Exercice 2.3

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On définit la fonction φ sur $[a,b]$ par :

$$\forall x\in[a,b] \qquad \varphi(x) = \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(x)-g(a)\big) - \big(g(b)-g(a)\big)\big(f(x)-f(a)\big)$$

D'après les théorèmes usuels, φ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $[a,b]$. De plus :

$$\varphi(a) = \big(f(b)-f(a)\big)\underbrace{\big(g(a)-g(a)\big)}_{=0} - \big(g(b)-g(a)\big)\underbrace{\big(f(a)-f(a)\big)}_{=0}$$

$$= 0$$

$$\varphi(b) = \big(f(b)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big) - \big(g(b)-g(a)\big)\big(f(b)-f(a)\big)$$

$$= 0$$

Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c\in]a,b[$ tel que $\varphi'(c)=0$. Or :

$$\forall x\in]a,b[\qquad \varphi'(x) = \big(f(b)-f(a)\big)g'(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f'(x)$$

Donc $\quad \big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(c)$.