Cours : Fractions rationnelles

Table des matières

1 Fractions rationnelles

1.1 Représentants d'une fraction rationnelle

Définition 1. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ étant intègre, on admet qu'il existe un unique corps (à isomorphisme près) noté $\mathbb{K}(X)$ et appelé corps des fractions rationnelles, possédant les propriétés suivantes :*
- *$\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau du corps $\mathbb{K}(X)$.*
- *Pour tout élément F de $\mathbb{K}(X)$, il existe un couple de polynômes (A, B) avec $B \neq 0$ tel que :*
$$F = \frac{A}{B}$$

Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions rationnelles à coefficients sur le corps $\mathbb{K}$.

Définition 2. *Soit F une fonction rationnelle.*
- *On dit qu'un couple de polynômes (A, B) avec $B \neq 0$ est un représentant de F lorsque :*
$$F = \frac{A}{B}$$
- *On dit que ce représentant est irréductible lorsque A et B sont premiers entre eux et qu'il est unitaire lorsque B est unitaire.*

Exercice :

⇨ Mettre sous forme irréductible les fractions rationnelles
$$\frac{X^2-1}{X^3-1} \quad \text{et} \quad \frac{X^2+X-2}{X^3-5X^2+8X-4}$$

Proposition 1. *Soit F une fraction rationnelle. Alors F admet un unique représentant irréductible unitaire (A, B). De plus :*
- *Les représentants de F sont les couples (QA, QB) où Q est un polynôme non nul.*
- *Les représentants irréductibles de F sont les couples $(\lambda A, \lambda B)$ où λ est un scalaire non nul.*

1.2 Degré

Définition 3. *Soit F une fraction rationnelle. L'entier relatif $\deg A - \deg B$ ne dépend pas de la représentation de F choisie ; on l'appelle degré de F.*

Exercice :

⇨ Par exemple
$$\deg\left(\frac{X+1}{X+2}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \deg\left(\frac{X^2+1}{X^3+1}\right) = -1$$

Proposition 2. *Soit F_1 et F_2 deux fractions rationnelles.*
- *Soit $n \in \mathbb{Z}$. Si $\deg F_1 \leqslant n$ et $\deg F_2 \leqslant n$, alors :*
$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \deg(\lambda F_1 + \mu F_2) \leqslant n$$
- $\deg F_1 F_2 = \deg F_1 + \deg F_2$

1.3 Racines, pôles et substitution

Définition 4. *Soit F une fraction rationnelle et (A, B) un représentant irréductible de F. On dit qu'un scalaire α est :*
- *une racine de F lorsque α est racine de A. Dans ce cas on définit l'ordre de multiplicité de la racine α comme son ordre de multiplicité en tant que racine de A.*
- *un pôle de F lorsque α est racine de B. Dans ce cas on définit l'ordre de multiplicité du pôle α comme son ordre de multiplicité en tant que racine de B.*

Exercice :

⇨ Donner les racines et les pôles de la fraction rationnelle

$$F = \frac{X^2 + X - 2}{X^3 - 5X^2 + 8X - 4}$$

Définition 5. *Soit F une fraction rationnelle sur le corps $\mathbb{K}$ et α un scalaire. Si α n'est pas un pôle de F, on définit $F(\alpha)$ par :*

$$F(\alpha) = \frac{A(\alpha)}{B(\alpha)}$$

où (A, B) est un représentant de F tel que α ne soit pas racine de B.

Proposition 3. *Soit $\alpha \in \mathbb{K}$, F_1 et F_2 deux fractions rationnelles n'admettant pas α pour pôle et λ, $\mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda F_1 + \mu F_2$ et F_1F_2 n'admettent pas α pour pôle et :*

$$\begin{aligned} (\lambda F_1 + \mu F_2)(\alpha) &= \lambda F_1(\alpha) + \mu F_2(\alpha) \\ (F_1F_2)(\alpha) &= F_1(\alpha)F_2(\alpha) \end{aligned}$$

Définition 6. *Soit F une fraction rationnelle. Si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des pôles de F, on définit la fonction rationnelle $\tilde{F} : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \to \mathbb{K}$ par :*

$$\forall x \in \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \quad \tilde{F}(x) = F(x)$$

1.4 Conjugaison sur $\mathbb{C}(X)$

Définition 7. *Soit $F \in \mathbb{C}[X]$. On définit la fraction rationnelle $\overline{F}$ par :*

$$\overline{F} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$$

Proposition 4. *Soit F_1, $F_2 \in \mathbb{C}(X)$ et λ, μ deux réels. Alors :*

$$\begin{aligned} \overline{\lambda F_1 + \mu F_2} &= \lambda \overline{F_1} + \mu \overline{F_2} \\ \overline{F_1F_2} &= \overline{F_1}\,\overline{F_2} \end{aligned}$$

Proposition 5. *Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. Alors :*

- $\deg \overline{F} = \deg F$
- $\overline{\overline{F}} = F$
- *$F \in \mathbb{R}(X)$ si et seulement si $\overline{F} = F$*

Proposition 6. *Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.*

- *Si α est racine de F d'ordre r, alors $\overline{\alpha}$ est racine de $\overline{F}$ d'ordre r.*
- *Si α est pôle de F d'ordre r, alors $\overline{\alpha}$ est pôle de $\overline{F}$ d'ordre r.*

2 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}(X)$

2.1 Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{K}(X)$

Proposition 7. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Alors il existe un unique couple (E, G) constitué d'un polynôme E appelé partie entière de F, et d'une fraction rationnelle G de degré inférieur ou égal à -1 tel que :*

$$F = E + G$$

En pratique E s'obtient comme le quotient de la division euclidienne de A par B où (A, B) est un représentant de F.

Exercice :

⇨ Calculer la partie entière de

$$F = \frac{X^3 + 2X^2 + 1}{X^2 + 1}$$

Proposition 8. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Si on écrit F sous forme unitaire irréductible et qu'on décompose son dénominateur en polynômes irréductibles*

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{\prod_{k=1}^{r} P_k^{\alpha_k}}$$

alors il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ ainsi qu'une unique famille de polynômes $R_{k,l} \in \mathbb{K}[X]$ avec $k \in [\![1, r]\!]$ et $l \in [\![1, \alpha_k]\!]$ tels que

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{\alpha_k} \frac{R_{k,l}}{P_k^l}$$

et $\deg R_{k,l} < \deg P_k$.

2.2 Cas où le dénominateur est scindé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

Proposition 9. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On écrit F sous forme unitaire irréductible et on suppose que son dénominateur est scindé*

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{\prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{\omega_k}}$$

Alors il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ ainsi qu'une unique famille de scalaires $a_{k,l} \in \mathbb{K}$ avec $k \in [\![1, r]\!]$ et $l \in [\![1, \omega_k]\!]$ tels que

$$F = E + \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{\omega_k} \frac{a_{k,l}}{(X - \alpha_k)^l}$$

Remarque :

⇨ En reprenant les notations de la proposition ci-dessus, on dit que

$$\sum_{l=1}^{\omega_k} \frac{a_{k,l}}{(X-\alpha_k)^l}$$

est la partie polaire de F relative au pôle α_k.

2.2.1 Cas où F n'admet que des pôles simples

Proposition 10. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On écrit F sous forme irréductible et on suppose que son dénominateur est scindé simple*

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{\prod_{k=1}^n (X-\alpha_k)}$$

Alors

$$F = E + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{X-\alpha_k}$$

où E est la partie entière de F et les a_k sont donnés par les deux formules équivalentes :

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \qquad a_k = \frac{A(\alpha_k)}{\displaystyle\prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} (\alpha_k-\alpha_j)} \qquad a_k = \frac{A(\alpha_k)}{B'(\alpha_k)}$$

Exercices :

⇨ Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{C}$.

$$F = \frac{X+3}{(X-1)(X+2)} \qquad F = \frac{1}{X^2+1} \qquad F = \frac{1}{X^n-1}$$

⇨ Calculer la dérivée n-ième de la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,1\}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,1\} \quad f(x) = \frac{x+3}{(x-1)(x+2)}$$

2.2.2 Cas où F admet des pôles multiples

Proposition 11. *Soit F une fraction rationnelle admettant α pour pôle double :*

$$F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X-\alpha)^2 C}$$

Alors la partie polaire relative au pôle α est

$$\frac{a_1}{X-\alpha} + \frac{a_2}{(X-\alpha)^2}$$

où a_2 est donné par la formule :

$$a_2 = \frac{A(\alpha)}{C(\alpha)}$$

Exercices :

⇨ Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples :

$$F = \frac{X+1}{X^2(X-1)} \qquad F = \frac{X^2+X+3}{X(X-1)^3}$$

⇨ Calculer la limite, si elle existe, de la suite de terme général

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$$

⇨ Soit P un polynôme scindé de $\mathbb{C}[X]$:

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X-\alpha_k)^{\omega_k}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}$ sont deux à deux distincts et $\omega_1, \ldots, \omega_r \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\omega_k}{X-\alpha_k}$$

2.3 Cas où le dénominateur n'est pas scindé ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Proposition 12. *Soit $F \in \mathbb{R}[X]$. Si on écrit F sous forme unitaire irréductible et qu'on décompose son dénominateur en polynôme irréductibles*

$$F = \frac{A}{\prod_{k=1}^{r}(X-\alpha_k)^{\omega_k}\prod_{l=1}^{s}(X^2+b_lX+c_l)^{\omega'_l}}$$

alors il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{R}[X]$, ainsi que des uniques familles $(a_{k,i})$, $(b_{l,j})$ et $(c_{l,j})$ de réels tels que

$$F = E + \sum_{k=1}^{r}\left(\sum_{i=1}^{\omega_k}\frac{a_{k,i}}{(X-\alpha_k)^i}\right) + \sum_{l=1}^{s}\left(\sum_{j=1}^{\omega'_l}\frac{b_{l,j}X+c_{l,j}}{(X^2+b_lX+c_l)^j}\right)$$

Exercice :

⇨ Décomposer les fractions rationnelles suivantes en éléments simples sur $\mathbb{R}$.

$$F = \frac{1}{X(X^2+1)} \qquad F = \frac{1}{X(X^2+X+1)} \qquad F = \frac{X^2+2}{X^2(X^2+1)}$$

$$F = \frac{1}{X^4+1} \qquad F = \frac{X^7+2}{(X^2+X+1)^3} \qquad F = \frac{1}{X^{2n}-1}$$

3 Primitives d'expressions rationnelles

3.1 Fractions rationnelles

Exercice :

⇨ Calculer

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} \qquad \int\frac{2x+1}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-1} \qquad \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2}$$

Remarque :

⇨ Lorsqu'on maîtrise bien le calcul de primitives des fractions rationnelles F par les méthodes données sur ces exemples, on peut accélérer le temps de calcul en cherchant d'abord l'allure de la primitive ainsi calculée.

—La partie entière de F donnera un terme polynomial.

—Les pôles α d'ordre ω de F feront apparaître des termes en

$$a_0\ln|x-\alpha| + \sum_{k=1}^{\omega-1}\frac{a_k}{(x-\alpha)^k}$$

—Si le trinôme aX^2+bX+c apparaît avec un exposant 1 dans la factorisation du dénominateur de F, on aura l'apparition de termes en

$$d\ln(ax^2+bx+c) + e\,\mathrm{Arctan}(fx+g)$$

où f et g sont des réels tels que les racines complexes du trinôme aX^2+bX+c sont données par l'équation $fx+g=\pm i$.

—Si le trinôme aX^2+bX+c apparaît avec un exposant 2 dans la factorisation du dénominateur de F, on aura l'apparition de termes en

$$d\ln(ax^2+bx+c) + e\,\mathrm{Arctan}(fx+g) + \frac{hx+p}{ax^2+bx+c}$$

où f et g sont calculés comme plus haut.

Une fois que l'on a la forme de la primitive, on peut exploiter la parité ou l'imparité de F pour réduire le nombre d'inconnues (rappelons qu'une fonction paire admet *une* primitive impaire et qu'une fonction impaire admet *une* primitive paire). Il suffit alors de dériver l'expression puis de regrouper les termes pour obtenir la forme d'une décomposition en éléments simples avant de calculer les coefficients recherchés par les méthodes classiques vues plus haut.

3.2 Fractions rationnelles en e^x

Pour ces fonctions, il suffit d'effectuer le changement de variable $u = e^x$ pour se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

Exercice :

⇨ Calculer

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{e^{2x}+1}$$

3.3 Fractions rationnelles en $\cos x$, $\sin x$

Proposition 13. *Soit G une fraction rationnelle en $\cos x$, $\sin x$.*

— *Si $G(-x) = -G(x)$, il existe une fraction rationnelle F telle que :*

$$G(x) = F(\cos x)\sin x$$

On est donc ramené, après le changement de variable $u = \cos x$, à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

— *Si $G(\pi - x) = -G(x)$, il existe une fraction rationnelle F telle que :*

$$G(x) = F(\sin x)\cos x$$

On est donc ramené, après le changement de variable $u = \sin x$, à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

— *Si $G(\pi + x) = G(x)$, il existe une fraction rationnelle F telle que :*

$$G(x) = F(\tan x)\left(1+\tan^2 x\right)$$

On est donc ramené, après le changement de variable $u = \tan x$, à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

— *Sinon, on effectue le changement de variable $u = \tan(x/2)$. En remarquant que*

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2} \quad \textit{et} \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}$$

on est ramené à un calcul de primitive d'une fraction rationnelle.

Exercice :

⇨ Calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x \cos(2x)} \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \sin(2x)} \qquad \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$$

3.4 Fractions rationnelles en $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$

Proposition 14. *Soit G une fraction rationnelle en $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.*

- *Si lorsqu'on remplace* ch *par* cos *et* sh *par* sin *les règles de Bioche préconisent le changement de variable $u = \cos x$, on effectue le changement de variable $u = \operatorname{ch} x$.*
- *Si lorsqu'on remplace* ch *par* cos *et* sh *par* sin *les règles de Bioche préconisent le changement de variable $u = \sin x$, on effectue le changement de variable $u = \operatorname{sh} x$.*
- *Si lorsqu'on remplace* ch *par* cos *et* sh *par* sin *les règles de Bioche préconisent le changement de variable $u = \tan x$, on effectue le changement de variable $u = \operatorname{th} x$.*

Exercice :

⇨ Calculer

$$\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x + 2}$$

3.5 Fractions rationnelles en x, $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, en x, $\sqrt{ax^2+bx+c}$

Remarques :

⇨ Si f s'écrit

$$f(x) = F\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)$$

où F est une fraction rationnelle à deux variables, le calcul d'une primitive de f se fait en effectuant le changement de variable

$$u = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$$

On a alors

$$x = \frac{du^n - b}{a - cu^n} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}x = G(u)\,\mathrm{d}u$$

où G est une fraction rationnelle. On est donc ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle.

⇨ On souhaite désormais calculer une primitive d'une fonction f de la forme

$$f(x) = F\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)$$

où F est une fraction rationnelle à deux variables.

— Si aX^2+bX+c admet une racine double réelle α (cas où $\Delta = 0$), on a $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}\,|x-\alpha|$. L'expression est donc une fraction rationnelle sur chaque intervalle où $x-\alpha$ est de signe constant.

— Si aX^2+bX+c n'admet pas de racine réelle (cas où $\Delta < 0$), après mise sous forme canonique de aX^2+bX+c et changement de variable, on est ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $u, \sqrt{1+u^2}$. Il suffit alors d'effectuer le changement de variable $u = \operatorname{sh} v$ pour se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $\operatorname{ch} v$, $\operatorname{sh} v$.

— Si aX^2+bX+c admet deux racines réelles (cas où $\Delta > 0$), après mise sous forme canonique de aX^2+bX+c et changement de variable, on est ramené au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en $u, \sqrt{1-u^2}$ ou en $u, \sqrt{u^2-1}$. Dans le premier cas, on effectue le changement de variable $u = \cos v$ alors que dans le second cas on effectue le changement de variable $u = \pm \operatorname{ch} v$.

Exercice :

⇨ Calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x+1}} \qquad \int \operatorname{Arctan}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$