2.3)

Prop 23 :

Preuve : (i) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) := e^x$$

f est de classe C^∞ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = e^x$.
Donc d'après la formule de Taylor, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité en 0 à l'ordre n et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

(ii) $$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1+(-1)^k}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{\frac{1}{2}(1+(-1)^k)}^{=:u_k}}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

$u_k = 1$ si k est pair et $u_k = 0$ si k est impair. Donc :

$$\operatorname{ch} x = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0 [2]}}^{n} \frac{1}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

En particulier, pour $2n+1$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0 [2]}}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})$$

De même $$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \cdots = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1 [2]}}^{n} \frac{x^k}{k!} + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

En particulier, à l'ordre $2n+2$.

$$\operatorname{sh} x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+2})$$

(iv) Soit f la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) := \cos x.$$

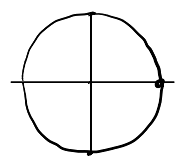
Alors f est de classe C^∞ et :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

(à prouver par récurrence). Donc, d'après la formule de Taylor, f admet un développement limité à l'ordre $n \in \mathbb{N}$ et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{f^{(k)}(0)}^{=:u_k}}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Or $\quad \forall k \in \mathbb{N} \quad f^{(k)}(0) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \equiv 0 \ [4] \\ 0 & \text{si } k \equiv 1 \ [4] \\ -1 & \text{si } k \equiv 2 \ [4] \\ 0 & \text{si } k \equiv 3 \ [4] \end{cases}$



Donc

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} \cdot x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Pour $2n+1$, on a donc

$$\cos x = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{u_k}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x \to 0}{o}(x^{2n+1})$$

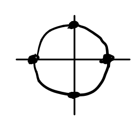
Soit f la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) := \sin x.$$

f est de classe C^∞ et : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
Donc f admet un développement limité en 0 à l'ordre n et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{f^{(k)}(0)}^{=:u_k.}}{k!} x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k = \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \equiv 0 \ [4] \\ 1 & \text{si } k \equiv 1 \ [4] \\ 0 & \text{si } k \equiv 2 \ [4] \\ -1 & \text{si } k \equiv 3 \ [4] \end{cases}$$



Donc $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

En particulier, en $2n+2$.

$$\sin x = \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{u_k}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

$$= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

<u>Prop 24:</u>

<u>Preuve</u>: (i). Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \sum_{k=0}^{n} x^k \underset{\text{car } x \neq 1}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

Donc

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \cdot x^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

(ii) En remplaçant x par $-x$ dans le DL précédent (légitime car $-x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$), on a :

$$\frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

$$= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

(iii) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\forall x > -1 \qquad f(x) := (1+x)^\alpha$$

Alors f est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\forall x>-1 \qquad \begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\ f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \end{aligned}$$

Par récurrence immédiate,

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall x>-1 \quad f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\, x^{\alpha-n}$$

Donc f admet un développement limité en 0 à l'ordre n et :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to0}{o}(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}}_{=:\binom{\alpha}{k}} x^k + \underset{x\to0}{o}(x^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + \underset{x\to0}{o}(x^n)$$

On utilisera en particulier cette formule pour $\alpha=\frac{1}{2}$.

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n} \binom{1/2}{k} x^k + \underset{x\to0}{o}(x^n)$$

(iv) On a :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}x^{n-1} + \underset{x\to0}{o}(x^{n-1})$$

Or $\frac{d}{dx}(\ln(1+x)) = \frac{1}{1+x}$. Donc en intégrant le DL précédent, on a :

$$\ln(1+x) = \ln(1) + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to0}{o}(x^n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \underset{x\to0}{o}(x^n)$$

<u>Exercice :</u>

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = (1+x)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{-1/2}{k} x^k + \underset{x\to0}{o}(x^n)$$

Or $\forall k \in \mathbb{N}$ $\binom{-1/2}{k} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!}$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1+2k-2}{2}\right)}{k!}$$

$$= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2k-1}{2}\right)}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^k \cdot \frac{1\times 3\times\cdots\times(2k-1)}{2^k}}{k!}$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!\,2^k} \cdot \frac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(2k-1)\times(2k)}{2\times 4\times\cdots\times(2k)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} \cdot \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} = (-1)^k \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Il existe donc $\eta>0$ et une fonction $\varepsilon : [-\eta,\eta] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que.

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^k + \varepsilon(x)\, x^n.$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} (-x^2)^k + \varepsilon(-x^2)(-x^2)^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \cdot x^{2k} + \underbrace{(-1)^n \varepsilon(-x^2)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} x^{2n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} x^{2k} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$$

Puisque $\frac{d}{dx}(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, on a par intégration du développement limité.

$$\arcsin x = \underbrace{\arcsin(0)}_{=0} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

Donc $$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$$

En particulier en remplaçant n par $n+1$, on a.
$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+3})$$

Par troncature
$$\arcsin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)} x^{2k+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+2})$$

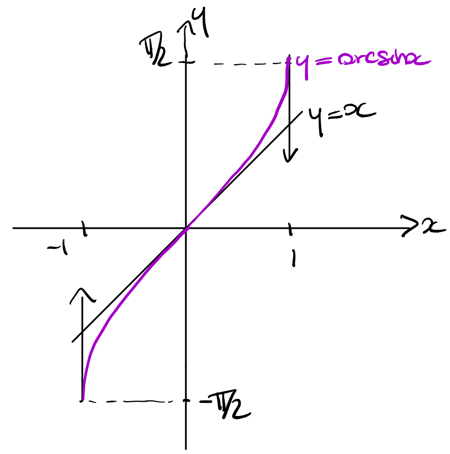
Remarque : Une fois qu'un DL est calculé, il est bon de vérifier qu'il n'y a pas d'erreur flagrante de calcul. En particulier il est bon de vérifier le signe des premiers coefficients. En effet si
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
On a
$$\forall k\in[\![0,n]\!] \quad a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \quad (\text{si } f \text{ est } C^\infty)$$

Donc a_k est du signe de $f^{(k)}(0)$.

- a_0 est égal à $f(0)$: vérifier qu'il n'y a pas d'erreur.
- a_1 est égal à $f'(0)$. Vérifier que la monotonie de f au voisinage de 0 est cohérente avec cela.
- Si :
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
avec $a_n \neq 0$, alors
$$f(x) - (a_0 + a_1 x) = a_n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$
$$\underset{x\to 0}{\sim} a_n x^n \quad \text{car } a_n \neq 0$$

Donc, au voisinage de 0, $f(x) - (a_0 + a_1 x)$ est du signe de $a_n x^n$. Cela donne la position du graphe de f par rapport à sa tangente à l'origine.

Sur cet exemple : $\arcsin x = x + \alpha x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$ où $\alpha > 0$



$\arcsin x - x \underset{x \to 0}{\sim} \alpha x^3$ ce qui est cohérent avec la position du graphe de arcsin par rapport à sa tangente.

2.4)

Prop 25

Preuve : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a. On suppose qu'il existe $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

$$g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k . h^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Alors, si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$(\lambda f + \mu g)(a+h) = \lambda f(a+h) + \mu g(a+h)$$

$$= \lambda \left(\sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^n) \right) + \mu \left(\sum_{k=0}^{n} b_k . h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^n) \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) h^k + \underbrace{\left(\lambda \underset{h \to 0}{o}(h^n) + \mu \underset{h \to 0}{o}(h^n) \right)}_{= \underset{h \to 0}{o}(h^n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) h^n + \underset{h \to 0}{o}(h^n).$$

Exemple : Effectuer un DL de sin en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.

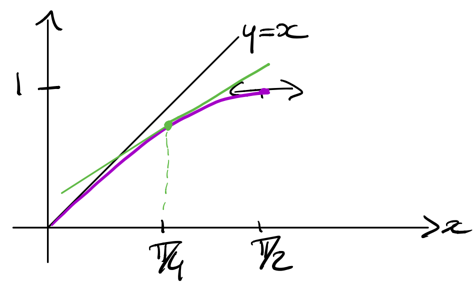
$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\frac{\pi}{4} . \cos x + \cos\frac{\pi}{4} . \sin x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos x + \sin x\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) + x - \frac{1}{3!}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{4}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$



Prop 26 :

Preuve : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage a. On suppose qu'il existe $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

$$g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} b_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Donc

$$f(a+h)\,g(a+h) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)\right)$$

$$= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i . h^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j . h^j\right) + \sum_{k=0}^{n} a_k . h^k . \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} b_k . h^k \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

$$+ \underset{h\to 0}{o}(h^n)\underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Or, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ $\quad a_k . h^k \underset{h\to 0}{o}(h^n) = \underbrace{a_k . h^k \varepsilon(h)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0} h^n$

$$= \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

De plus $\underset{h\to 0}{o}(h^n)\underset{h\to 0}{o}(h^n) = \varepsilon_1(h)h^n\varepsilon_2(h)h^n = \underbrace{\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)h^n}_{\underset{h\to 0}{\Downarrow}\,0}\cdot h^n$

$= \underset{h\to 0}{o}(h^n)$

Donc $f(a+h)g(a+h) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i h^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j . h^j\right) + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$

$= \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i+j=k} a_i . b_j h^{i+j} + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$

$= \sum_{k=0}^{2n} \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{k} a_i . b_{k-i}\right]}_{=: c_k} h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$

avec pour convention $a_{n+1} = \dots = a_{2n} = 0$ et $b_{n+1} = \dots = b_{2n} = 0$

$= \sum_{k=0}^{2n} c_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$

Or, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$ $c_k . h^k = \underbrace{c_k . h^{k-n}}_{\underset{h\to 0}{\Downarrow}\,0} . h^n$ car $k-n>0$

$= \underset{h\to 0}{o}(h^n)$

Donc $f(a+h)g(a+h) = \sum_{k=0}^{n} c_k . h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$

<u>Exercice</u>:

On souhaite un DL en 0 à l'ordre 2 de $e^x . \cos x$

$e^x . \cos x = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(1 + 0 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$

$= 1 + x + \left(-\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

$= 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$

<u>Remarque</u>: Il est parfois possible d'obtenir un DL en 0 à l'ordre n à partir de DL à des ordres inférieurs.

On cherche un DL en 0 à l'ordre 3 de $e^x \sin x$.

$$e^x \sin x = \left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$$

$$= x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(1 \, 0 - \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$

On factorise par la partie principale

$$= x\left(1 + (0+1)x + \left(-\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$

$$= x\left(1 + x + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

$$= x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

Notation personnelle : $DL_{m,n}$: développement limité à l'ordre n dont la partie principale est d'ordre m. Par exemple.

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

$$= DL_{0,5}$$

Donc $\quad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4!}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^5)$

$$= DL_{2,5}$$

$$= x^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4!}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)}_{DL_{0,3}}$$

$$= x^2 DL_{0,3}.$$

On cherche un DL en 0 à l'ordre 4 de $(\cos x - 1)\ln(1+x)$.
On cherche d'abord les ordres.

Au brouillon

$$\cos x - 1 = \frac{1}{2}x^2 + \cdots = DL_{2,n_1}$$

$$\ln(1+x) = x + \cdots = DL_{1,n_2}$$

Donc

$$(\cos x - 1)\ln(1+x) = DL_{2,n_1} \, DL_{1,n_2}$$

$$= x^2 \, DL_{0,n_1-2} \cdot x \cdot DL_{0,n_2-1}$$

$$= x^3 \cdot \underbrace{DL_{0,n_1-2} \cdot DL_{0,n_2-1}}$$

On souhaite un $DL_{0,1}$ car on souhaite un DL de $(\cos x - 1)\ln(1+x)$ à l'ordre 4.

On va donc prendre n_1, n_2 tels que $n_1 - 2 = 1$ et $n_2 - 1 = 1$, c'est-à-dire $n_1 = 3$ et $n_2 = 2$.

$$(\cos x - 1)\ln(1+x) = \left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3) - 1\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$

On factorise par la partie principale.

$$= x^2 . x \left(\left(-\frac{1}{2}\right) 0 + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)\left(1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)$$

$$= x^3\left(-\frac{1}{2} + \left(\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\right)x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)$$

$$= x^3\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \underset{x\to 0}{o}(x^4)$$

Prop 21 :

Demain : DL exercices 1.2 et 1.1.