TECHNISCHE UNIVERSITEIT EINDHOVEN
Faculteit Wiskunde en Informatica

Voorbeeldtentamen Calculus, 2WBB1, maandag 29 oktober 2012, 9.00 – 12.00 uur

---

Maak dit vel los van de rest van het tentamen. Vul uw naam etc. in op dit vel en op alle gelinieerde bladen die u inlevert. Dit vel moet samen met uw uitwerkingen aan het eind worden ingeleverd.

Het tentamen bevat 4 kortantwoordvragen en 7 open vragen.

De achterkant van dit vel bevat de kortantwoordvragen. Bij deze vragen hoeft u alleen het antwoord te geven in het daarvoor bestemde hok. Uitwerkingen spelen geen rol bij de beoordeling van deze vragen.

De uitwerkingen van de open opgaven dienen duidelijk geformuleerd en geordend opgeschreven te worden. Ieder antwoord dient onderbouwd te worden.

In totaal kunt u 50 punten halen. Het aantal punten dat u voor een onderdeel kunt halen, staat tussen rechte haken voor het betreffende onderdeel vermeld.
Het cijfer voor dit tentamen wordt bepaald door het aantal behaalde punten door 5 te delen en tot een cijfer achter de komma af te ronden.

Het eindcijfer voor het vak 2WBB0 wordt vastgesteld aan de hand van de procedure beschreven in de studiehandleiding.

U mag geen gebruik maken van laptop, rekenmachine, boek of schriftelijk materiaal.

Achternaam en initialen	
Identiteitsnummer	
Opleiding	

---

zie volgende pagina

Kort-antwoord-vragen

[3] 1. Beschouw de functie f met $D(f) = (0, \infty)$ en $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ voor alle $x \in D(f)$.
Bepaal de inverse $f^{-1}(x)$.

[3] 2. Bepaal de richtingscoëfficiënt (slope) van de raaklijn aan de kromme, gegeven door de vergelijking $x^3 + 2xy + \cos(y) = 1 + \pi$, in het punt $(1, \frac{\pi}{2})$.

[3] 3. Beschouw de functie f met $f(x) = (2-x)^{-1}$.
Bepaal het Taylorpolynoom van f van orde 3 rond $a = 1$.

[3] 4. Voor welke waarde(n) van k zijn de vectoren $\begin{pmatrix} k \\ k \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} k \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ onderling loodrecht?

zie volgende pagina

Open vragen

5. Zij V het vlak door de punten $(1,-1,0)$, $(2,0,1)$ en $(6,2,2)$.

[3] (a) Bepaal een parametervoorstelling van het vlak V.

[2] (b) Geef een vergelijking van het vlak V.

Zij S het punt $(0,10,-4)$ en ℓ de lijn door S loodrecht op het vlak V.

[3] (c) Bepaal het snijpunt van ℓ en V.

[5] 6. Bereken de limiet $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\sin(x) - 1 + \cos(x)}{\ln(1+x^2)}$.

[5] 7. Bereken de limiet $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+3x}}$.

[5] 8. Bereken de integraal $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)\cos(x)}{(2+\sin^2(x))^2}\,\mathrm{d}x$.

[5] 9. Bereken de integraal $\displaystyle\int \arctan(x)\,\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.
Notatie: $\arctan = \tan^{-1}$.

[5] 10. Bereken de integraal $\displaystyle\int_0^{5} \frac{2x^2+6x+5}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$.

[5] 11. Bepaal de oplossing y van de differentiaalvergelijking $y' = -x\,(1+y)^2$ met $y(0) = 1$. Geef de oplossing expliciet.

Tabellen staan op laatste pagina's.

Primitieven

$g(x)$	$\int g(x)\mathrm{d}x$
$x^n, n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln(\lvert f(x)\rvert)$
e^x	e^x
$a^x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{a^x}{\ln(a)}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	$-\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$\frac{1}{\sin(x)}$	$\ln(\lvert\tan(\frac{x}{2})\rvert)$
$\frac{1}{\cos(x)}$	$\ln(\lvert\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\rvert)$
$e^{ax}\sin(bx), a^2+b^2 > 0$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\sin(bx) - b\cos(bx))$
$e^{ax}\cos(bx), a^2+b^2 > 0$	$\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\,(a\cos(bx) + b\sin(bx))$
$\frac{1}{a^2+x^2}, a > 0$	$\frac{1}{a}\ \arctan(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{a^2-x^2}, a > 0$	$\frac{1}{2a}\ \ln(\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}, a > 0$	$\arcsin(\frac{x}{a})$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}, a > 0$	$\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}, a > 0$	$\ln(\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert)$
$\sqrt{a^2-x^2}, a > 0$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\ \arcsin(\frac{x}{a})$
$\sqrt{a^2+x^2}, a > 0$	$\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$
$\sqrt{x^2-a^2}, a > 0$	$\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ \ln(\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert)$

Opmerkingen

Alle parameters zijn reële getallen.

De constanten zijn weggelaten.

Taylorpolynomen

Function	Taylor polynomial plus O-term
$\mathbf{e}^x$	$1 + x + \frac{1}{2}\,x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\,x^n + O(x^{n+1})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n)!}\,x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\sin(x)$	$x - \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n\,x^{2\,n+1}}{(2\,n+1)!} + O(x^{2\,n+2})$
$\frac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n\,x^n + O(x^{n+1})$
$\ln(1+x)$	$x - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\,x^{n+1} + O(x^{n+2})$
$\frac{1}{1+x^2}$	$1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n\,x^{2\,n} + O(x^{2\,n+1})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{5}\,x^5 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2\,n+1)}\,x^{2\,n+1} + O(x^{2\,n+2})$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \begin{pmatrix}\alpha\\1\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}\alpha\\2\end{pmatrix} x^2 + \cdots + \begin{pmatrix}\alpha\\n\end{pmatrix} x^n + O(x^{n+1})$

Alle Taylorpolynomen zijn polynomen rond het punt 0.

De binomiaalcoëfficiënten zijn gedefinieerd door

$$\begin{pmatrix}\alpha\\k\end{pmatrix} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}\ ,\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\0\end{pmatrix} = 1$$

Goniometrische identiteiten

$\cos(x+y)$	$=$	$\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x+y)$	$=$	$\sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
$\cos^2(x)$	$=$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$
$\sin^2(x)$	$=$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$