COURS : SYSTÈMES LINÉAIRES

1 Algorithme du pivot de Gauss

1.1 Opérations élémentaires

Définition 1 (∘∘∘).

— *Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$. On note $D_k(\lambda)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:*

$$D_k(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} & & k & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & (0) \\ & & \lambda & & \\ (0) & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

De telles matrices sont appelées matrices de dilatation.

— *Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i,j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$. On note $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:*

$$T_{i,j}(\lambda) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} & j & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & \lambda & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \end{array} \end{array}$$

De telles matrices sont appelées matrices de transvection.

— *Soit $k_1, k_2 \in [\![1,n]\!]$ tels que $k_1 \neq k_2$. On note τ_{k_1,k_2} la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:*

$$\tau_{k_1,k_2} = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccc} & & k_1 & & & k_2 & & & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 0 & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ k_1 \\ \\ \\ \\ k_2 \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

De telles matrices sont appelées matrices de transposition.

Proposition 1 (∘∘∘). *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.*

— — *Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $k \in [\![1,q]\!]$, la matrice $D_k(\lambda)A$ est obtenue en multipliant la k-ème ligne de A par λ.*

— *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i,j \in [\![1,q]\!]$ avec $i \neq j$, la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ est obtenue ajoutant λ fois la ligne j-ème ligne de A à sa i-ème ligne.*

— *Si $k_1, k_2 \in [\![1,q]\!]$ avec $k_1 \neq k_2$, la matrice $\tau_{k_1,k_2}A$ est obtenue en échangeant les k_1-ème et k_2-ème lignes de A.*

— — *Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $k \in [\![1,p]\!]$, la matrice $AD_k(\lambda)$ est obtenue en multipliant la k-ème colonne de A par λ.*

— *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i,j \in [\![1,p]\!]$ avec $i \neq j$, la matrice $AT_{i,j}(\lambda)$ est obtenue en ajoutant λ fois la colonne i-ème colonne de A à sa j-ème colonne.*

— *Si $k_1, k_2 \in [\![1,p]\!]$ avec $k_1 \neq k_2$, la matrice $A\tau_{k_1,k_2}$ est obtenue en échangeant les k_1-ème et k_2-ème colonnes de A.*

De telles opérations sur la matrices A sont appelées opérations élémentaires.

Remarques :

⇨ L'essentiel est de retenir la liste des opérations élémentaires et le fait que multiplier une matrice par la gauche par une matrice de dilatation/transvection/transposition agit sur les lignes alors que multiplier par la droite agit sur les colonnes. À partir de cela, il est aisé de retrouver ces matrices. Par exemple, si on souhaite retrouver la matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que la matrice $TA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice obtenue en ajoutant la j-ème ligne de A à sa i-ème ligne, il suffit d'ajouter la j-ème ligne de I_n à sa i-ème ligne. En effet $T = TI_n$ et TI_n se calcule simplement en effectuant les opérations souhaitées sur la matrice I_n.

Proposition 2 (∘∘∘).

— *Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $k \in [\![1,n]\!]$, alors la matrice de dilatation $D_k(\lambda)$ est inversible et*

$$[D_k(\lambda)]^{-1} = D_k\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

— *Si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i,j \in [\![1,n]\!]$ avec $i \neq j$, alors la matrice de transvection $T_{i,j}(\lambda)$ est inversible et*

$$[T_{i,j}(\lambda)]^{-1} = T_{i,j}(-\lambda)$$

— *Si $k_2, k_2 \in [\![1,n]\!]$ avec $k_1 \neq k_2$, alors la matrice de transposition τ_{k_1,k_2} est inversible et*

$$\tau_{k_1,k_2}^{-1} = \tau_{k_1,k_2}$$

1.2 Calcul du rang

Proposition 3 (∘∘∘). *Les opérations élémentaires transforment une matrice en une matrice de même rang.*

Proposition 4 ($\circ\circ\circ$)**.** *Soit $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$. Alors, il existe une succession d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes transformant A en une matrice du type :*

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & g_{r,r} & \star & \star \\ \vdots & & 0 & 0 & \cdots \; 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \; 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \qquad \forall k \in [\![1, r]\!] \quad g_{k,k} \neq 0$$

De plus r ne dépend pas des opérations effectuées et est égal au rang de A.
Autrement dit, il existe une famille $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathrm{GL}_q(\mathbb{K})$ de matrices d'opérations élémentaires et une famille $P_1, \ldots, P_m \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ de matrices d'opérations élémentaires telles que $Q_n \cdots Q_1 A P_1 \cdots P_m$ soit une matrice du type cité plus haut.

Exercices :

⇨ Calculer le rang de $P_1 = X^2 + X + 1$, $P_2 = X^2 - X - 1$, $P_3 = X^2 + 3X + 2$.

⇨ Calculer le rang de

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ & X & \longmapsto & AX \end{array}$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

⇨ Calculer le rang de la famille $e_1 = (1, x, -1)$, $e_2 = (x, 1, x)$, $e_3 = (-1, x, 1)$ où $x \in \mathbb{R}$.

⇨ Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer le rang de la matrice

$$\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

⇨ Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et $F = \mathrm{Vect}(A, B)$. Déterminer une équation de F.

1.3 Calcul de l'inverse d'une matrice

Exercices :

⇨ Calculer l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Proposition 5 ($\circ\circ\circ$)**.** *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors, il existe une succession d'opérations élémentaires sur les lignes transformant A en I_n. Autrement dit, il existe une famille $B_1, \ldots, B_m$ de matrices d'opérations élémentaires telles que :*

$$B_m \cdots B_1 A = I_n$$

On a alors $A^{-1} = B_m \cdots B_1$. En remarquant que :

$$B_m \cdots B_1 = B_m \left(B_{m-1} \left(\cdots \left(B_1 I_n\right)\right)\right)$$

on en déduit que A^{-1} est obtenu en appliquant à la matrice I_n les opérations élémentaires sur les lignes utilisées pour transformer A en I_n.

Remarques :

⇨ Remarquons au passage que cette méthode est connue depuis le cours sur les matrices. En effet, nous savons qu'inverser une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ revient à résoudre le système linéaire $AX = Y$ où $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Si on résout ce système par la méthode du pivot de Gauss en prenant soin de placer les x_k et les y_k les un en dessous des autres, on remarque que la méthode de la proposition précédente conduit exactement aux mêmes calculs.

⇨ Cette proposition démontre que toute matrice inversible s'écrit comme un produit de matrices d'opérations élémentaires.

Exercices :

⇨ Calculer l'inverse de la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!] \quad a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \leqslant j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2 Systèmes linéaires

2.1 Définition, interprétations

Définition 2 ($\circ\circ\circ$)**.** *Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. On appelle système linéaire à q équations et p inconnues tout système d'équations de la forme*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = b_q \end{cases}$$

où les inconnues sont $x_1, \ldots, x_p$.

Remarques :

⇨ —**Interprétation matricielle :**
Si $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$ et $X = (x_i) \in \mathcal{M}_{q,1}(\mathbb{K})$, alors $(x_1, \ldots, x_p)$ est solution du système si et seulement si $AX = B$. La matrice A s'appelle matrice du système et la matrice B s'appelle second membre du système.

— **Interprétation vectorielle :**
Si $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{K}^q$ sont les vecteurs colonnes de la matrice A et $b = (b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{K}^q$ alors $(x_1, \dots, x_p)$ est solution du système si et seulement si $x_1 c_1 + \dots + x_p c_p = b$.

— **Interprétation linéaire :**
Si a est l'application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^q$ dont la matrice relativement aux bases canoniques est A, et si $b = (b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{K}^q$, alors $x = (x_1, \dots, x_p)$ est solution du système si et seulement si $a(x) = b$.

— **Interprétation duale :**
On considère les formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_q$ définies sur $\mathbb{K}^p$ par :

$$\forall i \in [\![1, q]\!] \quad \forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \quad \varphi_i(x_1, \dots, x_p) = a_{i,1}x_1 + \dots + a_{i,p}x_p$$

Alors $x = (x_1, \dots, x_p)$ est solution du système linéaire si et seulement si :

$$\forall i \in [\![1, q]\!] \quad \varphi_i(x) = b_i$$

Exercices :

⇨ Soit $n \geqslant 2$ et $a, b \in \mathbb{C}$. Résoudre le système :

$$\begin{cases} x_2 = & ax_1 + b \\ x_3 = & ax_2 + b \\ & \vdots \\ x_n = & ax_{n-1} + b \\ x_1 = & ax_n + b \end{cases}$$

Définition 3 (∘∘∘). *Soit $AX = B$ un système linéaire à q équations et p inconnues.*

— • *On dit que le système est homogène lorsque $B = 0$.*
  • *On appelle système homogène associé le système linéaire $AX = 0$; l'ensemble des solutions de ce système est noté $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$.*

— • *On appelle rang du système linéaire le rang de la matrice A.*
  • *On dit que le système est compatible lorsque l'ensemble des solutions est non vide, c'est-à-dire lorsque $b \in \operatorname{Im} a$.*

Définition 4 (∘∘∘). *On dit qu'un système $AX = B$ à n équations et n inconnues est de Cramer lorsque A est inversible.*

Proposition 6 (∘∘∘). *Un système $AX = B$ à n équations et n inconnues est de Cramer si et seulement si il possède une unique solution. De plus, si tel est le cas, cette solution est $X = A^{-1}B$.*

Exercices :

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ et $b_0, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{C}$. Résoudre le système :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \quad \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{ij} z_j = b_i$$

2.2 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 7 (∘∘∘). *$\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $p - \operatorname{rg}(A)$.*

Proposition 8 (∘∘∘).

— *Si le système est incompatible $\mathcal{S} = \varnothing$.*
— *Si le système est compatible et $x_0 \in \mathbb{K}^p$ en est une solution particulière, alors :*

$$\mathcal{S} = x_0 + \mathcal{S}_{\mathcal{H}} = \{x_0 + x \mid x \in \mathcal{S}_{\mathcal{H}}\}$$

On dit que $\mathcal{S}$ est un espace affine de dimension $\dim \mathcal{S}_{\mathcal{H}} = p - \operatorname{rg}(A)$.