Cours : Révisions d'algèbre

Table des matières

1 Algèbre élémentaire, trigonométrie **1**
1.1 Algèbre élémentaire . . . 1
1.2 Symbole de sommation . . . 1
1.3 Binôme de Newton, factorisation . . . 2
1.4 Trigonométrie . . . 4

2 Résolution d'équations **6**
2.1 Éléments de logique . . . 6
2.2 Équations à une inconnue . . . 7
2.3 Inéquations à une inconnue . . . 8
2.4 Systèmes linéaires à q équations et p inconnues . . . 8

1 Algèbre élémentaire, trigonométrie

1.1 Algèbre élémentaire

Définition 1. *Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit a^n pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ par récurrence sur n en posant :*
- $a^0 = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad a^{n+1} = a^n a$

Remarques :

⇨ Quel que soit $a \in \mathbb{R}$, $a^0 = 1$. En particulier, $0^0 = 1$.

Proposition 1. *Soit a et b deux réels. Alors :*

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ et } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Proposition 2. *Soit a, b deux réels, n et m deux entiers naturels. Alors :*
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $a^{n+m} = a^n a^m$
- $(a^n)^m = a^{nm}$

Remarques :

⇨ De manière générale $(a^n)^m \neq a^{(n^m)}$ (prendre par exemple $a = 2$, $n = 1$ et $m = 2$). La notation a^{n^m} n'a donc aucun sens.

Définition 2. *Soit a un nombre réel non nul et $n \in \mathbb{Z}$. On étend la définition de a^n en posant :*

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$$

lorsque $n < 0$.

Proposition 3. *Soit a, b deux réels non nuls, n et m deux entiers relatifs. Alors :*
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $a^{n+m} = a^n a^m$
- $(a^n)^m = a^{nm}$

1.2 Symbole de sommation

Définition 3. *Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leqslant n$ et $u_m, u_{m+1}, \dots, u_{n-1}, u_n \in \mathbb{R}$. On note :*

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{m \leqslant k \leqslant n} u_k = u_m + u_{m+1} + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

Proposition 4.
- *Soit $m, n \in \mathbb{Z}$ avec $m \leqslant n$ et $p \in \mathbb{Z}$. Alors :*

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = \sum_{k=m-p}^{n-p} u_{k+p}$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :*

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} u_{2k} + \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} u_{2k+1}$$

Remarques :

⇨ En pratique, lorsque l'on souhaite faire le première transformation, on dit qu'on effectue le changement de variable $k \leftarrow k + p$:

$$\sum_{k=m}^{n} u_k = « \sum_{k=m}^{k=n} u_k = \sum_{k+p=m}^{k+p=n} u_{k+p} = \sum_{k=m-p}^{k=n-p} u_{k+p} » = \sum_{k=m-p}^{n-p} u_{k+p}$$

Le seconde transformation se fait de même ; on dit qu'on fait le changement de variable $k \leftarrow n-k$. Cependant, pour la dernière transformation, il ne faut surtout pas faire sans réfléchir le changement de variable $k \leftarrow 2k$ ce qui donnerait la formule $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n/2} u_{2k}$ qui est évidemment fausse car le membre de droite ne somme que les u_l d'indice pair alors que le membre de gauche les somme tous. On peut cependant écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \text{« } \sum_{k=0}^{k=n} u_k \\
&= \sum_{2k=0}^{2k=n} u_{2k} + \sum_{2k+1=0}^{2k+1=n} u_{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} u_{2k} + \sum_{k=-\frac{1}{2}}^{k=\frac{n-1}{2}} u_{2k+1} \text{ »} \\
&= \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} u_{2k} + \sum_{k=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} u_{2k+1}
\end{aligned}$$

On retiendra que les changements de variable du type $k \leftarrow \pm k + p$ se font simplement alors que les changements de variable du type $k \leftarrow pk$ nécessitent plus d'attention.

Exemples :

⇨ Simplifier $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ puis en déduire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Proposition 5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Remarques :

⇨ On dit qu'une suite (u_n) est en progression arithmétique lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + a$$

Si tel est le cas, on montre facilement par récurrence sur n que $u_n = u_0 + na$. Si $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$, en notant $S = \sum_{k=m}^{n} u_k$, on a

$$\begin{aligned}
S + S &= \sum_{k=m}^{n} (u_0 + ka) + \sum_{k=m}^{n} (u_0 + ka) \\
&= \sum_{k=0}^{n-m} (u_0 + (m+k)\,a) + \sum_{k=0}^{n-m} (u_0 + (n-k)\,a) \\
&= \sum_{k=0}^{n-m} (2u_0 + (m+n)\,a) = \sum_{k=m}^{n} (u_m + u_n) \\
&= (u_m + u_n)(n - m + 1)
\end{aligned}$$

Donc

$$S = \frac{u_m + u_n}{2} \cdot (n - m + 1)$$

Autrement dit, la somme d'une suite de termes en progression arithmétique est donnée par la formule

$$\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2} \cdot (\text{nombre de termes})$$

Exemples :

⇨ Développer $(k+1)^3 - k^3$. En déduire

$$\sum_{k=0}^{n} k^2$$

1.3 Binôme de Newton, factorisation

Définition 4. *Pour tout entier naturel n, on définit la factorielle de n que l'on note $n!$ par :*
- $0! = 1$
- $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)! = (n+1)\,n!$

Définition 5. *Pour tout couple (k, n) d'entiers naturels, on définit $\binom{n}{k}$ et on dit k parmi n, le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments.*

Proposition 6. *Soit k et n deux entiers. Alors :*
- *si $k > n$, on a $\binom{n}{k} = 0$*
- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
- *si $k \in [\![0, n]\!]$, on a $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$*

Proposition 7. *Soit k et n deux entiers naturels. Alors :*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Remarques :

⇨ Cette formule est appelée relation de Pascal. Elle permet de calculer efficacement les $\binom{n}{k}$ en construisant le triangle de Pascal.

> **Proposition 8.** *Soit n un entier naturel et $k \in [\![0, n]\!]$. Alors :*
> $$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Remarques :

⇨ Cette formule est très mauvaise pour calculer effectivement $\binom{n}{k}$. Par exemple, si l'on souhaite calculer $\binom{13}{2}$ à l'aide de cette formule, on est amené à calculer 13!. Si on dispose d'un ordinateur codant les entiers sur 32 bits, le calcul de 13! donnera un résultat erroné car $13! \geqslant 2^{32}$. L'explosion d'Ariane 5 lors de son décollage le 4 juin 1996 est due à une erreur de ce type.

⇨ On peut simplifier l'écriture de $\binom{n}{k}$ en

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{\overbrace{n\,(n-1)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ termes}}}{k!}$$

En particulier

$$\binom{n}{1} = n \text{ et } \binom{n}{2} = \frac{n\,(n-1)}{2}$$

⇨ Si $k, n \in \mathbb{N}$, alors

$$\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \cdot \binom{n}{k}$$

Exemples :

⇨ Prouver que

$$\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!}$$

> **Proposition 9.** *Soit a et b deux réels et n un entier naturel. Alors :*
> $$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Remarques :

⇨ Cette formule est appelée formule du binôme de Newton.

⇨ En particulier, si $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

Exemples :

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$. En déduire

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 0\ [2]}}^{n} \binom{n}{k} \text{ et } B = \sum_{\substack{k=0 \\ k \equiv 1\ [2]}}^{n} \binom{n}{k}$$

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k$$

> **Proposition 10.** *Soit a et b deux réels. Alors :*
> — $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$
> — *Plus généralement pour tout entier naturel n non nul :*
> $$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right) \\ &= (a-b)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k\right) \end{aligned}$$

Remarques :

⇨ Par exemple $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

⇨ En particulier, si $b = 1$, on a

$$a^n - 1 = (a-1) \sum_{k=0}^{n-1} a^k$$

⇨ Comme $a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3$, on a

$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}$ est impair, on peut factoriser de la même manière $a^n + b^n$ par $a + b$.

Exemples :

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $10^n - 1$ est divisible par 9.

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, il en est de même pour n.

> **Proposition 11.** *Soit a un réel et n un entier naturel. Alors :*
> $$\sum_{k=0}^{n} a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n = \begin{cases} \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a} & \text{si } a \neq 1 \\ n+1 & \text{si } a = 1 \end{cases}$$

Remarques :

⇨ On dit qu'une suite (u_n) est en progression géométrique de raison $a \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = a u_n$$

Si tel est le cas, on montre facilement par récurrence sur n que $u_n = u_0 a^n$. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m \leqslant n$ et $S = \sum_{k=m}^{n} u_k$. Si $a \neq 1$, alors

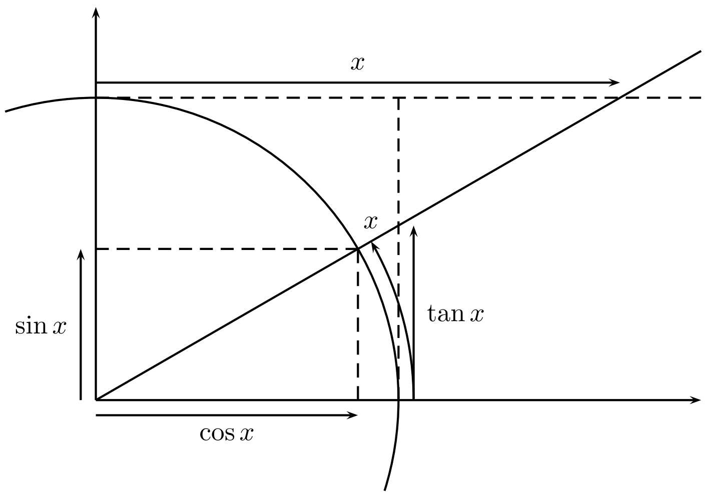
$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=m}^{n} u_0 a^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-m} u_0 a^{k+m} = u_0 a^m \sum_{k=0}^{n-m} a^k \\ &= u_m \cdot \frac{1 - a^{n-m+1}}{1-a} \end{aligned}$$

Autrement dit, la somme d'une suite de termes en progression géométrique de raison $a \neq 1$ est donnée par la formule

$$(\text{premier terme}) \cdot \frac{1 - a^{\text{nombre de termes}}}{1-a}$$

1.4 Trigonométrie

Définition 6. *On définit le sinus, le cosinus, la tangente et la cotangente d'un angle par :*

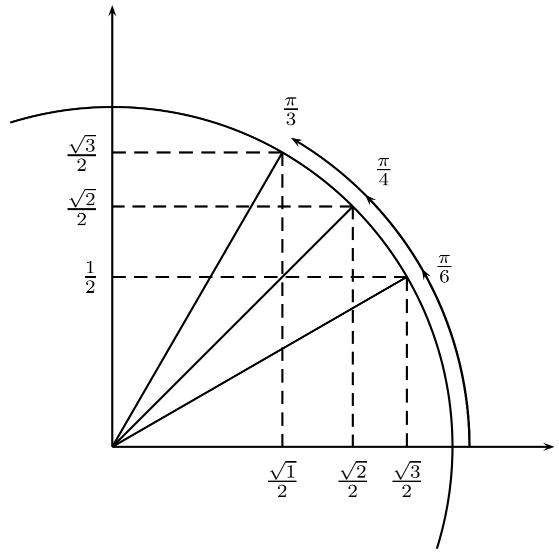


En particulier $\tan x$ *n'est défini que pour* $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ *et* $\operatorname{cotan} x$ *n'est défini que pour* $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ *et :*

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ \textit{et} \ \operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

Remarques :

⇨ On rappelle les principales valeurs remarquables



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	indéfini
$\operatorname{cotan} x$	indéfini	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

⇨ Si $x \in \mathbb{R} \setminus \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$, alors

$$\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}$$

Remarquons cependant que cotan est définie en $\pi/2$ alors que tan ne l'est pas.

Proposition 12. *D'après Pythagore, on a :*

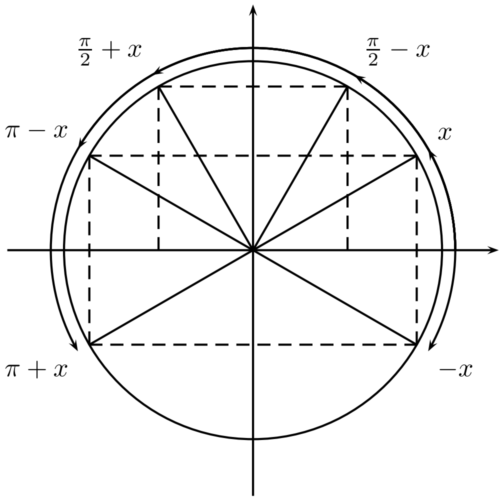
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$1 + \operatorname{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Proposition 13. *Symétries :*

$$\cos(-x) = \cos x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x \qquad \sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \sin(\pi - x) = \sin x$$
$$\tan(-x) = -\tan x \qquad \tan(\pi + x) = \tan x \qquad \tan(\pi - x) = -\tan x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\operatorname{cotan} x \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{cotan} x$$



Exemples :

⇨ Calculer
$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right), \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

Proposition 14. *Addition des arcs :*

$$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b \qquad \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b \qquad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Remarques :

⇨ Si $a, b \in \mathbb{R}$ ne sont par tous les deux nuls, on pourra factoriser $a\cos x + b \sin x$ de la manière suivante
$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$$
Comme
$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$
il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\cos\theta_0 = a/\sqrt{a^2+b^2}$ et $\sin\theta_0 = b/\sqrt{a^2+b^2}$, donc
$$\begin{aligned} a\cos x + b\sin x &= \sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta_0 \cos x + \sin\theta_0 \sin x) \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\cos(x - \theta_0) \end{aligned}$$

Exemples :

⇨ Factoriser $\sqrt{3}\cos x + \sin x$.

Proposition 15. *Angle double :*

$$\begin{aligned} \cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ \sin(2x) &= 2\cos x \sin x \end{aligned}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Exemples :

⇨ Soit $a \in \mathbb{R}$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$p_n = \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$$
En déduire la limite de la suite (p_n).

Proposition 16. *Linéarisation :*

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) - \sin(a-b)\right]$$

Exemples :

⇨ Linéariser $\cos^3 x$, $\cos x \sin^2 x$, puis $\sin^4 x$.

Proposition 17. *Factorisation :*

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} \qquad \sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2} \qquad \sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\tan p + \tan q = \frac{\sin(p+q)}{\cos p\cos q}$$
$$\tan p - \tan q = \frac{\sin(p-q)}{\cos p\cos q}$$

Remarques :

⇨ On pourra retenir que si f est la fonction sin ou cos, on a

$$f(p) - f(q) = 2f'\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \text{ et } f(p) + f(q) = 2f\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exemples :

⇨ Calculer
$$\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\sin^2(kx)$$

Proposition 18. *Soit $x \not\equiv \pi\ [2\pi]$. Alors, en posant $t = \tan(x/2)$, on a*

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Si de plus, $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, alors
$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Remarques :

⇨ Remarquons au passage que comme $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = 1$$

Autrement dit
$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \left(1-t^2\right)^2 + (2t)^2 = \left(1+t^2\right)^2$$

ce qui d'ailleurs se vérifie facilement. Cette relation nous donne, pour $t \in \mathbb{N}$, des triplets $(a,b,c) \in \mathbb{N}^3$ non triviaux tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

2 Résolution d'équations

2.1 Éléments de logique

Définition 7. *Soit E une équation définie sur une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$. On appelle solution de E tout élément x de $\mathcal{D}$ tel que $E(x)$ est vrai.*

Définition 8. *Soit E_1 et E_2 deux équations définies sur une même partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$.*
- *On dit que E_1 implique E_2 et on note :*
$$\forall x \in \mathcal{D} \quad E_1(x) \Longrightarrow E_2(x)$$
lorsque toute solution de E_1 est solution de E_2.
- *On dit que E_1 et E_2 sont équivalentes et on note :*
$$\forall x \in \mathcal{D} \quad E_1(x) \Longleftrightarrow E_2(x)$$
lorsque E_1 et E_2 ont mêmes solutions. E_1 et E_2 sont équivalentes si et seulement si E_1 implique E_2 et E_2 implique E_1.

Remarques :

⇨ Les opérations suivantes transforment une équation en une équation équivalente :
—Ajouter une expression aux deux termes de l'égalité.
—Multiplier (ou diviser) les deux termes de l'égalité par une expression ne s'annulant pas.
—Prendre le logarithme ou l'exponentielle des deux termes de l'égalité.
Cependant, les opérations suivantes ne conservent généralement pas l'équivalence :
—Multiplier les deux côtés de l'égalité par une expression pouvant s'annuler.
—Élever une égalité au carré.
—Prendre le sinus, le cosinus, la tangente d'une égalité.

⇨ Le plus souvent on résout une équation par équivalence, mais il arrive parfois que l'on doive se contenter de la résoudre par implication. Dans ce cas, on trouve à la fin un ensemble de valeurs qui contient toutes les solutions mais il ne faut surtout pas oublier de vérifier quelles sont celles qui sont effectivement solution de l'équation.
Par exemple, si on souhaite résoudre l'équation $1 + x + x^2 + x^3 = 0$ sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \quad 1 + x + x^2 + x^3 = 0 &\Longrightarrow (1-x)\left(1 + x + x^2 + x^3\right) = 0\\ &\Longrightarrow 1 - x^4 = 0\\ &\Longrightarrow x^4 = 1\\ &\Longrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1\end{aligned}$$

Donc les seules solutions possibles de l'équation sont 1 et -1. Réciproquement, on remarque que seul -1 est solution de l'équation.

Exemples :

⇨ Résoudre l'équation $\sqrt{x} = x - 2$.

2.2 Équations à une inconnue

2.2.1 Résolution d'équations polynomiales

Définition 9. *Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, l'équation :*

$$x^n = a$$

admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+$. On la note $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$.

Remarques :

⇨ Si $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$.

⇨ L'identité $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$ est toujours vraie. Cependant l'identité $\sqrt{x^2} = x$ n'est vraie que pour $x \geqslant 0$. Plus généralement : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \sqrt{x^2} = |x|$.

⇨ Lorsqu'on manipule $\sqrt{a} - \sqrt{b}$, il est souvent utile de le multiplier par son expression conjuguée :

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

Proposition 19. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'équation :*

$$x^n = a$$

sur $\mathbb{R}$.

- *Si n est pair :*
  - *Si $a \geqslant 0$:*

    $$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^n = a \iff \left[x = \sqrt[n]{a} \text{ ou } x = -\sqrt[n]{a}\right]$$

  - *Sinon, l'équation n'admet aucune solution.*
- *Si n est impair :*
  - *Si $a \geqslant 0$:*

    $$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^n = a \iff x = \sqrt[n]{a}$$

  - *Sinon :*

    $$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^n = a \iff x = -\sqrt[n]{|a|}$$

Remarques :

⇨ Si $a < 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ est impair, l'équation $x^n = a$ admet donc une unique solution sur $\mathbb{R}$. On note parfois cette solution $\sqrt[n]{a}$, prolongeant ainsi le domaine de définition de $\sqrt[n]{\cdot}$ à $\mathbb{R}$. Cependant on n'écrira jamais $a^{\frac{1}{n}}$ si $a < 0$ même lorsque n est impair.

Exemples :

⇨ Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(x+1)^n = (x-1)^n$.

Proposition 20. *Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation :*

$$ax^2 + bx + c = 0$$

On appelle discriminant le réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- *Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions distinctes sur $\mathbb{R}$ appelées racines simples :*

  $$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- *Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ appelée racine double :*

  $$\frac{-b}{2a}$$

- *Si $\Delta < 0$, l'équation n'admet aucune solution sur $\mathbb{R}$.*

Remarques :

⇨ Si $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ est un polynôme de degré n admettant $r \in \mathbb{R}$ pour racine, il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(x) = Q(x)(x - r)$.

⇨ On dit qu'un polynôme $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ est réciproque de première espèce lorsque : $\forall k \in [\![0, n]\!] \quad a_{n-k} = a_k$. Dans ce cas, un changement de variable $u = x + \frac{1}{x}$ simplifie la recherche des racines de P.

Exemples :

⇨ Trouver une équation du second degré vérifié par $\tan(\pi/12)$ puis calculer cette quantité.

⇨ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$.

⇨ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 2x + 1 = 0$.

⇨ Simplifier $\sqrt[3]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{1 - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$.

2.2.2 Résolution d'équations trigonométriques

Proposition 21. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = 1 \iff x \equiv 0 \quad [2\pi]$$

Plus généralement, si $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos x = \cos\theta \iff [x \equiv \theta \quad [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\theta \quad [2\pi]]$$

Proposition 22. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = 0 \iff x \equiv 0 \quad [\pi]$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = 1 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Plus généralement, si $\theta \in \mathbb{R}$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sin\theta \iff [x \equiv \theta \quad [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - \theta \quad [2\pi]]$$

Exemples :

⇨ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations

$$\cos x - \cos(2x) = \sin(3x), \qquad \tan(4x) = 4\tan x$$

Proposition 23. *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \quad \tan x = 0 \iff x \equiv 0 \quad [\pi]$$

Plus généralement, si $\theta \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right) \quad \tan x = \tan\theta \iff x \equiv \theta \quad [\pi]$$

Remarques :

⇨ Soit $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right)$. Alors

$$\theta_2 \equiv \theta_1 + \frac{\pi}{2} \ [\pi] \quad \iff \quad \tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$$

2.3 Inéquations à une inconnue

Remarques :

⇨ Les opérations suivantes transforment une inéquation en une inéquation équivalente :
- —Ajouter une expression aux deux côtés de l'inégalité.
- —Multiplier (ou diviser) les deux côtés de l'inégalité par une expression strictement positive. Multiplier (ou diviser) les deux côtés de l'inégalité par une expression strictement négative ; dans ce cas, on change l'inégalité de sens.
- —Inverser les deux côtés de l'inégalité si les deux expressions sont de même signe ; dans ce cas, on change l'inégalité de sens.
- —Composer les deux côtés de l'égalité par une fonction strictement croissante : ln, exp, puissances entières positives impaires, puissances entières positives paires si les deux côtés de l'inégalité sont positifs, racine n-ième.

⇨ Pour résoudre une inéquation, on se ramène le plus souvent à la détermination du signe d'une expression. Il suffit alors de factoriser cette dernière expression et de conclure grâce à un tableau de signes. Rappelons que dans un tableau de signe le « + » (resp. « − ») signifie que l'expression est strictement positive (resp. négative).

Exemples :

⇨ Résoudre les inéquation

$$\left|\frac{x-2}{x+1}\right| < 2, \qquad 2\cos x + \sin x < 2$$

⇨ Trouver l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x + y < 1 + xy$.

Proposition 24. *Soit* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *avec* $a \neq 0$*. Si le trinôme* $ax^2 + bx + c$ *:*
- — *admet deux racines distinctes* r_1 *et* r_2*, ce dernier est du signe de* a *à l'extérieur des racines et du signe opposé à l'intérieur des racines.*
- — *admet une racine double* r*, ce dernier est du signe de* a *et ne s'annule qu'en* r*.*
- — *n'admet pas de racine, ce dernier est du signe de* a*.*

Exemples :

⇨ Résoudre les inéquations

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 3, \qquad 2x + 3 \leqslant \sqrt{x^2 - 1}$$

2.4 Systèmes linéaires à q équations et p inconnues

Exemples :

⇨ Résoudre le système

$$\begin{cases} x - 2y = -4 \\ 3x + y = 9 \end{cases}$$

Définition 10. *On appelle système linéaire à* q *équations et* p *inconnues tout système d'équations du type :*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = b_q \end{cases}$$

où $a_{1,1}, \ldots, a_{q,p}, b_1, \ldots, b_q$ *sont des réels et* $x_1, \ldots, x_p$ *sont les inconnues.*

Proposition 25. *Les opérations suivantes, appelées opérations élémentaires, transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent :*
- — *changer l'ordre des équations*
- — *changer l'ordre des inconnues*
- — *multiplier une équation par un réel non nul*
- — *ajouter* λ *fois (avec* $\lambda \in \mathbb{R}$*) une équation à une des équations suivantes*

Définition 11. *On dit qu'un système linéaire à q équations et p inconnues est triangulaire lorsqu'il est de la forme :*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + & \cdots & + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \phantom{a_{1,1}x_1 +{}} a_{2,2}x_2 + & \cdots & + a_{2,p}x_p = b_2 \\ & \ddots & = \vdots \\ & a_{q,q}x_q + \cdots & + a_{q,p}x_p = b_q \end{cases}$$

où les $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{q,q}$ sont tous non nuls.

Exemples :

⇨ Résoudre les systèmes

$$\begin{cases} 5x + y = 1 \\ 11x + 2y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 2y = 1 \end{cases}$$

⇨ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 3x + 2y + z = \alpha \end{cases}$$

Proposition 26. *À l'aide d'opérations élémentaires, il est possible de transformer tout système linéaire en un système triangulaire équivalent.*

Remarques :

⇨ La méthode suivante, appelée pivot de Gauss, permet de résoudre un système linéaire à q équations et p inconnues.

—La première étape consiste, modulo un échange de certaines variables, à passer du système original à un système équivalent où seule la première équation fait intervenir x_1 :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{q,1}x_1 + a_{q,2}x_2 + \cdots + a_{q,p}x_p = b_q \end{cases} \iff \begin{cases} a'_{1,1}x_1 + a'_{1,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p = b'_1 \\ a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{q,2}x_2 + \cdots + a'_{q,p}x_p = b'_q \end{cases}$$

Dans le cas où $a_{1,1} \neq 0$, il suffit d'effectuer, lors d'une même étape, les opérations suivantes :

$$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1, \qquad L_3 \leftarrow L_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1, \qquad \dots \qquad L_q \leftarrow L_q - \frac{a_{q,1}}{a_{1,1}} \cdot L_1$$

Sinon, il faut commencer par chercher un coefficient $a_{i,j}$ non nul (il est même préférable pour la suite du calcul qu'il soit égal à ± 1). En effectuant un échange des lignes et des variables, on « remonte » ce coefficient en haut à gauche du système et on se ramène au cas précédent.

—On recommence ensuite le même procédé sur le système

$$\begin{cases} a'_{2,2}x_2 + \cdots + a'_{1,p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{q,2}x_2 + \cdots + a'_{q,p}x_p = b'_q \end{cases}$$

tout en conservant la première ligne. On réitère ensuite le procédé jusqu'à épuisement des lignes. Au cours du calcul, si il apparaît l'équation $0 = 0$, il faut l'éliminer du système. Si au contraire il apparaît l'équation $0 = b$ avec $b \neq 0$, le système n'admet aucune solution et la résolution est terminée. Dans le cas où le système admet au moins une solution, on aboutit a un système triangulaire

$$\begin{cases} a''_{1,1}x_1 + a''_{1,2}x_2 + & \cdots & + a''_{1,p}x_p = b''_1 \\ \phantom{a''_{1,1}x_1 +{}} a''_{2,2}x_2 + & \cdots & + a''_{2,p}x_p = b''_2 \\ & \ddots & = \vdots \\ & a''_{r,r}x_r + \cdots & + a''_{r,p}x_p = b''_r \end{cases}$$

où les $a''_{1,1}, a''_{2,2}, \dots, a''_{r,r}$ sont tous non nuls et $r \leqslant q$. Nous montrerons (voir cours sur les systèmes linéaires), que l'entier r ne dépend pas des pivots choisis : on l'appelle rang du système.

—Ce dernier système est équivalent à

$$\exists t_{r+1}, \dots, t_p \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} a''_{1,1}x_1 + a''_{1,2}x_2 + \cdots + a''_{1,p}x_p = b''_1 \\ a''_{2,2}x_2 + \cdots + a''_{2,p}x_p = b''_2 \\ \ddots \quad = \vdots \\ a''_{r,r}x_r + \cdots + a''_{r,p}x_p = b''_r \\ x_{r+1} = t_{r+1} \\ \ddots \quad = \vdots \\ x_p = t_p \end{cases}$$

En effet, si $(x_1, \dots, x_p)$ est solution de ce système, on obtient le système précédent en ne gardant que les r premières lignes. Réciproquement, si $(x_1, \dots, x_p)$ est solution du système précédent, on obtient ce système en choisissant $t_{r+1} = x_{r+1}, \dots, t_p = x_p$. Ce dernier système se résout simplement en remontant les calculs de la dernière ligne à la première. On obtient ainsi le système équivalent

$$\exists t_{r+1}, \dots, t_p \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x_1 = c_1 + d_{1,r+1}t_{r+1} + \cdots + d_{1,p}t_p \\ \vdots = \vdots \qquad \vdots \\ x_r = c_r + d_{r,r+1}t_{r+1} + \cdots + d_{r,p}t_p \\ x_{r+1} = t_{r+1} \\ \vdots = \quad \ddots \\ x_p = t_p \end{cases}$$

qui est un paramétrage de l'ensemble des solutions.

Exemples :

⇨ Discuter et résoudre les systèmes suivants selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} -3a + \alpha b = 0 \\ -3a - b + 2\alpha c = 0 \\ -2b + c + 3\alpha d = 0 \\ -c + 3d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a + b + c + d = 3 \\ a + \alpha b + c - \alpha d = \alpha + 2 \\ \alpha a - b - \alpha c - \alpha d = -1 \end{cases}$$