

COURS : RÉVISIONS D'ANALYSE

Table des matières

1 Fonction réelle d'une variable réelle

1.1	Définition	1
1.2	Symétries, inégalités	1
1.3	Opérations usuelles	2

2 Limites

2.1	Définition intuitive	2
2.2	Limites et opérations usuelles	2
2.3	Techniques de calcul	4
2.4	Limites et inégalités	5

3 Continuité

3.1	Définition, opérations usuelles	5
3.2	Prolongement par continuité	5
3.3	Théorème des valeurs intermédiaires	5

4 Dérivation

4.1	Définition, fonction dérivée	6
4.2	Dérivées et opérations usuelles	6
4.3	Fonctions de classe C^n	7
4.4	Dérivation et monotonie	7

5 Intégration

5.1	Définition, opérations usuelles	8
5.2	Inégalités	8
5.3	Intégration et primitives, calcul de primitives	8

1 Fonction réelle d'une variable réelle

1.1 Définition

Définition 1 (○○○). Soit \mathcal{D}_f une partie de \mathbb{R} . On appelle fonction réelle définie sur \mathcal{D}_f toute application f qui à chaque élément x de \mathcal{D}_f associe un unique réel noté $f(x)$. \mathcal{D}_f est appelé domaine de définition de f .

Remarques :

- ⇒ Deux fonctions f et g sont égales lorsque :
- Elles ont même domaine de définition \mathcal{D} .
 - $\forall x \in \mathcal{D} \quad f(x) = g(x)$

⇒ Il sera essentiel de ne pas confondre une fonction avec son expression. Par exemple parler de la fonction $\sin x$ est une erreur grave ; on parlera plutôt de la fonction définie sur \mathbb{R} qui au réel x associe le réel $\sin x$.

⇒ Par abus de langage, il est courant que les énoncés demandent à l'élève de donner le domaine de définition d'une fonction f donnée par une expression (par exemple \sqrt{x}). Dans ce cas, il faut donner l'ensemble \mathcal{D} des x pour lesquels cette expression à un sens (ici, \mathbb{R}_+). La fonction f sera alors dans la suite du problème la fonction définie sur \mathcal{D} qui à x associe cette expression en x .

1.2 Symétries, inégalités

Définition 2 (○○○). Soit f une fonction définie sur un domaine \mathcal{D}_f symétrique par rapport à 0. On dit que

— f est paire lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(-x) = f(x)$$

— f est impaire lorsque :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad f(-x) = -f(x)$$

Définition 3 (○○○). Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} et T un réel. On dit que T est une période de f lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$$

On dit qu'une fonction est périodique lorsqu'elle admet une période non nulle.

Définition 4 (○○○). Soit f une fonction définie sur \mathcal{D}_f . On dit que :

— f est croissante lorsque :

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

— f est décroissante lorsque :

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$

— f est strictement croissante lorsque :

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad x < y \implies f(x) < f(y)$$

— f est strictement décroissante lorsque :

$$\forall x, y \in \mathcal{D}_f \quad x < y \implies f(x) > f(y)$$

Remarques :

⇒ Les fonctions constantes sont à la fois croissantes et décroissantes. Une fonction qui n’est pas croissante n’est pas forcément décroissante.

1.3 Opérations usuelles

Définition 5 (ooo). Soit f et g deux fonctions définies sur \mathcal{D} .

— Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $\lambda f + \mu g$ par :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda f(x) + \mu g(x)$$

— On définit la fonction fg par :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

— Si f ne s’annule en aucun point de \mathcal{D} , on définit $1/f$ par :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)}$$

Définition 6 (ooo). Soit f et g deux fonctions définies respectivement sur \mathcal{D} et \mathcal{D}' . On suppose que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \in \mathcal{D}'$. On définit alors la fonction $g \circ f$ par :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

1.3.1 Opérations usuelles, symétries et monotonie

Les effets des opérations usuelles sur les propriétés de symétries sont résumés dans les tableaux ci-dessous :

— Combinaison linéaire :

f \ g	paire	impaire
paire	paire	×
impaire	×	impaire

— Produit :

f \ g	paire	impaire
paire	paire	impaire
impaire	impaire	paire

— Inverse :

f	paire	impaire
1/f	paire	impaire

— Composition :

g \ f	paire	impaire
paire	paire	paire
impaire	paire	impaire
×	paire	×

Les effets de opérations usuelles sur les propriétés de monotonie sont résumées dans les tableaux ci-dessous :

— Combinaison linéaire positive :

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	×
décroissante	×	décroissante

— Produit de fonctions positives :

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	×
décroissante	×	décroissante

— Inverse d’une fonction strictement positive ou strictement négative :

f	croissante	décroissante
1/f	décroissante	croissante

— Composition :

f \ g	croissante	décroissante
croissante	croissante	décroissante
décroissante	décroissante	croissante

Remarques :

⇒ Lorsque c’est possible, il est souvent bien plus judicieux de déterminer la monotonie d’une fonction à partir de ces règles plutôt qu’à partir de l’étude du signe de la dérivée. En effet, cette méthode est bien plus rapide et source de beaucoup moins d’erreurs.

Exemples :

⇒ Déterminer la monotonie des fonctions d’expressions

$$\frac{1}{e^x + \sqrt{1+x}}, \quad \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

2 Limites

2.1 Définition intuitive

Définition 7 (ooo). Dans ce cours, on ne définira pas la notion de limite. On se basera sur la notion intuitive suivante :

Étant donné une fonction f et $a, l \in \mathbb{R}$, on dit que $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a , lorsque, quitte à rendre x proche de a , on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l’on souhaite de l . Dans ce cas, on note :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l$$

2.2 Limites et opérations usuelles

2.2.1 Limites usuelles

Les limites usuelles suivantes sont à la base du calcul de limites :

— Fonctions puissances :

$$x^n \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{où } n \in \mathbb{N}^*) \quad x^n \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases} \quad (\text{où } n \in \mathbb{N}^*)$$

$$x^n \xrightarrow{x \rightarrow a} a^n \quad (\text{où } n \in \mathbb{N} \text{ et } a \in \mathbb{R})$$

— Fonction exponentielle et croissances comparées :

$$e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$$

$$e^x \xrightarrow{x \rightarrow a} e^a \quad \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad (\text{où } \alpha, \beta > 0) \quad x^n e^{\alpha x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \quad (\text{où } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \alpha > 0)$$

— Fonction logarithme et croissances comparées :

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\infty$$

$$\ln x \xrightarrow{x \rightarrow a} \ln a \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\frac{\ln^\alpha x}{x^\beta} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{où } \alpha, \beta > 0) \quad x^\alpha \ln^n x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad (\text{où } \alpha > 0 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*)$$

2.2.2 Opérations usuelles

Proposition 1 (○○○). Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a . On suppose que $f(x)$ et $g(x)$ tendent respectivement vers l_f et l_g lorsque x tend vers a . Alors :

— Si λ et μ sont deux réels :

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \lambda l_f + \mu l_g$$

— On a :

$$f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} l_f l_g$$

— Si $l_f \neq 0$, $1/f$ est définie au voisinage de a et :

$$\frac{1}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{1}{l_f}$$

— Plus généralement, si $l_g \neq 0$, f/g est définie au voisinage de a et :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{l_f}{l_g}$$

Proposition 2 (○○○). Soit f et g deux fonctions. On suppose que $f(x)$ tend vers $l_f \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers $a \in \mathbb{R}$ et que g tend vers $l_g \in \overline{\mathbb{R}}$ lorsque x tend vers l_f . Alors $g(f(x))$ tend vers l_g lorsque x tend vers a .

De nombreux autres propositions existent concernant les limites finies et infinies. Elles sont résumées dans les tableaux ci-dessous où la présence d'une croix représente une forme indéterminée.

— Somme :

Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et l_g , alors $f + g$:

$l_f \backslash l_g$	$-\infty$	$l_g \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	\times
$l_f \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l_f + l_g$	$+\infty$
$+\infty$	\times	$+\infty$	$+\infty$

— Opposé :

Si f est une fonction admettant pour limite l , alors $-f$:

l	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
	$+\infty$	$-l$	$-\infty$

— Multiplication par un scalaire :

Si f est une fonction admettant pour limite l et λ est un réel, alors λf :

$\lambda \backslash l$	$-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$\lambda < 0$	$+\infty$	λl	$-\infty$
$\lambda > 0$	$-\infty$	λl	$+\infty$

— Produit :

Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et l_g , alors $f g$:

$l_f \backslash l_g$	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	\times	$-\infty$	$-\infty$
$l_f < 0$	$+\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$-\infty$
$l_f = 0$	\times	0	0	0	\times
$l_f > 0$	$-\infty$	$l_f l_g$	0	$l_f l_g$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	\times	$+\infty$	$+\infty$

— Inverse :

Si f est une fonction admettant pour limite l , alors $1/f$:

l	$-\infty$	$l < 0$	0^-	0	0^+	$l > 0$	$+\infty$
	0	$1/l$	$-\infty$	\times	$+\infty$	$1/l$	0

— Exponentiation :

Si f et g sont deux fonctions admettant respectivement pour limites l_f et l_g , alors f^g :

$\begin{array}{c} l_g \\ \backslash \\ l_f \end{array}$	$-\infty$	$l_g < 0$	0	$l_g > 0$	$+\infty$
0	$+\infty$	$+\infty$	\times	0	0
$0 < l_f < 1$	$+\infty$	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	0
1	\times	1	1	1	\times
$1 < l_f$	0	$l_f^{l_g}$	1	$l_f^{l_g}$	$+\infty$
$+\infty$	0	0	\times	$+\infty$	$+\infty$

Exemples :

\Rightarrow Montrer que 0^0 et $1^{+\infty}$ sont des formes indéterminées.

2.3 Techniques de calcul

Exemples :

\Rightarrow Calculer les limites des expressions suivantes :

$$2x^3 - x^2 + 1 \quad \text{en } +\infty, \quad \frac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 1} \quad \text{en } -\infty$$

\Rightarrow Calculer les limites des expressions suivantes :

$$e^x - x^5 \quad \text{en } +\infty, \quad \frac{e^x \ln x - x^{1000} + e^{2x}}{e^{2x} + \ln x + x} \quad \text{en } +\infty$$

\Rightarrow Calculer les limites des expressions suivantes :

$$x \ln x \quad \text{en } 0, \quad \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} \quad \text{en } 0, \quad \frac{e^{e^x}}{x^2} \quad \text{en } +\infty$$

\Rightarrow Calculer les limites des expressions suivantes :

$$\frac{\ln(2 - 2 \sin x)}{1 - 2 \cos(2x)} \quad \text{en } \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\ln(2 \cos x)}{e^{\sin \frac{x}{2}} - \sqrt{e}} \quad \text{en } \frac{\pi}{3}$$

Proposition 3 (ooo).

— Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a . On suppose qu'au voisinage de ce point :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

et que $f(x)$ et $h(x)$ admettent la même limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a . Alors $g(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a .

— Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a . On suppose qu'au voisinage de ce point :

$$f(x) \leq g(x)$$

Alors, si $f(x)$ tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers a , il en est de même pour $g(x)$. De même, si $g(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers a , il en est de même pour $f(x)$.

— Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a et $l \in \mathbb{R}$. On suppose qu'au voisinage de a :

$$|f(x) - l| \leq g(x)$$

et que $g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a . Alors $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a .

Remarques :

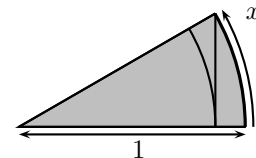
\Rightarrow Soit f, g et h trois fonctions définies au voisinage de a , telles que, sur ce voisinage :

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

On suppose que $f(x)$ et $h(x)$ admettent respectivement pour limite l_f et l_h lorsque x tend vers a . On pourrait être tenté d'affirmer que la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers a est comprise entre l_f et l_h . C'est une erreur *grossière*. En effet lorsque l_f et l_h sont distincts, il se peut très bien que $f(x)$ n'ait pas de limite lorsque x tend vers a .

Exemples :

\Rightarrow En encadrant l'aire du triangle entre les aires des deux camemberts,



montrer que $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$.

\Rightarrow Montrer que $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

2.4 Limites et inégalités

Proposition 4 (○○○). Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a . On suppose que $f(x)$ et $g(x)$ admettent respectivement pour limite l_f et $l_g \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a et qu’au voisinage de ce point :

$$f(x) \leqslant g(x)$$

Alors, $l_f \leqslant l_g$.

Remarques :

- ⇒ Remarquons que cet énoncé ne prouve l’existence d’aucune limite. Au contraire, il les suppose et en donne des propriétés.
- ⇒ Attention, il n’existe pas de résultat semblable lorsqu’on remplace l’inégalité large par une inégalité stricte. Par exemple :

$$\forall x > 0 \quad \frac{1}{x} > 0$$

Pourtant $1/x$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ et $0 \not> 0$.

3 Continuité

3.1 Définition, opérations usuelles

Définition 8 (○○○). Soit f une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est continue en x_0 lorsque :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f(x_0)$$

On appelle domaine de continuité de f l’ensemble des points où f est continue.

Remarques :

- ⇒ On dit qu’une fonction f est continue à gauche en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ lorsque

$$f(x) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}]{\hspace{1cm}} f(x_0)$$

On définit de même la notion de continuité à droite. Une fonction est continue en x_0 si et seulement si elle est continue à gauche et à droite en x_0 .

- ⇒ Dans le cas où f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et qu’au moins l’une de ces limite n’est pas $f(x_0)$, on dit que f admet une discontinuité de première espèce en x_0 .

Exemples :

- ⇒ Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - a}{x^2} & \text{si } x < 0 \\ be^x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

soit continue en 0.

Proposition 5 (○○○). Soit f une fonction continue en $x_0 \in \mathcal{D}_f$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d’éléments de \mathcal{D}_f convergeant vers x_0 . Alors :

$$f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$$

Proposition 6 (○○○). Soit f et g deux fonctions continues en x_0 . Alors :

- si λ et μ sont deux réels la fonction $\lambda f + \mu g$ est continue en x_0 .
- la fonction fg est continue en x_0 .
- si $f(x_0) \neq 0$, la fonction f ne s’annule pas au voisinage de x_0 et $1/f$ est continue en x_0 .
- plus généralement, si $g(x_0) \neq 0$, la fonction g ne s’annule pas au voisinage de x_0 , et f/g est continue en x_0 .

Proposition 7 (○○○). Soit f une fonction continue en x_0 et g une fonction continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

3.2 Prolongement par continuité

Définition 9 (○○○). Soit f une fonction et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que f admette une limite finie l en a . On définit alors la fonction \bar{f} sur $\mathcal{D}_{\bar{f}} = \mathcal{D}_f \cup \{a\}$ par :

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\bar{f}} \quad \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \mathcal{D}_f \\ l & \text{si } x = a \end{cases}$$

Cette fonction \bar{f} est continue en a et est appelée prolongement de f par continuité en a .

Exemples :

- ⇒ Étudier le prolongement par continuité en 0 de la fonction d’expression $x \ln x$.

3.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Proposition 8 (○○○).

- Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et $y_0 \in [f(a), f(b)]$. Alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = y_0$.
- Soit f une fonction continue sur l’intervalle $]a, b[$ admettant respectivement pour limite l_a et l_b en a et b et $y_0 \in]l_a, l_b[$. Alors il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = y_0$.

Remarques :

- ⇒ Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d’existence et ne donne aucune information sur l’unicité. Par exemple, lorsqu’il est demandé de montrer qu’il existe une unique solution au problème $f(x) = y_0$, le théorème des valeurs intermédiaires peut être utile pour montrer l’existence d’une solution, mais c’est souvent un argument de stricte monotonie qui permet de montrer son unicité.

Exemples :

⇒ Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_λ sur \mathbb{R}_+^* par

$$\forall x > 0 \quad f_\lambda(x) = \frac{\ln x + \lambda}{1 + x^2}$$

Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'équation $f'_\lambda(x) = 0$ admet une unique solution sur \mathbb{R}_+^* .
En déduire les variations de f_λ .

4 Dérivation

4.1 Définition, fonction dérivée

Définition 10 (ooo). Soit f une fonction et $x_0 \in \mathcal{D}_f$. On dit que f est dérivable en x_0 lorsque :
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$
admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Dans ce cas on note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle nombre dérivé de f en x_0 .

Remarques :

⇒ On dit qu'une fonction f est dérivable à gauche en x_0 lorsque l'expression

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

admet une limite finie lorsque h tend vers 0 par la gauche ; si tel est le cas, cette limite est notée $f'_g(x_0)$. On définit de même la notion de dérivabilité à droite. Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et que $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

Exemples :

⇒ Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et $b \in \mathbb{R}$ pour que la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

soit dérivable en 0.

Proposition 9 (ooo). Si f est dérivable en x_0 , alors f est continue en x_0 .

Remarques :

⇒ La réciproque de cette proposition est fausse comme le montre l'exemple de la fonction d'expression $|x|$ qui est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Définition 11 (ooo). Soit f une fonction. On note $\mathcal{D}_{f'}$ l'ensemble des $x_0 \in \mathcal{D}_f$ en lesquels f est dérivable. On définit la fonction dérivée de f , notée f' par :
$$\begin{aligned} f' : \mathcal{D}_{f'} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) \end{aligned}$$

Définition 12 (ooo). Soit f une fonction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit lorsque c'est possible la dérivée n -ième de f par :

- $f^{(0)} = f$
- Si $f^{(n)}$ est définie et dérivable en au moins un point, on définit $f^{(n+1)}$ comme la fonction dérivée de $f^{(n)}$.

4.2 Dérivées et opérations usuelles

4.2.1 Dérivées des fonction usuelles

\mathcal{D}_f	$f(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$	$f'(x)$
\mathbb{R}	$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	\mathbb{R}	$\begin{cases} nx^{n-1} & \text{si } n \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$
\mathbb{R}^*	$x^n \quad (n \in \mathbb{Z})$	\mathbb{R}^*	nx^{n-1}
\mathbb{R}_+^*	$x^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	\mathbb{R}_+^*	$\alpha x^{\alpha-1}$
\mathbb{R}_+	$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
\mathbb{R}	e^x	\mathbb{R}	e^x
\mathbb{R}_+^*	$\ln x$	\mathbb{R}_+^*	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}^*	$\ln x $	\mathbb{R}^*	$\frac{1}{x}$
\mathbb{R}	$\cos x$	\mathbb{R}	$-\sin x$
\mathbb{R}	$\sin x$	\mathbb{R}	$\cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$\cotan x$	$\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$	$-(1 + \cotan^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Remarques :

⇒ Contrairement à ce qui se passe pour la continuité, les fonctions usuelles ne sont pas toutes dérivables sur leur ensemble de définition. Par exemple la fonction :

$$f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

est continue sur son ensemble de définition et dérivable sur \mathbb{R}_+^* mais n'est pas dérivable en 0.

4.2.2 Opérations usuelles

Proposition 10 (○○○). Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 et dérivables en x_0 . Alors :

— Si λ et μ sont deux réels, la fonction $\lambda f + \mu g$ est dérivable en x_0 et :

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0)$$

— La fonction fg est dérivable en x_0 et :

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

— Si f ne s'annule pas en x_0 , $1/f$ est dérivable en x_0 et :

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f^2(x_0)}$$

— Plus généralement, si g ne s'annule pas en x_0 , f/g est dérivable en x_0 et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Proposition 11 (○○○). Soit f et g deux fonctions définies respectivement au voisinage de x_0 et $f(x_0)$. On suppose que f est dérivable en x_0 et que g est dérivable en $f(x_0)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$$

Remarques :

⇒ La dérivée d'une fonction paire (resp. impaire, T -périodique) est impaire (resp. paire, T -périodique).

Exemples :

⇒ Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée de la fonction définie sur $[0, \pi/2]$ par

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad f(x) = \sqrt{1 - \cos x}$$

⇒ Étudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions d'expression

$$e^{\sin x}, \quad x^x$$

4.3 Fonctions de classe C^n

Définition 13 (○○○). Soit f une fonction et $n \in \mathbb{N}$. On dit que f est de classe C^n lorsque f est dérivable n fois sur \mathcal{D}_f et que sa dérivée n -ième y est continue. On dit que f est de classe C^∞ lorsqu'elle est de classe C^n sur pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 12 (○○○). Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et f, g deux fonctions de classe C^n sur \mathcal{D} . Alors :

- Si λ et μ sont deux réels, la fonction $\lambda f + \mu g$ est de classe C^n .
- La fonction fg est de classe C^n .
- Si f ne s'annule pas sur \mathcal{D} , $1/f$ est de classe C^n .
- Plus généralement, si g ne s'annule pas sur \mathcal{D} , f/g est de classe C^n .

Proposition 13 (○○○). Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, f et g deux fonctions de classe C^n telles que $g \circ f$ soit définie sur \mathcal{D}_f . Alors $g \circ f$ est de classe C^n .

Exemples :

⇒ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par

$$\forall x > 0 \quad f(x) = x^{n-1} \ln x$$

est de classe C^n et calculer sa dérivée n -ième.

4.4 Dérivation et monotonie

Proposition 14 (○○○). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors :

— f est croissante si et seulement si :

$$\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$$

— f est décroissante si et seulement si :

$$\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$$

Remarques :

⇒ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de définition de f n'est pas un intervalle. Par exemple la fonction

$$f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1/x$$

n'est pas décroissante bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée soit négative.

Exemples :

⇒ Montrer que

$$\forall x \in [0, \pi/2] \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x, \quad \forall x \in]0, 1[\quad x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$

Proposition 15 (○○○). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Alors f est constante si et seulement si :

$$\forall x \in I \quad f'(x) = 0$$

Remarques :

⇒ Cette proposition est fausse lorsque le domaine de définition de f n'est pas un intervalle.

Proposition 16 (○○○). Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . Si :

$$— \forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$$

— Le nombre de points où f' s'annule est fini

alors f est strictement croissante.

Remarques :

⇒ La fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} bien qu'elle soit dérivable et que sa dérivée s'annule en 0. Si une fonction est croissante mais pas strictement croissante, alors elle est constante sur un intervalle non trivial.

5 Intégration

5.1 Définition, opérations usuelles

Définition 14 (○○○). Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. On définit l'intégrale :

$$\int_a^b f(x) dx$$

comme l'aire algébrique comprise entre le graphe de f et l'axe (Ox) comptée positivement si $a \leq b$ et négativement dans le cas contraire.

Proposition 17 (○○○). Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , $a, b \in I$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx$$

Proposition 18 (○○○). Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b, c \in I$. Alors :

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

5.2 Inégalités

Proposition 19 (○○○). Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. On suppose que :

$$\forall x \in [a, b] \quad f(x) \leq g(x)$$

Alors :

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

Exemples :

⇒ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq 1 - \cos x \leq x^2/2$. En déduire la limite à droite en 0 de

$$\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$$

5.3 Intégration et primitives, calcul de primitives

5.3.1 primitives

Définition 15 (○○○). Soit f une fonction définie sur une partie \mathcal{D}_f de \mathbb{R} . On appelle primitive de f toute fonction F dérivable sur \mathcal{D}_f telle que :

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad F'(x) = f(x)$$

Proposition 20 (○○○). Soit f une fonction définie sur un intervalle I et F une primitive de f . Alors les primitives de f sont les fonctions F_C définies sur I par :

$$\forall x \in I \quad F_C(x) = F(x) + C$$

où C est un réel quelconque.

5.3.2 Intégration et régularité

Proposition 21 (○○○). Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On définit sur I la fonction F par :

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Alors :

- F est continue sur I .
- F est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$$

Autrement dit, F est une primitive de f sur I .

Corollaire 1. Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Alors f admet une primitive. Plus précisément, pour tout $x_0 \in I$, il existe une unique primitive F de f sur I s'annulant en x_0 . De plus :

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_{x_0}^x f(t) dt$$

Corollaire 2. Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a, b \in I$. Alors, si F est une primitive de f sur I :

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

5.3.3 Calcul d'intégrales

Proposition 22 (○○○). Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et $a, b \in I$. On suppose que f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$ et que g est continue sur $[a, b]$. Alors, si G est une primitive de g :

$$\int_a^b \underbrace{f(x)}_{\text{dérive}} \underbrace{g(x)}_{\text{intégrer}} \, dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) \, dx$$

Exemples :

⇒ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit I_n par

$$I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t} \, dt$$

Calculer I_0 et trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} .

Proposition 23 (○○○). Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit J un intervalle et \bar{x} une fonction de classe \mathcal{C}^1 de J à valeurs dans I . On se donne $a_x, b_x \in I$ et $a_t, b_t \in J$ tels que :

$$a_x = \bar{x}(a_t) \quad \text{et} \quad b_x = \bar{x}(b_t)$$

Alors :

$$\int_{a_x}^{b_x} f(x) \, dx = \int_{a_t}^{b_t} f(\bar{x}(t)) \frac{d\bar{x}}{dt}(t) \, dt$$

Exemples :

⇒ Calculer

$$\int_0^\pi \ln(1 + \cos^2 x) \sin(2x) \, dx$$

⇒ Montrer que

$$\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{1-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^4}} \, dx = 0$$

Corollaire 3. Soit f une fonction continue sur le segment $[-a, a]$. Alors :

— si f est paire :

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx = \int_0^a f(x) \, dx$$

— si f est impaire :

$$\int_{-a}^0 f(x) \, dx = - \int_0^a f(x) \, dx$$

En particulier :

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$$

Corollaire 4. Soit f une fonction T -périodique, continue sur \mathbb{R} . Alors quel que soit $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^{a+T} f(x) \, dx = \int_0^T f(x) \, dx$$

5.3.4 Calcul de primitives

Exemples :

⇒ Calculer des primitives des fonctions d'expressions

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad \frac{x}{1+x^2}, \quad \tan x, \quad \frac{1}{x \ln x}$$

⇒ Calculer des primitives des fonctions d'expressions

$$(2x+3)e^x, \quad e^{\sqrt{x}}, \quad x \cos x, \quad \ln x$$

⇒ Calculer des primitives des fonctions d'expressions

$$\sin^2 x \cos^3 x, \quad \cos^2 x \sin^5 x, \quad \cos^2 x \sin^2 x$$