Cours : Fonctions usuelles

Table des matières

1 Logarithme, exponentielle, puissance

1.1 Logarithme népérien

Définition 1. *On appelle logarithme népérien et on note* ln *l'unique primitive s'annulant en* 1 *de la fonction* $x \mapsto 1/x$ *définie sur* $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{array}{rccl} \ln : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t} \end{array}$$

Proposition 1.
- ln *est continue sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- ln *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln' x = \frac{1}{x}$$

- ln *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

Remarques :

⇨ Sur $\mathbb{R}^*$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$$

⇨ Si f est une fonction dérivable ne s'annulant pas, la fonction d'expression

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

est appelée dérivée logarithmique de f. C'est la dérivée de la fonction d'expression $\ln|f(x)|$.

Proposition 2. *On a :*

$$\begin{array}{rl} & \ln 1 = 0 \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^* & \ln(xy) = \ln x + \ln y \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \ln(1/x) = -\ln x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} & \ln x^n = n \ln x \end{array}$$

Proposition 3. ln *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et :*

$$\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad \textit{et} \quad \ln x \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$$

Exemples :

⇨ Résoudre l'inéquation $\ln|x+1| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$.

Proposition 4.
- ln *est injectif :* $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x = \ln y \Longrightarrow x = y$
- ln *réalise une surjection de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}$: $\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R}_+^* \quad \ln x = y$

Définition 2. *Il existe un unique réel noté* e *et appelé nombre de Néper tel que* $\ln e = 1$.

Proposition 5. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \cdot \ln x$$

Proposition 6. *On a :*

$$\forall x \in \left]-1, +\infty\right[\quad \ln(1+x) \leqslant x$$

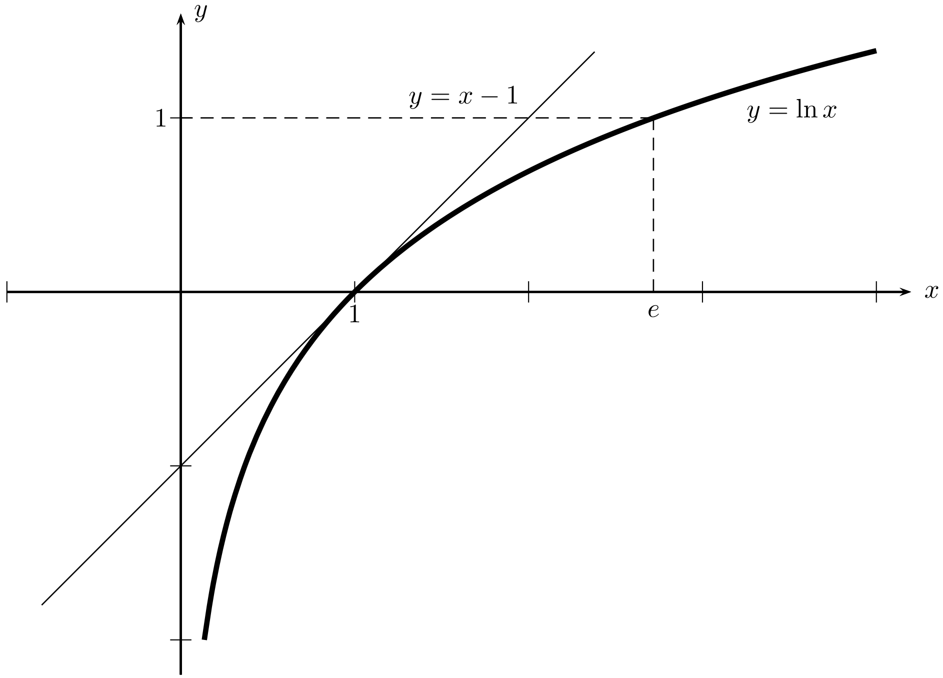
Exemples :

⇨ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$.

Proposition 7. *On a :*

$$\frac{x}{\ln x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$



1.2 Exponentielle

Définition 3. *Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\ln x = y$; on le note $x = \exp y$. On définit alors la fonction :*

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto \exp y \end{aligned}$$

Proposition 8. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \ln(\exp x) = x$$
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad \exp(\ln x) = x$$

Proposition 9.
- $\exp$ *est injective :* $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp x = \exp y \Longrightarrow x = y$
- $\exp$ *réalise une surjection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$ *:* $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \exp x = y$

Proposition 10.

$$\begin{aligned} \exp 0 = 1 \qquad & \exp 1 = e \\ \forall x, y \in \mathbb{R} \qquad & \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \\ \forall x \in \mathbb{R} \qquad & \exp(-x) = \frac{1}{\exp x} \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \qquad & \exp(nx) = (\exp x)^n \end{aligned}$$

Proposition 11. $\exp$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\exp x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \quad \textit{et} \quad \exp x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

Proposition 12.
- $\exp$ *est continue sur* $\mathbb{R}$.
- $\exp$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp' x = \exp x$$

- $\exp$ *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 13. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp x \geqslant 1 + x$$

Exemples :

⇨ Montrer que

$$\forall x < 1 \quad \exp x \leqslant \frac{1}{1-x}$$

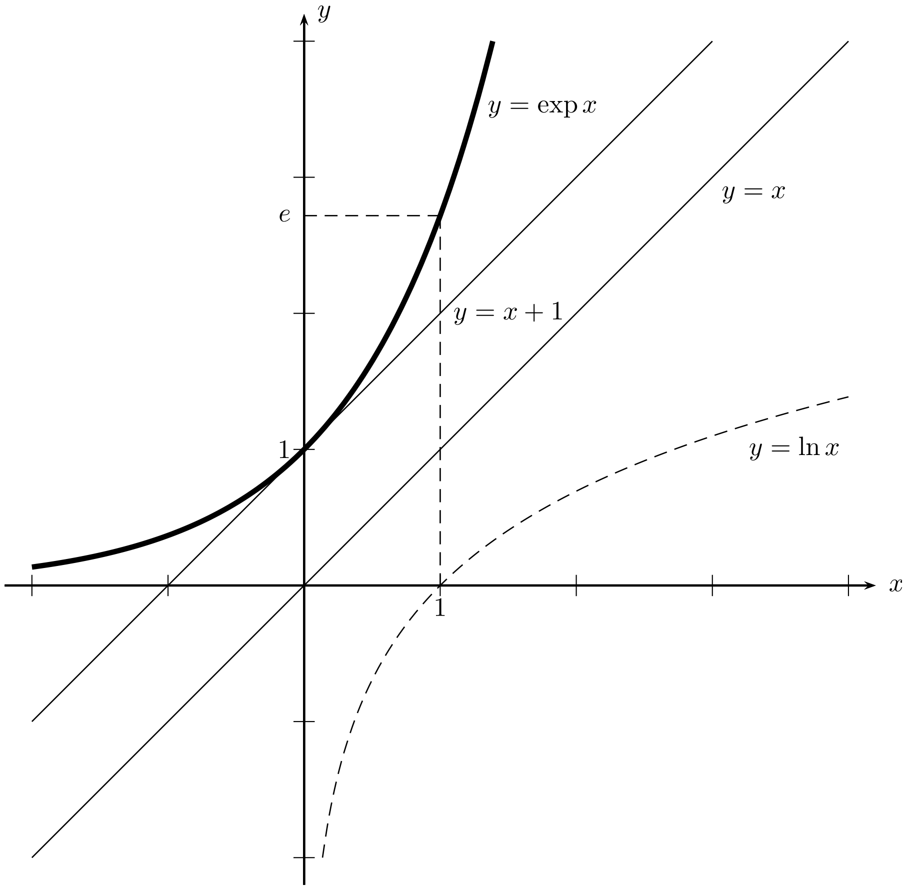
⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 < b\exp(-ax) - a\exp(-bx) < b - a$$

Proposition 14. *On a :*

$$\frac{\exp x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad x\exp x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

$$\frac{\exp x - 1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$



1.3 Logarithme et exponentielle en base a

Définition 4. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On appelle logarithme en base a et on note $\log_a$ la fonction définie par :*

$$\log_a x : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array}$$

Remarques :

⇨ Le logarithme népérien n'est rien d'autre que le logarithme en base e. Si $a = 10$, on obtient le logarithme décimal qui est utilisé en physique (décibels) et en chimie (pH). Enfin, si $a = 2$, on obtient le logarithme binaire, utilisé en informatique.

Exemples :

⇨ Résoudre le système

$$\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5 \\ xy = e \end{cases}$$

Proposition 15. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors :*

$$\begin{array}{rl} \forall x, y \in \mathbb{R}_+^* & \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \log_a (1/x) = -\log_a x \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall n \in \mathbb{Z} & \log_a x^n = n \log_a x \end{array}$$

Définition 5. *Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. Alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\log_a x = y$; on le note $x = \exp_a y$ et on a :*

$$\exp_a x = \exp(x \ln a)$$

On définit alors la fonction $\exp_a$:

$$\exp_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(x \ln a) \end{array}$$

Remarques :

⇨ Lorsque $a = e$, on retrouve la fonction exponentielle.

1.4 Fonction puissance

Définition 6. *Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $y \in \mathbb{R}$, on définit x^y par :*

$$x^y = \exp(y \ln x)$$

Remarques :

⇨ En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp x = e^x$. Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a(x) = a^x$$

On utilisera désormais cette notation pour désigner l'exponentielle ainsi que l'exponentielle en base a.

⇨ Afin de dériver une fonction de la forme $f(x) = u(x)^{v(x)}$ où u et v sont des fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$ et u est une fonction à valeurs strictement positives, il est indispensable de la mettre sous la forme

$$f(x) = e^{v(x)\ln(u(x))}$$

Exemples :

⇨ Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\,x}$.

⇨ Calculer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^x)$.

Définition 7. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance, la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :*

$$\varphi_a : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a \end{array}$$

Proposition 16. *On a :*

$$\begin{array}{lll} \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x^0 = 1 & & \forall a \in \mathbb{R} \quad 1^a = 1 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \forall a, b \in \mathbb{R} & x^{a+b} = x^a x^b \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \forall a \in \mathbb{R} & x^{-a} = 1/x^a \\ \forall x, y \in \mathbb{R}_+^* & \forall a \in \mathbb{R} & (xy)^a = x^a y^a \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \forall a, b \in \mathbb{R} & (x^a)^b = x^{ab} \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^* & \forall a \in \mathbb{R} & \ln(x^a) = a \ln x \end{array}$$

Proposition 17. *Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $\varphi_a : x \mapsto x^a$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ est :*
- *continue sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- *dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}$$

- *$\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*

Remarques :

⇨ Soit $f_1, \ldots, f_n$ des fonctions dérivables à valeurs strictement positives sur $\mathcal{D}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. On définit la fonction f sur $\mathcal{D}$ par

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) = f_1(x)^{\alpha_1} \cdots f_n(x)^{\alpha_n}$$

Alors f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha_1 \cdot \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} + \cdots + \alpha_n \cdot \frac{f_n'(x)}{f_n(x)}$$

Cette relation reste vraie si l'on suppose juste que les fonctions f_k sont dérivables et ne s'annulent pas, dans le cas bien sur où l'expression $f_1(x)^{\alpha_1} \cdots f_n(x)^{\alpha_n}$ conserve un sens (c'est-à-dire lorsque les α_k associés aux fonctions f_k prenant des valeurs strictement négatives sont entiers). On a donc :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot f_1(x)^{\alpha_1} \cdots f_k'(x) f_k^{\alpha_k - 1}(x) \cdots f_n(x)^{\alpha_n}$$

Cette relation reste d'ailleurs vraie si l'on suppose juste les fonctions f_k dérivables dans la mesure où l'expression $f_1(x)^{\alpha_1} \cdots f_n(x)^{\alpha_n}$ conserve un sens (c'est-à-dire lorsque les α_k associés aux fonctions f_k pouvant s'annuler sont entiers naturels).

Exemples :

⇨ Calculer

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x}{\sqrt{1+x^2}}\right), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x+2}{\sqrt[3]{1+x^2}}\right)$$

Proposition 18. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$x^a \xrightarrow[x \to +\infty]{} \begin{cases} +\infty & si\ a > 0 \\ 1 & si\ a = 0 \\ 0 & si\ a < 0 \end{cases} \quad et \quad x^a \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} 0 & si\ a > 0 \\ 1 & si\ a = 0 \\ +\infty & si\ a < 0 \end{cases}$$

Remarques :

⇨ Si $a > 0$, on définit 0^a en posant $0^a = 0$. La fonction

$$\begin{array}{rccl} \varphi_a : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^a \end{array}$$

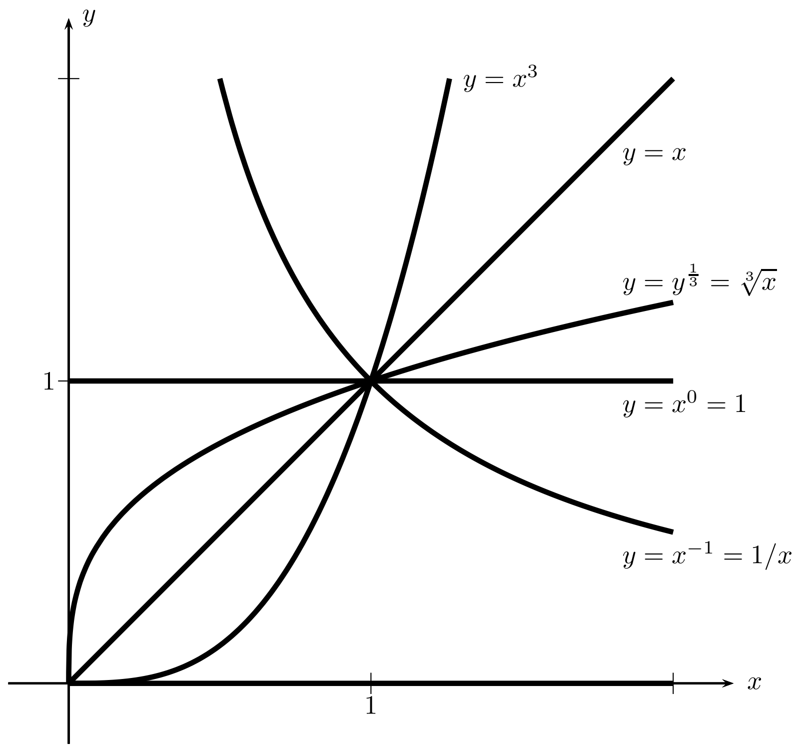
est alors continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur :

—$\mathbb{R}_+$ lorsque $a \geqslant 1$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}$$

—$\mathbb{R}_+^*$ lorsque $a < 1$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \varphi_a'(x) = a x^{a-1}$$



1.5 Croissances comparées

Proposition 19. *Soit* $\alpha, \beta > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$. *Alors :*

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \qquad \frac{x^\alpha}{(\ln x)^\beta} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

$$x^\alpha (\ln x)^n \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Remarques :

⇨ Mnémotechniquement, on dit qu'en 0 et en $+\infty$, l'exponentielle l'emporte sur la puissance qui l'emporte sur le logarithme.

Exemples :

⇨ Calculer les limites suivantes

$$\frac{(\ln x)^2}{e^x} \quad \text{en } +\infty, \qquad \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{en } 0, \qquad |\ln x|^x \quad \text{en } 0$$

2 Fonctions trigonométriques

2.1 Fonctions trigonométriques directes

Proposition 20. *Les fonctions* sin, cos *et* tan *sont* $\mathcal{C}^\infty$ *sur leur ensemble de définition et :*

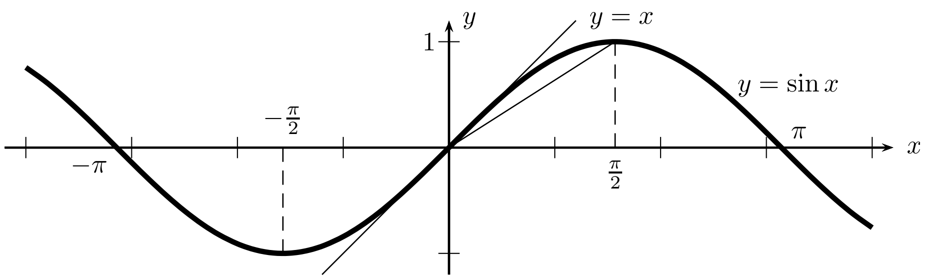
$$\begin{array}{ll} \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} & \sin^{(n)} x = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} & \cos^{(n)} x = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) & \tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x} \end{array}$$

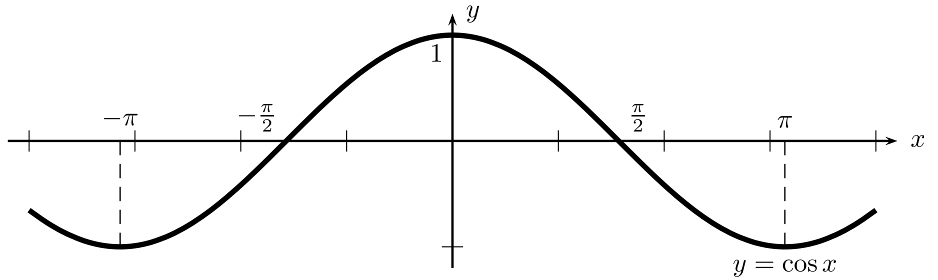
Exemples :

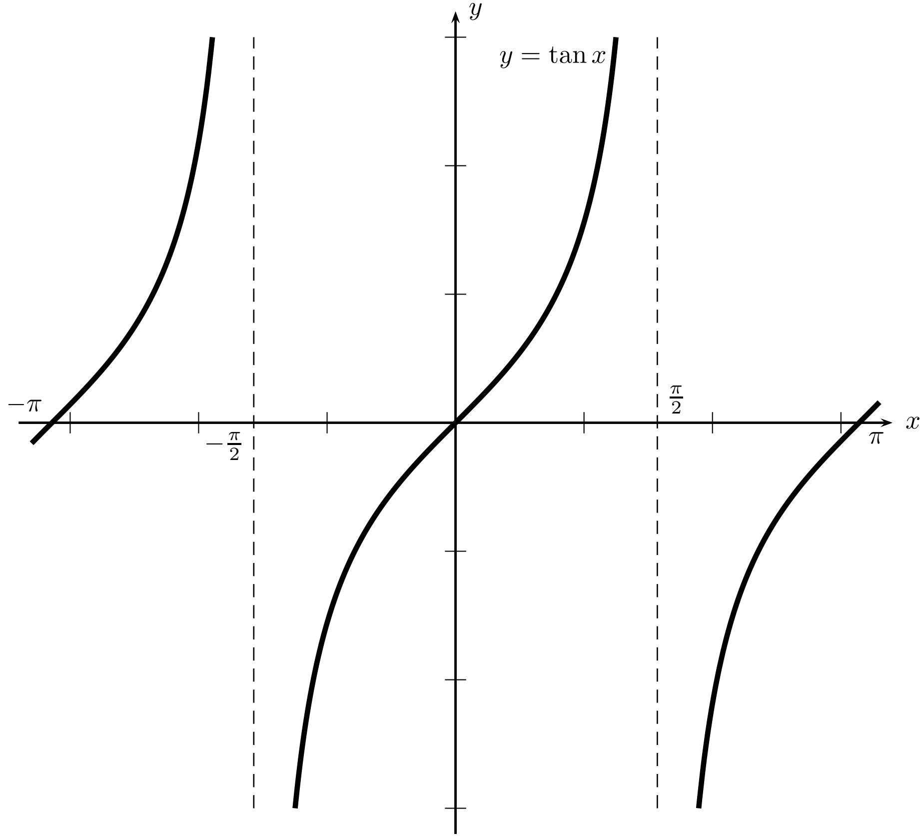
⇨ Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \sin x \leqslant x \quad \text{et} \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin x \geqslant \frac{2}{\pi} x$$

⇨ Calculer la dérivée n-ième de la fonction d'expression $\sin^2 x$.







2.2 Fonction Arcsin

Définition 8. *Pour tout* $y \in [-1, 1]$, *il existe un unique* $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ *tel que* $\sin x = y$ *; on le note* $x = \operatorname{Arcsin} y$. *On définit alors la fonction :*

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Arcsin} : [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \operatorname{Arcsin} y \end{array}$$

Remarques :

⇨ Par définition de la fonction Arcsin

$$\forall x \in [-1,1] \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{\pi}{2}$$

Proposition 21. *On a :*

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$$
$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \operatorname{Arcsin}(\sin x) = x$$

Exemples :

⇨ Calculer

$$\operatorname{Arcsin}(1), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\sin\frac{5\pi}{7}\right), \quad \operatorname{Arcsin}\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)$$

Proposition 22.
- Arcsin *est injective :* $\forall x, y \in [-1,1] \quad \operatorname{Arcsin} x = \operatorname{Arcsin} y \Longrightarrow x = y$
- Arcsin *réalise une surjection de* $[-1,1]$ *dans* $[-\pi/2, \pi/2]$ *:*

$$\forall y \in [-\pi/2, \pi/2] \quad \exists x \in [-1,1] \quad \operatorname{Arcsin} x = y$$

Proposition 23.
- Arcsin *est strictement croissante sur* $[-1,1]$.
- Arcsin *est impaire.*

Exemples :

⇨ On pose

$$x = \operatorname{Arcsin}\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Calculer $\cos(4x)$ puis en déduire x.

Proposition 24.
- Arcsin *est continue sur* $[-1,1]$.
- Arcsin *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et :*

$$\forall x \in]-1,1[\quad \operatorname{Arcsin}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Arcsin *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$.

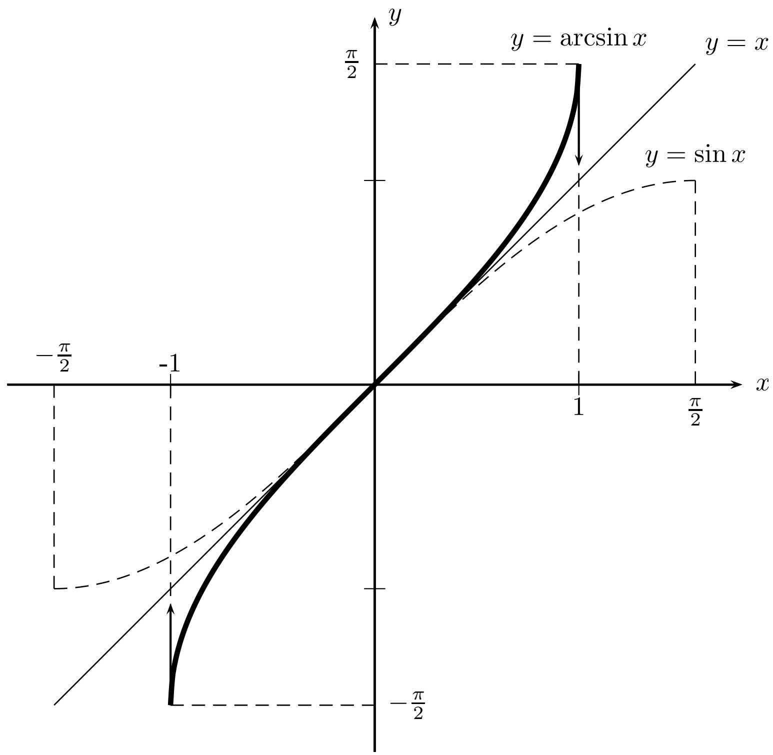
Exemples :

⇨ Montrer que

$$\forall x \in [0,1] \quad x \leqslant \operatorname{Arcsin} x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

⇨ Calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}, \qquad \int \operatorname{Arcsin} x \,\mathrm{d}x$$



2.3 Fonction Arccos

Définition 9. *Pour tout* $y \in [-1,1]$, *il existe un unique* $x \in [0,\pi]$ *tel que* $\cos x = y$ *; on le note* $x = \operatorname{Arccos} y$. *On définit alors la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arccos} : & [-1,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arccos} y \end{array}$$

Remarques :

⇨ Par définition de la fonction Arccos

$$\forall x \in [-1,1] \quad 0 \leqslant \operatorname{Arccos} x \leqslant \pi$$

Proposition 25. *On a :*

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \cos(\operatorname{Arccos} x) = x$$
$$\forall x \in [0,\pi] \qquad \operatorname{Arccos}(\cos x) = x$$

Exemples :

⇨ Calculer

$$\operatorname{Arccos}\left(-\frac{1}{2}\right), \quad \operatorname{Arccos}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\right)$$

⇨ Simplifier $\operatorname{Arccos}(\cos x) - \frac{1}{2}\operatorname{Arccos}(\cos(2x))$ pour tout $x \in [0, 2\pi]$.

⇨ Calculer $\cos(3\operatorname{Arccos} x)$. Plus généralement, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(n\operatorname{Arccos} x)$ est un polynôme en x.

Proposition 26.
- Arccos *est injective :* $\forall x, y \in [-1,1] \quad \operatorname{Arccos} x = \operatorname{Arccos} y \Longrightarrow x = y$
- Arccos *réalise une surjection de* $[-1,1]$ *dans* $[0,\pi]$ *:*

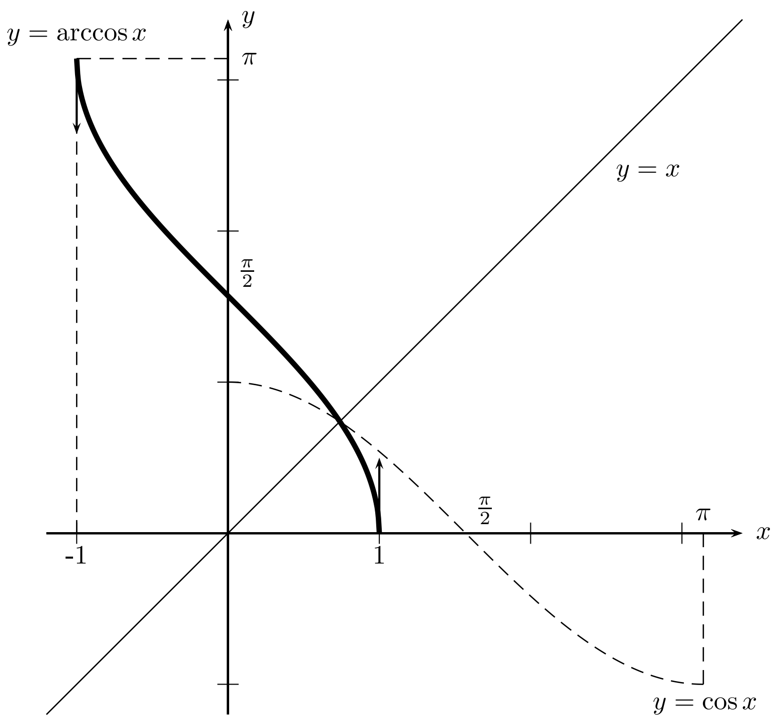
$$\forall y \in [0,\pi] \quad \exists x \in [-1,1] \quad \operatorname{Arccos} x = y$$

Proposition 27. Arccos *est strictement décroissante sur* $[-1,1]$.

Proposition 28.
- Arccos *est continue sur* $[-1,1]$.
- Arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$ *et :*

$$\forall x \in]-1,1[\quad \operatorname{Arccos}' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Arccos *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-1,1[$.



Exemples :

⇨ À l'aide d'un changement de variable judicieux, déterminer la limite lorsque x tend vers 0 de

$$\frac{\operatorname{Arccos}(1-x)}{\sqrt{x}}$$

2.4 Fonction Arctan

Définition 10. *Pour tout* $y \in \mathbb{R}$, *il existe un unique* $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ *tel que* $\tan x = y$ *; on le note* $x = \operatorname{Arctan} y$. *On définit alors la fonction :*

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{Arctan} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \operatorname{Arctan} y \end{array}$$

Remarques :

⇨ Par définition de la fonction Arctan

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arctan} x < \frac{\pi}{2}$$

Proposition 29. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \tan(\operatorname{Arctan} x) = x$$
$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \operatorname{Arctan}(\tan x) = x$$

Exemples :

⇨ Calculer $\operatorname{Arctan}\left(\tan\frac{1789\pi}{45}\right)$.

⇨ Le langage de programmation `Shadok` dispose de la fonction Arctan mais pas des fonctions Arcsin et Arccos. Définissez ces dernières à partir de la fonction Arctan.

Proposition 30.
- Arctan *est injective :* $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} y \Longrightarrow x = y$
- Arctan *réalise une surjection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-\pi/2, \pi/2[$ *:*

$$\forall y \in]-\pi/2, \pi/2[\quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{Arctan} x = y$$

Proposition 31.
- Arctan *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \operatorname{Arctan} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

- Arctan *est impaire.*

Exemples :

⇨ Résoudre l'équation $\operatorname{Arctan}(2x) + \operatorname{Arctan}(3x) = \frac{\pi}{4}$.

Proposition 32.
- Arctan *est continue sur* $\mathbb{R}$.
- Arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Arctan}'\, x = \frac{1}{1+x^2}$$

- Arctan *est* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$.

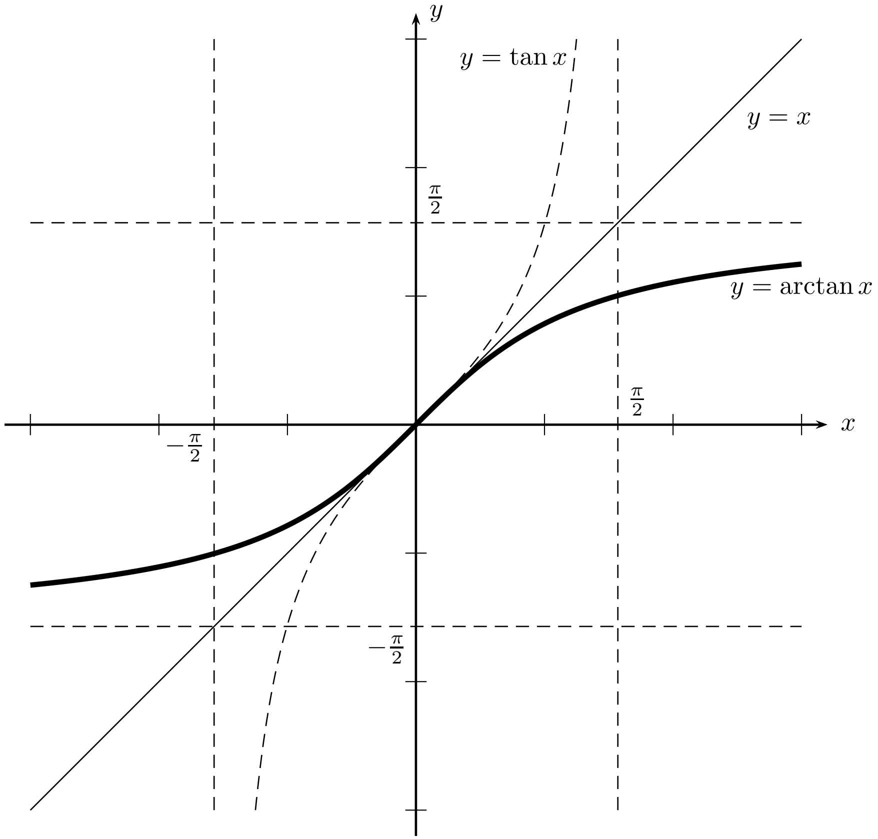
Exemples :

⇨ Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{Arctan}\, x \leqslant x$. En déduire que

$$4\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$$

⇨ Calculer

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x, \qquad \int \mathrm{Arctan}\, x\,\mathrm{d}x$$



2.5 Formules de trigonométrie réciproque

Proposition 33. *On a :*

$$\forall x \in [-1,1] \quad \sin(\mathrm{Arcsin}\, x) = x \quad \cos(\mathrm{Arcsin}\, x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\forall x \in \,]-1,1[\quad \tan(\mathrm{Arcsin}\, x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in [-1,1] \quad \cos(\mathrm{Arccos}\, x) = x \quad \sin(\mathrm{Arccos}\, x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\} \quad \tan(\mathrm{Arccos}\, x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \tan(\mathrm{Arctan}\, x) = x \quad \cos(\mathrm{Arctan}\, x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin(\mathrm{Arctan}\, x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Exemples :

⇨ Résoudre l'équation $\mathrm{Arctan}\, x = \mathrm{Arcsin}\, \frac{2x}{1+x^2}$.

Proposition 34. *On a :*

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \mathrm{Arcsin}\, x + \mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \mathrm{Arctan}\, x + \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \textit{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \textit{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemples :

⇨ Calculer la dérivée de la fonction d'expression

$$-\frac{x}{2} + \mathrm{Arcsin}\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}$$

En déduire une expression plus simple lorsque $x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. Retrouver ce résultat directement.

⇨ Montrer que

$$\forall x \geqslant 0 \quad \frac{x}{1+x^2} \leqslant \mathrm{Arctan}\, x \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{x}{1+x^2}$$

3 Fonctions trigonométriques hyperboliques

3.1 Trigonométrie hyperbolique directe

Définition 11. *On définit les fonctions* sh *et* ch *sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \textit{et} \quad \mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Exemples :

⇨ Résoudre l'équation $7\cosh x + 2\sinh x = 9$.

Proposition 35. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Exemples :

⇨ Pour tout $x \geqslant 0$, on définit

$$y(x) = \operatorname{Arccos} \frac{1}{\operatorname{ch} x}$$

Montrer que $y(x) \in [0, \pi/2[$, calculer $1 + \tan y^2(x)$ puis en déduire une autre expression de $y(x)$.

Proposition 36. ch *est* sh *sont de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \quad \textit{et} \quad \operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$$

Proposition 37.
- ch *est paire et* sh *est impaire.*
- *On a :*

$$\operatorname{ch} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \textit{et} \quad \operatorname{ch} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$$
$$\operatorname{sh} x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \quad \textit{et} \quad \operatorname{sh} x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$$

Remarques :

⇨ Si f et g sont deux fonctions respectivement paires et impaires telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x = f(x) + g(x)$$

alors $f = \operatorname{ch}$ et $g = \operatorname{sh}$. C'est pourquoi on dit parfois que ch est la partie paire de l'exponentielle et que sh est sa partie impaire.

Proposition 38.
- ch *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_-$ *et strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+$.
- sh *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x \geqslant 1$
- $\forall x \in \mathbb{R} \quad [\operatorname{sh} x = 0 \iff x = 0] \quad \textit{et} \quad [\operatorname{sh} x \geqslant 0 \iff x \geqslant 0]$

Proposition 39.
- sh *est injective :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} y \Longrightarrow x = y$$

- sh *réalise une surjection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *:*

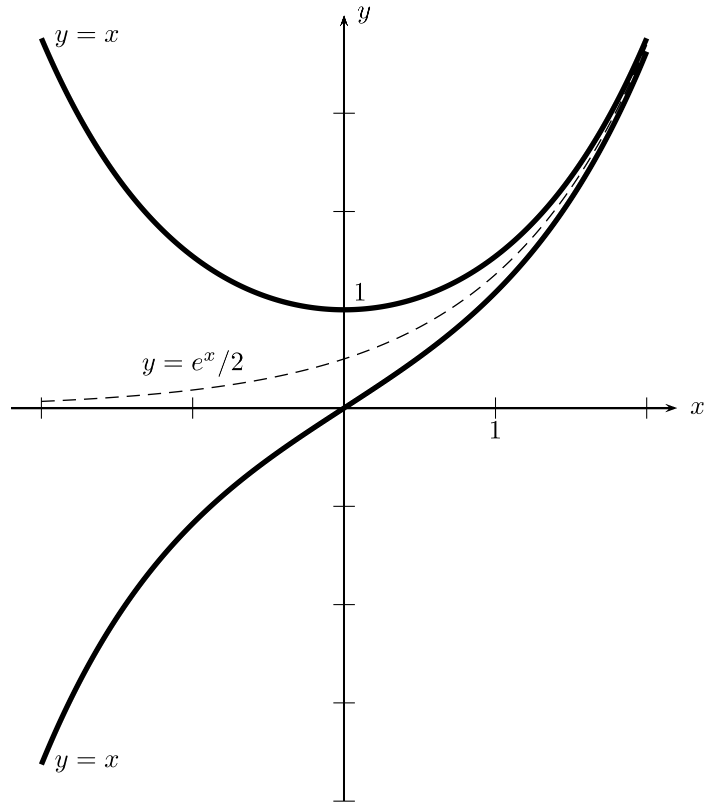
$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} x = y$$

- ch *n'est pas injective sur* $\mathbb{R}$, *mais :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} y \Longrightarrow [x = y \quad \textit{ou} \quad x = -y]$$

En particulier, ch *est injective sur* $\mathbb{R}_+$.
- ch *réalise une surjection de* $\mathbb{R}_+$ *dans* $[1, +\infty[$ *:*

$$\forall y \in [1, +\infty[\quad \exists x \in \mathbb{R}_+ \quad \operatorname{ch} x = y$$



Remarques :

⇨ Le graphe de la fonction cosh est obtenu en laissant pendre une chaîne entre deux points. C'est pourquoi, le graphe de cette fonction est aussi appelé « chaînette ».

Définition 12. *On définit la fonction* th *sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{th} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} \end{array}$$

Proposition 40. th *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}$ *et :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{th}'\, x = 1 - \mathrm{th}^2\, x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2\, x}$$

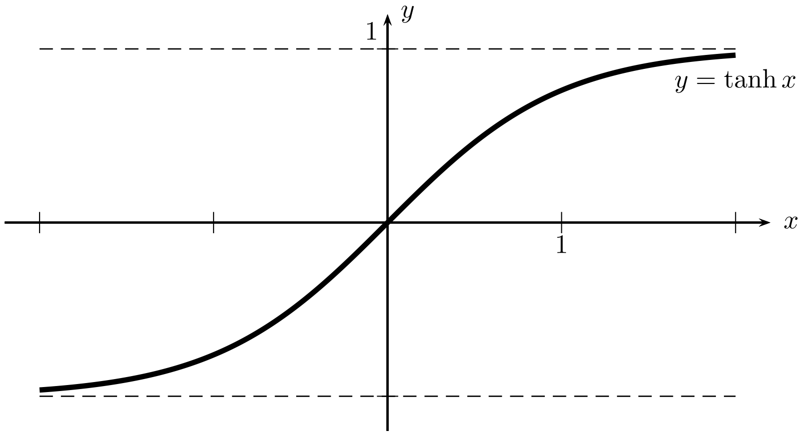
En particulier th *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

Proposition 41.
- th *est impaire.*
- *On a :*

$$\mathrm{th}\, x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \quad et \quad \mathrm{th}\, x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$$

Proposition 42.
- th *est injective :* $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \mathrm{th}\, x = \mathrm{th}\, y \Longrightarrow x = y$
- th *réalise une surjection de* $\mathbb{R}$ *dans* $]-1, 1[$ *:*

$$\forall y \in \,]-1, 1[\quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{th}\, x = y$$



Proposition 43. *La substitution :*

$$\begin{array}{ccc} \cos & \to & \mathrm{ch} \\ \sin & \to & i\,\mathrm{sh} \\ \tan & \to & i\,\mathrm{th} \end{array}$$

transforme une formule de trigonométrie circulaire en une formule de trigonométrie hyperbolique.

Exemples :

⇨ Calculer

$$\sinh\left(\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \quad \text{et} \quad \cosh\left(\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{ch}\, x - \sqrt{5}\,\mathrm{sh}\, x = 2\,\mathrm{sh}(3x)$.

⇨ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{sh}(kx)$$

⇨ Calculer

$$\int \mathrm{ch}^3\, x \,\mathrm{d}x, \qquad \int \mathrm{ch}^4\, x \,\mathrm{d}x$$