COURS : ESPACES VECTORIELS

Table des matières

1 Espace vectoriel, application linéaire

1.1 Définition, propriétés élémentaires

Définition 1 (○○●). *Soit $\mathbb{K}$ un corps, $(E,+)$ un groupe commutatif d'élément neutre 0_E et $\cdot$ une loi de composition externe :*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

On dit que $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel lorsque :

$$\begin{array}{rl} \forall x,y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} & \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ \forall x \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} & (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \forall x \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} & \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda\mu) \cdot x \\ \forall x \in E & 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x \end{array}$$

Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires, ceux de E, vecteurs.

Proposition 1 (○○●). *On a :*

$$\begin{array}{rl} \forall x \in E & 0_{\mathbb{K}} \cdot x = 0_E \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} & \lambda \cdot 0_E = 0_E \\ \forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} & (-\lambda) \cdot x = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x) \end{array}$$

Remarque :

⇨ (●○○) En particulier, si $x \in E$, $(-1) \cdot x = -x$.

Proposition 2 (●○○). *On a :*

$$\forall x \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot x = 0_E \quad \Longrightarrow \quad [\lambda = 0_{\mathbb{K}} \quad ou \quad x = 0_E]$$

Définition 2 (○○●). *Soit $\mathbb{K}$ un corps et $n \in \mathbb{N}^*$. On définit sur $E = \mathbb{K}^n$:*
- *la loi de composition interne $+$ par :*

$$\forall (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$$
$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

- *la loi de composition externe $\cdot$ par :*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

Alors $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre $(0, \dots, 0)$.

Remarques :

⇨ (●○○) En particulier, $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 3 (○○●). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et X un ensemble non vide. On définit sur $\mathcal{F}(X, E)$:*
- *la loi de composition interne $+$ par :*

$$\forall f, g \in \mathcal{F}(X, E) \quad \forall x \in X \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

- *la loi de composition externe $\cdot$ par :*

$$\forall f \in \mathcal{F}(X, E) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)$$

Alors $(\mathcal{F}(X, E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont l'élément neutre est l'application de X dans E qui à tout $x \in X$ associe 0_E. En particulier, $(\mathcal{F}(X, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques :

⇨ (○○●) Muni des lois usuelles, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels dont les « zéros » sont respectivement la fonction nulle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et la suite nulle.

Définition 4 (○●○). *Soit $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On définit sur $E \times F$:*

— *la loi de composition interne $+$ par :*

$$\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F \quad (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

— *la loi de composition externe $\cdot$ par :*

$$\forall (x, y) \in E \times F \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot (x, y) = (\lambda \cdot x, \lambda \cdot y)$$

Alors $(E \times F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel d'élément neutre $(0_E, 0_F)$.

Proposition 3 (●○○). *Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{L}$-espace vectoriel et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{L}$. Alors $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. En particulier $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Remarques :

⇨ (●○○) Muni des lois usuelles, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Comme $\mathbb{R}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

⇨ (○●○) $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.2 Sous-espace vectoriel

Proposition 4 (○○●). *On dit qu'une partie F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E lorsque :*

— $0 \in F$

— *F est stable par combinaisons linéaires :*

$$\forall x, y \in F \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \lambda x + \mu y \in F$$

Si tel est le cas, $(F, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarques :

⇨ (○○●) Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0\}$ et E en sont des sous-espaces vectoriels.

⇨ (○●○) Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors

$$F = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Par exemple, l'ensemble d'équation $x + y + z = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercices :

⇨ Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

Proposition 5 (○○●). *Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.*

Remarques :

⇨ (●○○) Contrairement à l'intersection, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel.

⇨ (○●○) Soit $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant p}$ une famille de scalaires. Alors

$$F = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p : \forall i \in [\![1, q]\!] \quad \lambda_{i,1} x_1 + \cdots + \lambda_{i,p} x_p = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$. Par exemple, l'ensemble d'équation

$$\begin{cases} x + y \ \ + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Définition 5 (○●○). *Soit A une partie d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A ; on l'appelle sous-espace vectoriel engendré par A et on le note* $\operatorname{Vect} A$.

Proposition 6 (○●○). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x_1, \ldots, x_n \in E$. Alors :*

$$\operatorname{Vect}\{x_1, \ldots, x_n\} = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

Les éléments de $\operatorname{Vect}\{x_1, \ldots, x_n\}$ *sont appelés combinaisons linéaires de la famille $x_1, \ldots, x_n$.*

Remarques :

⇨ (○●○) Si E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $x \in E$, l'espace vectoriel engendré par x est $\mathbb{K}x = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Si $x = 0$, alors $\operatorname{Vect}\{x\} = \{0\}$. Sinon, pour tout vecteur non nul y de $\operatorname{Vect}\{x\}$, $\operatorname{Vect}\{x\} = \operatorname{Vect}\{y\}$.

⇨ (○●○) On dit qu'un espace vectoriel E est une droite vectorielle lorsqu'il existe $x \in E$ non nul tel que $E = \operatorname{Vect}\{x\}$.

⇨ (○●○) Si A une partie de E, on montre de même que $\operatorname{Vect} A$ est l'ensemble des éléments $x \in E$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n \in A$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

Ces éléments sont ce qu'on appelle les combinaisons linéaires des éléments de A.

Exercices :

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer $\operatorname{Vect} A$ où

$$A = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0\}$$

1.3 Application linéaire

Définition 6 (○○●). *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dit qu'une application f de E dans F est une application linéaire lorsque :*

$$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Plus précisément, on dit que f est un :
- *endomorphisme lorsque $E = F$*
- *isomorphisme lorsque f est bijective*
- *automorphisme lorsque f est un endomorphisme et un isomorphisme.*

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Remarques :

⇨ (○○●) Soit f est une application linéaire de E dans F. Alors, $f(0_E) = 0_F$.

⇨ (○●○) Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$. Alors, l'application de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}$ qui au n-uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ associe $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ est linéaire. Plus généralement, si $(\lambda_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant p}$ est une famille de scalaires, l'application de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^q$ qui au p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ associe le q-uplet $(\lambda_{1,1} x_1 + \cdots + \lambda_{1,p} x_p, \dots, \lambda_{q,1} x_1 + \cdots + \lambda_{q,p} x_p)$ est linéaire. Par exemple les applications

$$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longmapsto & x + y - 2z \end{array} \qquad \text{et} \qquad \varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - 2y + 3z) \end{array}$$

sont linéaires.

⇨ (●○○) La conjugaison est un automorphisme de $\mathbb{C}$ lorsqu'il est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel mais pas lorsqu'il est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

⇨ (●○○) Soit f est un endomorphisme du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et F un sous-espace vectoriel de E. Lorsque F est stable par f, c'est-à-dire lorsque $f(F) \subset F$, la restriction de f à F corestreinte à F est un endomorphisme de F appelé endomorphisme induit à F.

Définition 7 (○●○). *On dit qu'une application f de E dans E est une homothétie lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :*

$$\forall x \in E \quad f(x) = \lambda x$$

Les homothéties de E sont des endomorphismes.

Remarques :

⇨ (●○○) Si E est une droite vectorielle, les homothéties sont les seuls endomorphismes de E.

Définition 8 (●○○). *On appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est noté $E^\star$ et appelé dual de E.*

Proposition 7 (○○●). *Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.*
- *L'image réciproque par f d'un sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.*
- *L'image directe par f d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.*

Définition 9 (○○●). *On appelle noyau de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note $\operatorname{Ker} f$ l'ensemble :*

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E : f(x) = 0\}$$

C'est est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 8 (●●●). *Une application linéaire f est injective si et seulement si* $\operatorname{Ker} f = \{0\}$.

Définition 10 (○○●). *On appelle image de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et on note $\operatorname{Im} f$ l'ensemble :*

$$\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in E\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de F.

Remarques :

⇨ (○○●) f est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} f = F$.

⇨ (●○○) Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, alors $\operatorname{Im}(\lambda f) = \operatorname{Im} f$.

Exercices :

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que

$$\operatorname{Ker}(g \circ f) = \operatorname{Ker} f \iff \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$$

⇨ Soit f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Proposition 9 (●○○). *Soit f une application linéaire de E dans F et $y_0 \in F$. On considère l'équation :*

$$f(x) = y_0$$

- *Si $y_0 \notin \operatorname{Im} f$, cette équation n'admet aucune solution.*
- *Sinon, étant donné une solution particulière x_0 de cette équation, l'ensemble de ses solutions est*

$$x_0 + \operatorname{Ker} f = \{x_0 + x : x \in \operatorname{Ker} f\}$$

Remarques :

⇨ (●○○) Attention, sauf si $y_0 = 0$, $x_0 + \operatorname{Ker} f$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E car $f(0) \neq y_0$, donc $0 \notin x_0 + \operatorname{Ker} f$.

Proposition 10 (○○●).
- *La composée de deux applications linéaires est linéaire.*
- *La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.*

2 Espace vectoriel des applications linéaires

2.1 $\mathcal{L}(E,F)$

Définition 11 (○○●). *$(\mathcal{L}(E,F),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 11 (●○○). *On dit qu'une partie B de l'algèbre $(A,+,\cdot,\times)$ est une sous-algèbre de A lorsque c'est un sous-espace vectoriel de A et un sous-anneau de A, c'est-à-dire lorsque :*

$$\begin{array}{lll} \forall x,y\in B & \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K} & \lambda x+\mu y\in B \\ & & 1_A\in B \\ & \forall x,y\in B & x\times y\in B \end{array}$$

Si tel est le cas $(B,+,\cdot,\times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Proposition 12 (●○○). *On dit qu'une application φ d'une algèbre $(A,+,\cdot,\times)$ dans une algèbre $(B,+,\cdot,\times)$ est un morphisme d'algèbre lorsque φ est une application linéaire et un morphisme d'anneau, c'est-à-dire lorsque :*

$$\begin{array}{lll} \forall x,y\in A & \forall \lambda,\mu\in\mathbb{K} & \varphi(\lambda x+\mu y)=\lambda\varphi(x)+\mu\varphi(y) \\ & & \varphi(1_A)=1_B \\ & \forall x,y\in A & \varphi(x\times y)=\varphi(x)\times\varphi(y) \end{array}$$

Proposition 13 (○○●). *$(\mathcal{L}(E),+,\cdot,\circ)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre.*

Remarques :

⇨ (○○●) Dans la $\mathbb{K}$-algèbre $(\mathcal{L}(E),+,\cdot,\circ)$, l'élément neutre pour l'addition est l'application nulle et l'élément neutre pour la composition est l'identité.

⇨ (○○●) Si $f\in\mathcal{L}(E)$, on définit f^n pour tout $n\in\mathbb{N}$, comme dans tout anneau, par $f^0=\mathrm{Id}$ et $\forall n\in\mathbb{N}\quad f^{n+1}=f\circ f^n$. Autrement dit, si $n\in\mathbb{N}^*$

$$f^n=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n \text{ fois } f}$$

Attention, si $x\in E$, $f^2(x)=f(f(x))$ et non $f(x)^2$, expression qui n'a d'ailleurs aucun sens.

⇨ (○○●) En général, l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutative. Par exemple, si $E=\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les endomorphismes

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1:E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi_2:E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \varphi_2(f):\begin{array}[t]{rcl}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xf(x)\end{array} \end{array}$$

ne commutent pas. Plus généralement, on peut démontrer que si E n'est pas une droite vectorielle, $\mathcal{L}(E)$ n'est pas commutatif.

⇨ (○○●) En général, l'algèbre $\mathcal{L}(E)$ n'est pas intègre. Par exemple, si E est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'endomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \varphi:E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

n'est pas nul, alors que $\varphi^2=0$. Plus généralement, on peut démontrer que si E n'est pas une droite vectorielle, $\mathcal{L}(E)$ n'est pas intègre.

⇨ (○○●) $\mathcal{L}(E)$ étant une algèbre et donc un anneau, si f et g sont deux endomorphismes de E tels que $f\circ g=g\circ f$ et $n\in\mathbb{N}$, alors

$$(f+g)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{n-k}\circ g^k$$

Enfin, si $n\in\mathbb{N}^*$

$$f^n-g^n=(f-g)\circ\left[\sum_{k=0}^{n-1}f^{n-1-k}\circ g^k\right]=\left[\sum_{k=0}^{n-1}f^{n-1-k}\circ g^k\right]\circ(f-g)$$

Exercices :

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f\in\mathcal{L}(E)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit $K_n=\operatorname{Ker} f^n$ et $I_n=\operatorname{Im} f^n$. Montrer que les suites (K_n) et (I_n) sont respectivement croissantes et décroissantes au sens de l'inclusion.

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit $\Delta, T\in\mathcal{L}(E)$ par

$$\forall f\in E\quad\forall x\in\mathbb{R}\quad T(f)(x)=f(x+1)\quad\text{et}\quad\Delta(f)(x)=f(x+1)-f(x)$$

Calculer T^k et Δ^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.

2.2 Le groupe linéaire

Proposition 14 (●●●). *Un endomorphisme $u\in\mathcal{L}(E)$ est un automorphisme si et seulement si il existe $v\in\mathcal{L}(E)$ tel que*

$$u\circ v=\mathrm{Id}_E\quad\text{et}\quad v\circ u=\mathrm{Id}_E\,.$$

Autrement dit, les automorphismes de E sont les éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{L}(E)$.

Définition 12 (○●○). *On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E. Muni de la loi de composition, c'est un groupe appelé groupe linéaire de E.*

3 Somme, somme directe, projecteur

3.1 Somme, somme directe

Définition 13 (○○●)**.** *On appelle somme de deux sous-espaces vectoriels A et B de E, et on note $A+B$, le plus petit sous-espace vectoriel contenant A et B. On a :*

$$A+B=\{a+b : a\in A \quad b\in B\}$$

Remarques :

⇨ (●○○) Si f et g sont deux applications linéaires de E dans F qui coïncident sur deux sous-espaces vectoriels A et B tels que $A+B=E$, alors $f=g$.

Exercices :

⇨ Si $f,g\in\mathcal{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im}(f+g)\subset \operatorname{Im} f+\operatorname{Im} g$. L'inclusion peut être stricte.

⇨ Soit A, B, C et D des sous-espaces vectoriels de E tels que $A\subset C$, $B\subset D$ et $A+B=C+B$. Montrer que $A+D=C+D$.

Définition 14 (○○●)**.** *On dit que deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe lorsque l'écriture $x=a+b$ (avec $a\in A$ et $b\in B$) de tout élément $x\in A+B$ est unique. Si tel est le cas, la somme $A+B$ est notée $A\oplus B$.*

Proposition 15 (●●●)**.** *Deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont en somme directe si et seulement si :*

$$A\cap B=\{0\}$$

Définition 15 (○○●)**.** *On dit que deux sous-espaces vectoriels A et B de E sont supplémentaires lorsque :*

$$A\oplus B=E$$

Exercices :

⇨ Soit $f\in\mathcal{L}(E)$ tel que $f^3=f^2+f$. Montrer que $E=\operatorname{Ker} f\oplus \operatorname{Im} f$.

3.2 Projecteur

Définition 16 (○○●)**.** *Soit A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, il existe une unique endomorphisme $p\in\mathcal{L}(E)$ tel que :*

$$\forall a\in A \quad \forall b\in B \quad p(a+b)=a$$

On l'appelle projecteur sur A parallèlement à B

Définition 17 (●○○)**.** *Si p est le projecteur sur A parallèlement à B, le projecteur q sur B parallèlement à A est appelé projecteur associé à p. On a :*

$$p+q=\mathrm{Id} \quad \textit{et} \quad p\circ q=q\circ p=0$$

De plus, pour tout $x\in E$

$$x=\underbrace{p(x)}_{\in A}+\underbrace{q(x)}_{\in B}$$

est la décomposition de x dans $E=A\oplus B$.

Proposition 16 (●○○)**.** *Soit p le projecteur sur A parallèlement à B. Alors :*

$$\operatorname{Ker} p=B \qquad \operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id})=A \qquad \operatorname{Im} p=A$$

De plus $p\circ p=p$.

Remarques :

⇨ (●○○) En particulier, si $p\in\mathcal{L}(E)$ est un projecteur

$$E=\operatorname{Ker} p\oplus\operatorname{Ker}(p-\mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad E=\operatorname{Ker} p\oplus \operatorname{Im} p$$

Proposition 17 (●●●)**.** *$p\in\mathcal{L}(E)$ est un projecteur si et seulement si $p\circ p=p$.*

Exercices :

⇨ Soit Re l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à z associe $\mathrm{Re}(z)$. Montrer que Re est un projecteur de $\mathbb{C}$ lorsqu'il est considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

⇨ Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application φ de E dans E par :

$$\forall f\in E \quad \forall x\in\mathbb{R} \quad [\varphi(f)](x)=f(0)+f'(0)x$$

Montrer que φ est un projecteur. En déduire un supplémentaire du sous-espace vectoriel de E des fonctions affines.

Proposition 18 (●○○)**.** *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et A,B deux sous-espaces supplémentaires de E. Étant donnés $f_A\in\mathcal{L}(A,F)$ et $f_B\in\mathcal{L}(B,F)$, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que :*

$$\forall a\in A \quad \forall b\in B \quad f(a)=f_A(a)+f_B(b)$$

3.3 Symétrie

Définition 18 (○○●)**.** *Soit A et B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, il existe un unique endomorphisme $s\in\mathcal{L}(E)$ tel que :*

$$\forall a\in A \quad \forall b\in B \quad s(a+b)=a-b$$

On l'appelle symétrie par rapport à A parallèlement à B.

Proposition 19 (●○○). *Soit s la symétrie par rapport à A parallèlement à B. Alors :*

$$\operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}) = A \qquad \operatorname{Ker}(s+\operatorname{Id}) = B$$

De plus $s \circ s = \operatorname{Id}$. En particulier s est un isomorphisme et $s^{-1} = s$.

Remarques :

⇨ (●○○) En particulier, si $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie

$$E = \operatorname{Ker}(s-\operatorname{Id}) \oplus \operatorname{Ker}(s+\operatorname{Id})$$

Proposition 20 (●●●). *$s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie si et seulement si $s \circ s = \operatorname{Id}$.*

Exercice :

⇨ Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et φ l'application de E dans E qui à f associe le fonction $\varphi(f)$ définie par $\forall x \in \mathbb{R} \quad [\varphi(f)](x) = f(-x)$. Montrer que φ est une symétrie et en déduire que $E = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$ où $\mathcal{I}$ désigne l'espace vectoriel des fonctions impaires et $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des fonctions paires.