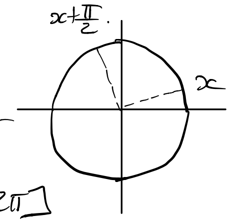
Exercice :

On pose $x := \operatorname{Arcsin} \frac{1+\sqrt{5}}{4}$. On a :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \text{donc} \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$
$$= 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2$$
$$= \frac{4^2 - (1+\sqrt{5})^2}{4^2}$$
$$= \frac{16 - (1+5+2\sqrt{5})}{16}$$
$$= \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16} = \frac{5-\sqrt{5}}{8}$$

Or
$$\cos 4x = 2\cos^2(2x) - 1$$
$$= 2 \cdot (2\cos^2 x - 1)^2 - 1$$
$$= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

Donc
$$\cos(4x) = 8\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^2 - 8 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right) + 1$$
$$= \frac{(5-\sqrt{5})^2 - 8(5-\sqrt{5}) + 8}{8}$$
$$= \frac{25 + 5 - 10\sqrt{5} - 40 + 8\sqrt{5} + 8}{8}$$
$$= \frac{-2 - 2\sqrt{5}}{8} = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$
$$= -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



Donc $4x \equiv x + \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$ ou $4x \equiv -\left(x + \frac{\pi}{2}\right) [2\pi]$

donc $3x \equiv \frac{\pi}{2} \; [2\pi]$ ou $5x \equiv -\frac{\pi}{2} \; [2\pi]$

donc $x \equiv \frac{\pi}{6} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$ ou $x \equiv -\frac{\pi}{10} \left[\frac{2\pi}{5}\right]$

Or $\frac{1+\sqrt{5}}{4} \geq 0$ donc $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{3\pi}{10}$.

Or $x \neq \pi/6$. En effet, si $x = \frac{\pi}{6}$, alors $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

donc $\sqrt{3} = 1 + \sqrt{5}$

donc $3 = (1+\sqrt{5})^2$

donc $3 = 1 + 5 + 2\sqrt{5}$

donc $2\sqrt{5} = -3 < 0$

C' est absurde. Donc $x = \frac{3\pi}{10}$.

Exercice

Montrer que $\forall x \in [0,1] \quad x \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

On définit f sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1] \quad f(x) = \arcsin x - x$.
D'après les théorèmes usuels, f est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $[0,1[$ et :

$$\forall x \in [0,1[\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1$$

$$= \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \geqslant 0.$$

Donc f est croissante sur $[0,1[$. Comme elle est continue en 1, elle est croissante sur $[0,1]$. Or $f(0) = 0$. Donc

$$\forall x \in [0,1] \qquad f(x) \geqslant 0$$

donc $\quad x \leqslant \arcsin x$

On definit la fonction g sur $[0,1]$ par :

$$\forall x \in [0,1[\qquad g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$$

$$= x(1-x^2)^{-1/2} - \arcsin x$$

D'après les théorèmes usuels, g est dérivable sur $[0,1[$ et

$$\forall x \in [0,1[\qquad g'(x) = (1-x^2)^{-1/2} + x.(-2x)\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-3/2} - (1-x^2)^{1/2}.$$

$$= \frac{x^2}{(1-x^2)^{3/2}} \geqslant 0.$$

Donc g est croissante sur $[0,1[$. Or $g(0) = 0$ donc.

$$\forall x \in [0,1[\qquad g(x) \geqslant 0$$

$$\arcsin x \leqslant \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exemple

Résoudre l'équation

$$\arctan(2x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{4}.$$

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \arctan(2x) + \arctan(3x) - \frac{\pi}{4}.$$

D'après les théorèmes usuels, f est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante. De plus :

$$f(0) = -\frac{\pi}{4} < 0 \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \arctan\frac{3}{2} > 0$$

donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f admet une solution $\theta \in [0, 1/2]$. De plus cette solution est unique car f est strictement croissante. Comme

$$\underbrace{\arctan(2\theta)}_{>0} + \underbrace{\arctan(3\theta)}_{>0} = \frac{\pi}{4}$$

on en déduit que $0 \leq \arctan 2\theta < \frac{\pi}{4}$ et $0 \leq \arctan(3\theta) < \frac{\pi}{4}$.
Donc, on peut prendre la tan et appliquer la formule $\tan(a+b) = \ldots$
Donc

$$\tan(\arctan(2\theta) + \arctan(3\theta)) = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\tan(\arctan(2\theta)) + \tan(\arctan(3\theta))}{1 - \tan(\arctan(2\theta))\tan(\arctan(3\theta))} = 1$$

donc $$\frac{5\theta}{1 - 6\theta^2} = 1$$

donc $5\theta = 1 - 6\theta^2$

donc $6\theta^2 + 5\theta - 1 = 0$

$$\Delta = 25 + 4 \times 6 = 49 = 7^2$$

donc $$\theta = \frac{-5 \pm 7}{12}$$

donc $\theta = \frac{-12}{12}$ ou $\theta = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

Or $\theta \geq 0$. Donc $\theta = \frac{1}{6}$.

Donc l'unique solution de l'équation est $1/6$

Exercice

Soit f défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) = x - \arctan x .$$

D'après les théorèmes usuels, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et :

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geqslant 0.$$

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Or $f(0)=0$, donc

$$\forall x \geqslant 0 \qquad f(x) \geqslant 0$$
$$\arctan x \leqslant x .$$

Montrons que

$$4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

$0 \leqslant \arctan \frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{5}$ donc $0 \leqslant 4 \arctan \frac{1}{5} \leqslant \frac{4}{5} < 1 < \frac{\pi}{2}$.

Donc $\theta_1 := 4 \arctan \frac{1}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}[$. De même $\theta_2 := \arctan \frac{1}{239} \in [0, \frac{\pi}{2}[$

Donc $\theta_1 - \theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pour montrer que $\theta_1 - \theta_2 = \frac{\pi}{4}$, il suffit donc de montrer que $\tan(\theta_1 - \theta_2) = 1$. Or

$$\tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

D'autre part, calculons $\tan(4\theta)$ en fonction de $\tan\theta$.

$$\cos 4\theta + i\sin(4\theta) = e^{i4\theta} = (e^{i\theta})^4 = (\cos\theta + i\sin\theta)^4$$
$$= \cos^4\theta + 4\cos^3\theta\,(i\sin\theta) + 6\cos^2\theta\,(i\sin\theta)^2$$
$$+ 4\cos\theta\,(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4$$
$$= \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$
$$+ i\left(4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta\right)$$

1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Donc
$$\tan(4\theta) = \frac{\sin(4\theta)}{\cos(4\theta)} = \frac{4\cos^3\theta\sin\theta - 4\cos\theta\sin^3\theta}{\cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta}$$
$$= \frac{4\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - 4\frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}}{1 - 6\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\sin^4\theta}{\cos^4\theta}} = \frac{4(\tan\theta - \tan^3\theta)}{1 - 6\tan^2\theta + \tan^4\theta}$$

Donc $\tan\left(4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)\right) = \dfrac{4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5^3}\right)}{1-6\left(\frac{1}{5}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^4}$

$$= \frac{4\times\frac{24}{5^3}}{\frac{5^4-6\times5^2+1}{5^4}} = \frac{20\times24}{25(25-6)+1}$$

$$= \frac{480}{476} = \frac{120}{119}$$

Donc $\tan(\theta_1-\theta_2) = \dfrac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1+\frac{120}{119}\times\frac{1}{239}} = \dfrac{120\times239-119}{119\times239+120} = \dfrac{28561}{28561} = 1$

Donc $4\arctan\frac{1}{5} - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

Remarque : Nous verrons des techniques pour avoir une bonne valeur approchée de $\arctan x$ pour x "petit". Cette formule permet donc de calculer une valeur approchée de $\pi/4$ et donc de π. Ce type de formule, appelée formule de Machin (il y eut un John Machin qui découvrit ce type de formules vers 1706) a été utilisée pour calculer des valeurs approchées de π. John Machin l'utilisa pour obtenir 100 décimales correctes de π. Il y a depuis des formules de Machin plus efficaces faisant intervenir des $\arctan x$ pour x encore plus petit (ici on est limité par $1/5$) et on a trouvé depuis des techniques plus efficaces pour calculer les décimales de π.

Exercice :

Je vous laisse conduire les calculs. On trouve

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x+1}\,dx = \ln(x^2+x+1) + \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int \arctan x \,.\, dx = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$