Exercice 1.5 :

(i) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sin^5 x$$

D'après les théorèmes usuels, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) &= \sin^5 x \\
&= \sin x \cdot (\sin^2 x)^2 \\
&= \sin x \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4} \sin x \left(1 + \cos^2(2x) - 2\cos(2x)\right) \\
&= \frac{1}{4} \sin x \left(1 + \frac{1+\cos(4x)}{2} - 2\cos(2x)\right) \\
&= \frac{1}{8} \sin x \cdot \left(3 - 4\cos(2x) + \cos(4x)\right) \\
&= \frac{1}{8} \left(3 \sin x - 4 \sin(x)\cos(2x) + \sin(x)\cos(4x)\right) \\
&= \frac{1}{8} \Big(3 \sin x - 4 \cdot \frac{1}{2}\left(\sin(3x) - \sin(x)\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}\left(\sin(5x) - \sin(3x)\right)\Big) \\
&= \frac{1}{16} \Big(6 \sin x - 4\sin(3x) + 4\sin(x) \\
&\qquad + \sin(5x) - \sin(3x)\Big) \\
&= \frac{1}{16} \left(10 \sin(x) - 5\sin(3x) + \sin(5x)\right)
\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\sin(\alpha x)\right) = \alpha^n \cdot \sin\left(\alpha x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

(car $\frac{d^n}{dx^n}\left(\sin(x)\right) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$ et $\frac{d^n}{dx^n}\left(g(\alpha x)\right) = \alpha^n \cdot g^{(n)}(\alpha x)$)

on en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \frac{1}{16}\Big(10 \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - 5 \times 3^n \cdot \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + 5^n \cdot \sin\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right)\Big)$$

<u>Remarque</u> : On peut aussi linéariser $\sin^5 x$ en utilisant les nombres complexes :

$$\begin{pmatrix} 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \\ 1\ 4\ 6\ 4\ 1 \\ 1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \sin^5 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5$$

$$= \frac{1}{2^5 . i^5}\left(e^{i5x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-i3x} - e^{-i5x}\right)$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2i}\left(e^{i5x} - e^{-i5x} - 5\left(e^{i3x} - e^{-i3x}\right) + 10\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{16}\left(10\sin(x) - 5\sin(3x) + \sin(5x)\right)$$

1.2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = x^2 e^x$$

D'après les théorèmes usuels, f est C^∞. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Leibniz :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x^2) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}(e^x)$$

Or $\frac{d^0}{dx^0}(x^2) = x^2$, $\frac{d^1}{dx^1}(x^2) = 2x$, $\frac{d^2}{dx^2}(x^2) = 2$, $\frac{d^k}{dx^k}(x^2) = 0$ pour $k \geq 3$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f^{(n)}(x) = x^2 . e^x + n . 2x . e^x + \frac{n(n-1)}{2} 2 . e^x$$

$$= \left(n(n-1) + 2nx + x^2\right)e^x$$

1.3) Soit f la fonction d'expression $f(x) = \ln(x^2 - x + 2)$

Alors :

$$\forall x \in \mathbb{C} \qquad x^2 - x + 2 = 0 \underset{\Delta = -7}{\iff} x = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

On note $\alpha = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}$. Puisque le trinôme n'a aucune racine réelle, il est du signe du coefficient dominant sur $\mathbb{R}$. Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad x^2 - x + 2 > 0$$

Donc, f est défini sur $\mathbb{R}$. D'après les théorèmes usuels, f est C^∞ sur $\mathbb{R}$.

On va calculer la dérivée n-ième de f de manière "formelle". Autrement dit, on va effectuer des calculs qui n'ont pas de sens (on va écrire $\ln(z)$ pour $z \in \mathbb{C}$ ce qui en MPSI 1 équivaut à un voyage sur la lune), mais qui vont permettre de calculer $f^{(n)}(x)$. On pourra conclure en effectuant une preuve par récurrence :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = \ln(x^2 - x + 2)$$
$$= \ln\big((x-\alpha)(x-\bar{\alpha})\big)$$
$$= \ln(x-\alpha) + \ln(x-\bar{\alpha})$$

Cette ligne n'a aucun sens car si $x \in \mathbb{R}$ $x-\alpha$ et $x-\bar{\alpha} \in \mathbb{C}$

Or, on montre par récurrence que

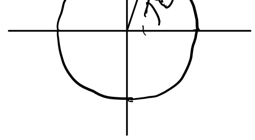
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \frac{d^n}{dx^n}(\ln x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}\cdot(n-1)!\left(\frac{1}{(x-\alpha)^n} + \frac{1}{(x-\bar{\alpha})^n}\right)$$
$$= (-1)^{n+1}(n-1)! \cdot \frac{(x-\bar{\alpha})^n + (x-\alpha)^n}{\big((x-\alpha)(x-\bar{\alpha})\big)^n}$$
$$= (-1)^{n+1}(n-1)!\,\frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\bar{\alpha})^k \cdot x^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-\alpha)^k \cdot x^{n-k}}{(x^2-x+2)^n}$$
$$= \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x^2-x+2)^n}\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\cdot\left(\alpha^k + \bar{\alpha}^k\right)x^{n-k}$$

Or $\quad \alpha = \frac{1+i\sqrt{7}}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{8}} + i\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\right) = \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{8}} + i\sqrt{\frac{7}{8}}\right)$

Or $\left(\frac{1}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{8}}\right)^2 = 1$. Comme $\frac{1}{\sqrt{8}} > 0$ et $\sqrt{\frac{7}{8}} > 0$, en posant $\theta = \mathrm{Arctan}(\sqrt{7})$, on a



$\alpha = \sqrt{2}\cdot e^{i\theta}$

Donc

$$\alpha^k + \bar{\alpha}^k = \left(\sqrt{2}\, e^{i\theta}\right)^k + \left(\sqrt{2}\, e^{-i\theta}\right)^k$$
$$= 2^{k/2}\left(e^{ik\theta} + e^{-ik\theta}\right)$$
$$= 2^{\frac{k}{2}} \cos(k\theta)$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x^2-x+2)^n} \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{\frac{k+2}{2}} \cos(k\theta)\, x^{n-k}$$

Il reste à montrer rigoureusement cette formule par récurrence. Montrer la formule finale par récurrence serait long et fastidieux. Cependant, il suffit de montrer que

$$\mathcal{H}_n = \text{"} \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\left(\frac{1}{(x-\alpha)^n} + \frac{1}{(x-\bar{\alpha})^n}\right)\text{"}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En effet, les calculs sont corrects à partir de cette ligne.

<u>$\mathcal{H}_1$ est vraie :</u> En effet,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = \frac{2x-1}{x^2-x+2}$$

et $(-1)^2(2-1)!\left(\frac{1}{(x-\alpha)} + \frac{1}{(x-\bar{\alpha})}\right) = \frac{2x-(\alpha+\bar{\alpha})}{(x-\alpha)(x-\bar{\alpha})} = \frac{2x-1}{x^2-x+2}$

<u>$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$:</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

On a : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\left((x-\alpha)^{-n} + (x-\bar{\alpha})^{-n}\right)$

Donc, d'après les théorèmes usuels

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(-n).\left((x-\alpha)^{-(n+1)} + (x-\bar{\alpha})^{-(n+1)}\right)$$
$$= (-1)^{(n+1)+1}(n+1-1)!\left((x-\alpha)^{-(n+1)} + (x-\bar{\alpha})^{-(n+1)}\right)$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie

Par récurrence sur n, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(x^2-x+2)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} 2^{\frac{k+2}{2}} \cos(k\theta)\, x^{n-k}$$

(iv) Pour $n=1$, on doit calculer $\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

Pour $n=2$, on doit calculer $\frac{d^2}{dx^2}(x\ln x) = \frac{d}{dx}(\ln x + 1) = \frac{1}{x}$

Pour $n=3$, on doit calculer $\frac{d^3}{dx^3}(x^2\ln x) = \dots = \frac{2}{x}$

Pour $n=3$, on doit calculer $\frac{d^4}{dx^4}(x^3\ln x) = \dots = \frac{3!}{x}$.

On va donc démontrer par récurrence sur n que :

$$\mathcal{H}_n = \text{"} \forall x>0 \quad \frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}\ln x) = \frac{(n-1)!}{x} \text{"}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$\mathcal{H}_1$ est vraie : En effet ; $\forall x>0 \quad \frac{d}{dx}(x^{1-1}\ln x) = \frac{1}{x} = \frac{0!}{x}$

$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

$$\forall x>0 \quad \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1-1}\ln(x)) = \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x \cdot x^{n-1}\ln(x))$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{d^k}{dx^k}(x) \frac{d^{n+1-k}}{dx^{n+1-k}}(x^{n-1}\ln(x))$$

Or $\frac{d^0}{dx^0}(x) = x$, $\frac{d}{dx}(x) = 1$ et $\frac{d^k}{dx^k}(x) = 0$ pour $k \geq 2$

Donc

$$\forall x>0 \quad \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1-1}\ln(x)) = x \cdot \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n-1}\ln x) + (n+1)\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}\ln x)$$

Or $\mathcal{H}_n$ est vraie donc $\frac{d^n}{dx^n}(x^{n-1}\ln(x)) = \frac{(n-1)!}{x}$, donc

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n-1}\ln(x)) = -\frac{(n-1)!}{x^2}.$$

Donc

$$\forall x>0 \quad \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(x^{n+1-1}\ln(x)) = -\frac{(n-1)!}{x} + (n+1)\frac{(n-1)!}{x}$$

$$= \frac{n(n-1)!}{x} = \frac{(n+1-1)!}{x}$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie

Par récurrence sur n, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc si $n \in \mathbb{N}^*$, et f est la fonction définie par $f(x) = x^{n-1} \ln(x)$, alors

$$\forall x > 0 \quad f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{x}$$

(v) Je vous laisse montrer de même que

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n-1} e^{1/x}\right) = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+1}}$$