Cours : Dérivation

Table des matières

1 Fonction dérivable, dérivées successives

1.1 Définition

Définition 1. *On dit qu'une fonction f est dérivable en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque le taux d'accroissement*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0 ; si tel est la cas, on note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé de f en x_0. La propriété « est dérivable en x_0 » est locale en x_0.

Remarques :

⇨ Si f est dérivable en x_0, son graphe admet une tangente d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Cette tangente est horizontale si et seulement si $f'(x_0) = 0$. Lorsque le taux d'accroissement de f en x_0 tend vers $\pm\infty$, son graphe admet une tangente verticale.

Définition 2.

- *On dit qu'une fonction f est dérivable à gauche en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque le taux d'accroissement*
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par la gauche ; si tel est la cas, on note $f'_g(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé à gauche de f en x_0. La propriété « est dérivable à gauche en x_0 » est locale à gauche (au sens large) en x_0.
- *On dit qu'une fonction f est dérivable à droite en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque le taux d'accroissement*
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par la droite ; si tel est la cas, on note $f'_d(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé à droite de f en x_0. La propriété « est dérivable à droite en x_0 » est locale à droite (au sens large) en x_0.

Proposition 1. *Une fonction f est dérivable en un point $x_0 \in \mathcal{D}_f$ si et seulement si les objets ci-dessous susceptibles d'avoir un sens*

$$f'_g(x_0) \quad \text{et} \quad f'_d(x_0)$$

existent et sont égaux. Si tel est le cas, $f'(x_0)$ est cette valeur commune.

Exercices :

⇨ Étudier la dérivabilité des fonctions d'expression

$$|x| \quad \text{et} \quad \frac{x}{1+|x|}$$

en 0.

Proposition 2. *Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

Remarques :

⇨ La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en 0.

Définition 3. *On dit qu'une fonction est dérivable lorsqu'elle est dérivable en tout point de son domaine de définition.*

Remarques :

⇨ Une fonction est dérivable sur A lorsque sa restriction à A est dérivable en tout point de A. Attention, selon cette définition, la fonction d'expression $|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ alors qu'elle n'est pas dérivable en 0. Les propriétés « f est dérivable sur A » et « f est dérivable en tout point de A » ne sont donc pas équivalentes.
Remarquons cependant que si f est dérivable en tout point de A, elle est dérivable sur A. Réciproquement, si f est dérivable sur A, elle est dérivable en tout point $x_0 \in A$ pour lequel il existe $\eta > 0$ tel que $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap \mathcal{D}_f \subset A$.

1.2 Théorèmes usuels

Proposition 3. *Soit f et g deux fonctions dérivables en x_0.*

— *Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et :*
$$(\lambda f + \mu g)'(x) = \lambda f'(x) + \mu g'(x)$$

— *fg est dérivable en x_0 et :*
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\, g(x_0) + f(x_0)\, g'(x_0)$$

— *Si $f(x_0) \neq 0$, alors f ne s'annule pas au voisinage de x_0 et $1/f$ est dérivable en x_0. De plus :*
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

— *Si $g(x_0) \neq 0$, alors g ne s'annule pas au voisinage de x_0 et f/g est dérivable en x_0. De plus :*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\, g(x_0) - f(x_0)\, g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Proposition 4. *Soit f une fonction dérivable en x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :*
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0)$$

Remarques :

⇨ Soit $f = g_1^{\alpha_1} g_2^{\alpha_2} \cdots g_n^{\alpha_n}$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Sans se soucier du signe des fonctions, on écrit formellement $\ln f = \alpha_1 \ln g_1 + \alpha_2 \ln g_2 + \cdots + \alpha_n \ln g_n$. En dérivant cette relation, on obtient
$$\frac{f'}{f} = \alpha_1 \frac{g_1'}{g_1} + \alpha_2 \frac{g_2'}{g_2} + \cdots + \alpha_n \frac{g_n'}{g_n}$$
ce qui permet de calculer symboliquement f'.

Exercices :

⇨ Calculer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[3]{1+x^2}}$$

Proposition 5. *Soit f une bijection continue d'un intervalle I sur un intervalle J et $y_0 \in J$. Si f est dérivable en $x_0 = f^{-1}(y_0)$, alors f^{-1} est dérivable en y_0 si et seulement si $f'(x_0) \neq 0$. De plus, si tel est le cas :*
$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Proposition 6. *Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$ et $x_0 \in \mathcal{D}_f$.*

— *Alors $\overline{f}$ est dérivable en x_0 si et seulement si f l'est. De plus, si tel est le cas :*
$$\overline{f}\,'(x_0) = \overline{f'(x_0)}$$

— *De même, f est dérivable en x_0 si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. De plus, si tel est le cas :*
$$f'(x_0) = \mathrm{Re}(f)'(x_0) + i\,\mathrm{Im}(f)'(x_0)$$

— *Enfin, si f est dérivable en x_0, il en est de même pour e^f et :*
$$\left(e^f\right)'(x_0) = f'(x_0)\, e^{f(x_0)}$$

Exercices :

⇨ Calculer
$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int (x+1) \sin x \,\mathrm{d}x$$

1.3 Fonction dérivée, dérivées successives

Définition 4. *Si f est une fonction, on note $\mathcal{D}_{f'}$ l'ensemble des points $x \in \mathcal{D}_f$ en lesquels f est dérivable. Si $\mathcal{D}_{f'} \neq \varnothing$, on définit la fonction dérivée de f, notée f', par :*
$$\begin{array}{rccl} f' : \mathcal{D}_{f'} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \text{(ou } \mathbb{C}\text{)} \\ x & \longmapsto & f'(x) & \end{array}$$

Définition 5. *Si f est une fonction, on définit par récurrence la dérivée n-ième de f (lorsqu'elle existe) de la manière suivante :*

— *On pose $f^{(0)} = f$.*

— *Si $n \in \mathbb{N}$, on définit $f^{(n+1)}$ comme étant la dérivée (lorsqu'elle existe) de $f^{(n)}$.*

Si $x_0 \in \mathcal{D}_f$, on dit que f est dérivable n fois en x_0 lorsque $f^{(n)}$ est définie en x_0 ; cette notion est locale en x_0.

Remarques :

⇨ On dit qu'une fonction est dérivable n fois lorsqu'elle est dérivable n fois en tout point de son domaine de définition.

Proposition 7. *Soit f et g deux fonctions dérivables n fois.*
- *Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors $\lambda f + \mu g$ est dérivable n fois et*
$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (\lambda f + \mu g)^{(n)}(x) = \lambda f^{(n)}(x) + \mu g^{(n)}(x)$$
- *fg est dérivable n fois et*
$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$
Cette formule est appelée formule de Leibnitz.
- *Si g ne s'annule pas, alors f/g est dérivable n fois.*

Proposition 8. *Si f et g sont deux fonctions dérivables n fois, alors $g \circ f$ est dérivable n fois.*

Remarques :

⇨ Si f est dérivable n fois sur $\mathbb{R}$, la fonction g d'expression $f(ax)$ est dérivable n fois et
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g^{(n)}(x) = a^n f^{(n)}(ax)$$

Exercices :

⇨ Donner la dérivée n-ième des fonctions $x \mapsto x^2 f(x)$ et $x \mapsto f(x)\, e^x$.

⇨ Calculer la dérivée n-ième de la fonction $x \mapsto \cos^3 x$.

⇨ Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{-x^2}$$
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est bornée.

Proposition 9. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J dérivable n fois. Alors f^{-1} est dérivable n fois si et seulement si*
$$\forall x \in I \quad f'(x) \neq 0$$

1.4 Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$

Définition 6. *Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ lorsqu'elle est dérivable n fois et sa dérivée n-ième est continue. Si $\mathcal{D}$ est une partie de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}^n(\mathcal{D}, \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)) l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) de classe $\mathcal{C}^n$.*

Remarques :

⇨ Les fonctions de classe $\mathcal{C}^0$ sont les fonctions continues.

⇨ Une fonction peut être dérivable sur $\mathbb{R}$ sans que sa dérivée soit continue. Par exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas continue en 0.

⇨ Si on note $\mathcal{D}^n$ l'ensemble des fonctions dérivables n fois, on a
$$\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{D}^1 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{D}^2 \supset \mathcal{C}^2 \cdots$$
On peut montrer que toutes ces inclusions sont strictes.

⇨ Si A est une partie de $\mathcal{D}_f$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur A lorsque la restriction de f à A est de classe $\mathcal{C}^n$.

Définition 7. *On dit qu'une fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ lorsqu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Remarques :

⇨ Une fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si et seulement si elle est dérivable n fois quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 10. *Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.*
- *Si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors $\lambda f + \mu g$ est de classe $\mathcal{C}^n$.*
- *fg est de classe $\mathcal{C}^n$.*
- *Si g ne s'annule pas, alors f/g est de classe $\mathcal{C}^n$.*

Proposition 11. *La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ est de classe $\mathcal{C}^n$.*

Définition 8. *Soit f une bijection de l'intervalle I sur l'intervalle J et $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. On dit que f est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme de I sur J lorsque f et f^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^n$.*

Proposition 12. *Soit $n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Une bijection f de classe $\mathcal{C}^n$ de l'intervalle I sur l'intervalle J est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme si et seulement si f' ne s'annule pas.*

Exercices :

⇨ Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^5(x) + f(x) + x = 0$$

⇨ Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ qui à x associe xe^x. Montrer que f est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme.

2 Théorème de Rolle et applications

2.1 Extremum local

Définition 9. *Soit f une fonction réelle et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que :*

— *f présente un maximum global en x_0 lorsque :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

— *f présente un maximum local en x_0 lorsque :*

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \leqslant f(x_0)$$

— *f présente un minimum global en x_0 lorsque :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(x) \geqslant f(x_0)$$

— *f présente un minimum local en x_0 lorsque :*

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow f(x) \geqslant f(x_0)$$

Remarques :

⇨ On peut indifféremment utiliser « maximums » et « maxima » pour le pluriel de « maximum ».

Proposition 13. *Soit f une fonction admettant un extremum local en un point x_0 intérieur à $\mathcal{D}_f$. Si elle est dérivable en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.*

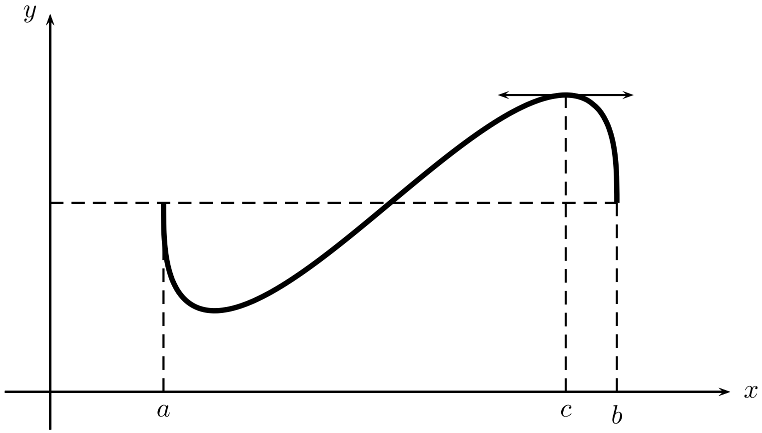
Remarques :

⇨ Attention, ce n'est pas parce que f' s'annule en x_0 que f y admet un extremum local. Par exemple la fonction d'expression x^3 a une dérivée qui s'annule en 0 mais n'admet pas d'extremum local en ce point.

⇨ Les extremums locaux d'une fonction f définie sur $\mathcal{D}$ sont donc à chercher parmi les bornes de $\mathcal{D}$, les points où f n'est pas dérivable et ceux où la dérivée de f est nulle.

2.2 Théorème de Rolle, accroissements finis

Théorème 1. *Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*



Exercices :

⇨ Soit f une fonction dérivable n fois sur l'intervalle I admettant $n+1$ zéros. Montrer que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur I. Retrouver le fait qu'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ degré n admet au plus n racines réelles.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$\forall x \in [0,1] \quad f(x) = x^n (1-x)$$

Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Remarques :

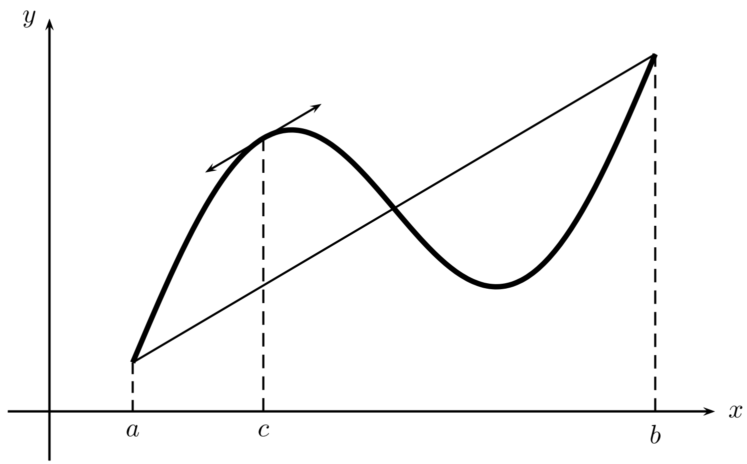
⇨ Cette proposition est fausse si f est à valeurs complexes. Par exemple, si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = e^{ix}$$

alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, $f(0) = f(2\pi)$ mais f' ne s'annule pas.

Théorème 2. *Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Remarques :

⇨ Remarquons que le taux d'accroissement $(f(b)-f(a))/(b-a)$ est une grandeur invariante par échange de a et b ; l'hypothèse $a < b$ est donc inutile dans ce théorème. De plus, comme $c \in$ « $]a,b[$ », il arrive de l'écrire $c = \theta a + (1-\theta) b$ où $\theta \in]0,1[$.

Proposition 14. *Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. On suppose qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall x \in]a,b[\quad m \leqslant f'(x) \leqslant M$$

Alors

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b-a)$$

Proposition 15. *Soit f une fonction réelle (ou complexe) dérivable sur un intervalle I. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que*

$$\forall x \in I \quad |f'(x)| \leqslant M$$

Alors f est M-Lipschitzienne.

Remarques :

⇨ Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment est lipschitzienne.

⇨ On dit qu'une fonction f est contractante lorsqu'elle est M-Lipschitzienne avec $M < 1$. Si f est contractante sur un intervalle I qu'elle laisse stable et si elle admet un point fixe $x_0 \in I$, alors, quel que soit $u_0 \in I$, la suite (u_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers x_0.

Exercices :

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que la suite (u_n) définie par

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \cos(u_n)$$

est convergente.

2.3 Dérivation et monotonie

Proposition 16. *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I. Alors*

— *f est croissante si et seulement si*

$$\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$$

— *f est décroissante si et seulement si*

$$\forall x \in I \quad f'(x) \leqslant 0$$

— *f est constante si et seulement si*

$$\forall x \in I \quad f'(x) = 0$$

Remarques :

⇨ Pour montrer que f est croissante sur I, il suffit de montrer qu'elle est continue sur I, dérivable sur l'intérieur de I et que f' est positif sur cet intérieur. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \geqslant 0 \quad f(x) = \sqrt{x} e^{-x}$$

est croissante sur $[0, 1/2]$.

⇨ Le dernier point de cette proposition reste vrai lorsque f est une fonction à valeurs complexes.

Exercices :

⇨ Rechercher les extremums de la fonction d'expression $|x(x-1)|$ sur $[0,2]$.

⇨ Calculer

$$\inf_{x,y>0} \frac{\sqrt{x+y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

⇨ Soit $\alpha > 0$. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est α-Hölderienne lorsqu'il existe $C \geqslant 0$ tel que

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leqslant C |x-y|^{\alpha}$$

Montrer que si $\alpha > 1$, alors f est constante.

Proposition 17. *Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle I. Alors f est strictement croissante si et seulement si*

— $\forall x \in I \quad f'(x) \geqslant 0$

— *Il n'existe pas d'intervalle non trivial sur lequel f' est nulle.*

Remarques :

⇨ Rappelons au passage qu'une fonction croissante qui n'est pas strictement croissante est constante sur un intervalle non trivial.

2.4 Théorème de la limite de la dérivée

Proposition 18.

- *Soit f une fonction réelle (ou complexe) définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que*

$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} l \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}\text{)}$$

Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

- *Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que*

$$f'(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} \pm\infty$$

Alors

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} \pm\infty$$

Autrement dit, le graphe de f admet une demi-tangente verticale en x_0. En particulier, la fonction f n'est pas dérivable en x_0.

Exercices :

⇨ Montrer que

$$\frac{\operatorname{Arcsin}(-1+h) + \frac{\pi}{2}}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} +\infty$$

Proposition 19. *Soit f une fonction réelle (ou complexe) définie sur un intervalle I, $x_0 \in I$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f est continue sur I, de classe $\mathcal{C}^p$ sur $I \setminus \{x_0\}$ et que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, il existe $a_k \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tel que*

$$f^{(k)}(x) \xrightarrow[\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}]{} a_k$$

Alors f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad f^{(k)}(x_0) = a_k$$

Exercices :

⇨ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.