EXERCICES : INTÉGRATION

1 Calculs d'intégrales et de limites

1.1 Calcul de quelques intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_n^m E\,(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour } n,m\in\mathbb{Z}$$

$$\int_{-1}^{2} x\,|x|\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-1}^{1} x\,|x|\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-1}^{1}\frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

1.2 Calcul de limites

1. Calculer les limites des expressions suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{Arcsin}^n\,t\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 x^n\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \ln\left(1+x^n\right)\,\mathrm{d}x$$

2. Calculer la limite de

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,\mathrm{d}x$$

lorsque a tend vers 0.

1.3 Calcul de limites

1. (a) Donner la limite, lorsque t tend vers 1 de :

$$\frac{1}{\ln t}-\frac{1}{t\ln t}$$

(b) En déduire la limite lorsque x tend vers 1 de :

$$\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

2. Donner la limite lorsque x tend vers 0 de :

$$\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1.4 Calcul de limite

Soit f une fonction continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs strictement positives. Pour tout $\alpha>0$, on définit :

$$I(\alpha)=\left(\int_0^1 f^\alpha(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

1. Montrer que $I(\alpha)$ converge vers la borne supérieure de f lorsque α tend vers $+\infty$.
2. Le but de cet question est de montrer que lorsque α tend vers 0, $I(\alpha)$ tend vers :

$$\exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\,dt\right)$$

(a) On suppose dans cette question que $\forall x\in[0,1] \quad f(x)\geqslant 1$.

i. Soit $\varepsilon>0$. Montrer qu'il existe $\eta>0$ tel que :

$$\forall x\in[0,\eta] \quad 1+(1-\varepsilon)x\leqslant e^x\leqslant 1+(1+\varepsilon)x$$

ii. En déduire qu'il existe $\eta'>0$ tel que :

$$\forall\alpha\in\,]0,\eta'] \quad 1+(1-\varepsilon)\alpha\ln(f(t))\leqslant f^\alpha(t)\leqslant 1+(1+\varepsilon)\alpha\ln(f(t))$$

iii. Conclure

(b) Montrer le cas général.

2 Sommes de Riemann

2.1 Calcul de limites

Étudier la convergence des suites de terme général :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n} \qquad n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^2} \qquad \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1}\sqrt{k}$$

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} \qquad \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$$

3 Fonctions définies par des intégrales

3.1 Étude de fonctions

Étudier le domaine de définition, les symétries, la monotonie et les limites aux bornes du domaine de définition des fonctions d'expressions :

$$x\mapsto\int_1^{1+x^2}\ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad x\mapsto\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)}$$

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \qquad x \mapsto \int_x^{2x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

3.2 Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. On définit la fonction g d'expression :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1 + x\sin t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que g est définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que g est décroissante.
3. Étant donné $a > -1$, montrer que g est lipschitzienne sur $[a, +\infty[$. En déduire que g est continue sur $]-1, +\infty[$.
4. Montrer que g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[\quad g'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)\sin t}{(1 + x\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

4 Inégalités et intégration

4.1 Fonction d'intégrale nulle

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On suppose que quelque soit a et b dans I :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

Montrer que f est nulle.

4.2 Égalité dans l'inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. On suppose que :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Montrer que :

1. Si f est réelle, f garde un signe constant.
2. Si f est complexe, f garde un argument constant.

4.3 Inégalité de Jensen

Soit f une fonction réelle continue par morceaux sur $[0, 1]$ et g une fonction réelle continue et convexe. On se propose de démontrer l'inégalité de Jensen :

$$g\left(\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 g(f(t))\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que le resultat est vrai lorsque f est une fonction en escalier.
2. En déduire le cas général.

4.4 Inégalité de Gronwall

1. Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un nombre réel k positif tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \leqslant k \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que la fonction f est nulle.

2. Soit $c \in \mathbb{R}_+$, u et v deux applications continues et positives de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u(x) \leqslant c\exp\left(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

5 Limites d'intégrales

5.1 Lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

1. En effectuant une intégration par parties, montrer que le résultat est vrai lorsque f est supposé $\mathcal{C}^1$.
2. Le but de cette question est de démontrer que le résultat est vrai dans le cas général.
   (a) Montrer que le résultat est vrai lorsque f est une fonction en escalier.
   (b) En déduire la cas général.

5.2 Généralisation du lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux et T-périodique. Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,g(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer le résultat lorsque f est constante puis lorsque f est une fonction en escalier.
2. En déduire le résultat général

3. **Application** : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f\left(0\right) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}f\left(1\right)\right)$$

   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k+1}{n} - t\right) f'\left(t\right)\,\mathrm{d}t$$

   (b) En déduire que :

$$u_n = \int_0^1 f\left(t\right)\,\mathrm{d}t + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

5.3 Limite différentielle

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'(x) + f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Le but de cet exercice est de montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

1. On note ε la fonction $\varepsilon = f + f'$. Montrer que si a est un réel :

$$f(x) = f(a)e^{a-x} + e^{-x}\int_a^x \varepsilon(t)e^t\,\mathrm{d}t$$

2. Conclure.
3. Que dire si la condition de départ est changée en :

$$f'(x) + \lambda f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

   où λ est un réel.

6 Taylor-Lagrange

6.1 Calcul numérique

Donner une majoration de l'erreur commise en prenant $x - \frac{x^2}{2}$ comme valeur approchée de $\ln(1+x)$. En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.