Exercices : Matrices

1 Matrices comme tableaux de nombres

1.1 Sous-structures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

1. Montrer que l'ensemble des matrices :
$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2z & x & y \\ 2y & 2z & x \end{pmatrix}$$
pour $x, y, z \in \mathbb{Q}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{Q}), +)$.
2. Soit E l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ de la forme :
$$\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$
où a, b, c, d sont des nombres complexes.
   (a) Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.
   (b) Cette sous-algèbre est-elle commutative ?
   (c) Soit $A, B \in E$. Est-il possible d'avoir $AB = 0$ sans que $A = 0$ ou $B = 0$?
   (d) Donner la dimension de cette algèbre.

1.2 En vrac

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad AXB = 0$$
Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

1.3 Calculs de puissances successives et d'inverses

1. Calculer la puissance n-ième des matrices
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
2. Calculer l'inverse de la matrice :
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.4 Formes linéaires et trace sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de A et on note $\operatorname{tr} A$ le scalaire défini par :
$$\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

1. Montrer que la trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que :
$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$$
3. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que :
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \varphi(X) = \operatorname{tr}(AX)$$
4. On suppose que $\forall X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \varphi(XY) = \varphi(YX)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad \varphi(X) = \lambda \operatorname{tr}(X)$$

1.5 Groupe des rotations

Montrer que l'ensemble des matrices :
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$
pour $\theta \in \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}), \times)$.

1.6 Déterminant

Soit A la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A^2 - (a_{1,1} + a_{2,2})A + (a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1})I = 0$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que A soit inversible.

1.7 Matrice triangulaire supérieure par blocs

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = p + q$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire supérieure par blocs :
$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix} \qquad \text{où } A_{i,j} \in \mathcal{M}_{d_i,d_j}(\mathbb{K}) \text{ avec } d_1 = p \text{ et } d_2 = q$$

Montrer que A est inversible si et seulement si $A_{1,1}$ et $A_{2,2}$ le sont. Si tel est le cas, montrer que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{-1} & \star \\ 0 & A_{2,2}^{-1} \end{pmatrix}$$

1.8 Calcul d'inverse

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$. On définit la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,j} = \begin{cases} a^{j-i} & \text{si } j \geqslant i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En introduisant la matrice N définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad n_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

2 Matrices et applications linéaires

2.1 Base, noyau et image

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice :
$$A = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$$
Déterminer le rang de f, ainsi qu'une base de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

2.2 Calcul de matrices

1. On considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}_3[X]$ défini par :
$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] \quad u(P) = P' + P$$
Écrire la matrice de u dans la base $1, X, X^2, X^3$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, déterminer la matrice de passage de la base b_1 à la base b_2 avec :
$$b_1 = (1,2,1), (2,3,3), (3,7,1)$$
$$b_2 = (3,1,4), (5,3,2), (1,-1,7)$$

2.3 Calcul dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent.

2.4 Matrices à diagonale dominante

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients diagonaux dominants, c'est-à-dire telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Montrer que A est inversible.

3 Matrices équivalentes, rang

3.1 Rang

Soit $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\operatorname{rg} B \leqslant \operatorname{rg} A \iff [\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \exists Q \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \quad B = PAQ]$$

4 Matrices semblables

4.1 Réduction d'une matrice

Soit A la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A.
2. Déterminer une matrice diagonale D semblable à A. En déduire un polynôme annulateur non nul de A.
3. Expliciter les suites u, v et w définies par la donnée de u_0, v_0, w_0 et la relation de récurrence :
$$\begin{cases} u_{n+1} = & 2v_n - w_n \\ v_{n+1} = & 3u_n - 2v_n \\ w_{n+1} = & -2u_n + 2v_n + w_n \end{cases}$$

4.2 Matrices telles que $M^2 = 0$

Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ telles que $M^2 = 0$.

4.3 Réduction des matrices nilpotentes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice de nilpotence n, c'est-à-dire telle que :

$$A^n = 0 \quad \text{et} \quad A^{n-1} \neq 0$$

Montrer que A est semblable aux matrices :

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

4.4 Valeurs propres et de AB et BA

On appelle valeur propre d'une matrice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout réel λ tel que $X - \lambda I_n$ ne soit pas inversible. Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors AB et BA ont les mêmes valeurs propres non nulles.