Exercice

On cherche tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$

Analyse : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$. Alors

$$\deg(P(X^2)) = \deg((X^2+1)P(X))$$

donc
$$(\deg P)\deg(X^2) = \deg(X^2+1) + \deg(P)$$

En effet X^2 n'est pas constant donc $\deg(P(X^2)) = (\deg P)\deg(X^2)$.
Donc
$$2\deg P = 2 + \deg P.$$

- Si $\deg P = -\infty$, alors $P = 0$
- Sinon, $\deg P \geq 0$, donc $\deg P = 2$. Il existe donc $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que

$$P(X) = aX^2 + bX + c$$

Or $P(X^2) = (X^2+1)P$ donc :

$$aX^4 + bX^2 + c = (X^2+1)(aX^2+bX+c)$$
$$= aX^4 + bX^3 + (c+a)X^2 + bX + c$$

Donc en identifiant les coefficients.

$$a = a,\ b = 0,\ c+a = b,\ b = 0,\ c = c$$

Donc $b = 0$ et $c = -a$, donc $P(X) = a(X^2-1)$

Comme $0 = 0(X^2-1)$, on en déduit que si P est solution du problème, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$P = \lambda(X^2-1)$$

Synthèse : Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On pose $P := \lambda(X^2-1)$
Alors

$$P(X^2) = \lambda(X^4-1) = \lambda(X^2-1)(X^2+1) = (X^2+1)P(X)$$

En conclusion les $P \in \mathbb{C}[X]$ qui sont solutions du problème sont les $\lambda(X^2-1)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$.

<u>Remarque</u>: Dans la partie analyse, on aurait aussi pu chercher des informations sur les racines de P. On voit facilement en évaluant en i que

$$P(i^2) = (i^2+1)P(i)$$

donc $P(-1)=0$, donc -1 est une racine de P. Donc

$$P((-1)^2) = ((-1)^2+1)P(-1) = 0$$

donc $P(1)=0$. Donc 1 et -1 sont racines de P. Donc $(X-1) \mid P$ et $(X+1) \mid P$. Or $(X-1)\wedge(X+1)=1$ donc $(X-1)(X+1) \mid P$ donc $X^2-1 \mid P$. Or P est de degré 2 donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $P = \lambda(X^2-1)$. Bref, il y a toujours de nombreux chemins pour arriver au même but.

<u>Exercice</u>

On pose $P := X^5 - 2X^4 + 3X^2 - X - 1 \in \mathbb{C}[X]$. Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, il admet 5 racines $z_1, \dots, z_5$ comptées avec leur ordre de multiplicité (une racine peut apparaître plusieurs fois si elle est multiple). Comme P est unitaire, on en déduit que

$$P = (X-z_1)(X-z_2)(X-z_3)(X-z_4)(X-z_5)$$

En développant, on obtient

$$\begin{aligned} P &= X^5 - (z_1+z_2+z_3+z_4+z_5)X^4 + (z_1z_2 + \cdots)X^3 - \cdots - z_1z_2z_3z_4z_5 \\ &= X^5 - \sigma_1 X^4 + \sigma_2 X^3 - \sigma_3 X^2 + \sigma_4 X - \sigma_5 \end{aligned}$$

où $\sigma_k = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} z_{i_1} \cdots z_{i_k}$

Par identification $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -3, \sigma_4 = -1, \sigma_5 = 1$.

Puisque $\alpha_2 := z_1^2 + \cdots + z_5^2$ est symétrique en $z_1, \dots, z_5$ (α_2 est inchangé si on échange les racines), il peut s'exprimer en fonction des polynômes symétriques élémentaires $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_5$.

On calcule

$$\begin{aligned} \alpha_2 - \sigma_1^2 &= z_1^2 + \cdots + z_5^2 - (z_1 + \cdots + z_5)^2 \\ &= z_1^2 + \cdots + z_5^2 - \left(z_1^2 + \cdots + z_5^2 + 2(z_1z_2 + \cdots)\right) \\ &= -2\sigma_2 \end{aligned}$$

Donc $\alpha_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4$. $\boxed{z_1^2 + \dots + z_5^2 = 4}$

De même, on pose $\alpha_3 := z_1^3 + \dots + z_5^3$. Alors.

$$\alpha_3 - (z_1 + \dots + z_5)^3 = z_1^3 + \dots + z_5^3 - (z_1 + \dots + z_5)^3$$
$$= z_1^3 + \dots + z_5^3 - \left(z_1^3 + \dots + z_5^3 + 3\sum_{i \neq j} z_i^2 z_j + 6\sigma_3\right)$$

En effet pour développer $(z_1 + \dots + z_5)(z_1 + \dots + z_5)(z_1 + \dots + z_5)$, on doit choisir dans chaque parenthèse une racine. Il y a donc $5^3 = 125$ termes. On trouve.

- Les termes où on a pris 3 fois la même racine. Il y en a 5, ce qui donne $z_1^3 + z_2^3 + \dots + z_5^3$
- Les termes où on a pris 2 fois la même racine et une autre qui est distincte. Rappelons que σ_2 comporte $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$ termes puisque pour former un $x_i x_j$ il faut choisir une partie à deux éléments ($\{i, j\}$) parmi $\{1, 2, \dots, 5\}$. Former un $z_i^2 z_j$ avec $i \neq j$, c'est choisir $\{i, j\}$ puis choisir celui sur lequel on met le carré. Cela donne 20 termes différents. Mais chaque terme est obtenu 3 fois (selon si on prend le z_j dans la première, seconde ou dernière parenthèse). Cela donne donc 60 termes du développement de $(z_1 + \dots + z_5)^3$
- Les termes en $z_i z_j z_k$ avec $i \neq j \neq k$. Il y en a $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$. Chacun apparait 6 fois, car c'est le nombre de fonctions $f : [\![1, 3]\!] \longrightarrow [\![1, 5]\!]$ (à une parenthèse, j'associe la racine que je choisit) dont l'image est $\{i, j, k\}$. C'est donc le nombre de bijections de $[\![1, 3]\!]$ dans $\{i, j, k\}$ qui est $3! = 6$. On obtient donc 60 termes du développement.

On vérifie au final qu'on a bien trouvé tous les $125 = 5 + 60 + 60$ termes du développement de $(z_1 + \dots + z_5)^3$.

Donc

$$\alpha_3 - \sigma_1^3 = -3\sum_{i \neq j} z_i^2 z_j - 6\sigma_3.$$

On doit maintenant calculer $\sum_{i \neq j} z_i^2 z_j$. On a

$$\sum_{i \neq j} z_i^2 z_j - \sigma_1 \sigma_2 = \underbrace{\sum_{i \neq j} z_i^2 z_j}_{20 \text{ termes}} - \underbrace{(z_1 + \dots + z_5)}_{5 \text{ termes}}\underbrace{(z_1 z_2 + \dots)}_{10 \text{ termes}}$$

Le développement de $(z_1 + \dots + z_5)(z_1 z_2 + \dots)$ fait donc apparaître 50 termes. On trouve.

- Les $z_i z_j z_k$ avec $i \neq j \neq k$. Chaque terme (il y en a 10) est obtenu 3 fois (selon si c'est z_i, z_j ou z_k) qui est dans la première parenthèse. On a donc 30 termes.
- Les $z_i^2 z_j$. Chaque terme (il y en a 20) est obtenu une fois.

On vérifie qu'on a bien comptabilisé tous les termes car $30+20=50$. Donc

$$\sum_{i\neq j} z_i^2 z_j - \sigma_1\sigma_2 = \sum_{i \neq j} z_i^2 z_j - \left(3\sigma_3 + \sum_{i\neq j} z_i^2 z_j\right)$$

$$= -3\sigma_3$$

Donc $$\sum_{i\neq j} z_i^2 z_j = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3.$$

Donc $$\alpha_3 = \sigma_1^3 - 3(\sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3) - 6\sigma_3$$
$$= \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$

Donc $$\alpha_3 = 2^3 + 3(-3) = 8-9 = -1$$

Donc $$\boxed{z_1^3 + \cdots + z_5^3 = -1}$$

<u>Remarque</u> :
- Après, si on est moins bête, on peut réaliser que 1 et -1 sont racines de P. Donc X^2-1 divise P. Une division euclidienne nous donne
$$P = (X^2-1)(X^3-2X^2+X+1)$$
et on est ramené à calculer $z_1^2+z_2^2+z_3^2$ et $z_1^3+z_2^3+z_3^3$. ce qui est beaucoup plus simple.
Un rapide coup d'oeil au poly d'indication (ne me faites pas croire que vous n'avez jamais fait ça ;-)) montre que la personne qui a posé l'exercice n'avait pas vu ce raccourci.
- L'algorithme que j'utilise pour calculer α_2 et α_3 se généralise aisément. Si par exemple vous devez un jour calculer la somme des
$$x_i^2 x_j^2 x_k$$
pour $i \neq j \neq k$, remarquez que $x_i^2 x_j^2 x_k = (x_i x_j)(x_i x_j x_k)$ et retranchez $\sigma_2\sigma_3$ à votre somme. Vous ferez baisser petit à petit "quelque chose" (je vous laisse réfléchir) et l'algorithme terminera.

Exercice 22.9.

1) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\sin((2n+1)x) = \operatorname{Im}\left(e^{i(2n+1)x}\right) = \operatorname{Im}\left(\left(e^{ix}\right)^{2n+1}\right)$$

Or

$$\begin{aligned}\left(e^{ix}\right)^{2n+1} &= (\cos(x) + i\sin(x))^{2n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^{2n+1-k}(x)\, i^k . \sin^k(x)\end{aligned}$$

Or $i^k \in \mathbb{R}$ si $k \equiv 0\ [2]$ et $i^k \in i\mathbb{R}$ si $k \equiv 1\ [2]$

Donc

$$\begin{aligned} i\sin((2n+1)x) &= \sum_{\substack{k=0 \\ k\equiv 1\ [2]}}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^{2n+1-k}(x)\, i^k \sin^k x \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} \cos^{2n+1-(2k+1)}(x)\, i\,(i^2)^k \sin^{2k+1}(x)\end{aligned}$$

Donc $\sin((2n+1)x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (\cos^2 x)^{n-k} . (-1)^k . \sin^{2k+1}(x)$

Donc, pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin(x) \neq 0$ donc

$$\begin{aligned}\frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1} x} &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} \frac{(\cos^2 x)^{n-k}}{(\sin^2 x)^{n-k}} \cdot \frac{\cancel{\sin^{2k+1}(x)}}{\cancel{\sin^{2k+1}(x)}} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} (\operatorname{cotan}^2 x)^{n-k}.\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1}(x)} = P(\operatorname{cotan}^2 x)$ où $P := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} X^{n-k}$

Au passage, on a démontré que $\deg P = n$.

Même si ce n'est pas demandé, il est nécessaire de démontrer l'unicité de P car on demande de calculer les racines du polynôme P à la question suivante.

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall x \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\qquad P(\text{cotan}^2 x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1} x}$$

$$Q(\text{cotan}^2 x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1} x}$$

Alors : $\forall x \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\quad P(\text{cotan}^2 x) = Q(\text{cotan}^2 x)$

Or cotan^2 réalise une bijection de $]0, \tfrac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}_+^*$ car elle est continue sur $]0, \tfrac{\pi}{2}[$

$$\text{cotan}^2(x) \xrightarrow[\substack{x \to 0 \\ x > 0}]{} +\infty \qquad \text{cotan}^2(x) \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} 0$$

et qu'elle est strictement décroissante. (quotient d'une fonction str décroissante positive par une fonction str croissante positive)

Donc : $\forall y \in \mathbb{R}_+^* \quad P(y) = Q(y)$

Donc $P - Q$ a une infinité de racines. Donc $P - Q = 0$. Donc $P = Q$.

En conclusion, il existe un unique polynôme P_n de degré n tel que :

$$\forall x \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\qquad P_n(\text{cotan}^2 x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1} x}.$$

2) $\forall x \in]0, \tfrac{\pi}{2}[\quad P(\text{cotan}^2 x) = 0 \iff \dfrac{\sin((2n+1)x)}{\sin^{2n+1} x} = 0$

$$\iff \sin((2n+1)x) = 0$$

$$\iff (2n+1)x \equiv 0 \quad [\pi]$$

$$\iff x \equiv 0 \quad \left[\frac{\pi}{2n+1}\right]$$

$$\iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{k\pi}{2n+1}.$$

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $x_k := \dfrac{k\pi}{2n+1}$. Alors $0 < x_1 < \cdots < x_n < \dfrac{\pi}{2}$.

Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $y_k := \text{cotan}^2 x_k$. Comme les

x_n sont 2 à 2 distincts et que $x \longrightarrow \cotan^2 x$ est injective sur $]0, \pi/2[$, les y_k sont 2 à 2 distincts.

Or, ce sont des racines de P. Comme $\deg P \leqslant n$, ce sont les seules racines de P sur $\mathbb{C}$.

3) Montrons que

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\quad \cotan^2 x \leqslant \frac{1}{x^2} \leqslant 1 + \cotan^2 x$$