Exercice 1.1

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f_α la fonction défini sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Soit $\beta \in \mathbb{R}$. On cherche à quelle condition sur β la fonction g défini sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0 \quad g(x) = x^\beta \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

admet une limite en 0.

. Si $\beta > 0$: Alors, pour $x > 0$

$$\begin{aligned} |g(x)| &= \left|x^\beta \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \\ &\leq x^\beta \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \\ &\leq x^\beta \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \quad \text{car } \beta > 0 \end{aligned}$$

Donc $g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

. Si $\beta \leq 0$: Montrons que $g(x)$ n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers 0. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que :

$$g(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \ell$$

Or :

$$\begin{aligned} \forall x > 0 \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 1 &\iff \frac{1}{x} \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi] \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \text{car } x > 0 \quad &\iff \exists k \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ &\iff \exists k \in \mathbb{N} \quad x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k2\pi} \end{aligned}$$

On définit la suite (u_n) par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + n2\pi}$$

Alors $u_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad g(u_n) = u_n^\beta . \sin\left(\frac{1}{u_n}\right)$$
$$= \left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right)^{-\beta} \xrightarrow[n\infty]{} \begin{cases} 1 \text{ si } \beta = 0 \\ +\infty \text{ si } \beta > 0 \end{cases}$$

Or $g(u_n) \xrightarrow[n\infty]{} \ell$ par composition des limites.
Par unicité de la limite, on en déduit que $\beta = 0$ et $\ell = 1$

Or :

$$\forall x > 0 \quad \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \frac{1}{x} \equiv 0 \quad [\pi]$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad \frac{1}{x} = k\pi$$
$$\text{car } x>0 \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{x} = k\pi$$
$$\iff \exists k \in \mathbb{N}^* \quad x = \frac{1}{k\pi}$$

On définit alors la suite (v_n) par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = \frac{1}{n\pi}$$

Alors $v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$. De plus
$$g(v_n) = \underbrace{v_n^\beta}_{\substack{=1 \\ \text{car } \beta=0}} . \underbrace{\sin\left(\frac{1}{v_n}\right)}_{=0} = 0 \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Par unicité de la limite, $\ell = 0$. Or $\ell = 1$. C'est absurde.
Donc g n'admet pas de limite finie en 0.

En conclusion, si $\beta > 0$, alors $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Si $\beta \leq 0$, $g(x)$ n'a pas de limite finie lorsque x tend vers 0.

On cherche maintenant à quelle condition sur α, f_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

<u>Analyse</u> : On suppose que f_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
Alors f_α est dérivable en 0. Donc
$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} f_\alpha'(0)$$

Or, pour $x > 0$
$$\frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(0)}{x} = x^{\alpha-1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Donc $x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} f_\alpha'(0)$. Donc $\alpha-1>0$.
Donc $\alpha>1$
On en déduit que $f_\alpha'(0)=0$.

D'après les théorèmes usuels, f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall x>0 \quad f_\alpha'(x) = \alpha . x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^{\alpha}\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \alpha . x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Puisque f_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$

$$f_\alpha'(x) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} f_\alpha'(0)=0$$

Donc

$$x^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\alpha x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\substack{\downarrow x\to 0,\ x>0 \\ 0 \text{ car } \alpha-1>0}} - \underbrace{f_\alpha'(x)}_{\substack{\downarrow x\to 0 \\ 0}} \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$$

On en déduit (même preuve que pour $x^{\beta}\sin\left(\frac{1}{\beta}\right)$) que $\alpha-2>0$. Donc $\alpha>2$.

<u>Synthèse</u> : Réciproquement, on suppose que $\alpha>2$. Montrons que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
D'après les théorèmes usuels, f_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$. De plus, pour $x>0$.

$$\frac{f_\alpha(x)-f_\alpha(0)}{x} = x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$$

car $\alpha-1>0$. Pour $x<0$

$$\frac{f_\alpha(x)-f_\alpha(0)}{x} = |x|^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= -|x|^{\alpha-1}.\sin\left(\frac{1}{|x|}\right) \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 0$$

Donc f_α est dérivable en 0 et $f_\alpha'(0)=0$. En particulier f_α est continue en 0. Montrons enfin que f_α' est continue en 0. D'après les théorèmes usuels :

$$\forall x>0 \quad f_\alpha'(x) = \underbrace{\alpha x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\substack{\downarrow x\to 0,\ x>0 \\ 0 \\ \text{car } \alpha-1>0}} - \underbrace{x^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\substack{\downarrow x\to 0,\ x>0 \\ 0 \\ \text{car } \alpha-2>0}} \xrightarrow[x>0]{x\to 0} 0$$

De même :

$$\forall x<0 \quad f'_\alpha(x) = -\alpha.|x|^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) + |x|^\alpha.\left(\frac{-1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= -\alpha.|x|^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - |x|^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \underbrace{\alpha|x|^{\alpha-1}\sin\left(\frac{1}{|x|}\right)}_{\substack{\downarrow x\to 0,\ x<0 \\ 0 \\ \text{car } \alpha-1>0}} - \underbrace{|x|^{\alpha-2}\cos\left(\frac{1}{|x|}\right)}_{\substack{\downarrow x\to 0,\ x<0 \\ 0 \\ \text{car } \alpha-2>0}} \xrightarrow[x<0]{x\to 0} 0$$

Donc $f'_\alpha(x) \xrightarrow[x\neq 0]{x\to 0} 0 = f'_\alpha(0)$. Donc f'_α est continue en 0.

Ainsi f_α est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

En conclusion, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha>2$.

Bon réveillon à tous.