Devoir surveillé n° 4

Samedi 9 novembre

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Calcul de $\zeta(2)$

1. (a) Soit $k \geqslant 2$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall t \in [k-1, k] \quad 0 < t^2 &\leqslant k^2 \\ \frac{1}{k^2} &\leqslant \frac{1}{t^2} \end{aligned}$$

Donc, après intégration :

$$\begin{aligned} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k^2} &\leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ \frac{1}{k^2} &\leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \end{aligned}$$

(b) Soit $n \geqslant 2$. Alors :

$$\begin{aligned} u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} &= 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \\ &\leqslant 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} \end{aligned}$$

Or :

$$\int_1^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} \leqslant 1$$

Donc :

$$\boxed{\forall n \geqslant 2 \quad u_n \leqslant 2}$$

(c) Remarquons que la suite u est croissante. En effet :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant 0$$

De plus cette suite est majorée. On en déduit donc que :

$$\boxed{\text{La suite } u \text{ est convergente.}}$$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+2} t \,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^{2n+1} t}_{\text{dérive}} \overbrace{\cos t}^{\text{intègre}} \,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\left[\cos^{2n+1} t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2n+1)(-\sin t) \cos^{2n} t \sin t \,\mathrm{d}t \\ &= (2n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \cos^2 t\right) \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t \\ &= (2n+1)(K_n - K_{n+1}) \end{aligned}$$

Donc $(2n+2) K_{n+1} = (2n+1) K_n$. Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad K_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} K_n}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} J_n - J_{n+1} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \left(1 - \cos^2 t\right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t^2 \sin t}_{\text{dérive}} \overbrace{\sin t \cos^{2n} t}^{\text{intègre}} \,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{\left[t^2 \sin t \frac{-1}{2n+1} \cos^{2n+1} t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} \\ &\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2t \sin t + t^2 \cos t\right) \frac{\cos^{2n+1} t}{2n+1} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2n+1} J_{n+1} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \cos^{2n+1} t \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2n+2}{2n+1}J_{n+1}-J_n &= -\frac{2}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{t}_{\text{dérive}}\, \overbrace{\sin t\cos^{2n+1} t}^{\text{intègre}}\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{2n+1}\left(\left[-t\frac{\cos^{2n+2} t}{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\right. \\
&\quad \left. + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2n+2}\cos^{2n+2} t\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{-2}{(2n+1)\,(2n+2)}K_{n+1}
\end{aligned}$$

En utilisant la relation entre K_{n+1} et K_n, on montre facilement par récurrence que $K_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{J_{n+1}}{K_{n+1}}-\frac{J_n}{K_n} &= \frac{2n+1}{2n+2}\left(-\frac{2}{(2n+1)\,(2n+2)}+\frac{J_n}{K_{n+1}}\right) \\
&\quad -\frac{J_n}{K_n} \\
&= -\frac{1}{2\,(n+1)^2}+J_n\underbrace{\left(\frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{K_{n+1}}-\frac{1}{K_n}\right)}_{=0} \\
&= -\frac{1}{2\,(n+1)^2}
\end{aligned}$$

(c) En sommant la dernière égalité, on obtient :

$$\frac{J_n}{K_n}-\frac{J_0}{K_0}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
u_n &= -2\left(\frac{J_n}{K_n}-\frac{J_0}{K_0}\right) \\
&= 2\frac{J_0}{K_0}-2\frac{J_n}{K_n}
\end{aligned}$$

Or :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n=\frac{\pi^2}{6}-2\frac{J_n}{K_n}}$$

(d) Soit g la fonction définie sur $[0,\pi/2]$ par :

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad g(t)=\sin t-\frac{2}{\pi}t$$

D'après les théorèmes usuels, g est dérivable et :

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad g'(t)=\cos t-\frac{2}{\pi}$$

g' est donc strictement décroissante sur $[0,\pi/2]$. De plus, puisque $0<2/\pi<1$, $g'(0)>0$ et $g'(\pi/2)<0$. On en déduit qu'il existe (théorème des valeurs intermédiaires) un unique (par stricte monotonie) $t_0\in[0,\pi/2]$ tel que $g'(t_0)=0$. On obtient donc le signe de g', puis le tableau de variation de g :

t	0		t_0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

On lit donc sur le tableau de variations que :

$$\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad g(t)\geqslant 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad \sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t}$$

(e) De l'inégalité précédente, on déduit :

$$\begin{aligned}
\forall t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \quad 0 &\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}\sin t \\
0 &\leqslant t^2\leqslant\frac{\pi^2}{4}\sin^2 t \\
0 &\leqslant t^2\cos^{2n} t\leqslant\frac{\pi^2}{4}\left(1-\cos^2 t\right)\cos^{2n} t
\end{aligned}$$

Soit, après intégration :

$$0\leqslant J_n\leqslant\frac{\pi^2}{4}\left(K_n-K_{n+1}\right)$$

On en déduit, en utilisant la question 2.a) :

$$\boxed{0\leqslant J_n\leqslant\frac{\pi^2}{8\,(n+1)}K_n}$$

(f) Puisque $K_n>0$, on en déduit que :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\leqslant\frac{J_n}{K_n}\leqslant\frac{\pi^2}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Donc, par le théorème d'encadrement, on en déduit que :

$$\frac{J_n}{K_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

En utilisant la réponse à la question 5.c), il vient :

$$\boxed{u_n\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{\pi^2}{6}}$$