Devoir maison n° 7

À rendre le lundi 13 janvier

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Approximation numérique d'intégrales

Liminaire : Polynômes

On appelle polynôme toute fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

1. Soit P un polynôme et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

   On suppose dans cette question que le polynôme P est nul, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = 0$. En considérant la limite de $P(x)/x^n$ lorsque x tend vers $+\infty$, montrer que $a_n = 0$. Montrer de même que $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

2. Soit P un polynôme non nul. Montrer qu'il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et un unique $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$a_n \neq 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

   Cet entier n est appelé degré de P et noté $\deg P$. Par convention, on dira que le polynôme nul a un degré égal à $-\infty$.

3. En utilisant le théorème de Rolle, montrer par récurrence que tout polynôme de degré n admet au plus n racines distinctes.

Dans la suite du problème, On pourra utiliser librement les résultats suivants :

- Si P et Q sont de degrés inférieur ou égal à n et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda P + \mu Q$ est de degré inférieur ou égal à n.
- Si P et Q sont deux polynômes non nuls, alors $\deg(PQ) = \deg P + \deg Q$.
- Si A et B sont deux polynômes et que B est non nul, alors il existe deux polynômes Q et R tels que $A = QB + R$ et $\deg R < \deg B$. On dit que Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

Dans tout le problème, on désigne par n un entier naturel donné supérieur ou égal à 2 et par f une application de classe $\mathcal{C}^{2n}$ du segment $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On se propose d'établir une méthode de calcul approché de l'intégrale

$$\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, \mathrm{d}t$$

Dans la partie I, on étudie le polynôme P_n défini par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = \left(x^2 - 1\right)^n$$

ses dérivées successives $P_n^{(j)}$ et notamment sa dérivée n-ième : $P_n^{(n)}$. La partie II propose l'étude de deux procédés d'interpolation polynomiale de la fonction f. Le premier permet de définir la méthode utilisée pour le calcul d'une valeur approchée de $\mathcal{I}(f)$, le second de majorer l'erreur commise.

Partie I

1. **Étude des racines de P_n et de ses dérivées.**

   (a) Établir l'existence, pour tout entier naturel j inférieur ou égal à n, d'un polynôme Q_j tel que, pour tout nombre réel x :

$$\begin{cases} P_n^{(j)}(x) = \left(x^2 - 1\right)^{n-j} Q_j(x) \\ Q_j(-1) \neq 0 \quad \text{et} \quad Q_j(1) \neq 0 \end{cases}$$

   On pourra raisonner par récurrence sur l'entier j et on précisera l'expression de Q_{j+1} en fonction de Q_j pour $0 \leqslant j \leqslant n-1$.
   En déduire les valeurs en -1 et 1 de P_n et de ses dérivées d'ordre j strictement inférieur à n.

   (b) Énoncer avec précision le théorème de Rolle. Établir que le polynôme P_n' admet au moins une racine dans l'intervalle $]-1, 1[$ puis que le polynôme P_n'' admet au moins deux racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.
   Démontrer que, pour tout entier naturel j compris entre 1 et n, le polynôme $P_n^{(j)}$ admet au moins j racines distinctes dans l'intervalle $]-1, 1[$.

   (c) En déduire que le polynôme $P_n^{(n)}$ admet exactement n racines réelles distinctes et que celles-ci appartiennent à l'intervalle $]-1, 1[$.
   Dans toute la suite du problème, ces racines seront notées $r_1, r_2, \dots, r_n$ avec $-1 < r_1 < r_2 < \cdots < r_n < 1$.

2. **Calcul d'une intégrale auxiliaire.**
   On pose, pour tout couple (p, q) d'entiers naturels :

$$W(p, q) = \int_{-1}^{1} (t-1)^p (t+1)^q\, \mathrm{d}t$$

   (a) À l'aide d'une intégration par parties, établir une relation entre $W(p+1, q-1)$ et $W(p, q)$ lorsque $q \geqslant 1$.

(b) En déduire que

$$W(n,n) = (-1)^n \frac{2^{2^{n+1}} (n!)^2}{(2n+1)!}$$

3. **Calcul d'intégrales associées au polynôme P_n et à ses dérivées.**
Dans cette question, on désigne par Q un polynôme à coefficients réels.

(a) Établir rigoureusement l'égalité suivante :

$$\int_{-1}^{1} Q(t) P_n^{(n)}(t) \, \mathrm{d}t = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(t) P_n(t) \, \mathrm{d}t$$

(b) Quelle est la valeur de l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} Q(t) P_n^{(n)}(t) \, \mathrm{d}t$$

lorsque Q est de degré strictement inférieur à n ?

(c) Expliciter $P_n^{(2n)}$ puis exprimer

$$\int_{-1}^{1} \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2 \mathrm{d}t$$

en fonction de $W(n,n)$ et obtenir ainsi sa valeur.

Partie II

1. **Polynôme d'interpolation de Lagrange de f.**
On pose désormais, pour tout entier j entre 1 et n et pour tout nombre réel x :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \frac{x - r_i}{r_j - r_i} \qquad \lambda_j = \int_{-1}^{1} L_j(t) \, \mathrm{d}t$$

(a) Calculer $L_j(r_k)$ en distinguant suivant que k est, ou non, égal à j.

(b) Montrer qu'il existe un un unique polynôme A_n de degré strictement inférieur à n tel que

$$\forall j \in [\![1, n]\!] \quad A_n(r_j) = f(r_j)$$

(c) Établir l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} A_n(t) \, \mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(r_j)$$

On se propose désormais de prendre pour valeur approchée de l'intégrale

$$\mathcal{I}(f) = \int_{-1}^{1} f(t) \, \mathrm{d}t$$

l'intégrale

$$\mathcal{I}(A_n) = \int_{-1}^{1} A_n(t) \, \mathrm{d}t$$

que l'on notera $\mathcal{I}_n(f)$ dans toute la suite du problème. En d'autres termes, on prend pour valeur approchée de l'intégrale $\mathcal{I}(f)$ le nombre réel :

$$\mathcal{I}_n(f) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(r_j)$$

2. **Comparaison de $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}_n(P)$ lorsque P est un polynôme.**
Dans cette question, on suppose que P est un polynôme dont le degré est noté $\deg P$. Par convention le degré du polynôme nul sera posé égal à $-\infty$.

(a) On suppose que $\deg P < n$. Comparer $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}_n(P)$.

(b) On suppose que $\deg P < 2n$.

i. Justifier l'existence d'un couple (Q, R) de polynômes tel que l'on ait :

$$P = Q P_n^{(n)} + R \quad \text{et} \quad \deg R < n$$

ii. Montrer que $\deg Q < n$.

iii. Déduire des résultats de la partie I que $\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}(R)$.

iv. Comparer $\mathcal{I}(P)$ et $\mathcal{I}_n(P)$.

3. **Polynôme d'interpolation de Hermite de f.**
On pose désormais, pour tout entier j entre 1 et n et pour tout nombre réel x :

$$H_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\frac{x - r_i}{r_j - r_i}\right)^2$$

(a) Calculer $H_j(r_k)$ et $H_j'(r_k)$ en distinguant suivant que k est, ou non, égal à j

(b) Montrer qu'un polynôme de degré strictement inférieur ou égal à $2n$ admettant n racines distinctes en lesquelles sa dérivée est nulle, est nul.

(c) En déduire qu'il existe un unique polynôme B_n de degré strictement inférieur à $2n$ tel que $B_n(r_j) = f(r_j)$ et $B_n'(r_j) = f'(r_j)$ pour tout entier j compris entre 1 et n.

(d) Déduire des résultats précédents que $\mathcal{I}(B_n) = \mathcal{I}_n(f)$.

4. **Majoration de $|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)|$**
Soit $M_{2n}(f)$ le maximum de $\left|f^{2n}(t)\right|$ lorsque t décrit le segment $[-1, 1]$. Dans cette question, on désigne par x un nombre réel donné appartenant au segment $[-1, 1]$ et distinct des nombres $r_1, r_2, \ldots, r_n$. On considère alors l'application g_x définie sur $[-1, 1]$ par :

$$g_x(t) = f(t) - B_n(t) - \alpha \left(P_n^{(n)}(t)\right)^2$$

où α est le nombre réel (dont on justifiera l'existence) tel que $g_x(x) = 0$.

(a) En appliquant le théorème de Rolle à l'application g_x sur des intervalles à préciser, prouver que g_x' s'annule en au moins n points de $]-1, 1[$ distincts de $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

(b) Calculer $g_x'(r_1), g_x'(r_2), \ldots, g_x'(r_n)$. Établir que $g_x^{(2n)}$ s'annule en au moins un point c appartenant au segment $[-1, 1]$.

(c) Expliciter $g_x^{(2n)}(t)$ et en déduire une expression de α en fonction de $f^{(2n)}(c)$ et de n.

(d) À l'aide de l'égalité $g_x(x) = 0$, établir que :

$$f(x) - B_n(x) = \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} f^{(2n)}(c) \left(P_n^{(n)}(x)\right)^2$$

(e) Prouver que, pour tout réel x de $[-1, 1]$:

$$|f(x) - B_n(x)| \leqslant \frac{(n!)^2}{((2n)!)^3} M_{2n}(f) \left(P_n^n(x)\right)^2$$

On distinguera deux cas suivant que x est, ou non égal à l'un des nombres réels $r_1, r_2, \ldots, r_n$.
Déduire alors des résultats des partie I et II que :

$$|\mathcal{I}(f) - \mathcal{I}_n(f)| \leqslant \frac{M_{2n}(f)}{\binom{2n}{n}^2} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(f) On considère dans cette question une application g à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie et de classe $\mathcal{C}^{2n}$ sur un segment $[a, b]$. On désigne par $M_{2n}(g)$ le maximum de $\left|g^{(2n)}(u)\right|$ lorsque u décrit le segment $[a, b]$.
En envisageant l'application f définie sur $[-1, 1]$ par

$$f(t) = g\left(\frac{a+b}{2} + t\frac{b-a}{2}\right)$$

donner en fonction de a, b n et $M_{2n}(g)$ un majorant de l'expression suivante :

$$\left|\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g\left(\frac{a+b}{2} + r_j\frac{b-a}{2}\right)\right|$$

5. **Étude d'un cas particulier.**
Dans cette question, on suppose que $n = 2$.

(a) Déterminer le polynôme P_2'', ses racines r_1 et r_2, les polynômes L_1, L_2 ainsi que les intégrales $\lambda_1 = \mathcal{I}(L_1)$ et $\lambda_2 = \mathcal{I}(L_2)$.

(b) En appliquant la majoration obtenue au III.4.c., montrer que :

$$\left|\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2}\left(g\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + g\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right)\right)\right|$$

$$\leqslant \frac{M_4(g)(b-a)^5}{4320}$$

(c) On considère un entier $p \geqslant 1$ et on subdivise le segment $[a, b]$ en p sous-segments de même longueur, dont on note les milieux $c_1, c_2, \ldots, c_p$.
En appliquant l'inégalité précédente à chacun de ces p sous-segments, majorer en fonction de p et de $M_4(g)$ l'expression suivante :

$$\left|\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u - \frac{b-a}{2p}\sum_{k=1}^{p}\left(g\left(c_k - \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right) + g\left(c_k + \frac{b-a}{2p\sqrt{3}}\right)\right)\right|$$

(d) Écrire en Python un algorithme de calcul de la somme précédente, les réels a et b, la fonction g ainsi que l'entier p étant supposés donnés.