Aux Lazaristes — *MPSI année 2019–2020*

Devoir maison n° 9

Jeudi 13 février

Vous attacherez la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. L'usage d'une calculatrice est interdit.

Groupe infini dont les sous-groupes stricts sont finis

Étant donné un groupe $(G,\cdot)$, on dit qu'un sous-groupe H de G est strict lorsqu'il est strictement inclus dans G. Le but de ce problème est de construire un groupe infini dont tous les sous-groupes stricts sont finis.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit G_n et ω_n par

$$G_n=\mathbb{U}_{2^n} \quad \text{et} \quad \omega_n=e^{i\frac{2\pi}{2^n}}$$

et on pose $G=\cup_{n\in\mathbb{N}}G_n$.

1. (a) Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad G_n\subset G_{n+1}$$

   (b) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, G_n est un sous-groupe de $(\mathbb{U},\cdot)$.

   (c) En déduire que G est un sous-groupe strict infini de $(\mathbb{U},\cdot)$.

2. Le but de cette question est de montrer que les seuls sous-groupes stricts de G sont les G_n (pour $n\in\mathbb{N}$). On se donne donc H un sous-groupe strict de G.

   (a) Montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que $\omega_{n_0}\in H$ et $\omega_{n_0+1}\notin H$.

   (b) Montrer que $G_{n_0}\subset H$.

   On souhaite désormais montrer que $H\subset G_{n_0}$. On se donne donc $z\in H$ et on veut montrer que $z\in G_{n_0}$. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que $z\notin G_{n_0}$.

   (c) Montrer qu'il existe un entier $n_1>n_0$ et $k\in\mathbb{Z}$ tels que $z=\omega_{n_1}^k$.

   (d) Montrer que $(k\wedge 2^{n_1-n_0})\,|2^{n_1-n_0-1}$.

   (e) En déduire qu'il existe $u,v\in\mathbb{Z}$ tels que $z^u\omega_{n_0}^v=\omega_{n_0+1}$.

   (f) Conclure.

Théorème de Block et Thielmann (1951)

Notations

— Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, on pose $P_\alpha=X^2+\alpha\in\mathbb{C}[X]$
— On pose $G=\{P\in\mathbb{C}[X] : \deg(P)=1\}$
— Pour tout polynôme $P\in\mathbb{C}[X]$, on pose

$$\mathcal{C}(P)=\{Q\in\mathbb{C}[X] : \deg(Q)\geq 1 \quad \text{et} \quad P\circ Q=Q\circ P\}$$

— On dit qu'une famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est *commutante* lorsque

$$\begin{cases}\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \deg(Q_n)=n\\ \\ \forall (m,n)\in\mathbb{N}^{*2} \quad Q_m\circ Q_n=Q_n\circ Q_m\end{cases}$$

L'objectif du problème est de décrire les familles commutantes de $\mathbb{C}[X]$.

Préliminaires

1. Dans $\mathbb{C}[X]$, démontrer que la loi $\circ$ est associative, et qu'elle est linéaire à gauche.
2. Soit $P,Q\in\mathbb{C}[X]$ avec P non nul et Q non constant. Calculer $\deg(P\circ Q)$.
3. Soit $\alpha\in\mathbb{C}$.

   (a) Montrer que tous les polynômes de $\mathcal{C}(P_\alpha)$ sont unitaires.

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contient au plus un polynôme de degré n.
4. En déduire que $\mathcal{C}(X^2)=\{X^n : n\in\mathbb{N}^*\}$.
5. Soit $a\in\mathbb{C}^*$. Montrer que $\mathcal{C}(X+a)=\{X+b : b\in\mathbb{C}\}$.

Conjugaison dans G

1. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe.

Voici quelques précisions pour la suite.

- Soit $U, V \in G$. Il sera *interdit* de réécrire $U \circ V$ sous la forme UV (trop de risques de le confondre avec le produit usuel dans $\mathbb{C}[X]$).
- L'inverse de U au sens de G sera noté U^{-1}.

1. On dira que $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ sont *conjugués* lorsque
$$\exists U \in G \quad Q = U \circ P \circ U^{-1}.$$
   (a) Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathbb{C}[X]$.
   (b) Montrer que les polynômes constants forment une classe d'équivalence.
   (c) Soit P et Q conjugués non constants. Que dire de leurs degrés ?
2. Soit P et Q conjugués, et fixons $U \in G$ tel que $Q = U \circ P \circ U^{-1}$. Exprimer $\mathcal{C}(Q)$ en fonction de $\mathcal{C}(P)$.
3. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$ et $P = aX^2 + bX + c$.
   (a) Montrer que
$$\exists!\,(U, \alpha) \in G \times \mathbb{C} \quad U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha.$$
   On exprimera α en fonction de a, b et c.
   (b) Application : que valent U et α pour $P = 2X^2 - 1$?
4. Soit α, β deux complexes distincts. P_α et P_β sont-ils conjugués ?

Deux familles commutantes

1. Montrer que la famille $(X^n)_{n\geq 1}$ est commutante.

Nous nous attachons maintenant à exhiber une autre famille commutante.

2. (a) Soit $n \geq 1$. Montrer que
$$\exists!\,T_n \in \mathbb{C}[X] \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad T_n(\operatorname{ch}(x)) = \operatorname{ch}(nx).$$
   On fixe un tel T_n.
   (b) Montrer que la famille $(T_n)_{n\geq 1}$ ainsi définie est commutante.
   (c) Déterminer $\mathcal{C}(T_2)$.

Théorème de Block et Thielmann

1. Soit $(Q_n)_{n\geq 1}$ une famille commutante de $\mathbb{C}[X]$, et soit $U \in G$. Montrer que la famille $(U \circ Q_n \circ U^{-1})_{n\geq 1}$ est commutante.
2. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contienne un polynôme de degré 3. Montrer qu'on a nécessairement $\alpha \in \{-2, 0\}$.
3. Déterminer toutes les familles commutantes de $\mathbb{C}[X]$.

Un théorème de Chebychev

L'objet de ce problème est de démontrer le théorème suivant, dû à Chebychev.

Théorème : Soient $n \geqslant 1$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. Alors, $\displaystyle\max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

Partie I : polynômes de Chebychev

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrer qu'il existe *au plus* un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, l'on ait $P(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
2. On considère la suite de polynômes définie par :
$$\begin{cases} T_0 = 1, \\ T_1 = X, \\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
   (b) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré et le coefficient dominant de T_n.

Partie II : une inégalité concernant les polynômes trigonométriques positifs

Dans cette partie, on fixe un naturel $n \geqslant 1$, des réels $a_0, \dots, a_n$, et on suppose que la fonction
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta)$$
est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On se propose d'établir l'inégalité : $|a_n| \leqslant 2a_0$.

1. Calculer $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta$, et montrer que $\displaystyle a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)d\theta$.
2. Conclure.

On admet que l'inégalité $|a_n| \leqslant 2a_0$ *peut être améliorée en* $|a_n| \leqslant a_0$. Dans la suite du problème, on pourra utiliser cette dernière version (qui sera démontrée dans le dernier problème).

Partie III : démonstration du théorème de Chebychev

Dans toute cette partie, on fixe un naturel $n \geqslant 1$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n. On définit la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \theta \mapsto P(\cos\theta)$.

1. Montrer qu'il existe des réels uniques $a_0, \dots, a_n$ tels que
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k.$$
   Que vaut a_n ? Constater qu'alors $\displaystyle\varphi(\theta) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(k\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.
2. En utilisant les résultats de la partie II, terminer la démonstration du théorème de Chebychev.

Un théorème de Fejér

Étant donné un naturel n, on appelle *polynôme trigonométrique de degré* $\leqslant n$ toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pour laquelle il existe $(a_k)_{-n\leqslant k\leqslant n} \in \mathbb{C}^{2n+1}$ tels que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta}.$$

L'objectif de ce problème est de montrer le résultat suivant dû à Fejér [1] : étant donné un polynôme trigonométrique f de degré $\leqslant n$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta) > 0$, il existe des nombres complexes $b_0, \dots, b_n$ tels que

$$f(\theta) = \left| \sum_{k=0}^{n} b_k e^{ik\theta} \right|^2$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Soit donc f un polynôme trigonométrique, tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ik\theta},$$

avec $n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$. On suppose que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\theta)$ est un réel strictement positif.

On pose par ailleurs

$$P = \sum_{k=0}^{2n} a_{k-n} X^k.$$

1. (a) Soit

   $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \theta \mapsto \sum_{k=-n}^{n} u_k e^{ik\theta}$$

   un polynôme trigonométrique de degré $\leqslant n$ admettant $2n+1$ zéros distincts dans $[0, 2\pi[$. Montrer que $u_k = 0$ pour tout k tel que $-n \leqslant k \leqslant n$.

   (b) En déduire que, pour tout naturel k tel que $k \leqslant n$, $a_{-k} = \overline{a_k}$, et que 0 n'est pas racine de P.
2. Montrer que P n'admet aucune racine de module 1.
3. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

   $$P(z) = z^{2n} \overline{P\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}.$$
4. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est racine de P, alors $1/\overline{\lambda}$ est également racine de P, de même multiplicité que λ.
5. Terminer la démonstration du théorème de Fejér.
6. Établir l'inégalité admise à la fin de la partie II du problème précedent.

1. dans son fameux article « Uber trigonometrische Polynome », Journal für Math., **146** (1915), 53-82.