DM7- pour le 16/01/2018- Convexité

1 Définition et premières propriétés

1) a) Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Soient x et y deux points de I tels que $x < y$. La fonction affine passant par les points de coordonnées $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$ est la fonction $u \mapsto \Delta_f(x,y)(u-x) + f(x)$.

Donc f est convexe
$\iff \forall t \in [0,1]^2, \forall (x,y) \in I^2, x < y \left(\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\right)(tx+(1-t)y-x) + f(x) \geq f(tx+(1-t)y)$
$\iff\iff \forall t \in [0,1]^2, \forall (x,y) \in I^2, tf(x)+(1-t)f(y) \geq f(tx+(1-t)y))$ (Il y a toujours égalité si $x = y$).

Si f est concave alors on a : $\forall t \in [0,1]^2, \forall (x,y) \in I^2, t(-f)(x)+(1-t)(-f)(y) \geq (-f)(tx+(1-t)y))$
Donc $\forall t \in [0,1]^2, \forall (x,y) \in I^2, f(tx+(1-t)y) \geq tf(x)+(1-t)f(y)$.

b) Si f est convexe et concave alors pour tout $(x,y) \in I^2$, la courbe représentative de f est confondue avec la corde reliant les points M_x et M_y. On en déduit donc que la fonction f est affine.

2) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $t \in [0,1]$:

$$(tx+(1-t)y))^2 - \left(tx^2+(1-t)y^2\right) = -t(1-t)(x-y)^2 \leq 0.$$

Donc $(tx+(1-t)y))^2 \leq \left(tx^2+(1-t)y^2\right)$. Donc $x \mapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

a) Montrons que exp est convexe sur $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$. Soit $t \in]0,1[$.
Notons $\varphi : x \mapsto t\mathrm{e}^x + (1-t)\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{tx+(1-t)y}$.
La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi' : x \mapsto t\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{tx+(1-t)y}\right)$. Donc $\varphi'(x) \geq 0 \iff \mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^{tx+(1-t)y} \iff x \geq tx+(1-t)y \iff x \geq y$.
Donc la fonction φ est minimale lorsque $x = y$, et $\varphi(y) = 0$. On en déduit donc que $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) \geq 0$, c'est-àdire :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in]0,1[, \mathrm{e}^{tx+(1-t)y} \leq t\mathrm{e}^x + (1-t)\mathrm{e}^y.$$

L'inégalité étant évidente pour $t \in \{0\}\, 1$, on en déduit que

$$\boxed{\text{exp est convexe.}}$$

Si $(X,Y) \in (\mathbb{R}_*^+)^2$, on peut appliquer le résultat prcédent à $x = \ln(X)$ et $y = \ln(Y)$, on en déduit que :

$$\forall (X,Y) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2, \forall t \in [0,1]^2, \mathrm{e}^{t\ln(X)+(1-t)\ln(Y)} \leq t\mathrm{e}^{\ln(X)} + (1-t)\mathrm{e}^{\ln(Y)} = tX + (1-t)Y.$$

Donc par croissance de la fonction ln :

$$\forall (X,Y) \in \left(\mathbb{R}_*^+\right)^2, \forall t \in [0,1]^2, \ln(tX+(1-t)Y) \leq tX + (1-t)Y.$$

$$\boxed{\text{Donc la fonction ln est concave sur } \mathbb{R}_*^+.}$$

3) Soit f une fonction convexe sur I.
Soient x_1, x_2 et x_3 trois points de I tels que $x_1 < x_2 < x_3$. Posons $t = \dfrac{x_2-x_3}{x_1-x_3}$ de sorte que $t \in [0,1]$ et $x_2 = tx_1 + (1-t)x_3$. La convexité de f donne :

$$f(x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_3).$$

D'où :

$$f(x_2) \leq \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}f(x_1) + \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}f(x_3).$$

D'où :

$$f(x_2) - f(x_1) \leq \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\left(f(x_3)-f(x_1)\right).$$

C'est-à-dire puisque $x_2 - x_1 > 0$: $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \dfrac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$.
On a donc $\boxed{\Delta_f(x_1,x_2) \leq \Delta_f(x_1,x_3)}$.
On prouve de manière analogue que : $\Delta_f(x_1,x_3) \leq \Delta_f(x_2,x_3)$.

4) Première implication :
Soit f une fonction convexe définie sur I. Soit $a \in I$. Montrons que $p_a : x \in I \setminus \{a\} \mapsto \Delta_f(x,a)$ est croissante.
Soient x et y deux éléments de I différents de a tels que $x < y$.

— Si $x < y < a$, alors en posant $x_1 = x$, $x_2 = y$ et $x_3 = a$, dans l'inégalité de la question précédente, on a $p_a(x) \leq p_a(y)$.

— Si $a < x < y$, alors par question précédente avec $x_1 = a$, $x_2 = a$ et $x_3 = y$, on a $p_a(x) \leq p_a(y)$.

— Si $x < a < y$, alors par question précédente avec $x_1 = x$, $x_2 = a$ et $x_3 = y$, on a $p_a(x) \leq p_a(y)$.

Donc dans tous les cas $p_a(x) \leq p_a(y)$. On en déduit donc que l'application p_a est croissante.

Implication réciproque :
On suppose maintenant que pour tout $a \in I$, la fonction p_a est croissante. Montrons que f est convexe sur I.
Il suffit de prouver que pour tout $(x, y) \in I^2$, tel que $x < y$ et $t \in]0, 1[$: $f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.
Soit $(x, y) \in I^2$, tel que $x < y$ et $t \in]0, 1[$. Posons $a = tx+(1-t)y$, alors $a \in I$, car I est un intervalle, la croissance de p_a donne alors $p_a(x) \leq p_a(y)$, donc : $\dfrac{f(a) - f(x)}{a - x} \leq \dfrac{f(a) - f(y)}{a - y}$ donc $\dfrac{f(a) - f(x)}{(1-t)(y-x)} \leq \dfrac{f(a) - f(y)}{t(x-y)}$. Donc puisque $y > x$, on a $f(a) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$.
Donc f est convexe.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est convexe ssi } \forall a \in I, \text{ l'application } p_a \text{ est croissante.}}$$

5) Lemme des pentes amélioré
Soit f une fonction convexe sur I et $(a, b, x, y) \in I^4$ tels que $a < b$ et $x < y$. Le lemme des trois pentes donne alors : $\Delta_f(a, x) \leq \Delta_f(a, y)$ et $\Delta_f(a, y) \leq \Delta_f(b, y)$. Cela implique par transitivité de $\leq$:

$$\boxed{\Delta_f(a, x) \leq \Delta_f(b, y).}$$

2 Fonctions convexes et régularité

6) a) Soit a un point de l'intérieur de I. La fonction p_a est croissante, elle admet donc une limite finie à droite et à gauche en tout point de $I \setminus \{\sup(I), \inf(I)\}$. En particulier, elle admet une limite à droite et une limite à gauche en a.

b) On prouve facilement que $x \mapsto |x|$ est convexe. Mais elle n'est pas dérivable en 0. Les fonctions convexes ne sont donc pas nécessairement dérivables en tout point de l'intérieur de leur domaine de définition.

7) a) La dérivabilité à droite (resp. à gauche) implique la continuité à droite (resp. à gauche) en tout point de l'intérieur de I. Donc une fonction convexe est nécessairement continue sur l'intérieur de son domaine de définition.

b) L'exemple de la fonction $x \mapsto \left| \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & x \in]0, 1[\\ 1 & \text{si} & x \in \{0, 1\} \end{array} \right.$, prouve que f n'est pas forcément continue sur I.

8) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que f est convexe bijective de I vers J.

a) Alors, f est continue et bijective sur I, elle est donc strictement monotone sur I.

b) Par convexité de f, on a pour tout $(X, Y) \in J^2$, et tout $t \in [0, 1]$:

$$f\left(tf^{-1}(X) + (1-t)f^{-1}(Y)\right) \leq tf(f^{-1}(X)) + (1-t)f(f^{-1}(Y)).$$

C'est-à-dire :

$$f\left(tf^{-1}(X) + (1-t)f^{-1}(Y)\right) \leq tX + (1-t)Y.$$

$(-)$ Si f est une bijection croissante, cela implique que :

$$tf^{-1}(X) + (1-t)f^{-1}(Y) \leq f^{-1}(tX + (1-t)Y).$$

La fonction f^{-1} est donc concave.
$(-)$ Si f est une bijection décroissante, on en déduit de manière analogue que la fonction f^{-1} est convexe.

c) La fonction exp est une bijection croissante convexe dont la réciproque ln est une bijection décroissante concave.
La fonction $x \mapsto \exp(-x)$ est une bijection décroissante convexe dont la réciproque $-\ln$ est une bijection croissante convexe.

9) Soit f une fonction dérivable sur I.
$(-)$ Supposons que f est convexe.

Montrons que f' est croissante.
Soient a et b deux éléments de I tels que $a < b$. Pour tout $h \neq 0$, tel que $a + h \in I$ et $b + h \in I$, on a $a + h \leq b + h$. Donc d'après le lemme des pentes amélioré, $\Delta_f(a, a+h) \leq \Delta_f(b, b+h)$. En passant à la limite $h \mapsto 0$, on en déduit que : $f'(a) \leq f'(b)$.
On a donc prouvé $\forall (a, b) \in I^2, a < b \Longrightarrow f'(a) \leq f'(b)$.
Donc f' est croissante.

Supposons maintenant que f' est croissante sur I.
Montrons que f est convexe.
Soient $(x,y) \in I^2$ et $t \in]0,1[$ tels que $x < y$.
On note $a = tx + (1-t)y$ dans la suite. Puisque f est dérivable sur I, d'après l'égalité des accroissements finis, $\exists \alpha \in]x,a[, f'(\alpha) = \dfrac{f(a)-f(x)}{a-x}$, et :
$\exists \beta \in]a,y[, f'(\beta) = \dfrac{f(a)-f(y)}{a-y}$. On a donc $\alpha \leq \beta$, donc par croissance de f', on a $f'(\alpha) \leq f'(\beta)$. On en déduit alors que :

$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(a)-f(y)}{a-y}.$$

Ce qui donne :

$$f(a) \leq tf(x) + (1-y)f(y).$$

La fonction f est donc convexe. On a donc prouvé l'équivalence recherchée :

$$\boxed{\text{(Si } f \text{ est dérivable sur } I\text{, la fonction } f' \text{ est croissante ssi } f \text{ est convexe.}}$$

10) a) Si f est deux fois dérivable.

$$\boxed{\text{Alors } f \text{ convexe} \iff f' \text{ est croissante} \iff f'' \geq 0.}$$

b) La fonction exp est évidemment deux fois dérivable, et $\exp'' = \exp \geq 0$. Donc exp est convexe.

3 Comportement au voisinage de $+\infty$ des fonctions convexes positives.

11) a) Soit $f_1 : x \mapsto x - \tanh(x)$.
i) On vérifie facilement par une petite étude de fonctions que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_1(x) \geq 0$. On a $f_1(0) = 0$. De plus, $f_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, f_1'(x) = \tanh^2(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad f_1''(x) = 2(1-\tanh^2(x))\tanh(x) \geq 0.$$

Donc $f_1 \in \mathcal{E}$ et de plus f_1 est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
ii) Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \tanh(x) = 1^-$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f_1(x) - (x-1) = 0^+$. Donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_{f_1}$ au voisinage de $+\infty$ et au voisinage de $+\infty$ la courbe $\mathcal{C}_{f_1}$ est au-dessous de l'asymptote).
iii)

La fonction f_2 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ comme somme et composée de telles fonctions. On a $f_2(0) = 0$.
De plus, $f_2' : x \mapsto \arctan(x)$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_2'(x) \geq 0$.
Donc $f_2 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.
Et $\forall x \in \mathbb{R}_+, f_2''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \geq 0$. Donc f_2 est une fonction de $\mathcal{E}$ qui est de plus croissante.
On a $f_2(x) = x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) - \dfrac{\ln(1+x^2)}{2} = x\dfrac{\pi}{2} - o_{+\infty}(1) - \ln(x) + o_{+\infty}(1)$,
(car $\forall x \in \mathbb{R}_*^+, \ln(x^2+1) = 2\ln(x) + \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right)$). Donc $f_2(x) = \dfrac{\pi x}{2} - \ln(x) + o_{+\infty}(1)$. La courbe représentative de f_2 admet donc une branche parabolique d'équation $y = \dfrac{\pi x}{2}$.

b) la fonction $x \mapsto e^x - 1$ appartient à $\mathcal{E}$ et vérifie $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Dans toute la suite de cette partie f désigne une fonction de $\mathcal{E}$. (Elle est donc convexe, car sa dérivée seconde est positive).

12) a) La fonction $x \mapsto xf'(x) - f(x)$ est dérivable de dérivée $x \mapsto f''(x)$, comme $f \in \mathcal{E}$, elle est donc croissante. Elle s'annule en 0, car $f(0) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \leq xf'(x)$.

b) La fonction f est convexe, donc d'après la première partie, on en déduit que $p_0(f)$ est croissante.

13) Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Soit $\varphi_y : x \mapsto f(x+y) - f(x) - f(y)$. La fonction φ_y est dérivable sur $\mathbb{R}^p$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi_y'(x) = f'(x+y) - f'(x) \geq 0.$$

car f' est croissante. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \varphi_y(x) \geq \varphi_y(0) = f(0) = 0$, car $f \in \mathcal{E}$.

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) + f(y) \leq f(x+y).}$$

14) a) Supposons que $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(x) = +\infty$, dans ce cas d'après **13)a)**, et par théorème de comparaison $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$.

b)

i) Soit $x > 0$. La positivité de $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$ donne $f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) \leq f(x)$.

De plus, d'après l'inégalité des accroissements finis, $\exists c_x \in]x, x/2[$ tel que $\dfrac{f(x) - f(x/2)}{\frac{x}{2}} = f'(c_x)$. La croissance de f' donne alors :

$$\frac{f(x) - f(x/2)}{\frac{x}{2}} \geq f'\left(\frac{x}{2}\right).$$

On a donc pour tout $x > 0$, $\dfrac{x}{2} f'\left(\dfrac{x}{2}\right) \leq f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) \leq f(x)$.

ii) Si l'on suppose de plus que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = +\infty$, puisque par question précédente :

$$\frac{1}{2} f'\left(\frac{x}{2}\right) \leq p_0(f)(x),$$

on obtient donc $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(f)(x) = +\infty$.

15) On suppose maintenant que f n'est pas constante et que $p_0(f)$ ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

a) Puisque $p_0(f)$ est croissante, elle admet $+\infty$ ou un réel $a \in \mathbb{R}_+$ comme limite en $+\infty$. Par supposition, le cas $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(f)(x) = +\infty$ est exclu. Donc $\exists a \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(f)(x) = a$. Le réel a ne peut être nul, sinon par croissance de $p_0(f)$, on obtiendrait $\forall x \in \mathbb{R}_+, 0 \leq \dfrac{f(x)}{x} \leq 0$, donc f serait l'application nulle, ce qui est exclu.

$$\boxed{\text{Donc } \exists a \in \mathbb{R}_*^+, f(x) \underset{+\infty}{\sim} ax.}$$

b) D'après la question précédente, la fonction f' ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$ mais elle est croissante, donc par théorème de la limite monotone, $\exists \ell \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \ell$.
On a donc $f'(x) = \ell + o(1)$ et $f(x) = ax + o_{+\infty}(x)$.
De plus par question précédente :

$$xf'(x/2) \leq f(x) - f(x/2) \leq f(x).$$

Donc $\dfrac{x\ell}{2} + o(x) \leq ax - a\dfrac{x}{2} + o(x) \leq ax + o(x)$.
Donc $\dfrac{x\ell}{2} + o(x) \leq \dfrac{ax}{2} + o(x)$. Donc $\ell \leq a$.

Par ailleurs, $\forall x \in \mathbb{R}_*^+$, $\dfrac{f(x)}{x} \leq f'(x)$. Donc, par passage à la limite $a \leq \ell$.

$$\boxed{\text{Donc } a = \ell.}$$

c) La fonction $x \mapsto f(x) - ax$ admet $x \mapsto f'(x) - a$ pour dérivée. Comme la fonction f'' est positive, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) \leq a$. La fonction $x \mapsto f(x) - ax$ est donc décroissante et donc par théorème de la limite monotone, la fonction $x \mapsto f(x) - ax$ admet une limite $b \in \mathbb{R}_+ \cup \{-\infty\}$.

d) Si $b \in \mathbb{R}$, on a une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$. Si $b = -\infty$, on a une branche parabolique de direction asymptotique $y = ax$.

4 Fonctions moyennement convexes

16) Soit f une fonction continue et moyennement convexe sur I.
Montrons que f est convexe.
Soient a et b deux points de I, montrons que sur $[a,b]$, le graphe de f est en dessous de la corde reliant les points $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$.

On considère la fonction $g : x \mapsto f(x) - \left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)$, qui est la différence entre entre la corde et la fonction f, et l'on a $g(a)=g(b)=0$. Cette fonction g est encore moyennement convexe. Il suffit de prouver que $\forall x \in [a,b], g(x) \leq 0$, pour prouver que sur $[a,b]$ le graphe de f est au-dessus de la corde.

Par l'absurde. Supposons qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g(c) > 0$.
$(-)$ Soit $\mathcal{D} = \left\{ x \in [a,c] \;\middle|\; g(x) \leq 0 \right\}$, cet ensemble est majoré par c, non vide car il contient a. Il admet donc une borne supérieure que l'on note d. Puisque $g(c) > 0$ et comme g est continue, en utilisant la définition de la limite avec $\varepsilon = \dfrac{g(c)}{2} > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in [c-\eta, c+\eta], g(x) \geq g(c) - \dfrac{g(c)}{2} > 0$. Donc $d \leq c - \eta < c$.
De plus, $g(d) \leq 0$, en effet, il existe par caractérisation séquentielle du sup, une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{D}$ qui converge vers d. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, g(x_n) \leq 0$, donc par continuité de f en d, en passant à la limite $g(d) \leq 0$.
$(-)$ On construit de manière analogue $d' = \inf\left\{ x \in [c,b] \;\middle|\; g(x) \leq 0 \right\}$ qui vérifie $c < d'$ et $g(d') \leq 0$.
$(-)$ Par moyenne convexité, on a donc $g\left(\dfrac{d+d'}{2}\right) \leq \dfrac{g(d)+g(d')}{2} \leq 0$. Pourtant par construction de d et d', on a $\forall x \in]d,d'[, g(x) > 0$, donc $g\left(\dfrac{d+d'}{2}\right) > 0$. Contradiction !

Donc $\forall x \in]a,b[, g(x) \leq 0$.

$$\boxed{\text{Donc } f \text{ est convexe.}}$$

5 Inégalité de Jensen

Soit f une fonction convexe sur I.

17) a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) \in I^{n+1}$. Soient $\lambda_1,\ldots,\lambda_n,\lambda_{n+1}$ une liste de $n+1$ réels positifs de somme égale à 1, tels que $\lambda_{n+1} \neq 1$, on a par convexité :

$$\forall t \in [0,1], \forall (X,Y) \in I^2, f(tX+(1-t)Y) \leq tf(X)+(1-t)f(Y).$$

On applique ce résultat à $t = \lambda_{n+1}$, et $X = x_{n+1} \in I$ et $Y = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i}{1-\lambda_{n+1}}$. (C'est possible car $Y \in I$, car I est un intervalle, il est donc convexe et Y est un barycentre à coefficients positifs de points de I, donc $Y \in I$). On obtient donc :

$$\boxed{f\left((1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i x_i}{(1-\lambda_{n+1})}\right)+\lambda_{n+1}x_{n+1}\right) \leq (1-\lambda_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i x_i}{(1-\lambda_{n+1})}\right)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1}).}$$

b) Soit f une fonction convexe sur I. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété H_n :

$$\forall (x_1,\ldots,x_n) \in I^n, \forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \text{ tel que} \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1, f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

$(-)$ La propriété H_1 est immédiatement vraie.
$(-)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété H_n est vraie. Montrons que H_{n+1} est vraie.

Soient $(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in I^{n+1}$, $(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i = 1$.

Si $\lambda_{n+1} = 1$, alors $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_i = 0$. Donc l'inégalité est triviale. Si $\lambda_{n+1} < 1$. Alors on peut appliquer la question précédente et :

$$f\left((1-\lambda_{n+1})\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i x_i}{(1-\lambda_{n+1})}\right)+\lambda_{n+1}x_{n+1}\right) \leq (1-\lambda_{n+1})f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i x_i}{(1-\lambda_{n+1})}\right)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1}). \quad (*)$$

On remarque alors que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} = 1$, on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence H_n, avec $\dfrac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}$ dans le rôle de λ_i, on obtient donc :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i x_i}{1-\lambda_{n+1}}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}} f(x_i).$$

En remplaçant dans $(*)$, on obtient :
$f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$. Donc H_{n+1} est vraie.
$(-)$ Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété H_n est vraie. Ce qui démontre l'inégalité de Jensen.

c) La fonction exp est convexe. En utilisant $\forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i = \dfrac{1}{n}$, alors $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a donc

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}, \exp\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{n}\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{a_i}}{n}.$$

Donc :

$$\exp\left(\frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Soient maintenant $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. Si l'un de ces réels est nul, il est clair que $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} = 0 \leq \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$.
Sinon, on peut poser $\forall i \in [\![1, n]\!], a_i = \ln(x_i)$, dans l'inégalité précédente, et l'on obtient :

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

18) Soient a, b, c et d quatre réels de $]0,1[$. En notant $s = a + b + s + d$. Quitte à remplacer a, b, c et d par $\dfrac{a}{s}$, $\dfrac{b}{s}$, $\dfrac{c}{s}$, $\dfrac{d}{s}$, on peut supposer sans perte de généralité que $a + b + c + d = 1$.
L'inégalité à prouver s'écrit alors :

$$\frac{4}{3} \leq \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} + \frac{d}{1-d}.$$

Posons $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \dfrac{x}{1-x}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$, sa dérivée est $f' : x \mapsto \dfrac{1}{(1-x)^2}$, sa dérivée seconde est $f'' : x \mapsto \dfrac{2}{(1-x)^3}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, f''(x) \geq 0$. Donc f est convexe, donc d'après l'inégalité de Jensen :

$$f\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)+f(c)+f(d)}{4}.$$

c'est-à-dire :

$$f\left(\frac{1}{4}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)+f(c)+f(d)}{4}.$$

C'est-à-dire :

$$\frac{1}{3} \leq \frac{f(a)+f(b)+f(c)+f(d)}{4}.$$

$$\boxed{\text{Donc } \frac{4}{3} \leq \frac{a}{1-a} + \frac{b}{1-b} + \frac{c}{1-c} + \frac{d}{1-d}.}$$

6 Inégalités usuelles

Notons tout d'abord ce résultat essentiel :
Si f est convexe sur I et dérivable en $a \in I$, alors sa courbe représentative est au-dessus de tangente au point d'abscisse I.
preuve :

Supposons que $a \neq \sup(I)$. Soit h un réel strictement positif et $x \in I$ tel que $a < x$. Pour $h \in]0, x-a[$, on a $a < a+h < x$, donc d'après le lemme des trois pentes, puisque f et convexe, pour $\forall h \in]0, x-a[$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \leq \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On a donc en passant à la limite $h \mapsto 0$:

$$f'_d(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Donc :

$$f'_d(a)(x-a)+f(a) \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)+f(a).$$

C'est-à-dire :

$$f'_d(a)(x-a)+f(a) \leq f(x).$$

Ce qui prouve que sur le $[a, \infty[\cap I$, la courbe représentative de f est au-dessus de la demi-tangente à droite à C_f en a.

On procède de même pour les demi-tangentes à gauche de a. On en déduit donc que si f est convexe et dérivable en a alors la courbe représentative de f est au-dessus de celle de la tangente à C_f en a.

19) a) La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est concave car sa dérivée seconde est négative. D'après le résultat exposé ci-dessus, on en déduit donc que sa courbe représentative et en-dessous de celle de sa tangente en 0.

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x.}$$

b) La fonction exp est convexe, sa courbe est donc au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{e}^x \geq x+1$.

c) La fonction sin de dérivée seconde $-\sin$, est concave sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc elle est au-dessus de la corde reliant les points d'abscisse $(0,0)$ et $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

$$\boxed{\text{Donc } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq \frac{2x}{\pi}.}$$