Exercices : Systèmes linéaires

0.1 Calcul de rang et d'inverse

Calculer les rangs des matrices suivantes et calculer leurs inverses quand il y a lieu.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

0.2 Calcul de rang

Résoudre le système linéaire dont la matrice A est définie par :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } |i-j| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quel est son rang ?

0.3 Étude d'un système affine

Soit a, b, c trois réels deux à deux distincts.

1. Montrer que le système :
$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ x + by + b^2 z = 0 \\ x + cy + c^2 z = 0 \end{cases}$$
est de Cramer.
2. Résoudre le système :
$$\begin{cases} x + ay + a^2 z = a^4 \\ x + by + b^2 z = b^4 \\ x + cy + c^2 z = c^4 \end{cases}$$

0.4 Exercice

Résoudre le système

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 2 \\ \ldots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} - x_n = n \end{cases}$$

0.5 Exercice

Soit $\mathcal{S} : \begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x + my + z - mt = m + 2 \\ mx - y - mz - t = -1 \end{cases}$ où $m \in \mathbb{R}$ est fixé. Déterminer le rang de $\mathcal{S}$ et le résoudre.

0.6 Exercice

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Résoudre le système $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + jy + j^2 z = b \\ x + j^2 y + jz = c \end{cases}$ et donner une CNS sur a, b, c pour que les solutions soient réelles.

0.7 Exercice

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\exists X \in \mathbb{R}^3$ non nul tel que $AX = \lambda X$.
Pour chaque λ déterminer $E_\lambda = \left\{X \in \mathbb{R}^3 / AX = \lambda X\right\}$. Conclusion ?