Cours : Développements limités

Table des matières

1 Comparaisons de fonctions

1.1 Fonctions équivalentes

Remarque :

⇨ ($\circ\circ\bullet$) On souhaite dire que deux fonctions f et g sont équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque le quotient $f(x)/g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers a. Cette définition à le défaut de ne pas avoir de sens lorsque g s'annule au voisinage de a. C'est pourquoi, nous utiliserons la définition plus générale suivante :

Définition 1 ($\circ\circ\bullet$). *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ en a lorsqu'il existe une fonction α telle que :*
- *$f(x) = \alpha(x)\, g(x)$ au voisinage de a*
- *$\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$*

On note alors :
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$$

Proposition 1 ($\circ\circ\bullet$). *Soit f, g et h des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
- *La relation d'équivalence est réflexive :*
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$$
- *La relation d'équivalence est transitive :*
$$\left[f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)\right] \Longrightarrow f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$$
- *La relation d'équivalence est symétrique :*
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$$

Proposition 2 ($\circ\circ\bullet$). *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
- *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :*
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$$
- *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a, alors :*
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \quad \text{et} \quad f(a) = 0\right]$$

Remarques :

⇨ ($\circ\circ\bullet$) Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = \sum_{k=m}^{n} a_k x^k$.
—Si $a_m \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_m x^m$. En particulier
$$1 + x^2 \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad 3x + x^3 \underset{x\to 0}{\sim} 3x$$
—Si $a_n \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} a_n x^n$. En particulier
$$1 + x^2 + 3x^3 \underset{x\to +\infty}{\sim} 3x^3$$
On a évidemment le même équivalent en $-\infty$.

⇨ ($\circ\circ\bullet$) Soit f une fonction définie au voisinage de 0.
—Si f est continue en 0 et $f(0) \neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} f(0)$. En particulier
$$e^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad \cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

—Si f est dérivable en 0, $f(0)=0$ et $f'(0)\neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} f'(0)\,x$. En particulier

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x, \qquad \sin x \underset{x\to 0}{\sim} x \quad \text{et} \quad \operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

⇨ (○○●) Si f et g sont deux fonctions telles que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$$

et si $g(x)$ tend vers $l\in\overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers a, alors il en est de même pour $f(x)$. Cependant, la réciproque est fausse : il est possible que $f(x)$ et $g(x)$ admettent une même limite $l\in\{0,\pm\infty\}$ lorsque x tend vers a, sans que $f(x)$ et $g(x)$ soient équivalents en a.

Exercice :

⇨ (○●○) Montrer que $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$.

Proposition 3 (○○●)**.** *Soit f une fonction définie au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et $l\neq 0$. Alors*

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} l \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$

De plus, $f(x)$ est équivalente à 0 en a si et seulement si la fonction f est identiquement nulle au voisinage de a.

Remarque :

⇨ (○○●) En particulier, si vous obtenez lors d'un calcul $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} 0$, c'est que vous avez fait une erreur.

Proposition 4 (○○●)**.** *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :*

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$$

Alors, il existe un voisinage de a sur lequel $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe et s'annulent simultanément.

Proposition 5 (○○●)**.**

— *Soit f_1, g_1, f_2, g_2 des fonctions définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que :*

$$f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$$

Alors :

$$f_1(x)\,f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)\,g_2(x)$$

Si de plus, f_2 et g_2 ne sont pas identiquement nulles au voisinage de a :

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{g_1(x)}{g_2(x)}$$

— *Soit f,g deux fonctions définies au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et $\alpha\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)^\alpha$ et $g(x)^\alpha$ aient un sens au voisinage de a. Alors :*

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \Longrightarrow f(x)^\alpha \underset{x\to a}{\sim} g(x)^\alpha$$

Remarques :

⇨ Attention, il n'est pas possible d'ajouter des équivalents. Par exemple

$$1+x \underset{x\to 0}{\sim} 1 \quad \text{et} \quad -1 \underset{x\to 0}{\sim} -1$$

Pourtant $(1+x)-1=x$ n'est pas équivalent à $1-1=0$ en 0.

⇨ De même, il n'est pas possible de composer des équivalents. Par exemple

$$1+x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$$

Pourtant e^{1+x} n'est pas équivalent à e^x en $+\infty$. En effet, $e^{x+1}/e^x = e \xrightarrow[x\to+\infty]{} e\neq 1$.

⇨ (○○●) Soit f et g sont deux fonctions strictement positives, équivalentes au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Si ces fonctions tendent vers $+\infty$ ou 0 lorsque x tend vers a, alors $\ln(f(x))$ et $\ln(g(x))$ sont équivalents en a. En particulier

$$\ln(1+x^2) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\ln x \quad \text{et} \quad \ln(\sin x) \underset{\substack{x\to 0\\ x>0}}{\sim} \ln x$$

Exercices :

⇨ Donner un équivalent en 0 de $\ln(1+x)\sin x$.

⇨ Chercher la limite à droite en 0 de

$$\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1-\cos x}}$$

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe xe^x. Montrer que f est bijective, puis donner la limite et un équivalent de f^{-1} en $+\infty$.

Proposition 6 (○○●)**.** *Soit $\overline{x}$ une fonction définie au voisinage de $a\in\overline{\mathbb{R}}$ et f_1, f_2 deux fonctions définies au voisinage de $b\in\overline{\mathbb{R}}$. Alors :*

$$\left[f_1(x) \underset{x\to b}{\sim} f_2(x) \quad \text{et} \quad \overline{x}(t) \xrightarrow[t\to a]{} b\right] \Longrightarrow f_1(\overline{x}(t)) \underset{t\to a}{\sim} f_2(\overline{x}(t))$$

Exercices :

⇨ Donner un équivalent en 0 de $\ln(1+\tan x)$, puis de $\operatorname{Arcsin}(-1+x)+\frac{\pi}{2}$.

1.2 Fonction négligeable devant une autre

Définition 2 ($\circ\circ\bullet$)**.** *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ en a lorsqu'il existe une fonction ε telle que :*
- *$f(x) = \varepsilon(x)\, g(x)$ au voisinage de a*
- *$\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$*

On note alors :
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$$

Proposition 7 ($\circ\circ\bullet$)**.** *Soit f, g et h des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. La relation « est négligeable devant » est transitive :*
$$\left[f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \quad \text{et} \quad g(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))\right] \Longrightarrow f(x) = \underset{x\to a}{o}(h(x))$$

Proposition 8 ($\circ\circ\bullet$)**.** *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
- *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :*
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$
- *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a, alors :*
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x)) \iff \left[\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \quad \text{et} \quad f(a) = 0\right]$$

Proposition 9 ($\circ\circ\bullet$)**.** *Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.*
- *On a :*
$$x^{\alpha_1} = \underset{x\to 0}{o}(x^{\alpha_2}) \iff \alpha_1 > \alpha_2$$
- *De plus :*
$$x^{\alpha_1} = \underset{x\to +\infty}{o}(x^{\alpha_2}) \iff \alpha_1 < \alpha_2$$

Proposition 10 ($\circ\circ\bullet$)**.** *Soit $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Alors :*
$$x^\beta = \underset{x\to+\infty}{o}(e^{\alpha x}) \qquad (\ln x)^\gamma = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^\beta\right)$$

Proposition 11 ($\circ\circ\bullet$)**.** *Soit f une fonction définie au voisinage de a. Alors :*
$$f(x) = \underset{x\to a}{o}(1) \iff f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Proposition 12 ($\circ\circ\bullet$)**.**
- *Soit g une fonction définie au voisinage de a. Alors :*
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \lambda \underset{x\to a}{o}(g(x)) + \mu \underset{x\to a}{o}(g(x)) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$$
- *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors :*
$$f(x) \underset{x\to a}{o}(g(x)) = \underset{x\to a}{o}(f(x)\, g(x))$$
cette égalité pouvant se lire dans les deux sens.
- *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. Alors :*
$$\underset{x\to a}{o}(f(x)) \underset{x\to a}{o}(g(x)) = \underset{x\to a}{o}(f(x)\, g(x))$$

Proposition 13 ($\circ\circ\bullet$)**.**
- *Soit f et g deux fonctions équivalentes en $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, une fonction est négligeable devant f en a si et seulement si elle est négligeable devant g en a.*
- *Soit f une fonction définie au voisinage de a et $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Alors, une fonction est négligeable devant f en a si et seulement si elle est négligeable devant λf en a.*

Proposition 14 ($\circ\circ\bullet$)**.** *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors :*
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) = g(x) + \underset{x\to a}{o}(g(x))$$

1.3 Fonction dominée par une autre

Définition 3 ($\circ\circ\bullet$)**.** *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $f(x)$ est dominée par $g(x)$ en a lorsqu'il existe une fonction B telle que :*
- *$f(x) = B(x)\, g(x)$ au voisinage de a*
- *B est bornée au voisinage de a*

On note alors :
$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$$

Proposition 15 ($\circ\circ\bullet$)**.** *Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*
- *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, alors :*
$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de } a$$
- *Si g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a, alors :*
$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x)) \iff \left[\frac{f(x)}{g(x)} \text{ est bornée au voisinage de } a \quad \text{et} \quad f(a) = 0\right]$$

Proposition 16 (○○●). *Soit f une fonction définie au voisinage de a. Alors :*

$$f(x) = \underset{x\to a}{O}(1) \quad\Longleftrightarrow\quad f(x) \text{ est bornée au voisinage de } a$$

2 Développements limités

2.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 4 (○○●). *Soit f une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité en a à l'ordre n lorsqu'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n) \end{aligned}$$

Remarques :

⇨ (○○●) Pour tout $x \in]-1,1[$

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

donc

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Exercices :

⇨ (○○●) Montrer que $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, puis que $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$.

Proposition 17 (○○●). *Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n :*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Si $p \in [\![0, n]\!]$, alors f admet un développement limité en a à l'ordre p et :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^p)$$

Proposition 18 (○○●). *Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n :*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Alors les coefficients $a_0, \dots, a_n$ sont uniques ; on dit que $\sum_{k=0}^{n} a_k h^k$ est la partie régulière du développement limité.

Définition 5 (○○●). *Soit f une fonction définie au voisinage de a. On suppose qu'il existe un réel $\alpha \neq 0$ et $\omega \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$f(a+h) = \alpha h^\omega + \underset{h\to 0}{o}(h^\omega)$$

Alors α et ω sont uniques ; on dit que αh^ω est la partie principale de f en a et que ω est l'ordre de cette partie principale. On a alors :

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} \alpha h^\omega$$

Exercices :

⇨ Puisque $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, alors $e^x - 1 = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, donc $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$.

Proposition 19 (○○●). *Soit f une fonction admettant un développement limité en 0 à l'ordre n :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

- *Si f est paire, a_k est nul pour tout k impair.*
- *Si f est impaire, a_k est nul pour tout k pair.*

2.2 Intégration et existence d'un développement limité

Proposition 20 (○○●). *Soit f une fonction définie au voisinage de a et en a.*

- *Alors f admet un développement limité en a à l'ordre 0 si et seulement si elle est continue en a. De plus, si tel est le cas :*

$$f(a+h) = f(a) + \underset{h\to 0}{o}(1)$$

- *Alors f admet un développement limité en a à l'ordre 1 si et seulement si elle est dérivable en a. De plus, si tel est le cas :*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\,h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

Remarques :

⇨ (○○●) Plus généralement, une fonction définie au voisinage de a admet un développement limité en a à l'ordre 0 si et seulement si elle admet une limite finie en a.

⇨ (○○●) En utilisant la dérivabilité en 0 des fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$ et $x \mapsto \cos(\pi/4+x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x) \\
\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos'\left(\frac{\pi}{4}\right)x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)
\end{aligned}$$

Exercices :

⇨ (○○●) Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Proposition 21 (○○●). *Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant a. On suppose que f admet un développement limité en a à l'ordre n :*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Alors, si F est une primitive de f :

$$F(a+h) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} h^{k+1} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^{n+1}\right)$$

Exercices :

⇨ (○○●) Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+x)$. En déduire la limite de

$$n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

lorsque n tend vers $+\infty$.

Remarques :

⇨ Il n'est pas possible de dériver un développement limité. En effet, il existe des fonctions admettant un développement limité en a à l'ordre n dont la dérivée n'admet pas de développement limité en a à l'ordre $n-1$.

⇨ Cependant, supposons que l'on ait un développement limité de f en a à l'ordre n et que l'on sache que f' est continue sur un intervalle I contenant a et qu'elle admette un développement limité en a à l'ordre $n-1$:

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n) \\
f'(a+h) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Par intégration du développement limité de f', on obtient

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{k+1} h^{k+1} + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)$$

Comme de plus

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n) \\
&= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} h^{k+1} + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n)
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement limité, on obtient

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \frac{b_k}{k+1} = a_{k+1}$$

Donc $b_k = (k+1)\,a_{k+1}$. On a donc

$$\begin{aligned}
f'(a+h) &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\,a_{k+1} h^k + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^{n-1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k a_k h^{k-1} + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}\left(h^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

Donc la partie régulière du développement limité de f' à l'ordre $n-1$ est la dérivée de la partie régulière du développement limité de f à l'ordre n.

Proposition 22 (○○●). *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I contenant a. Alors f admet un développement limité en a à tout ordre n et :*

$$\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + f'(a)\,h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)
\end{aligned}$$

2.3 Développements limités usuels

Proposition 23 (○○●). *On a :*

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\\
\operatorname{ch} x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)\\
\operatorname{sh} x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)
\end{aligned}$$

Proposition 24 (○○●). *On a :*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\\
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)\\
&= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \cdots + \binom{\alpha}{n}x^n + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right) \quad (\alpha\in\mathbb{R})\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^n\right)
\end{aligned}$$

Exercices :

⇨ (○○●) Donner un développement limité en 0 à l'ordre n de

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

En déduire un développement limité à l'ordre $2n+2$ de $\operatorname{Arcsin} x$.

2.4 Opérations usuelles sur les développements limités

Proposition 25 (○○●). *Soit f et g deux fonctions admettant un développement limité en a à l'ordre n :*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right) \quad \text{et} \quad g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité au voisinage de a à l'ordre n et :

$$\lambda f(a+h) + \mu g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Proposition 26 (○○●). *Soit f et g deux fonctions admettant un développement limité en a à l'ordre n :*

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right) \quad \text{et} \quad g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Alors fg admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière est obtenu en développant le produit des parties régulières précédentes et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs à n.

$$f(a+h)\,g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}\right) h^k + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Exercices :

⇨ (○○●) Donner un développement limité de $e^x \cos x$ en 0 à l'ordre 2.

Remarques :

⇨ On cherche un développement limité en 0 de $e^x \sin x$. Comme

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$$

on en déduit que :

$$\begin{aligned}
e^x \sin x &= \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)\right)\\
&= x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\\
&= x\left(1 + x + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\right)\\
&= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

On a ainsi obtenu un développement limité à l'ordre 3 comme produit d'un développement limité à l'ordre 3 et d'un développement limité dont l'ordre n'était que de 2. Ce phénomène apparaît dès que l'ordre de l'une des parties principales est non nul. Avant de calculer le développement limité d'un produit, on prendra donc soin de calculer les ordres auxquels il faudra effectuer le développement limité de chaque terme. Pour cela nous utiliserons la notation $\mathrm{DL}_{m,n}$ pour représenter un développement limité d'ordre n dont la partie principale est d'ordre m. Par exemple, si l'on souhaite obtenir un développement limité de $(\cos x - 1)\ln(1+x)$ en 0 à l'ordre 4, on remarque que :

$$\cos x - 1 = -\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right) \quad \text{et} \quad \ln(1+x) = x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)$$

Donc $\cos x - 1$ a une partie principale d'ordre 2, et $\ln(1+x)$ a une partie principale d'ordre 1. Donc :

$$(\cos x - 1)\ln(1+x) = \mathrm{DL}_{2,n}\,\mathrm{DL}_{1,m} = \left(x^2\,\mathrm{DL}_{0,n-2}\right)\left(x\,\mathrm{DL}_{0,m-1}\right) = x^3\,\mathrm{DL}_{0,n-2}\,\mathrm{DL}_{0,m-1}$$

Comme on souhaite un développement limité à l'ordre 4, il suffit d'obtenir un développement limité de $\mathrm{DL}_{0,n-2}\,\mathrm{DL}_{0,m-1}$ à l'ordre 1. On choisit donc n et m tels que $n-2=1$ et $m-1=1$, soit $n=3$ et $m=2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
(\cos x - 1)\ln(1+x) &= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^3\right)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)\right)\\
&= x^3\left(-\frac{1}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)\\
&= x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)\\
&= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Proposition 27 (○○●). *Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n et $k \in \mathbb{N}$:*

$$f(a+h) = \sum_{i=0}^{n} a_i h^i + \underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Alors f^k admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en développant la puissance k-ème de la partie régulière précédente et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs à n.

Remarques :

⇨ Lorsque la partie principale de f en a est d'ordre non nul, il est utile d'effectuer un calcul d'ordre. Par exemple, si l'on souhaite obtenir un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $\ln^4(1+x)$, on écrit

$$(\ln(1+x))^4 = \left(\mathrm{DL}_{1,n}\right)^4 = \left(x\,\mathrm{DL}_{0,n-1}\right)^4 = x^4\,\mathrm{DL}_{0,n-1}^4$$

Comme on souhaite un développement limité à l'ordre 5, il suffit d'obtenir un développement limité de $\left(\mathrm{DL}_{0,n-1}\right)^4$ à l'ordre 1. On choisit donc n tel que $n-1=1$, soit $n=2$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\ln^4(1+x) &= \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^2\right)\right)^4\\
&= x^4\left(1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)^4\\
&= x^4\left(\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)\\
&= x^4\left(1 - \binom{4}{1}\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right)\\
&= x^4 - 2x^5 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

Proposition 28 (○○●). *Soit f et g deux fonctions admettant respectivement des développements limités à l'ordre n en a et $f(a)$:*

$$\begin{aligned}
f(a+u) &= f(a) + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k u^k}_{P(u)} + \underset{u\to 0}{o}\left(u^n\right)\\
g(f(a)+v) &= \sum_{k=0}^{n} b_k v^k + \underset{v\to 0}{o}\left(v^n\right)
\end{aligned}$$

Alors $g \circ f$ admet un développement limité en a à l'ordre n dont la partie régulière est obtenue en substituant $P(u)$ à v dans la partie régulière du développement limité de g et en ne gardant que les monômes de degrés inférieurs à n.

Exercices :

⇨ (○○●) Donner un développement limité en 0 à l'ordre 2 de $e^{\sqrt{1+x}}$.

Remarques :

⇨ Lorsque l'on souhaite obtenir un développement limité de $g \circ f$ en a à l'ordre n et que la partie principale de $f(a+u) - f(a)$ est d'ordre $\omega \geqslant 2$, on peut montrer qu'il suffit d'effectuer un développement limité de g en $f(a)$ à l'ordre n/ω (arrondi à l'entier supérieur dans le cas où n/ω n'est pas entier). Par exemple, si on souhaite un développement limité en 0 à l'ordre 4 de $\ln(\cos x)$, on écrit :

$$\cos x = 1 \underbrace{- \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$$

Comme la partie principale en 0 de $\cos x - 1$ est d'ordre 2, il suffit de faire un développement limité de ln en 1 à l'ordre $4/2 = 2$.

$$\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}\left(u^2\right)$$

Par composition :

$$\begin{aligned}
\ln(\cos x) &= \ln\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)\right)\\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)^2+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)\\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4!}x^4\right)-\frac{1}{2}x^4\left(-\frac{1}{2}+\cancel{\frac{1}{4!}x^2}\right)^2+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)\\
&= -\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2^3}\right)x^4+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)\\
&= -\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^4\right)
\end{aligned}$$

Proposition 29 (○○●). *Soit f une fonction admettant un développement limité en a à l'ordre n :*

$$f(a+h)=\sum_{k=0}^{n}a_k h^k+\underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Si $a_0\neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de a et $1/f$ admet un développement limité en a à l'ordre n.

Exercices :

⇨ (○○●) Donner un développement limité de $1/(\cos x)$ en 0 à l'ordre 4.

⇨ (○○●) Donner un développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 5.

3 Développements asymptotiques

3.1 Développement limité généralisé au voisinage de $a\in\mathbb{R}$

Définition 6 (○○●). *Soit f une fonction définie au voisinage de $a\in\mathbb{R}$. On dit que f admet un développement limité généralisé en a à la précision h^n lorsqu'il existe $p\in\mathbb{N}$ et $b_p,\dots,b_1,a_0,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ tels que :*

$$f(a+h)=\frac{b_p}{h^p}+\cdots+\frac{b_1}{h}+a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n+\underset{h\to 0}{o}\left(h^n\right)$$

Exercices :

⇨ (○○●) Donner un développement limité généralisé de $1/\sin x$ en 0 à la précision x.

3.2 Développement asymptotique au voisinage de $a\in\mathbb{R}$

Définition 7 (○○●). *Soit f une fonction définie au voisinage de $a\in\mathbb{R}$. On appelle développement asymptotique de f en a à la précision $f_n(h)$ toute écriture :*

$$f(a+h)=a_1f_1(h)+\cdots+a_nf_n(h)+\underset{h\to 0}{o}\left(f_n(h)\right)$$

où $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!]\quad f_{k+1}(h)=\underset{h\to 0}{o}\left(f_k(h)\right)$$

Remarques :

⇨ (○○●) Nous avons vu que

$$\operatorname{Arcsin}(-1+x)+\frac{\pi}{2}\underset{x\to 0}{\sim}\sqrt{2x}$$

donc

$$\operatorname{Arcsin}(-1+x)+\frac{\pi}{2}=\sqrt{2x}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(\sqrt{x}\right)$$

On obtient donc

$$\operatorname{Arcsin}(-1+x)=-\frac{\pi}{2}+\sqrt{2}\sqrt{x}+\underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(\sqrt{x}\right)$$

qui est bien un développement asymptotique de Arcsin en -1 car, au voisinage de 0, $\sqrt{x}$ est négligeable devant 1.

Exercices :

⇨ (○○●) Donner un développement asymptotique à 2 termes en 0 de $\sqrt{\ln(1+x)}$.

3.3 Développement asymptotique au voisinage de $\pm\infty$

Définition 8 (○○●). *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On appelle développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$ à la précision $f_n(x)$ toute écriture :*

$$f(x)=a_1f_1(x)+\cdots+a_nf_n(x)+\underset{x\to +\infty}{o}\left(f_n(x)\right)$$

où $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}^*$ et :

$$\forall k\in[\![1,n-1]\!]\quad f_{k+1}(x)=\underset{x\to +\infty}{o}\left(f_k(x)\right)$$

Exercices :

⇨ (○○●) Donner un développement asymptotique à 2 termes de $\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$ en $+\infty$. Faire de même pour $\ln\left(x^3\sin(1/x)\right)$.

3.4 Quelques techniques de développements asymptotiques

Exercices :

⇨ (○○●) **Développement asymptotique d'une bijection réciproque** :
Montrer que l'application f de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui a x associe xe^x est une bijection. Donner un développement asymptotique à deux termes de f^{-1} en $+\infty$.

⇨ (○○●) **Développement asymptotique d'une suite définie par relation implicite** :
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution sur $]-\pi/2 + n\pi, \pi/2 + n\pi[$. On note u_n cette solution. Donner un équivalent de u_n puis un développemet asymptotique à 3 termes de cette suite.