Exercices : Dérivation

1 Dérivabilité

1.1 Dérivabilité

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f_α définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Préciser les nombres α pour lesquels f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1.2 Suite

Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

1.3 Dérivabilité

Pour tout entier naturel n on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z} \quad f_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}$$

1. Étudier le domaine de définition de f_n, sa parité, sa périodicité.
2. Montrer que f_n se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (on pourra établir une relation entre f_{n+1} et f_n).

1.4 Dérivabilité

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$ et $a \in [0,1]$.

1. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{rccl} \tau_a : & [0,1] \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

   se prolonge par continuité en a.
2. Montrer que la fonction ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$.

1.5 Calcul de dérivées n-ièmes

Calculer les dérivées à l'ordre n des fonctions d'expressions :

$$\sin^5(x) \qquad x^2 e^x \qquad \ln(x^2 - x + 2) \qquad x^{n-1}\ln(x) \qquad x^{n-1} e^{\frac{1}{x}}$$

1.6 Majoration d'une dérivée n-ième

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \left|\operatorname{Arctan}^{(n)} x\right| \leqslant (n-1)!$$

2 Théorème de Rolle et conséquences

2.1 Application directe du théorème de Rolle

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f est 1-périodique et admet n zéros sur l'intervalle $[0,1[$. Montrer que f' admet n zéros sur ce même intervalle.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Majorer le nombre de zéros de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g(x) = P(x) - \ln x$$

2.2 Application récursive du théorème de Rolle

1. Soit f une fonction dérivable n fois sur un intervalle I. On suppose que f admet $n+1$ zéros distincts dans I. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit la fonction P_n sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$$

   Montrer que $P_n^{(n)}$ admet n racines distinctes dans $]-1,1[$.

2.3 Accroissements finis généralisés

Soit f et g deux fonctions réelles, continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

2.4 Théorème de Darboux

Le but de cet exercice est de montrer que toute fonction dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (alors que l'on sait bien qu'elle peut ne pas être continue). On se donne donc f une fonction dérivable sur un intervalle I, $a, b \in I$ et $y_0 \in [f'(a), f'(b)]$. On souhaite montrer qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f'(x_0) = y_0$.

1. Résoudre le problème lorsque $y_0 = 0$.
2. En déduire le cas général.

2.5 Théorème de la corde

Soit f une fonction continue et dérivable sur $[0, 1]$ telle que :

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \quad f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = 0$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(c)}{c}$$

1. Soit g la fonction définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1] \quad g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Montrer que g est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1]$.

2. En remarquant que $g'(1) < 0$, montrer qu'il existe $c \in]0, 1[$ tel que $g'(c) = 0$ puis conclure.

2.6 Calcul numérique

À l'aide du théorème des accroissements finis, majorer l'erreur commise lorsque l'on prend 100 comme valeur approchée de $\sqrt{10001}$.

2.7 Divergence d'une série

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $x \mapsto \ln|\ln x|$ sur $[k, k+1]$, montrer que la suite de terme général

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k}$$

est divergente.