Exercice

Calcul de $\tan(\pi/12)$.

On a, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ tq $\cos(\theta) \neq 0$ et $\cos(2\theta) \neq 0$

$$\tan 2\theta = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta - \sin^2\theta} = \frac{\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta}}{1 - \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

En particulier, pour $\theta = \pi/12$, en posant $u = \tan \pi/12$

$$\frac{2u}{1-u^2} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin(\pi/6)}{\cos(\pi/6)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

donc $\dfrac{2u}{1-u^2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

donc $2\sqrt{3}u = 1-u^2$

donc $u^2 + 2\sqrt{3}u - 1 = 0$

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 + 4$$
$$= 4(3+1) = 4^2$$

donc $u = \dfrac{-2\sqrt{3} \pm 4}{2}$

$$= -\sqrt{3} \pm 2$$

Donc $u = 2-\sqrt{3}$ ou $u = -2-\sqrt{3}$.

Or $0 \leq \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{2}$ donc $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \geq 0$, donc $u = 2-\sqrt{3}$.

Donc

$$\tan \frac{\pi}{12} = 2-\sqrt{3}$$

Exercice :

On cherche les racines du polynôme $X^3 - 3X^2 + 4X - 2$.
1 est racine évidente, donc on factorise par $X-1$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -3X^2 & +4X & -2 & X-1 \\
\cline{5-5}
X^3 & -X^2 & & & X^2-2X+2 \\
\cline{1-4}
 & -2X^2 & +4X & -2 & \\
 & -2X^2 & +2X & & \\
\cline{2-4}
 & & 2X & -2 & \\
 & & 2X & -2 & \\
\cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
\forall \in \qquad & x^3-3x^2+4x-2=0 \\
\iff \quad & (x-1)(x^2-2x+2)=0 \\
\iff \quad & x-1=0 \quad \text{ou} \quad x^2-2x+2=0 \\
& \qquad\qquad\qquad \Delta=(-2)^2-4\times 2=-4<0 \\
\iff \quad & x=1
\end{aligned}
$$

Donc 1 est l'unique solution de l'équation polynomiale sur $\mathbb{R}$.

Exercice

On souhaite résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$x^4+2x^3-3x^2+2x+1=0$$

Cette équation est une équation réciproque de première espèce (cf remarque du cours). On voit que 1 n'est pas racine. On se donne $x\in\mathbb{R}^*$ quelconque et on pose $u=x+\frac{1}{x}$. Alors

$$
\begin{aligned}
& x^4+2x^3-3x^2+2x+1=0 \\
\iff \quad & x^2+2x-3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \\
\iff \quad & \left(x^2+2+\frac{1}{x^2}\right)+2\left(x+\frac{1}{x}\right)-5=0 \\
\iff \quad & u^2+2u-5=0
\end{aligned}
$$

$$\Delta=4+4\times 5=4\times 6=(2\sqrt{6})^2$$

$$\iff u = \frac{-2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$$

$$\iff u = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$\iff x + \frac{1}{x} = -1 \pm \sqrt{6}$$

$$\iff x^2 + 1 = (-1 \pm \sqrt{6})x$$

$$\iff x^2 - (-1+\sqrt{6})x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 - (-1-\sqrt{6})x + 1 = 0$$

$$\iff x^2 + (1-\sqrt{6})x + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 + (1+\sqrt{6})x + 1 = 0$$

$$\Delta = (1-\sqrt{6})^2 - 4 = 3 - 2\sqrt{6} < 0 \qquad \Delta = (1+\sqrt{6})^2 - 4 = 3 + 2\sqrt{6}$$

$$\iff x = \frac{-(1+\sqrt{6}) \pm \sqrt{3+2\sqrt{6}}}{2}$$

<u>Exercice</u>

Simplifier $\underbrace{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}}_{a} + \underbrace{\sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}}_{b}$

On a : $ab = \left[\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\left(1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\right]^{1/3}$

$$= \left(1 - \frac{4}{9}\cdot\frac{7}{3}\right)^{1/3} = \left(1 - \frac{28}{27}\right)^{1/3} = \left(-\frac{1}{27}\right)^{1/3} = -\frac{1}{3}.$$

On souhaite calculer $x = a+b$. On a.

$$x^3 = (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} + 1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} - x.$$

$$= 2 - x.$$

Donc $x^3 + x - 2 = 0$. On voit que 1 est racine évidente
Or

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 \qquad\quad + x - 2 & x - 1 \\
x^3 - x^2 \qquad\qquad & \overline{x^2 + x + 2} \\
\hline
x^2 + x - 2 & \\
x^2 - x \qquad & \\
\hline
2x - 2 & \\
2x - 2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Donc $x^3+x-2 = (x-1)\underbrace{(x^2+x+2)}_{\Delta = 1-4\times 2<0} = 0$. Donc $x=1$

En conclusion

$$\sqrt[3]{1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} = 1$$

Exercice :

$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \cos x - \cos(2x) = \sin(3x)$

$$\iff -2\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin\left(\frac{x-(2x)}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x}{2}\right)$$

$$\iff 2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right) = 0$$

$$\iff \sin\frac{3x}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{3x}{2}\right)$$

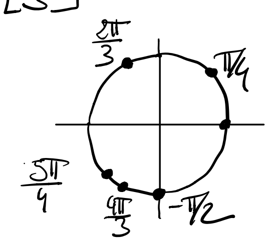
$$\iff \sin\frac{3x}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)$$

$$\iff \frac{3x}{2} \equiv 0\ [\pi] \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2} \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\ [2\pi]$$

$$\text{ou} \quad \frac{x}{2} \equiv \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2}\right)\ [2\pi]$$

$$\iff x \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad 2x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$

$$\iff x \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \quad \text{ou} \quad x \equiv \frac{\pi}{4}\ [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$



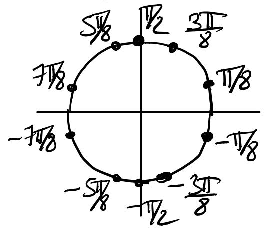
Exercice :

On souhaite résoudre l'équation $\tan(4x) = 4\tan(x)$.

On commence par chercher le domaine de définition

$$\forall x\in\mathbb{R} \quad 4x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{8}\ \left[\frac{\pi}{4}\right]$$

$$x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$



On pose $\mathcal{D} = \mathbb{R}\setminus\left(\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z}\right)\right)$. Alors :

$$\forall x\in\mathcal{D} \quad \tan(4x) = 4\tan x \iff \frac{\sin 4x}{\cos 4x} = 4\,\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\iff 2\sin(2x)\cos(2x)\cos x = 4\sin x\cos(4x)$$

$$\iff \cancel{4}\sin x\,.\cos^2 x\,.(1-2\sin^2 x) = \cancel{4}\sin x\,.(1-2\sin^2(2x))$$

$$\iff \sin x(1-\sin^2 x)(1-2\sin^2 x) = \sin x(1-2\times 4\sin^2 x\cos^2 x)$$

$$\iff \sin x\left((\sin^2 x-1)(2\sin^2 x-1) - (1-8\sin^2 x(1-\sin^2 x))\right) = 0$$

$$\iff \sin x(-6\sin^4 x + 5\sin^2 x) = 0$$

$$\iff \sin^3 x(6\sin^2 x - 5) = 0$$

$$\iff \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = \pm\sqrt{\frac{5}{6}}.$$

On pose $\theta = \operatorname{Arcsin}\sqrt{\frac{5}{6}} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\iff \sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin x = \sin\theta \quad \text{ou} \quad \sin x = -\sin\theta$$

$$\iff x \equiv 0\ [\pi] \quad \text{ou} \quad x \equiv \theta\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \pi-\theta\ [2\pi]$$
$$\text{ou} \quad x \equiv -\theta\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \pi+\theta\ [2\pi]$$

Or $\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 \qquad (\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1)$

donc $\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$

donc $\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Or $\cos\frac{\pi}{8} > 0$ donc $\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$. Donc $\sin\frac{3\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Or

$$\sqrt{\frac{5}{6}} < \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \iff \frac{5}{6} < \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$\iff 20 < 12 + 6\sqrt{2}$$

$$\iff 8 < 6\sqrt{2}$$

$$\iff 64 < 2\times 36$$

$$\iff 64 < 72$$

ce qui est vrai

Donc $\theta \in \left]0, \frac{3\pi}{8}\right[$. On montrerait de même que $\theta > \frac{\pi}{8}$.

Donc $\theta \in \left]\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}\right[$.

Donc $\theta, -\theta, \pi-\theta, \pi+\theta$ sont dans le domaine de définition.

On en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\pi\mathbb{Z} \cup (\theta + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (-\theta + 2\pi\mathbb{Z}) \cup (\pi-\theta+2\pi\mathbb{Z}) \cup (\pi+\theta+2\pi\mathbb{Z})$$

<u>Exercice</u> :

On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ l'inéquation.

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right| < 2$$

On a : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\} \quad \left|\frac{x-2}{x+1}\right| < 2$

$$\iff \frac{x-2}{x+1} < 2 \quad \text{et} \quad \frac{x-2}{x+1} > -2$$

$$\iff \frac{2(x+1)-(x-2)}{x+1} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{x-2+2(x+1)}{x+1} > 0$$

$$\iff \frac{x+4}{x+1} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{3x}{x+1} > 0$$

		-4		-1		0	
$x+4$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$x+1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$3x$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$\left\lvert\frac{x-2}{x+1}\right\rvert<2$	V		F	‖	F		V

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $\quad \left\lvert\frac{x-2}{x+1}\right\rvert<2 \iff x\in]-\infty,-4[\cup]0,+\infty[$

Exercice

On a : $\forall x\in\mathbb{R}$ $\quad 2\cos x+\sin x<2$

$$\iff 2(\cos x-1)+\sin x<0$$

$$\iff -4\cdot\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}<0$$

$$\iff 2\sin\frac{x}{2}\left(2\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)>0$$

$$\iff 2\sqrt{5}\sin\frac{x}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\sin\frac{x}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos\frac{x}{2}\right)>0$$

Or $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=1$