$ donne $\sin(y(0)) = 0$. Nous en déduisons que $y(0) \in \pi\mathbb{Z}$.

(c) i. Nous avons $z'(t) = y'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $\sin(z(t)) = \sin(y(t) - k\pi) = \sin(y(t))$, puisque k est un nombre pair. Par suite, z est solution de (E).

L'affirmation portant sur la limite de a en zéro est une reformulation de la continuité de a en zéro (vraie, puisque z est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que solution d'une équation différentielle).

ii. Si z prenait des valeurs strictement négatives sur $\mathbb{R}_+^*$, le théorème des valeurs intermédiaires affirme qu'elle s'annulerait au moins une fois sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, la restriction de z à $\mathbb{R}_+^*$ couperait le graphe d'une autre solution sur $\mathbb{R}_+^*$: la fonction nulle. Cette situation est exclue par le théorème de Cauchy et Lipschitz.

iii. Comme z est dans $]0, \frac{\pi}{2}]$ pour tout $t \in]0, \eta]$, nous en déduisons que : $\sin(z(t)) \geq \frac{2}{\pi} z(t)$ sur $]0, \eta]$, donc que :

$$\forall t \in]0, \eta] \quad 2tz'(t) + \frac{2}{\pi} z(t) \leq 2tz'(t) + \sin(z(t)) = 0\,.$$

iv. L'inégalité ci-dessus se réécrit sous la forme

$$\forall t \in]0, \eta], \quad z'(t) + \frac{1}{\pi t} z(t) \leq 0\,. \qquad (I)$$

Ceci est une inégalité différentielle, que nous pouvons résoudre par la technique du cours : nous obtenons une inégalité équivalente en multipliant (I) par le nombre strictement positif $\exp(F(t))$, où F désigne une primitive de $t \mapsto \frac{1}{\pi t}$ sur $]0, \eta]$. Nous choisissons $F(t) = \frac{1}{\pi} \ln t$, de sorte que

$$\exp(F(t)) \left[z'(t) + \frac{1}{\pi t} z(t) \right] = t^{\frac{1}{\pi}} z'(t) + \frac{1}{\pi} t^{\frac{1}{\pi} - 1} z(t)$$

soit l'expression dérivée de $t \mapsto t^{\frac{1}{\pi}} z(t)$. L'inégalité (I) est donc équivalente au fait que

la fonction $t \mapsto t^{\frac{1}{\pi}} z(t)$ est décroissante sur $]0, \eta]$.

En particulier, $t^{\frac{1}{\pi}} z(t) \geq \eta^{\frac{1}{\pi}} z(\eta)$ pour tout $t \in]0, \eta]$. En posant $C = \eta^{\frac{1}{\pi}} z(\eta)$, qui est strictement positive, cette inégalité se réécrit :

$$\forall t \in]0, \eta] \quad z(t) \geqslant \frac{C}{t^{\frac{1}{\pi}}}\,.$$

Comme $C > 0$, la limite lorsque t tend vers zéro (à droite) de $\frac{C}{t^{\frac{1}{\pi}}}$ vaut $+\infty$, et par suite

$$\lim_{t \to 0^+} z(t) = +\infty\,,$$

ce qui contredit la question 3.c.i.

v. Nous nous ramenons au cas précédent en fabriquant une solution y de (E) pour laquelle il existe $t_1 > 0$ tel que $y(t_1) > 0$.
— Si $t_0 > 0$ et $z(t_0) < 0$, nous posons $y = -z$, qui est encore solution de (E) d'après la question 3.2.1 (ici, $t_1 = t_0$).
— Si $t_0 < 0$ et $z(t_0) > 0$, nous posons $y : t \mapsto z(-t)$, qui est encore solution de (E) d'après la question 3.2.1 (ici, $t_1 = -t_0$).
— Enfin, si $t_0 < 0$ et $z(t_0) < 0$, nous posons $y : t \mapsto -z(-t)$, qui est encore solution de (E) d'après la question 3.2.1 (ici, $t_1 = -t_0$).

(d) i. Nous avons $z'(t) = y'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $\sin(z(t)) = \sin(y(t) - k\pi) = -\sin(y(t))$, puisque k est un nombre impair. Par suite, z est solution de (E'').

ii. Il s'agit du même argument qu'à la question 3.c.ii : le théorème de Cauchy et Lipschitz, appliqué cette fois à l'équation différentielle (E'') (et admis bien sûr).

iii. Comme $z > 0$ pour tout $t > 0$, nous déduisons que $\sin(z(t)) \leq z(t)$ sur $]0, \eta]$ (en fait, sur $\mathbb{R}_+^*$), donc que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad 2tz'(t) - z(t) \leq 2tz'(t) - \sin(z(t)) = 0\,.$$

iv. L'inégalité ci-dessus se réécrit sous la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad z'(t) - \frac{1}{2t} z(t) \leq 0\,. \qquad (I')$$

Comme à la question 3.c.iv, nous obtenons une inégalité équivalente en multipliant (I') par le nombre strictement positif $\exp(G(t))$, où G désigne une primitive de $t \mapsto -\frac{1}{2t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Nous choisissons $G(t) = -\frac{1}{2} \ln t$, de sorte que

$$\exp(G(t)) \left[z'(t) - \frac{1}{2t} z(t) \right] = \frac{z'(t)}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2t\sqrt{t}} z(t)$$

soit l'expression dérivée de $t \mapsto \frac{z(t)}{\sqrt{t}}$. L'inégalité (I') est donc équivalente au fait que

la fonction $t \mapsto \frac{z(t)}{\sqrt{t}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

En particulier, $\frac{z(t)}{\sqrt{t}} \geq \frac{z(1)}{\sqrt{1}} = z(1)$ pour tout $t \in]0, \eta]$. En posant cette fois $C = z(1)$, qui est strictement positive, cette inégalité se réécrit :

$$\forall t \in]0, 1], \quad z(t) \geq C\sqrt{t}\,.$$

Ici, les arguments diffèrent de l'étude du cas précédent : la contradiction va venir du fait qu'une fonction z vérifiant $z(t) \geqslant C\sqrt{t}$ pour $t \in]0, 1]$ avec $C > 0$ ne peut pas être dérivable en zéro. En effet, son taux d'accroissement vérifie

$$\forall t \in]0, 1], \quad \frac{z(t) - z(0)}{t - 0} = \frac{z(t)}{t} \geq \frac{C}{\sqrt{t}}\,.$$

Comme $C > 0$, la limite en zéro du membre de droite est $+\infty$, ce qui contredit la dérivabilité de z en zéro, donc contredit le fait que z soit solution d'une équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}$.

v. Il suffit de répéter, mot pour mot, les arguments de la question 3.c.v.