TP INFO : NOMBRES FLOTTANTS

1 Ça commence mal

Demander à Python si `0.1 + 0.2 == 0.3`.

2 Calcul de dérivée

On se donne une fonction numérique f dont on souhaite évaluer la dérivée $f'(x)$. Pour cela, on utilisera les deux approximations suivantes :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad f'(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

1. Écrire deux fonctions `derive_1` et `derive_2` qui prennent en entrée f, x et ε et qui renvoient respectivement l'approximation de $f'(x)$ donnée par la première et la seconde formule.
2. Testez ces fonctions avec $f(x)=\sqrt{x}$ puis $f(x)=e^x$ pour différentes valeurs de x et de ε. Est-ce que plus ε est petit, plus l'approximation est bonne ?
3. Étant donné une fonction f, tracez en fonction de n, le graphe de

$$u_n = -\log_{10}\left|\frac{\varphi_n(x)-f'(x)}{f'(x)}\right|$$

où $\varphi_n(x)$ est le nombre flottant renvoyé par la fonction `derive_1` appelée avec f, x et $\varepsilon = 10^{-n}$. La fonction f' sera implémentée en utilisant l'expression de la dérivée de f. Donnez la signification de u_n et expliquez les variations de la suite (u_n). Estimez, en fonction de $u \approx 10^{-16}$, la valeur de ε qui semble minimiser l'erreur commise en utilisant la fonction `derive_1` pour obtenir une approximation de $f'(x)$.
4. Répétez l'expérience avec la fonction `derive_2`.
5. Quelle méthode recommanderiez-vous à une personne souhaitant calculer numériquement $f'(x)$ avec la meilleure précision si on a seulement accès à une fonction calculant $f(x)$?

3 Un calcul d'intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e - nu_{n-1}$.
2. En déduire une fonction calculant u_n.
3. Testez cette fonction pour différentes valeurs de n. Expliquez ce qu'il se passe.

4 Suite de Jean-Michel Muller

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = -4 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2 \quad u_n = 111 - \frac{1130}{u_{n-1}} + \frac{3000}{u_{n-1}u_{n-2}}$$

1. Écrire une fonction qui prend en paramètre n et qui renvoie u_n.
2. Quel semble être la limite de la suite (u_n) ?
3. On peut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-3\times 6^{n+1} + 4\times 5^{n+1}}{-3\times 6^n + 4 \times 5^n}$$

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

5 De l'importance de choisir une bonne expression

1. On considère deux expressions de la même fonction

$$f_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Pour une grande valeur de x, laquelle de ces expressions est la plus appropriée ?
2. Sous quelle forme mettrait-on $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ si l'on voulait obtenir une bonne précision pour x grand ?
3. (a) Écrire une fonction `trinome` qui, étant donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$, renvoie les deux racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

   (b) Testez le programme précédent pour $a = 1$, $b = -10^n$, $c = 1$ et différentes valeurs de n. L'erreur relative sur les racines vous parrait-elle toujours bonne ?
   (c) Proposez une solution pour que cette erreur relative reste faible, même pour n assez grand.
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

On admet que

$$f(x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

(a) Implémentez f en utilisant les deux expressions suivantes.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_1(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{e^x - 1}{\ln(e^x)}$$

Essayez ces deux implémentations pour des petites valeurs de x. Quelle implémentation vous parrait la plus précise ?

(b) Si vous avez du temps libre ce soir, essayez de donner une explication.