Exercice 23.17

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $E_1, \dots, E_n, F_1, \dots, F_n$ des sev de E tels que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} E_i = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1,n]\!] \quad E_i \subset F_i$$

Montrons que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ $E_i = F_i$

Soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$ Montrons que $E_{i_0} = F_{i_0}$. On procède par double inclusion. On sait déjà que $E_{i_0} \subset F_{i_0}$. Montrons que $F_{i_0} \subset E_{i_0}$. Soit $x \in F_{i_0}$. Alors

$$x \in \bigoplus_{i=1}^{n} F_i = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i$$

donc il existe $x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n$ tels que

$$x = x_1 + \dots + x_n.$$

Or comme $E_i \subset F_i$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$\underbrace{x_1}_{\in F_1} + \dots + \underbrace{(x_{i_0} - x)}_{\in F_{i_0}} + \dots + \underbrace{x_n}_{\in F_n} = 0.$$

Comme la somme $\bigoplus_{i=1}^{n} F_i$ est directe, on en déduit que tous ces termes sont nuls. En particulier $x_{i_0} - x = 0$. Donc $x = x_{i_0} \in E_{i_0}$.

Donc $E_{i_0} = F_{i_0}$. Cela étant vrai quel que soit $i_0 \in [\![1,n]\!]$

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \quad E_i = F_i$$

Exercice 24.16

1) On pose $T := 3X^3 - X^2 - X - 1$. Alors $T(1) = 0$, donc 1 est racine de T. On factorise donc T par $X-1$

$$\begin{array}{r|l}
3X^3 - X^2 - X - 1 & X-1 \\ \cline{2-2}
3X^3 - 3X^2 & 3X^2 + 2X + 1 \\ \cline{1-1}
2X^2 - X - 1 & \\
2X^2 - 2X & \\ \cline{1-1}
X - 1 & \\
X - 1 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Donc $3X^3 - X^2 - X - 1 = (X-1)\underbrace{(3X^2+2X+1)}_{\Delta = 4 - 3\times 4 < 0}$

Donc 1 est l'unique racine réelle de T. Comme $3X^2+2X+1$ est à coefficients réels et que son discriminant est <0, on en déduit que ses racines sont conjuguées. On les noté α et $\bar{\alpha}$

On a $\alpha + \bar{\alpha} = -\frac{2}{3}$ et $\alpha\bar{\alpha} = \frac{1}{3}$. (relations coefficients-racines)

2) a) On pose

$$L_1 := (X-1)(X-\alpha) \qquad L_2 := (X-1)(X-\bar{\alpha}) \qquad L_3 := (X-\alpha)(X-\bar{\alpha})$$

Montrons que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

- Ce sont des polynômes de degrés 2 donc ce sont des éléments de $\mathbb{C}_2[X]$.
- De plus, la famille est libre. En effet, soit $\lambda, \mu, \delta \in \mathbb{C}$ tels que

$$\lambda L_1 + \mu L_2 + \delta L_3 = 0$$

$$\lambda (X-1)(X-\alpha) + \mu (X-1)(X-\bar{\alpha}) + \delta (X-\alpha)(X-\bar{\alpha}) = 0$$

On évalue en $\bar{\alpha}$ et on obtient $\lambda \underbrace{(\bar{\alpha}-1)}_{\neq 0}\underbrace{(\bar{\alpha}-\alpha)}_{\neq 0} = 0$. Donc $\lambda = 0$.
En évaluant en α, on obtient $\mu = 0$ et en évaluant en 1 on obtient $\delta = 0$

- Enfin elle a 3 éléments et $\dim \mathbb{C}_2[X] = 3$. Comme elle est libre, c'est une base de $\mathbb{C}_2[X]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On effectue la division euclidienne de X^n par T. Il existe donc $P \in \mathbb{C}[X]$ et $R \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$X^n = P.T + R \quad \text{et} \quad \deg R < 3.$$

On substitue f à X et on obtient

$$f^n = P(f)\underbrace{T(f)}_{=0} + R(f)$$
$$= R(f)$$

Comme $R \in \mathbb{C}_2[X]$, il existe $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}$ tels que $R = a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3$. Donc

$$f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f)$$

On souhaite déterminer $a_n, b_n, c_n \in \mathbb{C}$. On a.

$$X^n = PT + a_n L_1 + b_n L_2 + c_n L_3.$$

On évalue en $\overline{\alpha}$ et on obtient $\overline{\alpha}^n = a_n . (\alpha - 1)(\overline{\alpha} - \alpha)$
Donc

$$a_n = \frac{\overline{\alpha}^n}{(-1)(\overline{\alpha} - \alpha)}$$

De même $\qquad b_n = \dfrac{\alpha^n}{(\alpha-1)(\alpha-\overline{\alpha})}$ et $c_n = \dfrac{1}{(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})}$

2.c) Montrons que $|\alpha| < 1$ et $|\overline{\alpha}| < 1$. On a $|\alpha| = |\overline{\alpha}|$ et

$$\alpha \overline{\alpha} = \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } |\alpha||\overline{\alpha}| = \frac{1}{3}$$

$$\text{donc } |\alpha|^2 = \frac{1}{3} \quad \text{donc } |\alpha| = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$$

Donc $|\alpha| < 1$ et $|\overline{\alpha}| < 1$. Donc $\alpha^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$ et $\overline{\alpha}^n \xrightarrow[n\infty]{} 0$.
On en déduit que

$$a_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \quad b_n \xrightarrow[n\infty]{} 0 \text{ et } c_n = \frac{1}{(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})}$$

3) Intuitivement, on a $f^n = a_n L_1(f) + b_n L_2(f) + c_n L_3(f) \xrightarrow[n\infty]{} c L_3(f)$
Donc $(f^n)^2 \xrightarrow[n\infty]{} (c L_3(f))^2$. Or

$$f^{2n} = a_{2n} L_1(f) + b_{2n} L_2(f) + c_{2n} L_3(f) \xrightarrow[n\infty]{} c L_3(f)$$

Donc $(c L_3(f))^2 = c L_3(f)$ ce qui prouve que $c L_3(f)$ est un projecteur. Malheureusement dire qu'une suite d'endomorphismes tend vers un autre n'a aucun sens. Ce raisonnement n'est donc pas valide.

On est donc amenés à calculer. On pose $h := c L_3(f)$.
Alors.

$$\begin{aligned} h^2 &= c^2 . (L_3(f))^2 \\ &= c^2 . \left(\frac{1}{3}(3f^2 + 2f + Id)\right)^2 \end{aligned}$$

Or $T(f) = 0$ donc $(f - Id)(3f^2 + 2f + Id) = 0$, donc
$f(3f^2 + 2f + Id) = 3f^2 + 2f + Id$. Donc, en composant à gauche par f.

$$\begin{aligned} f^2(3f^2 + 2f + Id) &= f(3f^2 + 2f + Id) \\ &= 3f^2 + 2f + Id \end{aligned}$$

Donc

$$h^2 = \frac{1}{9}c^2\left(3f^2(3f^2+2f+Id) + 2f(3f^2+2f+Id) + (3f^2+2f+Id)\right)$$
$$= \frac{2}{3}c^2(3f^2+2f+Id) = 2c \cdot cL_3(f).$$

Or $\quad 2c = \dfrac{2}{(1-\alpha)(1-\bar\alpha)} = \dfrac{2}{1-(\alpha+\bar\alpha)+\alpha\bar\alpha} = \dfrac{2}{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 1$

Donc $h^2 = h$. Donc h est un projecteur.

Exercice 24.20

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

1) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et g un projecteur de E.
Montrer que $\text{Ker}(f\circ g) = \text{Ker}\, g \oplus (\text{Ker} f \cap \text{Im}\, g)$

. $\text{Ker}\, g \subset \text{Ker}(f\circ g)$: En effet, soit $x \in \text{Ker}\, g$. Alors $g(x) = 0$
Donc $f(g(x)) = 0$ donc $x \in \text{Ker}(f\circ g)$.

. $\text{Ker} f \cap \text{Im}\, g \subset \text{Ker}(f\circ g)$: En effet, soit $x \in \text{Ker} f \cap \text{Im}\, g$.
Alors $f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = g(y)$. Montrons que $f(g(x)) = 0$.

On a :
$$f(g(x)) = f(g(g(y))) = f((g\circ g)(y))$$
$$= f(g(y)) \text{ car } g\circ g = g \text{ car } g \text{ est un projecteur}$$
$$= f(x) = 0.$$

. Mq $\text{Ker}\, g \cap (\text{Ker} f \cap \text{Im}\, g) = \{0\}$.

. $\supset$ est évident

. $\subset$: Soit $x \in \text{Ker}\, g \cap (\text{Ker} f \cap \text{Im}\, g)$. Mq $x = 0$.
On a $g(x) = 0$, $f(x) = 0$ et il existe $y \in E$ tel que $x = g(y)$. Comme $g(x) = 0$, $g(g(y)) = 0$. Or $g\circ g = g$ donc $g(y) = 0$. Donc $x = 0$

. Mq $\text{Ker}(f\circ g) = \text{Ker}\, g + (\text{Ker} f \cap \text{Im}\, g)$

Analyse : Soit $x \in \text{Ker}(f\circ g)$. On suppose qu'il existe $a \in \text{Ker}\, g$ et $b \in \text{Ker} f \cap \text{Im}\, g$ tel que

$$x = a + b$$

Alors $g(x) = g(a) + g(b)$. Or $a \in \operatorname{Ker} g$ donc $g(a) = 0$.
Donc $g(x) = g(b)$. Or $b \in \operatorname{Im} g$ donc il existe $c \in E$ tel que $b = g(c)$. Donc

$$\begin{aligned} g(x) &= g(g(c)) \\ &= g^2(c) \\ &= g(c) \quad \text{car } g^2 = g \\ &= b \end{aligned}$$

Donc $b = g(x)$ et $a = x - b = x - g(x)$.

<u>Synthèse</u> : Soit $x \in \operatorname{Ker}(f \circ g)$. On pose $a = x - g(x)$ et $b = g(x)$. Alors $x = a + b$.

. <u>$a \in \operatorname{Ker} g$</u> : En effet $$\begin{aligned} g(a) &= g(x) - g^2(x) \\ &= g(x) - g(x) \quad \text{car } g^2 = g \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a \in \operatorname{Ker} g$

. <u>$b \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$</u> : En effet $f(b) = f(g(x)) = (f \circ g)(x) = 0$ car $x \in \operatorname{Ker}(f \circ g)$. Donc $b \in \operatorname{Ker} f$.
Enfin $b = g(x) \in \operatorname{Im} g$. Donc $b \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g$.

En conclusion $\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker} g \oplus (\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} g)$

2) Soit f un projecteur et $g \in \mathcal{L}(E)$. Mq

$$\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g)$$

<u>$\subset$</u> : Soit $y \in \operatorname{Im}(f \circ g)$. Mq $y \in \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g)$.
$y \in \operatorname{Im}(f \circ g)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = (f \circ g)(x)$.
Donc $y = f(g(x)) \in \operatorname{Im} f$.
Or

$$y = \underbrace{f(g(x)) - g(x)}_{=:a} + \underbrace{g(x)}_{=:b}.$$

Alors $b \in \operatorname{Im} g$. De plus $f(a) = f^2(g(x)) - f(g(x)) = 0$ car $f^2 = f$. Donc $y \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$.

<u>$\supset$</u> : Soit $y \in \operatorname{Im} f \cap (\operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g)$. Mq $y \in \operatorname{Im}(f \circ g)$.
$y \in \operatorname{Im} f$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
$y \in \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} g$ donc il existe $a \in \operatorname{Ker} f$ et $b \in E$ tels que

$$y = a + g(b)$$

Donc $f(x) = a + g(b)$
Donc $f(f(x)) = f(a) + f(g(b))$
Donc $f(x) = (f \circ g)(b)$ car $f(a) = 0$
Donc $y = (f \circ g)(b)$
Donc $y \in \operatorname{Im}(f \circ g)$.

3) Soit p et q deux projecteurs de E. Mq $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si :

$$\mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im}\, g) \subset \mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker}\, g)$$

On pose $h = Id - g$. Alors h est un projecteur car

$$h^2 = (Id-g)^2 = Id - 2g + g^2 \quad (\text{or } g^2 = g)$$
$$= Id - g = h$$

Donc h est un projecteur. Si g est le projecteur sur A parallèlement à B, h est le projecteur sur B parallèlement à A. D'après les questions 1 et 2

$$\mathrm{Ker}(f \circ h) = \mathrm{Ker}\, h \oplus (\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}\, h)$$
$$\mathrm{Ker}(f \circ (Id-g)) = \mathrm{Ker}(Id-g) \oplus (\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Im}(Id-g))$$
$$\mathrm{Ker}(f - f \circ g) = \mathrm{Im}\, g \oplus (\mathrm{Ker} f \cap \mathrm{Ker}\, g)$$
$$\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f) \cap (\mathrm{Ker} f + \mathrm{Im}\, g)$$

On est donc ramené à prouver que $f \circ g$ est un projecteur si et seulement si

$$\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}(f - f \circ g)$$

$\Rightarrow$ Supposons que $f \circ g$ est un projecteur. Mq $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}(f - f \circ g)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f \circ g)$. Alors il existe $x \in E$ tel que $y = (f \circ g)(x)$. Alors

$$(f - f \circ g)(y) = f(y) - (f \circ g)(y)$$
$$= f(y) - (f \circ g \circ f \circ g)(x)$$
$$= f(y) - (f \circ g)(x) \quad \text{car } (f \circ g)^2 = f \circ g$$
$$= f(y) - y.$$

Or $y = f(g(x))$ donc $y \in \mathrm{Im} f$. Or f est un projecteur donc $f(y) = y$. Donc $(f - f \circ g)(y) = 0$.
Donc $y \in \mathrm{Ker}(f - f \circ g)$.

$\Leftarrow$ On suppose que $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Ker}(f - f \circ g)$. Mq $f \circ g$ est un projecteur, c'est-à-dire que $(f \circ g)^2 = (f \circ g)$.
Soit $x \in E$.

$$(f \circ g)^2(x) = (f \circ g)(\underbrace{(f \circ g)(x)}_{=:y})$$

Alors $y \in \operatorname{Im}(f \circ g)$ donc $y \in \operatorname{Ker}(f - f \circ g)$. Donc

$$(f - f\circ g)(y) = 0$$

donc $f(y) = (f \circ g)(y)$.

Donc

$$(f \circ g)^2(x) = (f\circ g)(y) = f(y) = f((f\circ g)(x))$$

$$= (f^2 \circ g)(x) = (f \circ g)(x) \quad \text{car } f^2 = f.$$

Donc $(f\circ g)^2 = (f \circ g)$. Donc $f \circ g$ est un projecteur.