2.3

Prop 14 :

Preuve : Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soit $x_0 \in I$.
On définit la fonction G sur I par :

$$\forall x \in I \qquad G(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

Puisque f est continue sur I, G est une primitive de f.
Soit F une primitive de f (quelconque). Alors, puisque I est un intervalle, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall x \in I \quad F(x) = G(x) + c$$

Soit $a, b \in I$. Alors :

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b)+c) - (G(a)+c) \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_{x_0}^{b} f(t)\,dt - \int_{x_0}^{a} f(t)\,dt \\ &= \int_{a}^{b} f(t)\,dt \end{aligned}$$

Remarques : (i) Soit f une fonction de classe C^1 sur l'intervalle I.
On suppose qu'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in I \quad |f'(x)| \leq M$$

Montrons que f est M-lipschitzienne. Soit $x, y \in I$. Alors.

$$|f(y) - f(x)| = \left|\int_{x}^{y} f'(t)\,dt\right|$$

Si $x \leq y$: Alors
$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left|\int_{x}^{y} f'(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_{x}^{y} |f'(t)|\,dt \qquad \text{car } x \leq y \\ &\leq \int_{x}^{y} M\,dt = (y-x)M = M|y-x| \end{aligned}$$

si $x \geq y$: Alors
$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \left|\int_{x}^{y} f'(t)\,dt\right| \\ &= \left|-\int_{y}^{x} f'(t)\,dt\right| = \left|\int_{y}^{x} f'(t)\,dt\right| \end{aligned}$$

$$\leqslant \int_y^x |f'(t)|dt \qquad \text{car } y \leqslant x$$

$$\leqslant \int_y^x M dt = (x-y)M = M.|y-x|$$

Donc f est M-Lipschitzienne.

En utilisant le théorème des accroissements finis on peut démontrer que f est M-lipschitzienne en utilisant seulement le fait que f est dérivable et le fait que $|f'(t)| \leqslant M$.
Avec cette preuve on a besoin du caractère C^1 de f et donc de la continuité de f'. La preuve avec les accroissements finis est donc plus générale. Cependant, les cas où f' n'est pas continue sont très rares, et il est récommandé d'utiliser cette seconde méthode.

Exercice :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a > 0$ et $x \geqslant a$, $y \geqslant a$. Soit f la fonction défini sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall t > 0 \qquad f(t) := \sqrt[n]{t} = t^{1/n}$$

D'après les théorèmes usuels, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\forall t > 0 \qquad f'(t) = \frac{1}{n} . t^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n.t^{1-1/n}}$$

f' est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\forall t \geqslant a \qquad 0 \leqslant f'(t) \leqslant \frac{1}{n.a^{1-1/n}}.$$

Donc

$$\forall x,y \geqslant a \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{n.a^{1-1/n}} . |x-y|$$

$$|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leqslant \frac{1}{n.a^{\frac{n-1}{n}}} |x-y|.$$

Prop 15 :

Preuve : Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I et g une fonction de classe C^1 sur I. Soit F une primitive de f. Montrons que si $a,b \in I$, on a

$$\int_a^b f(t) g(t)\, dt = \Big[F(t) g(t)\Big]_a^b - \int_a^b F(t) g'(t) dt$$

Soit $a,b \in I$. Soit φ la fonction définie sur I par.

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = F(t)\, g(t)$$

D'après les théorèmes usuels, φ est de classe C^1 et :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = F'(t)\, g(t) + F(t)\, g'(t)$$
$$= f(t)\, g(t) + F(t)\, g'(t).$$

On intègre cette identité entre a et b. On obtient

$$\underbrace{\int_a^b \varphi'(t)\, dt}_{\left[\varphi(t)\right]_a^b = \left[F(t) g(t)\right]_a^b} = \int_a^b f(t) g(t)\, dt + \int_a^b F(t) g'(t)\, dt.$$

Donc

$$\int_a^b f(t) g(t)\, dt = \left[F(t)\, g(t)\right]_a^b - \int_a^b F(t) g'(t)\, dt.$$

<u>Exercices.</u> (Intégrales de Wallis).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n t . dt$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t . dt = \int_0^{\pi/2} \sin t . \sin^{n+1} t . dt$$
$$= \left[-\cos t . \sin^{n+1} t\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\cos t) . (n+1) \cos t . \sin^n t . dt$$
$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^2 t . \sin^n t . dt$$
$$= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 t) \sin^n t\, dt = (n+1) \int_0^{\pi/2} (\sin^n t - \sin^{n+2} t)\, dt$$
$$= (n+1)(I_n - I_{n+2})$$

Donc $\quad (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n \quad$ donc $\quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.

- $I_0 = \int_0^{\pi/2} \sin^0 t\, dt = \int_0^{\pi/2} 1 . dt = \frac{\pi}{2}$. Donc

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}.$$

$$= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot I_{2n-4}$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots \times 1}{2n\,(2n-2)(2n-4) \qquad \times 2} \cdot I_0.$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots\cdots \times 1}{2n\,(2n-2)\times\cdots\times 2}$$

Or $\quad (2n)\times(2n-2)\times\cdots\times 2 = (2n)\times(2(n-1))\times(2\times(n-2))\times\cdots\times(2\times 1)$

$$= 2^n \cdot n!$$

$$I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n).(2n-1)(2n-2)(2n-3)\times\cdots\times 2\times 1}{(2n)^2 \times (2n-2)^2 \cdots\cdots \times 2^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n . n!)^2}$$

Donc $\quad I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n . n!)^2}.$

Pour prouver cela rigoureusement, on definit pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}_n := \text{"} \; I_{2n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n . n!)^2} \; \text{"}$$

<u>$\mathcal{H}_0$ est vraie :</u> En effet $I_0 = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{(2\times 0)!}{(2^0 . 0!)^2} = \frac{0!}{(0!)^2} = 1$

Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie.

<u>$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$:</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. On a :

$$I_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot I_{2n}.$$

$$= \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n)!}{(2^n . n!)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)\,(2n)!}{(2n+2)(2n+2) \quad (2^n . n!)^2}$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} . (n+1)!)^2}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

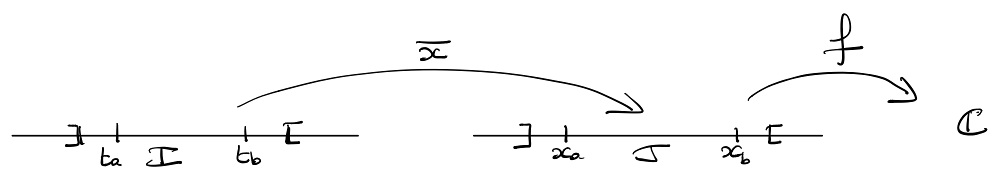
Par recurrence sur n, on en déduit que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

- Soit $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t . dt = \left[-\cos t\right]_0^{\pi/2} = 1$

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot I_{2n-1}$$
$$= \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot I_{2n-3}$$
$$= \frac{(2n)(2n-2) \cdots \times 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots \times 3} I_1$$
$$= \frac{\left((2n)(2n-2) \times \cdots \times 2\right)^2}{(2n+1)(2n)(2n-1)(2n-2) \times \cdots \times 3 \times 2} I_1$$
$$= \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n+1)!} I_1$$
$$= \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n+1)!}$$

Prop 16

Preuve :



Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $\overline{x}$ une fonction de classe C^1 de I dans J. Soit $x_a, x_b \in J$. On suppose qu'il existe $t_a, t_b \in I$ tels que $x_a = \overline{x}(t_a)$ et $x_b = \overline{x}(t_b)$.
Soit f une fonction continue sur J. Montrons que

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\,dx = \int_{t_a}^{t_b} f(\overline{x}(t)) \frac{d\overline{x}}{dt}(t)\,dt$$

Soit F une primitive de f sur J. On définit la fonction φ sur I par :

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) := F(\overline{x}(t))$$

D'après les théorèmes usuels, φ est de classe C^1 et :

$$\forall t \in I \quad \varphi'(t) = F'(\overline{x}(t)) \cdot \overline{x}'(t)$$
$$= f(\overline{x}(t))\, \overline{x}'(t).$$

Donc $$\int_{t_a}^{t_b} \varphi'(t)\,dt = \left[\varphi(t)\right]_{t_a}^{t_b}$$
$$= F(\overline{x}(t_b)) - F(\overline{x}(t_a))$$
$$= F(x_b) - F(x_a) = \int_{x_a}^{x_b} f(t)\,dt$$

Donc $$\int_{x_a}^{x_b} f(t)\,dt = \int_{t_a}^{t_b} f(\overline{x}(t)) \cdot \overline{x}'(t)\,dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} f(\bar{x}(t)) \cdot \frac{dx}{dt}(t) \cdot dt$$

<u>Exercice</u>

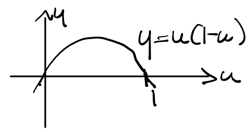
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$.

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\, dx \qquad\qquad \begin{aligned} x &= a + u(b-a) \\ dx &= (b-a)\, du \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 \left[(a + u(b-a) - a)(b - (a + u(b-a)))\right]^{1/2} \cdot (b-a)\, du$$

$$= \int_0^1 \left(u(b-a)(b-a)(1-u)\right)^{1/2} \cdot du\, (b-a) = (b-a)^2 \int_0^1 \sqrt{u(1-u)} \cdot du.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{u(1-u)} \cdot du.$



$$= \int_0^1 (u-u^2)^{1/2} \cdot du = \int_0^1 (-(u^2-u))^{1/2} \cdot du$$

$$= \int_0^1 \left(-\left(\left(u-\tfrac{1}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right)\right)^{1/2} \cdot du.$$

$$= \int_0^1 \left[-\left(\frac{1}{4}\left((2u-1)^2 - 1\right)\right)\right]^{1/2} \cdot du.$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[-\left((2u-1)^2 - 1\right)\right]^{1/2} \cdot du \qquad\qquad \begin{aligned} v &= 2u-1 \\ dv &= 2\, du. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(-(v^2-1)\right)^{1/2} \cdot \frac{dv}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-v^2} \cdot dv \qquad\qquad \begin{aligned} v &= \sin\theta \\ dv &= \cos\theta \cdot d\theta. \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{|\cos\theta|}_{\geq 0} \cdot \cos\theta \cdot d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\theta \cdot d\theta = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))\, d\theta$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos(2\theta))\, d\theta = \frac{1}{8} \cdot \left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \pi = \frac{\pi}{8}.$$

Donc $\displaystyle\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,dx = \frac{(b-a)^2\pi}{8}$

Exercice :

Soit f une fonction réelle, défini sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 telle que :

$$\forall x,y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

Montrons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax$.

- Montrons que $f(0) = 0$: En effet $f(0+0) = f(0) + f(0)$

$$f(0) = 2f(0)$$

donc $f(0) = 0$.

- Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Mq $f(x_0+h) \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{f(h)}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 0}} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$$

car f est continue en 0 et $f(0) = 0$

Donc f est continue en x_0.

- Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt \underset{\substack{t = x+u \\ dt = du}}{=} \int_0^1 f(x+u)\,du = \int_0^1 (f(x) + f(u))\,du.$$

$$= \int_0^1 f(x)\,du + \int_0^1 f(u)\,du.$$

$$= f(x) + \underbrace{\int_0^1 f(u)\,du}_{=:c}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt - c$

Or f est continue, donc $x \longrightarrow \displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,dt$ est dérivable. Donc f est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{d}{dx}(x+1)\, f(x+1) - \frac{d}{dx}(x)\, f(x)$$

$$= f(x+1) - f(x) = f(x) + f(1) - f(x)$$

$$= f(1).$$

On pose $a := f(1)$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + \lambda.$$

Or $f(0) = 0$, donc $\lambda = 0$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax.$$