Cours : Nombres complexes

Table des matières

1 Le corps des nombres complexes **1**
1.1 Définition, conjugaison, module . . . 1
1.2 Inverse . . . 2
1.3 Inégalité triangulaire . . . 2

2 Forme trigonométrique **2**
2.1 Forme trigonométrique . . . 2
2.2 Applications à la trigonométrie . . . 4
2.3 Exponentielle complexe . . . 4

3 Racines d'un nombre complexe **5**
3.1 L'équation du second degré . . . 5
3.2 Racines n-ièmes . . . 6

1 Le corps des nombres complexes

1.1 Définition, conjugaison, module

Le carré de tout nombre réel étant positif, l'équation :

$$x^2 = -1$$

n'admet pas de solution réelle. Nous admettrons qu'il existe un ensemble de nombres A vérifiant les propriétés suivantes :

— $\mathbb{R} \subset A$
— On peut additionner, soustraire et multiplier les éléments de A en utilisant les règles usuelles de l'algèbre.
— L'équation $x^2 = -1$ admet au moins une solution sur A.

On note i une solution de cette équation.

Définition 1. *On appelle corps des nombres complexes l'ensemble des nombres $a+ib$ où a et b sont réels.*

Remarques :

⇨ $\mathbb{C}$ est stable par les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication.

Définition 2. *Pour tout nombre complexe z, il existe un unique couple de réels (a, b) tel que $z = a + ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés partie réelle et partie imaginaire de z. On note :*

$$a = \operatorname{Re} z \quad \textit{et} \quad b = \operatorname{Im} z$$

Remarques :

⇨ Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ un repère orthonormé direct du plan. À tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe le point M du plan dont les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}$ sont (a, b). On dit que z est l'affixe de M.

Proposition 1. *Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes, λ et μ deux réels. Alors :*

— $\operatorname{Re}(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda \operatorname{Re} z_1 + \mu \operatorname{Re} z_2$
— $\operatorname{Im}(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda \operatorname{Im} z_1 + \mu \operatorname{Im} z_2$

Un nombre complexe z est nul si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire le sont.

Remarques :

⇨ Attention, la relation $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = \operatorname{Re}(z_1)\operatorname{Re}(z_2)$ est en général fausse. Par exemple $\operatorname{Re}(i \cdot i) = \operatorname{Re}(-1) = -1$ et $\operatorname{Re}(i)\operatorname{Re}(i) = 0 \cdot 0 = 0$.

Définition 3. *On dit qu'un nombre complexe z est imaginaire pur lorsque* $\operatorname{Re} z = 0$. *L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.*

Définition 4. *Soit z un nombre complexe. On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe :*

$$\overline{z} = a - ib$$

où a et b sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z.

Proposition 2. *Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :*

— $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
— $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$

De plus, pour tout nombre complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$.

Proposition 3. *Soit z un nombre complexe. Alors :*

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

En particulier :

— *z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$.*
— *z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.*

Remarques :

⇨ En pratique, pour montrer qu'un nombre complexe z est réel, une bonne méthode est de montrer qu'il est égal à son conjugué. La méthode consistant à montrer que sa partie imaginaire est nulle est à oublier.

Définition 5. *Pour tout nombre complexe z, le nombre $z\overline{z}$ est réel positif. On appelle module de z et on note $|z|$ le réel défini par :*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

Remarques :

⇨ On voit directement que $\overline{z\overline{z}} = \overline{z}\overline{\overline{z}} = \overline{z}z$. En particulier $z\overline{z} \in \mathbb{R}$. Par contre cette méthode ne permet pas de montrer que $z\overline{z}$ est positif.

⇨ Si M est le point d'affixe z, le théorème de Pythagore nous affirme que le module de z est la distance OM.

Exemples :

⇨ Donner une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que $|z+i| = |z-i|$.

Proposition 4. *Soit $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$. Alors :*
- $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$
- $|\overline{z}| = |z|$

De plus $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$.

1.2 Inverse

Proposition 5. *Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tels que $z_1 z_2 = 0$, alors $z_1 = 0$ ou $z_2 = 0$. On dit que $\mathbb{C}$ est intègre.*

Proposition 6. *Soit z un nombre complexe non nul. Alors il existe un unique nombre complexe z' tel que $zz' = 1$. On note ce nombre z^{-1} ou $1/z$. De plus :*

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

Proposition 7. *Soit z un nombre complexe non nul. Alors :*

$$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}} \quad \textit{et} \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

Exemples :

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| < 1$ et $|b| < 1$. Montrer que

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$$

Proposition 8. *Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :*
- $\bar{z^n} = \overline{z}^n$
- $|z^n| = |z|^n$

Ces relations restent vraies lorsque z est non nul et que n est un entier relatif.

1.3 Inégalité triangulaire

Proposition 9. *Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :*

$$\operatorname{Re} z \leqslant |\operatorname{Re}(z)| \leqslant |z| \quad \textit{et} \quad \operatorname{Im} z \leqslant |\operatorname{Im}(z)| \leqslant |z|$$

De plus $\operatorname{Re} z = |z|$ si et seulement si z est réel positif.

Exemples :

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système

$$\begin{cases} |1+z| \leqslant 1 \\ |1-z| \leqslant 1 \end{cases}$$

Proposition 10. *Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors :*

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

De plus l'égalité a lieu si et seulement si z_1 et z_2 sont positivement liés, c'est-à-dire lorsque $z_1 = 0$ ou lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.

Proposition 11. *Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors :*

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

Remarques :

⇨ La première inégalité est appelée seconde inégalité triangulaire. Elle a plusieurs variante :
—Si on remplace z_2 par $-z_2$, on obtient l'inégalité

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$$

qui permet de majorer la différence des module à l'aide du module de la différence.
—Comme $x \leqslant |x|$ pour tout réel x, de la seconde inégalité triangulaire, découle l'inégalité $|z_1| - |z_2| \leqslant |z_1 + z_2|$ qui s'écrit aussi

$$|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$$

Exemples :

⇨ Soit $z_0, z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{z_k}{2^k} \neq 0$$

2 Forme trigonométrique

2.1 Forme trigonométrique

Définition 6. *Pour tout réel θ, on définit l'exponentielle de $i\theta$ par :*

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

Proposition 12. *Soit θ_1 et θ_2 deux réels. Alors :*

$$e^{i0} = 1 \qquad \textit{et} \qquad e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}$$

Proposition 13. *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors*

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$$

De plus, $e^{i\theta}$ est non nul et si $n \in \mathbb{Z}$, alors

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \qquad \textit{et} \qquad e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

Proposition 14. *Soit θ un réel. Alors on a les formules dites formules d'Euler :*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$ on a la formule dite formule de Moivre :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

Proposition 15.
- *Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $e^{i\theta} = 1$ si et seulement si $\theta \equiv 0\ [2\pi]$.*
- *Plus précisément, étant donnés θ_1 et $\theta_2 \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta_1} = e^{i\theta_2}$ si et seulement si $\theta_1 \equiv \theta_2\ [2\pi]$.*

Exemples :

⇨ Déterminer la partie réelle de

$$\frac{1}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$$

Définition 7. *On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.*

Remarques :

⇨ Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors :

$$z \in \mathbb{U} \iff \frac{1}{z} = \overline{z}$$

Exemples :

⇨ Montrer que tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{-1\}$ peut s'écrire

$$\frac{1+ia}{1-ia}$$

avec $a \in \mathbb{R}$.

Proposition 16. *L'application qui à θ associe $e^{i\theta}$ est une surjection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{U}$. Autrement dit :*
- *Si $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$.*
- *Réciproquement, pour tout élément u de $\mathbb{U}$, il existe un réel θ tel que $u = e^{i\theta}$.*

Définition 8. *Soit z un nombre complexe non nul. On appelle argument de z tout réel θ tel que :*

$$z = |z|\, e^{i\theta}$$

Si θ est un argument de z, l'ensemble de ses arguments est :

$$\theta + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

On note alors :

$$\arg z \equiv \theta\ \ [2\pi]$$

Remarques :

⇨ Si $z = a + ib$ est non nul, alors :
—si $a = 0$, $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. L'argument est donné par le signe de b.
—sinon, $\tan\theta = b/a$ ce qui permet de connaître l'argument de z modulo π. Pour le connaître modulo 2π, il suffit de regarder le signe de a.

⇨ Il existe deux moyens de représenter un même nombre complexe z : la forme cartésienne et la forme trigonométrique. La première est particulièrement adaptée aux calculs de sommes, tandis que la seconde est particulièrement adaptée aux calculs de produits.
Nous verrons cependant, que lorsqu'ils ont même module, il existe un moyen simple pour mettre sous forme trigonométrique la somme de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique.

⇨ Si z est un nombre complexe non nul, il existe un unique $\theta \in]-\pi,\pi]$ tel que $\arg z \equiv \theta\ [2\pi]$. On dit que θ est l'argument principal de z et on note $\operatorname{Arg} z = \theta$.

Proposition 17. *Soit ρ_1, ρ_2 deux réels non nuls et θ_1, θ_2 deux réels. Alors $\rho_1 e^{i\theta_1} = \rho_2 e^{i\theta_2}$ si et seulement si :*

$$[\rho_1 = \rho_2 \textit{ et } \theta_1 \equiv \theta_2\ \ [2\pi]] \quad \textit{ou} \quad [\rho_1 = -\rho_2 \textit{ et } \theta_1 \equiv \theta_2 + \pi\ \ [2\pi]]$$

Remarques :

⇨ Étant donné un nombre complexe non nul z, on appelle :
—*forme trigonométrique* de z l'écriture $z = re^{i\theta}$ où r est un réel strictement positif et θ est un réel. Dans ce cas r est le module de z et θ un de ses arguments.
—*forme trigonométrique généralisée* de z toute écriture du type $z = \rho e^{i\theta}$ où ρ est un réel non nul et θ est un réel. Attention, dans ce cas, on n'a pas nécessairement $\arg z \equiv \theta\ \ [2\pi]$.
En effet :
—Si $\rho > 0$, alors $\rho = |z|$ et $\arg z \equiv \theta\ \ [2\pi]$.

—si $\rho < 0$, alors $\rho = -|z|$ et $\arg z \equiv \theta + \pi \ [2\pi]$.
On pourra même accepter l'écriture $z = \rho i e^{i\theta}$ (avec $\rho, \theta \in \mathbb{R}$) comme forme trigonométrique généralisée.
Lorsque l'énoncé demandera explicitement de mettre un nombre complexe (non nul) sous forme trigonométrique, c'est bien sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ qu'il faudra le mettre. Cependant, lorsqu'on demandera de mettre z sous forme trigonométrique pour conduire des calculs, une forme trigonométrique généralisée suffira le plus souvent.

Proposition 18. *Soit $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :*
- $\arg z_1 z_2 \equiv \arg z_1 + \arg z_2 \ [2\pi]$
- $\arg z_1/z_2 \equiv \arg z_1 - \arg z_2 \ [2\pi]$
- $\arg z^n \equiv n \arg z \ [2\pi]$
- $\arg \overline{z} \equiv -\arg z \ [2\pi]$

Remarques :

⇨ Attention cependant, en général, $\operatorname{Arg}(z_1 z_2) \neq \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$.

2.2 Applications à la trigonométrie

Applications :

⇨ *Somme et forme trigonométrique*
Étant donné un réel θ, on a :

$$\begin{aligned} 1 + e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) \\ &= 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\theta} &= e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right) \\ &= -2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

⇨ *Calcul de sommes trigonométriques*
Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$C_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$$

⇨ *Linéarisation de $\cos^n \theta \sin^m \theta$*
Étant donné deux entiers naturels n et m, on cherche à exprimer $\cos^n \theta \sin^m \theta$ comme combinaison linéaire des $\cos(kx)$ et $\sin(kx)$ (pour $k \in \mathbb{N}$). Pour cela, on peut utiliser les formules d'Euler avant de développer l'expression par la formule du binôme de Newton et de regrouper les termes en utilisant à nouveau les formules d'Euler. Cette opération sera en particulier utile lors du calcul de primitives.
Exemple : Linéariser $\sin^6 \theta$ et $\sin\theta \cos^4 \theta$.

⇨ *Expression de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ comme polynôme en $\cos\theta$ et $\sin\theta$*
Pour cette opération, une méthode consiste à utiliser la formule de Moivre avant de développer l'expression obtenue à l'aide du binôme de Newton.
Exemple : Exprimer $\cos(5\theta)$ comme un polynôme en $\cos\theta$. Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\cos(n\theta)$ peut s'exprimer comme un polynôme en $\cos\theta$.

Exemples :

⇨ Soit $z \in \mathbb{U}$. Calculer le module et l'argument de $1 + z + z^2$ en fonction de l'argument principal de z.

⇨ Exprimer $\tan(7\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$$

⇨ Exprimer $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$ à l'aide de radicaux.

2.3 Exponentielle complexe

Définition 9. *Soit $z = a + ib$ un nombre complexe où a et b sont respectivement la partie réelle et imaginaire de z. On appelle exponentielle de z et on note e^z le nombre complexe défini par :*

$$e^z = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Proposition 19. *Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors :*

$$e^0 = 1 \qquad \text{et} \qquad e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

Proposition 20. *Soit z un nombre complexe, et $n \in \mathbb{Z}$. Alors e^z est non nul et :*

$$\frac{1}{e^z} = e^{-z} \qquad \text{et} \qquad e^{nz} = (e^z)^n$$

Proposition 21. *Soit z un nombre complexe. Alors :*

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}} \qquad \text{et} \qquad |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

Proposition 22.
- *Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $e^z = 1$ si et seulement si il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = ik2\pi$.*
- *Plus précisément, étant donnés z_1 et z_2 deux nombres complexes, $e^{z_1} = e^{z_2}$ si et seulement si il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z_1 = z_2 + ik2\pi$.*

Proposition 23. *L'exponentielle est une surjection de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}^*$. Autrement dit :*

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \exists z' \in \mathbb{C} \quad e^{z'} = z$$

Remarques :

⇨ Si $z \in \mathbb{C}^*$, nous venons de voir qu'il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $e^{z'} = z$. Cependant, z' n'est pas unique ce qui nous empêche de définir le logarithme du nombre complexe z.
Cependant, on montre qu'il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $e^{z'} = z$ et $\operatorname{Im} z' \in \left]-\pi, \pi\right]$. Ce nombre est appelé logarithme principal de z et est noté $\operatorname{Ln} z$. De plus $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$. Cependant, l'identité $\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$ devient fausse ; elle n'est vraie que modulo $i2\pi$. C'est pourquoi, nous n'emploierons jamais le logarithme principal.

Exemples :

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = \sqrt{3} + 3i$.

3 Racines d'un nombre complexe

3.1 L'équation du second degré

Définition 10. *Soit a un nombre complexe. On appelle racine de a tout nombre complexe z tel que :*
$$z^2 = a$$

Remarques :

⇨ Si a est un réel positif, il ne faudra pas confondre la racine de a et les racines de a qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Si a est un réel négatif, ses racines sont $i\sqrt{|a|}$ et $-i\sqrt{|a|}$.

Proposition 24. *Soit a un nombre complexe non nul. Alors a admet exactement deux racines distinctes opposées l'une à l'autre.*

Remarques :

⇨ En pratique, pour trouver les racines d'un nombre complexe ω non réel, on procède ainsi :
—*Si ω est donné sous forme trigonométrique* :
On connaît donc $r > 0$ et θ tels que $\omega = re^{i\theta}$. Alors les racines carrées de ω sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
—*Si ω est donné sous la forme $a + ib$ et qu'il n'est pas possible de le mettre simplement sous forme trigonométrique* :
On recherche les racines z de ω sous la forme $x + iy$ en raisonnant par implication. On suppose que z est une racine de ω et on en déduit que $|z|^2 = |\omega|$ et que z^2 et ω ont même partie réelle. On obtient donc un système d'équations :
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= |\omega| \\ x^2 - y^2 &= \operatorname{Re}(\omega) \end{aligned}$$
En résolvant ce système linéaire en x^2 et y^2, on obtient 4 couples (x, y) de solutions parmi lesquelles se trouvent les racines de ω. Un argument de signe sur les parties imaginaires de z^2 et ω permet d'éliminer deux racines et la proposition précédente nous assure que les deux solutions restantes sont bien racines de ω.

Exemples :

⇨ Calculer les racines carrées de $1 + i\sqrt{3}$.

⇨ Calculer les racines de $1 + i$ de deux manières différentes. En déduire une expression avec des radicaux emboîtes de $\cos(\pi/8)$, $\sin(\pi/8)$ et $\tan(\pi/8)$.

Proposition 25. *Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.*
— *On considère l'équation :*
$$az^2 + bz + c = 0$$
On appelle discriminant le nombre complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.
  — *Si $\Delta = 0$, le trinôme admet une et une seule racine appelée racine double :*
$$z_0 = -\frac{b}{2a}$$
  — *Si $\Delta \neq 0$, le trinôme admet exactement deux racines distinctes :*
$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$$
  où δ est une racine carrée de Δ.
— *Lorsque l'équation s'écrit sous la forme :*
$$az^2 + 2bz + c = 0$$
on utilise le discriminant réduit $\Delta' = b^2 - ac$. Dans ce cas :
  — *Si $\Delta' = 0$, le trinôme admet une et une seule racine appelée racine double :*
$$z_0 = -\frac{b}{a}$$
  — *Si $\Delta' \neq 0$, le trinôme admet exactement deux racines distinctes :*
$$z_1 = \frac{-b + \delta'}{a} \qquad \text{et} \qquad z_2 = \frac{-b - \delta'}{a}$$
  où δ' est une racine carrée de Δ'.

Exemples :

⇨ Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$.

Proposition 26. *Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$ et z_1, z_2 deux nombres complexes. Alors z_1 et z_2 sont les deux racines, éventuellement égales, de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ si et seulement si :*
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Remarques :

⇨ Si $P, S \in \mathbb{C}$ les solutions du système
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$$
sont donc (ω_1, ω_2) et (ω_2, ω_1) où ω_1 et ω_2 sont les racines du trinôme $z^2 - Sz + P = 0$.

Exemples :

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ le système
$$\begin{cases} u^2+v^2=3-2i \\ uv=3+i \end{cases}$$

⇨ Soit $a,b\in\mathbb{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que les racines de $z^2+az+b=0$ aient même module.

3.2 Racines n-ièmes

Définition 11. *Étant donné $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in\mathbb{C}$, on appelle racine n-ième de a tout nombre complexe z tel que $z^n=a$. Les racines n-ièmes de 1 sont appelées racines n-ièmes de l'unité et l'ensemble de ces racines est noté $\mathbb{U}_n$.*

Proposition 27. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Alors les n nombres complexes*
$$1,\omega,\dots,\omega^{n-1}$$
sont deux à deux distincts et sont exactement les racines n-ièmes de l'unité.

Remarques :

⇨ Dans le cas où $n=3$, ω est noté j. Les racines 3-ièmes de l'unité sont donc $1,j,j^2$. Lorsqu'on travaillera avec le nombre complexe j, on exploitera les relations
$$j^3=1 \qquad 1+j+j^2=0 \text{ et } \frac{1}{j}=\overline{j}=j^2$$

Exemples :

⇨ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation
$$(z+1)^n=(z-1)^n$$

⇨ Calculer
$$\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1|$$

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation $z^2=27\overline{z}$.

Proposition 28. *Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et ζ une racine n-ième de l'unité différente de 1. Alors :*
$$1+\zeta+\dots+\zeta^{n-1}=0$$
En particulier, si $n\geqslant 2$, en prenant $\zeta=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ on en déduit que la somme des racines n-ièmes de l'unité est nulle.

Proposition 29. *Soit $a\in\mathbb{C}^*$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On suppose que z_0 est une racine n-ième de a. Alors les n nombres complexes*
$$z_0,\omega z_0,\dots,\omega^{n-1}z_0$$
où $\omega=e^{i\frac{2\pi}{n}}$ sont deux à deux distincts et sont exactement les racines n-ièmes de a.

Remarques :

⇨ Si $a=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$, alors
$$z_0=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$$
est une racine n-ième de a.

⇨ Si $n\geqslant 2$, la somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe est nulle.

Exemples :

⇨ Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation
$$27(z-1)^6+(z+1)^6=0$$

⇨ Montrer que
$$\cos\frac{\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}=\frac{1}{2}$$