Proposition 6 :

Preuve : Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = 0$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$: Alors l'équation caractéristique admet deux racines distinctes réelles r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$. Les solutions complexes de (E) sont les fonctions

$$t \longrightarrow c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. On cherche les solutions réelles parmi celles-là.

Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. On définit y sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& y \text{ est à valeurs réelles} \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \overline{y(t)} \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R} \quad c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} = \overline{c_1} e^{r_1 t} + \overline{c_2} e^{r_2 t} \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R} \quad (c_1 - \overline{c_1}) e^{r_1 t} + (c_2 - \overline{c_2}) e^{r_2 t} = 0 \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R} \quad (c_1 - \overline{c_1}) e^{-(r_2 - r_1) t} + (c_2 - \overline{c_2}) = 0
\end{aligned}$$

Supposons que y soit à valeurs réelles. Alors, comme

$$(c_1 - \overline{c_1}) \underbrace{e^{-\overbrace{(r_2 - r_1)}^{>0} t}}_{\xrightarrow[t \to +\infty]{} 0} + (c_2 - \overline{c_2}) = 0$$

Donc, par passage à la limite, $c_2 - \overline{c_2} = 0$

Donc $\forall t \in \mathbb{R} \quad (c_1 - \overline{c_1}) e^{-(r_2 - r_1) t} = 0$

En évaluant en 0, on obtient $c_1 - \overline{c_1} = 0$. Donc $c_1 = \overline{c_1}$ et $c_2 = \overline{c_2}$. Donc c_1 et c_2 sont réels.

Réciproquement, si c_1 et c_2 sont réels, alors la fonction

$$t \longrightarrow c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

est réelle.

En conclusion, les solutions réelles de (E) sont les fonctions :

$$t \longrightarrow c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta = 0$: Alors l'équation caractéristique admet une racine double : r. Les solutions complexes sont donc les fonctions

$$t \longrightarrow (c_1 t + c_2) e^{rt}$$

où $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. On cherche parmi celles-là celles qui sont réelles.

Soit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ et y la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = (c_1 t + c_2) e^{rt}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& y \text{ est à valeurs réelles} \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R} \quad y(t) = \overline{y(t)} \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R} \quad (c_1 t + c_2) e^{rt} = \overline{(c_1 t + c_2) e^{rt}} \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R} \quad (c_1 t + c_2) e^{rt} = (\overline{c_1} t + \overline{c_2}) e^{rt} \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R} \quad \left((c_1 - \overline{c_1}) t + (c_2 - \overline{c_2})\right) \underbrace{e^{rt}}_{\neq 0} = 0 \\
\iff & \forall t \in \mathbb{R} \quad (c_1 - \overline{c_1}) t + (c_2 - \overline{c_2}) = 0 \\
\iff & c_1 - \overline{c_1} = 0 \quad \text{et} \quad c_2 - \overline{c_2} = 0 \\
\iff & c_1 \in \mathbb{R} \text{ et } c_2 \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Évaluer en 0 puis en 1 ⇓

trivial ⇑

Donc les solutions réelles de (E) sont les fonctions $t \longrightarrow (c_1 t + c_2) e^{rt}$ où $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Si $\Delta<0$: Dans ce cas, l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r+i\omega$ et $r-i\omega$ (avec $\omega>0$).

Montrons que les solutions réelles de (E) sont les fonctions
$$t \longrightarrow (c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t))e^{rt}$$

On commence par prouver que $t\longrightarrow \cos(\omega t)e^{rt}$ est solution de E. C'est immédiat puisque c'est la partie réelle de $t\longrightarrow e^{(r+i\omega)t}$ qui est solution de (E).
De même $t\longrightarrow \sin(\omega t)e^{rt}$ est solution de (E).
Puisque (E) est linéaire on en déduit que pour tout $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, la fonction $t\longrightarrow (c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t))e^{rt}$ est solution de (E).

Réciproquement, soit y une solution réelle de (E). Alors c'est une solution complexe donc il existe $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ tels que
$$\forall t\in\mathbb{R} \quad y(t)=c_1e^{(r+i\omega)t}+c_2e^{(r-i\omega)t}$$
Puisque y est réelle
$$\forall t\in\mathbb{R} \quad y(t)=\overline{y(t)}$$
donc $\forall t\in\mathbb{R}$ $c_1e^{(r+i\omega)t}+c_2e^{(r-i\omega)t}=\overline{c_1e^{(r+i\omega)t}+c_2e^{(r-i\omega)t}}$

donc $\forall t\in\mathbb{R}$ $c_1e^{(r+i\omega)t}+c_2e^{(r-i\omega)t}=\overline{c_1}e^{(r-i\omega)t}+\overline{c_2}e^{(r+i\omega)t}$

donc $\forall t\in\mathbb{R}$ $(c_1-\overline{c_2})e^{(r+i\omega)t}+(c_2-\overline{c_1})e^{(r-i\omega)t}=0$

donc $\forall t\in\mathbb{R}$ $(c_1-\overline{c_2})e^{i2\omega t}+(c_2-\overline{c_1})=0$

Pour $t=0$, on obtient $(c_1-\overline{c_2})+(c_2-\overline{c_1})=0$ (1)
Pour $t=\pi/(2\omega)$, on obtient $-(c_1-\overline{c_2})+(c_2-\overline{c_1})=0$ (2)

En sommant (1) et (2), on obtient $c_2-\overline{c_1}=0$.
Donc
$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R} \quad y(t)&=c_1e^{(r+i\omega)t}+\overline{c_1}e^{(r-i\omega)t}\\&=c_1e^{(r+i\omega)t}+\overline{c_1e^{(r+i\omega)t}}\\&=2\,\mathrm{Re}\left(c_1e^{(r+i\omega)t}\right)\end{aligned}$$

Or il existe $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $c_1=\alpha+i\beta$. Donc
$$\begin{aligned}\forall t\in\mathbb{R} \quad y(t)&=2\,\mathrm{Re}\left((\alpha+i\beta)e^{rt}(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t))\right)\\&=(2\alpha\cos(\omega t)+(-2\beta)\sin(\omega t))e^{rt}\end{aligned}$$
Donc il existe $d_1=2\alpha$ et $d_2=-2\beta\in\mathbb{R}$ tels que
$$\forall t\in\mathbb{R} \quad y(t)=(d_1\cos(\omega t)+d_2\sin(\omega t))e^{rt}$$
En conclusion, les solutions réelles de (E) sont les
$$t\longrightarrow (c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t))e^{rt}$$
où $c_1,c_2\in\mathbb{R}$.