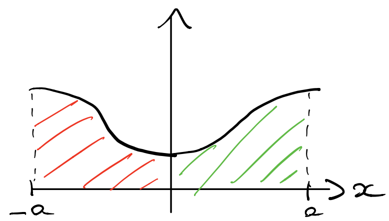
Prop 17

Preuve : Soit $a \geq 0$ et f une fonction continue sur le segment $[-a,a]$.

(i)



On suppose que $\forall x \in [-a,a] \quad f(-x) = f(x)$. Alors.

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \underset{\substack{u=-x \\ du=-dx}}{=} \int_{a}^{0} f(-u)(-)du = -\int_{a}^{0} \underbrace{f(-u)}_{=f(u)} du$$

$$= \int_{0}^{a} f(u)du = \int_{0}^{a} f(t)dt$$

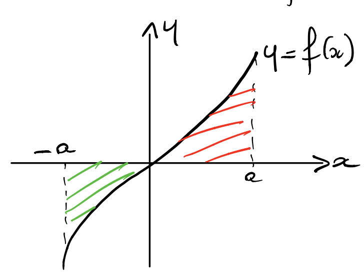
En particulier : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$

$$= \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

(ii) On suppose que :

$$\forall x \in [-a,a] \qquad f(-x) = -f(x)$$



Montrons que $\displaystyle\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$. En effet.

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx \underset{\substack{u=-x \\ du=-dx}}{=} \int_{a}^{0} f(-u)(-)du = \int_{a}^{0} (-)f(u)(-).du$$

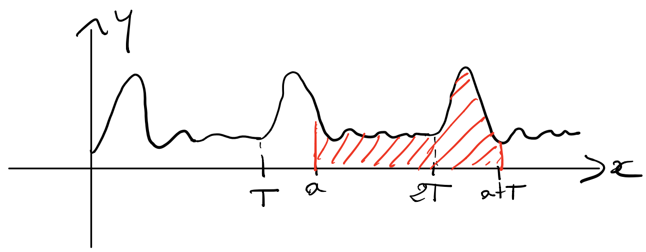
$$= \int_a^0 f(u)\,du = -\int_0^a f(u)\,du$$

En particulier

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= -\int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 0$$

(iii) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique.



Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(a) := \int_a^{a+T} f(x)dx$$

Puisque f est continue, on en déduit que φ est dérivable et :

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \varphi'(a) = \frac{d}{da}(a+T)\, f(a+T) - \frac{d}{da}(a)\, f(a)$$

$$= f(a+T) - f(a) = 0$$

car f est T-périodique

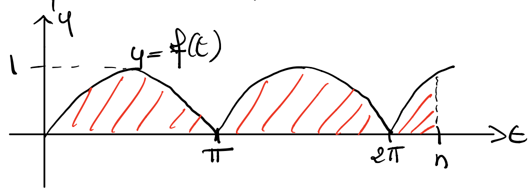
Comme φ a une dérivée nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}$, on en déduit que φ est constante.

Remarque : (i) Cette proposition reste vraie si f est seulement continue par morceaux.
Plus généralement, la proposition 16 reste vraie lorsque f est continue par morceaux et que x est de la forme $x(t) = \alpha t + \beta$.

Exercice : Soit (u_n) la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n := \int_0^n |\sin(t)|\,dt$$

Déterminer un équivalent de u_n.



$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto |\sin t|$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad k\pi \leqslant n < (k+1)\pi \iff k \leqslant \frac{n}{\pi} < k+1$

$\iff k = \lfloor \frac{n}{\pi} \rfloor$

On pose donc $k = \lfloor \frac{n}{\pi} \rfloor$

$$u_n = \int_0^n |\sin(t)|\,dt = \int_0^{k\pi} |\sin(t)|\,dt + \int_{k\pi}^n |\sin(t)|\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{k-1} \int_{i\pi}^{(i+1)\pi} |\sin(t)|\,dt + \int_{k\pi}^n |\sin(t)|\,dt$$

Or f est π-périodique. En effet, $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t+\pi) = |\sin(t+\pi)|$
$= |-\sin t|$
$= |\sin t| = f(t)$

Donc

$$u_n = \sum_{i=0}^{k-1} \int_0^{\pi} |\sin t|\,dt + \int_{k\pi}^n |\sin(t)|\,dt$$

Or $\int_0^{\pi} \underbrace{|\sin t|}_{\geqslant 0}\,dt = \int_0^{\pi} \sin t \,dt = [-\cos t]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos 0) = 2$

Donc $\quad u_n = 2k + \int_{k\pi}^n |\sin t|\,dt$

Or $\quad \forall t \in [k\pi, n] \qquad 0 \leqslant |\sin t| \leqslant 1$

$$0 \leqslant \int_{k\pi}^n |\sin t|\,dt \leqslant \int_{k\pi}^n 1\,dt$$

$$0 \leqslant \int_{k\pi}^n |\sin t|\,dt \leqslant \underbrace{(n-k\pi)}_{\leqslant \pi}.$$

Donc $\quad 0 \leqslant u_n - 2k \leqslant \pi$

$$0 \leqslant u_n - 2 \cdot \lfloor \tfrac{n}{\pi} \rfloor \leqslant \pi$$

Donc, pour $n \geqslant \pi$.

$$0 \leqslant \frac{u_n}{2\lfloor \frac{n}{\pi} \rfloor} - 1 \leqslant \underbrace{\frac{\pi}{2\lfloor \frac{n}{\pi} \rfloor}}_{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}.$$

En effet

$\frac{n}{\pi} < \lfloor \frac{n}{\pi} \rfloor + 1$

donc $\lfloor \frac{n}{\pi} \rfloor > \frac{n}{\pi} - 1$

$0 \leqslant \frac{1}{\lfloor \frac{n}{\pi} \rfloor} \leqslant \underbrace{\frac{1}{\frac{n}{\pi} - 1}}_{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes.

$$\frac{u_n}{2\lfloor \frac{n}{\pi} \rfloor} \xrightarrow[n\infty]{} 1$$

donc $\quad u_n \underset{n\infty}{\sim} 2\lfloor \frac{n}{\pi} \rfloor$

2.4

Prop 18 :

Preuve : Soit I un intervalle et $a, b \in I$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$\mathcal{H}_n$:= " Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \text{ "}$$

$\mathcal{H}_0$ est vraie : Soit f une fonction de classe C^1 sur I.

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f'(t)\,dt$$

$$= \frac{f^{(0)}(a)}{0!}(b-a)^0 + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f'(t)\,dt$$

$$= f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } f \text{ est} \\ \text{de classe } C^1}}{=} f(a) + f(b) - f(a) = f(b)$$

$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Soit f une fonction de classe C^{n+2} sur I. Alors f est de classe C^{n+1} donc

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt .$$

$f^{(n+1)}$ est C^1 car f est C^{n+2}.

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^b$$

$$- \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)$$

$$+ \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,dt$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence sur n, on en en déduit que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur I, $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0+h \in I$. Alors en appliquant (i) avec $a := x_0$ et $b := x_0+h$, on a :

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x_0+h-x_0)^k + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, h^k + \int_{x_0}^{x_0+h} \frac{(x_0+h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

$t = x_0 + u$
$dt = du.$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \int_0^h \frac{(x_0+h-(x_0+u))^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+u)\,du$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \int_0^h \frac{(h-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+u)\,du .$$

Exercice :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^x$. Alors f est de classe C^∞. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$f(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

Or : $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(k)}(x) = e^x$. Donc

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\,dt.$$

$$u_n = e - \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\,dt.$$

Or $\quad \forall t \in [0,1] \quad 0 \leqslant e^t \leqslant e$

$$0 \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!} e^t \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!} e$$

Donc $\quad 0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e\,dt$

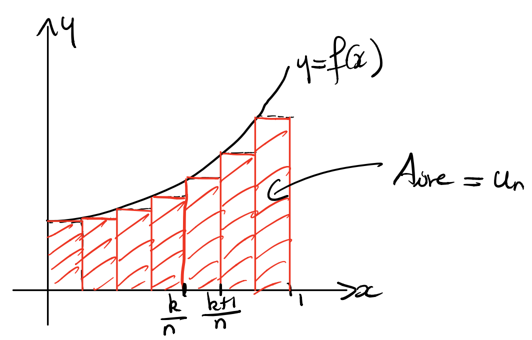
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\,dt \leqslant e \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^1 = \underbrace{\frac{e}{(n+1)!}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes.

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} e$.

(ii) Soit f une fonction de classe C^2 sur $[0,1]$



On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

On sait, puisque f est continue sur $[0,1]$ que $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)dt$.
Donc
$$u_n - \int_0^1 f(t)\,dt \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

Montrons que $\quad u_n - \int_0^1 f(t)dt = \frac{f(0)-f(1)}{2n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

Soit F une primitive de f sur $[0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on pose $x_k := \frac{k}{n}$. f est de classe C^2, donc F est de classe C^3. Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$

$$F(x_{k+1}) = \sum_{p=0}^{2} \frac{F^{(p)}(x_k)}{p!}(x_{k+1}-x_k)^p + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2!} \cdot F^{(3)}(t)dt$$

$$= \frac{F^{(0)}(x_k)}{0!} + \frac{F^{(1)}(x_k)}{1!} \cdot \frac{1}{n} + \frac{F^{(2)}(x_k)}{2!}\frac{1}{n^2}$$

$$+ \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2!} F^{(3)}(t)dt$$

$$= F(x_k) + \frac{1}{n} f(x_k) + \frac{1}{2n^2} f'(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)dt$$

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = \frac{1}{n} f(x_k) + \frac{1}{2n^2} f'(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)dt$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = \frac{1}{n} f(x_k) + \frac{1}{2n^2} f'(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)dt$$

On somme cela entre 0 et $n-1$. On obtient donc.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)dt = \overbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}^{u_n} + \frac{1}{2n^2} \sum_{k=0}^{n-1} f'(x_k)$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)dt$$

$$u_n = \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{2n} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right)}_{=: v_n} \Bigg) - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)dt$$

Or f' est continue sur $[0,1]$. Donc d'après le théorème des sommes de Riemann

$$v_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f'(t)\,dt = f(1)-f(0)$$

Donc $v_n = f(1)-f(0) + \underset{n\infty}{o}(1)$. Donc

$$u_n = \int_0^1 f(t)\,dt - \frac{1}{2n}\left(f(1)-f(0)+\underset{n\infty}{o}(1)\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 f(t)\,dt + \frac{f(0)-f(1)}{2n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)\,dt$$

Montrons que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)\,dt = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$

f est de classe C^2 donc f'' est continue sur le segment $[0,1]$.
Il existe donc $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall x \in [0,1] \quad |f''(x)| \leqslant M.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)\,dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)\,dt\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \left|\frac{(x_{k+1}-t)^2}{2}\right| . \underbrace{|f''(t)|}_{\leqslant M} dt$$

$$\leqslant M . \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2}\,dt$$

$$\leqslant M . \sum_{k=0}^{n-1}\left[-\frac{(x_{k+1}-t)^3}{3!}\right]_{x_k}^{x_{k+1}}$$

$$\leqslant M . \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(x_{k+1}-x_k)^3}{6} = \frac{1}{6}M\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\right)^3$$

$$\leqslant \frac{M}{6n^2}$$

donc $\displaystyle\left|n\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)\,dt\right| \leqslant \frac{M}{6n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \frac{(x_{k+1}-t)^2}{2} f''(t)\,dt = \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$

Donc

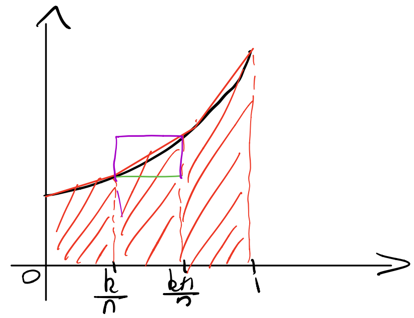
$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,dt + \frac{f(0)-f(1)}{2n} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right).$$

En particulier, si $f(0) \neq f(1)$

$$u_n - \int_0^1 f(t)\,dt \underset{n\infty}{\sim} \frac{f(0)-f(1)}{2n}$$

Remarque : Si on utilise la méthode des trapèzes, on a :

$$\forall t\in\mathbb{N} \quad t_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)}{2}$$



$$\begin{aligned}
t_n &= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\\
&= \frac{1}{2n}f(0) + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2n}f(1)\\
&= \frac{1}{2n}f(0) + u_n - \frac{1}{n}f(0) + \frac{1}{2n}f(1)\\
&= u_n + \frac{1}{2n}\big(f(1)-f(0)\big)\\
&= \int_0^1 f(t)\,dt + \frac{1}{2n}\big(f(0)-f(1)\big) + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{f(1)-f(0)}{2n}\\
&= \int_0^1 f(t)\,dt + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Prop 19 :

Preuve : Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur l'intervalle I. On suppose qu'il existe $M\geq 0$ tel que :

$$\forall t\in I \quad \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M$$

Soit $x_0\in I$ et $h\in\mathbb{R}$ tels que $x_0+h\in I$. Alors.

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+t)\,dt.$$

Donc $$\underbrace{\left| f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k \right|}_{=: q} = \left| \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+t)\,dt \right|$$

Si $h \geq 0$:

$$q \leq \int_0^h \underbrace{\left|\frac{(h-t)^n}{n!}\right|}_{\geq 0} \underbrace{\left|f^{(n+1)}(x_0+t)\right|}_{\leq M} dt$$

$$\leq \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} . M . dt = M \left[-\frac{(h-t)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_0^h$$

$$\leq M . \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{(n+1)!} |h|^{n+1}$$

Si $h < 0$: $$q = \left| -\int_h^0 \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+t)\,dt \right|$$

$$= \left| \int_h^0 \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+t)\,dt \right|$$

$$\leq \int_h^0 \left|\frac{(h-t)^n}{n!}\right| \underbrace{\left|f^{(n+1)}(x_0+t)\right|}_{\leq M} dt$$

$$\leq \int_h^0 \underbrace{\left|\frac{(t-h)^n}{n!}\right|}_{\geq 0} M . dt$$

$$\leq M \int_h^0 \frac{(t-h)^n}{n!} dt = M . \left[\frac{(t-h)^{n+1}}{(n+1)!} \right]_h^0$$

$$\leq M . \frac{(-h)^{n+1}}{(n+1)!} = M . \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercice 2.2

Soit f une fonction continue et positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. On definit la fonction g par

$$g(x) := \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1 + x \sin t} . dt .$$

1) Mq g est défini sur $]-1, +\infty[$

. Soit $x > -1$. Montrons que $g(x)$ est bien définie. Soit φ la fonction défini sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\forall t \in [0, \pi/2] \quad \varphi(t) := 1 + x \sin t .$$

. Si $x \geqslant 0$. Alors $\forall t \in [0, \pi/2]$ $\varphi(t) = 1 + \underbrace{x}_{\geqslant 0} \underbrace{\sin t}_{\geqslant 0} \geqslant 1$

. Si $x < 0$: Alors $\forall t \in [0, \pi/2]$ $0 \leqslant \sin t \leqslant 1$

$$x \leqslant x \sin t \leqslant 0 \quad \text{car } x < 0$$

$$\underbrace{1+x}_{>0} \leqslant 1 + x \sin t \leqslant 1$$

$$\varphi(t) = 1 + x \sin t > 0$$

Donc φ ne s'annule pas sur $[0, \pi/2]$. Donc

$$t \longrightarrow \frac{f(t)}{1 + x \sin t}$$

est bien défini et continue sur $[0, \pi/2]$ d'après les théorèmes usuels. Donc $g(x)$ est bien défini.

2) Mq g est décroissante : Soit $x, y > -1$ tels que $x \leqslant y$. Montrons que $g(x) \geqslant g(y)$

$$g(x) - g(y) = \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1 + x \sin t} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1 + y \sin t} dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{((1 + y \sin t) - (1 + x \sin t))}{(1 + x \sin t)(1 + y \sin t)} f(t) dt .$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{(y - x) \sin t \; f(t)}{(1 + x \sin t)(1 + y \sin t)} dt$$

$$= \underbrace{(y - x)}_{\geqslant 0} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t . f(t)}{\underbrace{(1 + x \sin t)(1 + y \sin t)}_{\geqslant 0}} dt \quad \geqslant 0$$

Donc $g(x) \geqslant g(y)$.

3) Soit $a > -1$. Mq g est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$. Soit $x, y \geqslant a$. Alors.

$$|g(x) - g(y)| = |y - x| \left| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t . f(t)}{(1 + x \sin t)(1 + y \sin t)} dt \right|$$

$$\leqslant |x - y| \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(t)| |f(t)| \, dt}{(1 + x \sin t)(1 + y \sin t)} .$$

• Si $a \geqslant 0$ $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $1 + x \sin t \geqslant 1$
$1 + y \sin t \geqslant 1$
donc $(1 + x \sin t)(1 + y \sin t) \geqslant 1$
donc $\dfrac{1}{(1 + x \sin t)(1 + y \sin t)} \leqslant 1$.

Donc $$\int_0^{\pi/2} \frac{|\sin t||f(t)|}{(1 + x \sin t)(1 + y \sin t)} dt \leqslant \int_0^{\pi/2} |(\sin t) f(t)| dt$$
$$\leqslant \underbrace{\int_0^{\pi/2} (\sin t) f(t) dt}_{=: M}$$

Donc $|g(x) - g(y)| \leqslant M |x - y|$.
Donc g est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$

• Si $a < 0$: $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $1 + x \sin t \geqslant 1 + a$.

Donc
$$|g(x) - g(y)| \leqslant |x - y| \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cdot f(t)}{(1 + a)^2} dt}_{=: M}$$

Donc g est M-lipschitzienne sur $[a, +\infty[$

g est M-lipschitzienne sur $[a, +\infty[$ donc elle est continue sur $[a, +\infty[$. Donc elle est continue en tout point de $]a, +\infty[$. Cela étant vrai quel que soit $a > -1$, on en déduit que g est continue en tout point de $]-1, +\infty[$. Elle est donc continue sur $]-1, +\infty[$.

Exercice 5.1 : pour demain.