# Cours : Intégration

## Table des matières



# 1 Intégration

## 1.1 Fonctions continues par morceaux

**Définition 1** (○○●). *On appelle subdivision du segment $[a,b]$ toute famille $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels telle que*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

**Remarques :**

⇨ (○○●) On dit qu'une subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est régulière lorsque $x_{k+1}-x_k$ est indépendant de $k$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que la subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a,b]$ définie par

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad x_k \coloneqq a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

est une subdivision régulière de pas $(b-a)/n$.

⇨ (●○○) Se donner une subdivision de $[a,b]$ revient à se donner une partie finie de $[a,b]$ contenant $a$ et $b$.

**Définition 2** (●○○). *Soit $\tau_1 = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $\tau_2 = (y_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ deux subdivisions d'un même segment $[a,b]$. On dit que $\tau_2$ est plus fine que $\tau_1$ lorsque tout élément de la famille $\tau_1$ est un élément de la famille $\tau_2$, c'est-à-dire lorsque*

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad \exists i \in [\![0,m]\!] \quad x_k = y_i.$$

**Proposition 1** (●○○). *Soit $\tau_1$ et $\tau_2$ deux subdivisions d'un même segment $[a,b]$. Alors, il existe une subdivision plus fine que $\tau_1$ et $\tau_2$.*

**Définition 3** (○○●).
- *Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = n$ du segment $[a,b]$ telle que :*
  - *Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $f$ est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$.*
  - *Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, $f$ admet une limite finie à droite (au sens strict) en $x_k$ et à gauche (au sens strict) en $x_{k+1}$. Autrement dit, la restriction de $f$ à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.*
- *Soit $I$ un intervalle. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une continue par morceaux sur $I$ lorsque sa restriction à tout segment $[a,b]$ de $I$ est continue par morceaux sur $[a,b]$. On note $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(I,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $I$ dans $\mathbb{R}$.*

**Remarque :**

⇨ (○●○) Si on change la valeur d'une fonction continue par morceaux en un nombre fini de points, elle reste continue par morceaux.

**Proposition 2** (●●●). *Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$. Alors $f$ est bornée sur $[a,b]$.*

**Exercice :**

⇨ (●○○) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x > 0 \quad f(x) \coloneqq \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

$f$ est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$ ? Si on prolonge $f$ en 0 en posant $f(0) = 0$, la nouvelle fonction est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ ?

**Proposition 3** ($\circ\circ\bullet$). *Soit $I$ un intervalle.*
- *L'ensemble des fonctions réelles continues par morceaux sur $I$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.*
- *L'ensemble des fonctions complexes continues par morceaux sur $I$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$. De plus, si $f$ est une fonction continue par morceaux sur $I$, il en est de même pour $\overline{f}$ et $|f|$.*

## 1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

**Définition 4** ($\bullet\bullet\bullet$). *Il existe une une unique famille $(I_{a,b})_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}$ d'applications de $\mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\mathrm{Conv}(a,b),\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, associant à $f\in\mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\mathrm{Conv}(a,b),\mathbb{C})$ le nombre complexe $I_{a,b}(f)$ noté*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

*et vérifiant les propriétés suivantes :*
- *Linéarité :*

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\quad\forall\lambda,\mu\in\mathbb{C}\quad\forall f,g\in\mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\mathrm{Conv}(a,b),\mathbb{C})$$

$$\int_a^b(\lambda f+\mu g)(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx+\mu\int_a^b g(x)\,dx$$

- *Chasles :*

$$\forall a,b,c\in\mathbb{R}\quad\forall f\in\mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\mathrm{Conv}(a,b,c),\mathbb{C})$$

$$\int_a^c f(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx$$

- *Positivité :*

$$\forall a,b\in\mathbb{R}\quad\forall f\in\mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}(\mathrm{Conv}(a,b),\mathbb{R})\qquad\int_a^b f(x)\,dx\in\mathbb{R}\quad\text{et}$$

$$[(a\leqslant b)\quad\text{et}\quad(\forall x\in[a,b]\quad f(x)\geqslant 0)]\Longrightarrow\int_a^b f(x)\,dx\geqslant 0$$

- *Uniformité :*

$$\forall z\in\mathbb{C}\quad\forall a,b\in\mathbb{R}\qquad\int_a^b z\,dx=z(b-a)$$

**Remarque :**

⇨ ($\circ\circ\bullet$) Soit $f$ une fonction définie sur $\mathcal{D}_f$. On suppose qu'il existe une famille d'intervalles $(I_\alpha)_{\alpha\in A}$ telle que

$$\mathcal{D}_f=\bigcup_{\alpha\in A}I_\alpha$$

et que $f$ est continue par morceaux sur chacun des $I_\alpha$. Alors, pour tout $a,b\in\mathcal{D}_f$, si il existe $\alpha\in A$ tel que $a\in I_\alpha$ et $b\in I_\alpha$, on peut définir

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Cependant, il n'est pas possible de definir une telle intégrale si $a$ et $b$ n'appartiennent pas à un même intervalle. Par exemple, si $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x\in\mathbb{R}^*\quad f(x):=\frac{1}{x},$$

$f$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}^*_-$ et sur $\mathbb{R}^*_+$. Cependant l'intégrale

$$\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

n'a aucun sens.

**Exercice :**

⇨ ($\circ\bullet\circ$) Donner le domaine de définition de la fonction d'expression

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1+t^3}}$$

## 1.3 Positivité de l'intégrale

**Proposition 4** ($\bullet\bullet\bullet$). *Soit $I$ un intervalle et $f,g$ deux fonctions continues par morceaux sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que*

$$a\leqslant b\quad\text{et}\quad(\forall x\in[a,b]\quad f(x)\leqslant g(x))\,.$$

*Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx.$$

**Remarque :**

⇨ ($\circ\bullet\circ$) Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. On note

$$m:=\inf_{x\in[a,b]}f(x)\quad\text{et}\quad M:=\sup_{x\in[a,b]}f(x)\,.$$

Alors

$$m\,(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M\,(b-a)\,.$$

**Exercices :**

⇨ ($\circ\bullet\circ$) Déterminer la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\frac{1}{n!}\int_0^1\mathrm{Arcsin}^n\,x\,\mathrm{d}x$$

⇨ ($\circ\bullet\circ$) Déterminer les fonctions $f,g\in\mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}([0,1],\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x\in[0,1]\quad f(x)=\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\quad\text{et}\quad g(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

⇨ (○●○) Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\int_n^{n+1} f(x)\, \mathrm{d}x$$

**Proposition 5** (○○●). *Soit $I$ un intervalle et $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$. Si on change la valeur de $f$ en un nombre fini de points, la nouvelle fonction reste continue par morceaux et pour tout $a, b \in I$*

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

*reste inchangé.*

**Proposition 6** (●●○). *Soit $f$ une fonction réelle continue par morceaux sur $I$. Soit $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$. Si $f$ est positive sur $[a, b]$ et si il existe $x_0 \in [a, b]$ en lequel $f$ est continue et $f(x_0) > 0$, alors :*

$$\int_a^b f(x)\, dx > 0$$

**Proposition 7** (●●○). *Soit $f$ une fonction réelle continue sur $I$. Soit $a, b \in I$ tels que $a \leqslant b$ et*

$$\int_a^b f(x)\, dx = 0.$$

*Si $f$ est de signe constant sur $[a, b]$, alors*

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) = 0.$$

**Remarque :**

⇨ (●●○) Soit $f$ est une fonction continue sur $[a, b]$ telle que

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

**Exercices :**

⇨ (○○●) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\int_0^1 P^2(t)\, \mathrm{d}t = 0$$

Montrer que $P = 0$.

⇨ (●○○) Soit $f$ une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que

$$\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = c$.

## 1.4 Inégalité triangulaire

**Proposition 8** (●○○). *Soit $I$ un intervalle et $f$ une fonction continue par morceaux sur $I$. Alors, pour tout $a, b \in I$*

$$\overline{\int_a^b f(x)\, dx} = \int_a^b \overline{f(x)}\, dx.$$

**Proposition 9** ((●●●) **Inégalité triangulaire**). *Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$ et $f \in \mathcal{C}^0_{\mathrm{m}}([a, b], \mathbb{C})$. Alors*

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

**Exercices :**

⇨ (○●○) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On définit la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_0^1 f(t) \sin(xt)\, \mathrm{d}t$$

Montrer que $g$ est lipschitzienne.

⇨ (○●○) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\forall x \geqslant 0 \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

En déduire que

$$\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leqslant \frac{4}{2n+3}.$$

⇨ (○●○) Soit $f$ une fonction réelle, continue sur $\mathbb{R}_+$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$. Montrer que

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} f(0) \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

## 1.5 Sommes de Riemann

**Proposition 10** (●●●). *Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Alors :*

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\, dx$$

**Remarques :**

⇨ (○○●) Si $f$ est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

**Exercices :**

⇨ (○○●) Calculer la limite de la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{n^2+k^2}$$

⇨ (○○●) Soit $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$. Trouver un équivalent simple de

$$\sum_{k=0}^{n} k^{\alpha}$$

# 2 Intégration et dérivation

## 2.1 Continuité et dérivabilité

**Proposition 11** (○○●). *Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$, $a\in I$ et $F$ la fonction définie sur $I$ par :*

$$\forall x\in I\quad F(x)=\int_a^x f(t)\ dt$$

*On suppose qu'il existe un intervalle $A\subset I$ et un réel $M\in\mathbb{R}_+$ tels que :*

$$\forall x\in A\quad |f(x)|\leqslant M$$

*Alors $F$ est $M$-Lipschitzienne sur $A$.*

**Proposition 12** (○○●). *Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$ et $a\in I$. Soit $F$ la fonction définie sur $I$ par :*

$$\forall x\in I\quad F(x)=\int_a^x f(t)\ dt$$

*Alors $F$ est continue sur $I$.*

**Proposition 13** (○○●). *Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$ et $a\in I$. Soit $F$ la fonction définie sur $I$ par :*

$$\forall x\in I\quad F(x)=\int_a^x f(t)\ dt$$

*Soit $x_0\in I$. Si $f$ est continue en $x_0$, alors $F$ est dérivable en $x_0$ et :*

$$F'(x_0)=f(x_0)$$

**Remarques :**

⇨ (○○●) Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$ et $a,b$ deux fonctions dérivables sur un intervalle $J$ à valeurs dans $I$. On définit la fonction $g$ sur $J$ par

$$\forall x\in J\quad g(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Alors $g$ est dérivable sur $J$ et

$$\forall x\in J\quad g'(x)=b'(x)\,f(b(x))-a'(x)\,f(a(x))$$

**Exercices :**

⇨ (○●○) Déterminer les fonctions $f$, continues de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x\in\ ]-1,1[\quad f(x)=1+\int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

## 2.2 Primitives

**Définition 5** (○○●). *Soit $f$ une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de $f$ toute fonction $F$ définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ telle que :*

$$\forall x\in\mathcal{D}_f\quad F'(x)=f(x)$$

**Théorème 1** (○○●). *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Alors :*

- *$f$ admet une primitive.*
- *Si $F_1$ est une primitive de $f$, une fonction $F_2$ définie sur $\mathcal{D}_f$ est une primitive de $f$ si et seulement si il existe $c\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tel que :*

$$\forall x\in I\quad F_2(x)=F_1(x)+c$$

## 2.3 Calcul d'intégrales

**Proposition 14** (●●●). *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$, $a,b\in I$ et $F$ une primitive de $f$ sur $I$. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\ dt=F(b)-F(a)$$

**Remarques :**

⇨ (●●●) Si $f$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $I$ et si il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x\in I\quad |f'(x)|\leqslant M$$

alors $f$ est $M$-Lipschitzienne. On retrouve donc l'inégalité des accroissements finis dans le cas où $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

**Exercices :**

⇨ (○●○) Si $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \geqslant a$, alors

$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}\right| \leqslant \frac{1}{na^{\frac{n-1}{n}}} |x - y|$$

**Proposition 15** (○○●). *Soit $I$ un intervalle, $f$ une fonction continue sur $I$ et $g$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$. Si $F$ est une primitive de $f$, on a :*

$$\int_a^b \overbrace{f(t)}^{\text{intègre}} \underbrace{g(t)}_{\text{dérive}} \, dt = [F(t)\, g(t)]_a^b - \int_a^b F(t)\, g'(t) \, dt$$

**Exercices :**

⇨ (●●●) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, \mathrm{d}x$$

Calculer $I_n$.

⇨ (●●●) Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(x) \cos(nx) \, \mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Étant donnés $a, b \in \mathbb{R}$, calculer

$$\int_0^{\pi} \left(ax^2 + bx\right) \cos(nx) \, \mathrm{d}x$$

et en déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi^2}{6}.$$

**Proposition 16** (○○●). *Soit $I$ et $J$ deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\overline{x}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $I$ dans $J$, $x_a, x_b \in J$ et $t_a, t_b \in I$ tels que $\overline{x}(t_a) = x_a$ et $\overline{x}(t_b) = x_b$ et $f$ une fonction continue sur $J$. Alors :*

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) \, dx = \int_{t_a}^{t_b} f(\overline{x}(t)) \frac{d\overline{x}}{dt}(t) \, dt$$

**Exercices :**

⇨ (○●○) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Calculer

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)} \, \mathrm{d}x$$

⇨ (○●○) Soit $f$ une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que $f$ est linéaire.

**Proposition 17** (○○●).

- *Soit $a \geqslant 0$ et $f$ une fonction continue sur le segment $[-a, a]$.*
  - *Si $f$ est paire :*
  $$\int_{-a}^{0} f(x) \, dx = \int_0^a f(x) \, dx$$
  *En particulier :*
  $$\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx$$
  - *Si $f$ est impaire :*
  $$\int_{-a}^{0} f(x) \, dx = -\int_0^a f(x) \, dx$$
  *En particulier :*
  $$\int_{-a}^{a} f(x) \, dx = 0$$
- *Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, $T$-périodique. Alors :*
  $$\int_a^{a+T} f(x) \, dx$$
  *ne dépend pas du réel $a$.*

**Exercice :**

⇨ (○●○) Donner une équivalent de la suite de terme général

$$\int_0^n |\sin t| \, dt$$

## 2.4 Formules de Taylor

### 2.4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

**Proposition 18 ((●●●) Formule de Taylor avec reste intégral).** *Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $I$.*

— *Si $a, b \in I$. Alors :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$$

— *Si $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a*

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+t)\ dt$$

**Exercices :**

⇨ (○●○) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

⇨ (○●○) Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,1]$. Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(1)-f(0)}{2n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Proposition 19 ((●●●) Inégalité de Taylor-Lagrange).** *Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle $I$. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\forall t \in I \quad \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$$

*Alors, si $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a :*

$$\left|f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k\right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}|h|^{n+1}$$

# 3 Intégrale de Riemann

## 3.1 Uniforme continuité

**Définition 6 (○○●).** *On dit qu'une fonction $f$ est uniformément continue lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

**Remarque :**

⇨ (○○●) Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

**Exercice :**

⇨ (○●○) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais n'est pas lipschitzienne.

**Proposition 20 (○○●).** *Si $f$ est uniformément continue, alors elle est continue.*

**Remarques :**

⇨ (●●●) Soit $f$ une fonction continue. Alors

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}_f \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Les deux premiers quantificateurs étant de même nature, on peut les échanger, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}_f \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Une fonction est donc uniformément continue lorsqu'on peut échanger les quantificateurs portant sur $x$ et $\eta$, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de choisir $\eta$ indépendamment de $x$.

**Exercice :**

⇨ (○●○) Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas uniformément continue.

**Théorème 2 ((●●●) Théorème de Heine).** *Sur un segment, toute fonction continue est uniformément continue.*

## 3.2 Fonctions en escalier

**Définition 7 (○○●).**

— *Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction en escalier sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = n$ du segment $[a,b]$ telle que $\varphi$ soit constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$ :*

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \exists c_k \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \quad \forall x \in ]x_k, x_{k+1}[ \quad \varphi(x) = c_k$$

— *Soit $I$ un intervalle. On dit qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est en escalier sur $I$ lorsque sa restriction à tout segment $[a,b]$ de $I$ est en escalier sur $[a,b]$.*

**Remarques :**

⇨ (○●○) Si on change la valeur d'une fonction en escalier en un nombre fini de points, elle reste en escalier.

**Proposition 21 (○○●).** *Soit $\varphi$ une fonction en escalier sur un segment $[a,b]$. Alors $\varphi$ est bornée sur $[a,b]$.*

**Proposition 22** (○○●). *Soit $I$ un intervalle.*

— *L'ensemble des fonctions réelles en escalier sur $I$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.*

— *L'ensemble des fonctions complexes en escalier sur $I$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$. De plus si $\varphi$ est une fonction en escalier sur $I$, il en est de même pour $\overline{\varphi}$ et $|\varphi|$.*

**Proposition 23** (●●●). *Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une fonction en escalier $\varphi$ définie sur $[a,b]$ telle que :*

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$$

### 3.3 Construction de l'intégrale de Riemann

**Définition 8** (○○●). *Soit $\varphi$ une fonction en escalier sur le segment $\mathrm{Conv}(a,b)$ et $\tau : \min(a,b) = x_0 < \cdots < x_n = \max(a,b)$ une subdivision adaptée à $\varphi$. Il existe donc $c_0, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tels que*

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in \left]x_k, x_{k+1}\right[ \quad \varphi(x) = c_k.$$

*On définit alors l'intégrale de $\varphi$ entre $a$ et $b$ par*

$$\int_a^b \varphi(x)\ dx = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k (x_{k+1} - x_k) & \text{si } a \leqslant b \\ \displaystyle -\int_b^a \varphi(x)\ dx & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Remarque :**

⇨ (○●○) Si on change la valeur d'une fonction en un nombre fini de points, on ne change pas la valeur de son intégrale.

**Proposition 24** (○○●). *Soit $\varphi_1$ et $\varphi_2$ deux fonctions en escalier sur un intervalle $I$ et $a, b \in I$. Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors*

$$\int_a^b \lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x)\ dx = \lambda \int_a^b \varphi_1(x)\ dx + \mu \int_a^b \varphi_2(x)\ dx.$$

**Proposition 25** (○○●). *Soit $\varphi$ une fonction en escalier sur un intervalle $I$ et $a, b, c \in I$. Alors*

$$\int_a^c \varphi(x)\ dx = \int_a^b \varphi(x)\ dx + \int_b^c \varphi(x)\ dx.$$

**Proposition 26** (○○●). *Soit $\varphi$ une fonction réelle en escalier sur l'intervalle $I$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Si*

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad (\forall x \in [a,b] \quad \varphi(x) \geqslant 0),$$

*alors*

$$\int_a^b \varphi(x)\ dx \geqslant 0.$$

**Proposition 27** (○○●). *Soit $\varphi$ une fonction (réelle ou complexe) en escalier sur l'intervalle $I$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a \leqslant b$, alors*

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(x)|\ dx.$$

**Définition 9** (○○●).

— *Soit $I$ un intervalle, $f$ une fonction réelle sur $I$ et $a, b \in I$.*

  — *Si $a \leqslant b$, on définit les ensembles $A$ et $B$ par*

$$A := \left\{\int_a^b \varphi(x)\ dx \;\middle|\; \varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } \varphi \leqslant f\right\},$$

$$B := \left\{\int_a^b \varphi(x)\ dx \;\middle|\; \varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } f \leqslant \varphi\right\}.$$

  *On dit que $f$ est intégrable au sens de Riemann entre $a$ et $b$ lorsque $A$ admet une borne supérieure, $B$ admet une borne inférieure et $\sup A = \inf B$. Si c'est le cas, cette borne commune est notée*

$$\int_a^b f(x)\ dx.$$

  — *Si $b \leqslant a$, on dit que $f$ est intégrale au sens de Riemann entre $a$ et $b$ lorsque $f$ est intégrable au sens de Riemann entre $b$ et $a$. Si c'est le cas, on pose*

$$\int_a^b f(x)\ dx := -\int_b^a f(x)\ dx.$$

  *On dit que $f$ est intégrable au sens de Riemann sur $I$ lorsqu'elle est intégrable au sens de Riemann entre tout $a$ et $b \in I$.*

— *Soit $I$ un intervalle, $f$ une fonction complexe sur $I$ et $a, b \in I$. On dit que $f$ est intégrable au sens de Riemann entre $a$ et $b$ lorsque $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Si c'est le cas, on pose*

$$\int_a^b f(x)\ dx := \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))\ dx + i \int_a^b \mathrm{Im}(f(x))\ dx.$$

  *On dit que $f$ est intégrable au sens de Riemann sur $I$ lorsqu'elle est intégrable au sens de Riemann entre tout $a$ et $b \in I$.*

**Exercices :**

⇨ (●○○) Montrer qu'une fonction intégrable au sens de Riemann sur un segment $[a,b]$ est bornée.

⇨ (●○○) Montrer que si $a,b\in\mathbb{R}$ sont tels que $a<b$, alors la fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann entre $a$ et $b$.

⇨ (●○○) Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)=\begin{cases}x^2\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Montrer que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que sa dérivée n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $\mathbb{R}$.

**Proposition 28** (○○●). *Soit $f$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$, définie sur un intervalle $I$ et $a,b\in I$ tels que $a\leqslant b$. Alors $f$ est intégrable au sens de Riemann entre $a$ et $b$ si et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction en escalier $\varphi$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{C}$ et une fonction en escalier $\psi$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que*

$$(\forall x\in[a,b]\quad |f(x)-\varphi(x)|\leqslant\psi(x))\quad \text{et}\quad \int_a^b\psi(x)\,dx\leqslant\varepsilon$$

**Proposition 29** (●●●). *Soit $f$ une fonction continue par morceaux sur un intervalle $I$ et $a,b\in I$. Alors $f$ est intégrable au sens de Riemann entre $a$ et $b$.*

**Proposition 30** (○○●). *Soit $f$ et $g$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur un intervalle $I$ et $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$. Alors $\lambda f+\mu g$ est intégrable au sens de Riemann et pour tout $a,b\in I$, on a*

$$\int_a^b\lambda f(x)+\mu g(x)\ dx=\lambda\int_a^b f(x)\ dx+\mu\int_a^b g(x)\ dx.$$

**Proposition 31** (●○○). *Soit $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur un intervalle $I$. Alors $\overline{f}$ est intégrable au sens de Riemann sur $I$ et pour tout $a,b\in I$*

$$\overline{\int_a^b f(x)\ dx}=\int_a^b\overline{f(x)}\,dx.$$

**Proposition 32** (○○●). *Soit $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur $I$ et $a,b,c\in I$. Alors*

$$\int_a^c f(x)\ dx=\int_a^b f(x)\ dx+\int_b^c f(x)\ dx.$$

**Proposition 33** (○○●). *Soit $f$ et $g$ deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $I$ et $a,b\in I$ tels que*

$$a\leqslant b\quad \text{et}\quad (\forall x\in[a,b]\quad f(x)\leqslant g(x)).$$

*Alors*

$$\int_a^b f(x)\,dx\leqslant\int_a^b g(x)\,dx.$$

**Proposition 34** (○●○). *Soit $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur le segment $[a,b]$. Si $f$ est positive sur $[a,b]$ et si il existe $x_0\in[a,b]$ en lequel $f$ est continue et $f(x_0)>0$, alors*

$$\int_a^b f(x)\ dx>0.$$

**Proposition 35** ((○○●) **Inégalité triangulaire**). *Soit $f$ une fonction intégrable au sens de Riemann sur le segment $[a,b]$. Alors $|f|$ est intégrable au sens de Riemann et*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|\ dx.$$