EXERCICES : RÉELS

1 Inégalités

1.1 Inégalités

1. Montrer que pour $a, b, c \in \mathbb{R}_+$
$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right) \geqslant 8abc$$
2. Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leqslant b$, on a
$$\frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{b} \leqslant \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leqslant \frac{1}{8} \cdot \frac{(b-a)^2}{a}$$
3. Montrer que si $a, b, x, y \in \mathbb{R}_+^*$ sont tels que $a+b=1$, alors :
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} \geqslant \frac{1}{ax+by}$$

1.2 Puissances

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Montrer que
$$(x+y)^{\frac{1}{n}} \leqslant x^{\frac{1}{n}} + y^{\frac{1}{n}}$$
2. Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(1+a)^n \geqslant 1+na$.
3. Soient a et b deux nombres réels tels que $0 \leqslant a \leqslant b$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$n(b-a)a^{n-1} \leqslant b^n - a^n \leqslant n(b-a)b^{n-1}$$
4. Soient $a, b, c \in [0, 1]$. Montrer qu'au moins un des trois nombres réels
$$a(1-b), \quad b(1-c), \quad c(1-a)$$
est inférieur à $\frac{1}{4}$.

1.3 Système non linéaire

Soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = n$$
Montrer que $x_i = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

1.4 Système non linéaire

On suppose que $(x, y, z, t) \in {\mathbb{R}^*}^4$ vérifie le système
$$\begin{cases} x + y + z = t \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{t} \end{cases}$$
Établir que $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$, et en déduire la forme générale des solutions du système ci-dessus.

2 Archimédisme, partie entière

2.1 Autour de la partie entière

Soient x et y deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que
$$E(x+y) \geqslant E(x) + E(y)$$
Y a-t-il des cas d'égalité ? D'inégalité stricte ?
2. Montrer que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

2.2 Calcul de somme

1. Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad E(x) + E(-x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$
2. En déduire que si $p, q \in \mathbb{N}^*$ sont premiers entre eux
$$\sum_{k=1}^{q-1} E\left(k \cdot \frac{p}{q}\right) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

3 Propriété de la borne supérieure

3.1 Comparaison de deux ensembles

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que
$$\forall (a, b) \in A \times B \quad a \leqslant b$$

1. Montrer que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent et que $\sup(A) \leqslant \inf(B)$.
2. Si l'on suppose maintenant que quel que soit $(a, b) \in A \times B$ on a $a < b$, peut-on en conclure que $\sup(A) < \inf(B)$?

3.2 Borne supérieure

Soit A une partie bornée non vide de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup(A) - \inf(A)$$

3.3 Calcul de bornes supérieures

Déterminer, si elles ou ils existent, les bornes supérieure, bornes inférieure, plus grands élément, plus petits élément des parties de $\mathbb{R}$ suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \left\{\frac{1}{n} + \frac{1}{p} : (n,p) \in \mathbb{N}^{*2}\right\} \\ B &= \left\{\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}^*\right\} \\ C &= \left\{\frac{1}{n} + (-1)^p : (n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}\right\} \end{aligned}$$

3.4 Bornes supérieures

Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées. Soit λ un nombre réel. On pose :

$$\begin{aligned} C &= \{a+b : a \in A \quad b \in B\} \\ D &= \{\lambda \cdot a : a \in A\} \\ E &= \{a \cdot b : a \in A \quad b \in B\} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\sup(C)$ existe et vaut $\sup(A) + \sup(B)$.
2. Que peut-on dire de l'existence et de la valeur de $\sup(D)$, $\sup(E)$? On pourra formuler des hypothèses supplémentaires adéquates sur A et B.

3.5 Un théorème de point fixe

Soient $I = [a,b]$ avec $a < b$ et soit $f : I \to I$ une application croissante. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(c) = c$. Considérer pour cela la partie

$$A = \{x \in I,\ f(x) > x\}.$$

Quelle est l'interprétation géométrique de cette propriété en termes du graphe de f ?

3.6 Intervalle

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Montrer que

$$I + J = \{x + y : x \in I \text{ et } y \in J\}$$

est un intervalle.

4 Rationnels, irrationnels

4.1 Rationnels et irrationnels

1. Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Peut-on affirmer que $a+b$ (respectivement $a \times b$) appartient à $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$? Et si $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$?
2. En utilisant seulement le fait que $\sqrt{2}$ est irrationnel, montrer par l'absurde que $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ et $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.

4.2 Racine carrée

1. Pour $a \in [1, +\infty[$, simplifier $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.
2. Résoudre l'équation $\sqrt{x + 3 - 4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x-1}} = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.