Devoir maison n° 7

À rendre le lundi 13 janvier

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Analyse

Liminaire : Polynômes

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit

   $\mathcal{H}_n$: « Soit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

   Alors $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. »

   — $\mathcal{H}_0$ est vraie. En effet, soit $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad a_0 = 0$$

   Alors $a_0 = 0$.

   — $\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Soit $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n+1} x^{n+1} = 0$$

   Alors, en divisant par x^{n+1}, on en déduit que pour tout $x > 0$:

   $$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^{n+1-k}} + a_{n+1} = 0$$

   Or, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, a_k / x^{n+1-k} tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On en déduit donc, par passage à la limite, que $a_{n+1} = 0$. Donc :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

   Puisque $\mathcal{H}_n$ est vraie, on en déduit que $a_0 = \cdots = a_n = 0$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

   Par récurence sur n, on en déduit que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Commençons par prouver l'existence. Soit P un polyôme non nul. Alors il existe $(a_0, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tel que :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

   On pose $X = \{k \in [\![0, m]\!] : a_k \neq 0\}$. Puisque P est non nul, X est non vide. En tant que partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, X admet un plus grand élément que l'on note n. On a alors $a_n \neq 0$ et :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

   Montrons maintenant l'unicité. Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $(b_0, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+1}$ tels que $a_n \neq 0$, $a_m \neq 0$ et :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \quad \text{et} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$$

   Montrons que $n = m$ et que $a_k = b_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

   Commençons par montrer que $n = m$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $n \neq m$. Quitte à les échanger, on peut supposer que $n < m$. Alors :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$$

   Donc :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n} (b_k - a_k) x^k + \sum_{k=n+1}^{m} b_k x^k = 0$$

   D'après la première question, on en déduit que $b_m = 0$, ce qui est absurde. Donc $n = m$. On en déduit que :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=0}^{n} (b_k - a_k) x^k = 0$$

   Toujours d'après la première question, on en déduit que $a_k - b_k = 0$ et donc $a_k = b_k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

3. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on pose

   $\mathcal{H}_n$: « Tout polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes »

   — $\mathcal{H}_0$ est vraie. En effet, soit P un polynôme de degré 0. Il existe donc $a_0 \in \mathbb{R}^*$ tel que

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = a_0$$

   Donc P ne s'annule pas.

   — $\mathcal{H}_n \Longrightarrow \mathcal{H}_{n+1}$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Soit $a_0, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $a_{n+1} \neq 0$ et :

   $$\forall x \in \mathbb{R} \quad a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n+1} x^{n+1} = 0$$

   Montrons que P admet au plus $n+1$ racine distinctes. On raisonne par l'absurde et on suppose que P admet au moins $n+2$ racines distinctes. Il existe donc $n+2$ racines de P : $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, P est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$ et dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$. De plus, $P(x_k) = P(x_{k+1}) = 0$. Il existe donc

$y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $P'(y_k) = 0$. Comme $x_0 < y_1 < x_1 < \cdots < x_n < y_n < x_{n+1}$, on en déduit que les y_k sont deux à deux distincts. Donc P' admet (au moins) $n+1$ racines. Or

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P'(x) = \sum_{k=1}^{n+1} k a_k x^{k-1}$$

et $(n+1)a_{n+1} \neq 0$, donc P' est de degré n. Puisque $\mathcal{H}_n$ est vraie, P' admet au plus n racines. C'est absurde. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ et vraie.

Par récurrence sur n, on en déduit que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Partie I

1. (a) Pour j entier naturel inférieur ou égal à n, notons $(\mathcal{P}_j)$ la propriété suivante :

Il existe un polynôme Q_j tel que $Q_j(1)$ et $Q_j(-1)$ soient non nuls, et tel que, pour tout nombre réel x, on ait $P_n^{(j)}(x) = (x^2-1)^{n-j} Q_j(x)$.

Pour $j = 0$, il s'agit de prouver l'existence d'un polynôme Q_0 tel que $P_n(x) = (x^2-1)^n Q_0(x)$ pour tout nombre réel x, avec $Q_0(-1)$ et $Q_0(1)$ non nuls. Le polynôme scalaire $Q_0 = 1$ convient.

Supposons que la propriété soit vraie au rang j avec $0 \leq j \leq n-1$. Alors, pour tout nombre réel x, nous avons :

$$\begin{aligned} &P_n^{(j+1)}(x) \\ &\quad = 2x(n-j)(x^2-1)^{n-[j+1]} Q_j(x) + (x^2-1)^{n-j} Q_j'(x)\,, \\ &\quad = (x^2-1)^{n-[j+1]} \times \left[2x(n-j)Q_j(x) + (x^2-1)Q_j'(x)\right]\,. \end{aligned}$$

Nous posons alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q_{j+1}(x) = 2x(n-j)Q_j(x) + (x^2-1)Q_j'(x)\,.$$

D'une part, l'expression ci-dessus définit bien un polynôme, qui vérifie la relation $P_n^{(j+1)}(x) = (x^2-1)^{n-[j+1]} Q_{j+1}(x)$ pour tout nombre réel x. D'autre part, comme $Q_j(-1)$ et $Q_j(1)$ sont non nuls, nous avons

$$\begin{aligned} Q_{j+1}(-1) &= -2(n-j)Q_j(-1) \neq 0\,, \\ Q_{j+1}(1) &= 2(n-j)Q_j(-1) \neq 0\,, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve de la propriété au rang $j+1$.

Remarque.— En demandant l'expression (article défini) de Q_{j+1} en fonction de Q_j, l'énoncé sous-entend qu'il y a unicité de Q_j satisfaisant la propriété $(\mathcal{P}_j)$. Cela est vrai, car si Q_j^* est un polynôme satisfaisant la dite propriété, alors $Q_j(x) = Q_j^*(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, en simplifiant par $x^2 - 1$. Le polynôme $Q_j - Q_j^*$ ayant une infinité de racines, il est nul.

Si $j < n$, l'exposant $n - j$ est strictement positif donc $(x^2-1)^{n-j}$ est nul pour $x \in \{-1, 1\}$, donc

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!], \quad P_n^{(j)}(-1) = P_n^{(j)}(1) = 0\,.$$

(b) Théorème de Rolle.— Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soit f une fonction de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, qui est continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, et telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$. Appliqué à la fonction $f = P_n$ sur le segment $[-1, 1]$, qui est de

classe C^∞ donc satisfait toutes les conditions de régularité requises, et qui vérifie $P_n(1) = P_n(1)$ (qui vaut zéro par ailleurs), le théorème de Rolle assure que P_n' possède une racine dans l'intervalle ouvert $]-1, 1[$.

Pour j entier entre 1 et n, notons $(\mathcal{H}_j)$ l'énoncé suivant :

Le polynôme $P_n^{(j)}$ possède au moins j racines distinctes dans $]-1, 1[$.

Nous avons démontré que $(\mathcal{H}_1)$ est vraie ci-dessus. Supposons que $(\mathcal{H}_j)$ soit vraie pour un nombre entier j, avec $1 \leq j \leq n-1$, et notons y_k les racines de $P_n^{(j)}$, avec $-1 < y_1 < \cdots < y_j < 1$. Puisque $f = P_n^{(j)}$ est continue sur tout segment et dérivable sur tout intervalle ouvert, et puisque $P_n^{(j)}(-1) = P_n^{(j)}(y_k) = P_n^{(j)}(1)$ pour tout $k \in [\![1, j]\!]$, nous pouvons appliquer le théorème de Rolle à f de trois façons.

— Sur le segment $[-1, y_1]$: nous en déduisons l'existence d'une racine $z_1 \in]-1, y_1[$ de $P_n^{(j+1)}$.
— Sur les segments $[y_k, y_{k+1}]$ avec $1 \leq k \leq j-1$: nous en déduisons l'existence d'une racine $z_{k+1} \in]y_k, y_{k+1}[$ de $P_n^{(j+1)}$.
— Sur le segment $[y_j, 1]$: nous en déduisons l'existence d'une racine $z_{j+1} \in]y_j, 1[$ de $P_n^{(j+1)}$.

Par construction, nous avons $-1 < z_1 < \cdots < z_{j+1} < 1$, donc nous venons bien de prouver $(\mathcal{H}_{j+1})$.

(c) D'après la propriété $(\mathcal{H}_n)$, le polynôme $P_n^{(n)}$ admet au moins n racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$. Or P_n est de degré $2n$, donc $P_n^{(n)}$ est de degré n. Il possède donc au plus n racines complexes distinctes. Finalement, $P_n^{(n)}$ possède exactement n racines complexes distinctes, toutes simples et appartenant à $]-1, 1[$.

2. (a) Dans l'intégrale $W(p+1, q-1)$, nous posons $u(t) = (t-1)^{p+1}$ et $v'(t) = (t+1)^{q-1}$. Nous en déduisons que $u'(t) = (p+1)(t-1)^p$ et nous choisissons $v(t) = \frac{1}{q}(t+1)^q$. Voici alors l'intégration par parties :

$$\begin{aligned} &W(p+1, q-1) \\ &\quad = \left[\frac{1}{q}(t-1)^{p+1}(t+1)^q\right]_{-1}^{1} - \frac{p+1}{q}\int_{-1}^{1} (t-1)^p (t+1)^q \mathrm{d}t\,, \\ &\quad = -\frac{p+1}{q} W(p, q)\,. \end{aligned}$$

(b) Voici deux rédactions possibles. *Une rédaction très formelle.* Par récurrence finie sur $k \in [\![0, n]\!]$, nous allons montrer l'énoncé $(\mathcal{Q}_k)$ suivant :

$$(\mathcal{Q}_k) \quad W(n, n) = \frac{(-1)^k (n!)^2}{(n-k)!(n+k)!} W(n+k, n-k).$$

L'énoncé (Q_0) dit que $W(n,n) = \frac{-1)^0(n!)^2}{(n-0)!(n+0)!}W(n+0,n-0)$: c'est vrai. Supposons que Q_k soit vrai pour $k \leq n-1$. Alors, d'après la relation de la question I.2.a appliquée pour $p = n-k$ et $q = n+k$, nous avons

$$\begin{aligned}
&W(n,n)\\
&= \frac{(-1)^k(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}W(n+k,n-k)\,,\\
&= \frac{(-1)^k(n!)^2}{(n-k)!(n+k)!}\times\left(-\frac{n-k}{n+k+1}\right)W(n+k+1,n-k-1),\\
&= \frac{(-1)^{k+1}(n!)^2}{(n-[k-1])!(n+[k+1])!}W(n+k+1,n-k-1).
\end{aligned}$$

Une rédaction moins formelle. En itérant la relation de la question I.2.a, nous obtenons

$$\begin{aligned}
W(n,n) &= -\frac{n}{n+1}W(n+1,n-1)\,,\\
&= \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+2}\right)W(n+2,n-2)\,,\\
&\vdots\\
&= (-1)^n\frac{n(n-1)\dots(n-[n-1])}{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}W(2n,0)\,,\\
&= (-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}W(2n,0)\,.
\end{aligned}$$

Or $W(2n,0) = \int_{-1}^1 (t-1)^{2n}\,\mathrm{d}t$ vaut $\frac{1}{2n+1}[(t-1)^{2n+1}]_{-1}^1 = \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$, et finalement,

$$W(n,n) = (-1)^n\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}\,.$$

3. (a) Nous allons démontrer par récurrence finie sur $k \in [\![0,n]\!]$ que

$$(\mathcal{I}_k) \qquad \int_{-1}^1 Q(t)P_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^k\int_{-1}^1 Q^{(k)}(t)P_n^{(n-k)}\mathrm{d}t.$$

L'énoncé (Q_0) est une tautologie.
Supposons que $(\mathcal{Q}_k)$ soit vrai pour un nombre $k \leq n-1$. Alors

$$\begin{aligned}
&\int_{-1}^1 Q(t)P_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t\\
&= (-1)^k\int_{-1}^1 Q^{(k)}(t)P_n^{(n-k)}\mathrm{d}t,\\
&= (-1)^k\left(\left[Q^{(k)}(t)P_n^{(n-k-1)}(t)\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 Q^{(k+1)}(t)P_n^{(n-k-1)}(t)\mathrm{d}t\right),\\
&= (-1)^{k+1}\int_{-1}^1 Q^{(k+1)}(t)P_n^{(n-k-1)}(t)\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

En effet le crochet ci-dessus vaut zéro d'après le calcul des valeurs de $P_n^{(j)}(-1)$ et de $P_n^{(j)}(1)$ mené à la question I.1.a.

Remarque. — On peut aussi utiliser (sous réserve de la démontrer par récurrence sur n) la formule d'intégration par parties généralisée, dont voici l'énoncé :

Si u et v sont deux fonctions de clase C^n de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(t)v^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t &= \left[\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}u^{(i-1)}(t)v^{(n-i)}(t)\right]_a^b\\
&\quad +(-1)^n\int_a^b u^{(n)}(t)v(t)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

(b) Si Q est de degré strictement plus petit que n, alors sa dérivée $n^{\text{ième}}$ est la fonction nulle, et la question précédente montre que l'intégrale $\int_{-1}^1 Q(t)P_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$ est nulle.

(c) Si P est un polynôme de degré d et de coefficient dominant a_d, alors $P^{(d)}$ est la fonction constante égale à $d!a_d$. Ici, $d = 2n$ et P_n est unitaire, donc

$$P_n^{(2n)} = (2n)!\,.$$

Appliquons ensuite la relation I.3.a avec $Q = P_n^{(n)}$. Il vient

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2\mathrm{d}t &= (-1)^n\int_{-1}^1 P_n^{(2n)}(t)P_n(t)\,\mathrm{d}t\,,\\
&= (-1)^n(2n)!\int_{-1}^1 P_n(t)\,\mathrm{d}t\,,\\
&= (-1)^n(2n)!\int_{-1}^1 (t-1)^n(t+1)^n\,\mathrm{d}t\,,\\
&= (-1)^n(2n)!W(n,n)\,,\\
&= \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}\,.
\end{aligned}$$

Partie II

1. (a) Il est clair que

$$L_j(r_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

(b) Commençons par prouver l'unicité de A_n. Soit A_n et B_n deux polynômes de degrés strictement inférieur à n tels que :

$$\forall j \in [\![1,n]\!] \quad A_n(r_j) = f(r_j) \quad \text{et} \quad B_n(r_j) = f(r_j)$$

On pose $C = A_n - B_n$. Alors C est un polynôme de degré strictement inférieur à n admettant n racines (les r_j). On en déduit qu'il est nul, car si il était nul, il admettrait au plus $n-1$ racines d'après la dernière question de la partie liminaire.

Donc $A_n = B_n$.
Pour l'existence de A_n, il suffit de poser :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad A_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f(r_j) L_j(x)$$

et de vérifier que A_n est de degré strictement inférieur à n comme combinaison linéaire de polynômes de degrés $n-1$. De plus on vérifie facilement que $A_n(r_j) = f(r_j)$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

(c) L'intégrale étant linéaire par rapport à la fonction, nous avons

$$\int_{-1}^{1} A_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} f(r_j) \int_{-1}^{1} L_j(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(r_j)\,.$$

2. (a) Les fonctions d'expression $\mathcal{I} : P \mapsto \mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}_n : P \mapsto \mathcal{I}_n(P)$ sont manifestement deux formes linéaires sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Nous allons montrer qu'elles sont égales, en montrant qu'elles coïncident sur une base, et nous choisissons pour cela la base des L_j :

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}(L_j) & = & \lambda_j, \quad \text{par définition des } \lambda_j, \\ \mathcal{I}_n(L_j) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k(r_j), \quad \text{par définition de } \mathcal{I}_n \\ & = & \lambda_j, \quad \text{d'après la question II.1.} \end{array}$$

Nous concluons que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \mathcal{I}(P) = \mathcal{I}_n(P)\,. \tag{1}$$

(b) Comme $P_n^{(n)}$ est de degré n, le théorème de la division euclidienne affirme l'existence et l'unicité d'un couple (Q, R) de polynômes tels que

$$\begin{array}{rcl} P & = & QP_n^{(n)} + R\,, \\ \deg(R) & < & \deg\left(P_n^{(n)}\right) = n\,. \end{array}$$

Puisque $QP_n^{(n)} = P - R$, nous avons d'une part

$$\deg(QP_n^{(n)}) = \deg(Q) + \deg(P_n^{(n)}) = \deg(Q) + n\,,$$

et d'autre part

$$\begin{array}{rcl} \deg\left(QP_n^{(n)}\right) & \leq & \max(\deg(P), \deg(R))\,, \\ & \leq & \max(2n-1, n-1)\,, \\ & = & 2n-1\,. \end{array}$$

Nous en déduisons que

$$\deg(Q) < n\,.$$

Alors la question I.3.b. s'applique à Q : nous avons $\mathcal{I}(QP_n^{(n)}) = \int_{-1}^{1} Q(t)P_n^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t = 0$, et nous en déduisons par linéarité de $\mathcal{I}$ que

$$\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(R)\,.$$

Par ailleurs $\mathcal{I}_n(QP_n^{(n)}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j Q(r_j) P_n^{(n)}(r_j) = 0$, puisque les r_j sont précisément les racines de $P_n^{(n)}$. Nous avons donc aussi $\mathcal{I}_n(P) = \mathcal{I}_n(R)$. Enfin, comme R est de degré strictement inférieur à n, la question II.2.a affirme que $\mathcal{I}(R) = \mathcal{I}_n(R)$, d'où l'égalité

$$\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X], \quad \mathcal{I}(P) = \mathcal{I}_n(P)\,. \tag{2}$$

La lectrice (le lecteur) comparera les résultats (1) et (2) : dans l'optique du problème, qui est d'approcher l'intégrale de f sur $[-1, 1]$ par la valeur $\mathcal{I}_n(f)$, nous venons d'établir que cette méthode est exacte pour les fonctions f polynomiales de degré $< n$, puis nous avons étendu ce résultat aux fonctions polynomiales de degré $< 2n$.

3. (a) On montre facilement que

$$H_j(r_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et} \quad H_j'(r_k) = \begin{cases} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{2}{x_j - x_i} & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Soit P un polynôme de degré strictement inférieur à $2n$. On suppose que P admet n racines distinctes $x_1 < \cdots < x_n$ en lesquelles P' est nul. En appliquant Rolle sur chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$, on montre qu'il existe $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $P'(y_k) = 0$. On obtient ainsi $2n-1$ zéros de P' : $x_1 < y_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < y_n < x_n$. Or P' est de degré strictement inférieur à $2n-1$. D'après la dernière question de la partie liminaire, on en déduit que $P' = 0$. On en déduit que P est constant. Or P admet au moins une racine, donc P est nul.

(c) L'unicité est une conséquence de la question précédente. Pour l'existence, il suffit de poser

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} H_j(x)\left[f(x_j) + (x - x_j)(f'(x_j) - H_j'(x_j)f(x_j))\right]$$

4. L'existence de $M_{2n}(f)$ est assurée par l'hypothèse «f est de classe C^{2n}» : d'après le cours, la fonction continue $f^{(2n)}$ est bornée sur le segment $[-1, 1]$ et atteint ses bornes. L'équation $g_x(x) = 0$, d'inconnue α, équivaut à

$$\alpha\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2 = B_n(x) - f(x)\,.$$

Elle admet une solution puisque $P_n^{(n)}(x) \neq 0$: l'énoncé suppose en effet que x n'est pas une des racines r_i de $P_n^{(n)}$. Notons qu'il n'est pas nécessaire, dans les calculs qui vont suivre, d'expliciter α, qui n'interviendra que par la condition $g_x(x) = 0$.

(a) Nous constatons pour commencer que

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad g_x(r_j) = f(r_j) - B_n(r_j) - \alpha \left(P_n^{(n)}(r_j)\right)^2 = 0$$

vu le choix de B_n et la définition des nombres r_j. Nous avons aussi

$$g_x(x) = 0$$

vu le choix de α. Par ailleurs, g_x est de classe C^{2n}, donc vérifie les propriétés de régularité requises par le théorème de Rolle : nous pouvons appliquer ce dernier à g_x sur tout segment non réduit à un point dont les extrémités appartiennent à l'ensemble $\{r_1, \ldots, r_n, x\}$.

Supposons ensuite dans un premier temps que x est entre deux racines de $P_n^{(n)}$, disons $x \in]r_p, r_{p+1}[$. Appliquons alors le théorème de Rolle à g_x sur les intervalles suivants :

— Sur $[r_j, r_{j+1}]$ avec $j \neq p$ et $j < n$ nécessairement, ce qui donne l'existence de $n-2$ nombres distincts, dans $]-1,1[$, et différents des r_j, où g'_x s'annule.

— Sur $]r_p, x[$ et sur $]x, r_{p+1}[$, ce qui donne l'existence de deux racines supplémentaires de g'_x dans $]-1,1[$, distinctes là encore des r_j.

Nous disposons dans ce cas de n nombres (au moins) tels que le demande l'énoncé.

Dans un deuxième temps, supposons que x soit inférieur à tous les nombres r_j. En appliquant le théorème de Rolle sur les intervalles $[x, r_1]$ et $[r_j, r_{j+1}]$ pour $1 \leq j \leq n-1$, nous prouvons l'existence de $1 + (n-1) = n$ racines de g'_x dans $]-1,1[$ et distinctes des r_j.

Nous procéderions de manière analogue dans le dernier cas, où $r_n < x$.

(b) Nous avons

$$\forall t \in [-1,1], \quad g'_x(t) = f'(t) - B'_n(t) - 2\alpha P_n^{(n)}(t) P_n^{(n+1)}(t)$$

et en particulier

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad g'_x(r_j) = 0\,,$$

vu le choix de B_n et vu que les nombres r_j sont les racines de $P_n^{(n)}$.

Cette constatation ainsi que la question précédente montrent que la fonction dérivée g'_x possède au moins $2n$ racines distinctes dans $]-1,1[$. Une récurrence finie immédiate, utilisant de façon répétée le théorème de Rolle, sur $p \in [\![1, 2n]\!]$, prouve l'énoncé $(\mathcal{K}_p)$ suivant :

> La fonction $g_x^{(p)}$ possède au moins $2n+1-p$ racines distinctes dans $]-1,1[$.

En particulier, $g_x^{(2n)}$ possède au moins une racine c dans $]-1,1[$, ce que nous voulions démontrer.

(c) Le polynôme B_n appartient à $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$ donc sa dérivée $B_n^{(2n)}$ est le polynôme nul. Le polynôme $P_n^{(n)}$ est de degré n et de coefficient dominant

$$(2n-0)(2n-1)\ldots(2n-[n-1]) = \frac{(2n)!}{n!}\,,$$

puisque P_n lui-même est de degré $2n$ et de coefficient dominant 1. Nous en déduisons que $\left(P_n^{(n)}\right)^2$ est de degré $2n$ et de coefficient dominant

$$a_n = \left(\frac{(2n)!}{n!}\right)^2.$$

Par suite, la dérivée $(2n)^{\text{ième}}$ de $\left(P_n^{(n)}\right)^2$ est un polynôme scalaire qui vaut

$$(2n)! \times a_n = \frac{((2n)!)^3}{(n!)^2}\,.$$

Enfin,

$$\forall t \in [-1,1], \quad g_x^{(2n)}(t) = f^{(2n)}(t) - \alpha \frac{((2n)!)^3}{(n!)^2}\,.$$

Comme $g_x^{(2n)}(c) = 0$, nous en déduisons que

$$\alpha = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(c)\,.$$

(d) Il suffit d'écrire la définition de g_x et de substituer α par la valeur que nous venons de trouver pour établir que

$$f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(c) \left(P_n^{(n)}(x)\right)^2.$$

(e) Si x est l'un des nombres r_j, alors l'inégalité proposée s'écrit $|0| \leq a$, où a est un nombre positif : c'est vrai.

Sinon, l'égalité de la question II.4.d est vraie (elle a nécessité de supposer que x n'est pas l'un des r_j), et la définition de $M_{2n}(f)$ rend immédiate l'inégalité

$$\left|f(x) - B_n(x)\right| \leq \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f) \left(P_n^{(n)}(x)\right)^2.$$

Voici le coup de grâce :

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}_n(f)\right| \\
&= \left|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}(B_n)\right| \quad \text{d'après la question II.3.c,} \\
&= \left|\int_{-1}^{1}(f(x)-B_n(x))\,\mathrm{d}x\right|, \quad \text{par définition de } \mathcal{I}, \\
&\le \int_{-1}^{1}\left|f(x)-B_n(x)\right|\mathrm{d}x, \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire,} \\
&\le \int_{-1}^{1}\frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}\,M_{2n}(f)\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x, \text{ d'après la question II.4.e,} \\
&= \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}\,M_{2n}(f)\int_{-1}^{1}\left(P_n^{(n)}(x)\right)^2\mathrm{d}x, \quad \text{par linéarité,} \\
&= \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3}\,M_{2n}(f)\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}, \quad \text{d'après la question I.3.c,} \\
&= M_{2n}(f)\frac{(n!)^4}{((2n)!)^2}\times\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
&= \frac{M_{2n}(f)}{\binom{2n}{n}^2}\times\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

(f) Commençons par établir un lien entre $M_{2n}(g)$ et $M_{2n}(f)$. La fonction d'expression $t\mapsto\frac{a+b}{2}+t\frac{b-a}{2}$ étant affine (c'est la seule bijection affine croissante qui envoie le segment $[-1,1]$ sur le segment $[a,b]$), nous avons facilement

$$f^{(k)}(t)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^k g^{(k)}\left(\frac{a+b}{2}+t\frac{b-a}{2}\right)$$

pour tout $t\in[-1,1]$ et tout $k\in[\![0,2n]\!]$. Par suite,

$$M_{2n}(f)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n}M_{2n}(g)\,.$$

Effectuons ensuite le changement de variable affine $u=\frac{a+b}{2}+t\frac{b-a}{2}$ dans l'intégrale ci-dessous :

$$\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u-\frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j g\left(\frac{a+b}{2}+r_j\frac{b-a}{2}\right)\right| \\
&= \frac{b-a}{2}\left|\int_{-1}^{1}f(t)\,\mathrm{d}t-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j f(r_j)\right|, \\
&= \frac{b-a}{2}\left|\mathcal{I}(f)-\mathcal{I}_n(f)\right|, \\
&\le \frac{b-a}{2}\times\frac{M_{2n}(f)}{\binom{2n}{n}^2}\times\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
&= \left(\frac{b-a}{2}\right)^{2n+1}\times\frac{M_{2n}(g)}{\binom{2n}{n}^2}\times\frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\
&= \frac{(b-a)^{2n+1}M_{2n}(g)}{\binom{2n}{n}^2(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

5. (a) Nous avons $P_2(t)=(t^2-1)^2$, donc

$$\begin{aligned}
P_2'(t) &= 4t(t^2-1)\,, \\
P_2''(t) &= 12t^2-4 = 4(3t^2-1)\,,
\end{aligned}$$

pour tout $t\in[-1,1]$. Les racines de P_2'' sont

$$r_1=-\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad r_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\,.$$

Par définition

$$\begin{aligned}
L_1(t) &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\
L_2(t) &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \\
\lambda_1 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]_{-1}^{1}, \\
&= 1 \quad \text{tous calculs faits,} \\
\lambda_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]_{-1}^{1}, \\
&= 1 \quad \text{aussi.}
\end{aligned}$$

(b) Le calcul $\binom{4}{2}^2 \times 5! = 6^2 \times 5! = 36 \times 120 = 4320$ montre que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{2}\lambda_j g\left(\frac{a+b}{2} + r_j\frac{b-a}{2}\right)\right| \\
&= \left|\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\left(g\left(\tfrac{a+b}{2} - \tfrac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(\tfrac{a+b}{2} + \tfrac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right)\right|, \\
&\leq \frac{(b-a)^5 M_4(g)}{\binom{4}{2}^2 \times 5!}, \\
&\leq \frac{(b-a)^5 M_4(g)}{4320}.
\end{aligned}
$$

(c) Pour $k \in [\![0, p]\!]$, posons $a_k = a + k\frac{b-a}{p}$ de sorte que les p sous-segments de même longueur dont parle l'énoncé soient les $[a_{k-1}, a_k]$ pour k variant de 1 à p. De plus, $c_k = \frac{a_{k-1}+a_k}{2}$ pour k entre 1 et p. Alors

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p}\sum_{k=1}^{p}\left(g\left(c_k - \tfrac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \tfrac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right)\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{p}\int_{a_{k-1}}^{a_k} g(u)\,\mathrm{d}u - \tfrac{b-a}{2p}\sum_{k=1}^{p}\left(g\left(c_k - \tfrac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \tfrac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right)\right)\right|, \\
&= \left|\sum_{k=1}^{p}\left(\int_{a_{k-1}}^{a_k} g(u)\,\mathrm{d}u - \tfrac{a_k-a_{k-1}}{2}\left(g(c_k - \tfrac{a_k-a_{k-1}}{2\sqrt{3}}) + g(c_k + \tfrac{a_k-a_{k-1}}{2\sqrt{3}})\right)\right)\right|, \\
&\leq \sum_{k=1}^{p}\left|\int_{a_{k-1}}^{a_k} g(u)\,\mathrm{d}u - \tfrac{a_k-a_{k-1}}{2}\left(g(c_k - \tfrac{a_k-a_{k-1}}{2\sqrt{3}}) + g(c_k + \tfrac{a_k-a_{k-1}}{2\sqrt{3}})\right)\right|, \\
&\leq \sum_{k=1}^{p}\frac{(a_k-a_{k-1})^5 M_{2n}(g)}{4320} \quad \text{d'après la question II.5.b,} \\
&= \frac{(b-a)^5 M_4(g)}{4320 p^4}.
\end{aligned}
$$

(d) La fonction suivante répond à la question :

```python
import numpy as np

def integration(g, a, b, p):
    res = 0
    for k in range(p):
        c = a + (k + 1/2) * (b - a) / p
        x0 = c - (b - a) / (2 * p * np.sqrt(3))
        x1 = c + (b - a) / (2 * p * np.sqrt(3))
        res = res + g(x0) + g(x1)
    res = res * (b - a) / (2 * p)
    return res
```