Devoir surveillé n° 4

Samedi 9 novembre

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Calcul de $\zeta(2)$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge, puis de calculer sa limite.

1. (a) Soit $k \geqslant 2$. Sans calculer de primitive, montrer que :

$$\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

(b) En déduire que :

$$\forall n \geqslant 2 \quad u_n \leqslant 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$$

puis que :

$$\forall n \geqslant 2 \quad u_n \leqslant 2$$

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. (*On pourra utiliser la fait que toute suite croissante majorée est convergente.*)

2. Pour tout entier naturel n on pose : :

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t \quad K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} t \,\mathrm{d}t$$

(a) En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad K_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2} K_n$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer successivement les formules :

$$J_n - J_{n+1} = \frac{1}{2n+1} J_{n+1} + \frac{2}{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t \, \cos^{2n+1} t \,\mathrm{d}t$$

$$\frac{2n+2}{2n+1} J_{n+1} - J_n = -\frac{2}{(2n+1)(2n+2)} K_{n+1}$$

$$\frac{J_{n+1}}{K_{n+1}} - \frac{J_n}{K_n} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(n+1)^2}$$

(c) Trouver une expression de u_n en fonction de J_n/K_n.

(d) Montrer que :

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \frac{2t}{\pi} \leqslant \sin t$$

(e) En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{\pi^2}{8(n+1)} K_n$$

(f) Montrer que :

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$