Exercice 3.4 (dim finie)

Soit E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$

1) Montrons que $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$

. Mq $rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$

Mq $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$.
Soit $y \in \operatorname{Im}(f+g)$. Alors il existe $x \in E$ tel que
$$y = (f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \operatorname{Im} f} + \underbrace{g(x)}_{\in \operatorname{Im} g} \in \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g.$$

Donc
$$\begin{aligned} \dim(\operatorname{Im}(f+g)) &\leq \dim(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g) \\ rg(f+g) &\leq \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g) - \dim(\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g) \\ &\leq \dim(\operatorname{Im} f) + \dim(\operatorname{Im} g) \\ &\leq rg(f) + rg(g). \end{aligned}$$

. Mq $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g)$

On va montrer que $rg(f) - rg(g) \leq rg(f+g)$
et $rg(g) - rg(f) \leq rg(f+g)$.

On a
$$\begin{aligned} rg(f) &= rg(f+g+(-g)) \\ &\leq rg(f+g) + rg(-g) \\ &\leq rg(f+g) + rg(g) \quad \text{car } \operatorname{Im}(-g) = \operatorname{Im} g. \end{aligned}$$

donc $rg(f) - rg(g) \leq rg(f+g)$.

De même, $rg(g) - rg(f) \leq rg(f+g)$.

Donc $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g)$.

2) On suppose que $E = F$. On suppose de plus que $f \circ g = 0$ et $f+g$ est un isomorphisme. Mq $rg(f) + rg(g) = \dim E$.

$$rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$$

Or $rg(f+g) = \dim E$ car $f+g$ est un isomorphisme donc est surjectif. Donc

$$\dim E \leq rg(f) + rg(g).$$

On a $f \circ g = 0$. Donc $\operatorname{Im} g \subset \operatorname{Ker} f$. En effet, soit $y \in \operatorname{Im} g$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = g(x)$. Donc

$$f(y) = f(g(x)) = (\underbrace{f\circ g}_{=0})(x) = 0 .$$

Donc $y \in \ker f$. Donc $\operatorname{Im} g \subset \ker f$. Donc

$$\dim(\operatorname{Im} g) \leqslant \dim(\ker f).$$
$$rg(g) \leqslant \dim(\ker f).$$

Or d'après le théorème du rang, $\dim E = \dim(\ker f) + \dim(\operatorname{Im} f)$ donc

$$rg(g) \leqslant \dim E - rg(f)$$
$$rg(f) + rg(g) \leqslant \dim E.$$

En conclusion $\dim E = rg(f) + rg(g)$.

Exercice 2.2 : intégration.

4) Soit $x \in]-1,+\infty[$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x+h \in]-1,+\infty[$.
Alors.

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+(x+h)\sin t}\,dt - \int_0^{\pi/2} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{f(t).\left((1+x\sin t)-(1+(x+h)\sin t)\right)}{(1+(x+h)\sin t)(1+x\sin t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{h} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{-h\sin t . f(t)\,dt}{(1+(x+h)\sin t)(1+x\sin t)}$$

$$= -\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t\, f(t)}{(1+(x+h)\sin t)(1+x\sin t)}\,dt$$

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \left(-\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t . f(t)}{(1+x\sin t)^2}\,dt\right)$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t . f(t)}{(1+x\sin t)^2}\,dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t\, f(t)}{(1+(x+h)\sin t)(1+x\sin t)}\,dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t . f(t).\left((1+(x+h)\sin t)-(1+x\sin t)\right)}{(1+x\sin t)^2(1+(x+h)\sin t)}\,dt$$

$$= h . \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 t . f(t)}{(1+x\sin t)^2(1+(x+h)\sin t)}\,dt$$

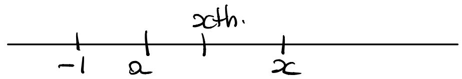
Donc

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \left(-\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cdot f(t)}{(1+x\sin t)^2}\,dt\right)\right|$$

$$\leqslant |h| \int_0^{\pi/2} \frac{\left|\sin^2(t)\, f(t)\right|}{\left|\underbrace{(1+x\sin t)^2 (1+(x+h)\sin t)}_{\geqslant 0}\right|}\,dt$$

$$\leqslant |h| \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)\, f(t)}{(1+x\sin t)^2(1+(x+h)\sin t)}\,dt$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $-1 < a < x$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $-1 \leqslant a \leqslant x+h$



Alors

$$\forall t \in [0, \pi/2] \quad 1+(x+h)\sin t \geqslant 1+a\sin t$$

$$\frac{1}{1+(x+h)\sin t} \leqslant \frac{1}{1+a\sin t}$$

Donc

$$\left|\frac{g(x+h)-g(x)}{h} - \left(-\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t \cdot f(t)}{(1+x\sin t)^2}\,dt\right)\right|$$

$$\leqslant |h| \cdot \underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t) f(t)}{(1+x\sin t)^2(1+a\sin t)}\,dt}_{\text{ne dépend pas de } h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0.$$

Donc g est dérivable en x et :

$$g'(x) = -\int_0^{\pi/2} \frac{f(t)\sin t}{(1+x\sin t)^2}\,dt.$$

Exercice 6.1