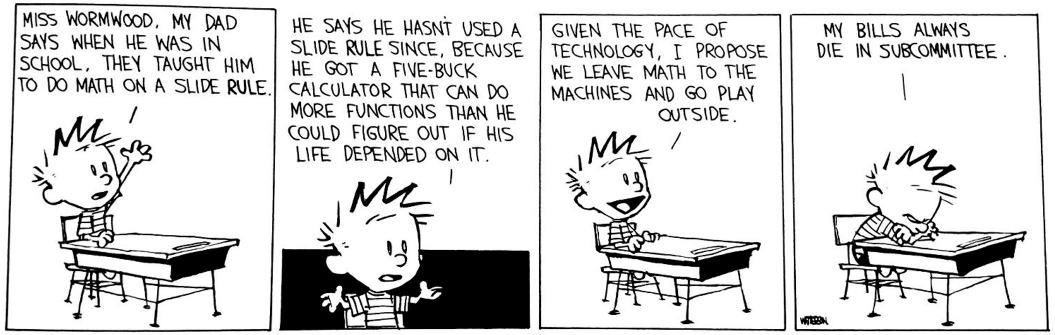
TP Info : Nombres flottants



1 Ça commence mal

Demander à Python si `0.1 + 0.2 == 0.3`.

2 Calcul de dérivée

On se donne une fonction numérique f dont on souhaite évaluer la dérivée $f'(x)$. Pour cela, on utilisera les deux approximations suivantes :

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad f'(x) \approx \frac{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$$

1. Écrire deux fonctions `derive_1` et `derive_2` qui prennent en entrée f, x et ε et qui renvoient respectivement l'approximation de $f'(x)$ donnée par la première et la seconde formule.
2. Testez ces fonctions avec $f(x) = \sqrt{x}$ puis $f(x) = e^x$ pour différentes valeurs de x et de ε. Est-ce que plus ε est petit, plus l'approximation est bonne ?
3. Étant donné une fonction f, tracez en fonction de n, le graphe de
$$u_n = -\log_{10}\left|\frac{\varphi_n(x)-f'(x)}{f'(x)}\right|$$
où $\varphi_n(x)$ est le nombre flottant renvoyé par la fonction `derive_1` appelée avec f, x et $\varepsilon = 10^{-n}$. La fonction f' sera implémentée en utilisant l'expression de la dérivée de f. Donnez la signification de u_n et expliquez les variations de la suite (u_n). Estimez, en fonction de $u \approx 10^{-16}$, la valeur de ε qui semble minimiser l'erreur commise en utilisant la fonction `derive_1` pour obtenir une approximation de $f'(x)$.
4. Répétez l'expérience avec la fonction `derive_2`.
5. Quelle méthode recommanderiez-vous à une personne souhaitant calculer numériquement $f'(x)$ avec la meilleure précision si on a seulement accès à une fonction calculant $f(x)$?

3 Un calcul d'intégrale

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$u_n = \int_0^1 x^n e^x \,\mathrm{d}x$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e - nu_{n-1}$.
2. En déduire une fonction calculant u_n.
3. Testez cette fonction pour différentes valeurs de n. Expliquez ce qu'il se passe.

4 Suite de Jean-Michel Muller

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2, \quad u_1 = -4 \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 2 \quad u_n = 111 - \frac{1130}{u_{n-1}} + \frac{3000}{u_{n-1}u_{n-2}}$$

1. Écrire une fonction qui prend en paramètre n et qui renvoie u_n.
2. Quel semble être la limite de la suite (u_n) ?
3. On peut montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{-3 \times 6^{n+1} + 4 \times 5^{n+1}}{-3 \times 6^n + 4 \times 5^n}$$
Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

5 De l'importance de choisir une bonne expression

1. On considère deux expressions de la même fonction
$$f_1(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$
Pour une grande valeur de x, laquelle de ces expressions est la plus appropriée ?
2. Sous quelle forme mettrait-on $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$ si l'on voulait obtenir une bonne précision pour x grand ?
3. (a) Écrire une fonction `trinome` qui, étant donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\Delta = b^2 - 4ac \geqslant 0$, renvoie les deux racines de l'équation
$$ax^2 + bx + c = 0$$

(b) Testez le programme précédent pour $a = 1$, $b = -10^n$, $c = 1$ et différentes valeurs de n. L'erreur relative sur les racines vous parrait-elle toujours bonne ?

(c) Proposez une solution pour que cette erreur relative reste faible, même pour n assez grand.

4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

On admet que

$$f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \frac{x}{2}$$

(a) Implémentez f en utilisant les deux expressions suivantes.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f_1(x) = \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{e^x - 1}{\ln(e^x)}$$

Essayez ces deux implémentations pour des petites valeurs de x. Quelle implémentation vous parrait la plus précise ?

(b) Si vous avez du temps libre ce soir, essayez de donner une explication.

6 Dichotomie

Soit f une fonction continue de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, la fonction f admet au moins un zéro. Étant donné $\varepsilon > 0$, on cherche à trouver $x \in [a, b]$ tel que le segment $[x - \varepsilon, x + \varepsilon]$ contienne au moins un zéro de f. En particulier, x est une valeur approchée d'un zéro de f à ε près. Pour cela on définit les suites (a_n) et (b_n) par :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

— Si $n \in \mathbb{N}$ et a_n et b_n sont tels que $f(a_n)f(b_n) \leqslant 0$, on pose $c_n = (a_n + b_n)/2$. Selon le signe de $f(c_n)$, on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$ ou $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

On construit ainsi deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n)f(b_n) \leqslant 0 \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}$$

1. Écrire une fonction `dichotomie(f, a, b, eps)` qui prend en entrée une fonction continue f, deux flottants a et b tels que $f(a)f(b) \leqslant 0$ et renvoie une valeur approchée à ε près d'un zéro de f.
2. Utilisez cette fonction pour calculer une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-15} près.
3. Modifiez la fonction `dichotomie` pour qu'elle ne prenne plus ε en argument et qu'elle arrête l'itération quand on a atteint la précision maximale.

7 Méthode de Newton

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, admettant au moins un zéro sur $\mathbb{R}$ et dont la dérivée ne s'annule pas. Soit $x \in \mathbb{R}$ et (u_n) la suite définie par :

$$x_0 = x \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

1. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de la tangente au graphe de f en x_n et de l'axe des abscisses. Faites un dessin.
2. Écrire une fonction `newton(f, f_prime, x0, n)` effectuant n itérations de la méthode de Newton à partir de la valeur initiale x_0 et renvoyant x_n. La fonction `f_prime` est une fonction calculant $f'(x)$ avec l'expression obtenue en dérivant « à la main » f.
3. Montrez que si la suite (x_n) converge, elle converge vers un zéro de f.
4. Testez la fonction `newton` avec :
   — $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 2$
   — $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 1$
   — $f(x) = x - x^3/5$ et $x_0 = 1$
   — $f(x) = x - x^3/5$ et $x_0 = 1/2$
   — $f(x) = x - x^3/5$ et $x_0 = 2$
   La suite (x_n) est-elle toujours convergente ?
5. On se place dans un cas où la suite (x_n) converge vers un zéro non nul de f que l'on notera α (prenez par exemple $f(x) = x^2 - 2$ et $x_0 = 2$). Tracer

$$u_n = -\log_{10} \left| \frac{x_n - \alpha}{\alpha} \right|$$

   Expliquez le graphe que vous obtenez. Observez que le « nombres de chiffres corrects » double à chaque itération.
6. On s'intéresse désormais à la fonction d'expression $f(x) = (x - 1)^{10} - 2$ avec $x_0 = 3$.

   (a) Tracez le graphe précédent (appelé graphe de convergence) de la suite de Newton associée.

   (b) Gaston a implémenté la fonction f en l'exprimant sous la forme

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = -2 + \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \binom{10}{k} x^k$$

   Tracez le graphe de convergence de la suite de Newton obtenue et le comparer avec le précédent graphe. Expliquez ce que vous observez.