

《数理逻辑》第1次作业

姓名：杨骏飞 学号：200111427

2022 年 5 月 9 日

题目 1：将下列语句形式化为命题公式

- (1) 2 既是素数又是偶数。
- (2) 一个整数是奇数当且仅当它不能被 2 整除。
- (3) 大学里的学生不是本科生就是研究生。
- (4) 你的车速超过每小时 100 公里足以接到超速罚单。

答：

- (1) 设 p : 2 是素数, q : 2 是偶数;
化为命题公式: $p \wedge q$ 。
- (2) 设 p : 一个整数是奇数, q : 它不能被 2 整除;
化为命题公式: $p \leftrightarrow q$ 。
- (3) 设 p : 大学里的学生是本科生, q : 这个学生是研究生;
化为命题公式: $\neg p \leftrightarrow q$ 。
- (4) 设 p : 你的车速超过每小时 100 公里, q : 接到超速罚单;
化为命题公式: $p \rightarrow q$ 。

题目 2：判断下列逻辑蕴含和逻辑等价是否成立

- (1) $A \Rightarrow B \rightarrow A$
- (3) $A \rightarrow (B \rightarrow C) \Rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$
- (5) $(A \vee B) \rightarrow C \Leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

答：

- (1) 成立, 证明如下
当 $A^v = 1$ 时, $(B \rightarrow A)^v = 1 - B^v + B^v A^v = 1 - B^v + B^v = 1$

(3) 成立, 证明如下

$$\begin{aligned}(A \rightarrow (B \rightarrow C))^v &= 1 - A^v + A^v(B \rightarrow C)^v \\ &= 1 - A^v + A^v(1 - B^v + B^v C^v) = 1\end{aligned}$$

即

$$A^v B^v (1 - C^v) = 0$$

所以

$$A^v = 0 \text{ 或 } B^v = 0 \text{ 或 } C^v = 1$$

当 $A^v = 0$ 时, $(A \rightarrow B)^v = 1, (A \rightarrow C)^v = 1$, 故 $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))^v = 1$

当 $B^v = 0$ 且 $A^v = 1$ 时, $(A \rightarrow B)^v = 1 - A^v = 0$, 故 $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))^v = 1$

当 $C^v = 1$ 时, $(A \rightarrow C)^v = 1$, 故 $((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))^v = 1$

综上所述, 命题成立

(5) 成立, 证明如下

$$\begin{aligned}Left &= ((A \vee B) \rightarrow C)^v = 1 - (A \vee B)^v + (A \vee B)^v C^v \\ &= 1 - A^v - B^v + A^v B^v + A^v C^v + B^v C^v - A^v B^v C^v \\ Right &= (1 - A^v + A^v C^v) \vee (1 - B^v + B^v C^v) \\ &= 1 - B^v + B^v C^v - A^v + A^v B^v - A^v B^v C^v + A^v C^v\end{aligned}$$

所以命题得证

题目 3: 求下列公式的合取范式和析取范式

$$(1) \neg(q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow \neg s)$$

$$(3) \neg(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$$

答:

(1) 合取范式:

$$\begin{aligned}\neg(q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow \neg s) &\Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg s) \\ &\Leftrightarrow q \wedge \neg p \wedge (\neg r \vee \neg s)\end{aligned}$$

析取范式:

$$\begin{aligned}\neg(q \rightarrow p) \wedge (r \rightarrow \neg s) &\Leftrightarrow \neg(\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg s) \\ &\Leftrightarrow (q \wedge \neg p) \wedge (\neg r \vee \neg s) \\ &\Leftrightarrow (q \wedge \neg p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg p \wedge \neg s)\end{aligned}$$

(3) 合取范式:

$$\begin{aligned}\neg(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q) &\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q)) \\ &\Leftrightarrow ((p \vee q) \vee (p \wedge q)) \wedge (\neg(p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)) \\ &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q)\end{aligned}$$

析取范式:

$$\begin{aligned}\neg(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q) &\Leftrightarrow (\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow \neg(p \vee q)) \\ &\Leftrightarrow ((p \vee q) \vee (p \wedge q)) \wedge (\neg(p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)) \\ &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)\end{aligned}$$

题目 4: 求下列公式的主合取范式和主析取范式

(1) $p \rightarrow p \wedge q$

(3) $(p \rightarrow p \wedge q) \vee r$

答:

(1) 主合取范式:

$$\begin{aligned}p \rightarrow p \wedge q &\Leftrightarrow \neg p \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee q\end{aligned}$$

主析取范式:

$$\begin{aligned}p \rightarrow p \wedge q &\Leftrightarrow \neg p \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge (q \vee \neg q)) \vee (p \wedge q) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (p \wedge q)\end{aligned}$$

(3) 主合取范式:

$$\begin{aligned}(p \rightarrow p \wedge q) \vee r &\Leftrightarrow (\neg p \vee (p \wedge q)) \vee r \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r\end{aligned}$$

主析取范式:

$$\begin{aligned}&(p \rightarrow p \wedge q) \vee r \\ &\Leftrightarrow \neg p \vee (p \wedge q) \vee r \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg r \vee r)) \vee ((p \wedge q) \wedge (\neg r \vee r)) \vee (r \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg p \vee p)) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)\end{aligned}$$

题目 5: 用 $\{\neg, \rightarrow\}$ 表示下列公式

$$(1) \quad p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$$

$$(3) \quad ((p \wedge q) \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$$

$$(5) \quad (p \vee (q \wedge r)) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

答:

题目 6: 用 $\{\uparrow, \downarrow\}$ 表示下列公式

$$(1) \quad \neg p \vee q$$

$$(3) \quad \neg p \vee \neg q$$

答: