Cours : Révisions d'analyse

Table des matières

1 Fonction réelle d'une variable réelle

1.1 Définition

Définition 1. *Soit $\mathcal{D}_f$ une partie de $\mathbb{R}$. On appelle fonction réelle définie sur $\mathcal{D}_f$ toute application f qui à chaque élément x de $\mathcal{D}_f$ associe un unique réel noté $f(x)$. $\mathcal{D}_f$ est appelé domaine de définition de f.*

Remarques :

⇨ Deux fonctions f et g sont égales lorsque :
—Elles ont même domaine de définition $\mathcal{D}$.
—$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) = g(x)$

⇨ Il sera essentiel de ne pas confondre une fonction avec son expression. Par exemple parler de la fonction $\sin x$ est une erreur grave ; on parlera plutôt de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui au réel x associe le réel $\sin x$.

⇨ Par abus de langage, il est courant que les énoncés demandent à l'élève de donner le domaine de définition d'une fonction f donnée par une expression (par exemple $\sqrt{x}$). Dans ce cas, il faut donner l'ensemble $\mathcal{D}$ des x pour lesquels cette expression à un sens (ici, $\mathbb{R}_+$). La fonction f sera alors dans la suite du problème la fonction définie sur $\mathcal{D}$ qui à x associe cette expression en x.

1.2 Symétries, inégalités

Définition 2. *Soit f une fonction définie sur un domaine $\mathcal{D}_f$ symétrique par rapport à 0. On dit que*
— *f est paire lorsque :*
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(-x) = f(x)$$
— *f est impaire lorsque :*
$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(-x) = -f(x)$$

Définition 3. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et T un réel. On dit que T est une période de f lorsque :*
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$$
On dit qu'une fonction est périodique lorsqu'elle admet une période non nulle.

Définition 4. *Soit f une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. On dit que :*
— *f est croissante lorsque :*
$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \leqslant f(y)$$
— *f est décroissante lorsque :*
$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad x \leqslant y \Longrightarrow f(x) \geqslant f(y)$$
— *f est strictement croissante lorsque :*
$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$$
— *f est strictement décroissante lorsque :*
$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$$

Remarques :

⇨ Les fonctions constantes sont à la fois croissantes et décroissantes. Une fonction qui n'est pas croissante n'est pas forcément décroissante.

1.3 Opérations usuelles

Définition 5. *Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathcal{D}$.*

— *Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\lambda f + \mu g$ par :*

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$$

— *On définit la fonction fg par :*

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

— *Si f ne s'annule en aucun point de $\mathcal{D}$, on définit $1/f$ par :*

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Définition 6. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. On suppose que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in \mathcal{D}'$. On définit alors la fonction $g \circ f$ par :*

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

1.3.1 Opérations usuelles, symétries et monotonie

Les effets des opérations usuelles sur les propriétés de symétries sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

— Combinaison linéaire :

f \ g	paire	impaire
paire	paire	$\times$
impaire	$\times$	impaire

— Produit :

f \ g	paire	impaire
paire	paire	impaire
impaire	impaire	paire

— Inverse :

f	paire	impaire
1/f	paire	impaire

— Composition :

g \ f	paire	impaire
paire	paire	paire
impaire	paire	impaire
$\times$	paire	$\times$

Les effets de opérations usuelles sur les propriétés de monotonie sont résumées dans les tableaux ci-dessous :

— Combinaison linéaire positive :

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	$\times$
décroissante	$\times$	décroissante

— Produit de fonctions positives :

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	$\times$
décroissante	$\times$	décroissante

— Inverse d'une fonction strictement positive ou strictement négative :

f	croissante	décroissante
1/f	décroissante	croissante

— Composition :

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	décroissante
décroissante	décroissante	croissante

Remarques :

⇨ Lorsque c'est possible, il est souvent bien plus judicieux de déterminer la monotonie d'une fonction à partir de ces règles plutôt qu'à partir de l'étude du signe de la dérivée. En effet, cette méthode est bien plus rapide et source de beaucoup moins d'erreurs.

Exemples :

⇨ Déterminer la monotonie des fonctions d'expressions

$$\frac{1}{e^x + \sqrt{1+x}}, \qquad \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

2 Limites

2.1 Définition intuitive

Définition 7. *Dans ce cours, on ne définira pas la notion de limite. On se basera sur la notion intuitive suivante :*
Étant donné une fonction f et $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a, lorsque, quitte à rendre x proche de a, on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on souhaite de l. Dans ce cas, on note :

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

2.2 Limites et opérations usuelles

2.2.1 Limites usuelles

Les limites usuelles suivantes sont à la base du calcul de limites :

— Fonctions puissances :

$$x^n \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad (\text{où } n \in \mathbb{N}^*) \qquad x^n \xrightarrow[x\to-\infty]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{où } n \in \mathbb{N}^*)$$

$$x^n \xrightarrow[x\to a]{} a^n \quad (\text{où } n \in \mathbb{N} \text{ et } a \in \mathbb{R})$$

— Fonction exponentielle et croissances comparées :

$$e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

$$e^x \xrightarrow[x\to a]{} e^a \qquad \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad (\text{où } \alpha, \beta > 0) \qquad x^n e^{\alpha x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \quad (\text{où } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \alpha > 0)$$

— Fonction logarithme et croissances comparées :

$$\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$$

$$\ln x \xrightarrow[x\to a]{} \ln a \qquad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad (\text{où } \alpha, \beta > 0) \qquad x^\alpha \ln^n x \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad (\text{où } \alpha > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*)$$

2.2.2 Opérations usuelles

Proposition 1. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que $f(x)$ et $g(x)$ tendent respectivement vers l_f et l_g lorsque x tend vers a. Alors :*

— *Si λ et μ sont deux réels :*

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda l_f + \mu l_g$$

— *On a :*

$$f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_f l_g$$

— *Si $l_f \neq 0$, $1/f$ est définie au voisinage de a et :*

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{1}{l_f}$$

— *Plus généralement, si $l_g \neq 0$, f/g est définie au voisinage de a et :*

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{l_f}{l_g}$$

Proposition 2. *Soit f et g deux fonctions. On suppose que $f(x)$ tend vers $l_f \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et que g tend vers $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers l_f. Alors $g(f(x))$ tend vers l_g lorsque x tend vers a.*

De nombreux autres propositions existent concernant les limites finies et infinies. Elles sont résumées dans les tableaux ci-dessous où la présence d'une croix représente une forme indeterminée.

— Somme :
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et l_g, alors $f+g$:

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$
$l_f \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l_f + l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

— Opposé :
Si f est une fonction admettant pour limite l, alors $-f$:

l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
	$+\infty$	$-l$	$-\infty$

— Multiplication par un scalaire :
Si f est une fonction admettant pour limite l et λ est un réel, alors λf :

λ \ l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	λl	$-\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	λl	$+\infty$

— Produit :
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et l_g, alors fg :

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	$-\infty$	$-\infty$
$l_f < 0$	$+\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$-\infty$
$l_f = 0$	$\times$	0	0	0	$\times$
$l_f > 0$	$-\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

— Inverse :
Si f est une fonction admettant pour limite l, alors $1/f$:

l	$-\infty$	$l < 0$	0^-	0	0^+	$l > 0$	$+\infty$
	0	$1/l$	$-\infty$	$\times$	$+\infty$	$1/l$	0

— Exponentiation :
Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et l_g, alors f^g :

l_f \ l_g	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	$\times$	0	0
$0 < l_f < 1$	$+\infty$	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	0
1	$\times$	1	1	1	$\times$
$1 < l_f$	0	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	$\times$	$+\infty$	$+\infty$

Exemples :

⇨ Montrer que 0^0 et $1^{+\infty}$ sont des formes indeterminées.

2.3 Techniques de calcul

Exemples :

⇨ Calculer les limites des expressions suivantes :

$$2x^3 - x^2 + 1 \quad \text{en } +\infty, \qquad \frac{x^2+2x-3}{2x^2-1} \quad \text{en } -\infty$$

⇨ Calculer les limites des expressions suivantes :

$$e^x - x^5 \quad \text{en } +\infty, \qquad \frac{e^x \ln x - x^{1000} + e^{2x}}{e^{2x} + \ln x + x} \quad \text{en } +\infty$$

⇨ Calculer les limites des expressions suivantes :

$$x \ln x \quad \text{en } 0, \qquad \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{en } 0, \qquad \frac{e^{e^x}}{x^2} \quad \text{en } +\infty$$

⇨ Calculer les limites des expressions suivantes :

$$\frac{\ln(2 - 2\sin x)}{1 - 2\cos(2x)} \quad \text{en } \frac{\pi}{6}, \qquad \frac{\ln(2\cos x)}{e^{\sin\frac{x}{2}} - \sqrt{e}} \quad \text{en } \frac{\pi}{3}$$

Proposition 3.

— *Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a. On suppose qu'au voisinage de ce point :*

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

et que $f(x)$ et $h(x)$ admettent la même limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a. Alors $g(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a.

— *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose qu'au voisinage de ce point :*

$$f(x) \leqslant g(x)$$

Alors, si $f(x)$ tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers a, il en est de même pour $g(x)$. De même, si $g(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a, il en est de même pour $f(x)$.

— *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'au voisinage de a :*

$$|f(x) - l| \leqslant g(x)$$

et que $g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a. Alors $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a.

Remarques :

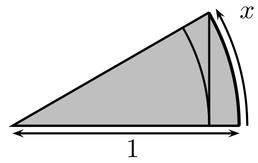
⇨ Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a, telles que, sur ce voisinage :

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$$

On suppose que $f(x)$ et $h(x)$ admettent respectivement pour limite l_f et l_h lorsque x tend vers a. On pourrait être tenté d'affirmer que la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers a est comprise entre l_f et l_h. C'est une erreur *grossière*. En effet lorsque l_f et l_h sont distincts, il se peut très bien que $f(x)$ n'ait pas de limite lorsque x tend vers a.

Exemples :

⇨ En encadrant l'aire du triangle entre les aires des deux camemberts,



montrer que $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.

⇨ Montrer que $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

2.4 Limites et inégalités

Proposition 4. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose que $f(x)$ et $g(x)$ admettent respectivement pour limite l_f et $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a et qu'au voisinage de ce point :*

$$f(x) \leqslant g(x)$$

Alors, $l_f \leqslant l_g$.

Remarques :

⇨ Remarquons que cet énoncé ne prouve l'existence d'aucune limite. Au contraire, il les suppose et en donne des propriétés.

⇨ Attention, il n'existe pas de résultat semblable lorsqu'on remplace l'inégalité large par une inégalité stricte. Par exemple :

$$\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} > 0$$

Pourtant $1/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et $0 \not> 0$.

3 Continuité

3.1 Définition, opérations usuelles

Définition 8. *Soit f une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue en x_0 lorsque :*

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$$

On appelle domaine de continuité de f l'ensemble des points où f est continue.

Remarques :

⇨ On dit qu'une fonction f est continue à gauche en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}]{} f(x_0)$$

On définit de même la notion de continuité à droite. Une fonction est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0.

⇨ Dans le cas où f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et qu'au moins l'une de ces limite n'est pas $f(x_0)$, on dit que f admet une discontinuité de première espèce en x_0.

Exemples :

⇨ Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - a}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ be^x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

soit continue en 0.

Proposition 5. *Soit f une fonction continue en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{D}_f$ convergeant vers x_0. Alors :*

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x_0)$$

Proposition 6. *Soit f et g deux fonctions continues en x_0. Alors :*
- *si λ et μ sont deux réels la fonction $\lambda f + \mu g$ est est continue en x_0.*
- *la fonction fg est continue en x_0.*
- *si $f(x_0) \neq 0$, la fonction f ne s'annule pas au voisinage de x_0 et $1/f$ est continue en x_0.*
- *plus généralement, si $g(x_0) \neq 0$, la fonction g ne s'annule pas au voisinage de x_0, et f/g est continue en x_0.*

Proposition 7. *Soit f une fonction continue en x_0 et g une fonction continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

3.2 Prolongement par continuité

Définition 9. *Soit f une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que f admette une limite finie l en a. On définit alors la fonction $\bar{f}$ sur $\mathcal{D}_{\bar{f}} = \mathcal{D}_f \cup \{a\}$ par :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\bar{f}} \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

Cette fonction $\bar{f}$ est continue en a et est appelée prolongement de f par continuité en a.

Exemples :

⇨ Étudier le prolongement par continuité en 0 de la fonction d'expression $x \ln x$.

3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 8.
- *Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et $y_0 \in [f(a), f(b)]$. Alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.*
- *Soit f une fonction continue sur l'intervalle $]a, b[$ admettant respectivement pour limite l_a et l_b en a et b et $y_0 \in]l_a, l_b[$. Alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = y_0$.*

Remarques :

⇨ Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence et ne donne aucune information sur l'unicité. Par exemple, lorsqu'il est demandé de montrer qu'il existe une unique solution au problème $f(x) = y_0$, le théorème des valeurs intermédaires peut être utile pour montrer l'existence d'une solution, mais c'est souvent un argument de stricte monotonie qui permet de montrer son unicité.

Exemples :

⇨ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_λ sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0 \quad f_\lambda(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + x^2}$$

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $f'_\lambda(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire les variations de f_λ.

4 Dérivation

4.1 Définition, fonction dérivée

Définition 10. *Soit f une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque :*

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Dans ce cas on note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé de f en x_0.

Remarques :

⇨ On dit qu'une fonction f est dérivable à gauche en x_0 lorsque l'expression

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par la gauche ; si tel est le cas, cette limite est notée $f'_g(x_0)$. On définit de même la notion de dérivabilité à droite. Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemples :

⇨ Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

soit dérivable en 0.

Proposition 9. *Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Remarques :

⇨ La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple de la fonction d'expression $|x|$ qui est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Définition 11. *Soit f une fonction. On note $\mathcal{D}_{f'}$ l'ensemble des $x_0 \in \mathcal{D}_f$ en lesquels f est dérivable. On définit la fonction dérivée de f, notée f' par :*

$$f' : \begin{array}{rcl} \mathcal{D}_{f'} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Définition 12. *Soit f une fonction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit lorsque c'est possible la dérivée n-ième de f par :*
- $f^{(0)} = f$
- *Si $f^{(n)}$ est définie et dérivable en au moins un point, on définit $f^{(n+1)}$ comme la fonction dérivée de $f^{(n)}$.*

4.2 Dérivées et opérations usuelles

4.2.1 Dérivées des fonction usuelles

$\mathcal{D}_f$	$f(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$
$\mathbb{R}$	$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
$\mathbb{R}^*$	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}_+^*$	$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}_+$	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}_+^*$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}^*$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$\operatorname{cotan} x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$-\left(1 + \operatorname{cotan}^2 x\right) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Remarques :

⇨ Contrairement à ce qui se passe pour la continuité, les fonctions usuelles ne sont pas toutes dérivables sur leur ensemble de définition. Par exemple la fonction :

$$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

est continue sur son ensemble de définition et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ mais n'est pas dérivable en 0.

4.2.2 Opérations usuelles

Proposition 10. *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et dérivables en x_0. Alors :*
- *Si λ et μ sont deux réels, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et :*

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$$

- *La fonction fg est dérivable en x_0 et :*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

- *Si f ne s'annule pas en x_0, $1/f$ est dérivable en x_0 et :*

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

- *Plus généralement, si g ne s'annule pas en x_0, f/g est dérivable en x_0 et :*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Proposition 11. *Soit f et g deux fonctions définies respectivement au voisinage de x_0 et $f(x_0)$. O suppose que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :*

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$$

Remarques :

⇨ La dérivée d'une fonction paire (resp. impaire, T-périodique) est impaire (resp. paire, T-périodique).

Exemples :

⇨ Étudier la dérivablité et calculer la dérivée de la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$$

⇨ Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions d'expression

$$e^{\sin x}, \qquad x^x$$

4.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 13. *Soit f une fonction et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ lorsque f est dérivable n fois sur $\mathcal{D}_f$ et que sa dérivée n-ième y est continue. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 12. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathcal{D}$. Alors :*

— *Si λ et μ sont deux réels, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.*
— *La fonction fg est de classe $\mathcal{C}^n$.*
— *Si f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, $1/f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.*
— *Plus généralement, si g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, f/g est de classe $\mathcal{C}^n$.*

Proposition 13. *Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ telles que $g \circ f$ soit définie sur $\mathcal{D}_f$. Alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$.*

Exemples :

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x^{n-1} \ln x$$

est de classe $\mathcal{C}^n$ et calculer sa dérivée n-ième.

4.4 Dérivation et monotonie

Proposition 14. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :*

— *f est croissante si et seulement si :*

$$\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$$

— *f est décroissante si et seulement si :*

$$\forall x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$$

Remarques :

⇨ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de définition de f n'est pas un intervalle. Par exemple la fonction

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1/x \end{array}$$

n'est pas décroissante bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée soit négative.

Exemples :

⇨ Montrer que

$$\forall x \in [0, \pi/2] \quad \frac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x, \qquad \forall x \in]0, 1[\quad x^x (1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}$$

Proposition 15. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est constante si et seulement si :*

$$\forall x \in I \quad f'(x) = 0$$

Remarques :

⇨ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de définition de f n'est pas un intervalle.

Proposition 16. *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si :*

— $\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$
— *Le nombre de points ou f' s'annule est fini*

alors f est strictement croissante.

Remarques :

⇨ La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée s'annule en 0. Si une fonction est croissante mais pas strictement croissante, alors elle est constante sur un intervalle non trivial.

5 Intégration

5.1 Définition, opérations usuelles

Définition 14. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. On définit l'intégrale :*

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

comme l'aire algébrique comprise entre le graphe de f et l'axe (Ox) comptée positivement si $a \leqslant b$ et négativement dans le cas contraire.

Proposition 17. *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $a, b \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\; dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$$

Proposition 18. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b, c \in I$. Alors :*

$$\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$$

5.2 Inégalités

Proposition 19. *Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a,b\in I$ tels que $a\leqslant b$. On suppose que :*

$$\forall x\in[a,b]\quad f(x)\leqslant g(x)$$

Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx$$

Exemples :

⇨ Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $0\leqslant 1-\cos x\leqslant x^2/2$. En déduire la limite à droite en 0 de

$$\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$$

5.3 Intégration et primitives, calcul de primitives

5.3.1 primitives

Définition 15. *Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur $\mathcal{D}_f$ telle que :*

$$\forall x\in\mathcal{D}_f\quad F'(x)=f(x)$$

Proposition 20. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f. Alors les primitives de f sont les fonctions F_C définies sur I par :*

$$\forall x\in I\quad F_C(x)=F(x)+C$$

où C est un réel quelconque.

5.3.2 Intégration et régularité

Proposition 21. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0\in I$. On définit sur I la fonction F par :*

$$\forall x\in I\quad F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Alors :

- *F est continue sur I.*
- *F est dérivable sur I et :*

$$\forall x\in I\quad F'(x)=f(x)$$

Autrement dit, F est une primitive de f sur I.

Corollaire 1. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une primitive. Plus précisement, pour tout $x_0\in I$, il existe une unique primitive F de f sur I s'annulant en x_0. De plus :*

$$\forall x\in I\quad F(x)=\int_{x_0}^x f(t)\,dt$$

Corollaire 2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a,b\in I$. Alors, si F est une primitive de f sur I :*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$$

5.3.3 Calcul d'intégrales

Proposition 22. *Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a,b\in I$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ et que g est continue sur $[a,b]$. Alors, si G est un primitive de g :*

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{dérive}}\overbrace{g(x)}^{\text{intègre}}\,dx=[f(x)G(x)]_a^b-\int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$

Exemples :

⇨ Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit I_n par

$$I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$$

Calculer I_0 et trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

Proposition 23. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit J un intervalle et $\bar{x}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de J à valeurs dans I. On se donne $a_x,b_x\in I$ et $a_t,b_t\in J$ tels que :*

$$a_x=\bar{x}(a_t)\quad\text{et}\quad b_x=\bar{x}(b_t)$$

Alors :

$$\int_{a_x}^{b_x} f(x)\,dx=\int_{a_t}^{b_t} f(\bar{x}(t))\frac{d\bar{x}}{dt}(t)\,dt$$

Exemples :

⇨ Calculer

$$\int_0^\pi \ln\left(1+\cos^2 x\right)\sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

⇨ Montrer que

$$\int_{\frac{1}{2}}^2\frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}}\,\mathrm{d}x=0$$

Corollaire 3. *Soit f une fonction continue sur le segment $[-a, a]$. Alors :*

- *si f est paire :*

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

- *si f est impaire :*

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

En particulier :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Corollaire 4. *Soit f une fonction T-périodique, continue sur $\mathbb{R}$. Alors quel que soit $a \in \mathbb{R}$:*

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$$

5.3.4 Calcul de primitives

Exemples :

⇨ Calculer des primitives des fonctions d'expressions

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}, \qquad \frac{x}{1+x^2}, \qquad \tan x, \qquad \frac{1}{x \ln x}$$

⇨ Calculer des primitives des fonctions d'expressions

$$(2x+3)e^x, \qquad e^{\sqrt{x}}, \qquad x\cos x, \qquad \ln x$$

⇨ Calculer des primitives des fonctions d'expressions

$$\sin^2 x \cos^3 x, \qquad \cos^2 x \sin^5 x, \qquad \cos^2 x \sin^2 x$$