Exercice 2.2

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$\mathcal{H}_n$ = " Soit f une fonction n fois dérivable sur un intervalle I admettant $n+1$ zéros. Alors, il existe $c \in I$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$ "

$\mathcal{H}_0$ est vraie : En effet, soit f une fonction définie sur un intervalle I admettant un zéro sur I. Alors il existe $c \in I$ tel que $f^{(0)}(c) = f(c) = 0$.

$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Soit f une fonction $n+1$ fois dérivable sur un intervalle I admettant $n+2$ zéros : $x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1}$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, f est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$, dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$ et $f(x_k) = f(x_{k+1})$ $(=0)$.
Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $f'(y_k) = 0$. On a donc construit $n+1$ valeurs $y_0, \dots, y_n$ tq

$$x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < \dots < x_n < y_n < x_{n+1}$$

et $f'(y_k)$, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
Donc f' est n fois dérivable sur I et admet $n+1$ zéros. Comme $\mathcal{H}_n$ est vraie, il existe $c \in I$ tel que $(f')^{(n)}(c) = 0$. Donc $f^{(n+1)}(c) = 0$.
Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque : Dans la preuve, il est essentiel de mettre en valeur le fait que

$$x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < \dots < x_n < y_n < x_{n+1}$$

(avec des inégalités strictes) pour montrer que $y_0, \dots, y_n$ sont deux à deux distincts et donc prouver que f' admet (au moins) $n+1$ zéros.

(ii) Vous trouverez avec plaisir cette question dans le DM. Avec des indications.