EXERCICES : ESPACES VECTORIELS

1 Espaces vectoriels

1.1 Exemples d'espaces vectoriels

Les ensembles E suivants (munis des lois d'addition et de composition externe usuels) sont-ils des espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des suites réelles convergentes.
2. L'ensemble des suites réelles divergentes.
3. L'ensemble des fonctions croissantes.

1.2 Espace vectoriel engendré

Soit u, v et w trois vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

1. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u, w)$ si et seulement si :
$$\exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K} \quad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0 \quad \text{et} \quad \beta\gamma \neq 0$$
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que $F + \mathbb{K}v = F + \mathbb{K}w$ si et seulement si :
$$\exists u \in F \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{K} \quad u + \alpha v + \beta w = 0 \quad \text{et} \quad \alpha\beta \neq 0$$

2 Applications linéaires

2.1 Calcul dans $\mathcal{L}(E)$

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^3 = f^2 + f + \mathrm{Id}$. Montrer que f est un automorphisme.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f un endomorphisme de E. On suppose que f est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :
$$f^n = 0$$
Montrer que $\mathrm{Id}_E + f$ est un automorphisme et calculer son inverse.

3 Sommes

3.1 Exercice

Soit E un espace vectoriel et F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. Vérifiez sur un exemple qu'il est possible que cette inclusion soit stricte.
2. Établir que l'on a $(F \cap G) + (F \cap H) = F \cap [G + (F \cap H)]$.

3.2 Exercice

E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer que :
$$\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f \iff \mathrm{Ker}\, g \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$$
$$\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g \iff \mathrm{Ker}\, g + \mathrm{Im}\, f = F$$

3.3 Somme directe

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On définit :
$$A = \{f \in E : \exists a, b \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = ax + b\}$$
$$B = \{f \in E : f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'(0) = 0\}$$

1. Montrer que A et B sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $E = A \oplus B$.

3.4 Rendre directe une somme

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E tels que $F + G = E$. On note F' un supplémentaire de $F \cap G$ dans F. Montrer que :
$$E = F' \oplus G$$

3.5 Supplémentaire

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère :
$$F = \left\{ f \in E : \int_0^1 f(t)\, dt = 0 \right\}$$
Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E puis en donner deux supplémentaires.

4 Projecteurs

4.1 Commutant d'un projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f_0 un endomorphisme de E. On note :
$$\mathcal{C}(f_0) = \{f \in \mathcal{L}(E) : f \circ f_0 = f_0 \circ f\}$$

1. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est une sous algèbre de $\mathcal{L}(E)$.
2. On suppose que f_0 est un projecteur. Montrer que f commute avec f_0 si et seulement si f laisse stable le noyau et l'image de f_0.

4.2 Somme de deux projecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ deux projecteurs.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. On suppose que $p+q$ est un projecteur. Montrer que :

$$\operatorname{Ker}(p+q) = \operatorname{Ker} p \cap \operatorname{Ker} q \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(p+q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q$$

4.3 Réduction d'une application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$f^2 - 5f + 6\,\mathrm{Id}_E = 0$$

1. Montrer que $(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \circ (f - 3\,\mathrm{Id}_E) = 0$.
2. En déduire que $E = \operatorname{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3\,\mathrm{Id}_E)$.