Devoir maison n° 4 bis

Le corrigé sera mis en ligne le 22 novembre

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

L'objet de ce problème est d'étudier l'équation différentielle :

$$(E) \quad 2ty'(t) + \sin(y(t)) = 0$$

Cette équation différentielle est résolue sur les intervalles $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. On admettra l'unicité de la solution du problème de Cauchy pour cette équation différentielle, c'est-à-dire que les graphes des solutions de (E) ne se croisent pas sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

1. **Préliminaires**
   (a) Montrer que pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\frac{2}{\pi}t \leqslant \sin t \leqslant t$.
   (b) Soit (E') l'équation différentielle :
   $$(E') \quad 2ty'(t) + y(t) = 0$$
      i. Résoudre (E') sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
      ii. En déduire les solutions de (E') sur $\mathbb{R}$.
2. **Symétries de** (E)
   (a) Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $-y$ est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que si y est solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(-t)$ est aussi solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. **Solutions sur** $\mathbb{R}$
   (a) Trouver les solutions de (E) qui sont constantes.

   Le but de cette partie est de démontrer que ce sont les seules solutions de (E) sur $\mathbb{R}$. Dans la suite, on se donne donc une solution y de (E) sur $\mathbb{R}$

   (b) Montrer que $y(0) \in \pi\mathbb{Z}$.

   Dans la suite, on se donne un entier k tel que $y(0) = k\pi$

   (c) Dans cette partie, on suppose que k et pair.
      i. Montrer que la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(t) - k\pi$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ et que $z(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

      Dans la suite, on raisonne par l'absurde et on suppose que z n'est pas la fonction identiquement nulle, c'est à dire qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z(t_0) \neq 0$. On supposera de plus que $t_0 > 0$ et $z(t_0) > 0$.

      ii. Montrer que pour tout $t > 0$, on a $z(t) > 0$.

      Puisque $z(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0, on admet qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que :
      $$\forall t \in \left]0, \eta\right] \quad z(t) \leqslant \frac{\pi}{2}$$
      iii. En déduire que :
      $$\forall t \in \left]0, \eta\right] \quad 2tz'(t) + \frac{2}{\pi}z(t) \leqslant 0$$
      iv. En déduire qu'il existe une constante C strictement positive telle que :
      $$\forall t \in \left]0, \eta\right] \quad z(t) \geqslant C\frac{1}{t^{\frac{1}{\pi}}}$$
      et aboutir à une contradiction.
      v. On a supposé plus haut que $t_0 > 0$ et $z(t_0) > 0$. En utilisant les symétries de (E), montrer pourquoi on peut toujours se ramener à ce cas.

   (d) Dans cette partie, on suppose que k est impair.
      i. Montrer que la fonction z définie sur $\mathbb{R}$ par $z(t) = y(t) - k\pi$ est solution de (E'') sur $\mathbb{R}$:
      $$(E'') \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad 2tz'(t) - \sin(z(t)) = 0$$

      Dans la suite, on raisonne par l'absurde et on suppose que z n'est pas la fonction identiquement nulle, c'est à dire qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $z(t_0) \neq 0$. On supposera de plus que $t_0 > 0$ et $z(t_0) > 0$.

      ii. Montrer que pour tout $t > 0$, on a $z(t) > 0$.
      iii. En déduire que :
      $$\forall t > 0 \quad 2tz'(t) - z(t) \leqslant 0$$
      iv. En déduire qu'il existe une constante C strictement positive telle que :
      $$\forall t \in \left]0, \eta\right] \quad z(t) \geqslant C\sqrt{t}$$
      et aboutir à une contradiction.
      v. On a supposé plus haut que $t_0 > 0$ et $z(t_0) > 0$. En utilisant les symétries de (E), montrer pourquoi on peut toujours se ramener à ce cas.