Cours développement limité

- Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle voisinage fondamental (ou par abus de langage voisinage) toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $[a-\eta, a+\eta]$ où $\eta > 0$.
- On appelle voisinage fondamental (ou par abus de langage, voisinage) de $+\infty$ toute partie de $\mathbb{R}$ de la forme $[m, +\infty[$.
- On appelle voisinage fondamental de $-\infty$ toute partie de la forme $]-\infty, M]$

I).

I.1)

Def 1

Prop 1 :

Preuve : (i) Soit f une fonction défini sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Il existe donc $\eta > 0$ tel que $[a-\eta, a+\eta] \subset \mathcal{D}_f$.
On définit α sur $[a-\eta, a+\eta]$ par :

$$\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \quad \alpha(x) := 1$$

Alors $\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \quad f(x) = \alpha(x) f(x)$.
De plus $\alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1$. Donc

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} f(x).$$

(ii) Soit f, g, h des fonctions définies sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
Il existe donc $\eta > 0$ tel que $[a-\eta, a+\eta] \subset \mathcal{D}_f$, $\subset \mathcal{D}_g$ et $\subset \mathcal{D}_h$.
On suppose que

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x \to a}{\sim} h(x)$$

Il existe donc $\eta_1 > 0$ et $\eta_2 > 0$ tels que $0 < \eta_1 \leq \eta$ et $0 < \eta_2 \leq \eta$ et des fonctions α et β définies respectivement sur $[a-\eta_1, a+\eta_1]$ et $[a-\eta_2, a+\eta_2]$ telles que :

$$\forall x \in [a-\eta_1, a+\eta_1] \quad f(x) = \alpha(x) g(x)$$
$$\forall x \in [a-\eta_2, a+\eta_2] \quad g(x) = \beta(x) h(x).$$

et $\alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1$ et $\beta(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1$. On pose $\eta_0 = \min(\eta_1, \eta_2) > 0$.
Alors

$$\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \quad f(x) = \alpha(x) g(x)$$
$$= \underbrace{\alpha(x)\, \beta(x)}_{\xrightarrow[x \to a]{} 1} h(x)$$

Donc $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$.

(iii) Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $a\in\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x).$$

Il existe $\eta>0$ tel que $[a-\eta, a+\eta]\subset \mathcal{D}_f$ et $[a-\eta, a+\eta]\subset\mathcal{D}_g$.
De plus, il existe $\eta_1>0$ tel que $0<\eta_1\leqslant\eta$ et une fonction α définie sur $[a-\eta_1, a+\eta_1]$ telle que

$$\forall x\in[a-\eta_1, a+\eta_1] \quad f(x)=\alpha(x)\,g(x).$$

et $\alpha(x)\xrightarrow[x\to a]{}1$. Puisque $\alpha(x)\xrightarrow[x\to a]{}1$, il existe $\eta_2>0$ (on peut prendre $0<\eta_2\leqslant\eta_1$) tel que :

$$\forall x\in[x-\eta_2, x+\eta_2] \qquad \alpha(x)\neq 0.$$

Donc : $$\forall x\in[x-\eta_2, x+\eta_2] \qquad g(x)=\underbrace{\frac{1}{\alpha(x)}}_{\xrightarrow[x\to a]{}1} f(x)$$

Donc $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$.

<u>Remarque :</u>

- Si $f:\mathcal{D}_f\longrightarrow\mathbb{C}$ et $a\in\mathbb{R}$, on dit que f est défini sur un voisinage de a lorsqu'il existe $\eta>0$ tel que $[a-\eta, a+\eta]\subset\mathcal{D}_f$.
  Par exemple la fonction $\ln:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ est défini sur un voisinage de 1 (prendre $\eta=1/2$) mais n'est pas défini sur un voisinage de 0.
- Si $f:\mathcal{D}_f\longrightarrow\mathbb{C}$ et $a\in\mathbb{R}$, on dit que f est défini au voisinage de a lorsque :

$$\forall\eta>0 \qquad [a-\eta, a+\eta]\cap\mathcal{D}_f\neq\emptyset.$$

  Par exemple $\ln:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}$ est défini au voisinage de 1 et au voisinage de 0
- Une fonction défini sur un voisinage de a est défini au voisinage de a. Mais la réciproque est fausse.
- Moralement, une fonction est définie au voisinage de a lorsqu'il n'est pas absurde de se demander si $f(x)$ a une limite lorsque x tend vers a.

Prop 2 :

Preuve : Soit f et g deux fonctions définies sur un voisinage de $+\infty$. Il existe donc $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$[m, +\infty[\subset \mathcal{D}_f \quad \text{et} \quad [m, +\infty[\subset \mathcal{D}_g$$

Montrons que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x) \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

$\Rightarrow$ On suppose que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$. Il existe donc $m_1 \in \mathbb{R}$. (quitte à le prendre plus grand, on peut supposer que $m_1 \geq m$) et une fonction $\alpha : [m_1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{C}$ telle que.

$$\forall x \geq m, \qquad f(x) = \alpha(x) g(x)$$

et $\alpha(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$. Puisque g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, il existe m_2 tel que :

$$\forall x \geq m_2 \quad g(x) \neq 0$$

On pose $m_3 = \max(m_1, m_2)$. Alors.

$$\forall x \geq m_3 \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.$$

Donc $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

$\Leftarrow$ On suppose que $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$. Puisque g ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \geq m \quad g(x) \neq 0.$$

On définit α sur $[m, +\infty[$ par :

$$\forall x \geq m \quad \alpha(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Alors $\alpha(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$ et $\forall x \geq m \quad f(x) = \alpha(x) g(x)$.
Donc

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} g(x)$$

(ii) On suppose que $a \in \mathbb{R}$ et que g ne s'annule pas au voisinage de a, sauf en a. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a - \eta, a + \eta] \setminus \{a\} \quad g(x) \neq 0$$

et $g(a)=0$. Montrons que

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff \left[\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1 \quad \text{et} \quad f(a)=0 \right]$$

$\Rightarrow$ On suppose que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$. Il existe donc $\eta_1>0$ et une fonction $\alpha : [a-\eta_1, a+\eta_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :

$$(1) \quad \forall x \in [a-\eta_1, a+\eta_1] \qquad f(x)=\alpha(x)g(x).$$

et $\alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$. Alors en posant $\eta_2 = \min(\eta, \eta_1)>0$, on a :

$$\forall x \in [a-\eta_2, a+\eta_2]\setminus\{a\} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$$

Donc $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1$.

De plus $f(a) = \alpha(a)g(a)$ d'après (1). Donc $f(a)=0$ car $g(a)=0$

$\Leftarrow$: ~~ ~~

Remarques : (i) Soit $a_m, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et f la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) := \sum_{k=m}^{n} a_k . x^k$$

Si $a_m \neq 0$: Mq $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_m . x^m$.

Si $m=0$: En effet $a_m . x^m = a_0 \neq 0$. De plus.

$$\frac{f(x)}{a_0} = \frac{a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n}{a_0}$$

$$= 1 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_0} . x^k}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_0$.

Si $m \geq 1$: $a_m . x^m$ est non nul sauf en 0.

$$\frac{f(x)}{a_m . x^m} = \frac{\sum_{k=m}^{n} a_k . x^k}{a_m . x^m}$$

$$= \frac{a_m . x^m + \sum_{k=m+1}^{n} a_k . x^k}{a_m . x^m}$$

$$= 1 + \sum_{k=m+1}^{n} \frac{a_k}{a_m} . \underbrace{x^{k-m}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \text{car } k-m>0$$

De plus $f(0)=0$ car $m \geq 1$. Donc

$$f(x) \underset{x \to 0}{\sim} a_m . x^m$$

En particulier $\quad x+3x^3 \underset{x \to 0}{\sim} x$.

(ii) On suppose que $a_n \neq 0$. Alors $a_n . x^n \neq 0$ pour tout $x>0$. Donc $a_n . x^n$ ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$.
Montrons que

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n . x^n .$$

En effet

$$\frac{f(x)}{a_n x^n} = \frac{\sum_{k=m}^{n-1} a_k . x^k + a_n . x^n}{a_n . x^n}$$

$$= 1 + \sum_{k=m}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^{n-k}}}_{\substack{\xrightarrow{x \to +\infty} \\ 0 \text{ car } k<n}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$$

Donc $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} a_n . x^n$.

Par exemple $\quad 1+x^2+3x^3 \underset{x \to +\infty}{\sim} 3x^3$.

ii) . (i) —
. (ii) On suppose que f est dérivable en 0 que $f(0)=0$ et $f'(0) \neq 0$. Mq $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} f'(0)x$. En effet.

$f'(0)x$ est non nul au voisinage de 0 sauf en 0. De plus

$$\frac{f(x)}{x f'(0)} = \frac{1}{f'(0)} \cdot \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{f'(0)}{f'(0)} = 1$$

De plus $f(0)=0$, donc. $\quad f(x) \underset{x \to 0}{\sim} f'(0)x$.

En particulier $\ln(1+x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, $\sin(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$, $\arctan x \underset{x \to 0}{\sim} x$

iii)

<u>Pour lundi :</u> . Exercice 1.2 , 2.1 , 3.2.