Prop 27 :

Preuve : Faire une récurrence sur k.

Exemple : DL en 0 à l'ordre 5 de $(\ln(1+x))^5$.

$$\ln(1+x) = x + \cdots$$
$$= DL_{1,n}$$

$$\ln^4(1+x) = (DL_{1,n})^4 = (x \cdot DL_{0,n-1})^4 = x^4 \cdot DL_{0,n-1}^4$$
$$= x^4 \cdot DL_{0,n-1}$$

On veut un DL de $\ln^4(1+x)$ à l'ordre 5. Il suffit donc que $DL_{0,n-1}$ soit à l'ordre 1. On veut donc $n-1=1$, soit $n=2$.

$$\ln^4(1+x) = \left[x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right]^4$$
$$= x^4 \left[1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right]^4$$
$$= x^4 \cdot \left[\left(1-\frac{1}{2}x\right)^4 + \underset{x\to 0}{o}(x)\right]$$
$$= x^4 \cdot \left(1 - \binom{4}{1}\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)$$
$$= x^4\left(1 - 2x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)$$
$$= x^4 - 2x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

Proposition 28 :

Preuve : On suppose que f admet un développement limité en a à l'ordre n :

$$f(a+u) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} a_k u^k + \underset{u\to 0}{o}(u^n)$$

et que g admet un développement limité en $f(a)$ à l'ordre n.

$$g(f(a)+v) = \sum_{k=0}^{n} b_k v^k + \underset{v\to 0}{o}(v^n)$$

Il existe donc $\eta_1>0$ et $\varepsilon_1 : [-\eta_1,\eta_1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $\eta_2>0$ et $\varepsilon_2 : [-\eta_2,\eta_2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\forall u \in [-\eta_1,\eta_1] \quad f(a+u) = f(a) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k u^k + \varepsilon_1(u)u^n}_{\xrightarrow[u\to 0]{} 0}$$

$$\forall v \in [-\eta_2, \eta_2] \quad g(f(a)+v) = \sum_{k=0}^{n} b_k v^k + \varepsilon_2(v) v^n.$$

Puisque $\sum_{k=1}^{n} a_k . u^k + \varepsilon_1(u) u^n \xrightarrow[u \to 0]{} 0$, il existe $\eta_3 \in]0, \eta_2]$ tel que

$$\forall u \in [-\eta_3, \eta_3] \quad \left| \sum_{k=1}^{n} a_k . u^k + \varepsilon_1(u) u^n \right| \leqslant \eta_2.$$

Donc

$$\forall u \in [-\eta_3, \eta_3] \quad g(f(a+u)) = g\left(f(a) + \sum_{i=1}^{n} a_i . u^i + \varepsilon_1(u) u^n \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{n} b_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_i . u^i + \varepsilon_1(u) u^n \right)^j +$$

$$\varepsilon_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i . u^i + \varepsilon_1(u) u^n \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i . u^i + \varepsilon_1(u) u^n \right)^n$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \underbrace{\left[b_j . \left(\sum_{i=1}^{n} a_i . u^i \right)^j + \underset{u \to 0}{o}(u^n) \right]}_{\text{d'après la proposition 27}}$$

$$+ \underbrace{\varepsilon_2\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i . u^i + \varepsilon_1(u) u^n}_{\downarrow u \to 0 \; 0} \Big)}_{\downarrow u \to 0 \; 0} u^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u^{\overbrace{i-1}^{\geq 0}} + \varepsilon_1(u) u^{n-1} \right)^n}_{\downarrow u \to 0 \; a_1^n}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \underbrace{b_j \left[\sum_{i=1}^{n} a_i . u^i \right]^j}_{\text{On développe et on ne garde que les exposants inférieurs à } n.} + \underset{u \to 0}{o}(u^n)$$

Exercice :

$e^{\sqrt{1+x}}$ en 0 à l'ordre 2.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!} x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)$$

$$= 1 + \underbrace{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \underset{x \to 0}{o}(x^2)}_{\downarrow x \to 0 \; 0}$$

De plus $\quad e^{1+u} = e \cdot e^{u}$
$= e\left(1+u+\frac{1}{2}u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2)\right)$

Donc $\quad e^{\sqrt{1+x}} = e\left(1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$

$$= e\left(1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)+\frac{1}{2}\cdot \underbrace{x^2\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{8}x}\right)^2}_{\text{On factorise par la partie principale.}} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$

$$= e\left(1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2\right)+\frac{1}{8}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$

$$= e\left(1+\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = e + \frac{e}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

<u>Remarque:</u> On souhaite un DL en 0 à l'ordre 4 de $\ln(\cos x)$.

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2 + \cdots$$
$$= 1 + DL_{2,n} = 1 + x^2 DL_{0,n-2}.$$

$$\ln(1+u) = u + a_2u^2 + \cdots + a_m u^m + \underset{u\to 0}{o}(u^m)$$

$u^k = \left(x^2 DL_{0,n-2}\right)^k$
$= x^{2k} \cdot DL_{0,n-2}^k$
$= x^{2k} DL_{0,n-2}$
si $2k > n$.

Donc $\quad \ln(\cos x) = \ln(1+DL_{2,n})$
$= \ln(1+x^2 DL_{0,n-2})$

Il suffit que $2m \geq n$. c'est-à-dire que $2m \geq 4$, c'est-à-dire que $m \geq 2$.

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$
$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \underset{u\to 0}{o}(u^2)$$

Donc

$$\ln(\cos x) = \ln\Big(1\underbrace{-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}_{\downarrow\, x\to 0}\Big)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right) - \frac{1}{2}x^4\left(-\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{4!}x^2}\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4\right) - \frac{1}{8}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{3\times 8} - \frac{1}{8}\right)x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3\times 8}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

$$= -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

<u>Prop 29:</u>

<u>Preuve:</u> On suppose que f admet un développement limité en a à l'ordre n,

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} a_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

et que $f(a) \neq 0$. Alors:

$$\frac{1}{f(a+h)} = \frac{1}{f(a) + \sum_{k=1}^{n} a_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)}$$

$$= \frac{1}{f(a)} \cdot \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{f(a)} . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)}$$

$$= \frac{1}{f(a)} \cdot g\left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{f(a)} h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)\right)$$

Où $g : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longrightarrow 1/u \end{array}\right.$ admet un développement limité en 1 à l'ordre n

$$g(1+u) = \frac{1}{1+u} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . u^k + \underset{u\to 0}{o}(u^n).$$

Donc, par composition, $\frac{1}{f}$ admet un développement limité en a à l'ordre n.

<u>Exemple:</u>

(i) On cherche un développement limité de $\frac{1}{\cos x}$ en 0 à l'ordre 4.

$$\cos x = 1 \underbrace{- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$$

Donc $\quad \dfrac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \underset{u \to 0}{o}(u)$

Donc $\quad \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)}$

$$= 1 - \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4\right) + \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4\right)^2 - \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4\right)^3 + \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4\right)^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

$$= 1 - \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4\right) + x^4\left(-\tfrac{1}{2} + \cancel{\tfrac{1}{4!}x^2}\right)^2 - \cancel{x^6\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4!}x^2\right)^3}$$
$$\cancel{+ x^8\left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4!}x^2\right)^4} + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

$$= 1 - \left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4\right) + \tfrac{1}{4}x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4!}\right)x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{5}{24}x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

$$\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4!} = \frac{3! - 1}{4 \times 3!} = \frac{5}{24}$$

(ii) On cherche un DL en 0 de $\tan x$ à l'ordre 5.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x + \cdots}{1 + \cdots} = \frac{DL_{1,n}}{DL_{0,m}}$$
$$= x \cdot \left(\frac{DL_{0,n-1}}{DL_{0,m}}\right)$$

On veut un DL à l'ordre 4.
On prend donc $n-1 = 4$ et $m = 4$.

$$\sin x = x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 + \underset{x \to 0}{o}(x^5)$$
$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

Donc $\quad \tan x = x \cdot \underbrace{\dfrac{1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)}{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)}}_{=: f(x)}$

f admet un développement limité en 0 à l'ordre 4.
De plus $f(x) = \tan x / x$ est paire. Il existe donc $a_0, a_2, a_4 \in \mathbb{R}$ tels que:

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

Comme $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, on en déduit que $a_0 = 1$. Donc.

$$1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4) = \left(1 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \times \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$$

$$= 1 + \left(a_2 - \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2}a_2 + a_4\right)x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

Par unicité du développement limité :

$$a_2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3!} \quad \text{et} \quad \frac{1}{4!} - \frac{1}{2}a_2 + a_4 = \frac{1}{5!}$$

Donc

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3!} = \frac{3-1}{3!} = \frac{1}{3}$$

$$a_4 = \frac{1}{5!} + \frac{1}{2\times 3} - \frac{1}{4!} = \frac{1+4\times 5-5}{5!} = \frac{16}{5!}$$

$$= \frac{2^4}{2\times 3\times 2^2\times 5} = \frac{2}{15}$$

Donc $$\tan x = x.\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{15}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5).$$

<u>Méthode 2:</u> $$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = x\left(1 - \frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \times \left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$$

$$= x\left(1 + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2\times 3!} + \frac{5}{24}\right)x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$$

$$= x\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1-2\times 5+25}{5!}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{16}{5!}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

$$\frac{16}{5!} = \frac{2^4}{2\times 3\times 2^2\times 5} = \frac{2}{15}$$

$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

Méthode 3 : $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \tan' x = 1 + \tan^2 x.$

. Puisque tan est dérivable en 0 et $\tan' 0 = 1$, que tan est impaire et que tan est C^∞, on en déduit que.

$$\tan x = x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

pas de terme en x^2 car tan est impaire.

Donc
$$\begin{aligned}
\tan^2 x &= \left(x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^2 \\
&= x^2\left(1 + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^2 \\
&= x^2\left(1 + \underset{x\to 0}{o}(x)\right) \\
&= x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)
\end{aligned}$$

donc
$$\tan' x = 1 + x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

Par intégration, puisque $\tan 0 = 0$.

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

Donc
$$\begin{aligned}
(\tan x)^2 &= \left(x + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)\right)^2 \\
&= x^2\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^2 \\
&= x^2\left(\left(1 + \frac{1}{3}x^2\right)^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\
&= x^2\left(1 + \frac{2}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) \\
&= x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)
\end{aligned}$$

donc
$$\tan' x = 1 + x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

Par intégration
$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \underset{x\to 0}{o}(x^6)$$