3)

3.1)

Def 6:

Exercice :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}$$

Or $\frac{1}{1-u} = 1 + u + \underset{u\to 0}{o}(u)$ donc

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} \cdot \left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

3.2)

Remarque : Dans dans un développement limité on a :

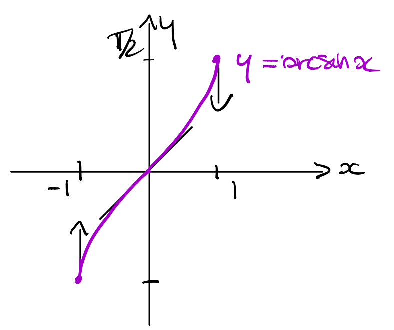
$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

$$= a_0 \times 1 + a_1 \times h + a_2 \times h^2 + \dots + a_n \times h^n + \underset{h\to 0}{o}(h^n).$$

$h = \underset{h\to 0}{o}(1)$ $\quad$ $h^2 = \underset{h\to 0}{o}(h)$ $\quad$ $\underset{h\to 0}{o}(h^n) = \underset{h\to 0}{o}(h^n)$

Def 7:

Remarque : On cherche un développement asymptotique de arcsin en -1.



arcsin est continue en -1. Elle admet un développement limité en -1 à l'ordre 0

$$\arcsin(-1+h) = \arcsin(-1) + \underset{h\to 0}{o}(1)$$
$$= -\frac{\pi}{2} + \underset{h\to 0}{o}(1)$$

arcsin n'est pas dérivable en -1, donc arcsin n'admet pas de développement limité en -1 à l'ordre 1. On va chercher un développement asymptotique de arcsin en -1 à 2 termes.

$$\arcsin(-1+u) = \dots \; ?$$

On a
$$\cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v$$
$$= 2\cos^2 v - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2 v$$

Si $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\arcsin(-1+2\sin^2 v) = -\arcsin(1-2\sin^2 v)$$ car arcsin est impair.
$$= -\arcsin(\cos(2v))$$
$$= -\arcsin(\underbrace{\sin(\tfrac{\pi}{2}-2v)}_{\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]})$$
$$= -\left(\frac{\pi}{2}-2v\right)$$
$$= -\frac{\pi}{2} + 2v$$

Donc $$\arcsin(-1+2\sin^2 v) + \frac{\pi}{2} = 2v$$

Si $v\in[0,\frac{\pi}{2}]$ et $u \geq 0$
$$2\sin^2 v = u \iff \sin^2 v = \frac{u}{2}$$
$$\iff \sin v = \sqrt{\frac{u}{2}}.$$
$$\iff v = \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{u}{2}}.$$

Donc $$\arcsin(-1+u) + \frac{\pi}{2} = 2\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{u}{2}}.$$

Or $$\operatorname{Arcsin} v \underset{v\to 0}{\sim} v$$

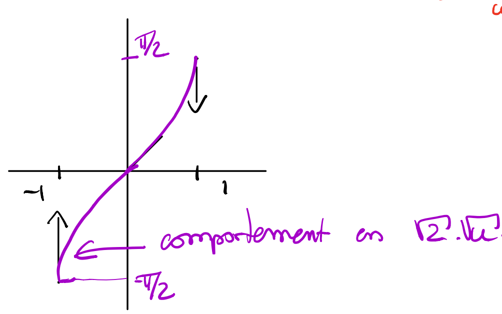
donc $$2\operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{u}{2}} \underset{u\to 0}{\sim} 2\sqrt{\frac{u}{2}} = \sqrt{2u}$$

Donc $$\arcsin(-1+u) + \frac{\pi}{2} \underset{u\to 0}{\sim} \sqrt{2u}.$$

donc $$\arcsin(-1+u) + \frac{\pi}{2} = \sqrt{2u} + \underset{u\to 0}{o}(\sqrt{2u})$$
$$\arcsin(-1+u) = -\frac{\pi}{2} + \sqrt{2u} + \underset{u\to 0}{o}(\sqrt{u})$$

$$= -\frac{\pi}{2}\times 1 + \sqrt{2}\cdot\sqrt{u} + \underset{u\to 0}{o}(\sqrt{u})$$

$\sqrt{u} = \underset{u\to 0}{o}(1)$



<u>Exercice :</u>

On cherche un DA en 0 à 2 termes de $\sqrt{\ln(1+x)}$.

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

donc $$\sqrt{\ln(1+x)} = \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{x}\cdot\left(1 - \frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)^{1/2}$$

Or $$(1+u)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}u + \underset{u\to 0}{o}(u)$$

Donc $$\sqrt{\ln(1+x)} = \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x\right) + \underset{x\to 0}{o}(x)\right)$$

$$= \sqrt{x} - \frac{1}{4}x\sqrt{x} + \underset{x\to 0}{o}(x^{3/2})$$

$$= x^{1/2} - \frac{1}{4}x^{3/2} + \underset{x\to 0}{o}(x^{3/2})$$

$x^{3/2} = \underset{x\to 0}{o}(x^{1/2})$

<u>3.3)</u>

<u>Def 8</u>

<u>Exercices :</u> On cherche un développement asymptotique à 2 termes de

$$\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)}$$

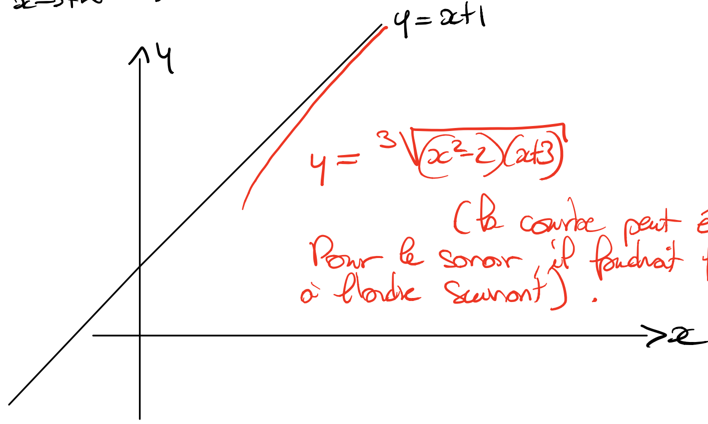
en $+\infty$.

$$(x^2-2)(x+3) = x^3+3x^2-2x-6$$
$$= x^3+3x^2+\underset{x\to+\infty}{o}(x^2)$$

Donc $$\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)} = \left(x^3+3x^2+\underset{x\to+\infty}{o}(x^2)\right)^{1/3}.$$
$$= x\cdot\Big(1+\underbrace{\frac{3}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\,0}\Big)^{1/3}.$$

Donc $$(1+u)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}u+\underset{u\to0}{o}(u)$$
$$= 1+\frac{1}{3}u+\varepsilon_1(u)u \quad \text{où} \quad \varepsilon_1(u)\xrightarrow[u\to0]{}0$$

Donc $$\sqrt[3]{(x^2-2)(x+3)} = x\left(1+\frac{3}{x}+\varepsilon_2(x)\frac{1}{x}\right)^{1/3} \quad \text{où} \quad \varepsilon_2(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$
$$= x\left(1+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{x}+\varepsilon_2(x)\frac{1}{x}\right)+\varepsilon_1\left(\frac{3}{x}+\varepsilon_2(x)\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{3}{x}+\varepsilon_2(x)\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= x\Big(1+\frac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)+\underbrace{\varepsilon_1\Big(\underbrace{\frac{3}{x}+\varepsilon_2(x)\frac{1}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}\Big)\cdot\frac{1}{x}\cdot\Big(\underbrace{3+\varepsilon_2(x)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}3}\Big)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}\Big)$$
$$= x\left(1+\frac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x\left(1+\frac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= x+1+\underset{x\to+\infty}{o}(1)$$



. DA en $+\infty$ à 2 termes de $\ln\left(x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$$\sin u = u - \frac{1}{6}u^3 + \underset{u\to 0}{o}(u^3)$$

$$= u - \frac{1}{6}u^3 + \varepsilon_1(u).u^3 \quad \text{où} \quad \varepsilon_1(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0.$$

donc $\sin\frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^3} + \varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^3}.$

donc $x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 - \frac{1}{6} + \varepsilon_1\left(\frac{1}{x}\right)$

$$= x^2 - \frac{1}{6} + \underset{x\to+\infty}{o}(1)$$

$$\ln\left(x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \ln\left(x^2 - \frac{1}{6} + \underset{x\to+\infty}{o}(1)\right)$$

$$= \ln\left(x^2\left(1 - \frac{1}{6x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)$$

$$= 2\ln x + \ln\Big(1 \underbrace{- \frac{1}{6x^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}\Big)$$

Or $\ln(1+u) = u + \underset{u\to 0}{o}(u)$

$$= u + \varepsilon_2(u)u \quad \text{où} \quad \varepsilon_2(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0.$$

Donc

$$\ln\left(x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 2\ln x + \ln\left(1 - \frac{1}{6x^2} + \varepsilon_3(x)\frac{1}{x^2}\right) \quad \text{où } \varepsilon_3(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

$$= 2\ln x + \left(-\frac{1}{6x^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$+ \varepsilon_2\left(-\frac{1}{6x^2} + \varepsilon_3(x)\frac{1}{x^2}\right)\left(-\frac{1}{6x^2} + \varepsilon_3(x)\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2\ln x - \frac{1}{6x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) +$$

$$\underbrace{\varepsilon_2\Big(\underbrace{-\frac{1}{6x^2} + \varepsilon_3(x)\frac{1}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}\Big)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}\frac{1}{x^2}\Big(\underbrace{-\frac{1}{6} + \varepsilon_3(x)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{6}}\Big) = 2\ln x - \frac{1}{6x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right) + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

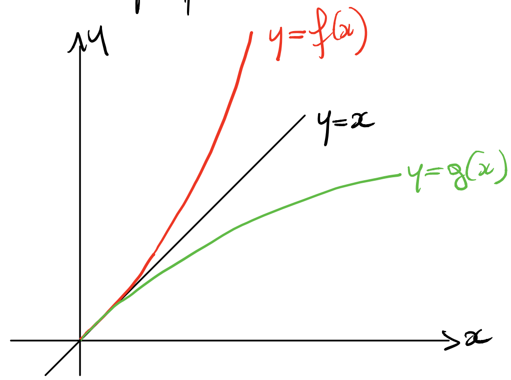
$$= 2\ln x - \frac{1}{6x^2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

3.4)

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) := xe^x.$$

On a vu que f réalisait une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.
On note g sa bijection réciproque :



$$\begin{aligned} f(x) &= xe^x \\ &= x\left(1+x+\underset{x\to 0}{o}(x)\right) \\ &= x+x^2+\underset{x\to 0}{o}(x) \end{aligned}$$

On a vu que

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln x.$$

donc $\quad g(x) = \ln x + \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x).$

Or :

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(g(x)) = x \qquad \text{(car } f\circ g = \mathrm{Id}\text{)}$$

$$g(x)e^{g(x)} = x$$

$$e^{g(x)} = \frac{x}{g(x)}$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{x}{g(x)}\right)$$

donc $\quad g(x) = \ln(x) - \ln(g(x))$

donc $\quad g(x) = \ln(x) - \ln\left(\ln x + \underset{x\to+\infty}{o}(\ln x)\right)$

$$= \ln(x) - \ln\left(\ln x\left(1+\underset{x\to+\infty}{o}(1)\right)\right)$$

$$= \ln x - \ln(\ln x) - \underbrace{\ln(1 + o_{x\to+\infty}(1))}_{\downarrow_{x\to+\infty}\ 0}$$

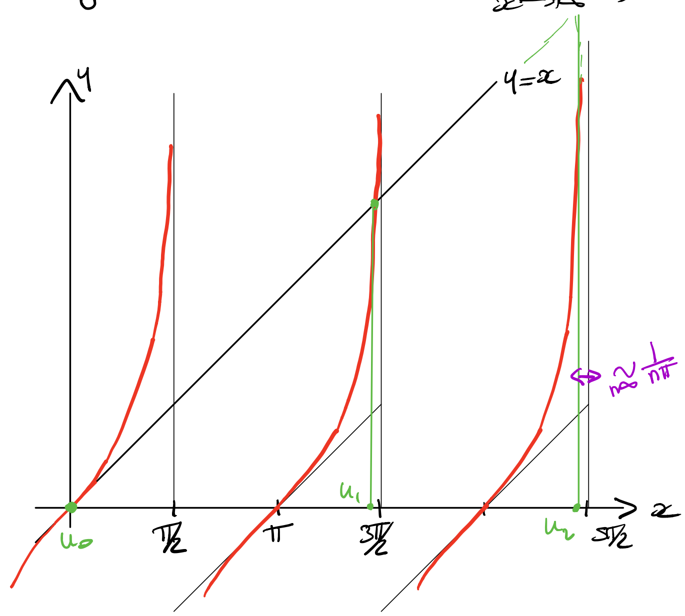
$$= \ln(x) - \ln(\ln x) + o_{x\to+\infty}(1)$$

$$\ln(\ln x) = o_{x\to+\infty}(\ln(x))$$

$$o_{x\to+\infty}(1) = o_{x\to+\infty}(\ln(\ln x))$$

Donc $\qquad g(x) = \ln x - \ln(\ln x) + o_{x\to+\infty}(1)$

(ii)



- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

  Soit φ la fonction définie sur $\mathcal{D} = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ par :

$$\forall x \in \mathcal{D} \qquad \varphi(x) := \tan x - x$$

D'après les théorèmes usuels, φ est dérivable sur $\mathcal{D}$ et :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \varphi'(x) = 1 + \tan^2 x - 1$$
$$= \tan^2 x \geqslant 0.$$

De plus $\quad \forall x \in \mathcal{D} \quad \varphi'(x) = 0 \iff x = n\pi$

Donc φ est strictement croissante sur $\mathcal{D}$. Comme elle est continue et :

$$\varphi(x) = \underbrace{\tan x}_{\substack{\downarrow x \to \frac{\pi}{2}+n\pi \\ x<\\ +\infty}} - x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}+n\pi]{} +\infty$$

$$\varphi(x) = \underbrace{\tan x}_{\substack{\downarrow x \to -\frac{\pi}{2}+n\pi \\ > \\ -\infty}} - x \xrightarrow[x \to -\frac{\pi}{2}+n\pi]{} -\infty$$

Donc d'après le théorème de la bijection, l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$. On la note (u_n).

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$

$$-\frac{\pi}{2}+n\pi \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}+n\pi$$

$$\underbrace{1-\frac{1}{2n}}_{\substack{\downarrow n\infty \\ 1}} \leqslant \frac{u_n}{n\pi} \leqslant \underbrace{1+\frac{1}{2n}}_{\substack{\downarrow n\infty \\ 1}}$$

Donc $\frac{u_n}{n\pi} \xrightarrow[n\infty]{} 1$ d'après le théorème des gendarmes.

Donc $u_n \underset{n\infty}{\sim} n\pi$

Donc $u_n = n\pi + \underset{n\infty}{o}(n\pi) = n\pi + \underset{n\infty}{o}(n)$

Or $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = \tan u_n$.

$$\arctan(u_n) = \arctan(\tan(u_n))$$

$$= \arctan(\tan(\underbrace{u_n - n\pi}_{\in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}))$$

$$= u_n - n\pi$$

$$u_n = n\pi + \arctan(u_n).$$

Or $\forall x>0$ $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ (cf cours sur les fonctions usuelles)

Donc $\forall n \geqslant 1$ $u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\underbrace{\frac{1}{u_n}}_{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}\right)$

Or $\quad \operatorname{Arctan} x = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$

$$= x + \varepsilon(x)x \quad \text{où} \quad \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Donc
$$u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{u_n} + \varepsilon\left(\frac{1}{u_n}\right)\cdot\frac{1}{u_n}\right)$$

$$= n\pi + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{n\pi + \underset{n\infty}{o}(n)} + \varepsilon\left(\frac{1}{u_n}\right)\cdot\frac{1}{n\pi + \underset{n\infty}{o}(n)}\right)$$

$$= n\pi + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{n\pi}\cdot\frac{1}{1+\underset{n\infty}{o}(1)} + \underbrace{\varepsilon\left(\frac{1}{u_n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0}\frac{1}{n\pi}\underbrace{\frac{1}{1+\underset{n\infty}{o}(1)}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1}\right)$$

$$= n\pi + \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{n\pi}\left(1+\underset{n\infty}{o}(1)\right) + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$u_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

$1 = \underset{n\infty}{o}(n) \qquad \frac{1}{n} = \underset{n\infty}{o}(1)$

Exercice 9.2.

Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrons que f est de classe C^1 sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

- D'après les théorèmes, f est de classe C^1 sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$.
- Montrons que f est continue et dérivable en 0.
  On va montrer que f admet un DL à l'ordre 1 en 0.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\} \qquad f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{DL_{1,n}} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x DL_{0,n-1}} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{DL_{0,n-1}} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(DL_{0,n-1} - 1\right)$$

On veut un DL de $DL_{0,n-1} - 1$ à l'ordre 2. On choisit n tel que $n-1=2$. Soit $n=3$

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{1 - \underbrace{\frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}} - 1\right)$$

Or $\frac{1}{1-u} = 1 + u + \underset{u\to 0}{o}(u)$. Donc

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}\cdot\left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) - 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Donc $$f(x) = \frac{1}{6}x + \underset{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}}{o}(x)$$

Or $f(0)=0$ et $\frac{1}{6}\times 0 = 0$ donc.

$$f(x) = \frac{1}{6}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Donc f est continue et dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{6}$.

Montrons que f' est continue en 0. D'après les théorèmes usuels.

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \quad f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{-\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{x^2} = \frac{-DL_{0,m}}{(DL_{1,n})^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{DL_{0,m}}{(x\, DL_{0,n-1})^2} + \frac{1}{x^2}.$$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{DL_{0,m}}{DL^2_{0,n-1}} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\cdot\underbrace{\left(\frac{DL_{0,m}}{DL_{0,n-1}} + 1\right)}_{\text{On veut un DL à l'ordre 2}}$$

On prend $m=2$ et $n=3$.

Donc

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\} \quad f'(x) = \frac{-\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$= \left(-1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)^2} + \frac{1}{x^2}.$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\left(-1 + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)\left(1 + \frac{1}{3}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) + 1\right)$$

car $(1+u)^{-2} = 1 - 2u + \underset{u\to 0}{o}(u)$

$$= \frac{1}{x^2}\left(-1 + \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2) + 1\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{6}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = \frac{1}{6} + \underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{6}$$

Donc $f'(x) \xrightarrow[\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}]{} \frac{1}{6} = f'(0)$.

Donc f' est continue en 0. Donc f est de classe C^1 sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.