Exercice 1.2

1) Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) := \sqrt{x}.$$

Supposons que f admette un DL à l'ordre $n \geqslant 1$ en 0. Alors, par troncature, elle admet un DL à l'ordre 1 en 0. C'est absurde car f n'est pas dérivable en 0.
Donc $\sqrt{x}$ n'admet pas de DL en 0 à l'ordre $n \geqslant 1$.

2) Soit f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) := x^{\frac{13}{3}}$$

Alors $13 = 3 \times 4 + 1$ donc $\frac{13}{3} = 4 + \frac{1}{3}$.

Donc
$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) = x^{4+\frac{1}{3}} = \underbrace{x^{\frac{1}{3}}}_{\xrightarrow[x \to 0]{} 0} \cdot x^4 = \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

Donc f admet un DL en 0 à l'ordre 4.
Mq f n'admet pas de DL en 0 à un ordre $n \geqslant 5$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'elle en admet un. Par troncature, on en déduit qu'elle admet un DL en 0 à l'ordre 5. Il existe donc $a_0, \dots, a_5 \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{5} a_k \cdot x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^5)$$

Par troncature

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_4 x^4 + \underset{x \to 0}{o}(x^4)$$

Or $f(x) = \underset{x \to 0}{o}(x^4)$. Donc, par unicité du développement limité

$$a_0 = a_1 = \dots = a_4 = 0$$

Donc
$$f(x) = a_5 x^5 + \underset{x \to 0}{o}(x^5)$$

$$x^{1/3} \cdot x^4 = a_5 x^5 + \underset{x \to 0}{o}(x^5)$$

donc
$$\underbrace{\frac{1}{x^{2/3}}}_{\xrightarrow[x \to 0,\ x > 0]{} +\infty} = \underbrace{a_5 + \underset{x \to 0}{o}(1)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} a_5}$$

C'est absurde, donc f n'admet pas de DL en 0 à l'ordre $n \geqslant 5$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$

- Si n est pair. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.

$$|x|^n = |x|^{2p} = (|x|^2)^p = (x^2)^p = x^{2p} = x^n$$
$$= x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Donc $|x|^n$ admet un DL en 0 à l'ordre n.

- Si n est impair. Alors il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p+1$

Montrons que $|x|^n$ n'admet pas de DL en 0 à l'ordre n.
$|x|^n$ admet un DL en 0 à l'ordre $n-1$. En effet

$$\left| \frac{|x|^n}{x^{n-1}} \right| = \frac{|x|^n}{|x|^{n-1}} = |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

De plus $|0|^n = 0$ donc $|x|^n = \underset{x \to 0}{o}(x^{n-1})$

Montrons que $|x|^n$ n'admet pas de DL en 0 à l'ordre n.
On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$|x|^n = \sum_{k=0}^{n} a_k . x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

Par troncature $\quad |x|^n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k . x^k + \underset{x \to 0}{o}(x^{n-1})$

Or $|x|^n = \underset{x \to 0}{o}(x^{n-1})$ donc par unicité du DL, $a_0 = \dots = a_{n-1} = 0$.
Donc

$$|x|^n = a_n . x^n + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

donc $$\left(\frac{|x|}{x}\right)^n = \underbrace{a_n + \underset{x \to 0}{o}(1)}_{\xrightarrow[x \to 0]{} a_n}$$

Or $\quad \forall x > 0 \quad \left(\frac{|x|}{x}\right)^n = 1^n = 1 \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} 1$

$\forall x < 0 \quad \left(\frac{|x|}{x}\right)^n = (-1)^n = -1 \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x < 0}]{} -1$

car n est impair

Donc $a_n = 1$ et $a_n = -1$. C'est absurde. Donc $|x|^n$ n'admet pas de DL en 0 à l'ordre n.

Pour demain : Exercice 2.1

(i) Juliette M (ii) Théophile
(iii) Théophane (iv) Soleymane.
(v) Julien (vi) Victor
(vii) Hélène (viii) Titouan.
(ix) Anaïs (x) Pierre-Louis.

Sur feuille, scannée
$\Rightarrow$ envoi par email.