MODI: Projekt I Zestaw 5 Mateusz Dziwulski

Model:

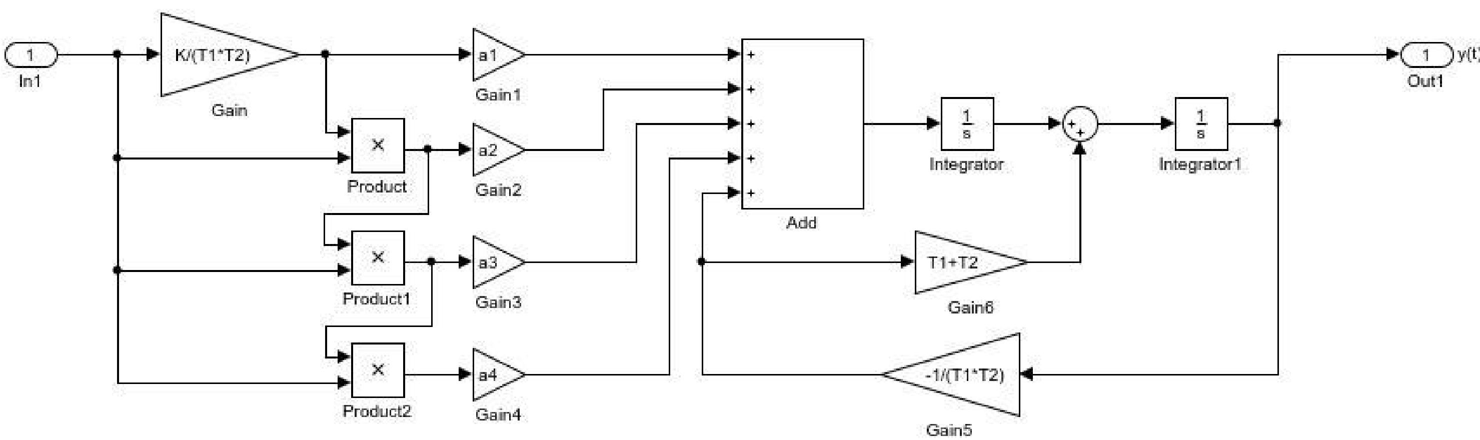
$$\frac{\mathrm{dx}_1(t)}{\mathrm{dt}} = -\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}x_1(t) + x_2(t)$$
$$\frac{\mathrm{dx}_2(t)}{\mathrm{dt}} = -\frac{1}{T_1T_2}x_1(t) + \frac{K}{T_1T_2}\left(\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t)\right)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

gdzie dane jest:

$$K = 3.5,\quad T_1 = 4,\quad T_2 = 8,$$
$$\alpha_1 = 0.56,\ \alpha_2 = -0.8,\ \alpha_1 = 0.35,\ \alpha_4 = 0.2$$

1.

```
projekt1_1;
```



2.

Dyskretyzację przeprowadzamy metodą Eulera poprzez aproksymację prostokątną wstecz:

$$\frac{\mathrm{x}_1(k) - \mathrm{x}_1(k-1)}{T_p} = -\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}x_1(k-1) + x_2(k-1)$$
$$\frac{\mathrm{x}_2(k) - \mathrm{x}_2(k-1)}{T_p} = -\frac{1}{T_1T_2}x_1(k-1) +$$
$$\frac{K}{T_1T_2}\left(\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u^2(k-1) + \alpha_3 u^3(k-1) + \alpha_4 u^4(k-1)\right)$$
$$y(k) = x_1(k)$$

Co ostatecznie daje:

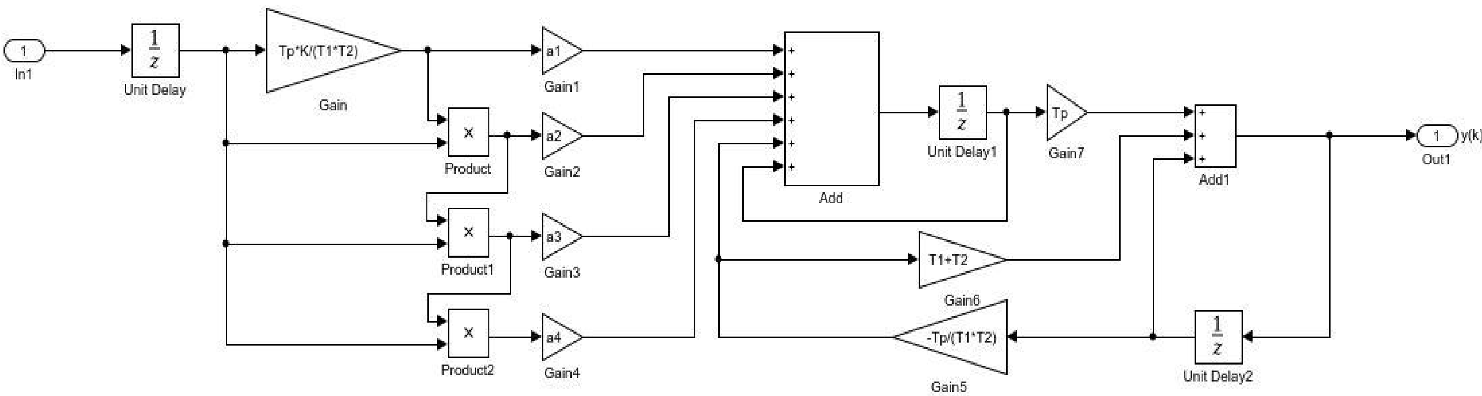
$$x_1(k) = -\frac{T_p(T_1+T_2)}{T_1T_2}x_1(k-1) + x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1T_2}x_1(k-1) + x_2(k-1) +$$

$$\frac{T_pK}{T_1T_2}\left(\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u^2(k-1) + \alpha_3 u^3(k-1) + \alpha_4 u^4(k-1)\right)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

```
projekt1_2;
```

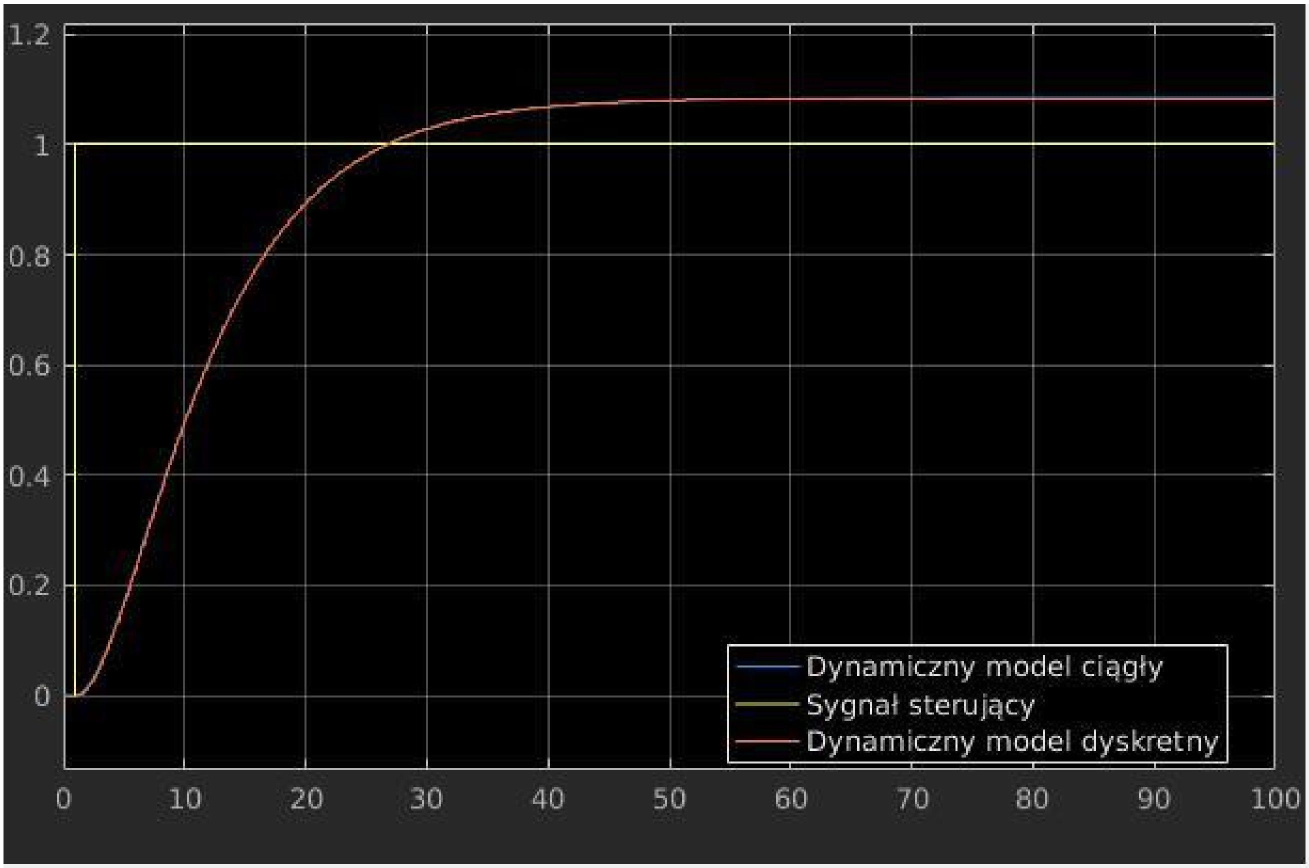


3.

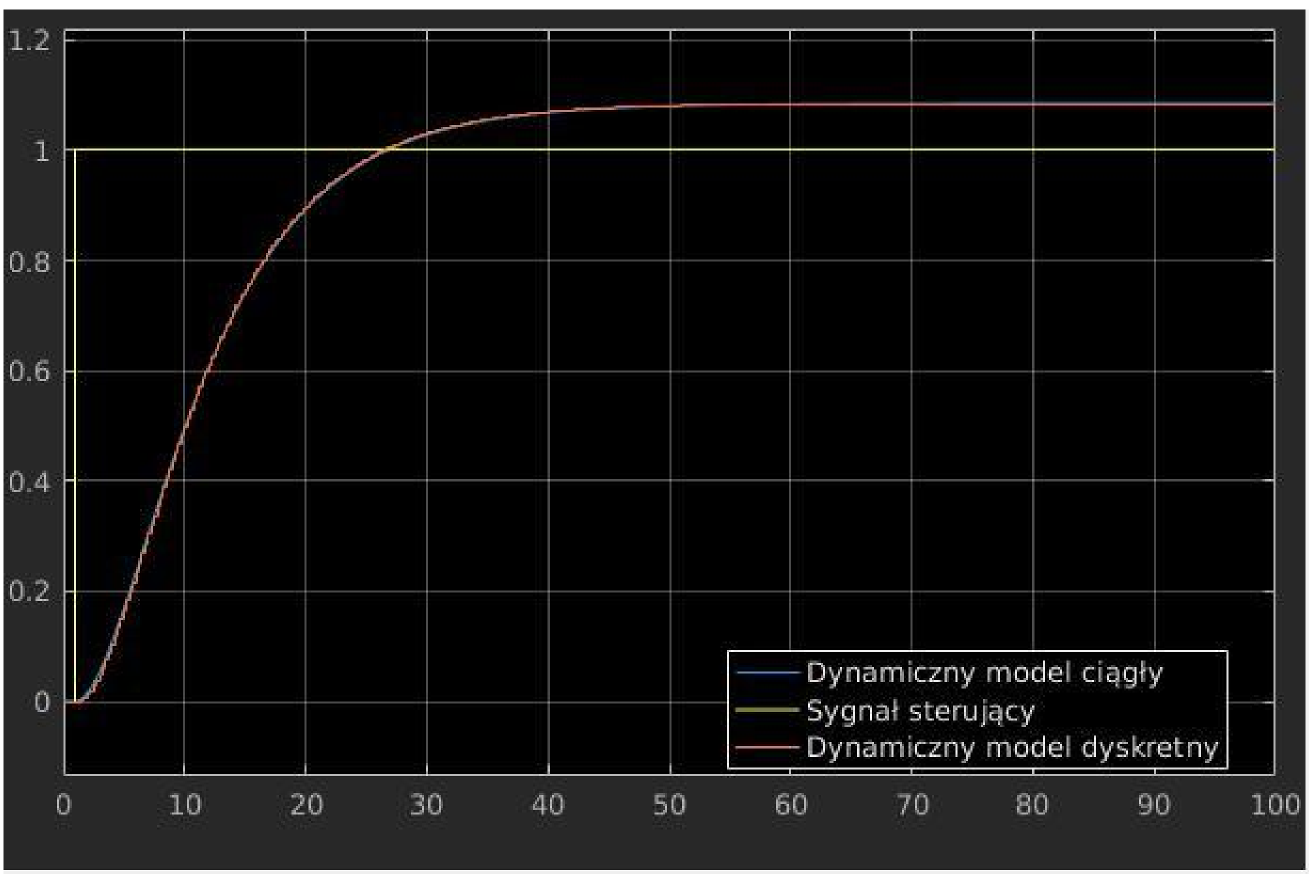
Sygnał sterujący - skok jednostkowy: $u(0) = 0, \quad u(1) = 1$.

Odpowiedzi na sygnał sterujący modelu ciągłego i dyskretnego dla podanych okresów próbkowania:

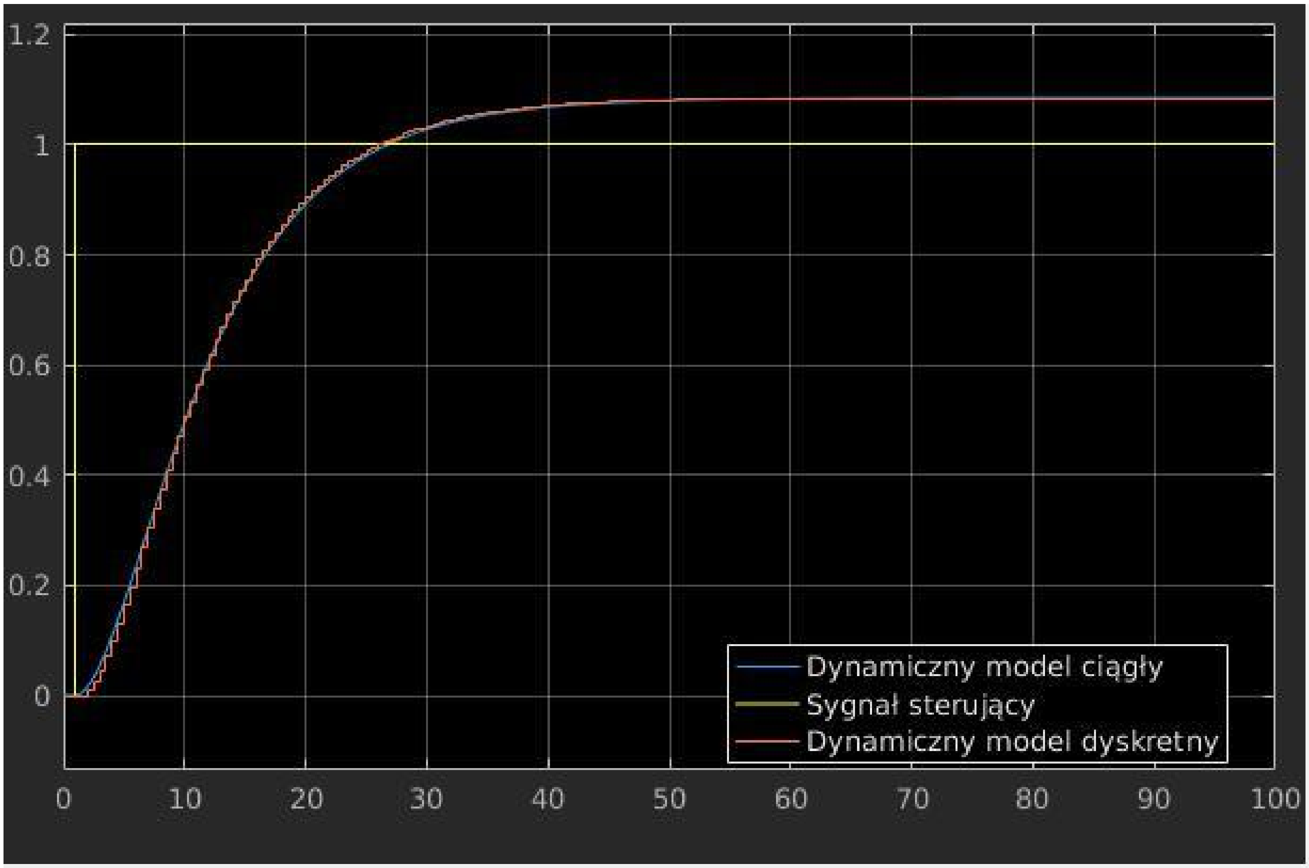
$$T_p = 0.10$$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Dynamiczny model ciągły
Sygnał sterujący
Dynamiczny model dyskretny

$T_p = 0.25$

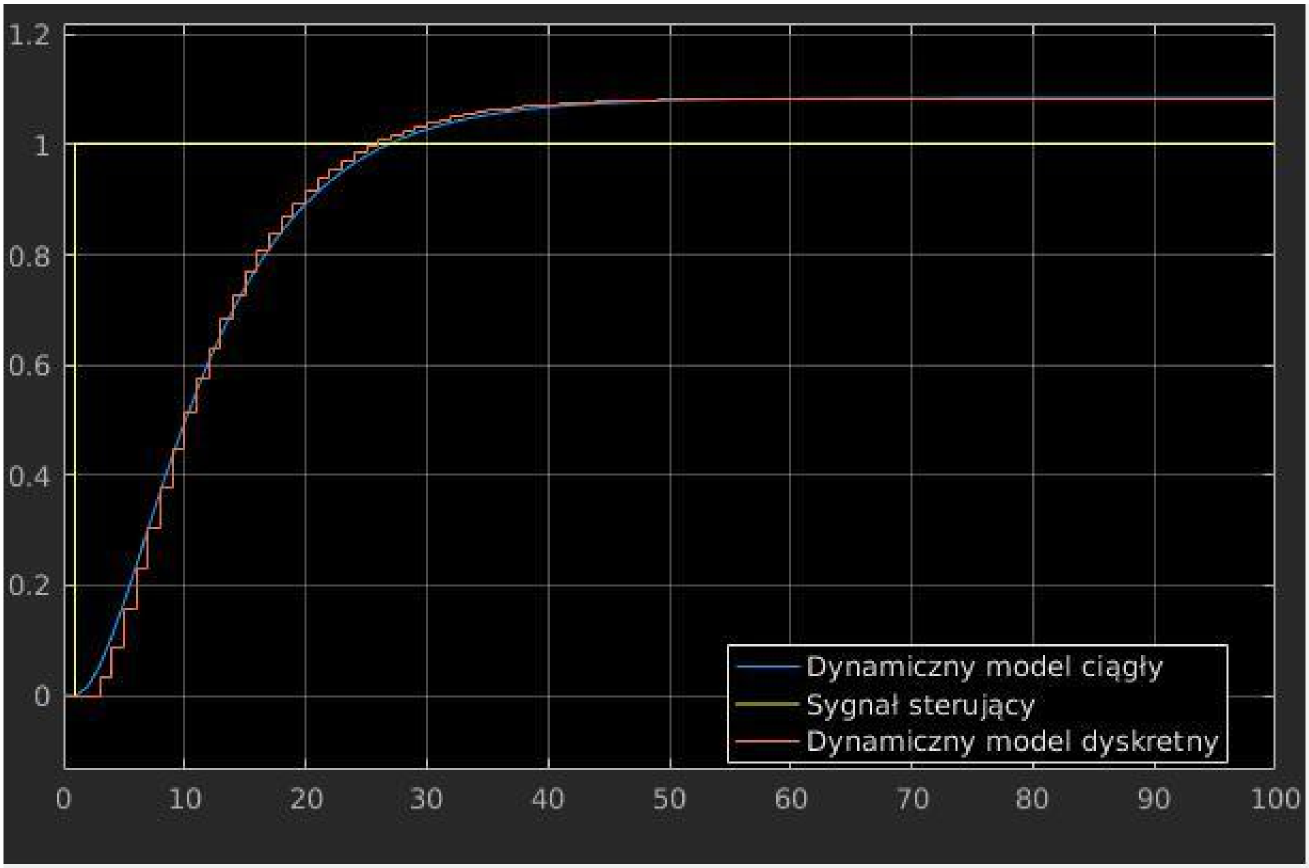

1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Dynamiczny model ciągły
Sygnał sterujący
Dynamiczny model dyskretny

$T_p = 0.50$

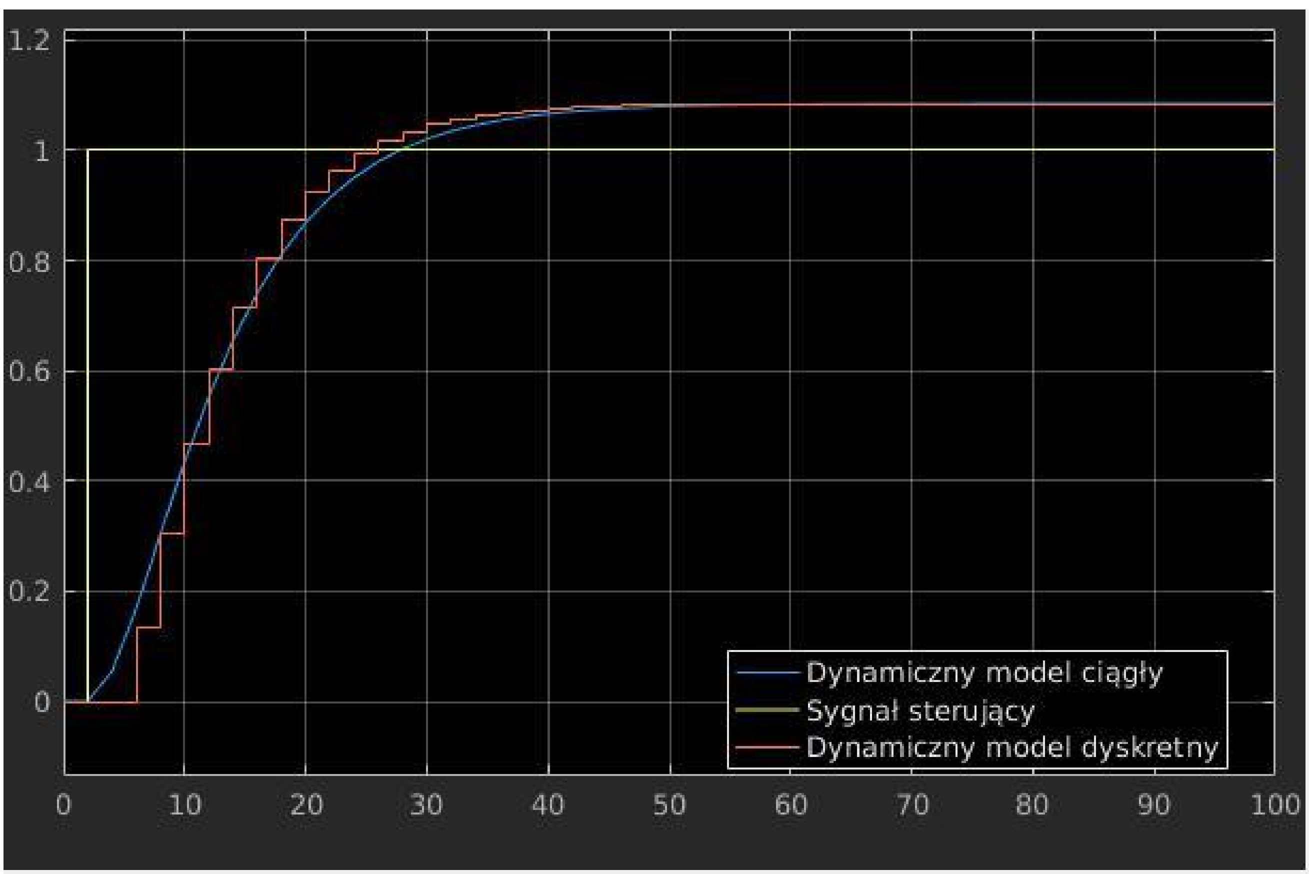


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Dynamiczny model ciągły
Sygnał sterujący
Dynamiczny model dyskretny

$T_p = 1.00$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Dynamiczny model ciągły
Sygnał sterujący
Dynamiczny model dyskretny

$T_p = 2.00$


1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
Dynamiczny model ciągły
Sygnał sterujący
Dynamiczny model dyskretny

4.

Wyznaczamy charakterystykę statyczną na podstawie modelu ciągłego:

$$\frac{\mathrm{dx}_1(t)}{\mathrm{dt}} = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1(t) + x_2(t)$$
$$\frac{\mathrm{dx}_2(t)}{\mathrm{dt}} = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1(t) + \frac{K}{T_1 T_2} \left(\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t)\right)$$
$$y(t) = x_1(t)$$

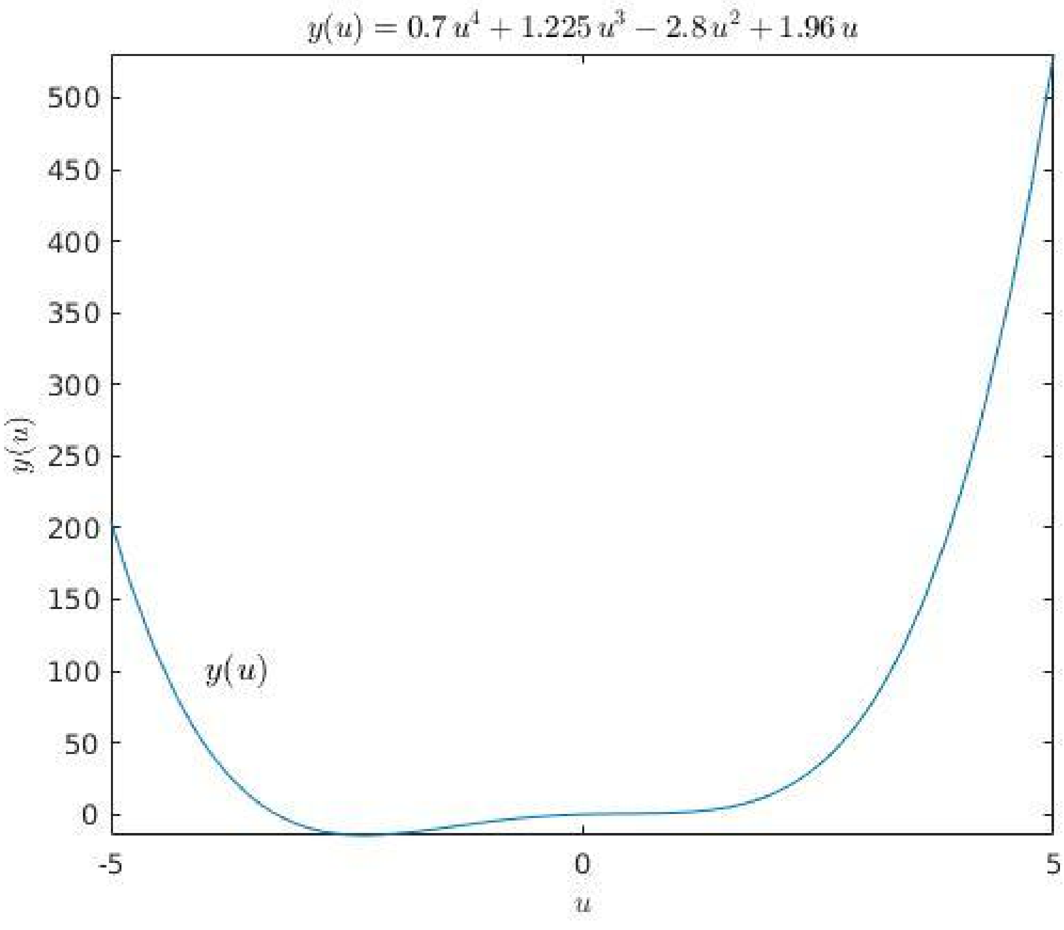
Aby otrzymać charakterystykę dokonujemy podstawienia:

$$t = \mathrm{const} \qquad \text{stąd} \quad \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 0 \quad u(t) = u$$
$$0 = -\frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} x_1 + x_2$$
$$0 = -\frac{1}{T_1 T_2} x_1 + \frac{K}{T_1 T_2} \left(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)$$
$$y(u) = x_1$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$y(u) = K\left(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \alpha_4 u^4\right)$$

Wykres:



5.

Aby zlinearyzować charakterystykę statyczną względem dowolnego punktu $\bar{u}$:

$$y_l(u) = y(\bar{u}) + \frac{\mathrm{dy}(u)}{\mathrm{du}}\Big|_{u=\bar{u}}(u - \bar{u})$$

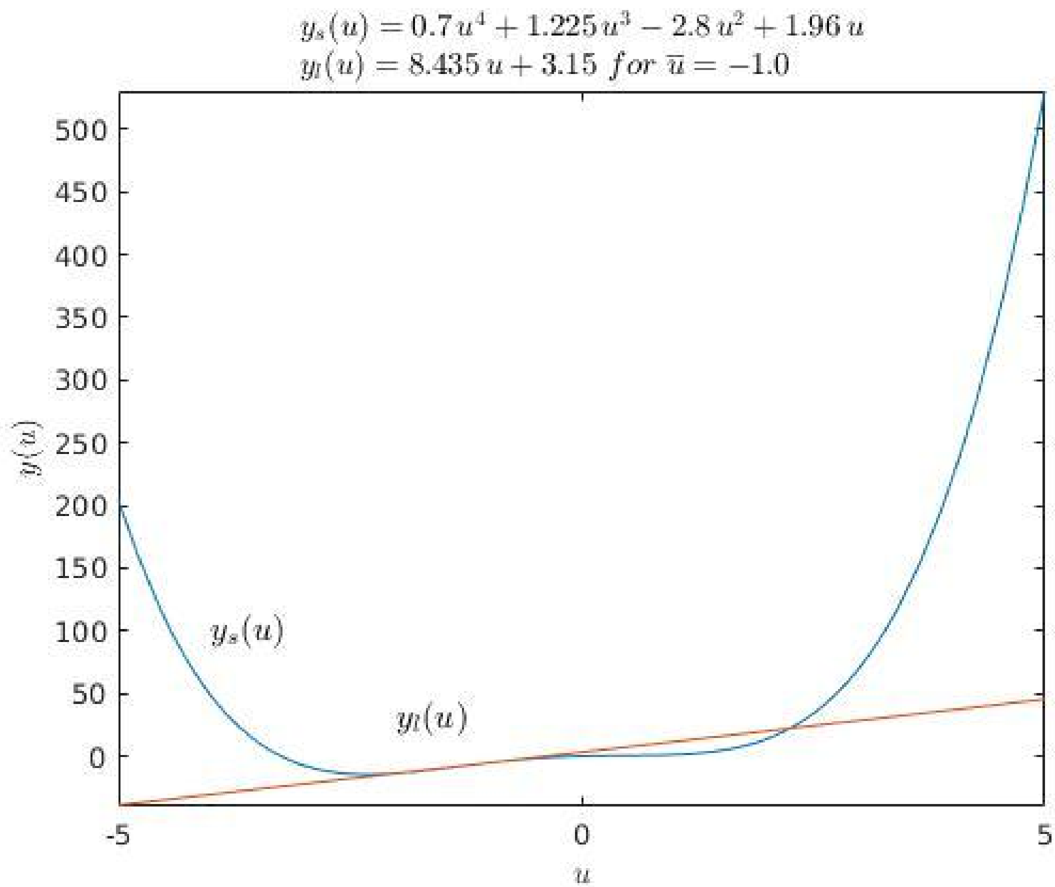
Skąd otrzymujemy:

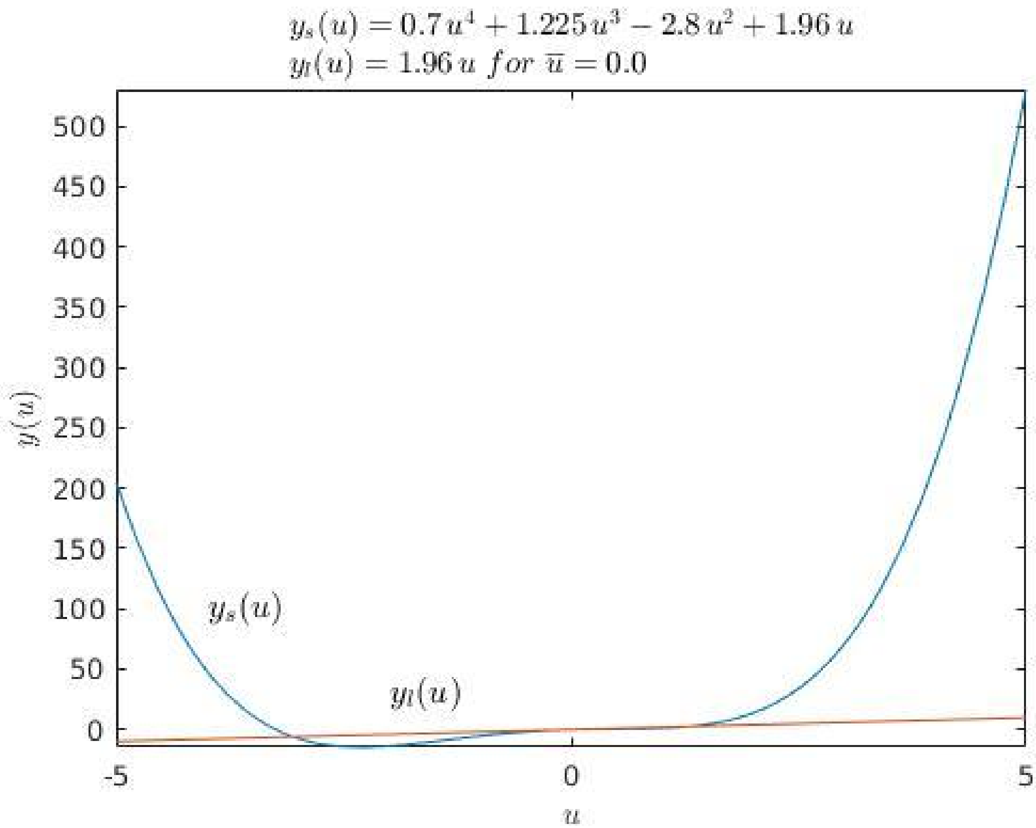
$$y_l(u) = K\left(\alpha_1\bar{u} + \alpha_2\bar{u}^2 + \alpha_3\bar{u}^3 + \alpha_4\bar{u}^4\right) + K\left(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 4\alpha_4\bar{u}^3\right)(u - \bar{u})$$

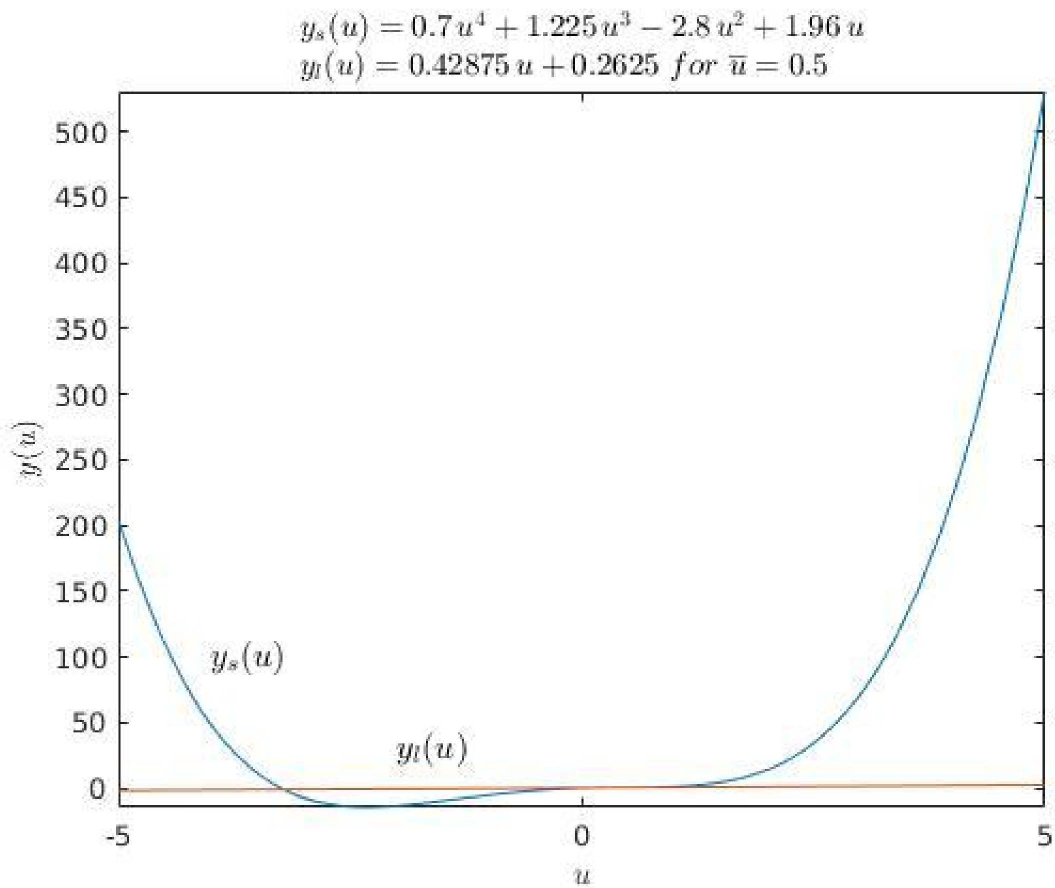
gdzie $\bar{u}$ to punkt linearyzacji.

6.

Porównanie charakterystyk dla: $\bar{u} = \{-1, 0, 0.5\}$







7.

Linearyzujemy dynamiczny model dyskretny:

$$x_1(k) = -\frac{T_p(T_1+T_2)}{T_1T_2}x_1(k-1) + x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1T_2}x_1(k-1) + x_2(k-1) +$$

$$\frac{T_pK}{T_1T_2}\left(\alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u^2(k-1) + \alpha_3 u^3(k-1) + \alpha_4 u^4(k-1)\right)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

W tym celu linearyzujemy element wprowadzający nieliniowość czyli wielomian sygnału sterującego:

$$f(k) = \alpha_1 u(k-1) + \alpha_2 u^2(k-1) + \alpha_3 u^3(k-1) + \alpha_4 u^4(k-1)$$

$$f(k) \approx f_l(k) = f(\bar{u}) + \frac{\mathrm{df}(u)}{\mathrm{du}}\Big|_{u=\bar{u}}$$

$$f_l(k) = \alpha_1\bar{u} + \alpha_2\bar{u}^2 + \alpha_3\bar{u}^3 + \alpha_4\bar{u}^4 + \left(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 4\alpha_4\bar{u}^3\right)\left(u(k-1) - \bar{u}\right)$$

Co można zapisać ostatecznie jako:

$$x_1(k) = -\frac{T_p(T_1+T_2)}{T_1T_2}x_1(k-1) + x_1(k-1) + T_p x_2(k-1)$$

$$x_2(k) = -\frac{T_p}{T_1T_2}x_1(k-1) + x_2(k-1) +$$

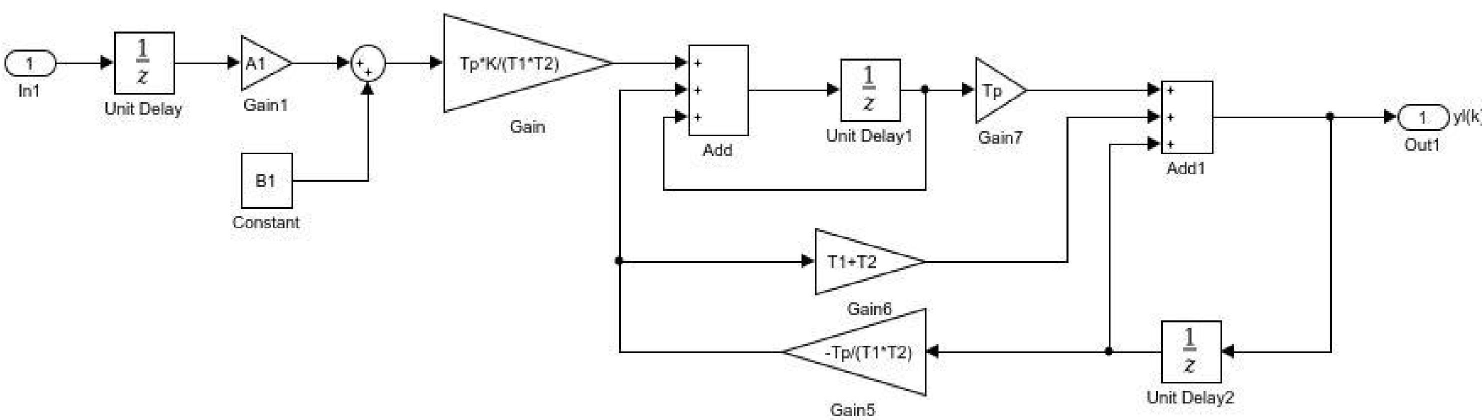
$$\frac{T_pK}{T_1T_2}\left(\alpha_1\bar{u} + \alpha_2\bar{u}^2 + \alpha_3\bar{u}^3 + \alpha_4\bar{u}^4 + \left(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 4\alpha_4\bar{u}^3\right)\left(u(k-1) - \bar{u}\right)\right)$$

$$y(k) = x_1(k)$$

dla punktu linearyzacji $\bar{u}$.

8.

```
projekt1_8;
```

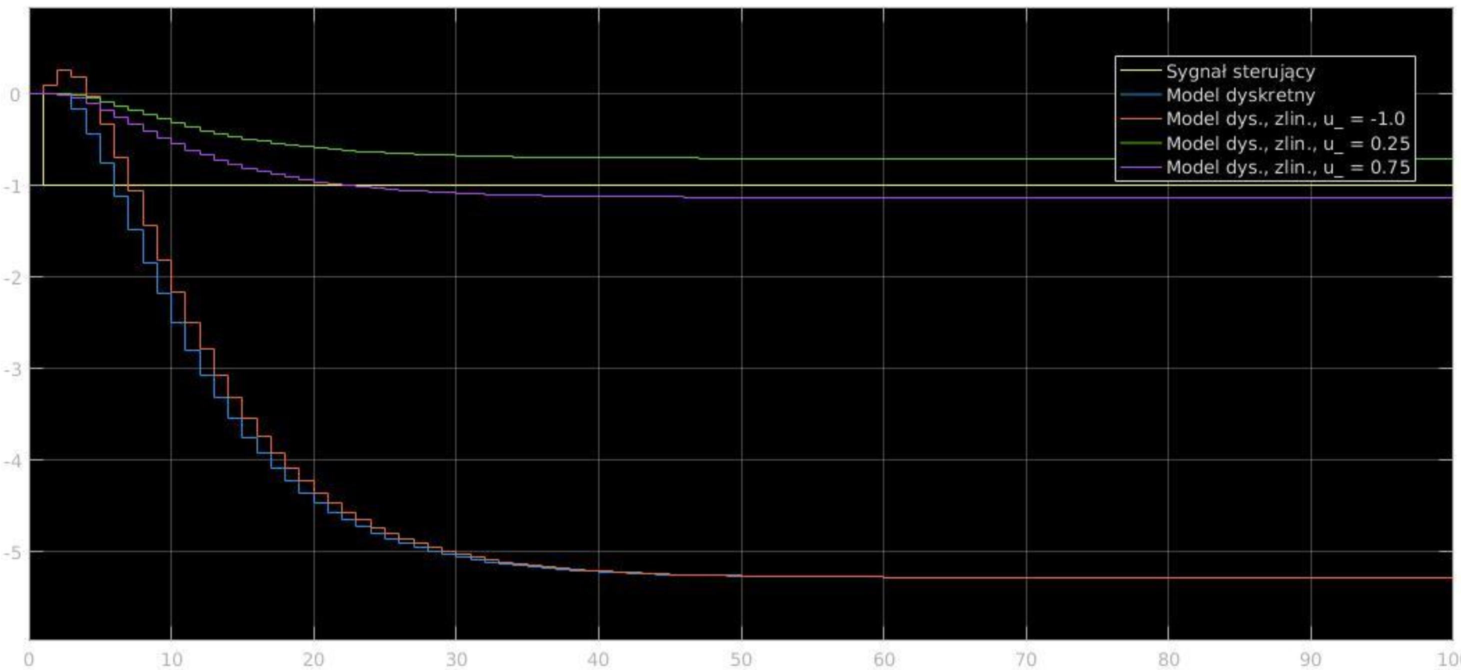


9.

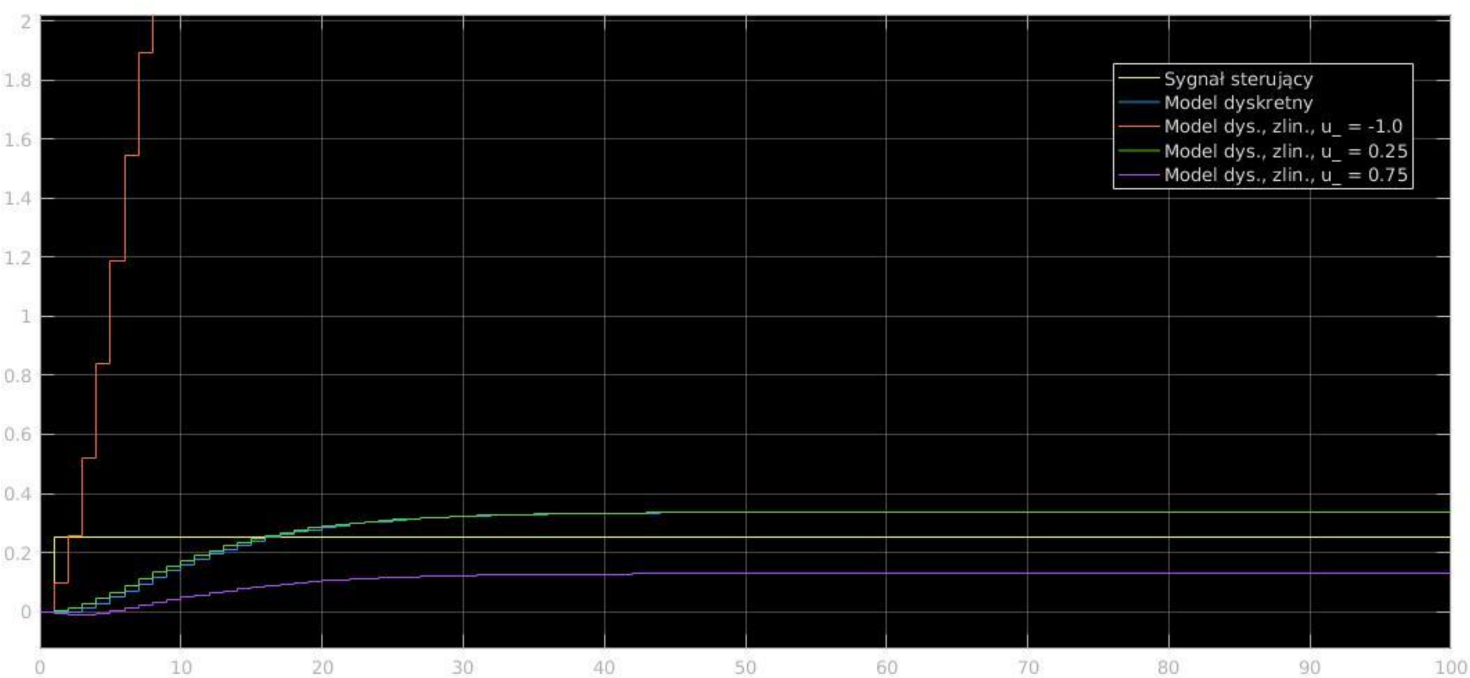
Symulacje zostały przeprowadzone dla trzech różnych wartości skoku sygnału sterującego $u(1) = \{-1, 0.25, 0.75\}$ oraz dla każdej wartości skoku dla trzech różnych punktów linearyzacji $\overline{u} = \{-1, 0.25, 0.75\}$.

Wyniki przedstawione są kolejno dla:

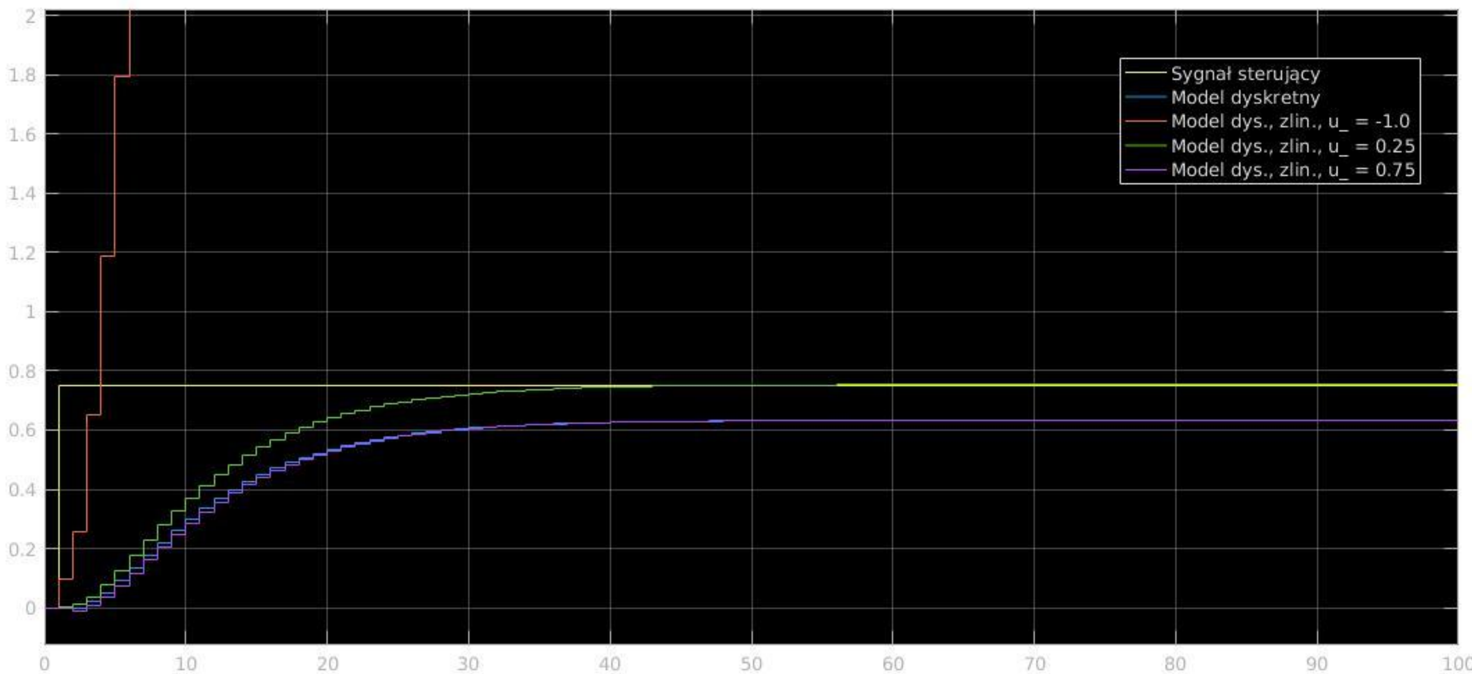
$$u(1) = -1$$



$$u(1) = 0.25$$



$$u(1) = 0.75$$



Jak widać dla punktu linearyzacji zgodnego z wartością skoku otrzymujemy bardzo zbliżoną odpowiedź, a w punktach bliskich wartości skoku odpowiedzi "podobne", jednakże dla bardziej odległych punktów widać bardzo wyraźną rozbieżność.

10.

Na początku linearyzujemy dynamiczny model ciągły:

$$\frac{\mathrm{dx}_1(t)}{\mathrm{dt}} = -\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{\mathrm{dx}_2(t)}{\mathrm{dt}} = -\frac{1}{T_1T_2}x_1(t) + \frac{K}{T_1T_2}\left(\alpha_1 u(t) + \alpha_2 u^2(t) + \alpha_3 u^3(t) + \alpha_4 u^4(t)\right)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Otrzymując:

$$\frac{\mathrm{dx}_1(t)}{\mathrm{dt}} = -\frac{T_1+T_2}{T_1T_2}x_1(t) + x_2(t)$$

$$\frac{\mathrm{dx}_2(t)}{\mathrm{dt}} = -\frac{1}{T_1T_2}x_1(t) +$$

$$\frac{K}{T_1T_2}\left(\alpha_1\bar{u} + \alpha_2\bar{u}^2 + \alpha_3\bar{u}^3 + \alpha_4\bar{u}^4 + \left(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^2 + 4\alpha_4\bar{u}^3\right)\left(u(t) - \bar{u}\right)\right)$$

$$y(t) = x_1(t)$$

Daje to odpowiednie macierze równań stanu:

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{T_1+T_2}{T_1T_2} & 1 \\ -\dfrac{1}{T_1T_2} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{K}{T_1T_2}\left(\alpha_1 + 2\alpha_2\bar{u} + 3\alpha_3\bar{u}^{2} + 4\alpha_4\bar{u}^{3}\right) \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Stąd dostajemy transmitancję:

$$G(s,\bar{u}) = C\,(sI - A)^{-1}B + D$$

$$G(s,\bar{u}) = \frac{32\left(\dfrac{(7\bar{u}^{3})}{80} + \dfrac{147\bar{u}^{2}}{1280} - \dfrac{7\bar{u}}{40} + \dfrac{49}{800}\right)}{32s^2 + 12s + 1}$$

$$G(s,\bar{u}) = \frac{\dfrac{(14\bar{u}^{3})}{5} + \dfrac{147\bar{u}^{2}}{40} - \dfrac{28\bar{u}}{5} + \dfrac{49}{25}}{32s^2 + 12s + 1}$$

Zadania dodatkowe:

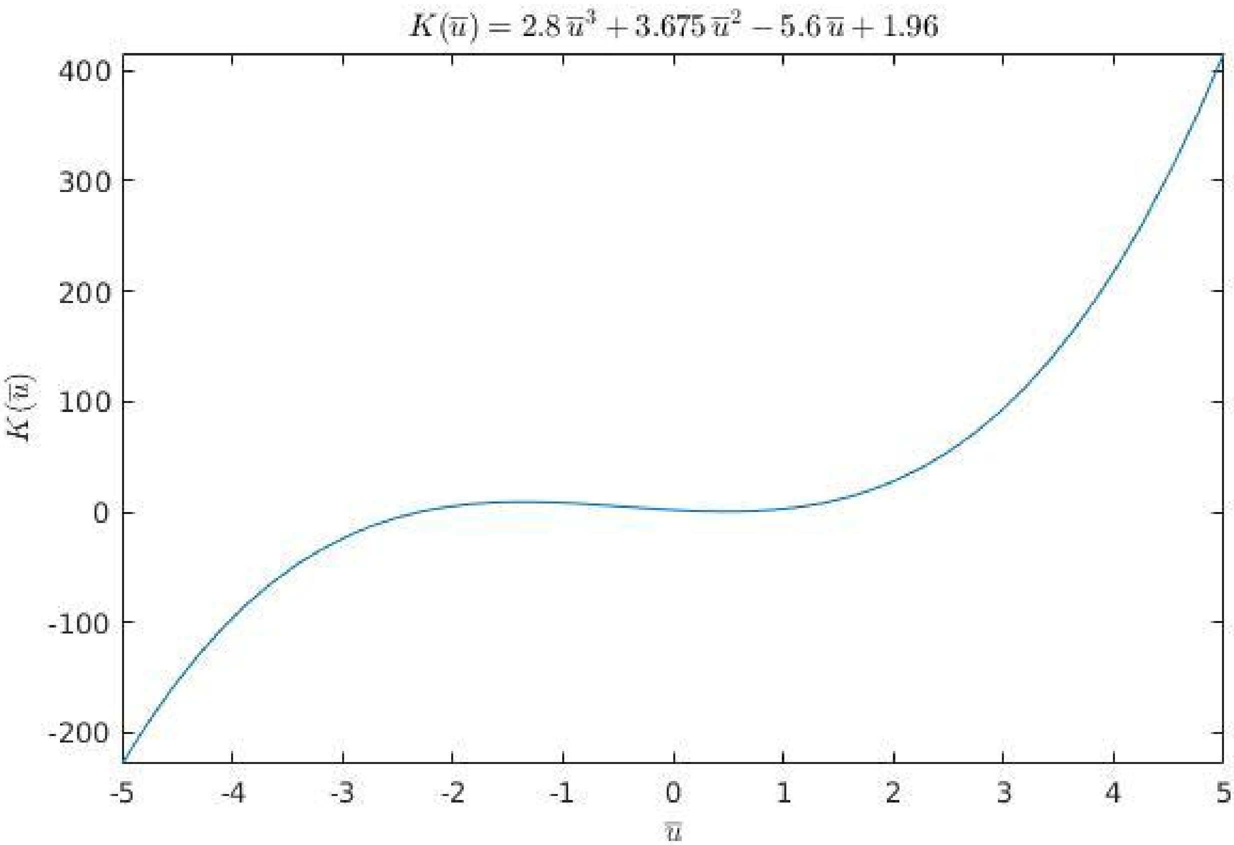
1.

Wiemy, że dla transmitancji w dziedzinie s wzmocnienie statyczne otrzymamy jako:

$$K(\bar{u}) = \lim_{s\to 0}\left(G(s,\bar{u})\right)$$

Co po obliczeniu daje:

$$K(\bar{u}) = \frac{(14\bar{u}^{3})}{5} + \frac{147\bar{u}^{2}}{40} - \frac{28\bar{u}}{5} + \frac{49}{25}$$



2.

Zauważmy, że dla wzmocnienia statycznego i wartości odczytanych z wykresu zachodzić powinna równość:

$$K(\overline{u})(u-\overline{u}) + y_s(\overline{u}) = y_l(u,\overline{u})$$

gdzie :

$\overline{u}$ to punkt linearyzacji

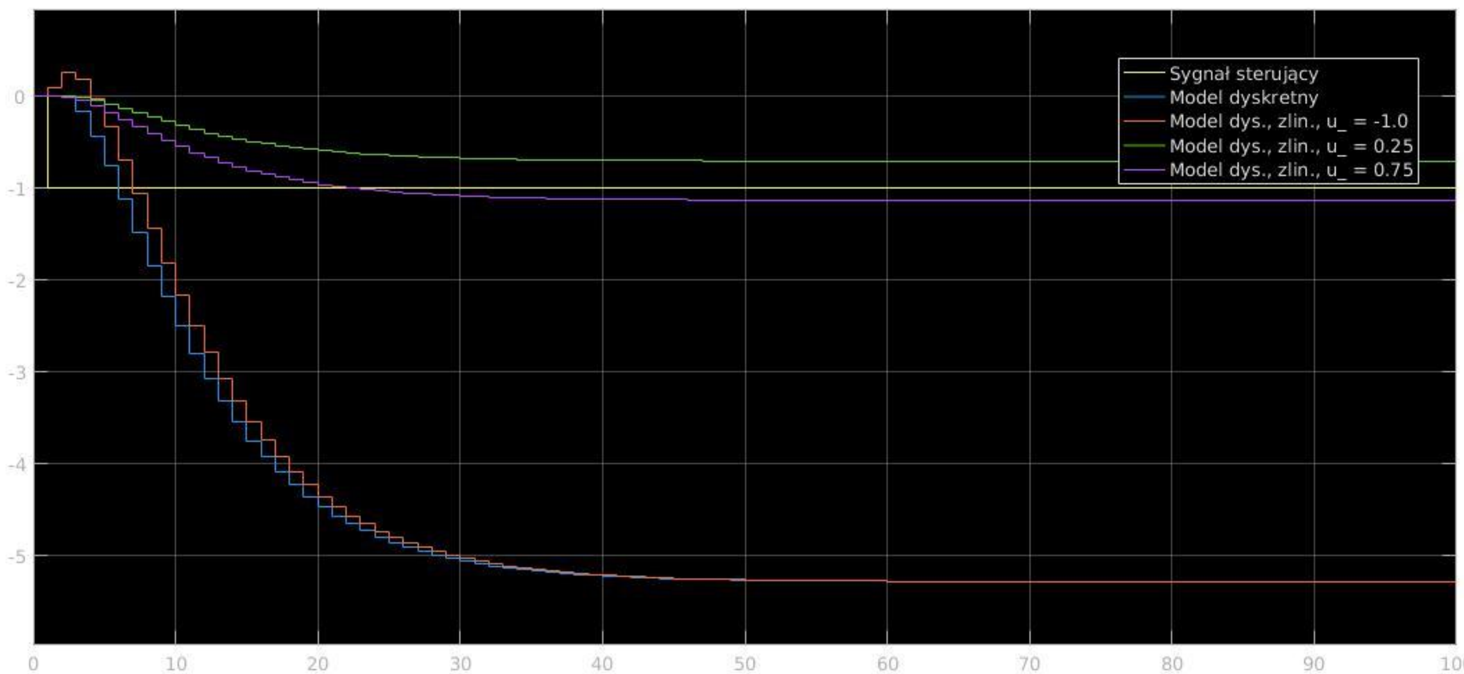
u to wartość sygnału sterującego

y_l to wartość odpowiedzi statycznej układu dyskretnego zlinearyzowanego dla t -

y_s to wartość odpowiedzi statycznej układu dyskretnego dla $t \to \infty$

Jak widać wzmocnienie statyczne uzyskane z transmitancji różni się od wzmocnienia widocznego w odpowiedzi (jako iloraz $\frac{y_l}{u}$), jednakże po podstawieniu i przekształceniach wzór pokrywa się z wzorem na transmitancję, różnica ta wynika z faktu iż transmitancja nie uwzględnia obecnej w modelu po linearyzacji stałej, inaczej mówiąc transmitancja nie uwzględnia punktu pracy, różnicę tą możemy zauważyć przy odpowiedzi modeli na sygnał o stałej wartości 0, możemy sprawdzić teraz punkty z pierwszych dwóch rysunków z podpunktu 9.

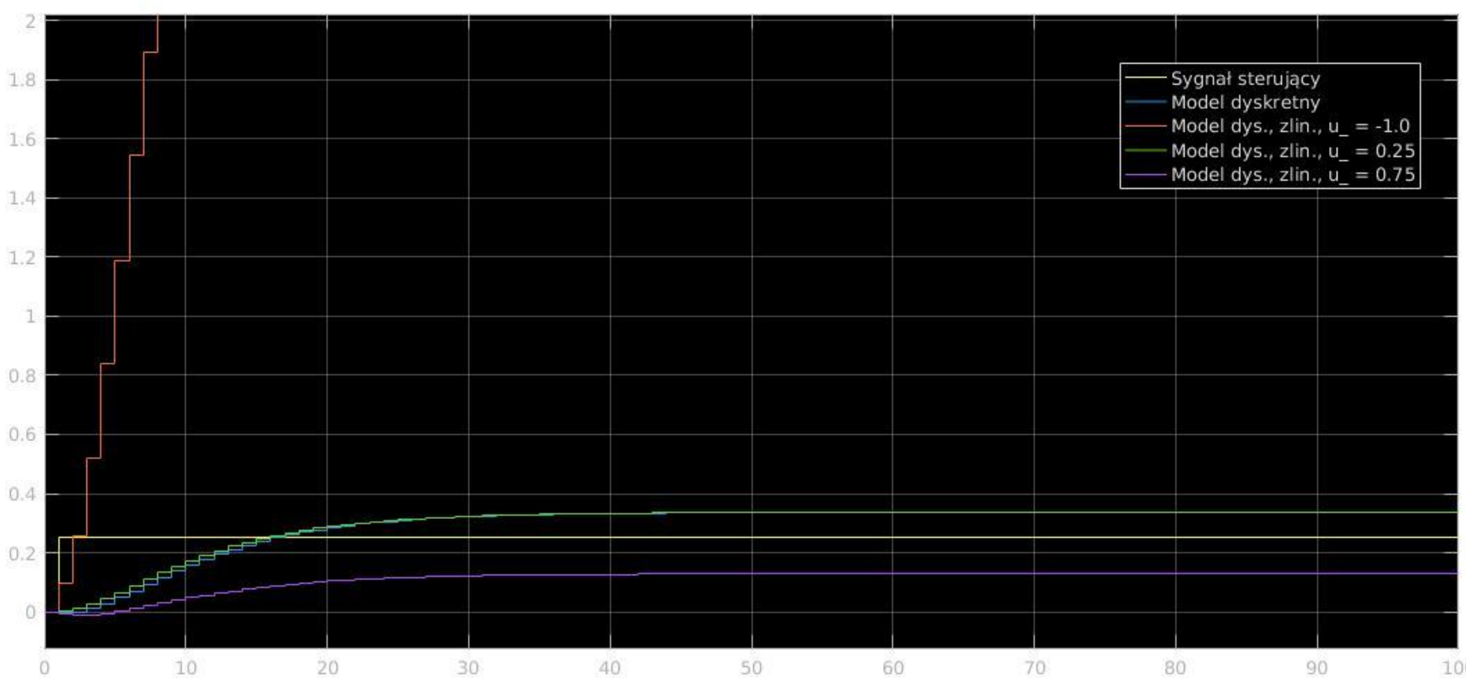
$$u(1) = -1,\ \ y_s(-1) \approx -5.285,\ y_l(-1,-1) \approx -5.285$$
$$y_l(-1, 0.25) \approx -0.705,\ y_l(-1, 0.75) \approx -1.131$$
$$K(-1) \approx 8.435$$



$u(1) = 0.25,\ \ y_s(0.25) \approx 0.337,\ y_l(0.25, -1) \approx 5.259$

$y_l(0.25, 0.25) \approx 0.337,\ y_l(0.25, 0.75) \approx 0.129$

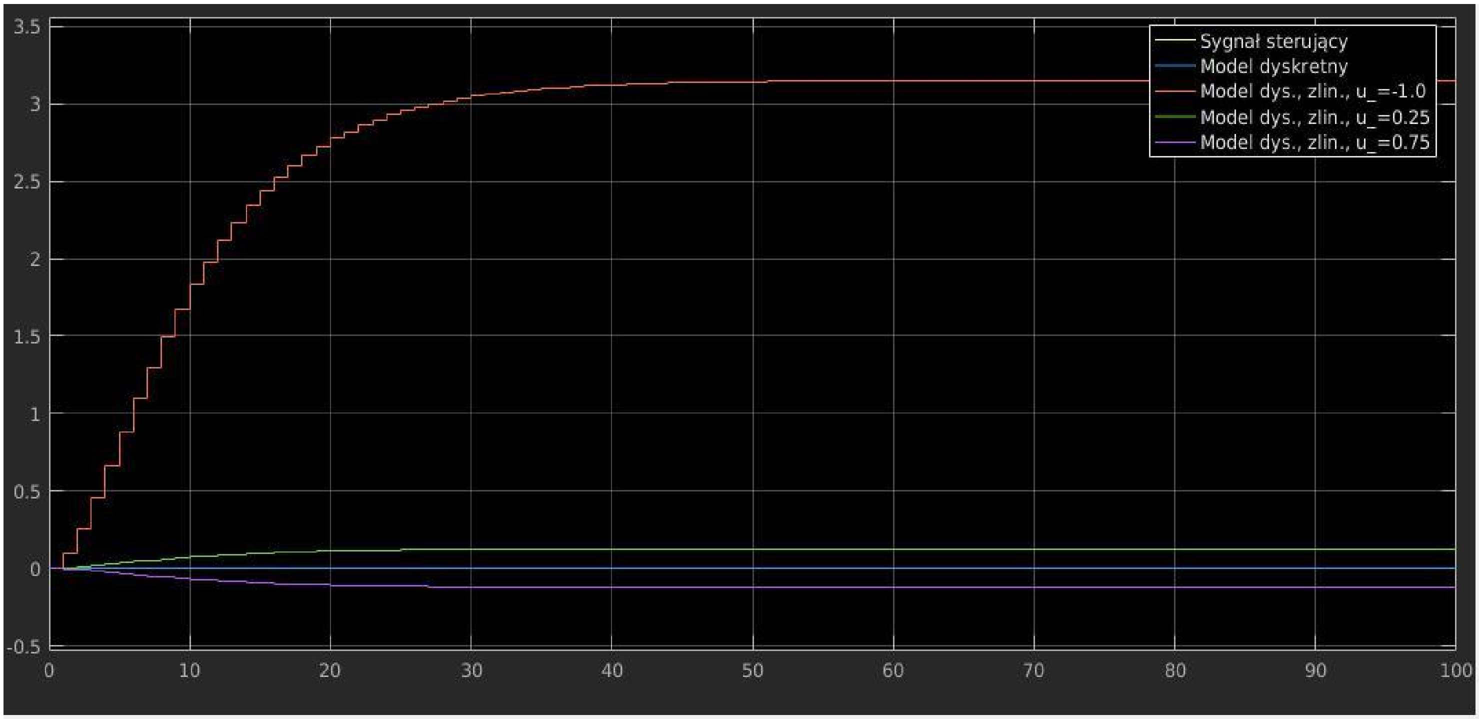
$K(0.25) \approx 0.833$



$u(t) = 0,\ \ y_s(0) \approx 0.337,\ y_l(0, -1) \approx 3.15$

$y_l(0, 0.25) \approx 0.129,\ y_l(0, 0.75) \approx -0.123$

$K(0.25) \approx 1.96$


Sygnał sterujący
Model dyskretny
Model dys., zlin., u_=-1.0
Model dys., zlin., u_=0.25
Model dys., zlin., u_=0.75
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100