Exercice 12.5

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0,1]$. On suppose que $u_n v_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$. Mq $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$ et $v_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n \leqslant 1$ et $v_n \geqslant 0$ donc $u_n v_n \leqslant v_n$.
Comme de plus $v_n \leqslant 1$, on a prouvé que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{u_n v_n}_{\downarrow n\infty \; 1} \leqslant v_n \leqslant \underbrace{1}_{\downarrow n\infty \; 1}$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes, $v_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$. De même, on montre que $u_n \xrightarrow[n\infty]{} 1$.

Exercice 12.22

Soit $a>0$ et (u_n) et (v_n) les suites définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + u_n^2 \qquad v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_n)$$

1) On a : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$
Donc la suite (u_n) est croissante. On en déduit que soit elle converge, soit elle diverge vers $+\infty$. Montrons que $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.
On raisonne par l'absurde et on suppose qu'elle converge.
Il existe donc $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \xrightarrow[n\infty]{} \ell$.
Or :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \underbrace{u_{n+1}}_{\downarrow n\infty \; \ell} = \underbrace{u_n + u_n^2}_{\downarrow n\infty \; \ell+\ell^2}$$

Donc, par unicité de la limite, $\ell = \ell + \ell^2$. Donc $\ell = 0$.
Or (u_n) est croissante, donc : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant u_0 = a$.
Par passage à la limite, on en déduit que $\ell \geqslant a > 0$.
C'est absurde. Donc $u_n \xrightarrow[n\infty]{} +\infty$.

2) Soit $n, p \in \mathbb{N}$. Alors

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln(u_{n+p+1}) - \frac{1}{2^n} \ln(u_{n+p})$$

$$= \frac{1}{2^{n+p+1}} \left(\ln(u_{n+p+1}) - 2 \ln(u_{n+p}) \right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+p+1}} \cdot \left(\ln(u_{n+p} + u_{n+p}^2) - 2 \ln(u_{n+p}) \right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(\frac{u_{n+p}(1+u_{n+p})}{u_{n+p}^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+p+1}} . \ln\left(\underbrace{\frac{1+u_{n+p}}{u_{n+p}}}_{>1}\right) > 0$$

Donc $v_{n+p+1} - v_{n+p} > 0$. De plus.

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} = \frac{1}{2^{n+p+1}} . \ln\left(1 + \frac{1}{u_{n+p}}\right)$$

Or (u_n) est croissante donc $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+p}$, donc

$$\frac{1}{u_{n+p}} \leqslant \frac{1}{u_n}.$$

$$\text{donc} \quad \ln\left(1+\frac{1}{u_{n+p}}\right) \leqslant \ln(1+u_n)$$

Donc

$$v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

3) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p=0$, on en déduit que $v_{n+1} - v_n > 0$. La suite (v_n) est donc croissante. De plus, pour $n=0$, on obtient:

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad v_{p+1} - v_p \leqslant \frac{1}{2^{p+1}} \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

Donc: $\forall p \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{p-1} v_{k+1} - v_k \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \frac{1}{2^{k+1}} \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

$$v_p - v_0 \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{a}\right) . \frac{1}{2} . \frac{1-\frac{1}{2^p}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$v_p \leqslant v_0 + \ln\left(1+\frac{1}{a}\right)$$

On en déduit que la suite (v_n) est majorée. Comme elle est croissante majorée, on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$v_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \alpha.$$

4) On a:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2^n} \ln(u_n) = v_n.$$

$$\ln(u_n) = 2^n . v_n.$$

$$u_n = e^{2^n . v_n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\forall p \in \mathbb{N} \qquad v_{n+p+1} - v_{n+p} \leqslant \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

Donc, pour tout $q \in \mathbb{N}$

$$\sum_{p=0}^{q} \left(v_{n+p+1} - v_{n+p}\right) \leqslant \sum_{p=0}^{q} \frac{1}{2^{n+p+1}} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

$$v_{n+q+1} - v_n \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1-\frac{1}{2^{q+1}}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+q+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

Par passage à la limite lorsque q tend vers $+\infty$, on obtient

$$\alpha - v_n \leqslant \frac{1}{2^n} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)$$

donc $\qquad \alpha - \frac{1}{2^n} \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \leqslant v_n \leqslant \alpha$

donc $\qquad 2^n \alpha - \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \leqslant 2^n v_n \leqslant 2^n \alpha$

donc $\qquad e^{2^n\alpha} \cdot e^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)} \leqslant u_n \leqslant e^{2^n \alpha}$

donc $\qquad \underbrace{e^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)}}_{\downarrow_{n\infty}\, 1} \leqslant \frac{u_n}{e^{2^n\alpha}} \leqslant \underbrace{1}_{\downarrow_{n\infty}\, 1}$

D'après le théorème des gendarmes $\frac{u_n}{e^{2^n\alpha}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$. Donc

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} e^{2^n\alpha}$$

5) On définit la suite $(\beta_n)_n$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \beta_n := e^{2^n\alpha} - u_n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a vu que

$$e^{2^n\alpha} \cdot e^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)} \leqslant u_n \leqslant e^{2^n\alpha}$$

donc $\qquad 0 \leqslant e^{2^n\alpha} - u_n \leqslant e^{2^n\alpha}\left(1 - e^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)}\right)$

Comme $\frac{u_n}{e^{2^n\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N \quad \frac{u_n}{e^{2^n\alpha}} \geq \frac{1}{2}$$

$$u_n \geq \frac{1}{2} e^{2^n\alpha}$$

$$\frac{1}{u_n} \leq 2 e^{-2^n\alpha}$$

$$1 + \frac{1}{u_n} \leq 1 + 2 e^{-2^n\alpha}$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \leq \ln\left(1 + 2 e^{-2^n\alpha}\right)$$

Or : $\forall x \in]-1, +\infty[\quad \ln(1+x) \leq x$, donc

$$\forall n \geq N \quad \ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \leq 2 e^{-2^n\alpha}$$

$$-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right) \geq -2 e^{-2^n\alpha}$$

$$e^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)} \geq e^{-2e^{-2^n\alpha}}$$

Or : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1+x$, donc

$$\forall n \geq N \quad e^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)} \geq 1 - 2e^{-2^n\alpha}$$

$$-e^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)} \leq -1 + 2e^{-2^n\alpha}$$

$$e^{2^n\alpha}\left(1 - e^{-\ln\left(1+\frac{1}{u_n}\right)}\right) \leq 2$$

Donc

$$\forall n \geq N \quad 0 \leq \beta_n \leq 2$$

La suite β_n est donc bornée à partir du rang N. On en déduit qu'elle est bornée. Il existe donc $M \geq 0$ tel que.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |\beta_n| \leq M$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors.

$$\left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)e^{-2^n\alpha} = \left(e^{2^{n+1}\alpha} - u_{n+1} + \left(e^{2^n\alpha} - u_n\right)^2 - \left(e^{2^n\alpha} - u_n\right)\right)e^{-2^n\alpha}$$

$$= \left(e^{2^{n+1}\alpha} \cancel{- u_n - u_n^2} + e^{2^{n+1}\alpha} \cancel{+ u_n^2} - 2e^{2^n\alpha}u_n - e^{2^n\alpha} \cancel{+ u_n}\right)e^{-2^n\alpha}$$

$$= \left(2e^{2^{n+1}\alpha} - 2e^{2^n\alpha}u_n - e^{2^n\alpha}\right)e^{-2^n\alpha}$$

$$= 2e^{2^n\alpha} - 2u_n - 1 = 2u_n\left(\frac{e^{2^n\alpha}}{u_n} - 1\right) - 1$$

On définit la suite (w_n) par :

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad w_n = \left(\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n\right)e^{-2^n\alpha}$$

Alors

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad |w_n| \leqslant |\beta_{n+1} + \beta_n^2 - \beta_n| e^{-2^n\alpha}$$
$$\leqslant \left(|\beta_{n+1}| + |\beta_n|^2 + |\beta_n|\right)e^{-2^n\alpha}$$
$$\leqslant \left(2M + M^2\right)e^{-2^n\alpha}$$

Donc $\qquad w_n = \underset{n\infty}{O}\left(e^{-2^n\alpha}\right)$.

Or

$$\forall n\in\mathbb{N} \qquad w_n = 2u_n\left(\frac{e^{2^n\alpha}}{u_n} - 1\right) - 1$$

$$\frac{w_n+1}{2u_n} = \frac{e^{2^n\alpha}}{u_n} - 1$$

$$\frac{e^{2^n\alpha}}{u_n} = 1 + \frac{w_n+1}{2u_n} = \frac{2u_n + 1 + w_n}{2u_n}$$

$$u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 1 + w_n}\cdot e^{2^n\alpha}$$

$$u_n = e^{2^n\alpha} - \frac{1+w_n}{2u_n+1+w_n}e^{2^n\alpha} = e^{2^n\alpha} - \frac{1+w_n}{2u_ne^{-2^n\alpha} + (1+w_n)e^{-2^n\alpha}}$$

Or $w_n = \underset{n\infty}{O}\left(e^{-2^n\alpha}\right)$ et $e^{-2^n\alpha} \xrightarrow[n\infty]{} 0$ donc $w_n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.

Donc

$$\frac{\overbrace{1+w_n}^{\to_{n\infty} 1}}{\underbrace{2u_ne^{-2^n\alpha}}_{\to_{n\infty} 2} + \underbrace{(1+w_n)e^{-2^n\alpha}}_{\to_{n\infty} 0}} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{2}$$

2 car $u_n \underset{n\infty}{\sim} e^{2^n\alpha}$

Donc $\qquad \dfrac{1+w_n}{2u_ne^{-2^n\alpha} + (1+w_n)e^{-2^n\alpha}} = \dfrac{1}{2} + \underset{n\infty}{o}(1)$

Donc $\qquad u_n = e^{2^n\alpha} - \dfrac{1}{2} + \underset{n\infty}{o}(1)$

Donc, il existe une suite (γ_n) qui tend vers 0 telle que.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = e^{2^n\alpha} - \frac{1}{2} + \gamma_n.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = e^{2^n\alpha} - \frac{1+w_n}{2\left(e^{2^n\alpha}-\frac{1}{2}+\gamma_n\right)e^{-2^n\alpha} + (1+w_n)e^{-2^n\alpha}}$$

$$= e^{2^n\alpha} - \frac{1+w_n}{2 - e^{-2^n\alpha} + 2\gamma_n e^{-2^n\alpha} + (1+w_n)e^{-2^n\alpha}}$$

$$= e^{2^n\alpha} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+w_n}{1+\left(\gamma_n+\frac{w_n}{2}\right)e^{-2^n\alpha}}$$

$$= e^{2^n\alpha} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{w_n - \left(\gamma_n + \frac{w_n}{2}\right)e^{-2^n\alpha}}{1+\left(\gamma_n+\frac{w_n}{2}\right)e^{-2^n\alpha}}\right)$$

$$= e^{2^n\alpha} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{\left(\gamma_n+\frac{w_n}{2}\right) - w_n e^{2^n\alpha}}{1+\left(\gamma_n+\frac{w_n}{2}\right)e^{-2^n\alpha}}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} \cdot e^{-2^n\alpha}$$

Or $\left(w_n e^{2^n\alpha}\right)$ est bornée car $w_n = \underset{n\infty}{O}\left(e^{-2^n\alpha}\right)$. Comme

$$\gamma_n + \frac{w_n}{2} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

on en déduit que $\left(\left(\gamma_n+\frac{w_n}{2}\right) - w_n e^{2^n\alpha}\right)$ est bornée. Comme de plus $1+\left(\gamma_n+\frac{w_n}{2}\right)e^{-2^n\alpha} \xrightarrow[n\infty]{} 1$, on en déduit que $\left(\frac{\left(\gamma_n+\frac{w_n}{2}\right) - w_n e^{2^n\alpha}}{1+\left(\gamma_n+\frac{w_n}{2}\right)e^{-2^n\alpha}}\right)$ est bornée. En conclusion.

$$u_n = e^{2^n\alpha} - \frac{1}{2} + \underset{n\infty}{O}\left(e^{-2^n\alpha}\right)$$

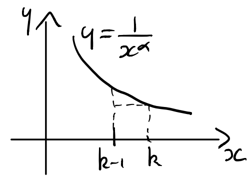
(C'était un peu dur. On reverra ces techniques dans le cours sur les développements asymptotiques).

Exercice 12.31

1) Soit $\alpha \in]0,1]$. On cherche un équivalent de

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$$

lorsque n tend vers $+\infty$. La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante. Soit $k \geqslant 2$. Alors.



$$\forall x \in [k-1, k] \qquad \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{x^\alpha}$$

donc

$$\underbrace{\int_{k-1}^{k} \frac{dx}{k^\alpha}}_{\frac{1}{k^\alpha}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Donc, pour $n \geqslant 2$

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$\leqslant 1 + \int_{1}^{n} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Alors.

$$\forall x \in [k, k+1] \qquad \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^\alpha}$$

donc

$$\int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant \underbrace{\int_{k}^{k+1} \frac{dx}{k^\alpha}}_{= \frac{1}{k^\alpha}}$$

Donc, pour $n \geqslant 1$

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$u_n \geqslant \int_{1}^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha}$$

Donc

$$\forall n \geqslant 2 \quad \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leqslant u_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$$

. Si $\alpha = 1$: Alors $\displaystyle \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \leqslant u_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$

$$\ln(n+1) \leqslant u_n \leqslant 1 + \ln n.$$

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

$$\frac{\ln(n) + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

donc $\displaystyle 1 + \underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}}_{\downarrow n\infty \atop 0} \leqslant \frac{u_n}{\ln(n)} \leqslant 1 + \underbrace{\frac{1}{\ln(n)}}_{\downarrow n\infty \atop 0}$

Donc

Donc, d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle \frac{u_n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\infty]{} 1$

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \ln(n)$$

. Si $\alpha < 1$: Alors $\displaystyle \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \int_1^{n+1} x^{-\alpha}\, dx$

$$= \left[\frac{1}{1-\alpha} x^{-\alpha+1} \right]_1^{n+1}$$

$$= \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left((n+1)^{1-\alpha} - 1 \right)$$

Donc $\displaystyle \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left((n+1)^{1-\alpha} - 1 \right) \leqslant u_n \leqslant 1 + \frac{1}{1-\alpha} \left(n^{1-\alpha} - 1 \right)$

donc $\displaystyle \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}}_{\downarrow n\infty \atop 1} - \underbrace{\frac{1}{n^{1-\alpha}}}_{\downarrow n\infty \atop 0} \leqslant \frac{u_n \cdot (1-\alpha)}{n^{1-\alpha}} \leqslant \underbrace{\frac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}}}_{\downarrow n\infty \atop 0} + 1 - \underbrace{\frac{1}{n^{1-\alpha}}}_{\downarrow n\infty \atop 0}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes $\displaystyle \frac{u_n(1-\alpha)}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow[n\infty]{} 1$

Donc $\displaystyle u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$

2) On suppose que $\alpha > 1$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que la suite (u_p) définie par

$$\forall p \geqslant n+1 \quad u_p = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha}$$

est convergente. Cette suite est croissante car

$$\forall p \geqslant n+1 \quad u_{p+1} - u_p = \frac{1}{(p+1)^\alpha} \geqslant 0$$

De plus :

$$u_p = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \int_{k-1}^{k} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$\leqslant \int_n^p \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(p^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - \frac{1}{p^{\alpha-1}}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

La suite (u_p) est donc croissante majorée. On en déduit qu'elle converge. On note

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

sa limite. Si on note v_n cette limite, on a prouvé au passage que

$$v_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Or

$$u_p = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \geqslant \sum_{k=n+1}^{p} \int_{k}^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha}$$

$$\geqslant \int_{n+1}^{p+1} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \left(\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(p+1)^{\alpha-1}}\right)$$

Par passage à la limite lorsque p tend vers $+\infty$.

$$v_n \geqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

$$\underbrace{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\alpha-1}}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1} \leqslant v_n (\alpha-1) n^{\alpha-1} \leqslant 1$$

Donc d'après le théorème des gendarmes

$$v_n (\alpha-1) n^{\alpha-1} \xrightarrow[n\infty]{} 1$$

Donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1) n^{\alpha-1}}$$

3) Enfin, on cherche un équivalent de $u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0 \quad f(x) := \frac{\ln x}{x}$$

D'après les théorèmes usuels, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Donc $\forall x > 0 \quad f'(x) = 0 \iff 1 - \ln x = 0$

$$\iff x = e$$

$$f'(x) \leqslant 0 \iff 1 - \ln x \leqslant 0$$

$$\iff x \geqslant e$$

Donc f est décroissante sur $[e, +\infty[$. Soit $k \geqslant 4$.
Alors

$$\forall x \in [k-1, k] \qquad \frac{\ln x}{x} \geqslant \frac{\ln k}{k}$$

Donc $$\int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x}\,dx \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\ln k}{k}\,dx = \frac{\ln k}{k}$$

De plus

$$\forall x \in [k, k+1] \qquad \frac{\ln x}{x} \leqslant \frac{\ln k}{k}$$

Donc $$\int_{k}^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,dx \leqslant \frac{\ln k}{k}$$

Donc, pour tout $n \geqslant 4$

$$\sum_{k=4}^{n} \int_{k}^{k+1} \frac{\ln x}{x}\,dx \leqslant \sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k} \leqslant \sum_{k=4}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Donc $$\int_{4}^{n+1} \frac{\ln x}{x}\,dx \leqslant \underbrace{\sum_{k=4}^{n} \frac{\ln k}{k}}_{u_n - u_3} \leqslant \int_{3}^{n} \frac{\ln x}{x}\,dx$$

Or $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2$. Donc

$$\frac{1}{2}\left(\ln^2(n+1) - \ln^2(4)\right) \leqslant u_n - u_3 \leqslant \frac{1}{2}\left(\ln^2 n - \ln^2 3\right)$$

$$\frac{1}{2}\ln^2(n+1) + u_3 - \frac{1}{2}\ln^2 4 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2}\ln^2 n + u_3 - \frac{1}{2}\ln^2 3$$

$$\underbrace{\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2(n)}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} + \underbrace{\frac{2\left(u_3 - \frac{1}{2}\ln^2 4\right)}{\ln^2 n}}_{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}} \leqslant \frac{2u_n}{\ln^2 n} \leqslant 1 + \underbrace{\frac{2\left(u_3 - \frac{1}{2}\ln^2 3\right)}{\ln^2 n}}_{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}$$

En effet $$\frac{\ln^2(n+1)}{\ln^2 n} = \left(\frac{\ln n + \ln(1+\frac{1}{n})}{\ln n}\right)^2 = \Bigg(1 + \underbrace{\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)}}_{\substack{\downarrow n\infty \\ 0}}\Bigg)^2 \xrightarrow[n\infty]{} 1$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes $\dfrac{2u_n}{\ln^2 n} \xrightarrow[n\infty]{} 1$. Donc

$$u_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln^2 n.$$