COURS : ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Table des matières

1 Équations différentielles linéaires du premier ordre

Définition 1. *Soit I un intervalle et a, b, c trois fonctions définies sur I. On appelle solution sur I de l'équation différentielle $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ toute fonction $y : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), dérivable sur I, telle que :*

$$\forall t \in I \quad a\,(t)\,y'\,(t) + b\,(t)\,y\,(t) = c\,(t)$$

On dit que l'équation est résolue lorsque a ne s'annule pas et qu'elle est homogène lorsque la fonction c est nulle.

Remarques :

⇨ Lorsque l'équation est homogène, la fonction nulle est solution de l'équation différentielle. De plus, si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation différentielle.

⇨ Lorsque l'équation est résolue, on peut l'écrire sous la forme

$$\forall t \in I \quad y'(t) = F(y(t), t)$$

où F est une fonction de $\mathbb{R} \times I$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C} \times I$ dans $\mathbb{C}$).

1.1 Équation différentielle homogène

Exemples :

⇨ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'(t) + \lambda y(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 1. *Soit I un intervalle et a une fonction continue définie sur I. Si A est une primitive de a sur I, les solutions de l'équation différentielle :*

$$\forall t \in I \quad y'\,(t) + a\,(t)\,y\,(t) = 0$$

sont les fonctions :

$$\begin{array}{rcl} y_c : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \\ t & \longmapsto & ce^{-A(t)} \end{array}$$

où $c \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Remarques :

⇨ Si y est une solution non nulle de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = 0$, elle ne s'annule pas.

Exemples :

⇨ Résoudre l'équation différentielle $(1 + t^2)y'(t) + ty(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

⇨ Déterminer les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x + y) = f(x)f(y)$$

⇨ Déterminer l'ensemble des solutions impaires de l'équation différentielle :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y'(t) + e^{-t^2} y(t) = 0$$

1.2 Équation différentielle avec second membre

Exemples :

⇨ Résoudre l'équation différentielle $(t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1 + \ln t)$ sur $]0, 1[$.

Proposition 2. *Soit I un intervalle et a, b deux fonctions continues définies sur I. Si y_p est une solution particulière de l'équation différentielle :*

$$\forall t \in I \quad y'\,(t) + a(t)y\,(t) = b\,(t)$$

alors les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y_p + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée :

$$\forall t \in I \quad y'\,(t) + a(t)y\,(t) = 0$$

Proposition 3. *Soit a et b deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$.*

- *Si d_1, d_2 sont deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et y_{p_1}, y_{p_2} sont des solutions particulières des équations différentielles respectives $a(t)y'(t) + by(t) = d_1(t)$ et $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = d_2(t)$, alors $\lambda y_{p_1} + \mu y_{p_2}$ est une solution de l'équation différentielle :*

$$\forall t \in I \quad a(t)y'(t) + b(t)y\left(t\right) = \lambda d_1\left(t\right) + \mu d_2\left(t\right)$$

- *Si d est une fonction de I dans $\mathbb{C}$ et y_p est une solution particulière de l'équation différentielle $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = d(t)$, alors $\mathrm{Re}\left(y_p\right)$ est une solution de l'équation différentielle :*

$$\forall t \in I \quad a(t)y'\left(t\right) + b(t)y\left(t\right) = \mathrm{Re}\left(d\left(t\right)\right)$$

On a bien sur une proposition similaire avec la partie imaginaire.

Proposition 4. *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Si P est un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors l'équation différentielle*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay'\left(t\right) + by\left(t\right) = P\left(t\right)e^{\alpha t}$$

admet comme solution une (unique) fonction du type $t \mapsto t^m Q\left(t\right)e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n, $m = 0$ si $a\alpha + b \neq 0$ et $m = 1$ si $a\alpha + b = 0$.

Exemples :

⇨ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad y'(x) - y(x) = 1 + x + 2e^{-x}$$

Méthode de la variation de la constante : Soit a et b deux fonctions continues sur I. On souhaite résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in I \quad y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Supposons que y_0 est une solution non nulle de l'équation différentielle $y'(t) + a(t) \cdot y(t) = 0$. Alors y_0 ne s'annule pas. Si c est une fonction dérivable, la fonction d'expression $y(t) = c(t)y_0(t)$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I \quad y'(t) = c'(t)y_0(t) + c(t)y_0'(t)$$

On en déduit que y est solution de l'équation différentielle $y'(t) + a(t) \cdot y(t) = b(t)$ si et seulement si

$$\forall t \in I \quad c'(t) = \frac{b(t)}{y_0(t)}$$

En particulier, si c est une primitive de b/y_0, la fonction d'expression $y(t) = c(t)y_0(t)$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$.

La méthode précédente, appelée « *méthode de la variation de la constante* », se généralise à toute équation différentielle *linéaire*. Si y_0 est une solution de l'équation différentielle homogène associée qui ne s'annule pas, le changement de fonction $y(t) = c(t)y_0(t)$ permet de ramener la résolution de l'équation différentielle initiale à la résolution d'une équation différentielle linéaire en c' d'ordre strictement inférieur.

Exemples :

⇨ Résoudre l'équation différentielle

$$\forall t > 0 \quad y'(t) - \frac{1}{t} \cdot y(t) = te^t$$

1.3 Problème de Cauchy

Définition 2. *Soit I un intervalle, a, b, c trois fonctions définies sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On appelle problème de Cauchy la recherche des solutions y de l'équation différentielle*

$$\forall t \in I \quad a\left(t\right)y'\left(t\right) + b\left(t\right)y\left(t\right) = c\left(t\right)$$

telles que $y\left(t_0\right) = y_0$.

Théorème 1. *Soit I un intervalle, a, b deux fonctions continues définies sur I, $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors il existe une et une seule solution de l'équation différentielle résolue*

$$\forall t \in I \quad y'\left(t\right) + a(t)y\left(t\right) = b\left(t\right)$$

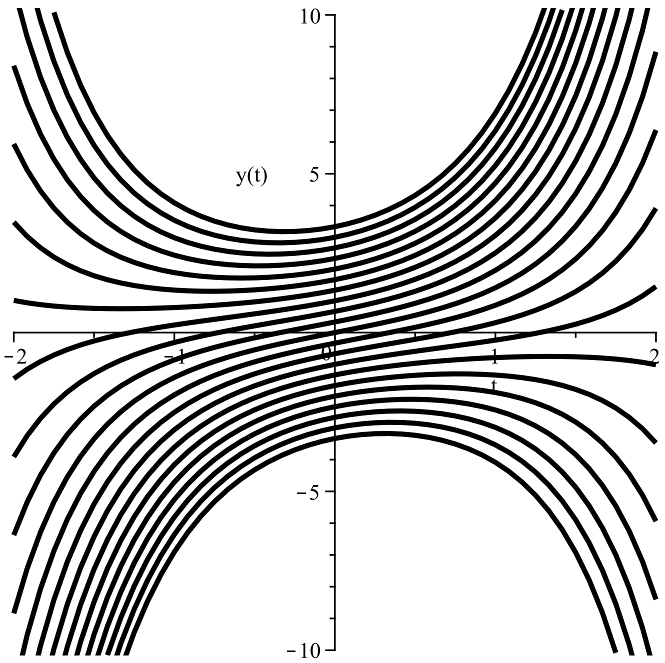
telle que $y\left(t_0\right) = y_0$.

Remarques :

⇨ Ce théorème signifie que la connaissance à l'instant t_0 du système régi par l'équation différentielle permet de connaître complétement son passé et son futur.

⇨ Graphiquement, cette proposition signifie que par tout point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe un et un seul graphe (appelé courbe intégrale) de solution de l'équation différentielle

$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$. En particulier, les courbes intégrales ne se croisent pas.



Quelques solution de $y'(t) - ty(t) = 1$.

Exemples :

⇨ Montrer que les solutions de l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y'(t) + t \operatorname{Arctan}(t^4 + 1)y(t) = \operatorname{sh} t$$

sont toutes paires.

1.4 Équation différentielle non résolue

Exemples :

⇨ Résoudre l'équation différentielle $(t^2 \ln t)y'(t) - ty(t) = -(1 + \ln t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarques :

⇨ Pour les équation différentielles non résolues du premier ordre, contrairement à ce qui se passe pour les équations résolues, il est possible qu'un problème de Cauchy admette plusieurs solutions ou aucune.

2 Équations différentielles linéaires du second ordre

2.1 Équation différentielle homogène

Proposition 5. *Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle :*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$.

— *Si cette équation possède deux racines distinctes r_1 et r_2 $(\Delta \neq 0)$, alors les solutions complexes de (E) sont les fonctions :*

$$\begin{aligned} y_{c_1,c_2} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \end{aligned}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

— *Si cette équation admet une racine double r $(\Delta = 0)$, alors les solutions complexes de (E) sont les fonctions :*

$$\begin{aligned} y_{c_1,c_2} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto (c_1 t + c_2)\, e^{rt} \end{aligned}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.

Remarques :

⇨ La fonction nulle est solution de cette équation différentielle. De plus, si y_1 et y_2 sont deux solutions de cette équation différentielle, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation différentielle.

Exemples :

⇨ Soit $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $y'' + \omega_0^2 y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition 6. *Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et (E) l'équation différentielle :*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

On résout sur $\mathbb{C}$ l'équation caractéristique $az^2 + bz + c = 0$.

— *Si cette équation possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 $(\Delta > 0)$, alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions :*

$$y_{c_1,c_2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \end{array}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

— *Si cette équation admet une racine double r $(\Delta = 0)$, alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions :*

$$y_{c_1,c_2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (c_1 t + c_2) e^{rt} \end{array}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

— *Si cette équation admet deux racines complexes conjuguées $r + i\omega$ et $r - i\omega$ $(\Delta < 0)$, alors les solutions réelles de (E) sont les fonctions :*

$$y_{c_1,c_2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & [c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t)] e^{rt} \end{array}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Remarques :

⇨ L'ensemble des solutions réelles de cette équation différentielle est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

⇨ Dans le cas où l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées, les solutions de (E) peuvent s'écrire sous la forme

$$y_{c,\varphi} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & c\cos(\omega t - \varphi) e^{rt} \end{array}$$

où $c, \varphi \in \mathbb{R}$.

⇨ Étant donnés $t_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$, on appelle problème de Cauchy la recherche des solutions y de l'équation différentielle $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$ telles que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$. On peut montrer que tout problème de Cauchy admet une et une seule solution.

Exemples :

⇨ Résoudre l'équation différentielle $y'' + 2y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$.

⇨ En effectuant le changement de fonction inconnue $z(t) = t^2 y(t)$, résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad t^2 y''(t) + 4ty'(t) + (2 - t^2)y(t) = 0$$

⇨ En effectuant le changement de variable $t = \sqrt{u}$, résoudre l'équation différentielle

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad ty''(t) - y'(t) + 4t^3 y(t) = 0$$

2.2 Équation différentielle avec second membre

Proposition 7. *Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et d une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Si y_p est une solution particulière de l'équation différentielle :*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

alors les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $y_p + y$ où y parcourt l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène associée :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

Proposition 8. *Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.*

— *Si d_1, d_2 sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et y_{p_1}, y_{p_2} sont des solutions particulières des équations différentielles respectives $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d_1(t)$ et $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d_2(t)$, alors $\lambda y_{p_1} + \mu y_{p_2}$ est une solution de l'équation différentielle :*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

— *Si d est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ et y_p est une solution particulière de l'équation différentielle $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$, alors $\mathrm{Re}(y_p)$ est une solution de l'équation différentielle :*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \mathrm{Re}(d(t))$$

On a bien sur une proposition similaire avec la partie imaginaire.

Proposition 9. *Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Si P est un polynôme de degré n et $\alpha \in \mathbb{C}$, alors l'équation différentielle*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = P(t) e^{\alpha t}$$

admet comme solution une (unique) fonction du type $t \mapsto t^m Q(t) e^{\alpha t}$ où Q est un polynôme de degré n et m est l'ordre de α comme racine de l'équation caractéristique (avec par convention $m = 0$ si α n'est pas racine de cette équation).

Exemples :

⇨ Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y'(t) + y(t) = t^2$.

⇨ Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y''(t) + y(t) = t\cos t$.

2.3 Problème de Cauchy

Définition 3. *Soit I un intervalle, $a, b, c \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) avec $a \neq 0$, et d une fonction de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $t_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). On appelle problème de Cauchy la recherche des solutions de l'équation différentielle*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

telles que $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$.

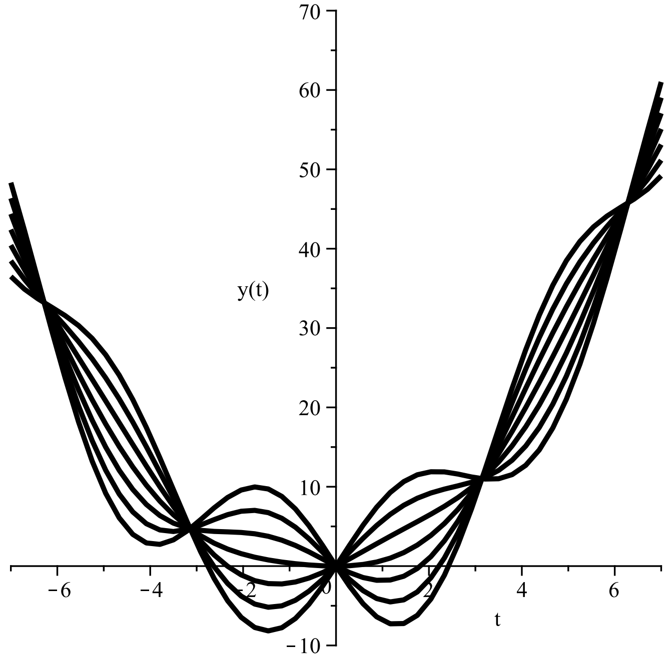
Théorème 2. *Soit I un intervalle, $a, b, c \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) avec $a \neq 0$, et d une fonction continue de I dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), $t_0 \in I$ et $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors, il existe une unique fonction y, dérivable deux fois sur I telle que*

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ay''(t) + by'(t) + cy(t) = d(t)$$

et $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = y_1$. Autrement dit, le problème de Cauchy admet une unique solution.

Remarques :

⇨ Ceci signifie que si l'on fixe une position et une vitesse initiale, il y a une et une seule solution. Par contre, deux solutions différentes peuvent être au même point au même instant mais les vitesses seront alors différentes.



Quelques solution de $y''(t) + y(t) = t^2 + t + 1$ et $y(0) = 0$.

Exemples :

⇨ Résoudre le problème de Cauchy

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y''(t) + y(t) = t^2 + t + 1$$

avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.