Exercice 2.2

Soit (E) l'équation différentielle

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad (2x+1)y''(x)+(4x-2)y'(x)-8y(x)=0$$

. On commence par chercher une solution particulière de (E).
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On définit la fonction y sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad y(x)=e^{\alpha x}$$

Alors y est dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad y'(x)=\alpha e^{\alpha x}$$
$$y''(x)=\alpha^2 e^{\alpha x}$$

Donc :

y est solution de (E)

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad (2x+1)\alpha^2e^{\alpha x}+(4x-2)\alpha e^{\alpha x}-8e^{\alpha x}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad \left((2x+1)\alpha^2+(4x-2)\alpha-8\right)\underbrace{e^{\alpha x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad (2\alpha^2+4\alpha)x+(\alpha^2-2\alpha-8)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha^2+4\alpha=0\\ \alpha^2-2\alpha-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\alpha(\alpha+2)=0\\ \alpha^2-2\alpha-8=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha=-2$$

Donc $x\to e^{-2x}$ est une solution de (E).

. On cherche maintenant l'ensemble des solutions de (E) en utilisant la méthode de la variation de la constante.
Soit y une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit c la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad c(x)=y(x)e^{2x}$$

Alors, puisque y est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, il en est de même pour c. Comme de plus

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad y(x)=c(x)e^{-2x}$$

on en déduit que :

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad y'(x)=c'(x)e^{-2x}-2c(x)e^{-2x}$$
$$y''(x)=c''(x)e^{-2x}+2(-2)c'(x)e^{-2x}+(-2)^2c(x)e^{-2x}$$

Donc

y est solution de (E)

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad (2x+1)y''(x)+(4x-2)y'(x)-8y(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad \left[(2x+1)\left(c''(x)-4c'(x)+4c(x)\right)+(4x-2)\left(c'(x)-2c(x)\right)-8c(x)\right]\underbrace{e^{-2x}}_{\neq 0}=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad (2x+1)c''(x)+\left(-4(2x+1)+2(2x-1)\right)c'(x)+\left(4(2x+1)-4(2x-1)-8\right)c(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\mathbb{R} \quad (2x+1)c''(x)-(4x+6)c'(x)=0$$

On considère l'équation différentielle (E_2)

$$(E_2) \quad \forall x\in I \quad (2x+1)f'(x)-(4x+6)f(x)=0$$

Or : $\forall x\in\mathbb{R} \quad 2x+1 \Leftrightarrow x=-1/2$
Cette équation est donc résolue sur $]-\infty,-1/2[$ et sur $]-1/2,+\infty[$
On commence par la résoudre sur $]-\infty,-1/2[$:

Soit f une fonction dérivable sur $]-\infty,-1/2[$. Alors

f est solution de (E_2)

$$\Leftrightarrow \forall x\in\,]-\infty,-1/2[\quad (2x+1)f'(x)-(4x+6)f(x)=0$$

$$\Leftrightarrow \forall x\in\,]-\infty,-1/2[\quad f'(x)-\frac{4x+6}{2x+1}f(x)=0$$

Or

$$\begin{array}{r|l} 4X+6 & 2X+1 \\ \hline \underline{4X+2} & 2 \\ 4 & \end{array}$$

Donc $\frac{4x+6}{2x+1} = 2 + \frac{4}{2x+1}$

donc $\int -\frac{4x+6}{2x+1}\,dx = -2x - \int \frac{4\,dx}{2x+1}$

$= -2x - 2\ln|2x+1|$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,-1/2[\quad f'(x)e^{-2x-2\ln|2x+1|} - \frac{4x+6}{2x+1} f(x) e^{-2x-2\ln|2x+1|} = 0$

$\Leftrightarrow \forall x \in]-\infty,-1/2[\quad \frac{d}{dx}\left(f(x)e^{-2x-2\ln|2x+1|}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]-\infty,-1/2[\quad f(x).e^{-2x-2\ln|2x+1|} = c$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]-\infty,-1/2[\quad f(x) = c\,e^{2x}.e^{\ln((2x+1)^2)}$

$\Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in]-\infty,-1/2[\quad f(x) = c(2x+1)^2e^{2x}$

Sur $]-1/2,+\infty[$, on trouve de même que les solutions sont les fonctions $x \longrightarrow c(2x+1)^2e^{2x}$.

Il reste à résoudre (E_2) sur $\mathbb{R}$.

Analyse : Soit f une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$. Alors f est solution de (E_2) sur $]-\infty,-1/2[$ et sur $]-1/2,+\infty[$. Il existe donc $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que :

$\forall x \in]-\infty,-1/2[\quad f(x) = c_1(2x+1)^2e^{2x}$

$\forall x \in]-1/2,+\infty[\quad f(x) = c_2(2x+1)^2e^{2x}$

De plus, en $-1/2$, on obtient $0f'(-1/2) - 4f(-1/2) = 0$.
Donc $f(-1/2) = 0$. On a :

$c_1(2x+1)^2e^{2x} \xrightarrow[x<-1/2]{x\to-1/2} 0$

$c_2(2x+1)^2e^{2x} \xrightarrow[x>-1/2]{x\to-1/2} 0$

Donc la continuité de f en $-1/2$ n'impose aucune condition sur c_1 et c_2.

On a de plus, pour $h>0$

$\frac{f(-1/2+h)-f(-1/2)}{h} = \frac{c_2(2h)^2e^{-1+2h}}{h} = 4c_2 h e^{-1+2h} \xrightarrow[h>0]{h\to0} 0$

De même, pour $h<0$

$\frac{f(-1/2+h)-f(-1/2)}{h} = 4c_1 h e^{-1+2h} \xrightarrow[h<0]{h\to0} 0$

On en déduit que $f'(0)=0$. Et la dérivabilité de f en 0 n'impose aucune condition sur c_1 et c_2.

Synthèse : Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. On définit f sur $\mathbb{R}$ par :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} c_1(2x+1)^2e^{2x} & \text{si } x \leq -1/2 \\ c_2(2x+1)^2e^{2x} & \text{si } x > -1/2 \end{cases}$

Alors f est dérivable sur $]-\infty,-1/2[$ et sur $]-1/2,+\infty[$. Les calculs fait lors de l'analyse montrent que f est dérivable en $-1/2$ et que $f'(-1/2)=0$.
f vérifie (E_2) sur $]-\infty,-1/2[$ et sur $]-1/2,+\infty[$. De plus, en $-1/2$

$0.f'(-1/2) - 4\underbrace{f(-1/2)}_{=0} = 0$

Donc f est solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions de (E_2) sont les fonctions

$x \longrightarrow \begin{cases} c_1(2x+1)^2e^{2x} & \text{si } x \leq -1/2 \\ c_2(2x+1)e^{2x} & \text{si } x > -1/2 \end{cases}$

Pour en revenir à (E) :

y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \quad (2x+1)\,c''(x) - (4x+6)c'(x) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{\exists c_1, c_2 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad c'(x) = \begin{cases} c_1(2x+1)^2e^{2x} & \text{si } x \leq -1/2 \\ c_2(2x+1)e^{2x} & \text{si } x > -1/2 \end{cases}}_{(E_3)}$

Or $\displaystyle\int \underbrace{(2x+1)^2}_{\Downarrow} \overbrace{e^{2x}}^{\Uparrow} dx = (2x+1)^2 \frac{1}{2} e^{2x} - \int 2\times 2(2x+1)\frac{1}{2}e^{2x} dx$

$$= \frac{1}{2}(2x+1)^2 e^{2x} - 2\int \underbrace{(2x+1)}_{\Downarrow} \overbrace{e^{2x}}^{\Uparrow} dx$$

$$= \frac{1}{2}(2x+1)^2 e^{2x} - 2.\left((2x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int 2\frac{1}{2}e^{2x} dx\right)$$

$$= \frac{1}{2}(2x+1)^2 e^{2x} - (2x+1)e^{2x} + 2\int e^{2x} dx$$

$$= \frac{1}{2}(2x+1)^2 e^{2x} - (2x+1)e^{2x} + e^{2x}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left((2x+1)\left((2x+1)-2\right)+2\right)\right)e^{2x}.$$

$$= \frac{1}{2}(4x^2+1)e^{2x}$$

Un "recollement" de (E_3) permet de montrer que

y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad c(x) = \begin{cases} \frac{c_1}{2}\left((4x^2+1)e^{2x} - \frac{2}{e}\right) + c_3 & \text{si } x \leq -1/2 \\ \frac{c_2}{2}\left((4x^2+1)e^{2x} - \frac{2}{e}\right) + c_3 & \text{si } x > -1/2 \end{cases}$$

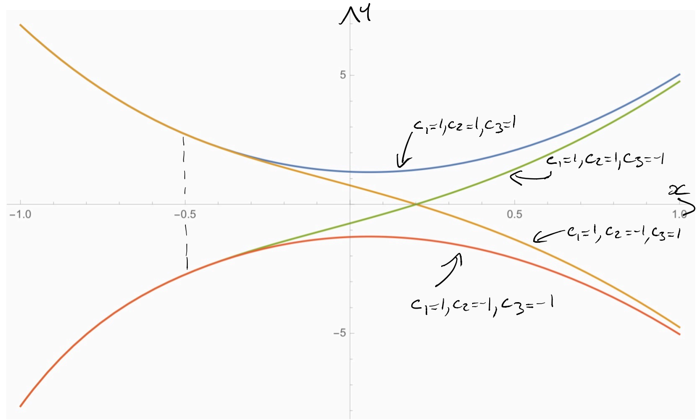
$$\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y(x)e^{2x} = \begin{cases} c_1\left((4x^2+1)e^{2x} - 2/e\right) + c_3 & \text{si } x \leq -1/2 \\ c_2\left((4x^2+1)e^{2x} - 2/e\right) + c_3 & \text{si } x > -1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad y(x) = \begin{cases} c_1(4x^2+1) + \left(c_3 - \frac{2c_1}{e}\right)e^{-2x} & \text{si } x \leq -1/2 \\ c_2(4x^2+1) + \left(c_3 - \frac{2c_2}{e}\right)e^{-2x} & \text{si } x > -1/2 \end{cases}$$

Donc les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions

$$y_{c_1,c_2,c_3} \Big| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \begin{cases} c_1(4x^2+1) + \left(c_3 - \frac{2c_1}{e}\right)e^{-2x} & \text{si } x \leq -1/2 \\ c_2(4x^2+1) + \left(c_3 - \frac{2c_2}{e}\right)e^{-2x} & \text{si } x > -1/2 \end{cases} \end{array}$$

où $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.



Quelques solutions de (E)

Exercice 2.1

Les solutions de : (E) $\forall x \in \mathbb{R}$ $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 1 - 8x - 30x^2$
Sont les fonctions

$$x \longrightarrow 2 + 3x + 5x^2 + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Les solutions de : (E) $\forall x \in \mathbb{R}$ $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^{-x}$
Sont les fonctions

$$x \longrightarrow (x-1)e^{-x} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Les solutions de : (E) $\forall x \in \mathbb{R}$ $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = x\,\mathrm{ch}(2x)$
Sont les fonctions

$$x \longrightarrow \frac{1}{64}(2x+1)e^{-2x} + \frac{1}{12}x^3 e^{2x} + (c_1 x + c_2)e^{2x}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Les solutions de : (E) $\forall x \in \mathbb{R} \quad y''(x) + y(x) = \sin^3(x)$
sont les fonctions

$$x \longrightarrow \frac{1}{40}\left(\sin(3x) - 15\sin(x)\right) + c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$