Carpentier

3.1. Racines d'un polynôme

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrons que $P-X$ divise $P\circ P - X$.

On a, $P\circ P - X - (P-X) = P\circ P - P$

or $P \in \mathbb{R}[X]$, donc, il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tq
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

$$\text{Donc } P\circ P - P = \sum_{k=0}^{n} a_k P^k - \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k (P^k - X^k) + \cancel{a_0} - \cancel{a_0}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} a_k . (P-X) \sum_{i=0}^{k-1} P^i X^{k-1-i}$$
$$= (P-X) \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} P^i X^{k-1-i}$$

Donc $P-X \mid P\circ P - P$
or $P-X \mid P-X$
Donc $P-X \mid P\circ P - P + (P-X)$
donc $P-X \mid P\circ P - X$

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$.

On pose $P = X^2 - 3X + 1$

$$\text{Donc } P\circ P - X = (X^2-3X+1)^2 - 3(X^2-3X+1) + 1 - X$$
$$= (X^2-3X+1)^2 - 3X^2 + 8X - 2$$

or $P-X \mid P\circ P - X$, donc, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que,
$$P\circ P - X = (P-X).Q.$$

Or $P\circ P - X = P\circ P - P + P - X$
$$= (P^2 - 3P + 1) - (X^2 - 3X + 1) + (P-X)$$
$$= (P^2 - X^2) - 3(P-X) + (P-X)$$
$$= (P-X)(P+X) - 3(P-X) + (P-X)$$
$$= (P-X)(P+X-3+1)$$
$$= (P-X)(P+X-2)$$
$$= (X^2-4X+1)(X^2-2X-1)$$

On a donc $Q = P + X - 2 = X^2 - 2X - 1$

On résout l'équation $P\circ P - X$ sur $\mathbb{C}$.

On a, $\forall z \in \mathbb{C}$ $(z^2-3z+1)^2 = 3z^2 - 8z + 2$

$$\Leftrightarrow (z^2-3z+1-z)(z^2-3z+1+z-2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (z^2-4z+1)(z^2-2z-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow z^2-4z+1 = 0 \text{ ou } z^2-2z-1 = 0$$
$$\Leftrightarrow z = (\pm\sqrt{3}) + 2 \text{ ou } z = 1 \pm \sqrt{2}$$

Exercice 2.1 : Division euclidienne .

1)

$$
\begin{array}{l|l}
X^3 - 2X + 1 & X^2 - 1 \\ \hline
X^3 - X & X \\ \hline
0 \quad - X + 1 &
\end{array}
$$

$$X^3 - 2X + 1 = X(X^2-1) + (1-X)$$

$$
\begin{array}{l|l}
X^4 - 2X^3 \qquad + 1 & X+1 \\ \hline
X^4 + X^3 & X^3 - 3X^2 + 3X - 3 \\ \hline
-3X^3 \qquad + 1 & \\
-3X^3 - 3X^2 & \\ \hline
+3X^2 \quad + 1 & \\
3X^2 + 3X & \\ \hline
-3X + 1 & \\
-3X - 3 & \\ \hline
4 &
\end{array}
$$

$$X^4 - 2X^3 + 1 = (X+1)(X^3 - 3X^2 + 3X - 3) + 4$$

2) R est le reste de la division euclidienne de

$A = (X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2$ par $(X-2)(X-3) = B$

On $\deg B = 2$ et $\deg R < \deg B$

donc $\deg R \leq 1$, il existe donc $a, b \in \mathbb{R}$ tq $R = aX+b$

et $R(3) = -3$ comme B est un polynome annulateur de 2 et 3

$R(2) = -1$

On a $A(2) = R(2)$

et $A(3) = R(3)$

d'où
$$\begin{cases} a \times 3 + b = -3 \\ a \times 2 + b = -1 \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} a = -3+1 = -2 \\ b = -1+4 = +3 \end{cases}$$

donc $\boxed{R = -2X + 3}$

Soit n non nul : Soit $n \geqslant 2$

- R est le reste de la division euclidienne de $A = (X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2$ par $B = (X-3)^3$.

$A' = 2n(X-3)^{2n-1} - n(X-2)^{n-1}$

$A'' = 2n(n-1)(X-3)^{2n-2} - n(n-1)(X-2)^{n-2}$

$\deg R < \deg B$

donc $\deg R \leq 2$ car $\deg B = 3$

donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX^2 + bX + c$

- $A(3) = R(3) = -3$ car B est un polynôme annulateur de 3

- $A'(3) = R'(3) = -n(3-2)^{n-1}$
  $= -n$
  car B' est un polynôme annulateur de 3

- $A''(3) = R''(3) = -n(n-1)(3-2)^{n-2}$
  $= -n(n-1)$
  car B'' est un polynôme annulateur de 3

donc
$$\begin{cases} 9a + 3b + c = -3 & (1) \\ 6a + b = -n & (2) \\ 2a = -n(n-1) & (3) \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} a = \dfrac{-n(n-1)}{2} \\ b = n(3n-4) \\ c = \dfrac{3}{2} n(5-3n) - 3 \end{cases}$$

donc $\boxed{R = \dfrac{-n(n-1)}{2} X^2 + n(3n-4)X - \dfrac{9}{2} n^2 + \dfrac{15}{2} n - 3}$

- <u>Si n est nul</u> :

$A = -2$ donc $A = 0 \times B - 2$ donc $R = -2$

car $\deg B > \deg A$

- <u>Si $n = 1$</u> :

$A = (X-3)^2 - X = X^2 - 7X + 9$

donc $A = 0 \times B + (X-3)^2 - X$

car $\deg B > \deg A$ donc $R = (X-3)^2 - X$
$= X^2 - 7X + 9$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ Capucine Coly ②

3) R est le reste de la division euclidienne de

$A = (\cos\theta + X\sin\theta)^n$ par $B = X^2 + 1$.

$\deg R < \deg B$

donc $\deg R \leq 1$ car $\deg B = 2$

donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tq $R = aX + b$

• $A(i) = R(i) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta}$ car B est un polynôme annulateur de i

$= \cos n\theta + i\sin(n\theta)$

• $A(-i) = R(-i) = (\cos\theta - i\sin\theta)^n = e^{-in\theta}$ car B est un polynôme annulateur de $-i$

$= \cos n\theta - i\sin(n\theta)$

donc $\begin{cases} ia + b = i\sin(n\theta) + \cos(n\theta) \\ -ia + b = -i\sin(n\theta) + \cos(n\theta) \end{cases}$

donc $\begin{cases} a = \sin(n\theta) \\ b = \cos(n\theta) \end{cases}$

donc $\boxed{R = \sin(n\theta)X + \cos(n\theta)}$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

R est le reste de la division euclidienne de $X^n + nX^{n-1} + X^2 + 1$ par $(X+1)^2$.

$\deg R < \deg B$ donc $\deg R \leq 1$ car $\deg B = 2$

donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $R = aX + b$.

• $A(-1) = R(-1) = (-1)^n + n(-1)^{n-1} + 2$ car B est un polynôme annulateur de -1

• $A'(-1) = R'(-1) = n(-1)^{n-1} + n(n-1)(-1)^{n-2} - 2$ car B' est un polynôme annulateur de -1

$\begin{cases} -a + b = (-1)^n + n(-1)^{n-1} + 2 \\ a = n(-1)^{n-1} + n(n-1)(-1)^{n-2} - 2 \end{cases}$

donc $\begin{cases} b = (-1)^n + n(-1)^{n-1} + \cancel{2} + n(-1)^{n-1} + n(n-1)(-1)^{n-2} - \cancel{2} \\ a = n(-1)^{n-1} + n(n-1)(-1)^{n-2} - 2 \end{cases}$

• Si n est pair :

$a = -n + n(n-1) - 2$

$= n(n-2) - 2$

$b = n(n-1) - 2n + 1$

$= n(n-3) + 1$

donc $\boxed{R = (n(n-2)-2)X + n(n-3)+1}$
$= (n^2-2n-2)X + (n^2-3n+1)$

• Si n est impair :

$a = n - n(n-1) - 2$

$= n(2-n) - 2$

$b = -1 + n + n - n(n-1)$

$= n(3-n) - 1$

donc $\boxed{R = (n(2-n)-2)X + n(3-n) - 1}$
$= (-n^2+2n-2)X + (-n^2+3n-1)$