

EXERCICES : FRACTIONS RATIONNELLES

1 Décomposition en éléments simples

1.1 Décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples sur \mathbb{R} les fractions suivantes :

$$\frac{10X^3}{(X^2+1)(X^2-4)} \quad \frac{X^4+1}{X^4+X^2+1} \quad \frac{X^3-1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$$

$$\frac{X^2}{(X^2+X+1)^2} \quad \frac{(X^2+4)^2}{(X^2+1)(X^2-2)^2}$$

1.2 Décomposition en éléments simples

Décomposer en éléments simples sur \mathbb{C} les fractions suivantes :

$$\frac{1}{X^n-1} \quad \frac{X^{n-1}}{X^n-1} \quad \frac{1}{(X-1)(X^n-1)}$$

1.3 Polynômes

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que :

$$X^n + \frac{1}{X^n} = P_n \left(X + \frac{1}{X} \right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (a) Factoriser P_n dans $\mathbb{C}[X]$.
 (b) Décomposer $1/P_n$ en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

1.4 Une somme de série

Calculer la limite lorsque n tend vers $+\infty$ de

$$\sum_{k=2}^n \frac{3k^2-1}{(k-1)^2 k^2 (k+1)^2}$$

1.5 Décomposition en éléments simples

On considère la fraction

$$F = \frac{1}{(X^3-1)^3}$$

que l'on souhaite décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$.

- Calculer la partie polaire de F relative au pôle 1.
- En étudiant les symétries de F , en déduire sa décomposition en éléments simples.

2 Calcul de primitives d'expressions rationnelles

2.1 Primitives de fractions rationnelles

1. Calculer sur un intervalle I que l'on précisera les primitives des fonctions dont les expressions sont :

$$\frac{1}{1-x^4} \quad \frac{x}{1+x^4} \quad \frac{x^2}{x^3-1}$$

2. Calculer

$$\int_0^1 \frac{x^3+x}{(x^2+x+1)^2} dx$$

2.2 Primitives de fractions rationnelles en \cos, \sin

Calculer sur un intervalle I que l'on précisera les primitives des fonctions dont les expressions sont :

$$\frac{1}{\cos x \sin^3 x} \quad \frac{1}{\sin x + \cos x}$$

2.3 Calcul de primitives

Calculer sur un intervalle I que l'on précisera les primitives des fonctions dont les expressions sont :

$$\frac{1}{2}x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad \frac{x}{\sqrt{-x^2+x+2}}$$

2.4 Une intégrale impropre

Calculer la limite lorsque x tend vers $\pi/2$ par la gauche de :

$$\int_0^x \sqrt{\tan t} dt$$