EXERCICES : INTÉGRATION

1 Calculs d'intégrales et de limites

1.1 Calcul de quelques intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_n^m E(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pour } n, m \in \mathbb{Z}$$

$$\int_{-1}^2 x\,|x|\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-1}^1 x\,|x|\,\mathrm{d}x \qquad \int_{-1}^1 \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

1.2 Calcul de limites

1. Calculer les limites des expressions suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

$$\frac{1}{n!}\int_0^1 \mathrm{Arcsin}^n\, t\,\mathrm{d}t \qquad \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x$$

2. Calculer la limite de

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+ax^2}\,\mathrm{d}x$$

lorsque a tend vers 0.

1.3 Calcul de limite

Soit f une fonction continue sur le segment $[0,1]$ à valeurs strictement positives. Pour tout $\alpha > 0$, on définit :

$$I(\alpha) = \left(\int_0^1 f^\alpha(t)\,dt\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

1. Montrer que $I(\alpha)$ converge vers la borne supérieure de f lorsque α tend vers $+\infty$.
2. Le but de cet question est de montrer que lorsque α tend vers 0, $I(\alpha)$ tend vers :

$$\exp\left(\int_0^1 \ln(f(t))\,dt\right)$$

   (a) On suppose dans cette question que $\forall x \in [0,1] \quad f(x) \geqslant 1$.
      i. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0,\eta] \quad 1+(1-\varepsilon)x \leqslant e^x \leqslant 1+(1+\varepsilon)x$$

      ii. En déduire qu'il existe $\eta' > 0$ tel que :

$$\forall \alpha \in]0,\eta'] \quad 1+(1-\varepsilon)\alpha\ln(f(t)) \leqslant f^\alpha(t) \leqslant 1+(1+\varepsilon)\alpha\ln(f(t))$$

      iii. Conclure
   (b) Montrer le cas général.

2 Fonctions définies par des intégrales

2.1 Étude de fonctions

Étudier le domaine de définition, les symétries, la monotonie et les limites aux bornes du domaine de définition des fonctions d'expressions :

$$x \mapsto \int_1^{1+x^2} \ln(t)\,\mathrm{d}t \qquad x \mapsto \int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(1+t^2)}$$

$$x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t)} \qquad x \mapsto \int_x^{2x} e^{t^2}\,\mathrm{d}t$$

2.2 Étude d'une fonction définie par une intégrale

Soit f une fonction continue et positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On définit la fonction g d'expression :

$$g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x\sin t}\,\mathrm{d}t$$

1. Montrer que g est définie sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que g est décroissante.
3. Étant donné $a > -1$, montrer que g est lipschitzienne sur $[a,+\infty[$. En déduire que g est continue sur $]-1,+\infty[$.
4. Montrer que g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et que :

$$\forall x \in]-1,+\infty[\quad g'(x) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)\sin t}{(1+x\sin(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

3 Inégalités et intégration

3.1 Fonction d'intégrale nulle

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On suppose que quels que soient a et b dans I

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Montrer que f est nulle.

3.2 Égalité dans l'inégalité triangulaire

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$. On suppose que :

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

Montrer que :

1. Si f est réelle, f garde un signe constant.
2. Si f est complexe, f garde un argument constant.

3.3 Inégalité de Gronwall

1. Soit f une fonction positive et continue sur $\mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe un nombre réel k positif tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f(x) \leqslant k \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer que la fonction f est nulle.
2. Soit $c \in \mathbb{R}_+$, u et v deux applications continues et positives de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ telles que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u(x) \leqslant c + \int_0^x u(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$
Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad u(x) \leqslant c \exp\left(\int_0^x v(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

4 Taylor-Lagrange

4.1 Calcul numérique

Donner une majoration de l'erreur commise en prenant $x - \frac{x^2}{2}$ comme valeur approchée de $\ln(1+x)$. En déduire une valeur approchée de $\ln(1,003)$ à 10^{-8} près.

5 Sommes de Riemann

5.1 Calcul de limites

Étudier la convergence des suites de terme général :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{n} \qquad n\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \qquad \frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}$$

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)} \qquad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$$

6 Limites d'intégrales

6.1 Lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$. Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

1. En effectuant une intégration par parties, montrer que le résultat est vrai lorsque f est supposé $\mathcal{C}^1$.
2. Le but de cette question est de démontrer que le résultat est vrai dans le cas général.
   (a) Montrer que le résultat est vrai lorsque f est une fonction en escalier.
   (b) En déduire la cas général.

6.2 Généralisation du lemme de Lebesgue

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ et g une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux et T-périodique. Le but de cet exercice est de montrer que :

$$\int_a^b f(t)\,g(nt)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \left(\frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,\mathrm{d}t\right)\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer le résultat lorsque f est constante puis lorsque f est une fonction en escalier.
2. En déduire le résultat général
3. **Application** : Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$. On définit la suite (u_n) par :
$$\forall n \geqslant 1 \quad u_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}f(0) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{1}{2}f(1)\right)$$
   (a) Montrer que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$:
$$\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right) + \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k+1}{n} - t\right) f'(t)\,\mathrm{d}t$$
   (b) En déduire que :
$$u_n = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \underset{n\to\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

6.3 Limite différentielle

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f'(x) + f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Le but de cet exercice est de montrer que $f(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.

1. On note ε la fonction $\varepsilon = f + f'$. Montrer que si a est un réel :

$$f(x) = f(a)e^{a-x} + e^{-x} \int_a^x \varepsilon(t)e^t \, \mathrm{d}t$$

2. Conclure.

3. Que dire si la condition de départ est changée en :

$$f'(x) + \lambda f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

où λ est un réel.