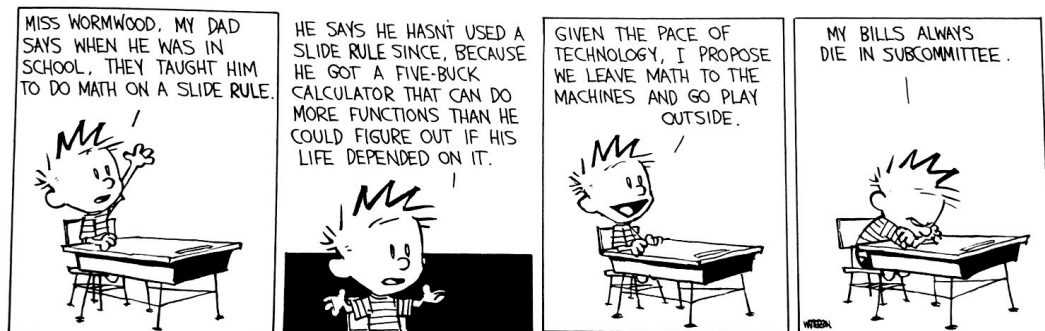


## TP INFO : NOMBRES FLOTTANTS



## 1 Ça commence mal

Demander à Python si  $0.1 + 0.2 == 0.3$ .

## 2 Calcul de dérivée

On se donne une fonction numérique  $f$  dont on souhaite évaluer la dérivée  $f'(x)$ . Pour cela, on utilisera les deux approximations suivantes :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad f'(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

1. Écrire deux fonctions `derive_1` et `derive_2` qui prennent en entrée  $f$ ,  $x$  et  $\varepsilon$  et qui renvoient respectivement l'approximation de  $f'(x)$  donnée par la première et la seconde formule.
2. Testez ces fonctions avec  $f(x) = \sqrt{x}$  puis  $f(x) = e^x$  pour différentes valeurs de  $x$  et de  $\varepsilon$ . Est-ce que plus  $\varepsilon$  est petit, plus l'approximation est bonne ?
3. Étant donné une fonction  $f$ , tracez en fonction de  $n$ , le graphe de

$$u_n = -\log_{10} \left| \frac{r_n(x) - f'(x)}{f'(x)} \right|$$

où  $r_n(x)$  est le nombre flottant renvoyé par la fonction `derive_1` appelée avec  $f$ ,  $x$  et  $\varepsilon = 10^{-n}$ . Donnez la signification de  $u_n$  et expliquez les variations de cette suite. Estimez, en fonction de  $u \approx 10^{-16}$ , la valeur de  $\varepsilon$  qui semble minimiser l'erreur commise en utilisant la fonction `derive_1` pour obtenir une approximation de  $f'(x)$ .

4. Répétez l'expérience avec la fonction `derive_2`.
5. Quelle méthode recommanderiez-vous à une personne souhaitant calculer numériquement  $f'(x)$  avec la meilleure précision si on a seulement accès à une fonction calculant  $f(x)$ .

## 3 Suite de Jean-Michel Muller

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = -4 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad u_n = 111 - \frac{1130}{u_{n-1}} + \frac{3000}{u_{n-1}u_{n-2}}$$

1. Écrire une fonction qui prend en paramètre  $n$  et qui renvoie  $u_n$ .
2. Quel semble être la limite de la suite  $(u_n)$  ?
3. On peut montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-3 \times 6^{n+1} + 4 \times 5^{n+1}}{-3 \times 6^n + 4 \times 5^n}$$

Quelle est la limite de la suite  $(u_n)$  ?

## 4 Un calcul d'intégrale

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$u_n = \int_0^1 x^n e^x dx$$

1. Montrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = e - nu_{n-1}$ .
2. En déduire une fonction calculant  $u_n$ .
3. Testez cette fonction pour différentes valeurs de  $n$ . Expliquez ce qu'il se passe.

## 5 De l'importance de choisir la bonne expression

1. On considère deux expressions de la même fonction

$$f_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

Pour une grande valeur de  $x$ , laquelle de ces expressions est la plus appropriée ?

2. Sous quelle forme mettrait-on  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$  si l'on voulait obtenir une bonne précision pour  $x$  grand ?
3. On considère les deux expressions (égales pour  $x \geq 1$ )

$$h_1(x) = x - \sqrt{x^2 - 1} \quad \text{et} \quad h_2(x) = x \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} \right).$$

- (a) L'une de ces deux expressions vous semble-t-elle a priori meilleure si  $x$  est grand ?

- (b) À partir de quelle valeur de  $x$  environ cette expression vaudra-t-elle 0 ?
- (c) Pouvez-vous écrire une expression donnant une meilleure approximation de notre fonction pour  $x$  grand ?
4. (a) Écrire une fonction **trinome** qui, étant donnés  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que  $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ , renvoie les deux racines de l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- (b) Testez le programme précédent pour  $a = 1, b = -10^n, c = 1$  et différentes valeurs de  $n$ . L'erreur relative sur les racines vous paraît-elle toujours bonne ?
- (c) Proposez une solution pour que cette erreur relative reste faible, même pour  $n$  assez grand.
5. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

On admet que

$$f(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

- (a) Implémentez  $f$  en utilisant les deux expressions suivantes.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_1(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{e^x - 1}{\ln(e^x)}$$

Essayez ces deux implémentations pour des petites valeurs de  $x$ . Quelle implémentation vous paraît la plus précise ?

- (b) Si vous avez du temps libre ce soir, essayez de donner une explication.

## 6 Dichotomie

Soit  $f$  une fonction continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$  telle que  $f(a)f(b) \leq 0$ . D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction  $f$  admet au moins un zéro. Étant donné  $\varepsilon > 0$ , on cherche à trouver  $x \in [a, b]$  tel que le segment  $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$  contienne au moins un zéro de  $f$ . En particulier,  $x$  est une valeur approchée d'un zéro de  $f$  à  $\varepsilon$  près. Pour cela on définit les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  par :

- $a_0 = a$  et  $b_0 = b$ .
  - Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $a_n$  et  $b_n$  sont tels que  $f(a_n)f(b_n) \leq 0$ , on pose  $c_n = (a_n + b_n)/2$ . Selon le signe de  $c_n$ , on pose  $a_{n+1} = a_n$  et  $b_{n+1} = c_n$  ou  $a_{n+1} = c_n$  et  $b_{n+1} = b_n$ .
- On construit ainsi deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n)f(b_n) \leq 0 \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

- Écrire une fonction **dichotomie**(**f**, **a**, **b**, **epsilon**) qui prend en entrée une fonction continue  $f$ , deux flottants  $a$  et  $b$  tels que  $f(a)f(b) \leq 0$  et renvoie une valeur approchée à  $\varepsilon$  près d'un zéro de  $f$ .
- Utilisez cette fonction pour calculer une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  à  $10^{-15}$  près.
- Modifiez la fonction **dichotomie** pour qu'elle ne prenne plus  $\varepsilon$  en argument et qu'elle arrête l'itération quand on a atteint la précision maximale.

## 7 Méthode de Newton

Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , admettant au moins un zéro sur  $\mathbb{R}$  et dont la dérivée ne s'annule pas. Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $(u_n)$  la suite définie par :

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- Montrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_{n+1}$  est l'abscisse de l'intersection de la tangente au graphe de  $f$  en  $x_n$  et de l'axe des abscisses. Faites un dessin.
- Écrire une fonction **newton**(**f**, **fprime**, **x0**, **n**) effectuant  $n$  itérations de la méthode de Newton à partir de la valeur initiale  $x_0$  et renvoyant  $x_n$ . La fonction **fprime** est une fonction calculant  $f'(x)$  avec l'expression obtenue en dérivant « à la main »  $f$ .
- Montrez que si la suite  $(x_n)$  converge, elle converge vers un zéro de  $f$ .
- Testez la fonction **newton** avec :
  - $f(x) = x^2 - 2$  et  $x_0 = 2$
  - $f(x) = x^2 - 2$  et  $x_0 = 1$
  - $f(x) = x - x^3/5$  et  $x_0 = 1$
  - $f(x) = x - x^3/5$  et  $x_0 = 1/2$
  - $f(x) = x - x^3/5$  et  $x_0 = 2$
 La suite  $(x_n)$  est-elle toujours convergente ?
- On se place dans un cas où la suite  $(x_n)$  converge vers un zéro non nul de  $f$  que l'on notera  $\alpha$  (prenez par exemple  $f(x) = x^2 - 2$  et  $x_0 = 2$ ). Tracer

$$u_n = -\log_{10} \left| \frac{x_n - \alpha}{\alpha} \right|$$

Expliquez le graphe que vous obtenez. Observez que le « nombres de chiffres corrects » double à chaque itération.

- On s'intéresse désormais à la fonction d'expression  $f(x) = (x - 1)^{10} - 2$  avec  $x_0 = 3$ .
  - Tracez le graphe précédent (appelé graphe de convergence) de la suite de Newton associée.
  - Gaston a implémenté la fonction  $f$  en l'exprimant sous la forme

$$\forall x \geq 0 \quad f(x) = -2 + \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} x^k$$

Tracez le graphe de convergence de la suite de Newton obtenue et le comparer avec le précédent graphe. Expliquez ce que vous observez.