Cours : Matrices

Table des matières

1 Matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$

1.1 Matrice

Définition 1 (∘∘∘)**.** *Soit $\mathbb{K}$ un corps et $q, p \in \mathbb{N}^*$. On appelle matrice à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute famille $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$.*

$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} \phantom{a_{1,1}} & j & \phantom{a_{1,p}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & a_{i,j} & \vdots \\ a_{q,1} & \cdots & a_{q,p} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \end{array} \end{array}$$

On note $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à q lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Remarques :

⇨ On appelle matrice extraite de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ toute matrice obtenue en « supprimant » certaines lignes et certaines colonnes de A. Lorsque les lignes et les colonnes conservées sont adjacentes, on dit que la matrice ainsi obtenue est une matrice bloc extraite de A.

Exercices :

⇨ Soit A et B les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{K})$$

Alors B est une matrice extraite de A.

Définition 2 (∘∘∘)**.** *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, on définit :*
- *La famille $L_1, \ldots, L_q$ des vecteurs lignes de A, où pour tout $i \in [\![1,q]\!]$, L_i est le vecteur $(a_{i,1}, \ldots, a_{i,p})$ de $\mathbb{K}^p$.*
- *La famille $C_1, \ldots, C_p$ des vecteurs colonnes de A, où pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, C_j est le vecteur $(a_{1,j}, \ldots, a_{q,j})$ de $\mathbb{K}^q$.*

Définition 3 (∘∘∘)**.** *On dit qu'une matrice A est :*
- *une matrice colonne lorsqu'elle ne possède qu'une seule colonne.*
- *une matrice ligne lorsqu'elle ne possède qu'une seule ligne.*

Définition 4 (∘∘∘)**.** *On appelle matrice nulle à q lignes et p colonnes et on note $0_{q,p}$ ou plus simplement 0 la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.*

Définition 5 (∘∘∘)**.** *On appelle transposée de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs lignes de A. Autrement dit :*

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \quad \forall j \in [\![1,q]\!] \quad \left[{}^tA\right]_{i,j} = a_{j,i}$$

Exercices :

⇨ Si on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K}), \quad \text{alors} \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$$

Proposition 1 (∘∘∘)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors :*

$${}^t({}^tA) = A$$

Définition 6 (∘∘∘)**.** *On dit qu'une matrice est carrée lorsqu'elle possède autant de lignes que de colonnes. L'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Définition 7 (∘∘∘)**.** *On appelle matrice identité et on note I_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par :*

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad [I_n]_{i,j} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & 1 \end{pmatrix}$$

Définition 8 (∘∘∘)**.**

— *On dit que $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonale lorsque :*

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad i \neq j \Longrightarrow d_{i,j} = 0$$

On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales à n lignes et n colonnes.

— *Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$, on note* $\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *la matrice :*

$$\text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

— *Les matrices* $\text{Diag}(\lambda, \dots, \lambda)$ *où $\lambda \in \mathbb{K}$ sont appelées matrices scalaires.*

Définition 9 (∘∘∘)**.** *On dit que $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire supérieure lorsque :*

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad i > j \Longrightarrow t_{i,j} = 0$$

On note $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures à n lignes et n colonnes. Graphiquement, une matrice triangulaire supérieure T s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Remarques :

⇨ On dit qu'une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire inférieure si et seulement si

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad j > i \Longrightarrow t_{i,j} = 0$$

Autrement dit T est triangulaire inférieure si et seulement si ${}^tT$ est triangulaire supérieure.

Définition 10 (∘∘∘)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

— *On dit que A est symétrique lorsque ${}^tA = A$ c'est-à-dire lorsque :*

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad a_{j,i} = a_{i,j}$$

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques à n lignes et n colonnes.

— *On dit que A est antisymétrique lorsque ${}^tA = -A$ c'est-à-dire lorsque :*

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!] \quad a_{j,i} = -a_{i,j}$$

On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques à n lignes et n colonnes.

Remarques :

⇨ Les formes générales d'une matrice symétrique $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et d'une matrice antisymétrique $B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ -a_{1,2} & 0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -a_{1,n} & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Définition 11 (∘∘∘)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de A et on note* $\text{tr}\,A$ *la somme de ses coefficients diagonaux :*

$$\text{tr}\,A = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

1.2 Combinaisons linéaires de matrices

Définition 12 (∘∘∘)**.**

— *Soit $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit $A+B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :*

$$\forall i \in [\![1,q]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \quad [A+B]_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

— *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit $\lambda \cdot A$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :*

$$\forall i \in [\![1,q]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \quad [\lambda \cdot A]_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Remarques :

⇨ Les matrices scalaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les λI_n pour $\lambda \in \mathbb{K}$.

Proposition 2 (∘∘∘)**.** $(\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}), +, \cdot)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'élément neutre est la matrice nulle.*

Définition 13 ($\circ\circ\circ$)**.** *Pour tout $i \in [\![1,q]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$ on définit $E_{i,j}$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ définie par :*

$$\forall k \in [\![1,q]\!] \quad \forall l \in [\![1,p]\!] \quad [E_{i,j}]_{k,l} = \delta_{i,k}\delta_{j,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=i \text{ et } l=j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les matrices $E_{i,j}$ sont appelées matrices élémentaires.

Proposition 3 ($\circ\circ\circ$)**.** *La famille $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. En particulier :*

$$\dim \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) = qp$$

Proposition 4 ($\circ\circ\circ$)**.** *La transposition est linéaire :*

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad {}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$$

De plus cette application est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Proposition 5 ($\circ\circ\circ$)**.**
— *$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
— *$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Remarques :

⇨ La famille $(E_{1,1},\dots,E_{n,n})$ est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. En particulier $\dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{K})) = n$. De même $(E_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ donc $\dim(\mathcal{T}_n(\mathbb{K})) = n(n+1)/2$.

⇨ La famille $(E_{i,j}+E_{j,i})_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = n(n+1)/2$. De même $(E_{i,j}-E_{j,i})_{1\leqslant i< j\leqslant n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = n(n-1)/2$.

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$A = \frac{1}{2}\left(A + {}^tA\right) + \frac{1}{2}\left(A - {}^tA\right)$$

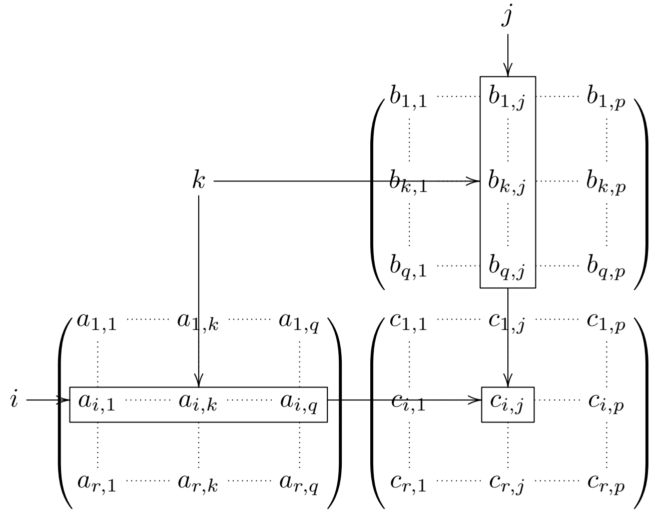
est la décomposition de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 6 ($\circ\circ\circ$)**.** *La trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1.3 Produit de matrices

Définition 14 ($\circ\circ\circ$)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On définit AB comme la matrice de $\mathcal{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ définie par :*

$$\forall i \in [\![1,r]\!] \quad \forall j \in [\![1,p]\!] \quad [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} a_{i,k}b_{k,j}$$



Remarques :

⇨ Multiplier une matrice $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ par la droite par la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_p) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ revient à multiplier chacun de ses vecteurs colonne C_k par λ_k. La multiplier par la gauche par la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_q) \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ revient à multiplier chacun de ses vecteurs ligne L_k par λ_k.

Proposition 7 ($\circ\circ\circ$)**.** *Soit $r,q,p \in \mathbb{N}^*$, $i_2 \in [\![1,r]\!]$, $i_1, j_2 \in [\![1,q]\!]$ et $j_1 \in [\![1,p]\!]$. Alors :*

$$E_{i_2,j_2}E_{i_1,j_1} = \delta_{j_2,i_1}E_{i_2,j_1} = \begin{cases} 0 & \text{si } j_2 \neq i_1 \\ E_{i_2,j_1} & \text{si } j_2 = i_1 \end{cases}$$

Proposition 8 ($\circ\circ\circ$)**.** *On a :*

$$\forall A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}) \quad \forall B, C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \qquad A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC$$
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}) \quad \forall C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \qquad (\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC$$

$$\forall A \in \mathcal{M}_{s,r}(\mathbb{K}) \quad \forall B \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K}) \quad \forall C \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \qquad (AB)C = A(BC)$$
$$\forall A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \qquad AI_p = A \quad \text{et} \quad I_qA = A$$

Proposition 9 ($\circ\circ\circ$)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{r,q}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors :*

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

Proposition 10 ($\circ\circ\circ$)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors $A = 0$ si et seulement si :*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \quad AX = 0$$

Remarques :

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Si on note $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{K}^q$ ses vecteurs colonne et si les coefficients de la matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ sont notés $x_1, \ldots, x_p$, alors le vecteur colonne de la matrice AX est $x_1 c_1 + \cdots + x_n c_n$.

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ alors

$$AX = Y \quad \iff \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = y_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = y_q \end{cases}$$

Proposition 11 (○○○)**.** $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times)$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre.*

Remarques :

⇨ $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ n'est ni commutative ni intègre.

⇨ Soit (F_n) la suite de définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. On définit les matrices X_n et A par

$$X_n = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Alors, $X_{n+1} = AX_n$. En particulier, $X_n = A^n X_0$. Puisque l'exponentiation rapide est un algorithme en $O(\ln n)$, on obtient ainsi un algorithme pour calculer le n-ième terme de la suite de Fibonacci en $O(\ln n)$ opérations.

Exercices :

⇨ On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \mid XA = AX\}$$

Montrer que le $\mathcal{C}(A)$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. En donner une base.

⇨ On pose

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Vérifier que $A^2 - 5A + 6I_2 = 0$ puis calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

⇨ Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si c'est une matrice scalaire. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec $B = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ si et seulement si elle est diagonale.

Proposition 12 (○○○)**.**
— *Si D et D' sont deux matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$, DD' est diagonale et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n$.*
— *Si T et T' sont deux matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont respectivement $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et $\mu_1, \ldots, \mu_n$, TT' est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont $\lambda_1\mu_1, \ldots, \lambda_n\mu_n$.*
— *Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire supérieure dont tous les coefficients diagonaux sont nuls, alors $N^n = 0$; on dit que N est nilpotente.*

Remarques :

⇨ Si $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $P(D) = \mathrm{Diag}(P(\lambda_1), \ldots, P(\lambda_n))$.

Exercices :

⇨ On pose

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

⇨ Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$.

Proposition 13 (○○○)**.**
— *$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*
— *$\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exercices :

⇨ Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires inférieures est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 14 (○○○)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = p + q$. Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont définies par bloc*

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$$

où $A_{i,j}, B_{i,j} \in \mathcal{M}_{d_i,d_j}(\mathbb{K})$ avec $d_1 = p$ et $d_2 = q$, alors on a

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}$$

Exercices :

⇨ Montrer que lorsque $n \geqslant 2$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est ni commutative ni intègre.

Définition 15 (○○○)**.** *On dit qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible lorsqu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que :*

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

Si tel est le cas B est unique ; on la note A^{-1}. On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Remarques :

⇨ Si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice nilpotente, $I_n + N$ est inversible.

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

—Si A est inversible et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad AX = Y \iff X = A^{-1}Y$$

Le système linéaire à n équations et n inconnues $AX = Y$ admet donc une unique solution.

—Réciproquement, supposons qu'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que quel que soit $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on a

$$AX = Y \iff X = BY$$

alors A est inversible et $A^{-1} = B$.

En résumé, la matrice A est inversible si et seulement si quel que soit $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ le système linéaire à n inconnues et n équations $AX = Y$ admet une unique solution. Inverser A revient à résoudre ce système.

Exercices :

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 - 5A + 6I_n = 0$. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

⇨ On pose

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ a & 2 \end{pmatrix}$$

soit inversible. Le cas échéant, calculer son inverse.

Proposition 15 (∘∘∘)**.** *Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont inversibles, il en est de même pour AB et :*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Proposition 16 (∘∘∘)**.** $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ *est un groupe.*

Proposition 17 (∘∘∘)**.** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ${}^tA$ est inversible si et seulement si A l'est. De plus, si tel est le cas :*

$$\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\!\left(A^{-1}\right)$$

Proposition 18 (∘∘∘)**.** *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$$

Remarques :

⇨ Cependant, de manière générale $\mathrm{tr}(ABC) \neq \mathrm{tr}(ACB)$.

Exercices :

⇨ Montrer qu'il n'existe pas de matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA = I_n$.

2 Matrice, vecteur et application linéaire

2.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Définition 16 (∘∘∘)**.** *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $x \in E$. On appelle matrice de x relativement à la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ la matrice colonne constituée des coordonnées de x relativement à la base $\mathcal{B}$:*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Exercices :

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\mathcal{B} = (1, (X-\alpha), (X-\alpha)^2, \dots, (X-\alpha)^n)$. Donner la matrice de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Proposition 19 (∘∘∘)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, l'application :*

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarques :

⇨ Dans le cas où $E = \mathbb{K}^n$ et $\mathcal{B}$ est sa base canonique, l'application Φ associe au vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ la matrice colonne

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Cet isomorphisme justifie l'identification souvent faite entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Cependant, lorsque E est un espace vectoriel quelconque de dimension n et $\mathcal{B}$ est une base de E, on se gardera bien de confondre un vecteur $x \in E$ avec la matrice colonne $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$.

Définition 17 (∘∘∘)**.** *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_q)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E. On appelle matrice de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ relativement à la base $\mathcal{B}$ et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ la matrice à q lignes et p colonnes dont les vecteurs colonnes C_j sont les coordonnées des vecteurs x_j relativement à la base $\mathcal{B}$. Autrement dit, la famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ des coefficients de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_p)$ est caractérisée par :*

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad x_j = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} e_i$$

Exercices :

⇨ Donner la matrice de la famille $((X+1)^k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ relativement à la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

2.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 18 (∘∘∘)**.** *Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_q)$ une base de F. Étant donné $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on appelle matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$ et on note $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$ la matrice à q lignes et p colonnes de la famille $u(e_1), \dots, u(e_p)$ relativement à la base $\mathcal{B}_F$:*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u(e_1), \dots, u(e_p))$$

Autrement dit, la famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ des coefficients de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$ est caractérisée par :

$$\forall j \in [\![1, p]\!] \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} f_i$$

Remarques :

- ⇨ La matrice $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$ est aussi notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ ou $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}^{\mathcal{B}_E}(u)$.
- ⇨ Si $E = F$, on choisit le plus souvent $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$ (bien que cela ne soit pas obligatoire). Dans ce cas on parle de la matrice de l'endomorphisme u relativement à la base $\mathcal{B}_E$. Cette matrice est notée $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(u)$.
- ⇨ Soit $\mathcal{B} = e_1, \dots, e_n$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
  1. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est scalaire si et seulement si u est une homothétie.
  2. $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ si et seulement si
  $$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad u(e_k) = \lambda_k e_k$$
  3. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note $E_k = \operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_k)$. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure si et seulement si
  $$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad u(E_k) \subset E_k$$
  Par exemple, si $E = \mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ est sa base canonique, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ est triangulaire supérieure si et seulement si
  $$\forall P \in \mathbb{K}_n[X] \quad \deg(u(P)) \leqslant \deg P$$
- ⇨ Soit p un projecteur de E, $A = \operatorname{Ker}(p - \operatorname{Id})$ et $B = \operatorname{Ker} p$. Puisque p est un projecteur, $E = A \oplus B$. Soit $(e_1, \dots, e_q)$ une base de A et $(e_{q+1}, \dots, e_n)$ une base de B. Alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E. Comme
$$\forall k \in [\![1, q]\!] \quad p(e_k) = e_k \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![q+1, n]\!] \quad p(e_k) = 0$$
on en déduit que
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Exercices :

- ⇨ Soit φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$
Calculer une base de $\operatorname{Ker} \varphi$ ainsi qu'une base de $\operatorname{Im} \varphi$.
- ⇨ Calculer la matrice de l'application linéaire
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & P(X+1) \end{array}$$
relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

Proposition 20 (∘∘∘)**.** *Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F. Si on note $p = \dim E$ et $q = \dim F$, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Remarques :

- ⇨ Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F. Alors, si $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) = A$.

Proposition 21 (∘∘∘)**.**

- — *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. Si $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont des bases respectives de E et F, alors :*
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F}(u(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E}(x)$$
- — *Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Si $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ sont des bases respectives de E, F et G, alors :*
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_E}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_G \leftarrow \mathcal{B}_F}(v) \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$$

Remarques :

- ⇨ Si $E = \mathbb{K}^p$, $F = \mathbb{K}^q$, $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ sont leurs bases canoniques, et $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^q)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) = A$. On dit que c'est l'application linéaire canoniquement associée à A. En identifiant $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ (pour $n = p$ et $n = q$), si $x \in \mathbb{K}^p$, on a $u(x) = Ax$. Il arrive parfois, à tort, d'identifier A et u ce qui conduit à parler entre autre du noyau et de l'image de A.

Exercices :

- ⇨ Retrouver le fait que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.

Proposition 22 (∘∘∘)**.** *Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F de dimension n, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)$. Alors A est inversible si et seulement si u est un isomorphisme. De plus, si tel est le cas $A^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_E \leftarrow \mathcal{B}_F}(u^{-1})$.*

Exercices :

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la matrice $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n+1]\!] \quad a_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$$

est inversible et calculer son inverse.

Proposition 23 ($\circ\circ\circ$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors, l'application*

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Remarques :

⇨ En conservant les mêmes notations, l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{GL}(E) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme de groupes.

Exercices :

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que les endomorphismes de E qui commutent avec tous les endomorphismes de E sont les homothéties.

2.3 Rang d'une matrice

Définition 19 ($\circ\circ\circ$). *On définit le rang de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, et on note $\mathrm{rg}\, A$, le rang de la famille de ses vecteurs colonnes.*

Exercices :

⇨ Montrer que les matrices de rang 1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les $X\,{}^tY$ où $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}$.

Proposition 24 ($\circ\circ\circ$).

— *Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E. Alors :*

$$\mathrm{rg}(x_1, \ldots, x_p) = \mathrm{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_p))$$

— *Soit $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ des bases respectives de E et F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :*

$$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u))$$

Exercices :

⇨ Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rg}\, A, \mathrm{rg}\, B)$.

2.4 Matrice inversible

Théorème 1 ($\circ\circ\circ$). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

— *A est inversible si et seulement si A est inversible à gauche, c'est-à-dire si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$. Si tel est le cas, $B = A^{-1}$ donc $AB = I_n$.*

— *A est inversible si et seulement si A est inversible à droite, c'est-à-dire si et seulement si il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$. Si tel est le cas, $B = A^{-1}$ donc $BA = I_n$.*

Proposition 25 ($\circ\circ\circ$). *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si :*

$$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad AX = 0 \quad \Longrightarrow \quad X = 0$$

Remarques :

⇨ Autrement dit, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonne est libre. Comme A est inversible si et seulement si ${}^tA$ l'est, on en déduit que A est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs ligne est libre.

Exercices :

⇨ Soit $n \geqslant 2$. Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

est inversible et calculer son inverse.

Proposition 26 ($\circ\circ\circ$). *$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.*

Proposition 27 ($\circ\circ\circ$). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ est inversible si et seulement si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une base de E.*

Proposition 28 (∘∘∘).

- *Une matrice diagonale* $D = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ *est inversible si et seulement si :*
$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_k \neq 0$$
Si tel est le cas :
$$D^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right)$$
- *Une matrice triangulaire supérieure* $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *de la forme :*
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
est inversible si et seulement si :
$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \lambda_k \neq 0$$
Si tel est le cas :
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Exercices :

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = p + q$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonale par blocs :
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} \qquad \text{où } A_{1,1} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \text{ et } A_{2,2} \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$$
Montrer que A est inversible si et seulement si $A_{1,1}$ et $A_{2,2}$ le sont. Si tel est le cas, montrer que
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & 0 \\ 0 & A_{2,2}^{-1} \end{pmatrix}$$

2.5 Matrice de passage, changement de base

Définition 20 (∘∘∘). *Soit* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ *deux bases de* E. *On appelle matrice de passage de* $\mathcal{B}$ *à* $\mathcal{B}'$ *et on note* $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ *la matrice de la famille* $(e'_1, \dots, e'_n)$ *relativement à la base* $\mathcal{B}$ *:*
$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(e'_1, \dots, e'_n)$$

Proposition 29 (∘∘∘).

- *Si* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *sont deux bases de* E, *alors :*
$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \mathcal{M}_{\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B}'}(\mathrm{Id}_E)$$
- *Si* $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ *et* $\mathcal{B}''$ *sont des bases de* E, *alors :*
$$P(\mathcal{B}, \mathcal{B}'') = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\, P(\mathcal{B}', \mathcal{B}'')$$
- *Si* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *sont deux bases de* E, $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ *est inversible et :*
$$[P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')]^{-1} = P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Exercices :

⇨ Soit $E = \mathbb{K}^2$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{K}^2$. On pose $f_1 = (5, 3)$ et $f_2 = (3, 2)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{K}^2$, puis calculer $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$ et $P(\mathcal{B}', \mathcal{B})$.

Proposition 30 (∘∘∘). *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* n *et* $\mathcal{B}$ *une base de* E. *Alors pour toute matrice inversible* $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, *il existe une unique base* $\mathcal{B}'$ *de* E *telle que* $A = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

Proposition 31 (∘∘∘). *Soit* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E *et* $x \in E$. *Alors :*
$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x) = P(\mathcal{B}', \mathcal{B})\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$$

Proposition 32 (∘∘∘). *Soit* $\mathcal{B}_E$ *et* $\mathcal{B}'_E$ *deux bases de* E *et* $\mathcal{B}_F$ *et* $\mathcal{B}'_F$ *deux bases de* F. *Si* $u \in \mathcal{L}(E, F)$, *on a :*
$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}'_E}(u) &= P(\mathcal{B}'_F, \mathcal{B}_F)\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)\, P(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E) \\ &= [P(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}'_F)]^{-1}\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u)\, P(\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E) \end{aligned}$$

Proposition 33 (∘∘∘). *Soit* $\mathcal{B}$ *et* $\mathcal{B}'$ *deux bases de* E *et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors :*
$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) &= P(\mathcal{B}', \mathcal{B})\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\, P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \\ &= [P(\mathcal{B}, \mathcal{B}')]^{-1}\, \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)\, P(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \end{aligned}$$

3 Matrices équivalentes, matrices semblables

3.1 Matrices équivalentes

Définition 21 (○○○)**.** *Soit $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. On dit que A est équivalente à B lorsqu'il existe $Q \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ et $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ tels que :*

$$A = QBP$$

Proposition 34 (○○○)**.** *La relation « est équivalente à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.*

Proposition 35 (○○○)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p, $\mathcal{B}_E$ une base de E, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension q, $\mathcal{B}_F$ une base de F et u l'application linéaire de E dans F définie par :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}_F \leftarrow \mathcal{B}_E}(u) = A$$

Alors $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à A si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'_E$ de E et une base $\mathcal{B}'_F$ de F telles que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'_F \leftarrow \mathcal{B}'_E}(u) = B$$

Proposition 36 (○○○)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ une matrice de rang r. Alors A est équivalente à la matrice :*

$$J_r = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & r & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ r \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Exercices :

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On pose

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & XA \end{array}$$

Calculer le rang de φ en fonction de celui de A.

⇨ Montrer que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, toute matrice est la somme de deux matrices inversibles.

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $(BA)^2 = BA$.

Théorème 2 (○○○)**.** *Deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.*

Proposition 37 (○○○)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors ${}^tA$ et A ont même rang.*

Proposition 38 (○○○)**.** *Le rang de $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes. Autrement dit, le rang de la famille de ses vecteurs colonnes est égal au rang de la famille de ses vecteurs lignes.*

Exercices :

⇨ Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Montrer que le rang de A est la taille de la plus grande matrice extraite inversible de A.

3.2 Matrices semblables

Définition 22 (○○○)**.** *Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est semblable à B lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :*

$$A = P^{-1}BP$$

Remarques :

⇨ Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice scalaire, c'est la seule matrice semblable à elle-même.

⇨ Deux matrices semblables sont équivalentes. La réciproque est fausse.

⇨ Soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & P^{-1}XP \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres. En particulier, si $A = P^{-1}BP$, quel que soit $k \in \mathbb{N}$, $A^k = P^{-1}B^kP$. Plus généralement, si $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(A) = P^{-1}Q(B)P$.

Proposition 39 (○○○)**.** *La relation « est semblable à » est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

Proposition 40 (○○○)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E et u l'endomorphisme de E défini par :*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u) = A$$

Alors $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à A si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}'$ de E telle que :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u) = B$$

Remarques :

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle valeur propre de u tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, l'ensemble E_λ des $x \in E$ tel que $u(x) = \lambda x$ est appelé espace propre associé à la valeur propre λ et ses éléments sont appelés vecteurs propres de u. Remarquons que $E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id})$. On peut démontrer que le nombre de valeurs propres de u est fini.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont ces valeurs, on se donne $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ des bases respectives de $E_1, \dots, E_r$. Lorsque $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ est une base de E, on dit que u est diagonalisable. Dans ce cas, la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ est diagonale.
Étant donné $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, cette méthode permet, lorsque c'est possible, de trouver une matrice diagonale semblable à A. En effet, en considérant l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A, la recherche des valeurs et des vecteurs propres de A revient à résoudre l'équation $AX = \lambda X$ pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On trouve ainsi les valeurs propres de u ainsi que des bases de ses espaces propres. Dans le cas ou la réunion de ces bases forme une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$ est diagonale. A est alors semblable à une matrice diagonale.

Exercices :

⇨ Déterminer les valeurs propres et les espaces propres d'un projecteur, d'une symétrie.

⇨ Soit $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs propres d'un endomorphisme u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes. Montrer que la famille $x_1, \dots, x_p$ est libre.

⇨ Montrer que la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$
est semblable à une matrice diagonale D et trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

Proposition 41 (∘∘∘)**.** *Soit A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Alors $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$.*

Définition 23 (∘∘∘)**.** *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors la trace de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie ; on l'appelle trace de u et on la note $\operatorname{tr} u$.*

Remarques :

⇨ Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur, alors $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.