

## FICHE : SEMAINE DU 3/2 AU 7/2

## — Polynômes

- Définition de  $\mathbb{K}[X]$ . (note aux colleurs :  $\mathbb{K}[X]$  est défini comme vérifiant un problème universel et non comme l'ensemble des suites presque nulles).
- Produit de deux polynômes : produit de Cauchy.
- Substitution de  $X$  par un élément d'une  $\mathbb{K}$ -algèbre, polynôme annulateur, calcul avec des nombres algébriques.
- Composée de deux polynômes, polynôme pair, impair, caractérisation avec les coefficients.
- Degré d'un polynôme,  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- Degré d'une combinaison linéaire, d'un produit.
- $\mathbb{K}[X]$  est intègre. Éléments inversibles de  $\mathbb{K}[X]$ .
- Polynôme unitaire.
- Racine d'un polynôme. Un polynôme de degré  $n$  admet au plus  $n$  racines.
- Fonction polynôme, isomorphisme entre  $\mathbb{K}[X]$  et l'algèbre des fonctions polynôme lorsque  $\mathbb{K}$  est infini.
- Polynôme dérivé, dérivée  $n$ -ième.
- Degré de la dérivée.
- Dérivée de combinaisons linéaires, de produits, de composées.
- Formule de Leibnitz.
- Formule de Taylor.
- Relation de divisibilité, division euclidienne.
- Détermination du reste d'une division euclidienne. Application au calcul avec des nombres algébriques.
- Plus grand commun diviseur, algorithme d'Euclide.
- Relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux.
- Lemme de Gauss.
- Plus petit commun multiple.
- Polynômes irréductibles, décomposition en produit de polynômes irréductibles, application au calcul du pgcd et du ppcm.
- Racine d'un polynôme, racines multiples.
- Lien entre racines multiples et racines des dérivées successives.
- Un polynôme admet au plus  $n$  racines comptées avec leur ordre de multiplicité.
- Polynôme scindé, scindé simple.
- Polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Théorème fondamental de l'algèbre (ou de D'Alembert-Gauss).
- Les polynômes unitaires irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  sont les  $X - \alpha$ . Les polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sont scindés.
- Polynômes unitaires irréductibles de  $\mathbb{R}[X]$ .
- Fonctions symétriques élémentaires.
- Relations coefficients-racines.

Au programme des **questions de cours** :

- Formule de Leibnitz.
- Formule de Taylor.
- Définition, existence et unicité du pgcd de deux polynômes.
- Polynômes irréductibles dans  $\mathbb{R}[X]$ , dans  $\mathbb{C}[X]$ .
- Polynômes interpolateurs de Lagrange.
- Polynômes symétriques élémentaires, relations coefficients racines.