

## COURS : ESPACES VECTORIELS

## Table des matières

<b>1 Espace vectoriel, application linéaire</b>	<b>1</b>
1.1 Sous-espace vectoriel . . . . .	1
1.2 Application linéaire . . . . .	2
<b>2 Espace vectoriel des applications linéaires</b>	<b>3</b>
2.1 $\mathcal{L}(E, F)$ . . . . .	3
2.2 Le groupe linéaire . . . . .	3
<b>3 Somme, somme directe, projecteur</b>	<b>3</b>
3.1 Somme, somme directe . . . . .	3
3.2 Projecteur . . . . .	4
3.3 Symétrie . . . . .	4

## 1 Espace vectoriel, application linéaire

## 1.1 Sous-espace vectoriel

**Proposition 1.** On dit qu'une partie  $F$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  lorsque :

- $0 \in F$
- $F$  est stable par combinaisons linéaires :

$$\forall x, y \in F \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \lambda x + \mu y \in F$$

Si tel est le cas,  $(F, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## Remarques :

- $\Rightarrow$  Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\{0\}$  et  $E$  en sont des sous-espaces vectoriels.
- $\Rightarrow$  Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . Alors

$$F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^n$ . Par exemple, l'ensemble d'équation  $x + y + z = 0$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

## Exercices :

- $\Rightarrow$  Montrer que l'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

**Proposition 2.** Une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

## Remarques :

- $\Rightarrow$  Contrairement à l'intersection, l'union de deux sous-espaces vectoriels n'est en général pas un sous-espace vectoriel.
- $\Rightarrow$  Soit  $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}$  une famille de scalaires. Alors

$$F = \{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p : \forall i \in \llbracket 1, q \rrbracket \quad \lambda_{i,1}x_1 + \dots + \lambda_{i,p}x_p = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^p$ . Par exemple, l'ensemble d'équation

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

**Définition 1.** Soit  $A$  une partie d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Alors, il existe un plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $A$  ; on l'appelle sous-espace vectoriel engendré par  $A$  et on le note  $\text{Vect } A$ .

**Proposition 3.** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $x_1, \dots, x_n \in E$ . Alors :

$$\text{Vect } \{x_1, \dots, x_n\} = \{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

Les éléments de  $\text{Vect } \{x_1, \dots, x_n\}$  sont appelés combinaisons linéaires de la famille  $x_1, \dots, x_n$ .

## Remarques :

- $\Rightarrow$  Si  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $x \in E$ , l'espace vectoriel engendré par  $x$  est  $\mathbb{K}x = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}$ . Si  $x = 0$ , alors  $\text{Vect } \{x\} = \{0\}$ . Sinon, pour tout vecteur non nul  $y \in \text{Vect } \{x\}$ ,  $\text{Vect } \{x\} = \text{Vect } \{y\}$ .
- $\Rightarrow$  On dit qu'un espace vectoriel  $E$  est une droite vectorielle lorsqu'il existe  $x \in E$  non nul tel que  $E = \text{Vect } \{x\}$ .
- $\Rightarrow$  Si  $A$  une partie de  $E$ , on montre de même que  $\text{Vect } A$  est l'ensemble des éléments  $x \in E$  tels qu'il existe  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_1, \dots, x_n \in A$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tel que

$$x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k$$

Ces éléments sont ce qu'on appelle les combinaisons linéaires des éléments de  $A$ .

## Exercices :

- $\Rightarrow$  Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Déterminer  $\text{Vect } A$  où

$$A = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq 0\}$$

## 1.2 Application linéaire

**Définition 2.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On dit qu'une application  $f$  de  $E$  dans  $F$  est une application linéaire lorsque :

$$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Plus précisément, on dit que  $f$  est un :

- endomorphisme lorsque  $E = F$
- isomorphisme lorsque  $f$  est bijective
- automorphisme lorsque  $f$  est un endomorphisme et un isomorphisme.

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  et  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .

### Remarques :

- $\Rightarrow$  Soit  $f$  est une application linéaire de  $E$  dans  $F$ . Alors,  $f(0_E) = 0_F$ .
- $\Rightarrow$  Soit  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ . Alors, l'application de  $\mathbb{K}^n$  dans  $\mathbb{K}$  qui au  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  associe  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  est linéaire. Plus généralement, si  $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq q, 1 \leq j \leq p}$  est une famille de scalaires, l'application de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^q$  qui au  $p$ -uplet  $(x_1, \dots, x_p)$  associe le  $q$ -uplet  $(\lambda_{1,1}x_1 + \dots + \lambda_{1,p}x_p, \dots, \lambda_{q,1}x_1 + \dots + \lambda_{q,p}x_p)$  est linéaire. Par exemple les applications

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} & \text{et } \varphi_2 : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto x + y - 2z & (x, y, z) &\longmapsto (x + y + z, x - 2y + 3z) \end{aligned}$$

sont linéaires.

- $\Rightarrow$  La conjugaison est un automorphisme de  $\mathbb{C}$  lorsqu'il est considéré comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel mais pas lorsqu'il est considéré comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.
- $\Rightarrow$  Soit  $f$  est un endomorphisme du  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Lorsque  $F$  est stable par  $f$ , c'est-à-dire lorsque  $f(F) \subset F$ , la restriction de  $f$  à  $F$  corestrictée à  $F$  est un endomorphisme de  $F$  appelé endomorphisme induit à  $F$ .

**Définition 3.** On dit qu'une application  $f$  de  $E$  dans  $E$  est une homothétie lorsqu'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que :

$$\forall x \in E \quad f(x) = \lambda x$$

Les homothéties de  $E$  sont des endomorphismes.

### Remarques :

- $\Rightarrow$  Si  $E$  est une droite vectorielle, les homothéties sont les seuls endomorphismes de  $E$ .

**Définition 4.** On appelle forme linéaire sur  $E$  toute application linéaire de  $E$  dans  $\mathbb{K}$ . L'ensemble  $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$  est noté  $E^*$  et appelé dual de  $E$ .

**Proposition 4.** Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- L'image réciproque par  $f$  d'un sous-espace vectoriel de  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- L'image directe par  $f$  d'un sous-espace vectoriel de  $E$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Définition 5.** On appelle noyau de  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et on note  $\text{Ker } f$  l'ensemble :

$$\text{Ker } f = \{x \in E : f(x) = 0\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Proposition 5.** Une application linéaire  $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker } f = \{0\}$ .

**Définition 6.** On appelle image de  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et on note  $\text{Im } f$  l'ensemble :

$$\text{Im } f = \{f(x) : x \in E\}$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

### Remarques :

- $\Rightarrow$   $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im } f = F$ .
- $\Rightarrow$  Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}^*$ , alors  $\text{Im } (\lambda f) = \text{Im } f$ .

### Exercices :

- $\Rightarrow$  Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f, g \in \mathcal{L}(E)$ . Montrer que

$$\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker } f \iff \text{Ker } g \cap \text{Im } f = \{0\}$$

- $\Rightarrow$  Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g = g \circ f$ . Montrer que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $g$ .

**Proposition 6.** Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  dans  $F$  et  $y_0 \in F$ . On considère l'équation :

$$f(x) = y_0$$

- Si  $y_0 \notin \text{Im } f$ , cette équation n'admet aucune solution.
- Sinon, étant donné une solution particulière  $x_0$  de cette équation, l'ensemble de ses solutions est

$$x_0 + \text{Ker } f = \{x_0 + x : x \in \text{Ker } f\}$$

### Remarques :

- $\Rightarrow$  Attention, sauf si  $y_0 = 0$ ,  $x_0 + \text{Ker } f$  n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$  car  $f(0) \neq y_0$ , donc  $0 \notin x_0 + \text{Ker } f$ .

**Proposition 7.**

- La composée de deux applications linéaires est linéaire.
- La bijection réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme.

## 2 Espace vectoriel des applications linéaires

### 2.1 $\mathcal{L}(E, F)$

**Définition 7.**  $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Proposition 8.** On dit qu'une partie  $B$  de l'algèbre  $(A, +, \cdot, \times)$  est une sous-algèbre de  $A$  lorsque c'est un sous-espace vectoriel de  $A$  et un sous-anneau de  $A$ , c'est-à-dire lorsque :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in B \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \lambda x + \mu y &\in B \\ 1_A &\in B \\ \forall x, y \in B \quad x \times y &\in B \end{aligned}$$

Si tel est le cas  $(B, +, \cdot, \times)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

**Proposition 9.** On dit qu'une application  $\varphi$  d'une algèbre  $(A, +, \cdot, \times)$  dans une algèbre  $(B, +, \cdot, \times)$  est un morphisme d'algèbre lorsque  $\varphi$  est une application linéaire et un morphisme d'anneau, c'est-à-dire lorsque :

$$\begin{aligned} \forall x, y \in A \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \varphi(\lambda x + \mu y) &= \lambda \varphi(x) + \mu \varphi(y) \\ \varphi(1_A) &= 1_B \\ \forall x, y \in A \quad \varphi(x \times y) &= \varphi(x) \times \varphi(y) \end{aligned}$$

**Proposition 10.**  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$  est une  $\mathbb{K}$ -algèbre.

**Remarques :**

⇒ Dans la  $\mathbb{K}$ -algèbre  $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ , l'élément neutre pour l'addition est l'application nulle et l'élément neutre pour la composition est l'identité.

⇒ Si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on définit  $f^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme dans tout anneau, par  $f^0 = \text{Id}$  et  $\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{n+1} = f \circ f^n$ . Autrement dit, si  $n \in \mathbb{N}^*$

$$f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois } f}$$

Attention, si  $x \in E$ ,  $f^2(x) = f(f(x))$  et non  $f(x)^2$ , expression qui n'a d'ailleurs aucun sens.

⇒ En général, l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  n'est pas commutative. Par exemple, si  $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , les endomorphismes

$$\begin{aligned} \varphi_1 : E &\longrightarrow E & \text{et} & & \varphi_2 : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f' & & & f &\longmapsto \varphi_2(f) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & & & x &\longmapsto xf(x) \end{aligned}$$

ne commutent pas. Plus généralement, on peut démontrer que si  $E$  n'est pas une droite vectorielle,  $\mathcal{L}(E)$  n'est pas commutatif.

⇒ En général, l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  n'est pas intègre. Par exemple, si  $E$  est le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions affines de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , l'endomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto f' \end{aligned}$$

n'est pas nul, alors que  $\varphi^2 = 0$ . Plus généralement, on peut démontrer que si  $E$  n'est pas une droite vectorielle,  $\mathcal{L}(E)$  n'est pas intègre.

⇒  $\mathcal{L}(E)$  étant une algèbre et donc un anneau, si  $f$  et  $g$  sont deux endomorphismes de  $E$  tels que  $f \circ g = g \circ f$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g^k$$

Enfin, si  $n \in \mathbb{N}^*$

$$f^n - g^n = (f - g) \circ \left[ \sum_{k=0}^{n-1} f^{n-1-k} \circ g^k \right] = \left[ \sum_{k=0}^{n-1} f^{n-1-k} \circ g^k \right] \circ (f - g)$$

**Exercices :**

⇒ Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on définit  $K_n = \text{Ker } f^n$  et  $I_n = \text{Im } f^n$ . Montrer que les suites  $(K_n)$  et  $(I_n)$  sont respectivement croissantes et décroissantes au sens de l'inclusion.

⇒ Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On définit  $\Delta, T \in \mathcal{L}(E)$  par

$$\forall f \in E \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad T(f)(x) = f(x+1) \quad \text{et} \quad \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

Calculer  $T^k$  et  $\Delta^k$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

### 2.2 Le groupe linéaire

**Proposition 11.** Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est un automorphisme si et seulement si c'est un élément inversible de l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$ .

**Définition 8.** On note  $\text{GL}(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ . Muni de la loi de composition, c'est un groupe appelé groupe linéaire de  $E$ .

## 3 Somme, somme directe, projecteur

### 3.1 Somme, somme directe

**Définition 9.** On appelle somme de deux sous-espaces vectoriels  $A$  et  $B$  de  $E$ , et on note  $A + B$ , le plus petit sous-espace vectoriel contenant  $A$  et  $B$ . On a :

$$A + B = \{a + b : a \in A \quad b \in B\}$$

### Remarques :

- ⇒ Si  $f$  et  $g$  sont deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$  qui coïncident sur deux sous-espaces vectoriels  $A$  et  $B$  tels que  $A + B = E$ , alors  $f = g$ .

### Exercices :

- ⇒ Si  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im } f + \text{Im } g$ . L'inclusion peut être stricte.
- ⇒ Soit  $A, B, C$  et  $D$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que  $A \subset C, B \subset D$  et  $A + B = C + D$ . Montrer que  $A + D = C + B$ .

**Définition 10.** On dit que deux sous-espaces vectoriels  $A$  et  $B$  de  $E$  sont en somme directe lorsque l'écriture  $x = a + b$  (avec  $a \in A$  et  $b \in B$ ) de tout élément  $x \in A + B$  est unique. Si tel est le cas, la somme  $A + B$  est notée  $A \oplus B$ .

**Proposition 12.** Deux sous-espaces vectoriels  $A$  et  $B$  de  $E$  sont en somme directe si et seulement si :

$$A \cap B = \{0\}$$

**Définition 11.** On dit que deux sous-espaces vectoriels  $A$  et  $B$  de  $E$  sont supplémentaires lorsque :

$$A \oplus B = E$$

### Exercices :

- ⇒ Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $f^3 = f^2 + f$ . Montrer que  $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$ .

## 3.2 Projecteur

**Définition 12.** Soit  $A$  et  $B$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Alors, il existe une unique endomorphisme  $p \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad p(a + b) = a$$

On l'appelle projecteur sur  $A$  parallèlement à  $B$

**Définition 13.** Si  $p$  est le projecteur sur  $A$  parallèlement à  $B$ , le projecteur  $q$  sur  $B$  parallèlement à  $A$  est appelé projecteur associé à  $p$ . On a :

$$p + q = \text{Id} \quad \text{et} \quad p \circ q = q \circ p = 0$$

De plus, pour tout  $x \in E$

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in A} + \underbrace{q(x)}_{\in B}$$

est la décomposition de  $x$  dans  $E = A \oplus B$ .

**Proposition 13.** Soit  $p$  le projecteur sur  $A$  parallèlement à  $B$ . Alors :

$$\text{Ker } p = B \quad \text{Ker}(p - \text{Id}) = A \quad \text{Im } p = A$$

De plus  $p \circ p = p$ .

### Remarques :

- ⇒ En particulier, si  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un projecteur

$$E = \text{Ker } p \oplus \text{Ker}(p - \text{Id}) \quad \text{et} \quad E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$$

**Proposition 14.**  $p \in \mathcal{L}(E)$  est un projecteur si et seulement si  $p \circ p = p$ .

### Exercices :

- ⇒ Soit  $\text{Re}$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  qui à  $z$  associe  $\text{Re}(z)$ . Montrer que  $\text{Re}$  est un projecteur de  $\mathbb{C}$  lorsqu'il est considéré comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- ⇒ Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On définit l'application  $\varphi$  de  $E$  dans  $E$  par :

$$\forall f \in E \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad [\varphi(f)](x) = f(0) + f'(0)x$$

Montrer que  $\varphi$  est un projecteur. En déduire un supplémentaire du sous-espace vectoriel de  $E$  des fonctions affines.

**Proposition 15.** Soit  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et  $A, B$  deux sous-espaces supplémentaires de  $E$ . Étant donnés  $f_A \in \mathcal{L}(A, F)$  et  $f_B \in \mathcal{L}(B, F)$ , il existe une unique application linéaire  $f$  de  $E$  dans  $F$  telle que :

$$\forall a \in A \quad f(a) = f_A(a) \quad \text{et} \quad \forall b \in B \quad f(b) = f_B(b)$$

## 3.3 Symétrie

**Définition 14.** Soit  $A$  et  $B$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Alors, il existe un unique endomorphisme  $s \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$\forall a \in A \quad \forall b \in B \quad s(a + b) = a - b$$

On l'appelle symétrie par rapport à  $A$  parallèlement à  $B$ .

**Proposition 16.** Soit  $s$  la symétrie par rapport à  $A$  parallèlement à  $B$ . Alors :

$$\text{Ker}(s - \text{Id}) = A \quad \text{Ker}(s + \text{Id}) = B$$

De plus  $s \circ s = \text{Id}$ . En particulier  $s$  est un isomorphisme et  $s^{-1} = s$ .

### Remarques :

- ⇒ En particulier, si  $s \in \mathcal{L}(E)$  est une symétrie

$$E = \text{Ker}(s - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id})$$

**Proposition 17.**  $s \in \mathcal{L}(E)$  est une symétrie si et seulement si  $s \circ s = \text{Id}$ .

**Exercices :**

$\Rightarrow$  Soit  $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et  $\varphi$  l'application de  $E$  dans  $E$  qui à  $f$  associe le fonction  $\varphi(f)$  définie par  $\forall x \in \mathbb{R} \quad [\varphi(f)](x) = f(-x)$ . Montrer que  $\varphi$  est une symétrie et en déduire que  $E = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$  où  $\mathcal{I}$  désigne l'espace vectoriel des fonctions impaires et  $\mathcal{P}$  l'espace vectoriel des fonctions paires.

$\Rightarrow$  Donner une formule de trigonométrie hyperbolique donnant  $\cosh(2x)$  en fonction de  $\cosh x$ .