# Exercices : Développements limités

# 1 Comparaison de fonctions

## 1.1 Composition d'équivalents

Soit $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. On suppose que

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$$

et que ces fonctions admettent une limite commune notée $l \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.

1. On suppose dans cette question que $f$ et $g$ sont à valeurs strictement positives.
   (a) Montrer que si $l \neq 1$, alors :
   $$\ln(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(g(x))$$
   (b) Que pouvez-vous dire lorsque $l = 1$ ?
2. Parmi les équivalents suivants, lesquels sont systématiquement vrais ? (on pourra discuter selon les valeurs de $l$).
   $$\operatorname{Arctan}(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \operatorname{Arctan}(g(x)) \qquad e^{f(x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{g(x)}$$
   $$\sin(f(x)) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sin(g(x))$$

## 1.2 Existence de développement limité

1. $\sqrt{x}$ admet-elle un développement limité d'ordre $n \geqslant 1$ en 0 ?
2. À quels ordres $x^{\frac{13}{3}}$ admet-elle un développement limité en 0 ?
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. $|x|^n$ admet-elle un développement limité d'ordre $n$ en 0 ?

# 2 Calcul de développements limités

## 2.1 Calcul

Calculer les développements limités suivants :

$$\begin{array}{llll}
e^{\cos x} & \text{en 0 à l'ordre 4} & \ln\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{en 0 à l'ordre 7} \\
\dfrac{1}{\cos x} & \text{en 0 à l'ordre 5} & \ln(1+\operatorname{ch} x) & \text{en 0 à l'ordre 4} \\
\dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh} x} & \text{en 0 à l'ordre 3} & \ln(\tan x) & \text{en } \pi/4 \text{ à l'ordre 3} \\
e^{\operatorname{Arcsin} x} & \text{en 0 à l'ordre 4} & \operatorname{Arctan}(e^x) & \text{en 0 à l'ordre 3} \\
\operatorname{Arccos}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right) & \text{en 0 à l'ordre 2} & \operatorname{Arctan}(2\sin x) & \text{en } \pi/3 \text{ à l'ordre 3}
\end{array}$$

## 2.2 Fonction définie par morceaux

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{|x|} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

À quels ordres $f$ admet-elle un développement limité en 0 ?

## 2.3 Développement limité de $\tan x$

1. Démontrer que $\tan x$ et $\tan' x$ admettent un développement limité en 0 à tout ordre. Expliquer comment obtenir le développement limité de $\tan' x$ à partir de celui de $\tan x$.
2. En exploitant la relation $\tan' x = 1 + \tan^2 x$, donner le développement limité de $\tan x$ en 0 à l'ordre 7.

## 2.4 Calcul

1. Donner le développement limité de
   $$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^2}}$$
   en 0 à l'ordre 4.
2. Sur le même modèle, donner un développement limité de
   $$\int_x^{\frac{1}{x}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$
   en 1 à l'ordre 3.

## 2.5 Calcul

Donner le développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ de :

$$\ln\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)$$

# 3 Développements asymptotiques

## 3.1 Calcul

Calculer les développements asymptotiques suivants :

$$\sqrt[3]{x^3+x^2}-\sqrt[3]{x^3-x^2} \quad \text{en } +\infty \text{ à 2 termes} \qquad \ln\left(\sqrt{1+x}\right) \quad \text{en } +\infty \text{ à 2 termes}$$

## 3.2 Développement de $\operatorname{Arcsin} x$ en $-1$

1. Établir une relation entre :

$$\operatorname{Arcsin}\sqrt{x} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}(2x-1)$$

2. En déduire un développement asymptotique de $\operatorname{Arcsin} x$ en $-1$ à la précision $x^2$.

# 4 Applications

## 4.1 Calcul de limites

Calculer les limites des expressions suivantes lorsqu'elles existent :

$$(\tan x)^{\tan 2x} \quad \text{en } \frac{\pi}{4} \qquad \frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)} \quad \text{en } 0$$

$$\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{x} \quad \text{en } 0 \qquad \frac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})} \quad \text{en } 1$$

$$\frac{1}{\sin^4 x}\left(\sin\frac{x}{1-x}-\frac{\sin x}{1-\sin x}\right) \quad \text{en } 0 \qquad \frac{(1+x)^{\frac{\ln x}{x}}-x}{x(x^x-1)} \quad \text{en } 0$$

## 4.2 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[ \quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left]-\pi/2, \pi/2\right[$.

## 4.3 Développement asymptotique d'une suite

On considère la suite définie par

$$u_0=1 \quad \text{et} \quad u_{n+1}=\sqrt{n+u_n}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sqrt{n-1} \leqslant u_n \leqslant 2\sqrt{n}$.
2. En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, puis que

$$u_n=\sqrt{n}+\frac{1}{2}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$$

3. Prouver enfin que

$$u_n=\sqrt{n}+\frac{1}{2}-\frac{3}{8\sqrt{n}}+\underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

## 4.4 La formule de Stirling

Le but de cet exercice est calculer de calculer un équivalent de $n!$. On considère la suite $u$ définie par :

$$\forall n \geqslant 0 \quad u_n=\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n n!}$$

1. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)=n\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

2. En déduire que :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$$

3. En déduire que la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{u_{k+1}}{u_k}\right)$$

est monotone à partir d'un certain rang. Montrer que cette suite est convergente en utilisant le fait que la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ est convergente (ce que l'on démontrera au passage).
4. En déduire que la suite de terme général $\ln(u_n)$ est convergente.
5. En déduire l'existence d'un réel $a>0$ tel que :

$$n! \underset{n\to\infty}{\sim} a\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

6. En utilisant les résultats de l'exercice sur les intégrales de Wallis (révisions d'analyse), montrer que $a=\sqrt{2\pi}$.