DM7 : Corrigé des sous-groupes de $(\mathbb{R},+)$

1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Mq $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$

- $\alpha\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$
- $0 \in \alpha\mathbb{Z}$: En effet, $0 = 0 \cdot \alpha \in \alpha\mathbb{Z}$
- $\alpha\mathbb{Z}$ est stable par $+$: Soit $x_1, x_2 \in \alpha\mathbb{Z}$. Alors il existe $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x_1 = k_1\alpha$ et $x_2 = k_2\alpha$. Alors
$$x_1 + k_2 = \underbrace{(k_1+k_2)}_{\in \mathbb{Z}}\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$$
- $\alpha\mathbb{Z}$ est stable par opposé : Soit $x \in \alpha\mathbb{Z}$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = k\alpha$. Donc
$$-x = \underbrace{(-k)}_{\in \mathbb{Z}}\alpha \in \alpha\mathbb{Z}$$

En conclusion, $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$

Remarque : Pour gagner du temps, on peut regrouper les deux derniers points et montrer que si $x_1, x_2 \in \alpha\mathbb{Z}$ alors $x_1 - x_2 \in \alpha\mathbb{Z}$

2) Mq $A = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

- $A \subset \mathbb{R}$
- $0 \in A$: En effet $0 = 0 + 0\sqrt{3} \in A$
- A est stable par $+$: Soit $x_1, x_2 \in A$. Alors, il existe $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}$ tels que
$$x_1 = a_1 + b_1\sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = a_2 + b_2\sqrt{3}$$
Donc $$x_1 + x_2 = \underbrace{(a_1+a_2)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(b_1+b_2)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{3} \in A.$$
- A est stable par opposé : Soit $x \in A$. Alors, il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a + b\sqrt{3}$. Donc
$$-x = \underbrace{(-a)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{(-b)}_{\in \mathbb{Z}}\sqrt{3} \in A.$$

Donc A est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$

3) Supposons qu'il existe G un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ vérifiant simultanément $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

- <u>Si $\alpha = 0$</u> : Alors $G = \{0\}$. Donc G n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.
- <u>Si $\alpha \neq 0$</u> : On pose $\beta = |\alpha| > 0$. Alors $\beta = \pm\alpha$, donc.

$$\begin{aligned} \alpha\mathbb{Z} &= \{k\alpha : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{k\beta : k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \beta\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Mq $\beta\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$. On raisonne par l'absurde et on suppose que $\beta\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Alors, il existe $x \in \beta\mathbb{Z}$ tel que $x \in]0, \beta[$. Comme $x \in \beta\mathbb{Z}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = k\beta$. Donc

$$0 < k\beta < \beta$$

donc $\quad 0 < k < 1 \quad$ car $\beta > 0$.

C'est absurde car $k \in \mathbb{Z}$. Donc $\alpha\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

En conclusion, il n'existe aucun sous-groupe G de $(\mathbb{R},+)$ vérifiant $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

4) Si $G = \{0\}$, alors $G = 0\mathbb{Z}$, donc G vérifie $\mathcal{P}_1$.

5.a) On suppose dans cette question que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ différent de $\{0\}$. On pose

$$G^+ = \mathbb{R}^{+*} \cap G.$$

Montrons que G^+ admet une borne inférieure.

- <u>G^+ est non vide</u> : En effet, $G = \{0\}$ donc il existe $x \in G$ tel que $x \neq 0$.
  - Si $x > 0$, alors $x \in G^+$
  - Sinon, $-x > 0$. Or G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ donc $-x \in G$. Donc $-x \in G^+$
- <u>G^+ est minoré</u> : En effet, 0 minore G^+

Donc G^+ est non vide minoré. Il admet donc une borne inférieure α.

5.b) . Si $G=\mathbb{Z}$, alors $G^+=\mathbb{N}^*$. Donc G^+ admet un plus petit élément qui est 1. Donc $\alpha=\inf G^+=1$

. Si $G=\mathbb{Q}$, alors $G^+=\mathbb{Q}^{+*}$. Mq $\alpha=0$.

- 0 minore G^+
- Soit $\varepsilon>0$. Alors, puisque $\frac{1}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tq :

$$\forall n\geqslant N\quad \frac{1}{n}\leqslant\varepsilon$$

Donc $\frac{1}{N}\in G^+$ et $\frac{1}{N}\leqslant 0+\varepsilon$.

Donc $0=\inf G^+$.

<u>Remarque</u> : Pour montrer qu'il existe un $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n}\leqslant\varepsilon$ on peut soit utiliser

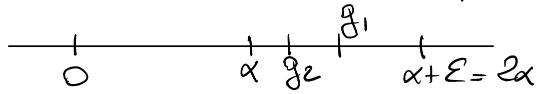
(i) l'archimédisme de $\mathbb{R}$.

(ii) La partie entière en posant $n=E\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+1$

(iii) La convergence de $\left(\frac{1}{n}\right)$ vers 0.

Les points (ii) et (iii) sont des conséquences de (i). et sont parfois "plus naturels". Autant les utiliser. Surtout qu'officiellement, l'archimédisme n'est pas au programme de prépa.

6.a) On suppose que $\alpha>0$. Montrons que $\alpha\in G$



On raisonne par l'absurde et on suppose que $\alpha\notin G$. On pose $\varepsilon=\alpha>0$. Alors, il existe $g_1\in G^+$ tel que

$$g_1<\alpha+\varepsilon$$

Puisque $g_1\in G^+$, que α minore G^+ et que $\alpha\notin G^+$, on en déduit que

$$\alpha<g_1<2\alpha$$

On pose maintenant $\varepsilon=g_1-\alpha>0$. De même, il existe $g_2\in G^+$ tel que

$$\alpha<g_2<\alpha+\varepsilon=g_1$$

On en déduit que :

$$g_1<2\alpha$$
$$-g_2<-\alpha$$

Donc $g_1 - g_2 < \alpha$. Or $g_1, g_2 \in G$ donc $g_1 - g_2 \in G$ car G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Comme $g_1 - g_2 > 0$, on en déduit que $g_1 - g_2 \in G^+$.
C'est absurde car $\alpha = \inf G^+$ et $g_1 - g_2 < \alpha$.

En conclusion, $\alpha \in G$.

6.b) Mq $G = \alpha\mathbb{Z}$

. $\underline{\alpha\mathbb{Z} \subset G}$: En effet, $\alpha \in G$. Or G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ donc

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad n\alpha \in G$$

Donc $\alpha\mathbb{Z} \subset G$.

. $\underline{G \subset \alpha\mathbb{Z}}$: Soit $g \in G$. Montrons que $g \in \alpha\mathbb{Z}$.
On pose $n = E\left(\frac{g}{\alpha}\right)$. Alors

$$n \leqslant \frac{g}{\alpha} < n+1$$

donc $n\alpha \leqslant g < n\alpha + \alpha$ car $\alpha > 0$

donc $0 \leqslant g - n\alpha < \alpha$

Or $g \in G$ et $n\alpha \in G$, donc $g - n\alpha \in G$ car G est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$. Or $0 \leqslant g - n\alpha < \alpha$, et $\alpha = \inf G^+$, donc $g - n\alpha = 0$. Donc $g = n\alpha$.
Donc $g \in \alpha\mathbb{Z}$.

En conclusion $G = \alpha\mathbb{Z}$.

7) On suppose que $\alpha = 0$. Montrons que G est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $0 = \inf G^+$, il existe $g \in G^+$ tel que $g \leqslant \varepsilon$. Donc $0 < g \leqslant \varepsilon$.
On pose $n = E(x/g)$. Alors

$$n \leqslant \frac{x}{g} < n+1$$

donc $ng \leqslant x < ng + g$.

donc $0 \leqslant x - ng < g$.

donc $|x - \underbrace{ng}_{\in G}| < g \leqslant \varepsilon$

On en déduit que G est dense dans $\mathbb{R}$.

8a) Montrons qu'il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} = \alpha\mathbb{Z}$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'un tel α existe.

Puisque $2\pi = 0 + 1 \times 2\pi \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$, on en déduit qu'il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $2\pi = k_1 \cdot \alpha$.
De même, il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $1 = k_2 \cdot \alpha$. (car $1 = 1 + 0 \times 2\pi$). De plus $k_2 \neq 0$ car $1 \neq 0$. Donc

$$\pi = \frac{1}{2} \frac{2\pi}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{k_1 \alpha}{k_2 \alpha} = \frac{k_1}{2k_2} \in \mathbb{Q}$$

C'est absurde car $\pi \notin \mathbb{Q}$.

8b). Montrons que $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$

. $\underline{\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}}$

. $\underline{0 \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}}$: En effet $0 = \underbrace{0}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{0}_{\in \mathbb{Z}} \times 2\pi$.

. Stabilité : Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$. Alors il existe $m_1, m_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x_1 = m_1 + 2\pi n_1 \quad x_2 = m_2 + 2\pi n_2$$

Donc $x_1 - x_2 = \underbrace{(m_1 - m_2)}_{\in \mathbb{Z}} + 2\pi \underbrace{(n_1 - n_2)}_{\in \mathbb{Z}}$.

Donc $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.

Donc $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Or il n'est pas de la forme $\alpha\mathbb{Z}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Donc il est dense dans $\mathbb{R}$.

8c) Mq $A = \{\cos(n) ; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Soit $x \in [-1, 1]$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos\theta$. Or $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc deux suites d'éléments de $\mathbb{Z}$, (a_n) et (b_n) telles que

$$a_n + 2\pi b_n \xrightarrow[n\infty]{} \theta.$$

Donc, puisque cos est continue en θ,

$$\cos(a_n + 2\pi b_n) \xrightarrow[n\infty]{} \cos\theta = x$$

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \cos(a_n + 2\pi b_n) = \cos(a_n) \quad \text{car } b_n \in \mathbb{Z}$$
$$= \cos(|a_n|) \quad \text{car cos est paire}$$

Donc

$$\underbrace{\cos(|a_n|)}_{\in A} \xrightarrow[n\infty]{} x.$$

Donc A est dense dans $[-1, 1]$.

8.d) Mq $\mathcal{B} = \{\sin(n) \,;\, n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Soit $x \in [-1, 1]$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \sin \theta$. Or $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Il existe donc deux suites d'éléments de $\mathbb{Z}$, (a_n) et (b_n) telles que

$$a_n + 2\pi b_n \xrightarrow[n\infty]{} \theta.$$

Donc, puisque sin est continue en θ,

$$\sin(a_n + 2\pi b_n) \xrightarrow[n\infty]{} \sin \theta = x$$

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sin(a_n + 2\pi b_n) = \sin(a_n) \quad \text{car } b_n \in \mathbb{Z}$$

Donc

$$\underbrace{\sin(a_n)}_{\in \mathcal{B}} \xrightarrow[n\infty]{} x.$$

Donc $\mathcal{B}$ est dense dans $[-1, 1]$.

<u>Remarque:</u> On peut démontrer que

$$C = \{\sin(n) : n \in \mathbb{N}\}$$

est aussi dense dans $[-1, 1]$. Vous pouvez essayer de le prouver.

9) <u>Remarque:</u> La fin de cette partie ne doit pas être considérée comme une application du théorème de classification démontré au 1.1.1. Tout peut se démontrer de manière élémentaire.

9.a) Mq $A = \{e^{i\pi r} ; r \in \mathbb{Q}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.

On pose $\varphi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U} \\ \theta \longrightarrow e^{i\pi\theta}. \end{array} \right.$

Alors φ est bien à valeurs dans $\mathbb{U}$. En effet, soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $|e^{i\theta}| = 1$. De plus, φ est un morphisme de $(\mathbb{R},+)$ dans $(\mathbb{U},\cdot)$. En effet

$$\forall \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \quad \varphi(\theta_1+\theta_2) = e^{i\pi(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\pi\theta_1} e^{i\pi\theta_2} = \varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)$$

Donc $A = \operatorname{Im} \varphi$ est un sous-groupe de $(\mathbb{U},\cdot)$.

<u>Remarque</u>: On peut aussi bien entendu faire une preuve "classique" qui n'est ni plus courte, ni plus longue. Mais c'est toujours bon de changer de méthode

9.b). Soit $z \in A$. Alors il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$z = e^{i\pi\frac{p}{q}}$$

Alors $z^{2q} = \left(e^{i\pi\frac{p}{q}}\right)^{2q} = e^{i\pi\frac{p}{q}2q} = e^{ip2\pi} = 1$

Donc z est d'ordre fini.

9.c) Mq A est dense dans $\mathbb{U}$. Soit $z \in A$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\pi\theta}$. Or $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, donc il existe une suite (r_n) de rationnels telle que

$$r_n \xrightarrow[n\infty]{} \theta$$

$$\text{donc} \quad e^{ir_n\pi} \xrightarrow[n\infty]{} e^{i\pi\theta} = z.$$

car φ est continue. Donc A est dense dans $\mathbb{U}$.