Exercice

Soit $z_0, \dots, z_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{2^k} \neq 0$$

On a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{2^k} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k}{2^k} \right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{2^k}$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \quad \text{car } |z_k| = 1$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$< 1$$

Donc $$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{2^k} \right| = \left| z_0 + \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{2^k} \right|$$

$$\geqslant |z_0| - \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k}{2^k} \right| \quad \text{(Seconde inégalité triangulaire)}$$

Or $|z_0| = 1$ et $-\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{z_k}{2^k} \right| > -1$, donc

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{2^k} \right| > 1 - 1 = 0$$

Donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{2^k} \neq 0$

Exercice

Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors il existe un unique $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $z = e^{i\theta}$ (on l'appelle argument principal de z). Si $z \neq 1$, c'est-à-dire si $\theta \neq 0$, on a :

$$u := 1+z+z^2 = 1+e^{i\theta}+(e^{i\theta})^2 = \frac{1-(e^{i\theta})^3}{1-e^{i\theta}}$$

$$= \frac{e^{i3\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i\frac{3\theta}{2}}\left(e^{i\frac{3\theta}{2}}-e^{-i\frac{3\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}$$

$$= e^{i\theta}\cdot\frac{\cancel{2i}\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\cancel{2i}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}e^{i\theta}$$

Or l'expression $\frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ est 2π-périodique. En effet

$$\frac{\sin\left(\frac{3}{2}(\theta+2\pi)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\theta+\pi)\right)} = \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\theta+3\pi\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)} = \frac{-\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Or

$$\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)=0 \iff \frac{3\theta}{2}\equiv 0\ [\pi]$$

$$\iff \theta \equiv 0\ \left[\frac{2\pi}{3}\right]$$

$$\iff \theta\in\left\{-\frac{2\pi}{3},0,\frac{2\pi}{3}\right\} \text{ car } \theta\in]-\pi,\pi]$$

$$\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\geq 0 \iff \exists k\in\mathbb{Z}\quad k2\pi\leq\frac{3\theta}{2}\leq\pi+k2\pi$$

$$\iff \exists k\in\mathbb{Z}\quad k\cdot\frac{4\pi}{3}\leq\theta\leq\frac{2\pi}{3}+k\frac{4\pi}{3}$$

$$\iff \theta\in\left]-\pi,-\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[0,\frac{2\pi}{3}\right] \text{ car } \theta\in]-\pi,\pi]$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)=0 \iff \frac{\theta}{2}\equiv 0\ [\pi]$$

$$\iff \theta\equiv 0\ [2\pi]$$

$$\iff \theta = 0 \quad \text{car } \theta\in]-\pi,\pi]$$

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad k2\pi \leq \frac{\theta}{2} \leq \pi + k2\pi$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad k4\pi \leq \theta \leq 2\pi + k4\theta$$

$$\iff \theta \in [0, \pi] \qquad \text{car } \theta \in]-\pi, \pi]$$

On en déduit le tableau de signe de $\dfrac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

θ	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$		$-$	0	$+$	$\|$	$+$	0	$-$	

Donc :

- Si $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$, alors $z = 0$ donc $|z| = 0$
- si $\theta \in]-\frac{2\pi}{3}, 0[\cup]0, \frac{2\pi}{3}[$, alors $|u| = \dfrac{\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
  et $\arg(u) \equiv \theta \ [2\pi]$
- si $\theta \in]-\pi, -\frac{2\pi}{3}[\cup]\frac{2\pi}{3}, \pi[$, alors $|u| = \dfrac{-\sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
  et $\arg(u) \equiv \theta + \pi \ [2\pi]$.
- Enfin, si $\theta = 0$, $u = 3$ donc $|u| = 3$ et $\arg(u) \equiv 0 \ [2\pi]$

Exercice

Exprimer $\tan(7\theta)$ en fonction de $\tan\theta$

$$\cos(7\theta) + i\sin(7\theta) = e^{i7\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^7 = (\cos\theta + i\sin\theta)^7$$

$$= \cos^7\theta + 7\cos^6\theta . i\sin\theta + 21\cos^5\theta \, i^2 \sin^2\theta$$

$$+ 35\cos^4\theta \, i^3 \sin^3\theta + 35\cos^3\theta \, i^4 \sin^4\theta$$

$$+ 21\cos^2\theta \, i^5 \sin^5\theta + 7\cos\theta \, i^6 \sin^6\theta + i^7 \sin^7\theta$$

Triangle de pascal pour $n=7$

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Donc $\cos(7\theta)+i\sin(7\theta) = \left(\cos^7\theta - 21\cos^5\theta\sin^2\theta + 35\cos^3\theta\sin^4\theta - 7\cos\theta\sin^6\theta\right) + i\left(7\cos^6\theta\sin\theta - 35\cos^4\theta\sin^3\theta + 21\cos^2\theta\sin^5\theta - \sin^7\theta\right)$

Donc, en identifiant partie réelle et partie imaginaire, pour $7\theta \not\equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$

$$\tan(7\theta) = \frac{\sin(7\theta)}{\cos(7\theta)} = \frac{7\cos^6\theta\sin\theta - 35\cos^4\theta\sin^3\theta + 21\cos^2\theta\sin^5\theta - \sin^7\theta}{\cos^7\theta - 21\cos^5\theta\sin^2\theta + 35\cos^3\theta\sin^4\theta - 7\cos\theta\sin^6\theta}$$

$$= \frac{7\tan\theta - 35\tan^3\theta + 21\tan^5\theta - \tan^7\theta}{1 - 21\tan^2\theta + 35\tan^4\theta - 7\tan^6\theta}$$

Exercice

Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta}\right)$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(e^{i\theta}\right)^k = \left(1+e^{i\theta}\right)^n$$

$$= \left[e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}}+e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)\right]^n$$

$$= e^{i\frac{n\theta}{2}}\cdot 2^n\cdot\cos^n\frac{\theta}{2} = 2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\cdot e^{i\frac{n\theta}{2}}$$

Donc

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n . \cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right) . \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

Exercice

On voit que 1 n'est pas solution de l'équation donc on cherche les solutions sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\} \qquad 27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+1)^6 = -27(z-1)^6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = (i\sqrt{3})^6$$

On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{1}{i\sqrt{3}}\right)^6 = 1$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,5]\!] \qquad \frac{z+1}{z-1} \cdot \frac{1}{i\sqrt{3}} = \omega^k$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,5]\!] \qquad z+1 = i\sqrt{3} . \omega^k (z-1)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,5]\!] \qquad z(1 - i\sqrt{3}\omega^k) = -(1 + i\sqrt{3}\omega^k)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in [\![0,5]\!] \qquad z = -\frac{1 + i\sqrt{3}\omega^k}{1 - i\sqrt{3}\omega^k}$$

Exercice

On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{7}}$. Alors

$$\sum_{k=0}^{6} \omega^k = \frac{1-\omega^7}{1-\omega} = 0 \qquad \text{car } \omega^7 = 0$$

donc $$\sum_{k=0}^{6} e^{i\frac{k2\pi}{7}} = 0$$

En prenant la partie réelle, on obtient

$$1 + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \underbrace{\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)}_{=\cos(\pi-\frac{3\pi}{7})=-\cos(\frac{3\pi}{7})} + \underbrace{\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)}_{=\cos(\pi-\frac{\pi}{7})=-\cos(\pi/7)} + \underbrace{\cos\left(\frac{8\pi}{7}\right)}_{=\cos(\pi+\frac{\pi}{7})=-\cos(\frac{\pi}{7})}$$

$$+ \underbrace{\cos\left(\frac{10\pi}{7}\right)}_{=\cos(\pi+\frac{3\pi}{7}) = -\cos(\frac{3\pi}{7})} + \underbrace{\cos\left(\frac{12\pi}{7}\right)}_{=\cos(2\pi-\frac{2\pi}{7})=\cos(\frac{2\pi}{7})} = 0$$

donc $\quad 1 + 2\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - 2\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - 2\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0$

donc $\quad \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) = \frac{1}{2}$

Exercice

Calcul de $\cos(\pi/10)$. On montre que (Moivre).

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(5x) = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

Pour $x = \pi/10$, on obtient

$$\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} = 16\cos^5\frac{\pi}{10} - 20\cos^3\frac{\pi}{10} + 5\cos\frac{\pi}{10}$$

On pose $u = \cos\pi/10$. Alors u est racine de $P = 16X^5 - 20X^3 + 5X = X(16X^4 - 20X^2 + 5)$. Comme $0 < \pi/10 < \pi/2$, on en déduit que $u \neq 0$ donc u est racine de $16X^4 - 20X^2 + 5$. On pose $v = u^2$. Alors

$$16v^2 - 20v + 5 = 0$$

$$\Delta = (-20)^2 - 4 \times 16 \times 5$$
$$= 4(10^2 - 16 \times 5) = 4(100 - 80) = 4 \times 20$$
$$= (4\sqrt{5})^2$$

Donc $\quad v = \frac{20 \pm 4\sqrt{5}}{32} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}$

Or $u^2 = v$ et $u > 0$ car $0 < \frac{\pi}{10} < \frac{\pi}{2}$ donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{8}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

Montrons que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$. Alors.

$$0 \leqslant \frac{\pi}{10} \leqslant \frac{\pi}{6}$$

donc $\cos\frac{\pi}{10} \geqslant \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc $\frac{5-\sqrt{5}}{8} \geqslant \frac{3}{4}$

donc $5-\sqrt{5} \geqslant 6$

C'est absurde

Donc $\cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$