Exercices : Groupe symétrique, déterminants

1 Groupe symétrique

1.1 Décomposition en produit de cycles

Décomposer la permutation suivante en produit de cycles de support disjoints :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 7 & 10 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

En déduire sa signature.

1.2 Générateurs du groupe symétrique

1. Montrer que les transpositions $(1 \quad i)$ (pour $i \in [\![2, n]\!]$) engendrent le groupe symétrique $\mathcal{S}_n$.
2. Montrer que les cycles de longueur 3 engendrent $\mathcal{A}_n$.

1.3 Exercice

Déterminer l'ordre maximal d'un élément de $\mathcal{S}_{10}$.

1.4 Exercice

Montrer que $\mathcal{S}_n$ s'injecte dans $\mathcal{A}_{n+2}$. Montrer que $\mathcal{S}_4$ ne s'injecte pas dans $\mathcal{A}_5$.

1.5 Définition de la signature

Soit $n \geqslant 2$. Le but de cet exercice est de démontrer qu'il existe deux et seulement deux morphismes de groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$:

- l'application $\bar{1}$ qui a toute permutation σ associe 1
- un autre morphisme ε que l'on définira comme étant la signature

1. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe au plus un seul morphisme φ de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ différent de $\bar{1}$.
   Soit φ un morphisme de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$.
   (a) Soit τ une transposition. Monter que $\varphi(\tau) \in \{-1, 1\}$.
   (b) En déduire que φ est à valeurs dans $\{-1, 1\}$.
   (c) Soit τ_1 et τ_2 deux transpositions.
      i. Montrer que τ_1 et τ_2 sont conjuguées, c'est-à-dire qu'il existe une permutation σ telle que :
      $$\tau_1 = \sigma^{-1} \tau_2 \sigma$$
      ii. En déduire que $\varphi(\tau_1) = \varphi(\tau_2)$.
   (d) Conclure
2. Le but de cette partie est de montrer l'existence d'un morphisme de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ différent de $\bar{1}$.
   On dit qu'une partie A de $[\![1, n]\!]^2$ est une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$ lorsque :
   $$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad \begin{cases} (i, j) \in A \Longrightarrow (j, i) \notin A \\ i \neq j \Longrightarrow [(i, j) \in A \quad \text{ou} \quad (j, i) \in A] \end{cases}$$
   (a) Soit A une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$ et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. Montrer que :
   $$\sigma(A) = \{(\sigma(i), \sigma(j)) : (i, j) \in A\}$$
   est une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$.
   (b) Soit A une représentation des couples d'éléments de $[\![1, n]\!]$ et σ une permutation de $[\![1, n]\!]$. On note n_A le nombre d'inversion de σ, c'est-à-dire le nombre d'éléments (i, j) de A tels que $j - i$ et $\sigma(j) - \sigma(i)$ soient de signes distincts. On définit alors la signature de σ par :
   $$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n_A}$$
      i. Montrer que la signature ne dépend pas du choix de A.
      ii. Montrer que :
      $$\varepsilon(\sigma) = \prod_{(i,j) \in A} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$
      iii. En déduire que ε est un morphisme de groupe
   (c) Montrer que ε est différent de $\bar{1}$ et conclure.
3. En déduire qu'il existe un unique morphisme de $\mathcal{S}_n$ dans $\{-1, 1\}$ qui vaut -1 sur les transpositions. Ce morphisme est appelé signature.

2 Déterminant

2.1 Calculs de déterminant

Calculer et factoriser les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a + b & c + a & b + c \\ ab & ca & bc \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (b + c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (c + a)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a + b)^2 \end{vmatrix}$$

2.2 Calculs de déterminant

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & & & 0 \\ x & 1+x^2 & x & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & x & 1+x^2 & x \\ 0 & & & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_2 & a_2+b_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_n & \dots & \dots & a_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

2.3 Calculs de déterminants

Soit $a_1, \dots, a_n$ sont n réels. Calculer les déterminants :

$$\begin{vmatrix} \sin(a_1+a_1) & \sin(a_1+a_2) & \dots & \sin(a_1+a_n) \\ \sin(a_2+a_1) & & & \vdots \\ \vdots & & & \sin(a_{n-1}+a_n) \\ \sin(a_n+a_1) & \sin(a_n+a_2) & \dots & \sin(a_n+a_n) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \cos a_1 & \dots & \dots & \cos a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ \cos((n-1)a_1) & \dots & \dots & \cos((n-1)a_n) \end{vmatrix}$$

2.4 Déterminant de la transposition

Soit φ l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même qui à la matrice M associe sa transposée. Calculer le déterminant de φ.

2.5 Calcul de déterminant

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n]\!]$. On définit la matrice A_p de $\mathcal{M}_{p+1}(\mathbb{R})$ par :

$$A_{n,p} = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \dots & \binom{n}{p} \\ 1 & \binom{n+1}{1} & \binom{n+1}{2} & \dots & \binom{n+1}{p} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & \binom{n+p}{1} & \binom{n+p}{2} & \dots & \binom{n+p}{p} \end{pmatrix}$$

Calculer $\det A_{n,p}$.