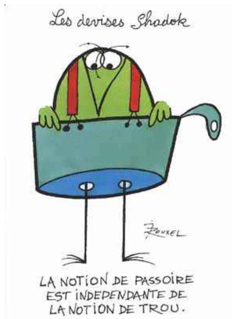
DEVOIR SURVEILLÉ N° 2

Samedi 21 septembre

Temps de composition : 4h

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Des points seront accordés pour la qualité de la présentation. Cette bonification pourra s'élever jusqu'à 10% des point récoltés sur l'ensemble des questions.



Question de cours

Soit E et F deux ensembles et $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Montrer que f est bijective si et seulement si il existe $g \in \mathcal{F}(F,E)$ tel que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_F$$

Théorème des deux carrés de Fermat (de Noël)

Ce problème ne nécessite aucune notion particulière d'arithmétique, excepté le fait qu'un entier $p \in \mathbb{N}$ est un nombre premier si et seulement si $p \geqslant 2$ et

$$\forall u \in \mathbb{N} \quad u | p \Longrightarrow (u = 1 \quad \text{ou} \quad u = p).$$

On notera $\mathrm{Card}(E)$ *le nombre d'éléments de E lorsque E est un ensemble fini. On utilisera librement le fait que si il existe une bijection d'un ensemble fini E dans un ensemble F, alors F est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$.

Soit p un nombre premier. Le but de ce problème est de montrer que p est somme de deux carrés d'entiers si et seulement si $p = 2$ ou si il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 1 + 4k$.

1. On suppose qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $p = a^2 + b^2$. En étudiant la parité de a et b, montrer que $p = 2$ ou qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 1 + 4k$.

Réciproquement, il est évident que 2 est somme de deux carrés. On suppose donc qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 1 + 4k$ et on souhaite montrer que p est la somme de deux carrés. On pose

$$S = \left\{(a,b,c) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{Z} : 4ab + c^2 = p\right\}.$$

2. (a) Montrer que S est non vide.
   (b) Montrer que $S \subset (\mathbb{N}^*)^2 \times \mathbb{Z}^*$, puis que S est fini.
3. On pose

$$S_1 = \{(a,b,c) \in S : a > b + c\} \text{ et } S_2 = \{(a,b,c) \in S : a < b + c\}.$$

   (a) Montrer que (S_1, S_2) forme une partition de S.
   (b) Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} S_1 & \longrightarrow & S_2 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (b,a,-c) \end{array}$$

   est bien définie, qu'elle est bijective et en déduire que $\mathrm{Card}(S) = 2\,\mathrm{Card}(S_1)$.
   (c) Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} S_1 & \longrightarrow & S_1 \\ (a,b,c) & \longmapsto & (a-b-c, b, -2b-c) \end{array}$$

   est bien définie et que $f \circ f = \mathrm{Id}$.
   (d) Déterminer les triplets $(a,b,c) \in S_1$ tels que $f(a,b,c) = (a,b,c)$.
   (e) On définit f^k par récurrence sur k par

$$f^0 = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{k+1} = f^k \circ f.$$

   Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad f^{2k} = \mathrm{Id}.$$

   (f) Montrer que la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur S_1 par

$$(a_1,b_1,c_1)\mathcal{R}(a_2,b_2,c_2) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\exists k \in \mathbb{N} \quad (a_1,b_1,c_1) = f^k(a_2,b_2,c_2)\right]$$

   est une relation d'équivalence.
   (g) Soit $(a,b,c) \in S_1$. Montrer que

$$\mathrm{Cl}((a,b,c)) = \{(a,b,c), f(a,b,c)\}.$$

   puis en déduire qu'il existe $u \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Card}(S) = 2 + 4u$.
4. On pose

$$S_3 = \{(a,b,c) \in S : a \neq b\}.$$

   En remarquant que si $(a,b,c) \in S_3$, alors $(a,b,-c), (b,a,c), (b,a,-c)$ sont des éléments de S_3, montrer qu'il existe $v \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Card}(S_3) = 4v$.

5. En déduire que p est somme de deux carrés.

Albert Girard *(1595–1632) est le premier mathématicien qui proposa ce théorème en 1625. Pierre* de Fermat *(né vers 1605, mort en 1665) en a parlé dans une longue lettre datée du jour de Noël 1640, mais on ne pense pas qu'il ait trouvé de démonstration. C'est Leonhard* Euler *(1707–1783) qui donne la première preuve de ce théorème. La démonstration proposée ici est dûe à Don* Zagier *(1951–) et a été publiée en 1990 dans « The American Mathematical Monthly ».*

Minimum d'une partie de $\mathbb{N}$

Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On note

$$E_p = \{n \in \mathbb{N} : (2n)! > p^n\}.$$

1. Montrer que $p \in E_p$.
2. Montrer que E_p admet un minimum que l'on notera u_p.
3. Calculer u_p pour $p \in \{2, \ldots, 5\}$.
4. Montrer que si $n \in E_p$ alors $2n(2n-1) > p$.
5. Prouver que
$$u_p > \frac{\sqrt{p}}{2}.$$
6. Montrer que si $n \in E_p$ alors $n+1 \in E_p$. Que peut-on en déduire ?
7. Montrer que la suite (u_p) est croissante.

Constante d'Euler

Dans cet exercice, on utilisera librement le fait qu'une suite décroissante minorée converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit H_n par

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\forall x \in [n, n+1] \quad \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}.$$
puis en déduire
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}.$$
2. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1.$$
3. Déterminer la limite de la suite (H_n).
4. On définit la suite (u_n) par
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = H_n - \ln(n).$$
Montrer que la suite (u_n) est une décroissante et positive.

Elle converge donc vers un réel que l'on note γ et qui est appelé constante d'Euler.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit
$$K_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}.$$
Exprimer K_n en fonction de H_n et H_{2n+1}.
6. Déterminer des réels a, b, c tels que
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}.$$
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer
$$L_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(2k+1)}$$
en fonction de H_n, H_{2n+1} et n.
8. Déterminer la limite de la suite (L_n).

Système linéaire

Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2 \end{cases}.$$