Exercice 6.2

Soit $x \in [1,+\infty[$. Alors

$$\frac{x+1}{2} - \sqrt{x} = \frac{x - 2\sqrt{x}+1}{2} = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)^2(\sqrt{x}+1)^2}{2(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{(x-1)^2}{2(\sqrt{x}+1)^2}$$

Or $x \geqslant 1$ donc $\sqrt{x} \geqslant 1$ donc $(\sqrt{x}+1)^2 \geqslant 2^2 = 4$.
donc $\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} \leqslant \frac{1}{4}$. Donc

$$\frac{x+1}{2} - \sqrt{x} = \frac{(x-1)^2}{2(\sqrt{x}+1)^2} \leqslant \frac{(x-1)^2}{8}$$

De plus

$$\frac{1}{8x} \leqslant \frac{1}{2(\sqrt{x}+1)^2} \iff (\sqrt{x}+1)^2 \leqslant 4x$$
$$\iff \sqrt{x}+1 \leqslant 2\sqrt{x}$$
$$\iff 1 \leqslant \sqrt{x}$$

ce qui est vrai car $x \geqslant 1$

Donc $$\frac{x+1}{2} - \sqrt{x} = \frac{(x-1)^2}{2(\sqrt{x}+1)^2} \geqslant \frac{(x-1)^2}{8x}$$

Exercice 6.11

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons que

$$\forall k \in [\![1,3]\!] \quad \lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+k} \rfloor$$

- On commence par montrer que

$$\sqrt{4n+1} \leqslant \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{4n+3}$$

On a : $$\underbrace{\sqrt{4n+1}}_{\geqslant 0} \leqslant \underbrace{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}_{\geqslant 0} \iff 4n+1 \leqslant n + n+1 + 2\sqrt{n(n+1)}$$
$$\iff 2n \leqslant 2\sqrt{n(n+1)}$$
$$\iff \underbrace{n}_{\geqslant 0} \leqslant \underbrace{\sqrt{n(n+1)}}_{\geqslant 0}$$
$$\iff n^2 \leqslant n(n+1) \quad \text{ce qui est vrai}$$

De même $\underbrace{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}_{\geq 0} \leqslant \underbrace{\sqrt{4n+3}}_{\geq 0} \iff n+n+1+2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 4n+3$

$$\iff 2\sqrt{n(n+1)} \leqslant 2(n+1)$$

$$\iff \underbrace{\sqrt{n(n+1)}}_{\geq 0} \leqslant \underbrace{n+1}_{\geq 0}$$

$$\iff n(n+1) \leqslant (n+1)^2$$

ce qui est vrai.

On en déduit que $\sqrt{4n+1} \leqslant \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \leqslant \sqrt{4n+3}$
Puisque la partie entière est une fonction croissante, on en déduit que

$$\lfloor 4n+1 \rfloor \leqslant \lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor \leqslant \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$$

Montrons maintenant que $\lfloor\sqrt{4n+1}\rfloor = \lfloor\sqrt{4n+3}\rfloor$. On raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sqrt{4n+1} < a \leqslant \sqrt{4n+3}$$

donc $\quad 4n+1 < a^2 \leqslant 4n+3$

donc $\quad 1 < a^2-4n \leqslant 3$

Or $a^2-4n \in \mathbb{N}$ donc $a^2-4n \in \{2,3\}$. Or, modulo 4

a	0	1	2	3
a^2	0	1	0	1

donc $a^2-4n \equiv 0\ [4]$ ou $\equiv 1\ [4]$. C'est absurde car $a^2-4n \in \{2,3\}$. On en déduit que $\lfloor 4n+1 \rfloor = \lfloor 4n+3 \rfloor$. Donc

$$\lfloor \sqrt{n}+\sqrt{n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+1} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{4n+3} \rfloor$$

Exercice 6.18

1) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Alors

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2) - xy = \frac{x^2-2xy+y^2}{2} = \frac{(x-y)^2}{2} \geqslant 0$$

Donc $\quad xy \leqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

2) Soit $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$

$$|a_k||b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(|a_k|^2+|b_k|^2\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

donc $$|a_k.b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(a_k^2+b_k^2\right)$$

Donc
$$\sum_{k=1}^{n} |a_k.b_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

3) On souhaite montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k.b_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

On pose $u=\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2}$ et $v=\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}$

- Si $u=0$: Alors tous les a_k sont nuls et l'inégalité est triviale $(0\leqslant 0)$
- Si $v=0$: De même, l'inégalité est triviale.
- Sinon, $u>0$ et $v>0$: Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on pose

$$\alpha_k=\frac{a_k}{u} \qquad \beta_k=\frac{b_k}{v}$$

Alors. $$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k^2}{u^2} = \frac{1}{u^2}\underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}_{=u^2} = 1$$

De même $\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2=1$. On applique la question precédente aux α_k et β_k. On a donc.

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k.\beta_k| \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k^2\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{2}(1+1)=1$$

Donc
$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{a_k.b_k}{uv}\right| \leqslant 1$$

donc $$\sum_{k=1}^{n} |a_k.b_k| \leqslant |u\,v| = uv$$

Donc $$\sum_{k=1}^{n} |a_k . b_k| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Exercice 6.26

Soit A une partie non vide bornée de $\mathbb{R}$. Montrons que
$$\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y| = \sup(A) - \inf(A)$$

. On commence par montrer que $\sup_{(x,y)\in A^2} |x-y|$ est bien défini

On pose $X = \{ |x-y| : (x,y)\in A^2 \}$.

. Puisque A est non vide, il existe $x\in A$. On pose $y = x$. Alors $|x-y| = 0 \in X$. Donc X est non vide.

. Puisque A est bornée, il existe $M\in\mathbb{R}_+$ tq
$$\forall x\in A \quad |x|\leqslant M.$$
Soit $z\in X$. Alors, il existe $x,y\in A$ tels que $z = |x-y|$. Donc
$$z = |x-y| \leqslant |x|+|y| \leqslant 2M$$
Donc X est majorée par $2M$.

X admet donc une borne supérieure. On pose $\alpha = \inf(A)$ et $\beta = \sup(A)$. Montrons que $\sup(X) = \beta-\alpha$.

. $\beta-\alpha$ majore X. En effet, soit $z\in X$. Alors, il existe $x,y\in A$ tels que $z = |x-y|$. Alors
$$z = |x-y|$$
Or $x\leqslant\beta$ et $y\geqslant\alpha$, donc $-y\leqslant-\alpha$. Donc $x-y\leqslant\beta-\alpha$. De même $-(x-y)\leqslant\beta-\alpha$. Donc
$$|x-y|\leqslant\beta-\alpha.$$
Donc $\beta-\alpha$ majore X.

. $\beta-\alpha$ est le plus petit majorant de X.
Soit $\varepsilon>0$. Puisque $\alpha = \inf(A)$, il existe $y\in A$ tel que $y\leqslant\alpha+\varepsilon/2$. De même, il existe $x\in A$ tel que $x\geqslant\beta-\varepsilon/2$. Donc
$$x-y\geqslant\beta-\alpha-\varepsilon$$
$$\text{donc} \quad |x-y|\geqslant x-y\geqslant\beta-\alpha-\varepsilon.$$

On pose $z = |x-y|$. Alors $z \in X$ et $z \geq \beta - \alpha - \varepsilon$.
Donc $\beta-\alpha$ est le plus petit majorant de X.

On en déduit que $\beta - \alpha = \operatorname{Sup} X$.

<u>Remarque</u>: On a prouvé que $\operatorname{Sup} X$ existait indépendamment de son calcul. C'est un théorie inutile puisqu'on montre dans la seconde partie que $\beta-\alpha$ est la borne supérieure de X, et pour cette preuve, nous n'avons pas besoin d'utiliser que $\operatorname{Sup}(X)$ existe.