Intégration, exercice 1.2

- Limite de $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

$\forall x \in [0,1]$

$$0 \leqslant x \leqslant 1$$
$$0 \leqslant x^2 \leqslant 1$$
$$1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 2$$
$$\ln(1) \leqslant \ln(1+x^2) \leqslant \ln 2$$
$$0 \leqslant \ln(1+x^2) \leqslant \ln 2$$
$$0 \leqslant x^n \ln(1+x^2) \leqslant x^n \ln 2 .$$

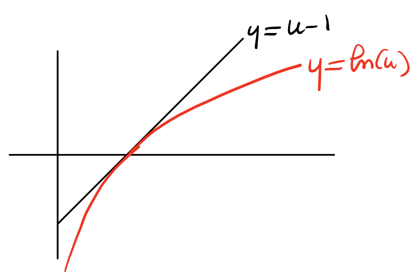
Donc
$$0 \leqslant \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \leqslant \underbrace{\int_0^1 x^n \ln 2 \,.\, dx}$$
$$= \ln(2) . \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{\ln(2)}{n+1}$$

Donc
$$\underset{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}{0} \leqslant \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,dx \leqslant \underset{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}{\underbrace{\frac{\ln(2)}{n+1}}}$$

Donc d'après le théorème des gendarmes $\int_0^1 x^n \ln(1+x^2)dx \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

(iii) On s'intéresse à $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.

On a : $\underline{\forall u \geqslant 0 \qquad \ln(1+u) \leqslant u.}$ à connaître par coeur,



Donc $\forall x \in [0,1] \qquad 0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n.$

$$\underset{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}{0} \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,dx \leqslant \int_0^1 x^n\,dx = \underset{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}{\underbrace{\frac{1}{n+1}}}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

2) On cherche la limite lorsque a tend vers 0 de

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx.$$

On "imagine" que lorsque a tend vers 0.

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx \xrightarrow[a\to 0]{} \int_0^1 x^2dx = \frac{1}{3}.$$

Cependant aucun théorème au programme de Sup ne permet de conclure ;

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx - \frac{1}{3} = \int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2} - \int_0^1 x^2dx.$$

$$= \int_0^1 x^2\left(\sqrt{1+ax^2}-1\right)dx.$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2.\left(\sqrt{1+ax^2}-1\right)\left(\sqrt{1+ax^2}+1\right)}{\sqrt{1+ax^2}+1}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2\left((1+ax^2)-1\right)}{\sqrt{1+ax^2}+1}.dx$$

$$= a\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+ax^2}+1}dx$$

Donc $\left|\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx - \frac{1}{3}\right| = |a|\left|\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+ax^2}+1}dx\right|$

$$\leqslant |a|\int_0^1 \frac{|x^4|}{|\sqrt{1+ax^2}+1|}dx$$

$$\leqslant |a|\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+ax^2}+1}dx \leqslant |a|\int_0^1 x^4dx.$$

car $\sqrt{1+ax^2}+1 \geqslant 1$

$$\leqslant \frac{1}{5}|a| \xrightarrow[a\to 0]{} 0$$

Donc $\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{1}{3}$.

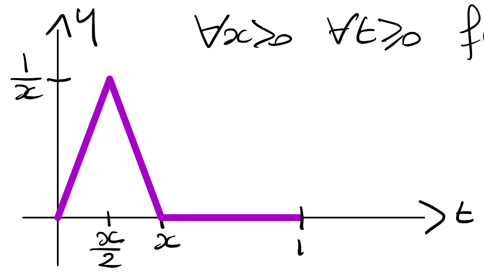
Si $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,x) \longrightarrow f(t,x) \end{array}$ $\quad g : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}. \\ t \longrightarrow g(t) \end{array}$

et si : $\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t,x) \xrightarrow[x\to a]{} g(t)$

et que f et g sont assez régulières pour être intégrées, on n'a pas toujours

$$\int_b^c f(t,x)\,dt \xrightarrow[x\to a]{} \int_b^c g(t)\,dt.$$

Par exemple soit $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t\,,x) \longrightarrow f(t,x) \end{array}$



$$\forall x>0 \ \forall t\geqslant 0 \quad f(t,x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2}t & \text{si } t \leqslant \frac{x}{2} \\ -\frac{2}{x^2}(t-x) & \text{si } t\in[\frac{x}{2},x] \\ 0 & \text{si } t\geqslant x \end{cases}$$

Alors $\quad \forall x \in]0,1] \quad \displaystyle\int_0^1 f(t,x)\,dt = \int_0^x f(t,x)\,dt$

$$= \underbrace{\int_0^{x/2} f(t,x)\,dt}_{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}} + \underbrace{\int_{x/2}^{x} f(t,x)\,dt}_{\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}}.$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Or $\quad \forall t\in[0,1] \quad f(t,x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$

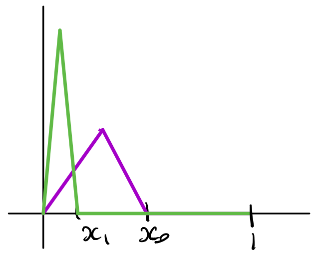
En effet, soit $t\in[0,1]$.

- si $t=0$. Alors $\forall x>0 \quad f(t,x)=0$
  Donc $f(t,x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$
- si $t>0$. Alors : $\forall x\in]0,t]$ $\quad f(t,x) \overset{x\leqslant t}{=} 0$
  Donc $f(t,x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$

Donc

$$\forall t\in[0,1] \quad f(t,x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Pourtant $\quad \displaystyle\underbrace{\int_0^1 f(t,x)\,dt}_{=\frac{1}{2}} \cancel{\xrightarrow[x\to 0]{}} \int_0^1 0\,dt = 0$



$0 < x_1 \leqslant x_0$.

2) <u>Si $a \geqslant 0$</u> : $\forall x \in [0,1]$ $\quad 1 \leqslant \sqrt{1+ax^2} \leqslant \sqrt{1+a}$

Donc $\forall x \in [0,1]$ $\quad x^2 \leqslant x^2\sqrt{1+ax^2} \leqslant x^2\sqrt{1+a}$

$$\int_0^1 x^2\,dx \leqslant \int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx \leqslant \int_0^1 x^2\sqrt{1+a}\,dx$$

$$\underset{\substack{\downarrow a\to 0 \\ 1/3}}{\frac{1}{3}} \leqslant \int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx \leqslant \underset{\substack{\downarrow a\to 0 \\ \frac{1}{3}}}{\underbrace{\sqrt{1+a}\,\frac{1}{3}}}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx \xrightarrow[\substack{a\to 0 \\ a\geqslant 0}]{} \frac{1}{3}$

<u>Si $a \leqslant 0$</u> : $\forall x \in [0,1]$
<u>$(a \geqslant -1)$</u>

$$0 \leqslant x^2 \leqslant 1$$
$$a \leqslant ax^2 \leqslant 0$$
$$1+a \leqslant 1+ax^2 \leqslant 1$$
$$a\sqrt{1+a} \leqslant \sqrt{1+ax^2} \leqslant 1$$
$$\sqrt{1+a}\,x2 \leqslant x^2\sqrt{1+ax^2} \leqslant x^2$$

donc $$\underset{\substack{\downarrow a\to 0 \\ 1/3}}{\underbrace{\sqrt{1+a}\,\frac{1}{3}}} \leqslant \int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx \leqslant \underset{\substack{\downarrow a\to 0 \\ 1/3}}{\frac{1}{3}}$$

Donc $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,dx \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ a\leqslant 0}]{} \frac{1}{3}$

Donc $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2} \xrightarrow[a\to 0]{} \frac{1}{3}$.

<u>Exercice 2.1</u>

(i) Soit f la fonction d'expression

$$f(x) := \int_1^{1+x^2} \ln(t)\,dt$$

$t \longmapsto \ln t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1+x^2 \geq 1$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$. Comme $t \longmapsto \ln t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ on en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = \frac{d}{dx}(1+x^2)\ln(1+x^2)$$
$$= 2x\ln(1+x^2)$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 0 \iff 2x\ln(1+x^2) = 0$
$\iff x = 0$ ou $\ln(1+x^2) = 0$
$\iff x = 0$ ou $1+x^2 = 1$
$\iff x = 0$.

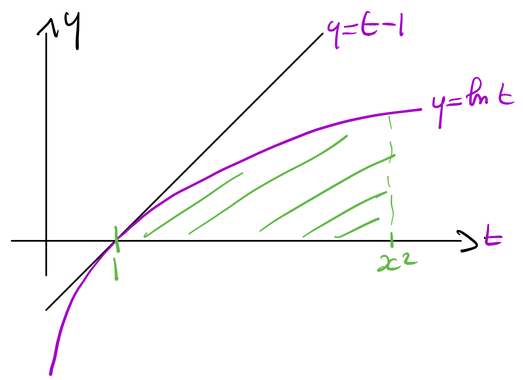
De plus $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln(1+x^2) > 0$. Donc.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

. De plus : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = \int_1^{1+(-x)^2} \ln t \, dt = \int_1^{1+x^2} \ln(t) \, dt$
$= f(x)$

Donc f est paire

.



Montrons que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \int_1^{1+x^2} \ln t \, . dt = \int_1^{1+x^2} 1 . \ln t \, dt$$

$$= \left[t.\ln t\right]_1^{1+x^2} - \int_1^{1+x^2} t.\frac{1}{t}.dt.$$

$$= (1+x^2)\ln(1+x^2) - x^2$$

$$= \underbrace{(1+x^2)}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ +\infty}}\underbrace{\left(\ln(1+x^2)-1\right)}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ +\infty}} + 1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Par parité de f, $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

<u>Pour mercredi</u> :
- . Intégration : 1.3 et 3.2
- . Colle à 17h45 :
  - . cours.
  - . exercice : choisir un des deux.
- Chat : Élève MPSI 1.
- . Mercredi :
  - . Maths : 11h $\longrightarrow$ 13h
  - . Python TP : 13h45 $\longrightarrow$ 15h45.