Exercices : Révisions d'analyse

1 Fonctions numériques

1.1 Monotonie et théorèmes usuels

Donner la monotonie (si possible sans dériver) des fonctions d'expressions :

$$e^{-1/x^2} \qquad e^{1/x^3} \qquad x\ln(\cos x) \text{ sur } \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$$

$$x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) \text{ sur }]1,+\infty[\qquad \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}$$

2 Limites

2.1 Calcul de limites en $+\infty$

Déterminer les limites, si elles existent, en $+\infty$ des fonctions d'expressions :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} \qquad \sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x} \qquad \frac{\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$$

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} \qquad \frac{\sin x}{x} \qquad \frac{(x^x)^x}{x^{(x^x)}}$$

$$\frac{a^{(b^x)}}{b^{(a^x)}} \quad \text{où } 1<a<b \qquad \frac{a^{(a^x)}}{x^{(x^a)}} \quad \text{où } a>1$$

2.2 Calcul de limites en 0

Déterminer les limites, si elles existent, en 0 des fonctions d'expressions :

$$\frac{\ln(1+\sin x)}{x} \qquad \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} \qquad x^x \qquad |\ln x|^x$$

$$\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} \qquad (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} \qquad \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

2.3 Calcul de limites

Déterminer les limites, si elles existent, en 1 des fonctions d'expressions :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$$

Déterminer les limites, si elles existent, des fonctions d'expressions :

$$\frac{\sin x-\cos x}{x-\frac{\pi}{4}} \quad \text{en } \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\sin(3x)}{1-2\cos x} \quad \text{en } \frac{\pi}{3}$$

3 Continuité

3.1 Résolution d'une équation

Résoudre, dans $\mathbb{R}_+^*$, l'équation :

$$\sqrt{x}+x^\pi=2$$

4 Dérivation

4.1 Fonction définie par morceaux

On considère une fonction f dérivable sur le segment $[0,1]$ avec $f(0)=f(1)$. La fonction g définie par :

$$g(x)=\begin{cases} f(2x) & \text{si } 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

est-elle continue ? dérivable ? Si non, quelles hypothèses faut-il ajouter pour que g soit dérivable sur $[0,1]$?

4.2 Dérivation et symétries

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. On suppose que f est paire. Que peut-on dire de f' ?
2. Même question lorsque f est impaire ou périodique.
3. Réciproquement, on suppose que f' est impaire (resp. paire, périodique). Que peut-on dire de f ?

4.3 Études de variations

Étudier les variations des fonctions suivantes :

$$x\mapsto \frac{\ln x}{x} \text{ et } x\mapsto \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

4.4 Une fonction dont la dérivée n'est pas continue

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x)=\begin{cases} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Étudier la continuité de f
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
3. Montrer que f' n'est pas continue en 0.

4.5 Calculs de dérivées n-ièmes

Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions d'expressions :

$$x \mapsto x^k \quad \text{où } k \in \mathbb{N} \qquad x \mapsto \sin x \qquad x \mapsto \cos x$$
$$x \mapsto \frac{1}{x^k} \quad \text{où } k \in \mathbb{N} \qquad x \mapsto x^\alpha \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R}$$

5 Intégration

5.1 Calcul de primitives

Donner le domaine de définition et calculer les primitives suivantes :

$$\int \left(x^2+x+1\right) e^x \, \mathrm{d}x \qquad \int \left(x^2-1\right) \cos x \, \mathrm{d}x \qquad \int x^3 \ln x \, \mathrm{d}x$$
$$\int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x \qquad \int \sin x \cos^2 x \, \mathrm{d}x \qquad \int \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$$
$$\int \frac{x}{x^2+1} \, \mathrm{d}x \qquad \int \frac{1}{x \ln x} \, \mathrm{d}x \qquad I_n = \int \ln^n x \, \mathrm{d}x \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N})$$

5.2 Intégrales de Wallis

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n et J_n par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \, \mathrm{d}t \qquad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = J_n$.
2. Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont positives et décroissantes. Calculer I_0 et I_1.
3. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$
4. En déduire que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$
5. En déduire que :
$$I_n \underset{n \to \infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$
c'est-à-dire que la suite de terme général $I_n \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$ converge vers 1.

5.3 Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit g la fonction d'expression :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^t}{1 + x \sin t} \, \mathrm{d}t$$

1. Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que g est décroissante.

5.4 Sommes de Riemann de fonctions monotones

Soit f une fonction continue et croissante sur $[0,1]$. On définit la suite $(u)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a :
$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right)$$
2. En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:
$$u_n - \frac{1}{n}\left(f(1) - f(0)\right) \leqslant \int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t \leqslant u_n$$
3. En déduire que la suite $(u)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\int_0^1 f(t) \, \mathrm{d}t$. En donner une interprétation géométrique.
4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(v)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} k^\alpha$$
Montrer que :
$$v_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$
c'est-à-dire que la suite de terme général :
$$v_n \frac{\alpha+1}{n^{\alpha+1}}$$
converge vers 1.