Cours : Intégration

Table des matières

1 Intégrale de Riemann

1.1 Fonction en escalier, fonction continue par morceaux

Définition 1. *On appelle subdivision du segment $[a,b]$ toute famille $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de réels tels que :*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Remarques :

⇨ On appelle pas d'une subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ le réel

$$P = \max_{0\leqslant k\leqslant n-1} (x_{k+1} - x_k)$$

⇨ On dit qu'une subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est régulière lorsque $x_{k+1} - x_k$ est indépendant de k. Si $n \in \mathbb{N}^*$, la subdivision $(x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ de $[a,b]$ définie par

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{n}$$

est une subdivision régulière de pas $(b-a)/n$.

⇨ Se donner une subdivision de $[a,b]$ revient à se donner une partie finie de $[a,b]$ contenant a et b. Cette identification nous permettra de parler (par abus de langage) de l'union de deux subdivisions d'un même segment $[a,b]$.

Définition 2. *Soit $\tau = (x_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ et $\tau' = (y_k)_{0\leqslant k\leqslant m}$ deux subdivisions d'un même segment $[a,b]$. On dit que τ' est plus fine que τ lorsque tout élément de la famille τ est élément de la famille τ' :*

$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad \exists i \in [\![0,m]\!] \quad x_k = y_i$$

Proposition 1. *Soit τ_1 et τ_2 deux subdivisions d'un même segment $[a,b]$. Alors, il existe une subdivision plus fine que τ_1 et τ_2.*

Définition 3.
- *Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction en escalier sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = n$ du segment $[a,b]$ telle que φ soit constante sur chaque intervalle $]x_k, x_{k+1}[$:*

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad \exists c_k \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) \quad \forall x \in]x_k, x_{k+1}[\quad \varphi(x) = c_k$$

- *Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est en escalier sur I lorsque sa restriction à tout segment $[a,b]$ de I est en escalier sur $[a,b]$.*

Remarques :

⇨ Si on change la valeur d'une fonction en escalier en un nombre fini de points, elle reste en escalier.

Proposition 2. *Soit φ une fonction en escalier sur un segment $[a,b]$. Alors φ est bornée sur $[a,b]$.*

Proposition 3. *Soit I un intervalle.*
- *L'ensemble des fonctions réelles en escalier sur I est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.*
- *L'ensemble des fonctions complexes en escalier sur I est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$. De plus si φ est une fonction en escalier sur I, il en est de même pour $\overline{\varphi}$ et $|\varphi|$.*

Définition 4.
- *Soit $[a,b]$ un segment. On dit qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $\tau : a = x_0 < \cdots < x_n = n$ du segment $[a,b]$ telle que :*
  - *Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, φ est continue sur $]x_k, x_{k+1}[$.*
  - *Pour tout $k \in [\![0,n-1]\!]$, φ admet une limite finie à droite en x_k et à gauche en x_{k+1}. Autrement dit, la restriction de φ à $]x_k, x_{k+1}[$ est prolongeable par continuité sur $[x_k, x_{k+1}]$.*
- *Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est une continue par morceaux sur I lorsque sa restriction à tout segment $[a,b]$ de I est continue par morceaux sur $[a,b]$.*

Remarques :

⇨ Si on change la valeur d'une fonction continue par morceaux en un nombre fini de points, elle reste continue par morceaux.

Proposition 4. *Soit φ une fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$. Alors φ est bornée sur $[a,b]$.*

Proposition 5. *Soit I un intervalle.*
- *L'ensemble des fonctions réelles continues par morceaux sur I est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.*
- *L'ensemble des fonctions complexes continues par morceaux sur I est une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{C})$. De plus si φ est une fonction continue par morceaux sur I, il en est de même pour $\overline{\varphi}$ et $|\varphi|$.*

1.2 Uniforme continuité

Définition 5. *On dit qu'une fonction f est uniformément continue lorsque :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x,y \in \mathcal{D}_f \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Remarques :

⇨ Une fonction lipschitzienne est uniformément continue.

Exemples :

⇨ Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais n'est pas lipschitzienne.

Proposition 6. *Si f est uniformément continue, alors elle est continue.*

Remarques :

⇨ Soit f une fonction continue. Alors

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}_f \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Les deux premiers quantificateurs étant de même nature, on peut les échanger, donc

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathcal{D}_f \quad |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Une fonction est donc uniformément continue lorsqu'on peut échanger les quantificateurs portant sur x et η, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de choisir η indépendamment de x.

Exemples :

⇨ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ n'est pas uniformément continue.

Théorème 1. *Sur un segment, toute fonction continue est uniformément continue.*

Proposition 7. *Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe une fonction en escalier φ définie sur $[a,b]$ telle que :*

$$\forall x \in [a,b] \quad |f(x)-\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$$

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 6. *Soit φ une fonction en escalier sur le segment « $[a,b]$ » et $\tau : \min(a,b) = x_0 < \cdots < x_n = \max(a,b)$ une subdivision adaptée à φ. Il existe donc $c_0,\ldots,c_{n-1} \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tels que :*

$$\forall k \in [\![0,n-1]\!] \quad \forall x \in]x_k,x_{k+1}[\quad \varphi(x) = c_k$$

On définit alors l'intégrale de φ entre a et b par :

$$\int_a^b \varphi(x)\ dx = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} c_k(x_{k+1}-x_k) & \text{si } a \leqslant b \\ \displaystyle -\int_b^a \varphi(x)\ dx & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarques :

⇨ Si on change la valeur d'une fonction en un nombre fini de points, on ne change pas la valeur de son intégrale.

Proposition 8. *Soit φ_1 et φ_2 deux fonctions en escalier sur un intervalle I et $a,b \in I$. Si $\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), alors :*

$$\int_a^b \lambda\varphi_1(x)+\mu\varphi_2(x)\ dx = \lambda\int_a^b \varphi_1(x)\ dx + \mu\int_a^b \varphi_2(x)\ dx$$

Proposition 9. *Soit φ une fonction en escalier sur un intervalle I et $a,b,c \in I$. Alors :*

$$\int_a^c \varphi(x)\ dx = \int_a^b \varphi(x)\ dx + \int_b^c \varphi(x)\ dx$$

Proposition 10. *Soit φ une fonction réelle en escalier sur l'intervalle I et $a,b \in \mathbb{R}$. Si :*

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad [\forall x \in [a,b] \quad \varphi(x) \geqslant 0]$$

alors :

$$\int_a^b \varphi(x)\ dx \geqslant 0$$

Proposition 11. *Soit φ une fonction (réelle ou complexe) en escalier sur l'intervalle I et $a,b \in \mathbb{R}$. Si $a \leqslant b$, alors :*

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |\varphi(x)|\ dx$$

1.4 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 7.

- *Soit I un intervalle, f une fonction réelle continue par morceaux sur I et $a, b \in I$. On définit l'intégrale de a à b de f de la manière suivante :*
  - *Si $a \leqslant b$.*
    On définit les ensembles A et B par :
    $$A = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\ dx : \varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } \varphi \leqslant f \right\}$$
    $$B = \left\{ \int_a^b \varphi(x)\ dx : \varphi \text{ est en escalier sur } [a,b] \text{ et } f \leqslant \varphi \right\}$$
    Alors A admet une borne supérieure et B admet une borne inférieure. De plus $\sup A = \inf B$. On pose alors :
    $$\int_a^b f(x)\ dx = \sup A = \inf B$$
  - *Si $b \leqslant a$.*
    On pose :
    $$\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$$
- *Soit I un intervalle, f une fonction complexe continue par morceaux sur I et $a, b \in I$. On définit l'intégrale de a à b de f par :*
  $$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f(x))\ dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(x))\ dx$$

Exercices :

⇨ Donner le domaine de définition de la fonction d'expression

$$\int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt[3]{1+t^3}}$$

Proposition 12. *Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et $a, b \in I$. Alors :*

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x)\ dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx$$

Proposition 13. *Soit f une fonction continue par morceaux sur I et $a, b, c \in I$. Alors :*

$$\int_a^c f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_b^c f(x)\ dx$$

Proposition 14. *Soit f une fonction réelle continue par morceaux sur l'intervalle I et $a, b \in I$. Si*

$$a \leqslant b \quad \text{et} \quad [\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geqslant 0]$$

alors

$$\int_a^b f(x)\ dx \geqslant 0$$

Remarques :

⇨ Soit f et g deux fonctions continues par morceaux telles que : $\forall x \in$ « $[a,b]$ » $\quad f(x) \leqslant g(x)$. Alors, si $a \leqslant b$, on a

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

et si $b \leqslant a$, on a

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$$

⇨ Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. On note

$$m = \inf_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x \in [a,b]} f(x)$$

Alors

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Exercices :

⇨ Calculer la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\frac{1}{n!} \int_0^1 \operatorname{Arcsin}^n x\, \mathrm{d}x$$

⇨ Déterminer le sens de variation puis la limite de la suite de terme général

$$\int_0^1 t^n e^t\, \mathrm{d}t$$

⇨ Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$. Calculer la limite de la suite de terme général

$$\int_n^{n+1} f(x)\ \mathrm{d}x$$

Proposition 15. *Soit f une fonction réelle continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Si f est positive sur $[a,b]$ et si il existe $x_0 \in [a,b]$ en lequel f est continue tel que $f(x_0) > 0$, alors :*

$$\int_a^b f(x)\ dx > 0$$

Proposition 16. *Soit f une fonction réelle continue sur le segment $[a,b]$ telle que :*

$$\int_a^b f(x)\ dx = 0$$

Si f est de signe constant sur $[a,b]$ alors :

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) = 0$$

Remarques :

⇨ Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ telle que

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

alors, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.

Exercices :

⇨ Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que

$$\int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = c$.

Proposition 17. *Soit f une fonction (réelle ou complexe) continue par morceaux sur l'intervalle I et $a,b \in \mathbb{R}$. Si $a \leqslant b$, alors :*

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$$

Exercices :

⇨ Soit f une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}_+$ et $0 < a < b$. Montrer que

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\substack{x\to 0\\ x>0}]{} f(0)\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

⇨ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. On définit la fonction g sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \int_0^1 f(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t$$

Montrer que g est lipschitzienne.

⇨ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\pi - 4\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}\right| \leqslant \frac{4}{2n+3}$$

1.5 Sommes de Riemann

Proposition 18. *Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$. Alors :*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\ dx$$

Remarques :

⇨ Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, alors

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

Exercices :

⇨ Calculer la limite de la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$$

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver un équivalent simple de

$$\sum_{k=0}^{n} k^\alpha$$

⇨ Soit g une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle, continue sur $[0,1]$. Montrer que

$$g\left(\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t\right) \leqslant \int_0^1 g(f(t))\ \mathrm{d}t$$

2 Intégration et dérivation

2.1 Continuité et dérivabilité

Proposition 19. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I, $a \in I$ et F la fonction définie sur I par :*

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

On suppose qu'il existe un intervalle $A \subset I$ et un réel $M \in \mathbb{R}_+$ tels que :

$$\forall x \in A \quad |f(x)| \leqslant M$$

Alors F est M-Lipschitzienne sur A.

Proposition 20. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et $a \in I$. Soit F la fonction définie sur I par :*

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

Alors F est continue sur I.

Proposition 21. *Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle I et $a \in I$. Soit F la fonction définie sur I par :*

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

Soit $x_0 \in I$. Si f est continue en x_0, alors F est dérivable en x_0 et :

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

Remarques :

⇨ Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b deux fonctions dérivables sur un intervalle J à valeurs dans I. On définit la fonction g sur J par

$$\forall x \in J \quad g(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Alors g est dérivable sur J et

$$\forall x \in J \quad g'(x) = b'(x) f(b(x)) - a'(x) f(a(x))$$

Exercices :

⇨ Déterminer les fonctions f, continues de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$, telles que :

$$\forall x \in]-1,1[\quad f(x) = 1 + \int_0^x f^2(t)\,\mathrm{d}t$$

2.2 Primitives

Définition 8. *Soit f une fonction définie sur une partie $\mathcal{D}_f$ de $\mathbb{R}$. On appelle primitive de f toute fonction F définie et dérivable sur $\mathcal{D}_f$ telle que :*

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \quad F'(x) = f(x)$$

Théorème 2. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors :*

- *f admet une primitive.*
- *Si F_1 est une primitive de f, une fonction F_2 définie sur $\mathcal{D}_f$ est une primitive de f si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tel que :*

$$\forall x \in I \quad F_2(x) = F_1(x) + c$$

Proposition 22. *Soit $I_1, \ldots, I_n$ n intervalles deux à deux bien disjoints (si $i \neq j$, $I_i \cup I_j$ n'est pas un intervalle) et f une fonction continue sur $\mathcal{D}_f = I_1 \cup \cdots \cup I_n$. Alors :*

- *f admet une primitive.*
- *Si F_1 est une primitive de f, une fonction F_2 définie sur $\mathcal{D}_f$ est une primitive de f si et seulement si il existe $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) tels que :*

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \forall x \in I_k \quad F_2(x) = F_1(x) + c_k$$

2.3 Calcul d'intégrales

Proposition 23. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a, b \in I$ et F une primitive de f sur I. Alors :*

$$\int_a^b f(t)\ dt = F(b) - F(a)$$

Remarques :

⇨ Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et si il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in I \quad |f'(x)| \leqslant M$$

alors f est M-Lipschitzienne. On retrouve donc l'inégalité des accroissements finis dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercices :

⇨ Si $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $x, y \geqslant a$, alors

$$\left|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}\right| \leqslant \frac{1}{n a^{\frac{n-1}{n}}} |x - y|$$

Proposition 24. *Soit I un intervalle, f une fonction continue sur I et g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Si F est une primitive de f, on a :*

$$\int_a^b \overbrace{f(t)}^{\text{intègre}}\ \underbrace{g(t)}_{\text{dérive}}\ dt = [F(t)\, g(t)]_a^b - \int_a^b F(t)\, g'(t)\ dt$$

Exercices :

⇨ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$$

Calculer I_n.

⇨ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(x) \sin(nx)\ \mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Proposition 25. *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $\overline{x}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans J, $x_a, x_b \in J$ et $t_a, t_b \in I$ tels que $\overline{x}(t_a) = x_a$ et $\overline{x}(t_b) = x_b$ et f une fonction continue sur J. Alors :*

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x)\ dx = \int_{t_a}^{t_b} f(\overline{x}(t)) \frac{d\overline{x}}{dt}(t)\ dt$$

Exercices :

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leqslant b$. Calculer

$$\int_a^b \sqrt{(x-a)(b-x)}\,\mathrm{d}x$$

⇨ Soit f une fonction réelle, définie sur $\mathbb{R}$ et continue en 0 telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Montrer que f est linéaire.

Proposition 26.
- *Soit $a \geqslant 0$ et f une fonction continue sur le segment $[-a, a]$.*
  - *Si f est paire :*

$$\int_{-a}^{0} f(x)\ dx = \int_0^a f(x)\ dx$$

En particulier :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 2\int_0^a f(x)\ dx$$

  - *Si f est impaire :*

$$\int_{-a}^{0} f(x)\ dx = -\int_0^a f(x)\ dx$$

En particulier :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\ dx = 0$$

- *Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, T-périodique. Alors :*

$$\int_a^{a+T} f(x)\ dx$$

ne dépend pas du réel a.

Exercices :

⇨ Donner une équivalent de la suite de terme général

$$\int_0^n |\sin t|\ \mathrm{d}t$$

⇨ Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique, continue par morceaux. Montrer que la suite de terme général

$$\int_a^b f(x)\, g(nx)\ \mathrm{d}x$$

converge et calculer sa limite.

2.4 Formules de Taylor

2.4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 27. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I.*
- *Si $a, b \in I$. Alors :*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt$$

- *Si $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a*

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \int_0^h \frac{(h-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(x_0+t)\ dt$$

Exercices :

⇨ Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

⇨ Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$. Montrer que :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{f(1)-f(0)}{2n} + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Proposition 28. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur l'intervalle I. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\forall t \in I \quad \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leqslant M$$

Alors, si $x_0 \in I$ et $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$, on a :

$$\left| f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k \right| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} |h|^{n+1}$$

2.4.2 Formule de Taylor-Young

Proposition 29. *Soit f une fonction continue sur un intervalle contenant* 0*. On suppose que f admet un développement limité en* 0 *à l'ordre n :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Si F est une primitive de f, elle admet un développement limité en 0 à l'ordre $n+1$ donné par :

$$F(x) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^{n+1}\right)$$

Proposition 30. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{n-1}$ sur intervalle contenant* 0 *et dérivable n fois en* 0*. Alors f admet un développement limité en 0 à l'ordre n et :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$