Exercice 1.1

$\text{Arctan}\left(\frac{n^2-n\cos(n)+(-1)^n}{\ln(n)+n^2}\right)$

$$\frac{n^2-n\cos(n)+(-1)^n}{\ln(n)+n^2}=\frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{\cos(n)}{n}+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\frac{\ln(n)}{n^2}\right)}$$

Or $\left|\frac{\cos n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}\xrightarrow[n\infty]{}0$ donc $\frac{\cos(n)}{n^2}\xrightarrow[n\infty]{}0$

et $\left|\frac{(-1)^n}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2}\xrightarrow[n\infty]{}0$ donc $\frac{(-1)^n}{n^2}\xrightarrow[n\infty]{}0$

De plus $\frac{\ln(n)}{n^2}\xrightarrow[n\infty]{}0$

Donc $\frac{n^2-n\cos(n)+(-1)^n}{\ln(n)+n^2}\xrightarrow[n\infty]{}1$

Or Arctan est continue en 1, donc

$$\text{Arctan}\left(\frac{n^2-n\cos(n)+(-1)^n}{\ln(n)+n^2}\right)\xrightarrow[n\infty]{}\text{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}$$

- $\lim\limits_{n\infty}\left(5\sin\frac{1}{n^2}+\frac{1}{5}\cos n\right)^n$?

On a : $5\sin\frac{1}{n^2}\xrightarrow[n\infty]{}0$

Donc il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n\geqslant N\quad\left|5\sin\frac{1}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{5}$$

(En effet $\varepsilon=1/5>0$). Donc

$$\forall n\geqslant N\quad\left|5\sin\frac{1}{n^2}+\frac{1}{5}\cos(n)\right|\leqslant\left|5\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\right|+\frac{1}{5}|\cos(n)|$$
$$\leqslant\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$$

Donc $\forall n\geqslant N\quad\left|\left(5\sin\frac{1}{n^2}+\frac{1}{5}\cos(n)\right)^n\right|\leqslant\left(\frac{2}{5}\right)^n\xrightarrow[n\infty]{}0$

car $\frac{2}{5}<1$

Donc $\left(5\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{5}\cos(n)\right)^n\xrightarrow[n\infty]{}0$

- Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![1,n]\!]$. Alors

$$E(kx)\leqslant kx<E(kx)+1$$

donc $$kx-1\leqslant E(kx)\leqslant kx$$

Comme cela est vrai pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}(kx-1)\leqslant\sum_{k=1}^{n}E(kx)\leqslant\sum_{k=1}^{n}kx$$

$$\frac{n(n+1)}{2}x-n\leqslant\sum_{k=1}^{n}E(kx)\leqslant\frac{n(n+1)}{2}x$$

$$\underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2}x-\frac{1}{n}}_{\xrightarrow[n\infty]{}\frac{1}{2}x}\leqslant\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(kx)\leqslant\underbrace{\frac{n(n+1)}{2n^2}x}_{\xrightarrow[n\infty]{}\frac{1}{2}x}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}E(kx)\xrightarrow[n\infty]{}\frac{1}{2}x$$

- Soit $a,b\in\mathbb{R}$ tels que $a\geqslant0$. On cherche, si elle existe

$$\lim_{n\infty}\left(a+\frac{b}{n}\right)^n$$

Supposons que $|a|<1$: Alors $\left|a+\frac{b}{n}\right|\xrightarrow[n\infty]{}|a|<1$

On pose $\alpha=\frac{|a|+1}{2}$. Alors $|a|<\alpha<1$. Il existe donc $N\in\mathbb{N}$ tq :

$$\forall n\geqslant N\quad\left|a+\frac{b}{n}\right|\leqslant\alpha$$
$$\left|\left(a+\frac{b}{n}\right)^n\right|\leqslant\alpha^n\xrightarrow[n\infty]{}0$$

Donc $\left(a+\frac{b}{n}\right)^n\xrightarrow[n\infty]{}0$

- Supposons que $|a|>1$: Alors $\left|a+\frac{b}{n}\right|\xrightarrow[n\infty]{}|a|$

On pose $\alpha=\frac{1+|a|}{2}$. Alors $1<\alpha<|a|$. Il existe donc $N\in\mathbb{N}$ tq :

$\forall n \geqslant N \quad \left|\left(a+\frac{b}{n}\right)\right| \geqslant \alpha$

$\left|\left(a+\frac{b}{n}\right)^n\right| \geqslant \alpha^n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$

Donc $\left|\left(a+\frac{b}{n}\right)^n\right| \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

Si $a>1$, on en déduit que $a+\frac{b}{n}$ est positif à partir d'un certain rang et donc qu'on a :

$$\left(a+\frac{b}{n}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty.$$

Supposons que $a=1$:

$$\left(1+\frac{b}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{b}{n}\right)}$$

Si $b=0$: $\left(1+\frac{b}{n}\right)^n = 1^n = 1 \xrightarrow[n\infty]{} 1$

si $b\neq 0$: $\left(1+\frac{b}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{b}{n}\right)} = e^{b\underbrace{\frac{\ln\left(1+\frac{b}{n}\right)}{b/n}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1}} \xrightarrow[n\infty]{} e^b$

Donc, quel que soit $b\in\mathbb{R}$, $\left(1+\frac{b}{n}\right)^n \xrightarrow[n\infty]{} e^b$.

Supposons que $a=-1$: Alors, en notant

$$u_n = \left(-1+\frac{b}{n}\right)^n$$

on a $u_{2n} = \left(-1+\frac{b}{2n}\right)^{2n} = \underbrace{\left(1-\frac{b}{2n}\right)^{2n}}_{\xrightarrow[n\infty]{} e^{-b}}$ car $2n$ est pair

$$u_{2n+1} = \left(-1+\frac{b}{2n+1}\right)^{2n+1} = -\left(1-\frac{b}{2n+1}\right)^{2n+1} \xrightarrow[n\infty]{} -e^{-b}$$

Or $e^{-b} \neq -e^{-b}$, donc (u_n) n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$!

Exercice 1.2 :

1) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Alors

$$\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p}$$

$$\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) = -\ln\left(\frac{p}{p+1}\right) = -\ln\left(1-\frac{1}{p+1}\right)$$

Or $\ln\left(1-\frac{1}{p+1}\right) \leqslant -\frac{1}{p+1}$

donc $-\ln\left(1-\frac{1}{p+1}\right) \geqslant \frac{1}{p+1}$

donc $\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \geqslant \frac{1}{p+1}$.

On a donc prouvé que :

$$\forall p\in\mathbb{N}^* \quad \frac{1}{p+1} \leqslant \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{p}.$$

2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)$$

$$\geqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)$$

$$\geqslant \sum_{k=2}^{n+1} \ln(n+k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k)$$

$$\geqslant \ln(2n+1) - \ln(n+1)$$

$$\geqslant \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

De même

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k}{n+k-1}\right)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \ln(n+k-1)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k-1)$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) - \sum_{k=0}^{n-1} \ln(n+k)$$

$$\leqslant \ln(2n) - \ln(n) = \ln 2 .$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \underbrace{\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)}_{\substack{\downarrow n\infty \\ \ln 2}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leqslant \ln 2$$

Donc $\displaystyle \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\infty]{} \ln 2 .$

5.2 :

Sot (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n.\,n!}$$

1.a) Mq (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

. Sot $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$v_n - u_n = \frac{1}{n.n!} \geqslant 0$$

. Sot $n \in \mathbb{N}^*$. Alors.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)(n+1)!} > 0$$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n.n!}$$

$$= \frac{n(n+1)}{n(n+1)(n+1)!} + \frac{n-(n+1)(n+1)}{n(n+1)(n+1)!}$$

$$= \frac{-1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$$

Donc (u_n) est croissante (strictement) et (v_n) est décroissante (strictement).

. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$v_n - u_n = \frac{1}{n.n!} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note ℓ leur limite commune.

1.b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors.

$$u_n < u_{n+1} \leqslant \ell$$

$$\text{et} \quad v_n > v_{n+1} \geqslant \ell$$

Donc $u_n < \ell < v_n$. On a donc

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n.n!}$$

1.c) On multiplie l'inégalité précédente par $n!$ et on évalue en q. On obtient alors

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}}_{=m} < p.(q-1)! < \underbrace{\sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}}_{=m \in \mathbb{N}} + \frac{1}{q}$$

$$\text{Donc} \quad m < p.(q-1)! < m + \frac{1}{q} \leqslant m+1$$

$$\text{donc} \quad m < p(q-1)! < m+1$$

On a donc un entier compris strictement entre deux entiers successifs. C'est absurde. Donc $\ell \notin \mathbb{Q}$.

2.a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathcal{H}_n = " \quad e = u_n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \, dt \, "$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie : En effet

$$u_0 + \int_0^1 \frac{(1-t)^0}{0!} e^t dt = 1 + \int_0^1 e^t dt = 1 + [e^t]_0^1 = 1 + e - 1 = e$$

$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$e = u_n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$$

$$= u_n + \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

$$= u_n + \frac{1}{(n+1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

$$= u_{n+1} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t dt$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence sur n, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad e = u_n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt$$

2.b) On a :

$$\forall t \in [0,1] \quad 0 \leqslant 1-t \leqslant 1$$
$$0 \leqslant (1-t)^n \leqslant 1$$
$$0 \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \leqslant \frac{1}{n!} e^t$$

Donc, par croissance de l'intégrale :

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \leqslant \frac{1}{n!} \int_0^1 e^t dt$$

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \leqslant \frac{e-1}{n!} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Donc $\quad u_n = e - \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt \xrightarrow[n\infty]{} e$

Par unicité de la limite, $\ell = e$. Donc $e \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6.1

(i) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On définit la suite (u_n) par

- $u_0 = \alpha$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = 2\ln(1+u_n)$

Mq (u_n) est bien définie.

$\mathcal{H}_n$ = " u_n est bien défini et $u_n \geqslant 0$ "

$\mathcal{H}_0$ est vraie : u_0 est bien défini et $u_0 = \alpha \geqslant 0$

$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien défini et que $u_n \geqslant 0$. Alors

$$1 + u_n \geqslant 1$$

Donc $\quad \ln(1+u_n) \geqslant 0$

Donc $\quad u_{n+1} = 2\ln(1+u_n) \geqslant 0$

On en déduit que u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} \geqslant 0$.

Donc la suite (u_n) est bien définie et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant 0.$$

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) = 2\ln(1+x).$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geq 0 \quad g(x) = f(x) - x$$
$$= 2\ln(1+x) - x.$$

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geq 0 \quad g'(x) = \frac{2}{1+x} - 1 = \frac{2-(1+x)}{1+x}.$$
$$= \frac{1-x}{1+x}.$$

Donc : $\forall x \geq 0 \quad g'(x) = 0 \iff 1-x=0$

$$\iff x = 1$$

$$g'(x) \geq 0 \iff 1-x \geq 0$$
$$\iff x \leq 1$$

Donc

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(1)$	$\searrow$	$-\infty$

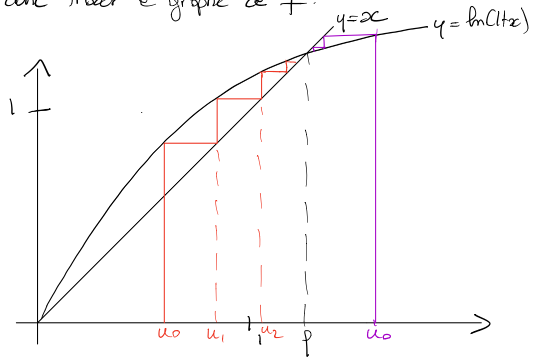
$$g(x) = 2\ln(1+x) - x = x\Big(\underbrace{\frac{2\ln(1+x)}{x} - 1}_{\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1}\Big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

g est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et $g(1) = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1 > 0$ (car $e<4$).
Puisque g est continue sur $[1,+\infty[$, elle réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $]-\infty, g(1)]$. Or $g(1) \geq 0$. Il existe donc un unique $\ell \in [1,+\infty[$ tel que $g(\ell)=0$.

Comme g est strictement croissante sur $[0,1]$ et $g(0)=0$, g s'annule une unique fois sur $[0,1]$: en 0. On en déduit le tableau de signe de g.

x	0		ℓ		$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	0	$-$	

On peut donc tracer le graphe de f.



<u>Supposons que</u> $\alpha \in]0,\ell]$: Mq : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n \leq \ell$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\mathcal{H}_n = \text{“} 0 < u_n \leq \ell \text{”}$$

<u>$\mathcal{H}_0$ est vraie</u> : En effet, $0 < \alpha \leq \ell$

<u>$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$:</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$0 < u_n \leq \ell$$

Or f est strictement croissante, donc :

$$f(0) < f(u_n) \leq f(\ell)$$

donc $0 < u_{n+1} \leq \ell$.

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence sur n, on en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_n \leq \ell.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n \in]0,\ell]$, donc $g(u_n) \geq 0$

Donc $f(u_n) \geq u_n$. Donc $u_{n+1} \geq u_n$.
Cela étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que (u_n) est croissante.

(u_n) est croissante et majorée. Il existe donc $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} \beta.$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < u_0 \leq u_n \leq \ell$. Par passage à la limite, on en déduit que

$$0 < u_0 \leq \beta \leq \ell$$

Donc $\beta \in]0, \ell]$. Or

$$u_{n+1} \xrightarrow[n\infty]{} \beta$$

$$u_{n+1} = f(u_n) \xrightarrow[n\infty]{} f(\beta)$$ car f est continue en β

Par unicité de la limite, $\beta = f(\beta)$.
Donc $\beta = 0$ ou $\beta = \ell$. Or $\beta > 0$, donc $\beta = \ell$. Donc

$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell.$$

Supposons que $\alpha = 0$: Alors : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 0$.
Donc $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Supposons que $\alpha \in [\ell, +\infty[$: On montre successivement que :

- $\forall n \in \mathbb{N} \quad \ell \leq u_n$.
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est décroissante minorée donc admet une limite $\beta \in [\ell, +\infty[$. Or f est continue en β donc $f(\beta) = \beta$, donc $\beta = 0$ ou $\beta = \ell$. Comme $\beta \geq \ell$, on en déduit que $\beta = \ell$. Donc

$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell.$$

En conclusion :
- Si $\alpha = 0$, $u_n = 0 \xrightarrow[n\infty]{} 0$
- Si $\alpha > 0$, $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$.