1.3

Def 3 :

Prop 15 :

Prop 16 :

Exemples : (i) Soit $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$. Alors

$$x^{\alpha_1} \underset{x\to+\infty}{=} O(x^{\alpha_2}) \iff \alpha_1 \leqslant \alpha_2.$$

En effet x^{α_2} ne s'annule pas au voisinage de $+\infty$. Donc

$$x^{\alpha_1} \underset{x\to+\infty}{=} O(x^{\alpha_2}) \iff \frac{x^{\alpha_1}}{x^{\alpha_2}} \text{ est bornée au voisinage de } +\infty$$

$$\iff x^{\alpha_1-\alpha_2} \text{ est bornée au voisinage de } +\infty$$

$$\iff \alpha_1-\alpha_2 \leqslant 0$$

$$\iff \alpha_1 \leqslant \alpha_2$$

Remarque : Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de a on dit que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \Theta(g(x))$$

lorsque $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} O(f(x))$.

2)

2.1)

Def 4 :

Remarques : (i) $\forall x \in]-1,1[\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k \underset{\text{car } x\neq 1}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Donc $\forall x \in]-1,1[$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k + \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} \cdot x^n$$

Donc $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Exemples:

(i) Montrons que $e^x = 1+x+\underset{x\to 0}{o}(x)$. En effet, soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x\in\mathbb{R} \quad f(x) := e^x - 1$$
Alors $f(0)=0$ et f est dérivable en 0. De plus $f'(0)=1$.
Donc
$$f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$$
$$\text{donc} \quad f(x) = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\text{donc} \quad e^x - 1 = x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$\text{donc} \quad e^x = 1+x+\underset{x\to 0}{o}(x)$$

(ii) On a vu que $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$. Donc
$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$\text{donc} \quad 1-\cos x = \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$
$$\text{donc} \quad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

Prop 17 (troncature)

Preuve : On suppose que f admet un développement limité en a à l'ordre n. Alors il existe $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ tels que
$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$
Il existe donc $\eta>0$ et une fonction $\varepsilon : [-\eta,\eta]\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que
- $\forall h\in[-\eta,\eta] \quad f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + \varepsilon(h).h^n$
- $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$

Donc, si $p\in[\![0,n]\!]$
$$\forall h\in[-\eta,\eta] \quad f(a+h) = \sum_{k=0}^{p} a_k . h^k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k h^k + \varepsilon(h)h^n$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k . h^k + h^p \Big(\sum_{k=p+1}^{n} a_k . \underbrace{h^{k-p}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 0 \\ \text{car } k-p>0}} + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\substack{\downarrow h\to 0\\ 0}} \underbrace{h^{n-p}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 1 \text{ si } n=p \\ 0 \text{ si } n>p}} \Big)$$

$$\Big(\sum_{k=p+1}^{n} a_k . h^{k-p} + \varepsilon(h) h^{n-p} \Big) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^p)$$

Donc f admet un développement limité en a à l'ordre p obtenu par troncature du DL de f en a à l'ordre n.

Prop 18 :

Preuve : Soit f une fonction définie sur un voisinage de $a \in \mathbb{R}$.
On suppose qu'il existe $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Montrons que : $\forall k \in [\![0,n]\!] \quad a_k = b_k$.
On raisonne par l'absurde et on suppose que l'ensemble

$$X := \{ k \in [\![0,n]\!] \ / \ a_k \neq b_k \}$$

est non vide. Comme c'est une une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, elle admet un plus petit élément n_0. On a donc

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} b_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Donc $$\sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n) = \sum_{k=0}^{n} b_k . h^k + \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

Donc $$\sum_{k=0}^{n} \underbrace{(a_k - b_k)}_{=0 \text{ si } k<n_0} h^k = \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

donc $$(a_{n_0} - b_{n_0}) h^{n_0} + \sum_{k=n_0+1}^{n} (a_k - b_k) h^k = \underset{h\to 0}{o}(h^n)$$

donc en divisant par h^{n_0}, on a.

$$(a_{n_0} - b_{n_0}) + \sum_{k=n_0+1}^{n} (a_k - b_k) \underbrace{h^{k-n_0}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 0 \text{ car } k>n_0}} = \underset{h\to 0}{o} (\underbrace{h^{n-n_0}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 1 \text{ si } n=n_0 \\ 0 \text{ sinon}}})$$

$$\downarrow h\to 0$$
$$0$$

Donc, par passage à la limite, $a_{n_0} - b_{n_0} = 0$. Donc $a_{n_0} = b_{n_0}$.
C'est absurde car $n_0 \in X$.

Donc : $\forall k \in [\![0, n]\!]$ $a_k = b_k$.

<u>Définition 5:</u>

<u>Preuve:</u> Soit f une fonction défini sur un voisinage de a.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $\omega \in \mathbb{N}$ tels que.

$$f(a+h) = \alpha . h^\omega + \underset{h\to 0}{o}(h^\omega)$$

Alors $$f(a+h) = \alpha . h^\omega + \underset{h\to 0}{o}(\alpha . h^\omega) \text{ car } \alpha \neq 0$$

Donc $$f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} \alpha . h^\omega$$

On suppose qu'il existe $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}^*$ et $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \alpha_1 . h^{\omega_1} + \underset{h\to 0}{o}(h^{\omega_1}) \\ &= \alpha_2 . h^{\omega_2} + \underset{h\to 0}{o}(h^{\omega_2}) \end{aligned}$$

Alors $$f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} \alpha_1 . h^{\omega_1} \quad \text{et} \quad f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} \alpha_2 . h^{\omega_2}$$

Donc $$\alpha_1 . h^{\omega_1} \underset{h\to 0}{\sim} \alpha_2 . h^{\omega_2}$$

Donc $$\frac{\alpha_1 . h^{\omega_1}}{\alpha_2 . h^{\omega_2}} \xrightarrow[h\to 0]{} 1$$

Or $$\frac{\alpha_1 h^{\omega_1}}{\alpha_2 h^{\omega_2}} = \underbrace{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}_{\neq 0} . \underbrace{h^{\omega_1 - \omega_2}}_{\substack{\downarrow h\to 0,\ h>0 \\ 1 \text{ si } \omega_1 = \omega_2 \\ 0 \text{ si } \omega_1 > \omega_2 \\ +\infty \text{ si } \omega_1 < \omega_2}}$$

Donc $\omega_1 = \omega_2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$.

Exemple: On a $e^x = 1+x+\underset{x\to 0}{o}(x)$ donc $e^x-1 = x+\underset{x\to 0}{o}(x)$
Donc
$$e^x-1 \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Prop 19:

Preuve: Soit f une fonction défini sur un voisinage de 0. On suppose qu'elle admet un développement limité en 0 à l'ordre n. Il existe donc $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que.
$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k . x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Il existe donc $\eta>0$ et $\varepsilon : [-\eta,\eta] \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que

- $\forall x \in [-\eta,\eta] \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k . x^k + x^n . \varepsilon(x)$
- $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

Donc
$$\forall x \in [-\eta,\eta] \quad f(-x) = \sum_{k=0}^{n} a_k . (-x)^k + (-x)^n . \varepsilon(-x)$$
$$f(-x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . a_k . x^k + \underbrace{(-1)^n . \varepsilon(-x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0} x^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k . x^k + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

- Supposons que f est paire: Alors $f(-x) = f(x)$. Par unicité du développement limité.
$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad (-1)^k a_k = a_k.$$
Soit $k \in [\![0,n]\!]$ tel que k est impair. Alors $(-1)^k = -1$, donc $-a_k = a_k$. Donc $a_k = 0$. Donc tous les a_k où k est impair sont nuls.

- Supposons que f est impaire: Alors $f(-x) = -f(x)$. Par unicité du développement limité
$$\forall k \in [\![0,n]\!] \quad (-1)^k a_k = -a_k.$$
Donc, de manière similaire tous les a_k où k est pair sont nuls.

2.2)

Prop 20 :

Preuve : Soit f une fonction défini sur un voisinage de a.

(i) Mq f admet un développement limité en a à l'ordre 0 si et seulement si f est continue en a.

$\Rightarrow$ On suppose qu'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que :

$$f(a+h) = \underbrace{a_0 + \underbrace{\underset{h\to0}{o}(1)}_{\downarrow h\to0 \atop 0}}_{\downarrow h\to0 \atop a_0}$$

Donc $f(a+h) \xrightarrow[h\to0]{} a_0$. Donc $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} a_0$.

Donc f admet une limite en a. Comme elle est définie en a, on en déduit qu'elle est continue en a et que $a_0 = f(a)$.

$\Leftarrow$ On suppose que f est continue en a. Alors

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$$

Donc $$f(a+h) \xrightarrow[h\to0]{} f(a).$$ Donc

$$f(a+h) - f(a) \xrightarrow[h\to0]{} 0$$

donc $$f(a+h) - f(a) = \underset{h\to0}{o}(1)$$

donc $$f(a+h) = f(a) + \underset{h\to0}{o}(1)$$

(ii) Montrons que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a.

$\Rightarrow$ On suppose qu'il existe $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \underset{h\to0}{o}(h)$$

Alors, par troncature, $f(a+h) = a_0 + \underset{h\to0}{o}(1)$. Donc f est continue en a et $a_0 = f(a)$. Donc

$$f(a+h) = f(a) + a_1 h + \underset{h\to0}{o}(h)$$

Donc
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = a_1 + \frac{1}{h} \underset{h\to 0}{o}(h)$$
$$= a_1 + \underset{h\to 0}{o}\left(\frac{1}{h}.h\right)$$
$$= a_1 + \underset{h\to 0}{o}(1) \xrightarrow[h\to 0]{} a_1.$$

Donc f est dérivable en a et $f'(a)=a_1$. Donc
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

$\Leftarrow$ Réciproquement, on suppose que f est dérivable en a.
Alors
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(a)$$
donc
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \underset{h\to 0}{o}(1)$$
donc
$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{o}(h)$$
donc
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}}{o}(h)$$
Or $f(a+0) = f(a) + f'(a)\times 0$ donc
$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$
Donc f admet un développement limité en a à l'ordre 1.

<u>Remarques</u> : (i) ~~(i)~~ (ii) Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $[-1,+\infty[$ par :
$$\forall x\geq -1 \quad f(x) := (1+x)^\alpha$$
D'après les théorèmes usuels f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :
$$\forall x>-1 \quad f'(x) = \alpha.(1+x)^{\alpha-1}$$
Donc f est dérivable en 0 et $f'(0)=\alpha$. Donc
$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
$$= 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$
Donc $$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \underset{x\to 0}{o}(x).$$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x\in\mathbb{R} \quad g(x) := \cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right).$$

D'après les théorèmes usuels, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

Donc $g(0) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $g'(0) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Donc

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Donc cos admet un DL à l'ordre 1 en $\frac{\pi}{4}$.

Exercice : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) := \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$
D'après les théorèmes usuels, elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
Mq f est dérivable en 0

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad f(x) = \frac{\cos x - 1}{x}$$
$$= \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) - 1}{x}$$
$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x}$$
$$= -\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Donc $f(x) = -\frac{1}{2}x + \underset{\substack{x\to 0 \\ x\neq 0}}{o}(x)$. Or $f(0) = 0$ et $-\frac{1}{2}\times 0 = 0$.
Donc

$$f(x) = -\frac{1}{2}x + \underset{x\to 0}{o}(x)$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/2$.

Prop 21 :

Preuve : On suppose que f est définie sur un voisinage $[a-\eta, a+\eta]$ de a et qu'elle est continue sur $[a-\eta, a+\eta]$. On définit la fonction G sur $[-\eta, \eta]$ par :

$$\forall h \in [-\eta, \eta] \quad G(h) := \int_a^{a+h} f(t)\,dt$$

Puisque f est continue sur $[a-\eta, a+\eta]$, G est dérivable sur $[-\eta,\eta]$ et :

$$\forall h \in [-\eta,\eta] \qquad G'(h) = f(a+h)$$

Soit F une primitive de f sur $[a-\eta, a+\eta]$. Alors.

$$\forall h \in [-\eta,\eta] \qquad G'(h) = F'(a+h).$$

Donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall h \in [-\eta,\eta] \qquad G(h) = F(a+h) + c.$$

On évalue en 0 et on obtient $G(0) = F(a) + c$.
Or $G(0) = \int_a^a f(t)dt = 0$. Donc $c = -F(a)$. Donc

$$\forall h \in [-\eta,\eta] \qquad G(h) = F(a+h) - F(a).$$

On suppose que f admet un développement limité en a à l'ordre n. Il existe donc $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k . h^k \underset{h\to 0}{+o}(h^n)$$

Il existe donc $\eta_1 > 0$ (quitte à changer η_1 en $\min(\eta,\eta_1)$ on suppose que $0 < \eta_1 \leq \eta$) et une fonction $\varepsilon : [-\eta_1,\eta_1] \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} a_k . h^k + h^n . \varepsilon(h)$$

$$\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Donc

$$G(h) = \int_a^{a+h} f(t)dt$$

$$\underset{\substack{t=a+u \\ dt=du}}{=} \int_0^h f(a+u)du$$

$$= \int_0^h \left(\sum_{k=0}^{n} a_k . u^k + u^n \varepsilon(u)\right) du.$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k . \underbrace{\int_0^h u^k du}_{= \left[\frac{u^{k+1}}{k+1}\right]_0^h = \frac{h^{k+1}}{k+1}} + \underbrace{\int_0^h u^n \varepsilon(u)du}_{=: A(h)}.$$

$$F(a+h)-F(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \cdot h^{k+1} + A(h)$$

Montrons que $A(h) \underset{h\to 0}{=} O(h^{n+1})$. Comme $A(0)=0$, il suffit de prouver que

$$\frac{1}{h^{n+1}} \cdot \int_0^h u^n \varepsilon(u)\,du \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Soit $\alpha>0$. Puisque $\varepsilon(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$, il existe $\beta>0$ tel que. (on suppose $\beta \leqslant \eta_1$).

$$\forall u \in [-\beta,\beta] \quad |\varepsilon(u)| \leqslant \alpha.$$

Soit $h \in [-\beta,\beta]$. Alors.

- si $h \geqslant 0$: $\left| \frac{1}{h^{n+1}} \int_0^h u^n . \varepsilon(u)\,du \right| = \frac{1}{h^{n+1}} \left| \int_0^h u^n . \varepsilon(u)\,du \right|$

$$\leqslant \frac{1}{h^{n+1}} \int_0^h |u^n \varepsilon(u)|\,du \quad \text{car } 0 \leqslant h$$

$$\leqslant \frac{1}{h^{n+1}} \int_0^h u^n \underbrace{|\varepsilon(u)|}_{\leqslant \alpha}\,du$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{h^{n+1}} \int_0^h u^n\,du = \frac{\alpha}{h^{n+1}} \cdot \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^h = \frac{\alpha}{n+1} . \leqslant \alpha .$$

- si $h \leqslant 0$: $\left| \frac{1}{h^{n+1}} \int_0^h u^n \varepsilon(u)\,du \right| = \frac{1}{|h|^{n+1}} \left| \int_0^h u^n . \varepsilon(u)\,du \right|$

$$= \frac{1}{|h|^{n+1}} \left| \int_0^{-h} (-v)^n . \varepsilon(-v)\,(-)dv \right| \qquad \begin{array}{l} v=-u \\ dv=-du. \end{array}$$

$$= \frac{1}{|h|^{n+1}} \left| \int_0^{|h|} v^n . \varepsilon(-v)\,dv \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{|h|^{n+1}} \int_0^{|h|} |v^n|\,|\varepsilon(-v)|\,dv$$

$$\leqslant \frac{1}{|h|^{n+1}} \int_0^{|h|} v^n . \underbrace{|\varepsilon(-v)|}_{\leqslant \alpha}\,dv$$

$$\leqslant \frac{\alpha}{|h|^{n+1}} \int_0^{|h|} v^n dv = \frac{\alpha}{|h|^{n+1}} \cdot \left[\frac{v^{n+1}}{n+1}\right]_0^{|h|} = \frac{\alpha}{n+1} . \leqslant \alpha .$$

Donc $$\frac{1}{h^{n+1}}\int_0^h u^n \cdot \varepsilon(u)\,du \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

Donc $$F(a+h)-F(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} \cdot x^{k+1} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n+1})$$

donc $$F(a+h) = F(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} h^{k+1} + \underset{h\to 0}{o}(h^{n+1})$$

Exercice :

Soit f défini sur $]-1,+\infty[$ par :

$$\forall x>-1 \qquad f(x) := \ln(1+x).$$

D'après les théorèmes usuels, f est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et :

$$\forall x>1 \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Or :

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+\underset{x\to 0}{o}(x).$$

donc $$\frac{1}{1+x} = 1-x+\underset{x\to 0}{o}(x)$$

$$f'(x) = 1-x+\underset{x\to 0}{o}(x)$$

Donc $$f(x) = f(0)+x-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

$$\ln(1+x) = 0+x-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2).$$

Donc $$\ln(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$$

On cherche la limite en 0 de la suite de terme général.

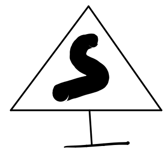
$$u_n := n^2\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]$$

On a : $$\forall n\geq 1 \qquad u_n = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}$$

Or $$\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x^2} = \frac{\cancel{x}-\frac{1}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)+\cancel{(-x)}-\frac{1}{2}(-x)^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2}$$

$$= \frac{-x^2+\underset{x\to 0}{o}(x^2)}{x^2} = -1+\underset{x\to 0}{o}(1) \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

Donc $\quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

Remarques : (i)  On ne dérive pas un développement limité.

En effet, il est possible que f admette un développement limité à l'ordre n en a sans que f' admette un développement limité en a à l'ordre $n-1$.

Par exemple, soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) := x^{n+1} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)$$
$$= \begin{cases} x^{n+1} & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$$

Alors $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.

En effet :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^n \cdot \underbrace{x \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)}_{=:\varepsilon(x)}$$

De plus $\quad |\varepsilon(x)| = |x| \underbrace{|\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(x)|}_{\leqslant 1} \leqslant |x| \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Donc $\quad f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$.

Montrons que $\quad f'(x) \underset{x\to 0}{\neq} o(x^{n-1})$.

- On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$ et $n \geq 1$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o(x)$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
- f n'est dérivable en aucun autre point. En effet, soit $a \in \mathbb{R}^*$. Alors f n'est pas continue en a donc n'est pas dérivable en a. En effet puisque $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (u_p) d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que $u_p \xrightarrow[n\to\infty]{} a$. De même, il existe une suite (v_p) d'éléments de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ telle que $v_p \xrightarrow[n\to\infty]{} a$.

Or
$$f(u_p) = u_p^n \xrightarrow[p\to\infty]{} a^n.$$
$$f(v_p) = 0 \xrightarrow[p\to\infty]{} 0$$

Or si f est continue en a, $f(u_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} f(a)$ et $f(v_p) \xrightarrow[p\to\infty]{} f(a)$, donc $a^n = 0$ ce qui est absurde car $a \neq 0$ et $n \geq 1$.
Donc f n'est pas continue en a, donc elle n'est pas dérivable en a. Donc $\mathcal{D}_{f'} = \{0\}$. Donc f' n'admet

pas de développement limité en 0.

(ii) —

<u>Prop 22:</u> (Taylor)

<u>Preuve:</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$\mathcal{H}_n$ = " Soit f une fonction de classe C^∞ sur I et $a \in I$. Alors f admet un développement limité en a à l'ordre n et :

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^n) \text{ "}$$

<u>$\mathcal{H}_0$ est vraie :</u> Soit f une fonction de classe C^∞ sur I et $a \in I$. Alors f est continue en a et

$$f(a+h) = f(a) + \underset{h \to 0}{o}(1)$$

Donc $\mathcal{H}_0$ est vraie ;

<u>$\mathcal{H}_n \Rightarrow \mathcal{H}_{n+1}$:</u> Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{H}_n$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie. Soit f une fonction de classe C^∞ sur I et $a \in I$. Alors f' est de classe C^∞ sur I. Puisque $\mathcal{H}_n$ est vraie, on en déduit que :

$$f'(a+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f'^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^n)$$

Donc, par intégration.

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{f'^{(k)}(a)}{(k+1).k!}}_{= \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}} h^{k+1} + \underset{h \to 0}{o}(h^{n+1})$$

$$= f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^{n+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + \underset{h \to 0}{o}(h^{n+1})$$

Donc $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

Par récurrence sur n, on en déduit que $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.