Exercice

$x \longrightarrow e^x$ est croissante >0 et $x \longrightarrow \sqrt{1+x}$ est croissante ≥ 0 donc $x \longrightarrow e^x + \sqrt{1+x}$ est croissante >0, donc $x \longrightarrow 1/(e^x+\sqrt{1+x})$ est décroissante >0.

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

Or $x \longrightarrow \sqrt{x}$ et $x \longrightarrow \sqrt{x+1}$ sont croissantes ≥ 0 donc $x \longrightarrow \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ est croissante >0. Donc $x \longrightarrow 1/(\sqrt{x}+\sqrt{x+1})$ est décroissante >0.

Exercice

- $$2x^3 - x^2 + 1 = \underbrace{x^3}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ +\infty}} \underbrace{\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ 2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

- $$\frac{x^2+2x-3}{2x^2-1} = \frac{\cancel{x^2}\overbrace{\left(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\right)}^{\substack{1 \\ \nearrow x\to-\infty}}}{\cancel{x^2}\underbrace{\left(2-\frac{1}{x^2}\right)}_{\substack{\downarrow x\to-\infty \\ 2}}} \xrightarrow[x\to-\infty]{} \frac{1}{2}$$

- $$e^x - x^5 = \underbrace{e^x}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ +\infty}} \underbrace{\left(1 - \frac{x^5}{e^x}\right)}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ 1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

- $$\frac{e^x \ln x - x^{1000} + e^{2x}}{e^{2x} + \ln x + x} = \frac{\cancel{e^{2x}}\overbrace{\left(1 - \frac{x^{1000}}{e^{2x}} + \frac{\ln x}{e^x}\right)}^{\substack{1 \\ \nearrow x\to+\infty}}}{\cancel{e^{2x}}\underbrace{\left(1 + \frac{\ln x}{e^{2x}} + \frac{x}{e^{2x}}\right)}_{\substack{\downarrow x\to+\infty \\ 1}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

- $x \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

- $\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}}$ en 0. On cherche la limite à droite puis la limite à gauche.

. Pour $x>0$, on pose $u = 1/x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.
On a
$$x^2 = \frac{1}{u} \quad \text{donc} \quad x = \frac{1}{\sqrt{u}} \quad \text{car } x>0.$$
Donc
$$\frac{1}{x} e^{-1/x^2} = \sqrt{u}\, e^{-u} = \frac{u^{1/2}}{e^u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$$
Donc $\frac{1}{x} e^{-1/x^2} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} 0$

. Pour $x<0$, on pose $u = 1/x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$.
On a
$$x^2 = \frac{1}{u} \quad \text{donc} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{u}} \quad \text{car } x<0$$
Donc $\frac{1}{x} e^{-1/x^2} = -\sqrt{u}\, e^{-u} = -\frac{u^{1/2}}{e^u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$

Donc $\frac{1}{x} e^{-1/x^2} \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x<0}]{} 0$

Donc $\frac{1}{x} e^{-1/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

. On cherche la limite de $\frac{e^{e^x}}{x^2}$ en $+\infty$.
On pose $u = e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. On a $u = e^x$ donc $x = \ln u$.
Donc
$$\frac{e^{e^x}}{x^2} = \frac{e^u}{(\ln u)^2} = \underbrace{\frac{e^u}{u}}_{\downarrow u\to+\infty \;\; +\infty} \cdot \overbrace{\frac{u}{(\ln u)^2}}^{+\infty \;\; \uparrow u\to+\infty} \xrightarrow[u\to+\infty]{} +\infty.$$
Donc $\frac{e^{e^x}}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Dans les exercices qui suivent, on va utiliser $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $\frac{\cos x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
et $(e^x-1)/x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ qui sont tous des taux d'accroissement.

. On cherche la limite de $\frac{\ln(2-2\sin x)}{1-2\cos(2x)}$ en $\frac{\pi}{6}$.

$\ln(2-2\sin x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{6}]{} 0$ et $1-2\cos(2x) \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{8}]{} 0$

On a donc une forme indéterminée. On pose $x = \frac{\pi}{6} + u$.
Alors

$$\frac{\ln(2-2\sin x)}{1-2\cos(2x)} = \frac{\ln\left(2-2\sin\left(\frac{\pi}{6}+u\right)\right)}{1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+2u\right)}$$

$$= \frac{\ln\left(2-2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos u+\cos\frac{\pi}{6}\sin u\right)\right)}{1-2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos(2u)-\sin\frac{\pi}{3}\sin(2u)\right)}$$

$$= \frac{\ln\left(2-\cos u-\sqrt{3}\sin u\right)}{1-\cos(2u)+\sqrt{3}\sin(2u)}$$

$$= \underbrace{\frac{\ln\left(1+(1-\cos u)-\sqrt{3}\sin u\right)}{(1-\cos u)-\sqrt{3}\sin u}}_{\xrightarrow[u\to 0]{} 1 \text{ car } \frac{\ln(1+v)}{v}\xrightarrow[v\to 0]{} 1} \cdot \frac{\overbrace{\frac{1-\cos u}{u}}^{\xrightarrow[u\to 0]{} 0} - \sqrt{3}\,\overbrace{\frac{\sin u}{u}}^{\xrightarrow[u\to 0]{} \sqrt{3}}}{2\underbrace{\frac{1-\cos(2u)}{2u}}_{\xrightarrow[u\to 0]{} 0}+2\sqrt{3}\underbrace{\frac{\sin(2u)}{2u}}_{\xrightarrow[u\to 0]{} 1}}$$

Donc $\displaystyle \frac{\ln(2-2\sin x)}{1-2\cos(2x)} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{6}]{} \frac{-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$

. On cherche la limite de $\displaystyle \frac{\ln(2\cos x)}{e^{\sin\frac{x}{2}}-\sqrt{e}}$ en $\frac{\pi}{3}$.

On pose $x = \frac{\pi}{3}+u$. On a

$$\frac{\ln(2\cos x)}{e^{\sin\frac{x}{2}}-\sqrt{e}} = \frac{\ln\left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}+u\right)\right)}{e^{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{u}{2}\right)}-e^{1/2}}$$

$$= \frac{\ln\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos u-\sin\frac{\pi}{3}\sin u\right)\right)}{e^{1/2}\cdot\left(e^{\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{u}{2}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{u}{2}-\frac{1}{2}}-1\right)}$$

$$= \frac{\ln\left(\cos u-\sqrt{3}\sin u\right)}{e^{1/2}\left(e^{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{u}{2}-1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{u}{2}}-1\right)} \qquad \xrightarrow[u\to 0]{} 1 \text{ car } \frac{\ln(1+v)}{v}\xrightarrow[v\to 0]{} 1$$

$$= \frac{\ln\left(1+(\cos u-1)-\sqrt{3}\sin u\right)}{(\cos u-1)-\sqrt{3}\sin u}\cdot\frac{1}{e^{1/2}}\cdot\underbrace{\frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{u}{2}-1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{u}{2}}{e^{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{u}{2}-1\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{u}{2}}-1}}_{\xrightarrow[u\to 0]{} 1 \text{ car } \frac{e^{v}-1}{v}\xrightarrow[v\to 0]{} 1}$$

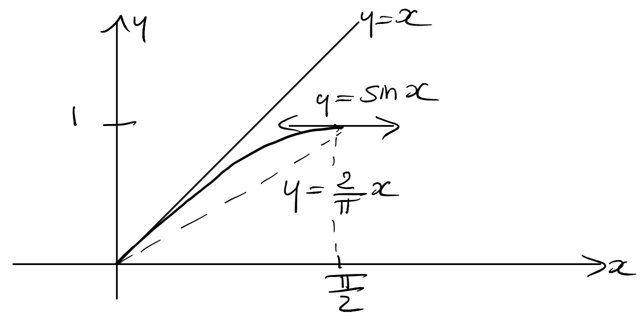
$$\cdot\ \frac{\underbrace{\frac{\cos u-1}{u}}_{\xrightarrow[u\to 0]{} 0}-\sqrt{3}\underbrace{\frac{\sin u}{u}}_{\xrightarrow[u\to 0]{} 1}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\frac{u}{2}-1}{u/2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\underbrace{\frac{\sin(u/2)}{u/2}}_{\xrightarrow[u\to 0]{} 1}}$$

$\underset{u \to 0}{\longrightarrow} 0$

Donc $\dfrac{\ln(2\cos x)}{e^{\sin\frac{x}{2}} - \sqrt{e}} \underset{x \to \frac{\pi}{6}}{\longrightarrow} \dfrac{1}{\sqrt{e}} \cdot \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{3}/4} = -\dfrac{4}{\sqrt{e}}$

Exercice

Montrer que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ $\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.



On définit f sur $[0, \pi/2]$ par :

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \quad f(x) = x - \sin x.$$

D'après les théorèmes usuels, f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \quad f'(x) = 1 - \cos x \geqslant 0.$$

Donc f est croissante. Or $f(0) = 0$, donc

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \quad f(x) \geqslant 0$$

$$x - \sin x \geqslant 0$$

$$\sin x \leqslant x.$$

Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \quad g(x) = \sin x - \tfrac{2}{\pi}x.$$

D'après les théorèmes usuels, g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et

$$\forall x \in [0, \tfrac{\pi}{2}] \quad g'(x) = \cos x - \tfrac{2}{\pi}.$$

Or $\frac{2}{\pi} < 1$ donc $g'(0) = 1 - \frac{2}{\pi} > 0$ et $g'(\frac{\pi}{2}) = 0 - \frac{2}{\pi} < 0$

Comme g' est strictement décroissante et continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, il existe un unique $x_0 \in]0,\frac{\pi}{2}[$ tel que $g'(x_0)=0$
De plus :

x	0		x_0		$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Donc :

$$\forall x \in [0,\tfrac{\pi}{2}] \quad g(x) \geq 0$$
$$\sin x - \frac{2}{\pi}x \geq 0$$
$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x$$

. Montrons que : $\forall x \in]0,1[\quad x^x (1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

On a :

$$\forall x \in]0,1[\quad x^x (1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$
$$\iff \ln\left(x^x (1-x)^{1-x}\right) \geq \ln(1/2)$$
$$\iff x\ln x + (1-x)\ln(1-x) + \ln 2 \geq 0$$

On définit f sur $]0,1[$ par :

$$\forall x \in]0,1[\quad f(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x) + \ln 2.$$

D'après les théorèmes usuels, f est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\forall x \in]0,1[\quad f'(x) = 1 + \ln x + (-1).\left(1+\ln(1-x)\right)$$
$$= \ln \frac{x}{1-x}.$$

Donc $\forall x \in]0,1[\quad f'(x) = 0 \iff \ln \frac{x}{1-x} = 0$

$$\iff \frac{x}{1-x} = 1$$
$$\iff x = 1-x \iff x = \frac{1}{2}.$$

$$\forall x \in]0,1[\quad f'(x) \geqslant 0 \iff \ln\left(\frac{x}{1-x}\right) \geqslant 0$$
$$\iff \frac{x}{1-x} \geqslant 1$$
$$\iff x \geqslant 1-x$$
$$\iff x \geqslant \frac{1}{2}.$$

Donc

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln 2 = 0$$

Donc $\quad \forall x \in]0,1[\quad f(x) \geqslant 0$

donc $\quad x^x (1-x)^{1-x} \geqslant \frac{1}{2}.$

Exercice

Montrons que $\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad 0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$

. On a évidemment $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 - \cos x \geqslant 0.$

. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \frac{x^2}{2} - 1 + \cos x$$

D'après les théorèmes usuels, f est dérivable 2 fois sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = x - \sin x.$$
$$f''(x) = 1 - \cos x \geqslant 0.$$

Donc f' est croissante. Or $f'(0) = 0$. Donc.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) \geqslant 0$

$$1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

On a donc :

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad 1 - \frac{t^2}{2} \leqslant \cos t \leqslant 1$$

Soit $x > 0$. Alors :

$$\forall t > 0 \qquad \frac{1}{t} - \frac{1}{2} t \leqslant \frac{\cos t}{t} \leqslant \frac{1}{t}$$

En intégrant l'inégalité précédente entre x et $3x$ (licite car $x \leqslant 3x$), on obtient

$$\underbrace{\int_x^{3x} \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int_x^{3x} t\,dt}_{= \underbrace{\ln 3 - 2x^2}_{\xrightarrow[x \to 0]{} \ln 3}} \leqslant \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt \leqslant \underbrace{\int_x^{3x} \frac{dt}{t}}_{= \ln 3 \xrightarrow[x \to 0]{} \ln 3}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes.

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} \ln 3.$$