3) Intégrale de Riemann

3.1) Uniforme continuité

Def 6 :

Remarque : (i) Soit $f : \mathcal{D}f \longrightarrow \mathbb{C}$. Alors f est continue sur $\mathcal{D}f$ si et seulement si

(1) $\forall x \in \mathcal{D}f \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}f \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$

f est uniformément continue sur $\mathcal{D}f$ si et seulement si

(2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}f \quad \forall y \in \mathcal{D}f \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$

On sait qu'on peut échanger deux quantificateurs de même nature sans changer le sens d'une phrase. La continuité de f sur $\mathcal{D}f$ s'écrit donc.

(3) $\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}f \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}f \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon.$

On en déduit que (2) $\Rightarrow$ (3). Une fonction uniformément continue est donc continue. La réciproque est fausse (a priori) car si une fonction est continue, pour qu'elle soit uniformément continue, il faut être capable de choisir $\eta > 0$ indépendamment de x.

(ii) Soit $f : \mathcal{D}f \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction lipschitzienne. Il existe donc $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathcal{D}f \quad |f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|.$$

Montrons que f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. On pose

$$\eta := \frac{\varepsilon}{M+1}$$

Soit $x, y \in \mathcal{D}f$ tels que $|x-y| \leqslant \eta$. Alors

$$|f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$$
$$\leqslant M.\eta = M.\frac{\varepsilon}{M+1} \leqslant \varepsilon$$

Donc f est uniformément continue.

Exercice : (i) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) := \sqrt{x}.$$

Montrons que f est uniformément continue.

. Montrons que $\forall x,y \geqslant 0 \quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$
Soit $x,y \geqslant 0$.

. <u>Si $0 \leqslant y \leqslant x$</u> : Alors

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x}-\sqrt{y}}_{\geqslant 0} \leqslant \underbrace{\sqrt{x-y}}_{\geqslant 0}$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \leqslant (\sqrt{x-y})^2$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x}+y-2\sqrt{xy} \leqslant \cancel{x}-y$$
$$\Leftrightarrow 2y \leqslant 2\sqrt{xy}$$
$$\Leftrightarrow y \leqslant \sqrt{xy}$$

Or $0 \leqslant y \leqslant x$ donc $\sqrt{y} \leqslant \sqrt{x}$ donc $(\sqrt{y})^2 \leqslant \sqrt{x}\sqrt{y}$
donc $y \leqslant \sqrt{xy}$.

Donc on a bien $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$

. <u>Sinon $0 \leqslant x \leqslant y$</u> : On a donc d'après le cas précédent

$$|\sqrt{y}-\sqrt{x}| \leqslant \sqrt{|y-x|}$$

Donc $|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$.

On a donc prouvé que :

$$\forall x,y \geqslant 0 \quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leqslant \sqrt{|x-y|}$$

Montrons que f est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta := \varepsilon^2$. Soit $x,y \geqslant 0$ tels que $|x-y| \leqslant \eta$. Alors

$$|f(x)-f(y)| \leqslant \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{\eta} = \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon.$$

Donc f est uniformément continue.

Montrons que f n'est pas lipschitzienne. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $M \geqslant 0$ tel que

$$\forall x,y \geqslant 0 \quad |f(x)-f(y)| \leqslant M|x-y|$$

Donc $\forall x \geqslant 0 \quad |\sqrt{x}-\sqrt{0}| \leqslant M|x-0|$
$\sqrt{x} \leqslant Mx$

Donc $\forall x > 0 \quad \frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant M$.

C'est absurde car $\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow[x \to 0]{} +\infty$.

On peut montrer plus généralement que si il existe $M \geqslant 0$ et $\alpha > 0$ tel que .

(1) $\quad \forall x, y \in \mathcal{D}f \qquad |f(x)-f(y)| \leqslant M.|x-y|^{\alpha}$

alors f est uniformément continue. On dit qu'une fonction qui vérifie (1) est α-Hölderienne.

Prop 20 :

Preuve : —

Remarque : —

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) := x^2$$

Montrons que f n'est pas uniformément continue. On souhaite construire deux suites (u_n) et (v_n) telles que

$$u_n - v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \qquad \text{mais} \qquad f(u_n) - f(v_n) \not\xrightarrow[n\infty]{} 0$$

Soit (u_n) et (v_n) deux définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n := n \qquad v_n := n + \frac{1}{n}.$$

Alors
$$u_n - v_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$
$$f(u_n) - f(v_n) = n^2 - \left(n+\frac{1}{n}\right)^2 = n^2 - \left(n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}\right)$$
$$= -2 - \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\infty]{} -2 \neq 0$$

On va en déduire que f n'est pas uniformément continue.
On raisonne par l'absurde et on suppose qu'elle est uniformément continue. Donc

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Montrons que $f(u_n) - f(v_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque $u_n - v_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geqslant N \quad |u_n - v_n| \leqslant \eta.$$

Soit $n \geqslant N$. Alors $|u_n - v_n| \leqslant \eta$, donc $|f(u_n) - f(v_n)| \leqslant \varepsilon$.

Donc $f(u_n) - f(v_n) \xrightarrow[n\infty]{} 0$. C'est absurde car $f(u_n)-f(v_n) \xrightarrow[n\infty]{} -2$
Donc f n'est pas uniformément continue.

Théorème de Heine :

Preuve : Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$. Montrons qu'elle est uniformément continue.
On raisonne par l'absurde et on suppose que :

$$\text{non} \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x,y \in [a,b] \quad |x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon \right)$$

Donc

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x,y \in [a,b] \quad \begin{cases} |x-y| \leqslant \eta \\ |f(x)-f(y)| > \varepsilon \end{cases}$$

Soit un tel $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\eta = \frac{1}{2^n} > 0$. Il existe donc $x_n, y_n \in [a,b]$ tels que

$$|x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$$

Cela étant vrai quel que soit $n \in \mathbb{N}$ on a ainsi construit deux suites (x_n) et (y_n). Or (x_n) est une suite bornée (car à valeurs dans $[a,b]$). Il existe donc une extractrice φ (Bolzano-Weierstrass) et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} \ell$$

Or $\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n - y_n| \leqslant \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$

Donc $x_n - y_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$. Donc $x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\infty]{} 0$.
Donc

$$y_{\varphi(n)} = \underbrace{y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} + \underbrace{x_{\varphi(n)}}_{\xrightarrow[n\infty]{} \ell} \xrightarrow[n\infty]{} \ell.$$

Or

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leqslant x_n \leqslant b.$$

Par passage à la limite : $a \leqslant \ell \leqslant b$. Donc f est continue en ℓ.
Donc

$$f(x_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(\ell)$$
$$f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} f(\ell)$$

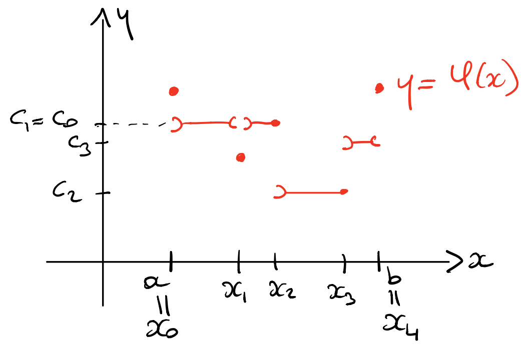
Donc $$f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)}) \xrightarrow[n\infty]{} 0.$$

C'est absurde car : $\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| > \varepsilon$

Donc par passage à la limite, on aurait $0 \geq \varepsilon$ ce qui est absurde. Donc f est uniformément continue.

3.2)

Def 7



Remarques : (i)

(ii) La fonction "partie entière" est une fonction en escalier sur $\mathbb{R}$.

Proposition 21 :

Preuve : Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$. Il existe donc $a = x_0 < \dots < x_n = b$ une subdivision de $[a,b]$ et $c_0, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad \varphi(x) = c_k$$

On pose $M = \max(|c_0|, \dots, |c_{n-1}|, |\varphi(x_0)|, \dots, |\varphi(x_n)|)$

Alors :

$$\forall x \in [a,b] \quad |\varphi(x)| \leq M.$$

Prop 22 :

Preuve : Soit I un intervalle.

(i) Mq l'ensemble $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ des fonctions en escalier est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

- $\tilde{0} \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R})$.
- Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R})$. Soit σ_1 une subdivision adaptée à φ_1 et σ_2 une subdivision adaptée à φ_2. Alors il existe une subdivision σ qui est plus fine que σ_1 et σ_2. On note $\sigma : a = x_0 < \dots < x_n = b$. Cette subdivision étant adaptée à φ_1 et φ_2, il existe $c_0, \dots, c_{n-1}$ et $d_0, \dots, d_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\qquad \varphi_1(x) = c_k$
$\varphi_2(x) = d_k.$

Donc

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad (\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2)(x) = \lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x) = \lambda c_k + \mu d_k.$$

Donc $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$ est en escalier sur $[a,b]$. Cela étant vrai quel que soient $a, b \in I$ tq. $a \leq b$, on en déduit que $\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2$ est en escalier sur I.

- $\tilde{1}$ est en escalier sur I.
- Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R})$. Alors (même preuve), $\varphi_1\varphi_2 \in \mathcal{E}(I, \mathbb{R})$

En conclusion $\mathcal{E}(I, \mathbb{R})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

(ii) —

Prop 23:

Preuve:

- Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Montrons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction en escalier $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leq \varepsilon$$

Puisque f est continue sur le segment $[a,b]$, d'après le théorème de Heine elle y est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que :

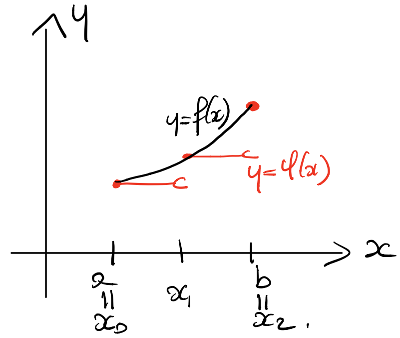
$$\forall x, y \in [a,b] \quad |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leq \eta$. (c'est possible car $\frac{b-a}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$)
On considère la subdivision uniforme $x_0, \dots, x_n$ définie par :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad x_k := a + k\frac{b-a}{n}.$$

On définit la fonction φ sur $[a,b]$ par :

- $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[\quad \varphi(x) := f(x_k)$
- $\varphi(b) := f(b)$



Montrons que : $\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$.

Soit $x \in [a,b]$

- Si $x = b$, alors $|f(x) - \varphi(x)| = |f(b) - \varphi(b)| = |f(b) - f(b)| = 0 \leqslant \varepsilon$.
- Sinon, il existe $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $x \in [x_k, x_{k+1}[$
  Alors
  $$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon.$$
  En effet $\quad x_k \leqslant x < x_{k+1}$
  $$\text{donc} \quad x_k \leqslant x < x_k + \frac{b-a}{n}$$
  $$\text{donc} \quad 0 \leqslant x - x_k < \frac{b-a}{n} \quad \text{donc} \quad |x - x_k| \leqslant \frac{b-a}{n}$$
  Donc $|x - x_k| \leqslant \eta$. Donc $|f(x) - f(x_k)| \leqslant \varepsilon$.

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$. Il existe donc une subdivision $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ telle que pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe une fonction continue $f_k : [x_k, x_{k+1}] \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que :
  $$\forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad f(x) = f_k(x).$$

Soit $\varepsilon > 0$.
Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, il existe une fonction en escalier φ_k telle que :
$$\forall x \in [x_k, x_{k+1}] \quad |f_k(x) - \varphi_k(x)| \leqslant \varepsilon.$$

On définit la fonction φ sur $[a,b]$ par :

- $\forall k \in [\![0, n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad \varphi(x) = \varphi_k(x)$
- $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \varphi(x_k) = f(x)$.

Alors φ est en escalier et :
$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon.$$