Exercice 17.22

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) := e^x$$

Alors f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) = e^x$$

En particulier

$$\forall x \in [0,1] \quad |f''(x)| \leqslant e$$

Donc, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\forall x \in [0,1] \qquad |f(x) - (f(0) + f'(0)x)| \leqslant \frac{e x^2}{2}$$

$$|e^x - (1+x)| \leqslant \frac{e x^2}{2}$$

2) Soit (v_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n := \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \left| e^{\frac{1}{n+k}} - \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \right| \leqslant \frac{e}{2(n+k)^2}$$

Donc

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{1}{n+k}} - \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)\right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| e^{\frac{1}{n+k}} - \left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e}{2(n+k)^2}$$

Donc $$\left| \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{1}{n+k}} - n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e}{2(n+k)^2}$$

donc $$\left| v_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e}{2(n+k)^2}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{e}{2n^2} = \frac{e}{2n^2} \cdot n = \frac{e}{2n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Donc $\quad v_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Or $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

Soit f la fonction défini sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) := \frac{1}{1+x}.$$

Alors, d'après les théorèmes usuels, f est continue sur $[0,1]$. Donc, d'après le théorème sur les sommes de Riemann

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$$

Or $\quad \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt = \underbrace{\left[\ln(1+t)\right]_0^1}_{=\ln 2}$

Donc $\quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\infty]{} \ln 2.$

En conclusion

$$v_n = \underbrace{v_n - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}}_{\downarrow n\infty \atop 0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}}_{\downarrow n\infty \atop \ln 2}.$$

Donc $v_n \xrightarrow[n\infty]{} \ln 2.$

Exercice 17.26

Soit f et g deux fonctions continues sur $[0,1]$.
On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \geq 1 \qquad u_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

Mq $\quad u_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$

Soit (v_n) la suite défini par : $\forall n \geq 1 \quad v_n := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$

Puisque $t \longrightarrow f(t)g(t)$ est continue, d'après le théorème sur les sommes de Riemann.

$$v_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Or

$$\forall n \geqslant 1 \quad |u_n - v_n| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \left(g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right) \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right|$$

Or f est continue sur le segment $[0,1]$. Il existe donc $M \geqslant 0$ tel que :

$$\forall x \in [0,1] \quad |f(x)| \leqslant M$$

De plus g est continue sur le segment $[0,1]$. D'après le théorème de Heine, elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [0,1] \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |g(x) - g(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{M+1}$$

Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geqslant N \quad \frac{1}{n} \leqslant \eta$. Alors.

$$\forall n \geqslant N \quad \forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{M+1}$$

Donc

$$\forall n \geqslant N \quad |u_n - v_n| \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M \cdot \frac{\varepsilon}{M+1}$$

$$\leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon = \varepsilon$$

Donc $u_n - v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Donc $u_n = \underbrace{u_n - v_n}_{\downarrow n\infty \; 0} + \underbrace{v_n}_{\downarrow n\infty \; \int_0^1 f(t)g(t)dt}$

Donc $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)g(t)dt$