Exercice 16.4

Soit $p, q > 0$ et $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue telle que $f(0) \neq f(1)$. Montrons qu'il existe $x_0 \in]0,1[$ tel que

$$p f(0) + q f(1) = (p+q) f(x_0).$$

On suppose que $f(0) < f(1)$. Alors.

$$f(0) \leqslant f(1)$$

donc $p f(0) \leqslant p f(1)$

donc $p f(0) + q f(1) \leqslant (p+q) f(1)$

donc $\frac{1}{p+q}(p f(0) + q f(1)) \leqslant f(1)$

De même $\frac{1}{p+q}(p f(0) + q f(1)) \geqslant f(0)$.

Or f est continue. Il existe donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$f(x_0) = \frac{1}{p+q}(p f(0) + q f(1))$$

De plus, $x_0 \neq 0$. En effet, on raisonne par l'absurde et on suppose que $x_0 = 0$. Alors

$$f(0) = \frac{1}{p+q}(p f(0) + q f(1))$$

donc $(p+q) f(0) = p f(0) + q f(1)$

donc $q f(0) = q f(1)$

donc $f(0) = f(1)$ car $q \neq 0$.

C'est absurde, donc $x_0 \neq 0$. De même, $x_0 \neq 1$.
Donc $x_0 \in]0,1[$.

La preuve se fait de même si on suppose $f(0) > f(1)$.
(On peut aussi appliquer ce qui précède à $-f$).

Exercice 16.17

Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que

$$\forall x > 0 \quad f(x) < x.$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leqslant b$. Montrons qu'il existe $M \in [0,1[$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leqslant M x$$

Soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par

$$\forall x \in [a,b] \quad g(x) := \frac{f(x)}{x}$$

Alors, par hypothèse

$$\forall x \in [a,b] \qquad 0 \leqslant g(x) < 1$$

Or g est continue comme quotient de deux fonctions continues. Comme $[a,b]$ est un segment, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \qquad 0 \leqslant g(x) \leqslant g(x_0)$$

On pose $M = g(x_0) \in [0,1[$. Alors

$$\forall x \in [a,b] \qquad 0 \leqslant \frac{f(x)}{x} \leqslant M$$

$$0 \leqslant f(x) \leqslant Mx$$

Exercice 16.28

On commence par prouver le lemme suivant. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$\mathcal{H}_n$ = " Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction admettant (au moins) $n+1$ zéros sur $\mathbb{R}$. Alors, $f^{(n)}$ admet (au moins) un zéro sur $\mathbb{R}$."

Montrons que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>$\mathcal{H}_0$ est vraie</u> : Lisez bien, il n'y a rien à prouver.

<u>$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ une fonction admettant (au moins) $n+2$ zéros sur $\mathbb{R}$: $x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1}$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, f est continue sur $[x_k, x_{k+1}]$ et dérivable sur $]x_k, x_{k+1}[$. De plus $f(x_k) = f(x_{k+1}) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $y_k \in]x_k, x_{k+1}[$ tel que $f'(y_k) = 0$. Or

$$x_0 < y_0 < x_1 < \cdots < x_n < y_n < x_{n+1}$$

Donc les $y_0, \ldots, y_n$ sont deux à deux distincts. Or f' est C^∞, donc, puisque $\mathcal{H}_n$ est vraie $f'^{(n)}$ admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$. Donc $f^{(n+1)}$ admet au moins un zéro sur $\mathbb{R}$. Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence sur n, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Soit P une fonction polynomiale. On définit f sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) := P(x) - e^x$$

Alors f est C^∞ comme différence de deux fonctions C^∞. Montrons que f admet un nombre fini de 0. Puisque P est une fonction polynomiale, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n.$$

On en déduit que $P^{(n+1)}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons que f admette un nombre infini de 0. Alors f admet au moins $n+2$ zéros. Donc d'après le lemme précédent, $f^{(n+1)}$ admet au moins un zéro. Or

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+1)}(x) = e^x \neq 0.$$

C'est absurde. Donc l'équation $P(x) = e^x$ admet un nombre fini de zéro

Exercice 16.31

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable, telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in]0,1[\quad f(x) > 0$$

Soit $\alpha, \beta > 0$. Montrons qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$\alpha \cdot \frac{f'(c)}{f(c)} = \beta \cdot \frac{f'(1-c)}{f(1-c)}$$

Soit g la fonction définie sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1] \quad g(x) = f(x)^\alpha f(1-x)^\beta.$$

Alors $g(0) = 0$ et $g(1) = 0$. De plus g est continue sur $[0,1]$. Comme

$$\forall x \in]0,1[\quad g(x) = e^{\alpha \ln(f(x))} \cdot e^{\beta \ln(f(1-x))}$$

d'après les théorèmes usuels, g est dérivable sur $]0,1[$ et

$\forall x \in]0,1[\quad g'(x) = \alpha f'(x) f(x)^{\alpha-1} f(1-x)^{\beta} - \beta f'(1-x) f(x)^{\alpha} f(1-x)^{\beta-1}$

$$= \left(\alpha f'(x) f(1-x) - \beta f'(1-x) f(x)\right) f(x)^{\alpha-1} f(1-x)^{\beta-1}$$

Comme g cot continue sur $[0,1]$, dérivable sur $]0,1[$ et que $g(0)=g(1)=0$, il existe $c \in]0,1[$ tel que $g'(c)=0$.

Donc

$$\left(\alpha f'(c) f(1-c) - \beta f'(1-c) f(c)\right) \underbrace{f^{\alpha-1}(c)}_{\neq 0} \underbrace{g^{\alpha-1}(1-c)}_{\neq 0} = 0$$

donc $\qquad \alpha f'(c) \underbrace{f(1-c)}_{\neq 0} - \beta f'(1-c) \underbrace{f(c)}_{\neq 0} = 0$

donc $\qquad \alpha \cdot \dfrac{f'(c)}{f(c)} = \beta \cdot \dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$