COURS : DÉTERMINANTS

Table des matières

1 Groupe symétrique

1.1 Groupe symétrique

Définition 1 (○○○)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle groupe symétrique et on note $(\mathcal{S}_n, \circ)$ l'ensemble des bijections de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même muni de la loi de composition.*

Remarques :

⇨ Soit $\sigma \in \mathcal{F}([\![1,n]\!], [\![1,n]\!])$. Dans ce cours, l'application σ sera notée

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Puisque $[\![1,n]\!]$ est fini, σ est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective. Autrement dit σ est bijective si et seulement si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée

1.Les entiers $\sigma(1), \ldots, \sigma(n)$ sont deux à deux distincts.

2.$\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} = [\![1,n]\!]$.

⇨ Si E est un ensemble fini de cardinal n, l'ensemble des bijections de E muni de la loi de composition est un groupe isomorphe à $(\mathcal{S}_n, \circ)$.

Proposition 1 (○○○)**.** *$(\mathcal{S}_n, \circ)$ est un groupe fini de cardinal $n!$.*

Définition 2 (○○○)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$.*
- *Soit $p \in [\![2,n]\!]$. On appelle cycle de longueur p (ou p-cycle) toute permutation σ tel qu'il existe $k_1, \ldots, k_p \in [\![1,n]\!]$ deux à deux distincts tels que :*
  - *$\sigma(k_1) = k_2, \sigma(k_2) = k_3, \ldots, \sigma(k_p) = k_1$*
  - *$\forall k \in [\![1,n]\!] \setminus \{k_1, \ldots, k_p\} \quad \sigma(k) = k$*

  On note $\sigma = (k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_p)$.
- *On appelle transposition tout cycle de longueur 2.*

Remarques :

⇨ Si $n \geqslant 3$, $(\mathcal{S}_n, \circ)$ n'est pas commutatif.

⇨ Les p-cycles sont des éléments d'ordre p. En particulier, si σ est une transposition, $\sigma^2 = \mathrm{Id}$ donc $\sigma^{-1} = \sigma$.

Exemples :

⇨ Soit $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_n$ deux p-cycles. Montrer qu'il existe $\sigma \in \mathcal{S}_n$ tel que $\sigma_1 = \sigma^{-1}\sigma_2\sigma$. On dit que σ_1 et σ_2 sont conjuguées.

1.2 Décomposition en cycles à support disjoints

Définition 3 (○○○)**.** *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On définit la relation $\mathcal{R}$ sur $[\![1,n]\!]$ par :*

$$\forall x, y \in [\![1,n]\!] \quad x \,\mathcal{R}\, y \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\exists k \in \mathbb{Z} \quad \sigma^k(x) = y\right]$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Si $x \in [\![1,n]\!]$, la classe de x est notée $\mathcal{O}(x)$ et est appelée orbite de x.

Remarques :

⇨ Si $x \in [\![1,n]\!]$, alors $\mathcal{O}(x) = \left\{\sigma^k(x) \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$. Plus précisément, il existe un plus petit entier strictement positif p tel que $\sigma^p(x) = x$ et on a $\mathcal{O}(x) = \left\{x, \sigma(x), \ldots, \sigma^{p-1}(x)\right\}$.

⇨ Les orbites étant des classes d'équivalence, elles forment une partition de $\mathcal{S}_n$.

Exemples :

⇨ Montrer qu'une permutation est un cycle si et seulement si la relation d'équivalence définie ci-dessus admet une et une seule classe non réduite à un point.

Définition 4 (○○○)**.** *Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$. On appelle support de σ et on note $\mathrm{supp}(\sigma)$ l'ensemble des $x \in [\![1,n]\!]$ tels que $\sigma(x) \neq k$.*

Remarques :

⇨ Deux permutations de support disjoints commutent. Cependant la réciproque est fausse.

⇨ Le support de σ est stable par σ.

⇨ Soit $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \mathcal{S}_n$ une famille de permutations du supports deux à deux disjoints telle que $\sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_m = \mathrm{Id}$. Alors, pour tout $i \in [\![1,m]\!]$, $\sigma_i = \mathrm{Id}$.

Théorème 1 (∘∘∘). *Toute permutation s'écrit comme le produit (commutatif) de cycles à supports disjoints. De plus, à l'ordre près, il y a unicité d'une telle décomposition.*

Remarques :

⇨ Si une permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ s'écrit comme le produit de m cycles de longeurs respectives $p_1, \dots, p_m$, alors l'ordre de σ est $\operatorname{ppcm}(p_1, \dots, p_m)$.

Exemples :

⇨ Déterminer tous les éléments de $\mathcal{S}_3$. Quels sont ses sous-groupes ?

⇨ Quels sont les ordres possibles dans $\mathcal{S}_4$?

⇨ Combine de fois un mélange portant sur 6 cartes doit-il être répété pour retomber à coup sûr sur l'ordre initial ?

1.3 Signature, groupe alterné

Proposition 2 (∘∘∘). *Tout permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ s'écrit comme le produit d'au plus $n-1$ transpositions.*

Remarques :

⇨ Soit $\sigma = (k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_p)$ un cycle de longueur p. Alors :

$$\sigma = (k_1 \quad k_2)\,(k_2 \quad k_3) \cdots (k_{p-1} \quad k_p)$$

Exemples :

⇨ Dans $\mathcal{S}_3$, on pose $\sigma_1 = (1 \quad 3)$ et $\sigma_2 = (1 \quad 2 \quad 3)$. Décomposer $\sigma_1\sigma_2$ en produit de transpositions de deux manières distinctes.

Théorème 2 (∘∘∘). *Soit σ une permutation et :*

$$\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m \quad \text{et} \quad \sigma = \tau'_1 \cdots \tau'_n$$

deux décompositions de σ en produit de transpositions. Alors m et n ont même parité ; on dit que σ est paire si ces entiers sont pairs et que σ est impaire dans le cas contraire. On définit la signature de σ et on note $\varepsilon(\sigma)$:

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ est paire} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est impaire} \end{cases}$$

Remarques :

⇨ Soit $\sigma \in \mathcal{S}_n$ et $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ une de ses décompositions en produit de transpositions. Alors

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^m$$

⇨ La signature d'un p-cycle est $(-1)^p$. En particulier, les transpositions sont impaires et les 3-cycles sont pairs.

Proposition 3 (∘∘∘). *L'application ε de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$ est un morphisme de groupe.*

Remarques :

⇨ Si σ est une permutation, σ et σ^{-1} ont la même signature.

Proposition 4 (∘∘∘). *On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des permutations paires. C'est un sous-groupe de $(\mathcal{S}_n, \circ)$ appelé groupe symétrique alterné.*

Remarques :

⇨ Si $n \geqslant 2$, le goupe $(\mathcal{A}_n, \circ)$ est de cardinal $n!/2$.

1.4 Groupe diédral

Définition 5 (∘∘∘). *Soit $n \geqslant 2$. L'ensemble des similitudes du plan complexe laissant invariant $\mathbb{U}_n$ est un groupe pour la composition appelé groupe diédral et noté $(D_n, \circ)$.*

Proposition 5 (∘∘∘). *Soit $n \geqslant 2$. Une application $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ est un élément du groupe diédral si et seulement si il existe $u \in \mathbb{U}_n$ tel que*

$$[\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = uz] \quad \text{ou} \quad [\forall z \in \mathbb{C} \quad f(z) = u\bar{z}]$$

En particulier, ces applications étant deux à deux distinctes, le groupe diédral est fini de cardinal $2n$.

Remarques :

⇨ Toute similitude du plan laissant invariant $\mathbb{U}_n$ induit une bijection de $\mathbb{U}_n$ dans lui-même, donc un élément de $\mathcal{S}_n$. On construit ainsi un morphisme de groupe φ de $(D_n, \circ)$ dans $(\mathcal{S}_n, \circ)$. Ce morphisme est injectif dès que $n \geqslant 3$.

Exemples :

⇨ Montrer que $\mathcal{S}_3$ est isomorphe à D_3. Que devient $\mathcal{A}_3$ par cet isomorphisme ?

2 Déterminants

2.1 Formes n-linéaires alternées

Définition 6 (∘∘∘). *On dit qu'une application φ de E^n dans $\mathbb{K}$ est une forme n-linéaire lorsque φ est linéaire par rapport à chacune de ses variables :*

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad \forall x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \in E \quad \forall x, y \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, \lambda x + \mu y, x_{i+1}, \dots, x_n) =$$

$$\lambda\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) + \mu\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_n)$$

Muni des lois usuelles, l'ensemble des formes n-linéaires sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 7 (∘∘∘). *On dit qu'une forme φ, n-linéaire sur E, est alternée lorsque quels que soient $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$ et $x_i = x_j$, on a :*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

L'ensemble des formes n-linéaires alternées est noté $\Lambda_n(E)$. C'est un sous-espace vectoriel de l'espace des formes n-linéaire sur E.

Proposition 6 (∘∘∘). *Soit φ une forme n-linéaire alternée sur E. Alors :*

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n \quad \varphi\left(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\right) = \varepsilon(\sigma)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

On dit que φ est antisymétrique.

Proposition 7 (∘∘∘). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et φ une forme n-linéaire alternée sur E. Si $x_1, \ldots, x_n$ est une famille de n vecteurs de E et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$, alors :*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \left[\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}\right] \varphi(e_1, \ldots, e_n)$$

Théorème 3 (∘∘∘). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, il existe une unique forme n-linéaire alternée φ sur E telle que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$.*

Proposition 8 (∘∘∘). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors $\Lambda_n(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.*

Proposition 9 (∘∘∘). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, φ une forme n-linéaire alternée sur E non nulle et $x_1, \ldots, x_n$ une famille de n vecteurs de E. Alors $x_1, \ldots, x_n$ est une base de E si et seulement si :*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

Autrement dit, $x_1, \ldots, x_n$ est liée si et seulement si :

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

2.2 Déterminant d'une famille de n vecteurs

Définition 8 (∘∘∘). *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, φ l'unique forme n-linéaire alternée sur E telle que $\varphi(e_1, \ldots, e_n) = 1$ et $x_1, \ldots, x_n$ une famille de n vecteurs de E. On appelle déterminant de la famille $x_1, \ldots, x_n$ relativement à la base $\mathcal{B}$ et on note $\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ le scalaire :*

$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

Proposition 10 (∘∘∘). *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $x_1, \ldots, x_n$ une famille de n vecteurs de E. Alors $x_1, \ldots, x_n$ est une base de E si et seulement si :*

$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$$

Autrement dit, $x_1, \ldots, x_n$ est liée si et seulement si :

$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

Proposition 11 (∘∘∘). *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases de E. Alors :*

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E \quad \det{}_{\mathcal{B}'}(x_1, \ldots, x_n) = \det{}_{\mathcal{B}'}\mathcal{B} \cdot \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

Remarques :

⇨ En particulier, si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont des bases de E

$$\det{}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}'' = \det{}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' \det{}_{\mathcal{B}'}\mathcal{B}''$$

2.3 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 9 (∘∘∘). *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique scalaire, appelé déterminant de f et noté $\det f$, tel que pour toute base $\mathcal{B}$ de E :*

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in E \quad \det{}_{\mathcal{B}}(f(x_1), \ldots, f(x_n)) = \det f \cdot \det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$$

En particulier, si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E :

$$\det f = \det{}_{\mathcal{B}}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$$

Exemples :

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et s une symétrie de E. On note p la dimension de $\operatorname{Ker}(s + \operatorname{Id})$. Montrer que $\det s = (-1)^p$.

Proposition 12 (∘∘∘).

- $\det \operatorname{Id}_E = 1$
- *Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :*

$$\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$$

- *Si $f, g \in \mathcal{L}(E)$, alors :*

$$\det(g \circ f) = \det g \cdot \det f$$

Exemples :

⇨ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\operatorname{Id}$ si et seulement si n est pair.

Proposition 13 (○○○)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si :*

$$\det f \neq 0$$

Si tel est le cas :

$$\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}$$

2.4 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 10 (○○○)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A et on note* $\det A$ *le déterminant des vecteurs colonnes de A relativement à la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Remarques :

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

Cependant, cette formule comporte $n!$ termes. Elle sera donc inutile pour le calcul effectif d'un déterminant. Par contre elle permettra, par exemple, de démontrer que le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, son déterminant est noté :

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

Proposition 14 (○○○)**.** *Soit $\mathcal{B}$ une base de E.*

— *Si $x_1, \ldots, x_n$ est une famille de n vecteurs de E, alors :*

$$\det{}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \det\left[\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)\right]$$

— *Si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors :*

$$\det f = \det\left[\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)\right]$$

Proposition 15 (○○○)**.**

— $\det I_n = 1$

— *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors :*

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

— *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors :*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Remarques :

⇨ Il n'existe aucune formule permettant de calculer $\det(A+B)$ en fonction de $\det A$ et de $\det B$. En particulier, toute formule du type $\det(A+B) = \det A + \det B$ est fausse.

Proposition 16 (○○○)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si :*

$$\det A \neq 0$$

Si tel est le cas :

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}$$

Proposition 17 (○○○)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\det {}^t\!A = \det A$$

Exemples :

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que $\det A = 0$.

2.5 Calcul de déterminant

Proposition 18 (○○○)**.** *Soit la matrice :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$$

Alors $\det A = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$.

Exemples :

⇨ Soit $\theta_1, \ldots, \theta_n \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,j} = \cos(\theta_i + \theta_j)$$

Proposition 19 (○○○)**.** *Soit T une matrice triangulaire supérieure*

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

alors :

$$\det T = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Proposition 20 (∘∘∘)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tels que :*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \star & \cdots & \star \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

Alors :

$$\det A = \lambda \det B$$

Remarques :

⇨ Plus généralement, si une matrice est triangulaire supérieure par blocs, on montre son déterminant est égal au produit des déterminants des matrices blocs présentes sur la diagonale.

Proposition 21 (∘∘∘)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *On multiplie le déterminant de A par λ lorsqu'on multiplie une de ses colonnes (resp. lignes) par λ.*
- *On ne change pas le déterminant de A lorsqu'à une colonne (resp. ligne) de A on ajoute une combinaison linéaire des ses autres colonnes (resp. lignes).*
- *On change le signe du déterminant de A lorsqu'on échange deux de ses colonnes (resp. lignes). Plus généralement, une permutation paire des colonnes (resp. lignes) de A ne change pas le signe de son déterminant, tandis qu'une permutation impaire de ses colonnes (resp. lignes) change son signe.*

Exemples :

⇨ Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. Calculer les déterminants

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ a & 1 & a \\ a^2 & a & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a+b & 2a & 2a \\ 2b & a+b & 2a \\ 2b & 2b & a+b \end{vmatrix}$$

2.6 Développement d'un déterminant

Définition 11 (∘∘∘)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *On appelle mineur d'indice (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ de la matrice obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de la matrice A.*
- *On appelle cofacteur d'indice (i,j) et on note $A_{i,j}$ le scalaire $A_{i,j} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}$.*

Remarques :

⇨ Si $\operatorname{rg} A \leqslant n-2$, tous ses mineurs (et donc ses cofacteurs) sont nuls.

Proposition 22 (∘∘∘)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *Soit $j_0 \in [\![1,n]\!]$. Alors :*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j_0} A_{i,j_0} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0}\, a_{i,j_0} \Delta_{i,j_0} \end{aligned}$$

- *Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$. Alors :*

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^{n} a_{i_0,j} A_{i_0,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i_0+j}\, a_{i_0,j} \Delta_{i_0,j} \end{aligned}$$

Exemples :

⇨ Calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}$$

⇨ Calculer la déterminant de la matrice tridiagonale

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & & (0) \\ 1 & 1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 1 & 1 \\ (0) & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

⇨ On appelle Vandermonde de la famille $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ le déterminant, noté $V(x_0, \dots, x_n)$, de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$$

2.7 Comatrice

Définition 12 (∘∘∘)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A et on note $\operatorname{Com} A$ la matrice des cofacteurs de A :*

$$\forall i, j \in [\![1,n]\!] \quad [\operatorname{Com} A]_{i,j} = A_{i,j} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{i,j}$$

Proposition 23 ($\circ\circ\circ$)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$A\,{}^t(\mathrm{Com}\,A) = {}^t(\mathrm{Com}\,A)A = (\det A)\,I_n$$

En particulier, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,{}^t(\mathrm{Com}\,A)$$

Exemples :

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ une matrice inversible (dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$). Montrer que son inverse est à coefficients entiers si et seulement si $\det A = \pm 1$.

2.8 Orientation d'un espace vectoriel réel de de dimension finie

Définition 13 ($\circ\circ\circ$)**.** *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit qu'un automorphisme f de E est :*
- *direct lorsque* $\det f > 0$
- *indirect lorsque* $\det f < 0$

On note $\mathrm{GL}^+(E)$ l'ensemble des automorphismes directs de E. On définit de même les notions de matrice directes et indirectes ainsi que l'ensemble $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$.

Exemples :

⇨ Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $-\mathrm{Id}$ est direct si n est pair et indirect si n est impair.

Proposition 24 ($\circ\circ\circ$)**.** $\mathrm{GL}^+(E)$ *(resp. $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$) est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$ (resp. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$).*

Définition 14 ($\circ\circ\circ$)**.** *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
- $\det(P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')) > 0$
- *L'unique automorphisme f qui transforme $\mathcal{B}$ en $\mathcal{B}'$ est direct.*

Si tel est le cas, on dit que $\mathcal{B}$ a même orientation que $\mathcal{B}'$.

Proposition 25 ($\circ\circ\circ$)**.** *La relation « a même orientation que » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de E et possède exactement deux classes d'équivalence.*

Définition 15 ($\circ\circ\circ$)**.** *Choisir une orientation de E, c'est choisir une base $\mathcal{B}$ de E que l'on définit comme directe. Les bases ayant même orientation que $\mathcal{B}$ sont dites directes, les autres sont dites indirectes.*