Cours : Dimension finie

Table des matières

1 Famille libre, famille génératrice, base

1.1 Famille libre

Définition 1 (○○●). *On dit qu'une famille $(x_1,\dots,x_p)\in E$ est libre lorsque quels que soient $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$:*

$$\lambda_1x_1+\dots+\lambda_px_p=0 \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1=\dots=\lambda_p=0$$

Sinon, on dit qu'elle est liée ; dans ce cas, toute relation du type $\lambda_1x_1+\dots+\lambda_px_p=0$ où les λ_k ne sont pas tous nuls est appelée relation de liaison.

Exercices :

- ⇨ Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la famille $((1,2,0),(2,1,1),(3,3,\lambda))$ soit une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
- ⇨ Montrer que sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la famille $(\sin,\cos)$ est libre. Que dire si on lui adjoint la fonction d'expression $\sin(x+\pi/4)$?
- ⇨ Sur $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, montrer que si $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ sont des nombres complexes deux à deux distincts, la famille des fonctions d'expressions $e^{\alpha_1x},e^{\alpha_2x},\dots,e^{\alpha_px}$ est libre.
- ⇨ Montrer que la famille $(1,\sqrt{2},\sqrt{3})$ est libre dans $\mathbb{R}$ considéré comme un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel.

Remarques :

- ⇨ (○○●) Une famille libre reste libre lorsqu'on effectue une permutation de ses vecteur ou lorsqu'on retire certains de ses vecteurs.
- ⇨ (○●○) Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E en somme directe, si $(a_1,\dots,a_p)$ est une famille libre d'éléments de A, si $(b_1,\dots,b_q)$ est une famille libre d'éléments de B, alors $(a_1,\dots,a_p,b_1,\dots,b_q)$ est une famille libre.
- ⇨ (○●○) Une famille est libre si et seulement si il n'existe aucun vecteur qui est combinaison linéaire des autres.
- ⇨ (○●○) Si $(x_1,\dots,x_p)$ est une famille libre et si $x\notin\mathrm{Vect}(x_1,...,x_p)$, alors la famille $(x_1,\dots,x_p,x)$ est libre.
- ⇨ (○●○) Une famille composée d'un unique vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul. Une famille formée de deux vecteurs est libre si et seulement si ces vecteurs ne sont pas colinéaires. En particulier, une famille libre ne contient ni vecteur nul, ni doublon, ni vecteurs colinéaires.
- ⇨ (●○○) Sur $\mathbb{C}$, considéré comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, les familles $(1,i)$ et $(1,j)$ sont libres, mais la famille $(1,i,j)$ est lié. Si $\mathbb{C}$ est considéré comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, toutes ces familles sont liées. La notion de liberté dépend donc du corps considéré.

Proposition 1 (○●○). *L'image d'une famille libre par une application linéaire injective est une famille libre.*

1.2 Famille génératrice

Définition 2 (○○●). *On dit qu'une famille $(x_1,\dots,x_p)\in E$ est génératrice lorsque quel que soit $x\in E$, il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_p\in\mathbb{K}$ tels que :*

$$x=\lambda_1x_1+\dots+\lambda_px_p$$

Autrement dit, la famille $(x_1,\dots,x_p)$ est génératrice lorsque $\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_p)=E$.

Exercices :

- ⇨ Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la famille $((1,2,0),(2,1,1),(3,3,\lambda))$ soit une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- ⇨ Soit $n\in\mathbb{N}$ et $\alpha\in\mathbb{C}$. Montrer que la famille $(1,(X-\alpha),(X-\alpha)^2,\dots,(X-\alpha)^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{C}_n[X]$.

Remarques :

- ⇨ (○○●) Une famille génératrice reste génératrice lorsqu'on effectue une permutation de ses vecteur ou lorsqu'on lui rajoute d'autres vecteurs.
- ⇨ (○●○) Si $(x_1,\dots,x_p)$ est une famille génératrice et si $x_p\in\mathrm{Vect}(x_1,\dots,x_{p-1})$, alors la famille $(x_1,\dots,x_{p-1})$ est génératrice.

⇨ (○●○) Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = A+B$, si $(a_1, \dots, a_p)$ est une famille génératrice de A, si $(b_1, \dots, b_q)$ est une famille génératrice de B, alors $(a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q)$ est une famille génératrice de E.

Proposition 2 (○●○). *Soit f et g deux applications linéaires de E dans F. On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille génératrice de E telle que :*

$$\forall k \in [\![1, p]\!] \quad f(x_k) = g(x_k)$$

Alors $f = g$.

Exercices :

⇨ Montrer la formule de Simpson

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X] \quad \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = \frac{P(0) + 4P(1/2) + P(1)}{6}$$

Proposition 3 (○●○). *Soit f une application linéaire de E dans F. Alors l'image $(f(x_1), \dots, f(x_p))$ d'une famille génératrice $(x_1, \dots, x_p)$ de E est une famille génératrice de $\operatorname{Im} f$. En particulier, si f est surjective, l'image par f d'une famille génératrice de E est une famille génératrice de F.*

Proposition 4 (○●○). *Soit f une application linéaire de E dans F. On suppose que chaque élément d'une famille génératrice $(y_1, \dots, y_p)$ de F admet un antécédent par f. Alors f est surjective.*

1.3 Base

Définition 3 (○○●). *On dit qu'une famille $(e_1, \dots, e_n)$ de E est une base de E lorsqu'elle est libre et génératrice.*

Remarques :

⇨ (○○●) Une base reste une base lorsqu'on effectue une permutation de ses vecteurs.

⇨ (○●○) Si A et B sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, si $(a_1, \dots, a_n)$ est une base de A, et si $(b_1, \dots, b_m)$ est une base de B, alors $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m)$ est une base de E.

Définition 4 (○○●).

- *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ définie par*

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

  est une base $\mathbb{K}^n$, appelée base canonique.
- *Si $n \in \mathbb{N}$, la famille $1, X, \dots, X^n$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. On l'appelle base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.*

Définition 5 (○○●). *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors pour tout $x \in E$ il existe un unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :*

$$x = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$$

On dit que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les coordonnées de x relativement à la base $\mathcal{B}$.

Remarques :

⇨ (○○●) En reprenant les notations de la définition précédente, l'application φ de E dans $\mathbb{K}^n$ qui au vecteur x associe le n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est un isomorphisme.

Proposition 5 (○●○). *Soit f une application linéaire de E dans F et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F.*

Théorème 1 (●●●). *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors quels que soient $(y_1, \dots, y_n) \in F$, il existe une unique application linéaire f de E dans F telle que :*

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad f(e_k) = y_k$$

Remarques :

⇨ (●●●) En reprenant les notations du théorème, f est injective si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est libre. De même, f est surjective si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est une famille génératrice de F. Enfin, f est bijective si et seulement si $(y_1, \dots, y_n)$ est une base de F.

Exercices :

⇨ Soit $E = \mathbb{R}^3$. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 = \mathrm{Id}$ et $u \neq \mathrm{Id}$.

1.4 Cas des familles infinies

Définition 6 (○○●). *On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de E est libre lorsque quels que soient $i_1, \dots, i_p \in I$ deux à deux distincts et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$:*

$$\lambda_1 x_{i_1} + \cdots + \lambda_p x_{i_p} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

Sinon, on dit qu'elle est liée ; dans ce cas, toute relation du type $\lambda_1 x_{i_1} + \cdots + \lambda_p x_{i_p} = 0$ où les λ_k ne sont pas tous nuls est appelée relation de liaison.

Exercice :

⇨ Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit la fonction f_a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_a(x) = |x - a|$$

Montrer que la famille $(f_a)_{a \in \mathbb{R}}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Définition 7 (○○●). *On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est génératrice lorsque quel que soit $x \in E$, il existe $i_1, \dots, i_p \in I$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que :*

$$x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p$$

Autrement dit, la famille $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice lorsque $\operatorname{Vect}\{x_i : i \in I\} = E$.

Définition 8 (○○●). *On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ de E est une base de E lorsqu'elle est libre et génératrice.*

Exemple :

⇨ (●○○) La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{K}[X]$.

Remarque :

⇨ (●○○) On peut démontrer que tout espace vectoriel admet une base. Mais la démonstration de ce résultat est loin d'être élémentaire et fait appel à l'axiome du choix. En conséquence $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ admet une base en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et $\mathbb{R}$ admet une base en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Mais c'est assez inutile puisque personne ne sait expliciter de telles bases.

2 Théorie de la dimension

2.1 Espace vectoriel de dimension finie

Définition 9 (○○●). *On dit qu'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie. Dans le cas contraire, on dit que E est de dimension infinie.*

Exercices :

⇨ $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}_n[X]$ sont de dimension finie. Cependant, $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie.

Théorème 2 (●●●). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $(e_1, \dots, e_m)$ une famille libre de E et $(g_1, \dots, g_p)$ une famille génératrice de E. Alors il est possible de compléter la famille $(e_1, \dots, e_m)$ en une base $(e_1, \dots, e_m, g_{i_{m+1}}, \dots, g_{i_n})$ de E où $(g_{i_{m+1}}, \dots, g_{i_n})$ sont des éléments de la famille $(g_1, \dots, g_p)$.*
En particulier toute famille libre de E se complète en une base de E.

Exercices :

⇨ Compléter la famille $(X^2 - 1, X^2 + 1)$ en une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Théorème 3 (○○●). *Tout espace vectoriel de dimension finie admet une base.*

Remarques :

⇨ (○○●) Un espace vectoriel est de dimension finie si et seulement si il admet une base (finie).

2.2 Dimension d'un espace vectoriel

Théorème 4 (○●○). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $(g_1, \dots, g_n)$ une famille génératrice de E. Alors toute famille libre de E possède au plus n éléments.*

Remarques :

⇨ (○●○) Pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension infinie, il suffit de trouver des familles libres possédant autant d'éléments que l'on souhaite. En particulier $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est de dimension infinie.

Définition 10 (●●●). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments ; on appelle dimension de E et on note* $\dim E$ *cet entier.*

Remarques :

⇨ (○○●) On dit qu'un espace vectoriel de dimension 1 est une droite vectorielle et qu'un espace vectoriel de dimension 2 est un plan vectoriel.

⇨ (○●○) Si $E = \{0\}$, la famille vide est une base de E, donc E est de dimension finie et $\dim E = 0$.

⇨ (●○○) Considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathbb{C}$ est de dimension 2. Cependant, $\mathbb{C}$ est de dimension 1 lorsqu'on le considère comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. La dimension est donc une notion qui dépend du corps.

Exercices :

⇨ Dans $\mathbb{R}^3$, le sous-espace vectoriel d'équation $x + y + z = 0$ est de dimension 2.

⇨ Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

Proposition 6 (○○●). *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
- *$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.*
- *$\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n + 1$.*

Proposition 7 (○○●). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de p éléments de E.*
- *Si $(x_1, \dots, x_p)$ est libre, alors $p \leqslant n$.*
- *Si $(x_1, \dots, x_p)$ est génératrice, alors $p \geqslant n$.*

Exercices :

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme nilpotent de E. En notant m_0 le plus petit entier tel que $f^{m_0} = 0$, montrer qu'il existe $x \in E$ tel que la famille $(x, f(x), \dots, f^{m_0-1}(x))$ est libre. Que peut-on en déduire sur m_0 ?

Proposition 8 (●●○). *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si F est de dimension finie et* $\dim E = \dim F$.
En particulier, si E est de dimension n, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

2.3 Deux théorèmes fondamentaux

Proposition 9 (●●●). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors :*
- *Toute famille libre de E comportant n éléments est une base de E.*
- *Toute famille génératrice de E comportant n éléments est une base de E.*

Autrement dit, si la famille $\mathcal{F}$ est composée de n éléments :

$$\mathcal{F} \text{ est libre} \iff \mathcal{F} \text{ est une base} \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice}$$

Remarques :

⇨ (●●○) Si $(P_0, \dots, P_n)s$ une famille de polynômes tels que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \deg P_k = k$$

(on dit que la famille est une famille de polynômes de degrés échelonnés), alors c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercices :

⇨ Montrer que l'application de $\mathbb{C}_{n+1}[X]$ dans $\mathbb{C}_n[X]$ qui à P associe $P(X+1) - P(X)$ est surjective.

⇨ Quels sont les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ stables par dérivation ?

Théorème 5 (●●●). *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.*
- *Si f est injective et $\dim E = \dim F$, alors f est un isomorphisme.*
- *Si f est surjective et $\dim E = \dim F$, alors f est un isomorphisme.*

Autrement dit, si $\dim E = \dim F$:

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est bijective} \iff f \text{ est surjective}$$

Remarques :

⇨ (○○●) Si f est un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie E, pour montrer que c'est un automorphisme, il suffit de montrer qu'il est injectif (ou surjectif).

⇨ (●○○) Ce théorème est faux si E et F ne sont pas de même dimension ou si ils sont de dimension infinie. Par exemple, les applications linéaires

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \longmapsto & (x, 0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & P & \longmapsto & XP \end{array}$$

sont injectives mais pas surjectives. De même, les applications linéaires

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} f: & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$$

sont surjectives mais ne sont pas injectives.

Exercices :

⇨ Soit $n+1$ scalaires deux à deux distincts $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $b_0, \dots, b_n \in \mathbb{K}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(a_k) = b_k$$

2.4 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 6 (●●●). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A un sous-espace vectoriel de E. Alors :*
- *A est de dimension finie et $\dim A \leqslant \dim E$.*
- *$A = E$ si et seulement si $\dim A = \dim E$.*

Exercices :

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathrm{GL}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que si F est stable par u, alors $u(F) = F$ et F est stable par u^{-1}.

Proposition 10 (●●○). *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, tout sous-espace vectoriel admet un supplémentaire.*

Exercices :

⇨ Trouver un supplémentaire à l'espace vectoriel engendré par $(1, 1, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$.

Remarques :

⇨ (●○○) Ce théorème reste vrai dans un espace vectoriel de dimension infinie mais sa démonstration est difficile et fait appel à l'axiome du choix.

2.5 Notion de rang

Définition 11 (○○●). *On appelle rang d'une famille $(x_1, \dots, x_p) \in E$ et on note $\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p)$ la dimension de $\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.*

Remarques :

⇨ (●○○) Si $(x_1, \dots, x_p)$ est une famille d'éléments de E et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une application injective, alors :

$$\mathrm{rg}(x_1, \dots, x_p) = \mathrm{rg}(f(x_1), \dots, f(x_p))$$

Définition 12 (○○●). *Soit f une application linéaire de E dans F. Lorsque $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie, on appelle rang de f et on note $\mathrm{rg}\, f$ la dimension de $\mathrm{Im}\, f$.*

Remarques :

⇨ (○●○) Si F est de dimension finie, $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie et $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim F$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si f est surjective. De même, si E est de dimension finie, $\mathrm{Im}\, f$ est de dimension finie et $\mathrm{rg}\, f \leqslant \dim E$. De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si f est injective.

⇨ (○○●) Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $u = 0$ si et seulement si $\mathrm{rg}\, u = 0$.

Exercices :

⇨ Calculer le rang de l'application de $\mathbb{K}_n[X]$ dans lui-même qui à P associe $P(X+1) - P(X)$.

Proposition 11 (●●○). *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n et f une application linéaire de E dans F. Alors f est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{rg}\, f = n$.*

3 Calcul de dimension et de rang, hyperplan

3.1 Somme de sous-espaces vectoriels

Proposition 12 (●●○). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A, B deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Alors :*

$$\dim E = \dim A + \dim B$$

Remarques :

⇨ (○●○) Plus généralement, on a démontré que si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant deux sous-espaces vectoriels A et B supplémentaires de dimensions finies, alors E est de dimension finie et $\dim E = \dim A + \dim B$.

Proposition 13 (●●○). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A, B deux sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$\dim(A+B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)$$

Exercices :

⇨ Sur $\mathbb{R}^3$, l'intersection de deux plans vectoriels est soit un plan soit une droite.

Proposition 14 (●●●). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et A et B deux sous-espaces vectoriels de E.*

— *Si $A \cap B = \{0\}$ et $\dim E = \dim A + \dim B$, alors $E = A \oplus B$.*

— *Si $E = A + B$ et $\dim E = \dim A + \dim B$, alors $E = A \oplus B$.*

Autrement dit, si $\dim E = \dim A + \dim B$:

$$A \oplus B \iff E = A \oplus B \iff E = A + B$$

Proposition 15 (●○○). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(F_1, \ldots, F_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E.*

— *Si la somme $F_1 + \cdots + F_p$ est directe et $\sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \dim E$, alors*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$$

— *Si $E = F_1 + \cdots + F_p$ et $\sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \dim E$, alors*

$$E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k$$

Autrement dit, si $\sum_{k=1}^{p} \dim F_k = \dim E$, alors

$$\bigoplus_{k=1}^{p} F_k \iff E = \bigoplus_{k=1}^{p} F_k \iff E = \sum_{k=1}^{p} F_k$$

3.2 Produit d'espaces vectoriels, espace $\mathcal{L}(E, F)$

Proposition 16 (○●○). *Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $E \times F$ est de dimension finie et :*

$$\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$$

En particulier, si $n \in \mathbb{N}^*$, E^n est de dimension finie et :

$$\dim(E^n) = n \dim E$$

Proposition 17 (○○●). *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et :*

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$$

En particulier, $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie et :

$$\dim \mathcal{L}(E) = (\dim E)^2$$

Proposition 18 (●○○). *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $E^\star$ est de dimension finie et :*

$$\dim E^\star = \dim E$$

3.3 Théorème du rang

Proposition 19 (●○○). *On ne change pas le rang d'une application linéaire si on la compose à droite ou à gauche par un isomorphisme.*

Remarques :

⇨ (●○○) Plus généralement, on a démontré qu'on ne changeait pas le rang d'une application linéaire en la composant par la droite par une application surjective ou en la composant par la gauche par une application injective.

Théorème 7 (●●●). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une application linéaire de E dans F. Alors $\operatorname{Im} f$ est de dimension finie et :*

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$$

Autrement dit :

$$\operatorname{rg} f = \dim E - \dim \operatorname{Ker} f$$

Applications :

⇨ Le théorème du rang permet de retrouver le fait que si f est une application linéaire d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de même dimension, alors il suffit de montrer que f est injective (ou que f est surjective) pour montrer que f est un isomorphisme.

⇨ Il peut être utile de retenir le fait que si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et G est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E, alors l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : G & \longrightarrow & \operatorname{Im} f \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Exercices :

⇨ Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et A un sous-espace vectoriel de E. Montrer que

$$\dim [f(A)] = \dim A - \dim (A \cap \operatorname{Ker} f)$$

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $g \in \mathcal{L}(E)$. Calculer le rang de

$$\begin{array}{rccl} \varphi : \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

⇨ Soit E, F et G des espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathcal{L}(F, E)$ et $g \in \mathcal{L}(G, E)$. Montrer qu'il existe une application linéaire h de F dans G telle que $f = g \circ h$ si et seulement si $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} g$.

3.4 Hyperplans

Définition 13 (●○○)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel H de E vérifiant l'une des deux conditions équivalentes suivantes :*
- $\dim H = n - 1$
- *H est le noyau d'une forme linéaire non nulle.*

Exercices :

⇨ Dans $\mathbb{R}^3$, le sous-espace vectoriel d'équation $3x + 2y - z = 0$ est un hyperplan. Il est donc de dimension 2.

⇨ Sur $\mathbb{R}_n[X]$, le sous-espace vectoriel

$$E = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] : \int_0^1 P(t)\, \mathrm{d}t = 0 \right\}$$

est un hyperplan. Il est donc de dimension n.

⇨ Quelle est la dimension de l'intersection de deux hyperplans ?

Proposition 20 (●○○)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, H un hyperplan de E et φ_0 une forme linéaire telle que $H = \operatorname{Ker} \varphi_0$. Alors l'ensemble des formes linéaires de E dont le noyau est H est :*

$$\mathbb{K}^* \varphi_0 = \{\lambda \varphi_0 : \lambda \in \mathbb{K}^*\}$$

Exercices :

⇨ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et φ_1, φ_2 deux formes linéaires sur E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'application

$$\begin{array}{rccl} f : E & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ x & \longmapsto & (\varphi_1(x), \varphi_2(x)) \end{array}$$

soit surjective.

Proposition 21 (●○○)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout $x \in E$, on note $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ les coordonnées de x relativement à la base $\mathcal{B}$.*
- *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ ne sont pas tous nuls, l'ensemble H d'équation*

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

  est un hyperplan de E.
- *Réciproquement, si H est un hyperplan de E, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que*

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0$$

  soit une équation de H. De plus, si $\mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{K}$

$$\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n = 0$$

  est une équation de H si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \quad \mu_k = \alpha \lambda_k$$