Exercice 6.1

1) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_a^b \underset{\downarrow}{f(t)}\, \overset{\uparrow}{\widetilde{\sin(nt)}}\,dt = \left[f(t)\,\frac{(-1)}{n}\cdot\cos(nt)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\,\frac{(-1)}{n}\cdot\cos(nt)\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\Big(f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb)\Big) + \frac{1}{n}\cdot\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,dt$$

Donc

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt\right| = \frac{1}{n}\cdot\left| f(a)\cos(na) - f(b)\cos(nb) + \int_a^b f'(t)\cos(nt)\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}\cdot|f(a)\cos(na)| + \frac{1}{n}|f(b)\cos(nb)| + \frac{1}{n}\left|\int_a^b f'(t)\cos(nt)\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{n}|f(a)|\underbrace{|\cos(na)|}_{\leqslant 1} + \frac{1}{n}|f(b)|\underbrace{|\cos(nb)|}_{\leqslant 1} + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\underbrace{|\cos(nt)|}_{\leqslant 1}dt$$

$$\leqslant \frac{1}{n}|f(a)| + \frac{1}{n}|f(b)| + \frac{1}{n}\int_a^b |f'(t)|\,dt \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Donc $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt) \xrightarrow[n\infty]{} 0$

2.a). Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$. Montrons que

$$\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\,dt \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Il existe une subdivision $a = x_0 < \cdots < x_p = b$ adaptée à φ.
Il existe donc $c_0, \ldots, c_{p-1} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall k \in [\![0, p-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad \varphi(x) = c_k$$

Donc

$$\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\,dt = \sum_{k=0}^{p-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t)\sin(nt)\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{p-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} c_k\cdot\sin(nt)\,dt$$

car $\forall t \in]x_k, x_{k+1}[\ \varphi(t) = c_k$
et on ne change pas une intégrale
quand on change une fonction en
un nombre fini de points

$$= \sum_{k=0}^{p-1} c_k \cdot \left[\frac{-1}{n}\cos(nt)\right]_{x_k}^{x_{k+1}} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{c_k}{n} \cdot \left(\cos(nx_k) - \cos(nx_{k+1})\right)$$

Donc $$\left|\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)dt\right| \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \left|\frac{c_k}{n}\left(\cos(nx_k) - \cos(nx_{k+1})\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \frac{|c_k|}{n} \cdot \left(\underbrace{|\cos(nx_k)|}_{\leqslant 1} + \underbrace{|\cos(nx_{k+1})|}_{\leqslant 1}\right)$$

$$\leqslant \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{p-1} |c_k| \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Donc $$\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)dt \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

2.b) Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux. Montrons que

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)dt \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction en escalier telle que

$$\forall t \in [a,b] \quad |f(t) - \varphi(t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(b-a)+1}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\sin(nt)dt\right| = \left|\int_a^b \left(f(t) - \varphi(t) + \varphi(t)\right)\sin(nt)dt\right|$$

$$= \left|\int_a^b (f(t) - \varphi(t))\sin(nt)dt + \int_a^b \varphi(t)\sin(nt)dt\right|$$

$$\leqslant \left|\int_a^b (f(t) - \varphi(t))\sin(nt)dt\right| + \left|\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)dt\right|$$

$$\leqslant \int_a^b \underbrace{|f(t) - \varphi(t)|}_{\leqslant \varepsilon/(2(b-a)+1)}\underbrace{|\sin(nt)|}_{\leqslant 1}dt + \left|\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)dt\right|$$

$$\leqslant (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)+1} + \left|\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)dt\right|$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \left|\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)dt\right|$$

Or, d'après la question 2.a, $\int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\,dt \xrightarrow[n\infty]{} 0$
Il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N \quad \left| \int_a^b \varphi(t)\sin(nt)\,dt \right| \leq \varepsilon/2$$

Donc :

$$\forall n \geq N \quad \left| \int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc, on a prouvé que $\int_a^b f(t)\sin(nt)\,dt \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

<u>Exercice 5.1</u>

(i) Soit (u_n) la suite défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) := \sin(\pi x).$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$

Or f est continue sur $[0,1]$ donc d'après le théorème des sommes de Riemann.

$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$$

Or $\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \sin(\pi t)\,dt = \left[\frac{-1}{\pi} \cos(\pi t) \right]_0^1$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\cos(0 \times \pi) - \cos(1 \times \pi)\right) = \frac{2}{\pi}$$

Donc

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \xrightarrow[n\infty]{} \frac{2}{\pi}$$

(ii) Soit (u_n) la suite défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n := n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = n \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$

$$= \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$$

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) := \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$$

Alors f est continue, donc, d'après le théorème sur les sommes de Riemann

$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)dt$$

Or $$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 (1+t)^{-2}dt = \left[(-1)(1+t)^{-1}\right]_0^1 = \frac{1}{1+0} - \frac{1}{1+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2}$.

(iii) Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \geq 1 \quad u_n := \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}$$

Alors :

$$\forall n \geq 1 \quad u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où f est la fonction définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1]$ $f(x) := \sqrt{x}$.
Donc, puisque f est continue sur $[0,1]$, d'après le théorème des sommes de Riemann

$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)dt$$

Or $$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 t^{1/2}.dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Donc $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \frac{2}{3}$.

<u>Remarque</u> : $$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)dt} - \underbrace{\frac{1}{n}.f(0)}_{\downarrow n\infty \; 0}$$

(iv) Soit (u_n) la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n := \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}$$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(u_n) = \frac{1}{n} \cdot \ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right)$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est la fonction définie par : $\forall x \in [0,1] \ f(x) := \ln(1+x^2)$
Puisque f est continue, d'après le théorème des sommes de Riemann, on en déduit que
$$\ln(u_n) \xrightarrow[n\infty]{} \int_0^1 f(t)\,dt$$

Or
$$\int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 \ln(1+t^2)\,dt = \int_0^1 \overset{\uparrow}{1}\,.\,\underbrace{\ln(1+t^2)}_{\downarrow}\,dt$$
$$= \left[t.\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 t\,.\,(2t)\,.\,\frac{1}{1+t^2}\,.dt$$
$$= \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,.dt$$
$$= \ln(2) - 2\,.\int_0^1 \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}\,.dt$$
$$= \ln(2) - 2\left(\int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt\right)$$
$$= \ln(2) - 2\left[t - \arctan t\right]_0^1$$
$$= \ln(2) - 2\,(1-\arctan 1) = \ln(2) - 2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Donc $u_n = e^{\ln u_n} \xrightarrow[n\infty]{} e^{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}} = 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$

car exp est continue.

(v) Soit (u_n) la suite défini par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \qquad u_n=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$$

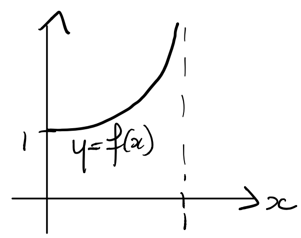
Alors :

$$\forall n\geq 1 \qquad u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Où f est la fonction défini sur $[0,1[$ par :

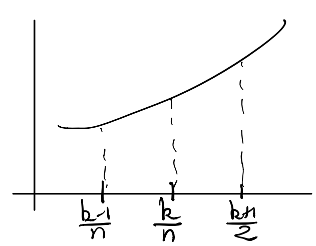
$$\forall x\in[0,1[\qquad f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



On ne peut pas appliquer le théorème sur les sommes de Riemann car

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

n'a aucun sens (pour le moment). Soit $k\in[\![1,n-2]\!]$.



Puisque f est croissante sur $[0,1[$, on a :

$$\forall x\in\left[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}\right] \qquad f(x)\geq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx \geq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

De même :
$$\forall x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right] \qquad f(x) \leqslant f\left(\frac{k}{n}\right)$$
$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\left(\frac{k}{n}\right)dx = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donc
$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)dx \leqslant \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx$$

Donc
$$\sum_{k=1}^{n-2} \int_{\frac{k-1}{n}}^{k/n} f(x)dx \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-2} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n-2} \int_{k/n}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx$$

Donc
$$\int_0^{\frac{n-2}{n}} f(x)dx \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-2} f\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n-1}{n}} f(x)dx$$

Or, si $a, b \in [0, 1[$
$$\int_a^b f(x)dx = \left[\arcsin(x)\right]_a^b$$
$$= \arcsin(b) - \arcsin(a).$$

Donc
$$\forall n \geqslant 1 \qquad \underbrace{\arcsin\left(\frac{n-2}{n}\right)}_{\substack{\downarrow n\infty \\ \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}}} \leqslant u_n \leqslant \underbrace{\arcsin\left(\frac{n-1}{n}\right)}_{\substack{\downarrow n\infty \\ \pi/2}} - \underbrace{\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)}_{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}$$

Car arcsin est continue en 0 et 1. Donc d'après le théorème des gendarmes
$$u_n \xrightarrow[n\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Exercice 3.1

Soit f une fonction continue sur I. On suppose que
$$\forall a, b \in I \qquad \int_a^b f(t)dt = 0$$
Montrons que f est nulle. En effet, soit $a \in I$. On définit la fonction F sur I par :
$$\forall x \in I \qquad F(x) = \int_a^x f(t)dt$$
Alors F est nulle. Or F est dérivable sur I car f est continue.

De plus : $\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$

Or F est nulle donc F' est nulle. Donc

$$\forall x \in I \quad f(x) = 0 .$$