FICHE : MÉTHODES ET ERREURS COURANTES

Table des matières

1 Généralités

1.1 Méthode

— **M1 : Montrer que pour tout $x \in E$, $\mathcal{P}(x)$ est vrai.** Il est très courant d'avoir à montrer que

$$\forall x \in E \quad \mathcal{P}(x)$$

Pour prouver cela, voici un squelette de démonstration : « Soit x un élément quelconque de E. Alors, ... (*coeur de la démonstration*) ... , donc $\mathcal{P}(x)$ est vrai. Cela étant vrai quel que soit $x \in E$, on en déduit que : $\forall x \in E \quad \mathcal{P}(x)$. ». En pratique, on est souvent beaucoup plus succint et on écrit le plus souvent : « Soit $x \in E$. Alors, ... (*coeur de la démonstration*) ... , donc $\mathcal{P}(x)$ est vrai. ».
Dans tous les cas, il est essentiel de commencer par se donner un élément x quelconque de E. Vous pouvez imaginer que vous jouez à un jeu de carte et que vous demandiez à un croupier de vous distribuer une carte (qui joue le rôle de l'élément x). Vous devez ensuite trouver un raisonnement permettant de démontrer que $\mathcal{P}(x)$ est vrai quel que soit le x que vous avez reçu. Pour continuer notre analogie, c'est un peu comme si on vous demandait de trouver un moyen de gagner, quel que soit la carte que le croupier vous a distribué.
Remarquons enfin, que lors d'un tel raisonnement, il est inutile de se demander si E est vide ou non. En effet, si E est vide, l'assertion « $\forall x \in E \quad \mathcal{P}(x)$ » est vraie quel que soit le prédicat $\mathcal{P}$. Si E est vide, il n'y a rien à vérifier. Même dans ce cas, le raisonnement dont le squelette est « Soit $x \in E$. Alors, ... , donc $\mathcal{P}(x)$ est vraie. » reste correct.

— **M2 : Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vrai.** Lorsqu'on souhaite démontrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vrai, il suffit d'en exhiber un. Une telle preuve se rédige donc de la manière suivante : « On pose $x = \cdots$. Alors, ... (*coeur de la démonstration*) ... , donc $\mathcal{P}(x)$ est vrai ».
Montrons par exemple que si $P(X) = 7X^3 + 6X^2 + 6X - 1$, il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$. On pose $x = 1/7$. Alors

$$P\left(\frac{1}{7}\right) = 7 \times \frac{1}{7^3} + 6 \times \frac{1}{7^2} + 6 \times \frac{1}{7} - 1 = \frac{7 + 6 \times 7 + 6 \times 7^2 - 7^3}{7^3} = 0$$

donc $P(1/7) = 0$. On a donc bien démontré ce que l'on souhaitait.
Bien entendu, toute démonstration qui sort d'on ne sait où un élément solution du problème est valide et permettra de récolter tous les points à l'écrit. Mais, si on souhaite avoir une chance de trouver une solution, il est essentiel de savoir où chercher. Toutes les idées sont bonnes à prendre pour orienter notre recherche, mais la méthode générique la plus efficace est d'effectuer une *analyse*. Pour cela, on se donne un élément $x \in E$ quelconque tel que $\mathcal{P}(x)$ est vrai et on essaie d'otenir le plus d'information possible sur x. Cette technique permet de prouver que si il existe un $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vrai, il appartient à un ensemble X (dont la description est facile si l'analyse a été efficace). Il suffit ensuite de trouver un élément dans cet ensemble qui est solution du problème.
Prenons l'exemple de notre polynôme $P(X) = 7X^3 + 6X^2 + 6X - 1$ dont on cherche à montrer qu'il admet une racine rationnelle. On effectue une analyse et on suppose qu'il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $P(x) = 0$. Comme $x \in \mathbb{Q}$, il existe $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = a/b$ et $a \wedge b = 1$. Alors

$$P\left(\frac{a}{b}\right) = 7 \times \frac{a^3}{b^3} + 6 \times \frac{a^2}{b^2} + 6 \times \frac{a}{b} - 1 = \frac{7a^3 + 6a^2b + 6ab^2 - b^3}{b^3} = 0$$

On en déduit que $7a^3 + 6a^2b + 6ab^2 - b^3 = 0$ donc que $a(7a^2 + 6ab + 6b^2) = b^3$, donc que $a|b^3$. Or $a \wedge b = 1$, donc $a \wedge b^3 = 1$ donc d'après le lemme de Gauss, $a|1$. Donc $a \in \{-1, 1\}$. De même, $7a^3 + 6a^2b + 6ab^2 - b^3 = 0$ donc $b^3 - 6ab^2 - 6a^2b = 7a^3$, $b(b^2 - 6ab - 6a^2) = 7a^3$. On en déduit que $b|7a^3$. Or $b \wedge a = 1$, donc $b \wedge a^3 = 1$, donc d'après le lemme de Gauss, $b|7$. Or $b \in \mathbb{N}^*$ donc $b \in \{1, 7\}$. On a donc prouvé que $x \in \{-1, 1, 1/7, -1/7\}$. L'analyse nous a donc permis de prouver que si $P(X)$ avait une racine rationnelle, elle était parmi ces 4 éléments. Il nous reste donc à les tester un par un et on découvre que $1/7$ est bien une racine de P. C'est ce type de raisonnement qui permet d'expliquer pourquoi on a posé $x = 1/7$ et vérifié que $P(x) = 0$. À l'écrit, il est inutile de faire l'analyse et il suffit de poser naïvement $x = 1/7$.

— **M3 : Analyse/Synthèse**. Imaginez qu'une personne est retrouvée sans vie chez elle. Une inspection des lieux ne permet pas de savoir si la personne est décedée toute seule ou si il y a homicide. Si on note E l'ensemble des hommes et $\mathcal{P}$ le prédicat sur E défini par $\mathcal{P}(x)$: « x est responable de ce décés », le problème posé à l'enquêteur et au système judiciaire est de déterminer l'ensemble $A = \{x \in E : \mathcal{P}(x)\}$ des personnes responsables de ce décés. Cet ensemble peut être vide. Dans ce cas, il n'y a pas homicide est l'affaire est classée. Mais cet ensemble peut aussi être composé de une ou plusieurs personnes. Afin de déterminer A, deux étapes sont nécessaires. Il y a d'abord le rôle de l'enquêteur qui doit trouver le maximum d'informations sur les personnes qui auraient pu tuer la vicitime. Il commence toujours son enquête en se imaginant qu'il

y a un (dans le sens « au moins un ») tueur et il cherche le maximum d'informations sur lui. Autrement dit, l'enquêteur va se donner un $x \in A$ quelconque. Son enquête va avancer, et il va peut-être découvrir que x était présent chez la victime entre 10 heures et 11 heures. Une fois l'enquête terminée, l'enquêteur va remettre à la justice un ensemble B tel que $A \subset B$. Toutes les personnes qui sont responsables du décés sont dans cet ensemble. Bien entendu, nous imaginons que nous avons un enquêteur parfait qui ne peut passer à côté d'un coupable, ce qui est utopique, mais c'est parfaitement possible en mathématiques. Ce travail d'enquêteur est appelé l'analyse. Bien entendu, une bonne enquète va générer l'ensemble $B = A$, mais ce n'est pas indispensable. C'est ensuite au système judiciaire de déterminer quelles sont les personnes inculpées (les éléments de B) qui sont effectivement coupables. Le procès est appelé la synthèse.
Cherchons à résoudre l'équation $1 + x + x^2 + x^3 = 0$ sur $\mathbb{R}$.

— Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $1+x+x^2+x^3 = 0$. Alors $(1-x)(1+x+x^2+x^3) = 0$. En développant cette expression, on en déduit que $1 - x^4 = 0$, donc $x^4 = 1$. On en déduit que $x = 1$ ou $x = -1$. On a donc prouvé que si on note $B = \{-1, 1\}$ alors $A \subset B$.

— Synthèse : Réciproquement on vérifie que $1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 = 0$ mais on constate que $1 + 1 + 1^2 + 1^3 = 4 \neq 0$.

On a donc prouvé que $A = \{-1\}$. Remarquons au passage qu'on aurait pu conduire l'enquête plus en avant et faire le raisonnement suivant :

— Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $1+x+x^2+x^3 = 0$. Alors $x < 0$. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que $x \geqslant 0$. Alors $1+x+x^2+x^3 \geqslant 1$ donc $1+x+x^2+x^3 \neq 0$, ce qui est absurde. Donc $x < 0$. D'autre part, $(1-x)(1+x+x^2+x^3) = 0$. En développant cette expression, on en déduit que $1 - x^4 = 0$, donc $x^4 = 1$. Comme $x < 0$, on en déduit que $x = -1$. On a donc prouvé que si on note $B = \{-1\}$ alors $A \subset B$.

— Synthèse : Réciproquement, on vérifie que $1 + (-1) + (-1)^2 + (-1)^3 = 0$.

Ce raisonnement prouve de même que $A = \{-1\}$. C'est en général ce type de raisonnement que l'on fera : si on se rend compte que les éléments $x \in B$ ne sont pas tous éléments de A lors de la synthèse, on efface et on revient à l'analyse pour affiner notre enquête. Mais, même si c'est une habitude, ce n'est pas indispensable.

— **M4 : Pas de quantificateurs dans les phrases**.

— **M5 : Raisonner par équivalence ou par analyse synthèse**

— **M6 : Pour montrer que** $\forall x \in E \quad \mathcal{P}(x)$ il faut commencer par fixer $x \in E$.

— **M7 : Les variables n'ont pas été fixées.** Généralement après une phrase avec des quantificateurs.

— **M8 : Pas de $\Longrightarrow$ comme abbréviation de donc**

— **M9 : On raisonne par l'absurde et on suppose que** (non$\mathcal{P}$)

1.2 Logique

— **L1 : L'existence et l'unicité doit presque toujours être montré séparément.** Lorsqu'on doit démontrer l'existence et l'unicité d'un $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vrai, il est essentiel de démontrer séparément l'existence et l'unicité. Toute preuve qui fera apparaitre un raisonnement du type « Il existe un unique *blabla*, donc il existe un unique *blabla* » est potentiellement fausse. Afin de mieux comprendre l'erreur qui peut se produire lors d'un tel raisonnement, prenons l'exemple de Kévin, jeune ingénieur, qui sait bien qu'Inès est la seule et l'unique fille de sa promo qui affiche un intérêt pour lui. Après quelques semaines de vie commune, Inès, qui ne s'est pas farci 2 ans de prépa pour finir au MacDo, laisse tomber le pauvre Kévin. Ce dernier est désespéré car il en est sûr : Inès est la seule et l'unique fille de la promo avec qui il y avait moyen de conclure. Il en déduit qu'il ne pourra jamais plus partager amoureusement les frites de son Maxi Best Of. Plus tard, il comprit son erreur de logique et réalisa que le monde ne se limitait pas à son école : il rencontra rapidement l'âme seule chez Mister Tacos et il se promit que jamais plus il ne ferait de raisonnement d'existence et d'unicité.
Il est en effet très courant, pour montrer qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vrai, qu'un logicien débutant démontre qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $\mathcal{Q}(x)$ est vrai. Comme il prouve d'autre part que

$$\forall x \in E \quad \mathcal{Q}(x) \Longrightarrow \mathcal{P}(x),$$

il pense qu'il a prouvé qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vrai. Or le jeune logicien a seulement prouvé son existence.
Prenons par exemple un élément $z \in \mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$ et n votre année de naissance. Nous allons prouver, avec un raisonnement manifestement faux, qu'il existe un unique $r \in [\![0, 3]\!]$ tel que $z^n = z^r$. Pour cela, on effectue la division euclidienne de n par 4. Il existe donc un unique couple $(q, r) \in \mathbb{Z} \times [\![0, 3]\!]$ tel que $n = 4q + r$. Or

$$z^n = z^{4q+r} = \left(z^4\right)^q z^r = z^r$$

Donc (et c'est ici notre erreur), il existe un unique $r \in [\![0, 3]\!]$ tel que $z^n = z^r$. C'est évidemment faux, car si $z = 1$, tout entier $r \in [\![0, 3]\!]$ convient. Si $z = -1$, on voit bien qu'il existe deux $r \in [\![0, 3]\!]$ qui conviennent.

— **L2 : Utiliser le quantificateur $\exists!$ avec modération.** La phrase « $\exists! x \in E \quad \mathcal{P}(x)$ » signifie : il existe un unique $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vrai. Ce quantificateur est à première vue très utile car il est très courant en mathématiques d'énoncer l'existence et l'unicité d'un élément $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ est vrai. Cependant, ce quantificateur est très dangereux à manipuler pour plusieurs raisons :

  — *Il est très difficile de prendre la négation de la phrase « $\exists! x \in E \quad \mathcal{P}(x)$ ».* Si l'on souhaite vraiment prendre la négation de cette phrase logique, il convient d'abord de l'écrire avec les quantificateurs universels et existentiels

$$[\exists x \in E \quad \mathcal{P}(x)] \quad \text{et} \quad [\forall x, y \in E \quad (\mathcal{P}(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(y)) \Longrightarrow x = y]$$

  phrase dont il est facile de prendre la négation avec les règles usuelles. On obtient alors

$$[\forall x \in E \quad (\text{non } \mathcal{P}(x))] \quad \text{ou} \quad [\exists x, y \in E \quad (\mathcal{P}(x) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(y) \quad \text{et} \quad x \neq y)]$$

  — *On ne peut pas l'inverser avec un quantificateur de même nature.* Autrement dit

$$\exists! x \in E \quad \exists! y \in E \quad \mathcal{P}(x, y)$$

  n'a pas toujours même valeur de vérité que

$$\exists! y \in E \quad \exists! x \in E \quad \mathcal{P}(x, y)$$

Par exemple, si $E = \{0, 1, 2\}$, il existe un unique $x \in E$ tel qu'il existe un unique $y \in E$ tel que $(x-1)(x-2)y = 0$: c'est $x = 0$. Pourtant, on ne peut pas dire qu'il existe un unique $y \in E$ tel qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $(x-1)(x-2)y = 0$. En effet, quel que soit $y \in E$, $x = 1$ et $x = 2$ sont deux solutions du problème. Donc quel que soit $y \in E$, il est faux de dire qu'il existe un unique $x \in E$ tel que $(x-1)(x-2)y = 0$.

1.3 Analyse

— **A1 : Ne pas confondre** $f(x)$ **et** f

1.4 Notations

— **N1 : Virgule et point-virgule.** En France, comme dans la majorité des pays européens, nous utilisons la virgule comme séparateur décimal. Par exemple, on écrit $\pi \approx 3,14159$. Les pays anglo-saxons et une majorité de pays asiatiques utilisent quant à eux le point. On retrouve cet usage dans les langages informatiques. Dans ces pays, la virgule peut donc être utilisée comme séparateur dans les couples, les n-uplets, l'énumération des éléments d'un ensemble ou les intervalles : (a, b), $(x_1, \ldots, x_n)$, $\{x_1, \ldots, x_n\}$, $[a, b]$. En France, dans les mathématiques telles qu'elles sont écrites jusqu'en terminale, pour éviter la confusion avec le séparateur décimal, on utilise le point virgule comme séparateur. Cependant, dans le supérieur, on écrit très rarement des nombres décimaux. C'est la raison pour laquelle l'usage veut qu'on adopte les notations internationales et qu'on utilise la virgule comme séparateur.

1.5 Orthographe

— **O1 : « Soit » et « Soient ».** Lorsqu'on se fixe plusieurs objets mathématiques, on voit souvent écrit : « Soient $a \in A$ et $b \in B$. ». Mais l'orthographe « Soit $a \in A$ et $b \in B$. » est aussi autorisée et même conseillée. Dans la 14e édition du « Bon usage de la langue française » de Maurice Grevisse et André Goosse, à la page 1163, il est dit que dans ce type de phrase, où le « soit » sert d'introducteur, sa valeur verbale est assez estompée pour qu'on le laisse invariable. Pour souligner ce fait, les belges prononcent d'ailleurs le « t » à la fin de « soit » lorsqu'il est utilisé de la sorte. Cependant, certains auteurs, surtout parmi les mathématiciens, continuent à le traiter comme un verbe et l'accorder. En résumé, les deux orthographes sont autorisées, et afin de suivre l'adage « pourquoi faire compliqué quand on peut faire simple », j'ai choisi une fois pour toute de ne jamais accorder le « soit » dans une telle situation.

2 Algèbre

2.1 Polynômes

— **P1 : Montrer que** $\deg P = n$**.** Lorsqu'on veut démontrer que le degré d'un polynôme est égal à $n \in \mathbb{N}$, il est presque toujours indispensable de montrer qu'un coefficient est non nul. Si vous ne le faites pas, il est très probable que vous avez seulement montré que $\deg P \leqslant n$.
Par exemple, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est de degré $n \in \mathbb{N}^*$, alors P' est de degré $n-1$. En effet, il existe $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que $a_n \neq 0$ et

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

On a donc

$$P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Avant de conclure que $\deg P' = n-1$, il est essentiel de mettre en avant le fait que $n a_n \neq 0$ car $a_n \neq 0$ et $n \neq 0$.