

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

PHY3075

PROJET FINAL

BRUIT ROSE DANS LA CRITICALITÉ AUTO-ORGANISÉ

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	Définition du problème . . . . .	2
1.2	Définition des concepts . . . . .	2
1.2.1	Bruit rose . . . . .	2
1.2.2	Criticalité auto-organisé . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Méthodologie</b>	<b>4</b>
2.1	Outils mathématiques . . . . .	4
2.1.1	Lois de puissance dans les spectres de fréquence . . . . .	4
2.1.2	Densité de probabilité . . . . .	4
2.1.3	Auto-corrélation temporelle . . . . .	4
2.2	Modèles utilisés . . . . .	5
2.2.1	Pile de sable Abélienne . . . . .	5
2.2.2	Pile de sable sur des lignes minces . . . . .	5
2.2.3	Pile de sable dissipative . . . . .	6
2.3	Observables . . . . .	7
2.4	Code . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Validation</b>	<b>10</b>
3.1	Renversement et conditions aux frontières . . . . .	10
3.2	Corrélation spatio-temporelle . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Résultats</b>	<b>12</b>
4.1	Pile de sable Abélienne . . . . .	12
4.2	Pile de sable sur des lignes minces . . . . .	12
4.3	Pile de sable dissipative . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Analyse</b>	<b>12</b>
5.1	Traitement des données . . . . .	12
5.2	Discussions des résultats . . . . .	13
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>14</b>
6.1	Graphiques . . . . .	16

# 1 Introduction

## 1.1 Définition du problème

C'est pour tenter d'expliquer l'origine des bruits roses ( $1/f$ ) que Per Bak a originellement publié ces deux premiers papiers sur les systèmes critiques auto-organisés. L'idée était que le bruit rose, présent dans de nombreux processus quasi-aléatoire, telle l'agitation thermique des électrons ou l'émission de lumière des quasars, était dû à un système dynamique complexe avec une corrélation temporelle très longue. Alors un système critique, avec de longues corrélation proche de son point critique et possédant parfois de très nombreux degrés de libertés, est le candidat parfait dans la recherche de l'origine du bruit  $1/f$ .

Introduisant la pile comme exemple de criticalité auto-organisée, Per Bak semblait convaincu que ce genre de phénomène expliquait en grande partie l'origine du bruit rose et du même fait la plupart des systèmes complexes exhibant ce phénomène. Or, il n'a pas fallu longtemps avant que d'autres chercheurs critiquent les résultats des papiers de Bak et depuis, la criticalité auto-organisée ne semble être qu'une autre idée dans la liste déjà longue de concept tentant d'universaliser le bruit rose.

En faisant des recherches sur le sujet, on se rend vite compte que beaucoup de papiers ont été écrit sur ce sujet, rendant le tout un peu confus quand au consensus. Quand est-il vraiment ?

**Je propose de comparer deux modèles reconnu démontrant de la criticalité auto-organisée et d'observer leur puissance spectrale afin de voir s'il y a présence de bruit rose. Enfin, je simulerai un troisième modèle non-critique pour comparer le spectre et tirer des conclusions sur si la criticalité auto-organisée est un facteur dans l'apparition de bruit  $1/f$ .**

## 1.2 Définition des concepts

### 1.2.1 Bruit rose

Quand on parle de bruit, on parle normalement d'un signal tiré d'un processus aléatoire.

Strictement parlant, le bruit  $1/f$ , aussi appelé bruit rose, est un bruit avec une densité de spectre de puissance ( $S(f)$ ,  $W/Hz$ ) qui est inversement proportionnel à la fréquence du signal, i.e  $S(f) \propto \frac{1}{f}$ . On le retrouve donc entre le bruit blanc ( $S(f) = C$ ) et le bruit brownien ( $S(f) \propto \frac{1}{f^2}$ ), qui est défini par une marche complètement aléatoire. À ce jour, aucune explication mathématique générique n'a été donné pour expliquer le bruit rose.

Une propriété de ce bruit est que l'énergie entre chaque octaves de fréquence est égale ( $E((0, f]) = E((f, 2f])$ ). Le bruit  $1/f$  a aussi comme propriété d'être invariant sur toutes les échelles de temps, c'est-à-dire que ses propriétés statistiques sont les mêmes sur toutes les échelles.

Il y a quelques exemples de papiers où le bruit rose est décrit comme étant  $S(f) \propto \frac{1}{f^\alpha}$  avec  $0 < \alpha < 2$ , bien que dans notre cas on restera avec la définition  $\alpha \approx 1(\pm 0.3)$  pour l'étude de nos systèmes.

Ce type de bruit est retrouvé à de nombreux endroits dans la nature, dans des systèmes ayant la possibilité d'avoir des fluctuations statistiques comme l'agitation thermique d'électrons, dans le cerveau où encore l'émission de lumière des Quasars.

### 1.2.2 Criticalité auto-organisé

Le terme originale vient du papier de Bak, Tang et Wiesenfeld [5] et fait référence à des systèmes critiques (ex. modèle d'Ising) qui émergent indépendamment des conditions initiales, c'est-à-dire qu'ils s'organisent automatiquement vers un point critique qui agit comme attracteur. Une propriété intéressante des systèmes critiques autos-organisés est qu'ils possèdent une invariance d'échelle, et sont donc similaires aux fractales à cet égard.

La définition exacte du phénomène de criticalité auto-organisé varie d'auteur en auteur. Néanmoins, ces propriétés ressortent généralement et sont, selon moi, la base sur lequel il y a consensus.

Si on se réfère au livre *Self-organized criticality* de Pruessner, sorti en 2012, la définition plus précise et récente d'un système critique auto-organisés est "[...] d'un système avec invariance d'échelle sans ajustement externe des paramètres de contrôle, mais avec toutes les propriétés d'un point critique d'une transition de phase ordinaire, en particulier les longues (algébrique) auto-corrélations spatio-temporelles."

Particulièrement, Pruessner contraste avec d'autres systèmes exhibant des invariances d'échelles en précisant que les systèmes critiques autos-organisés se distinguent par une séparation d'échelles de temps et une non-linéarité, dû à de nombreux degrés de libertés.

Dhar quand a lui insiste sur le flux extérieur erratique aux frontières, qui provient du comportement intrinsèque de ce genre de système à se "charger" et relâcher tout d'un coup, créant des pics très visibles sur une échelle de temps assez longue.

Les systèmes critiques autos-organisés peuvent faire apparaître de nombreuses propriétés retrouvée dans les systèmes complexes naturels comme les fractales, le bruit  $1/f$  et des lois de puissances entre plusieurs quantités et ce, de façon instantanée et automatique, c'est-à-dire que l'expérimentateur ne requiert que de mettre en place le système sans avoir à se soucier des conditions initiales. Cet aspect est attrayant pour étudier des systèmes naturels où, bien sur, les conditions initiales sont la plupart du temps inconnus ou incontrôlables.

Dans le papier originale de Bak, Tang et Wiesenfeld, le modèle utilisé pour expliquer (et démontrer) les systèmes critiques autos-organisés est le modèle pile de sable. Cette expérience est une modélisation numérique consistant en une table sur lesquelles des grains de sables sont aléatoirement déposés. Avec le temps, certains emplacements de la table (qui est discrétisé dans les modélisations) atteindront un empilement de grains de sable critiques où le système en cet emplacement n'est plus stable. Alors la pile s'effondre sur les emplacements voisins et la simulation continue. Ce qui peut arriver parfois est ce qu'on appelle une avalanche, ou plusieurs emplacements voisins sont proches du nombre critique d'effondrements et l'ajout d'un seul grain de sable dans cette région peut causer l'effondrement de plusieurs emplacements, parfois à l'autre bout de la table.

Ce modèle, selon les auteurs, possède des propriétés d'un système critique auto-organisé ; il y a invariance d'échelle, bruits roses sur la fluctuation totale des grains de sable et des lois de puissances entre plusieurs quantités. Il y avait alors de grands espoirs que les systèmes critiques autos-organisés soient intimement liés à ce genre de phénomènes que l'on retrouve partout dans la nature, et les auteurs du papier espérait que ce modèle possède une certaine universalité. Or, de nombreuses études subséquentes ont montrer que le modèle tel que montré dans le papier ne présentait pas d'invariance d'échelle ni de bruit rose et que les piles de sables réelles ne présentent pas les mêmes propriétés que le système numérique. Malgré cela, le modèle des systèmes critiques autos-organisés a continué à gagner en popularité et beaucoup ont tentés

de modifier le modèle originale afin de démontrer la validité de ce genre de modèle comme base théorique pour l'explication des bruits  $1/f$ , les lois de puissance et l'invariance d'échelle.

## 2 Méthodologie

### 2.1 Outils mathématiques

#### 2.1.1 Lois de puissance dans les spectres de fréquence

La densité de puissance spectrale décrit la distribution de fréquences d'un signal, et est défini comme la transformée de Fourier au carré. Sur ordinateur, on utilise FFT pour obtenir les fréquences.

$$F_R(f) = FFT[X(t)]S(f) = |F_R(f)|^2$$

Dans notre cas, calculer la puissance spectrale est pertinente car ça nous permet d'observer directement si les fréquences de certains observables en fonctions du temps suivent une pente  $1/f$ , qui indiquerait du bruit rose.

Les unités de la puissance spectrale varient en fonction de l'observable. Pour homogénéiser, j'ai pris des unités de  $W^2/Hz$ , bien que la plupart de nos observables ne sont pas exprimés en Watts.

#### 2.1.2 Densité de probabilité

Les fonctions de densité de probabilité sont des fonctions qui nous permettent de déterminer la probabilité d'une variable d'avoir une valeur quelconque étant donné un échantillon aléatoire. Dans notre cas, on utilise les densités de probabilités pour la taille des avalanches exclusivement, car c'est l'outil qui est utilisé dans la littérature pour déterminer la présence de bruit rose dans les avalanches.

#### 2.1.3 Auto-corrélation temporelle

L'auto-corrélation temporelle est la corrélation entre une fonction à un temps  $t$  et elle-même décalé d'un intervalle  $\tau$ .

L'auto-corrélation temporelle est utilisé majoritairement pour analyser les signaux et les bruits. Ainsi, pour du bruit  $1/f$ , l'auto-corrélation temporelle (assumant  $C(\tau) \propto 1/\tau^\alpha$ ) avec spectre  $1/f^\beta$ , on a

$$S(f) = 2 \int_0^\infty d\tau C(\tau) \cos(2\pi f\tau)$$

et il suit que pour  $\beta = 1$  on a de très longues corrélations dans le temps (car  $C(\tau)$  est logarithmique). De façon plus générale, dans les systèmes critiques autos-organisés, la corrélation dans le temps est longue, c'est-à-dire qu'on s'attend à voir des puissances spectrales  $\sim 1/f^\alpha$ , avec  $0 < \alpha < 2$ . Dans notre cas, on utilisera l'auto-corrélation temporelle comme référence par rapport à la littérature.

Il y a deux façons de calculé l'auto-corrélation ; Par le théorème de Wiener-Kinchin il existe une relation générale entre  $S(f)$  et  $C(\tau)$ , par la transformée de Fourier.

$$C(\tau) = IFFT[S(f)]$$

L'autre façon est de la calculé directement avec l'équation  $C(\tau) = \langle m(t)m(t+\tau) \rangle - \langle m(t) \rangle^2$ , avec  $m(\tau)$  le nombre de grain de sable totale par exemple, ce qui est coûteux numériquement pour de grosses

simulations. Dans notre code par contre, on a un maximum de 100000 itérations, ce qui n'est pas si gros, surtout compte tenu du fait qu'on calcule l'auto-corrélation à la fin. De plus, on va seulement calculé l'auto-corrélation entre deux sites comme validation, et ce n'est donc pas nécessaire de calculer le spectre de fréquence.

## 2.2 Modèles utilisés

### 2.2.1 Pile de sable Abélienne

Ce modèle est l'exemple (généralisé) utilisé par Per Bak pour expliquer les systèmes critiques autos-organisés, et est donc expecté d'avoir des propriétés de ces systèmes.

Le terme Abélien vient d'un papier de Dhar (1990) généralisant les propriétés du modèle originale de Bak en appliquant une symétrie dans les systèmes microscopiques (i.e lors des avalanches) à l'aide d'une matrice de renversement.

Règles

- on a une lattice arbitraire de  $\{1, 2, \dots, N\}^2$  sites,
- On introduit une matrice de renversement  $N \times N$   $\Delta$

$$\Delta = \begin{cases} 4 & \text{pour } n=n' \\ -1 & \text{pour } n' \text{ les voisins de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

-

- En addition, chaque site  $n$  à une pente  $z_n \in \mathbb{Z}$  sujets aux dynamiques et une pente critique fixe  $z_n^c$
- On prend  $z_n^c = \Delta_{nn}$
- On initialise
- Mise à jour : on rajoute une particule à un site aléatoire (probabilité linéaire)  $n_0$ , ce qui résulte en un changement de pente  $z_{n_0} \rightarrow z_{n_0} + 1$
- Chambolement : Pour chaque site  $n$  avec  $z_n > z_n^c$  (actif ou instable) distribue les unités sur d'autres sites,

$$\forall n' \in \{1, \dots, N\} z_{n'} \rightarrow z_{n'} - \Delta_{nn'}$$

- Dissipation : Conditions aux frontières ouvertes

Dans cette pile de sable (et en générale), on assiste à deux échelles de temps, soit l'échelle de temps microscopique où les avalanches ont lieu et l'échelle de temps entre l'ajout de grains de sable. Cette différence d'échelle est importante et est comme dit plus tôt un élément clé de la définition des systèmes critiques autos-organisés. De même, l'allure des graphiques de la dissipation de grains de sable aux frontières nous permettra de valider en parti du moins si le système est sujet à des avalanches de tailles variées.

Selon la littérature, la pile de sable Abélienne est bien critiques et autos-organisées mais semble avoir une puissance spectrale de l'ordre de  $S(f) \propto 1/f^2$  plutôt que  $1/f$ . Ces hypothèses seront à valider, mais il nous donne une idée sur quoi s'aligner.

### 2.2.2 Pile de sable sur des lignes minces

Ce modèle est une variante du modèle de Per Bak qui prétend émettre du bruit  $1/f$  en changeant la taille de la lattice  $L_x = N_1$ ,  $L_y = N_2$

Règles :

- On introduit une lattice  $L_x \times L_y$  avec  $L_y$  petit
- On introduit la matrice de renversement  $L_x \times L_y$  qui obéit les mêmes règles que pour la pile de sable Abélienne :

$$\Delta = \begin{cases} 2 & \text{pour } n=n' \\ -1 & \text{pour } n'_1 \text{ le voisin droit de } n \text{ et } n'_2 \text{ le voisin en haut ou en bas de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Chaque site à une pente  $z_n$  sujets aux dynamiques et une pente critique fixe  $z_n^c$
- On prend  $z_n^c = \Delta_{nn}$
- On initialise la matrice
- Échelle de temps macro (ajout d'énergie) : on rajoute une particule à un site  $n_0 = (x, 0)$ , avec  $x$  aléatoire, ce qui résulte en un changement de pente  $z_{n_0} \rightarrow z_{n_0} + 1$
- Échelle de temps micro (avalanches) : Pour chaque site  $n$  avec  $z_n > z_n^c$  (actif ou instable) distribue les unités de pentes sur d'autres sites,

$$\forall n' \in \{1, \dots, N\} z_{n'} \rightarrow z_{n'} - \Delta_{nn'}$$

avec  $\sum_{n'=1}^N \Delta_{nn'} \geq 0$  unité dissipé

- Dissipation : Frontières fermées sur tous les côtés avec frontière ouverte sur le côté droit ( $x = 8, 50$ , dépendant de la taille de notre système)
- Mise à jour des sites parallèles avec matrice de renversement
- Séparation des échelles de temps ; on arrête la mise à jour des matrices de renversement (échelle micro) lorsque  $z_n \leq z_n^c \forall n$ .

Les hypothèses sont que ce système est bien critique et auto-organisé, en plus d'exhiber du bruit  $1/f$ .

### 2.2.3 Pile de sable dissipative

Ce modèle est une modification d'un modèle continue existant (Zhang model), qui introduit une dissipation de l'énergie des avalanches afin de reproduire un bruit  $1/f$  avec  $\alpha$  très proche de 1. En introduisant une dissipation, on brise les corrélations temporelles et spatiales sur de longues distances, détruisant son comportement critique, qui était jusqu'à maintenant considéré comme un facteur important dans l'apparition du bruit  $1/f$ . L'alternative proposé par Zhang et De Los Rios est que le bruit  $1/f$  émerge de la superposition des puissances spectrales de chaque site à travers le temps, par l'approximation  $S(f) = \sum S(f, x)$

Règles :

- Chaque site  $n \in \{1, 2, \dots, L\}^2$  avec  $N = L^2$  sites sur une lattice hyper-cubique de dimension  $d$  et conditions aux frontières fermées sauf sur le côté droit qui est ouvert et énergie locale  $E_n$
- On choisit une valeur de coordination  $q$  qui décidera de la séparation d'un site à ces voisins (dans notre cas  $q = 2d = 2 * 2 = 4$ )
- On introduit la matrice de renversement

$$\Delta = \begin{cases} E_n & \text{pour } n=n' \\ \frac{-E_n}{q}(1-a) & \text{pour } n' \text{ les voisins de } n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $a$  le facteur de dissipation (on prendra  $a = 0.01$ )

- $E_{max} = 1$
- Pour chaque incrément on choisit  $\varepsilon \in [0, E_{max}]$ , avec  $P(\varepsilon)$  tiré d'une densité de probabilité linéaire
- On ajoute  $\varepsilon$  à un site aléatoire sur le côté gauche de la lattice. De cette façon, on établit une direction dans la propagation de l'énergie
- Si  $E_n \geq E_{max}$  alors on ajoute  $\frac{E_n}{q}(1 - a)$  à chacun de ces voisins  $E_{n'} \rightarrow E_{n'} + \frac{E_n}{q}(1 - a)$ .

Hypothèse : pas un système critique organisé, mais avec une puissance spectrale  $\propto 1/f$ .

## 2.3 Observables

Les observables les plus utilisés dans la littérature sont la quantité totale de grains de sables lorsque le système est stable (juste avant d'ajouter un grain de sable) et le nombre totale de chamboulement par mise à jour de la lattice, ainsi que la taille des avalanches. Chacune de ces quantités ont été montrés de façon intermittentes comme possédant un spectre de fréquence similaire à  $1/f$ . Dans mon cas, j'utiliserai **la quantité totale de grain de sable** ( $Z(t)$ ) et la **taille des avalanches**( $s$ ), car ce sont les plus utilisés dans la littérature et donc il sera plus facile de valider les résultats.

La quantité totale de grain de sable est un observable assez facile à mesurer, en effet, nous n'avons qu'à prendre la somme de la lattice après stabilisation lorsqu'on ajoute de l'énergie au système. C'est cet observable qui est le plus constamment utilisé dans la littérature, et c'est en mon sens le plus important dans ce projet. C'est en prenant la densité de puissance spectrale de  $Z(t)$  que nous pourrions déterminer la présence de bruit  $1/f$  dans l'évolution de cette quantité.

La taille des avalanches est un peu moins évident à définir. En gros, nous considérerons un avalanche comme étant la quantité d'unité bougé sur toute la lattice entre l'ajout d'énergie dans le système et la stabilisation du système. La taille des avalanches est donc la somme de toutes les unités bougées durant cet intervalle. Nous prendrons la distribution de la taille des avalanches pour déterminer la présence de bruit rose dans l'évolution de cet observable. C'est en effet, ce qui est utilisé dans la littérature.

De plus, j'utiliserai le flux des grains de sable dissipée aux frontières. En effet, une des caractéristiques bien établis des systèmes critiques autos-organisés est le comportement erratique des pertes d'unités aux frontières, ainsi que les grandeurs aléatoires des processus de relaxation (avalanches). Cette approche du comportement erratique a été proposé par Dhar [9] et n'est pas unique aux systèmes critiques autos-organisés, mais est une bonne façon (non-mathématique) de les reconnaître en complément de d'autre phénomènes comme les lois de puissance dans le spectre de fréquence et l'invariance d'échelle (on va ignorer dans cette définition les modèles fermées). Pour la même échelle de temps que les avalanches, nous sommerons sur toutes les frontières ouvertes le nombre de grains de sable qui passe sur ces frontières, avant de les dissiper. Aucune analyse spectrale particulière ne sera fait sur cet observable.

## 2.4 Code

Je prendrai le modèle Abélien de *Abelian\_sandpile.py* pour expliquer le code des modèles et le déroulement de la simulation, et je finirai avec *Main.py* pour le traitement des données, mais je ne m'attarderai pas sur les deux autres modèles, le déroulement des simulations étant similaire, avec seulement le calcul des frontières et des voisins qui changent un peu et avec les observables pris aux même endroits et calculés de la même façon.

J'ai décidé de prendre une approche *Object-Oriented Programming*, car plus facile selon moi pour comprendre ce qui se passe et pour les mesures des observables. On a donc une classe *Abelian\_sandpile()* avec fonction `__init__(N, nb_sim, nb_gen)`,  $N$  étant la taille du système  $L = N \times N$ , `nb_sim` le nombre de simulations et `nb_gen` le nombre de générations (itérations) dans une simulation.



```

def __init__( self ,N,nb_sim,nb_gen)
    #INIT LATTICE
    self.rng=np.random.default_rng()#flat distribution for adding slope

    self.size=N #L=NxN
    self.lattice=np.zeros(( self.size+1,self.size+1)) #init_lattice
    self.crit_height=4 #critical point

    #ITERATIONS AND BURNING
    self.sim=nb_sim
    self.gen=nb_gen
    self.burn=self.gen//4

    #INIT QUANTITIES
    self.total_grain=np.array ([])
    self.outflux=np.array ([])
    self.corr=np.array ([])

```

*self.burn* est le nombre approximatif d'itérations nécessaires pour arriver à un équilibre dans le système, c'est-à-dire que tous les sites sont à risque d'avalanche.

Une fois initialisé, on peut commencer la simulation avec *start\_sim()*

```

def start_sim( self ):
    """
    start sim with n gen, calculate required observables
    """
    #INIT MULTI-SIM OBSERVABLES
    self.avalanche_size=np.zeros(( self.lattice.size*10))
    self.total_grain_MEAN=np.zeros(( self.gen+1))
    self.outflux_MEAN=np.zeros(( self.gen+1))
    self.corr_MEAN=np.zeros(( self.gen+1))

    #Loop of m simulations
    for m in range(self.sim):
        print(f"sim n.{m}")
        self.__init__( self.size , self.sim , self.gen)

        #MAIN LOOP
        for n in range(self.gen+1):
            self.count=n
            coord=self.rng.integers(0,self.size,2) #random coord      #coord=[self.

            #add slope unit and update quantities
            self.add_slope(coord)
            self.update_gen()
            print( self.count ,end="\r ")
            self.update_sim()

        #NORMALISE

```

```
#PSD
```

```
self.plot()
```

On initialise les observables qu'on mesurera, et on commence une boucle sur le nombre de simulations (m) et une boucle sur le nombre d'itérations (n). Dans (n), on choisi une paire de coordonnées aléatoire qui sera notre site sur lequel on ajoute un grain de sable. On ajoute le grain de sable avec *add\_slope* et on mets à jour la lattice avec *update\_gen*.

```
def update_gen(self):
```

```
    #check for critical heights
```

```
    if np.max(self.lattice)>=self.crit_height:
```

```
        #topples critical point in while loop
```

```
        self.toppling()
```

```
        #update quantities
```

```
        self.outflux=np.append(self.outflux , self.outflux_micro)
```

```
        self.avalanche_size [np.clip ( self.avalanche_size_micro ,0 , self.lattice.size
```

```
    else: #if no critical points , update quantities
```

```
        self.outflux=np.append(self.outflux ,0)
```

```
        self.avalanche_size [0]+=1
```

```
    self.corr=np.append(self.corr , self.lattice [3,10]+self.lattice [-4,15])
```

```
    self.total_grain=np.append(self.total_grain , np.sum(self.lattice))
```

Dans *update\_gen*, on regarde si un site à atteint la hauteur critique. Si c'est le cas, on itère dans *self.toppling()* jusqu'à quiescence. On met ensuite à jour les quantités qui sont mesurés durant l'intervalle de temps produit dans *self.toppling()* et on continue avec la boucle (n) de *start\_sim()*. Si aucun site n'a atteint la hauteur critique, on met quand même à jour les quantités (on mesure 0).

```
def toppling(self):
```

```
    self.outflux_micro=0
```

```
    self.avalanche_size_micro=0
```

```
    while np.max(self.lattice)>=self.crit_height:
```

```
        crit_slope= self.lattice>=self.crit_height
```

```
        self.lattice -=self.toppling_matrix(crit_slope)
```

```
        self.outflux_micro+=np.sum(self.lattice [0,:])+np.sum(self.lattice[:,0])+  
np.sum(self.lattice [-1,:])+np.sum(self.lattice[:, -1])
```

```
    #open boundaries
```

```
    self.lattice [0,:] = 0
```

```
    self.lattice [self.size,:] = 0
```

```
    self.lattice[:,0] = 0
```

```
    self.lattice[:, self.size] = 0
```

```
    self.avalanche_size_micro+=np.where(crit_slope==True)[0].size
```

Ceci est la fonction qui consommera en générale le plus de temps, simplement à cause de la boucle *while* qui itère et soustrait la matrice d'adjacence décrite plus tôt jusqu'à temps qu'aucun site ne dépasse la valeur critique de hauteur. Les observables *\_micro* sont là seulement le temps que le système revienne à

quiescence, et on sauvegardera les sommes de ces mesures dans *self.outflux* et *self.avalanche\_size*, situé dans *update\_gen*.

Une fois que la boucle (n) est fini, on utilise *update\_sim* pour sauvegarder les quantités mesurées durant la simulation (m). Ces quantités seront ensuite normalisées et traitées pour calculer les distributions respectives. Finalement, ils seront mis dans un graphique avec *self.plot()*

## 3 Validation

### 3.1 Renversement et conditions aux frontières

Il peut être difficile de valider les matrices de renversements de façon mathématique. On peut bien sûr valider avec la littérature, mais les algorithmes de piles de sable ne sont pas souvent expliciter ou dans un autre langage comme C ou Fortran pour maximiser les performances. On doit alors trouver une manière simple de s'assurer que les règles de notre système marche comme prévu. J'ai créé à cette fin le code *Validation.py*, qui modifie légèrement les codes de nos modèles sans toucher aux composantes fondamentales que nous essayons de valider, comme la matrice de renversement, la manipulation des voisins et les conditions frontières.

Pour les trois modèles, les changements et le déroulement de la validation sont les mêmes, je vais donc présenter le code pour la pile de sable sur des lignes minces.

On simule le modèle une seule fois, avec aucune itération. La différence clé par rapport au code du modèle normal est qu'on initialise la lattice avec  $h - 1$  grains de sable sur tous les sites, avec  $h$  la hauteur critique.

```
def __init__(self, Nx, Ny, nb_gen):
    print("INIT...", end="")
    #INIT LATTICE
    self.rng=np.random.default_rng()# flat distribution for adding slope

    self.size_x=Nx
    self.size_y=Ny

    self.lattice=np.ones((self.size_y+2,self.size_x+2))
    #init_lattice with quasi-critic state
    #Reset boundaries
    self.lattice[0:,0]=0
    self.lattice[0,:]=0
    self.lattice[-1,:]=0

    self.crit_height=2 #cricical point

    #ITERATIONS AND BURNING
    ...

    fig, ax = plt.subplots()
    bar=plt.colorbar(plt.imshow(self.lattice, vmin=0,vmax=2))

    print("Done.")
```

Il est important de mettre à jour les frontières, sinon les grains qui étaient sur la frontière tombent.

On initialise aussi la figure qui nous permet de lancer l'animation, l'outil utilisé pour visualiser notre algorithme.

```
def plot(self, lattice):
    plt.imshow(lattice, vmin=0, vmax=2)
    plt.pause(2)
...
def toppling(self):
    ...
    while np.max(self.lattice) >= self.crit_height:
        ...
        self.plot(self.lattice)
    ...
```

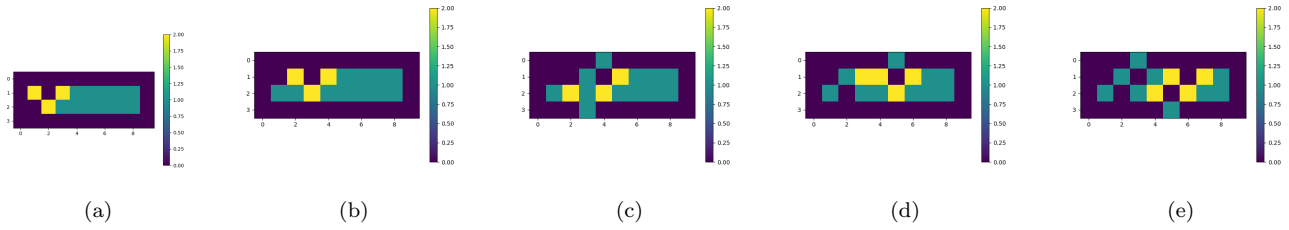


FIGURE 1 – Ces figures sont des captures d'écrans qui présentent les différentes composantes qu'on essaie de valider. Entre (b) et (c) par exemple, on peut voir l'algorithme de renversement en marche, avec le grain sur la position 4 en (b) avancé d'une position et faire tomber un grain sur la frontière en haut. Entre (c) et (d), on voit que la frontière du haut (fermé) redonne le grain à la ligne en dessous. La meilleure validation reste de faire rouler le code *Validation.py*

### 3.2 Corrélation spatio-temporelle

On peut vérifier que les modèles possèdent la caractéristique d'avoir de longues corrélations spatiales entre sites pour valider leur comportement auto-organisé critique, ou l'absence de dans le cas du modèle dissipatif. À ces fins, on calcule la somme du nombre de grains de sables entre deux sites aléatoires et on graphe en fonction du temps. Pour le modèle des lignes minces, le papier indique que l'auto-corrélation entre deux sites d'une même colonne devrait converger vers 0 comme  $C(x, t) = F(t/9^{x-1})$ .

Comme attendu, l'auto-corrélation pour la pile Abélienne (7a) démontre une corrélation qui décroît rapidement dans le temps mais jamais nulle. Pour le modèle dissipatif, on a effectivement une corrélation qui converge très rapidement vers 0 (7b). Le problème réside dans la validation du modèle sur ligne mince. En effet, je m'attendais à avoir une corrélation qui convergeait vers 0, mais la convergence devait être liée à la distance de la colonne à l'origine ( $x=0$ ) comme  $C(x, t) = F(t/9^{x-1})$ , avec  $F$  décroissant et  $x$  la distance. Or, bien que pour chacune des colonnes calculées, l'auto-corrélation converge vers 0, le temps de convergence est similaire, ce qui est contraire à la littérature. En effet, le temps nécessaire pour converger doit augmenter comme  $9^{x-1}$ . Après maintes tentatives de résolution, je n'ai malheureusement pas réussi à trouver le problème, et je dois donc assumer que le modèle que je présente n'est pas le même que dans [7]. Ceci est en addition avec le problème des avalanches présenté dans la discussion des résultats, qui semblait mal se comporter aussi. Bien que ce dernier ait une explication plausible, si deux des observables utilisés ne présentent pas de résultats consistants, la fiabilité des résultats de ce modèle seront affaiblis peu importe les explications.

## 4 Résultats

### 4.1 Pile de sable Abélienne

J’ai effectué 10 simulations de 100000 générations chaque et moyenné les résultats sur l’ensemble pour une grille  $L = 50 \times 50$ . La puissance spectrale du nombre totale de grains de sable semble bien suivre une loi de puissance,  $S(f) \propto 1/f^\alpha$  (2a), avec  $\alpha = -1.913 \pm 0.016$ . En ce qui concerne la distribution de probabilité de la taille des avalanches, on a aussi une loi de puissance, avec  $\alpha = -1.231 \pm 0.001$  (2d). À noter que le seuil supérieur de la loi de puissance pour la taille des avalanches (2c),  $s \sim 10^3$ , a été pris en compte dans le calcul des exposants et a donc pu inférer sur le résultat de la partie en loi de puissance qui nous intéressait. En ce qui concerne la taille des grains de sable, les basses fréquences ont été coupé lors du calcul de l’exposant car considéré comme le seuil inférieur de la loi de puissance qui régule le reste du spectre. Le graphique du flux extérieur (2e) en fonction du temps semble bien démontrer une invariance d’échelle, avec des flux de toutes les tailles. Si on regarde la puissance spectrale en particulier, on voit que le spectre est réparti sur l’ensemble des fréquences, bien qu’aucune loi de puissance, souvent le signe d’une invariance d’échelle, ne semble émerger (2f).

### 4.2 Pile de sable sur des lignes minces

Pour ce modèle, j’ai effectué 10 simulations de 100000 générations chaque pour  $L_x = 8$ ,  $L_y = 2$  et 10 simulations de 100000 générations pour  $L_x = 50$ ,  $L_y = 4$ , et moyenné les résultats pour les 2 grilles séparément. Pour la grille  $(L_x, L_y) = (8, 2)$ , j’ai obtenu  $\alpha = -0.95 \pm 0.014$  pour la pente de la puissance spectrale du nombre total de grains de sable (3a). En ce qui concerne la distribution de probabilité des avalanches, aucune loi de puissance ne semble dirigé la distribution, avec plutôt une baisse très rapide des probabilités, et un pic juste avant le seuil supérieur (3c). Pour la grille  $(50, 4)$ , j’obtiens une pente de  $\alpha = -1.638 \pm 0.018$  pour la puissance spectrale du nombre total de grains de sable (5a), et une distribution de probabilité de la taille des avalanches qui est comme en entre-deux entre le résultat sur la petite grille et la distribution de la pile Abélienne, avec une pente de  $\alpha = -0.951 \pm 0.004$  (5d). En ce qui concerne le flux extérieur sur le côté droit, les deux grilles semblent exhiber une invariance d’échelle, avec un flux à tous les niveaux, bien que la plus petite grille varie beaucoup moins en taille (3d et 5e).

### 4.3 Pile de sable dissipative

5 simulations de 50000 générations moyennées ont été utilisés pour ce modèle. La pente de la puissance spectrale du nombre total de grains de sable donne  $\alpha = -1.361 \pm 0.013$  (6a), et la distribution des tailles d’avalanches est plate (si on coupe le seuil supérieur, voir figure 6c). La dissipation entraîne une disparition complète du flux extérieur, alors que les avalanches ne semblent jamais se rendre à la frontière ouverte.

## 5 Analyse

### 5.1 Traitement des données

Avant de considérer les résultats, il peut être pertinent de s’arrêter sur comment les données ont été traités et essayer de voir les possibles failles dans le raisonnement, ainsi que les limitations physiques des systèmes. En effet, tous nos modèles ont un très grand nombre de degrés de libertés, ce qui fait que les résultats, même moyenné sur beaucoup de simulations, ont énormément de bruit, ce qui rend l’analyse de résultats plus ardu, en brouillant les seuils inférieurs et supérieurs des lois de puissance.

Ces seuils sont déterminées par les limitations physiques du système, les exemples les plus simples étant la taille du système et la hauteur de grains de sables critiques. En particulier, la taille du système va influencer les seuils de la distribution d’avalanche (en limitant le seuil supérieur). Une autre limitation

serait la directionnalité du système, c'est-à-dire l'endroit où on ajoute de l'énergie dans le système, et les conditions aux frontières

Les conditions aux frontières changeantes ont définitivement un effet sur les résultats finaux, bien qu'ils ne soient pas pris en considération durant l'analyse. Par exemple, les seuils inférieurs et supérieurs de la loi de puissance qui dirige en partie la distribution des tailles d'avalanches sont déterminés en parties par les conditions frontières. En effet, si on fermait des frontières au hasard dans n'importe quelle modèle, la dissipation serait plus petite et l'énergie resterait dans le système et la taille des avalanches en moyenne serait plus grande. Dans le modèle des lignes minces, si on a un seuil d'hauteur de 4 comme dans la pile de sable Abélienne, et que la distribution d'unité se fait également sur les 4 voisins, la distribution de la taille des avalanches aura une tendance à avoir un seuil supérieur en plateau (3c et 4).

## 5.2 Discussions des résultats

En s'attardant premièrement sur le flux extérieur des piles de sables, on peut voir que les trois modèles remplissent le critère d'invariance d'échelle du flux extérieur qui fait partie de notre description de système critique auto-organisé (2f,3d). Assez intéressant est que ni les conditions frontières, ni la dissipation du modèle 3 et ni les formes différentes de grilles ne semblent influencés de façon significative le flux extérieur. Plutôt, ce flux semble lié aux règles intrinsèques des modèles, qui donnent lieu à des avalanches, ce qui fait du sens, car ce sont les avalanches qui amènent la dissipation de l'énergie du système aux frontières. Puisque ces règles sont plus ou moins les mêmes, alors le flux extérieur est le même aussi.

Regardons maintenant un autre critère qui définit nos systèmes critiques autos-organisés, soit les lois de puissances dans la distribution des avalanches. Pour la pile de sable Abélienne, une fois les seuils coupés des données, on obtient effectivement une relation de puissance (2d), comme il était attendu. Dans la pile de sable dissipative, encore une fois avec les seuils coupés, on obtient une distribution plate de la taille des avalanches, démontrant que les avalanches ne sont plus capables d'établir des longues corrélations spatiales (6c). Puisque ce résultat est consistant avec la littérature, je vais considérer à partir de maintenant que ce système n'est pas critique. Pour la pile de sable sur des lignes minces, les choses se compliquent un peu. Lorsqu'on regarde la grille (50,4), la distribution se comporte comme prévu et est dirigé par une loi de puissance, en coupant les seuils (3c). Par contre, pour la grille (8,2), la distribution possède un pic dans le milieu de sa distribution ( $s \propto 10$ ), qui, en enlevant les seuils usuels, donne une distribution dirigé par aucune loi de puissance (3c). Ce résultat est très intéressant, car ça ne semble pas être le résultat d'une erreur dans le code, en effet, le modèle semble se comporter normalement si on augmente un peu la taille. Une des raisons possibles à cette absence de corrélations est que le modèle est trop petit pour établir de longues corrélations dans l'espace, réduisant alors l'utilité de l'outil qu'est la distribution des tailles d'avalanches pour déterminer si c'est bien un système critique auto-organisé. En regardant la section validation, il est aussi possible qu'il y ait une erreur (plus fondamentale que dans le code) dans la façon dont j'ai implémenté le modèle.

Passons maintenant aux résultats qui nous intéressent, c'est-à-dire la valeur des pentes pour la densité de puissance spectrale du nombre totale de grain de sable et la distribution de la taille des avalanches pour déterminer si nos modèles émettent du bruit rose. Puisque la distribution de la taille des avalanches n'est pas consistante à travers les modèles, certains ne suivant même pas une loi de puissance, j'en conclus que cette quantité n'est pas fiable pour comparer l'émissions de bruit pour nos différents modèles. En ce qui concerne la quantité totale de grains de sable, voici le tableau 1 qui résume les résultats des pentes. On peut voir que, comme prévu, le modèle Abélien ne semble pas émettre du bruit rose et est plus proche du mouvement brownien. Pour le modèle sur des lignes minces, la grille (8,2) semble émettre du bruit rose de façon assez consistante, alors que la grille (50,4) semble plutôt se rapprocher des résultats du modèle Abélien. On peut donc faire un parallèle possible entre le bruit rose et la géométrie du système,

Modèle	Observable	Pente ( $\alpha$ )
Abélien	Taille d'avalanche	$-1.231 \pm 0.001$
Abélien	Grain de sable totale	$-1.913 \pm 0.016$
Dissipatif	Taille d'avalanche	Aucune loi de puissance
Dissipatif	Grain de sable totale	$-1.361 \pm 0.013$
Lignes minces (8, 2)	Taille d'avalanche	Aucune loi de puissance
Lignes minces (8, 2)	Grain de sable totale	$-0.95 \pm 0.014$
Lignes minces (50, 4)	Taille d'avalanche	$-0.951 \pm 0.004$
Lignes minces (50, 4)	Grain de sable totale	$-1.638 \pm 0.018$

TABLEAU 1 – Résumé des résultats importants

ainsi que la taille. Pour ce qui est du modèle dissipatif, il y a certainement présence de bruit rose dans la quantité observée. Selon les auteurs, le bruit est dû à l'absence de corrélation (consistant avec notre distribution tailles d'avalanches) qui permet d'approximer le spectre comme étant une superposition linéaire des spectres locaux de chaque site  $(x, y)$ . Ainsi, on a un système qui n'est clairement pas critique auto-organisé, mais qui pourtant émet du bruit rose. Dans ce cas-ci, en plus, la taille du système ainsi que la forme est la même que pour le modèle Abélien, la seule différence étant que la frontière à gauche est fermée et le flux d'énergie est dirigée vers la droite (car on ajoute de l'énergie à partir de la gauche). L'argument de géométrie précédent pour l'apparition de bruits roses est donc affaibli. Une chose que le modèle des lignes minces avec grille (8, 2) et le modèle dissipatif ont en commun est qu'ils ne semblent pas avoir de longues corrélations dans la distribution de taille des avalanches. Bien que ce soit pour deux raisons complètement différentes, il y a peut-être là une origine au bruit rose, ce qui semble à l'encontre de la définition de ce bruit, le bruit  $1/f$  étant souvent associé avec de longues corrélations.

Pour revenir à la question initiale, à savoir si le bruit rose est implicite dans les systèmes critiques auto-organisés, la réponse simple est non. En effet, le modèle dissipatif qui en émet est un contre-argument assez puissant, de même que le modèle abélien qui n'en émet pas. Pour s'attarder encore un peu sur le modèle dissipatif, il est important de préciser que la dissipation ne détruit pas les propriétés d'auto-organisations du système. En effet, nous avons vu que de faire rouler la simulation pour que le modèle s'arrange vers une stabilité lorsqu'on change son équilibre en ajoutant de l'énergie. Alors, l'auto-organisation pourrait être un facteur dans l'apparition de bruit  $1/f$ , bien qu'encore une fois, le fait que le modèle Abélien n'en émet pas laisse planer un doute sur cette hypothèse.

## 6 Conclusion

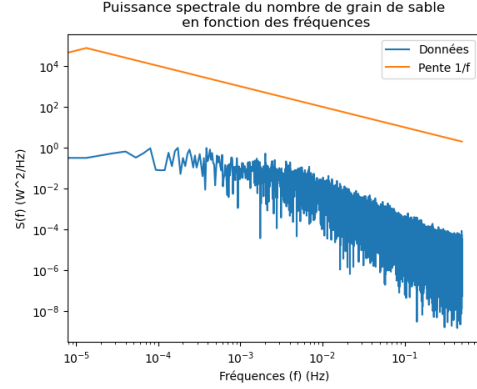
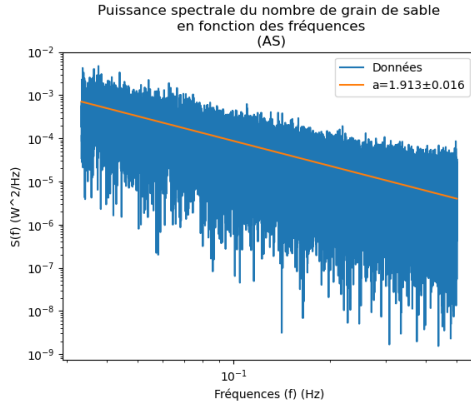
En conclusion, j'ai simulé trois modèles de pile de sable pour vérifier la présence de bruit rose dans deux observables, la distribution de probabilité de la taille des avalanches et la densité de puissance spectrale du nombre totale de grains de sables. Les résultats pour la taille des avalanches semblent mitigés, avec comme conclusion que cet observable n'exhibe pas assez souvent des lois de puissance pour pouvoir étudier la présence de bruit rose de manière fiable. Pour le nombre totale de grains de sable, la pile de sable Abélienne, qui est un système critique auto-organisé, ne montre pas de bruit rose, tandis que d'autres modèles non critiques en montrent (pile de sable dissipative). Le modèle sur les lignes minces montre constamment du bruit  $1/f$ , mais la validation échoué vient ternir la fiabilité des résultats. On peut donc conclure que la présence de bruit rose dans un système ne provient pas nécessairement du phénomène de criticalité auto-organisée. Pour ajouter à l'expérience, il pourrait être pertinent de modéliser des piles de sable avec des lattices de géométrie différentes, puisque apparemment cela joue sur l'apparition de bruit rose. Quelques exemples de modèles avec des géométries particulières dans la littérature sont déjà présentes, avec des simulations de piles de sable sur des lattices de Bethe et d'autres sur des lattices fractales. Il pourrait

aussi être intéressant d'augmenter le nombre d'observables et de vérifier l'apparition de bruit rose dans leur spectre, pour déterminer les critères qu'un observable doit avoir pour exhiber du bruit rose.

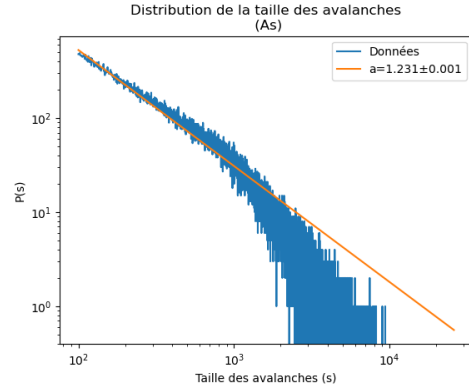
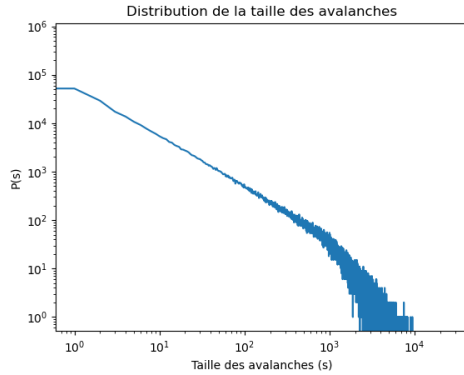


## Annexe

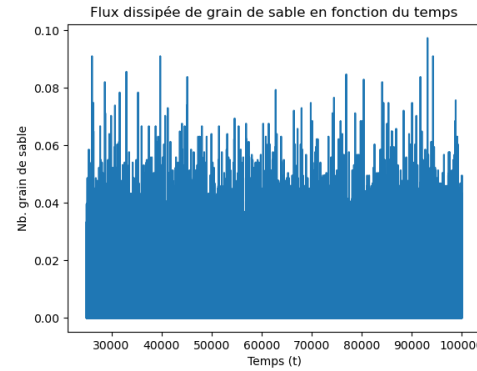
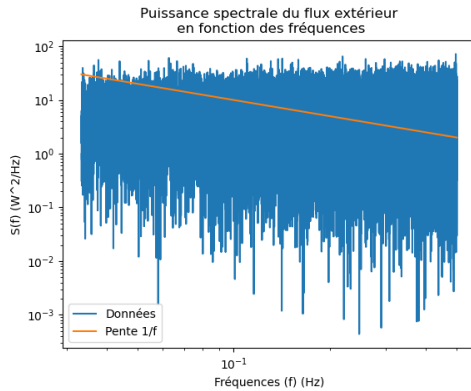
### 6.1 Graphiques



(a) Densité de puissance spectrale du nombre total de grains de sable en fonction de leur fréquence pour la pile Abélienne. Les seuils inférieurs et supérieurs ont été coupés pour regarder seulement la courbe  $1/f$ . On voit que la pente générale des données est plus petite que  $1/f$ . De plus, on voit clairement le seuil inférieur, et qui se rapproche plus du bruit brownien que du bruit rose.

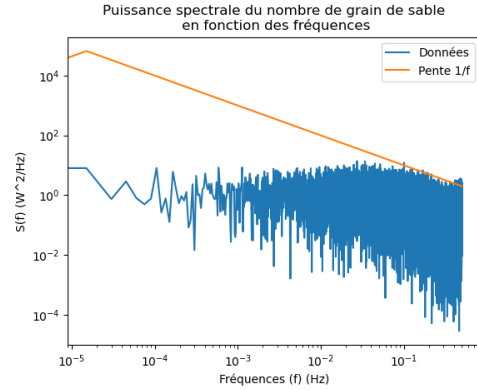
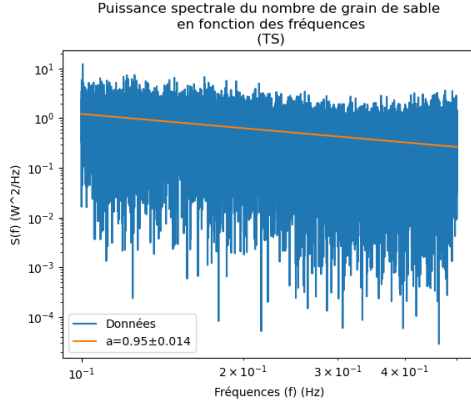


(c) Distribution de probabilité de la taille des avalanches. La pente calculée est de  $\alpha = -1.231 \pm 0.001$ , ce qui est très proche du bruit rose parfait et rentre dans notre intervalle de confiance,  $\alpha = 1 \pm 0.3$ . À noter que le seuil supérieur n'a pas été coupé complètement et a donc pu influencer en partie sur le résultat de la pente.

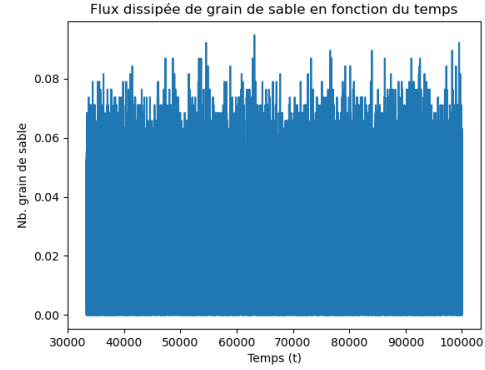
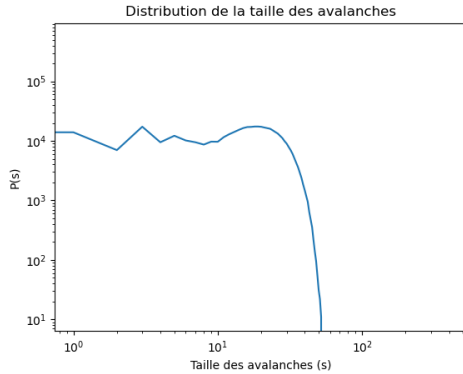


(e) Densité de puissance spectrale du flux dissipé aux frontières des grains de sable en fonction du temps. On remarque la présence d'invariance d'échelle, synonyme de la présence d'avalanches de toutes les tailles et critère dans la définition de système critique auto-organisé.

FIGURE 2 – Résultats de la pile de sable Abélienne



(a) Densité de puissance spectrale du nombre totale de grains de sable pour les lignes minces avec grille (8, 2). (b) Densité de puissance spectrale du nombre totale de grains de sable pour les lignes minces avec grille (8, 2). La partie régit par une loi de puissance, plus petite que pour la pile de sable Abélienne, a une pente de  $\alpha = -0.95 \pm 0.014$ . On voit le long plateau du seuil inférieur qu'il nous faudra couper pour calculer la pente



(c) Distribution de probabilité de la taille des avalanches. On voit que la distribution n'a pas de loi de puissance claire, avec les seuils inférieurs et supérieurs usuels collés ensemble. (d) Flux dissipées aux frontières des grains de sable en fonction du temps. On voit une invariance d'échelle avec toutes les tailles de flux dissipée, bien que la variance soit moindre que pour les autres modèles, dû à la taille du système.

FIGURE 3 – Résultat de la pile de sable sur des lignes minces avec grille (8, 2)

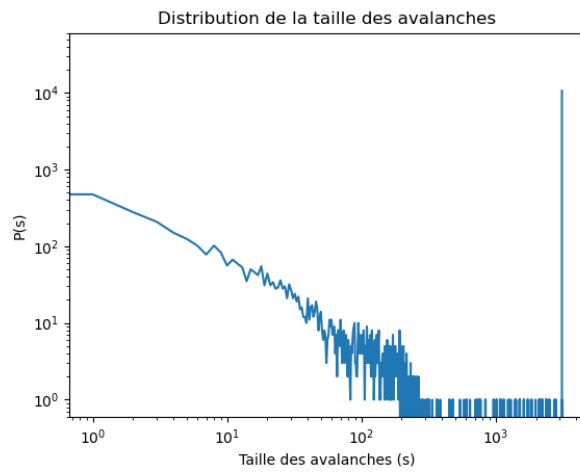
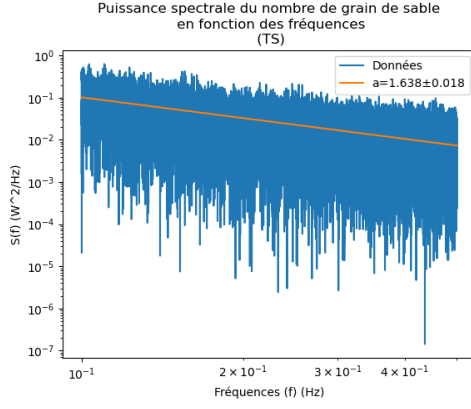
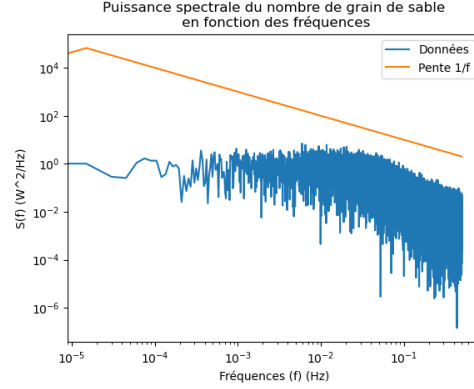


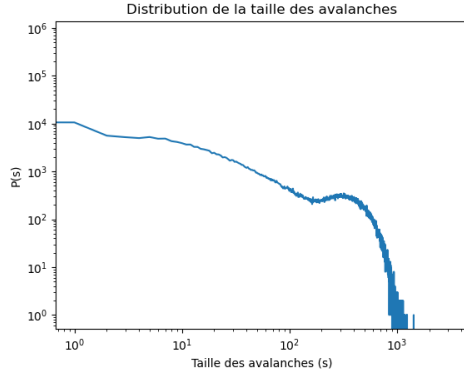
FIGURE 4 – Distribution de la taille des avalanches pour une pile de sable Abélienne sur une ligne mince  $(8, 2)$ . On voit que la distribution a un plateau comme seuil supérieur, ce qui est contraire à la norme.



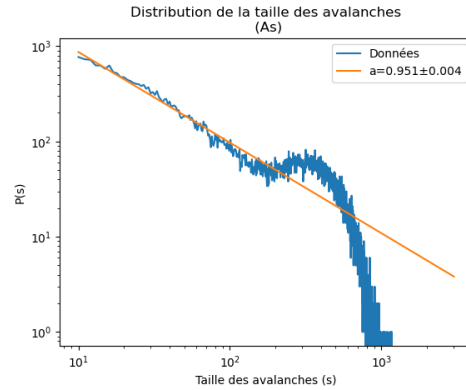
(a) Densité spectrale de puissance pour le nombre totale de grains de sable en fonction de leur fréquence sur la grille (50,4). La pente de la partie caractérisé par une loi de puissance est sensiblement plus prononcé que pour la ligne mince avec grille (8,2), et se rapproche plus des résultats de la pile de sable Abélienne, avec une pente de  $\alpha = -1.638 \pm 0.018$ .



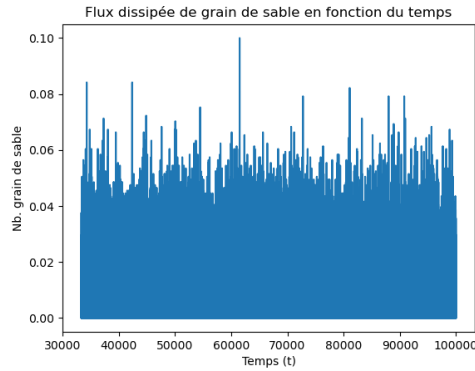
(b) Densité spectrale de puissance pour le nombre totale de grains de sable en fonction de leur fréquence sur la grille (50,4). On voit clairement le seuil inférieur en forme de plateau pour les basses fréquences, qu'il nous faudra couper pour calculer la pente.



(c) Distribution de la taille des avalanches pour la grille (50,4). La distribution est un entre deux des distributions pour les lignes minces avec grille (8,2), avec une bosse dans le milieu de la distribution et la distribution de la pile abélienne, avec une longue queue caractérisé par une loi de puissance.

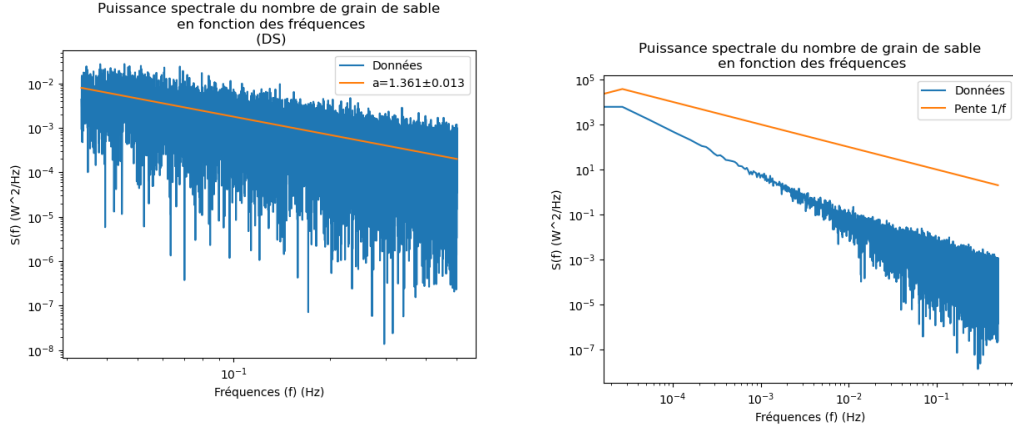


(d) Distribution de la taille des avalanches pour la grille (50,4). Les seuils supérieurs ont été coupés et la seule partie restante est la partie caractérisé par la loi de puissance avec pente  $\alpha = -0.951 \pm 0.004$ .

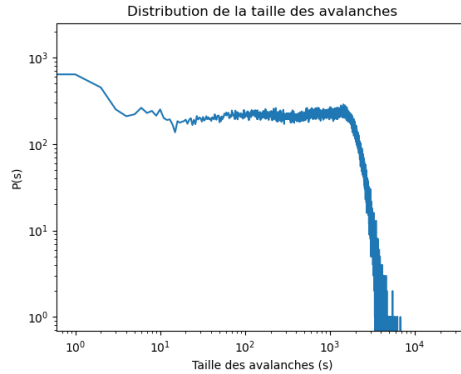


(e) Flux dissipées aux frontières des grains de sable en fonction du temps. On voit une invariance d'échelle avec toutes les tailles de flux dissipée.

FIGURE 5 – Résultats du modèle de pile de sable à lignes minces avec grille (50.4)

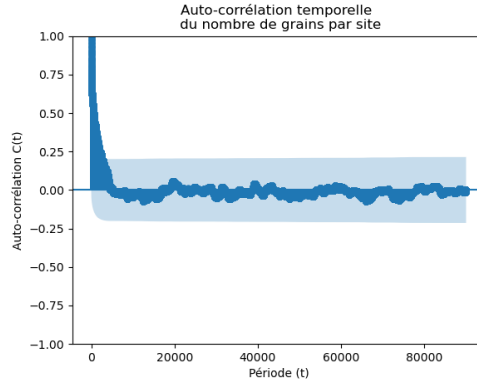


(a) Densité de puissance spectrale du nombre totale de grains de sable en fonction de leur fréquences. La pente (b) Densité de puissance spectrale du nombre totale de grains de sable en fonction de leur fréquences. On voit est de  $\alpha = -1.361 \pm 0.013$ , ce qui est très proche de que les seuils sont très petits et que la loi de puissance notre intervalle de confiance pour du bruit rose,  $\alpha =$  caractéristique s'étend sur un très grand intervalle de  $1 \pm 0.3$ .

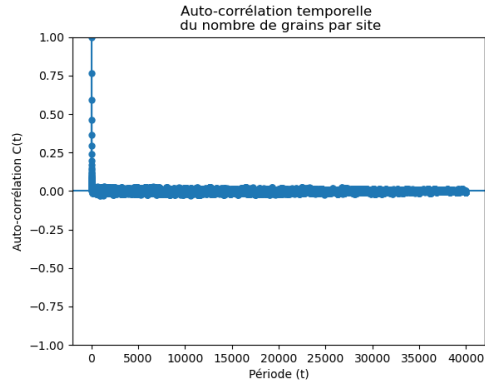


(c) Distribution de la taille des avalanches. On voit que les seuils inférieurs et supérieurs normaux se sont rapprochés, résultant en un plateau sur la majorité des fréquences et une absence générale de bruit rose.

FIGURE 6 – Résultat du modèle de la pile de sable dissipative

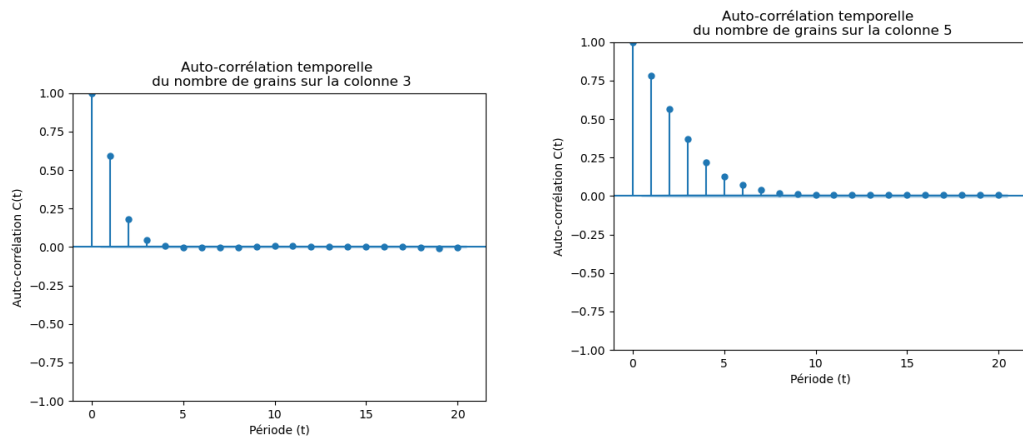


(a) Auto-corrélation du nombre de grains par site en fonction du temps pour deux sites aléatoires pour la pile de sable Abélienne. On voit que l'auto-corrélation descend rapidement mais ne tombe jamais à zéro, ce qui est une caractéristique des systèmes critiques autos-organisés



(b) Auto-corrélation du nombre de grains par site en fonction du temps pour deux sites aléatoires pour la pile de sable dissipative. On voit que l'auto-corrélation tombe rapidement à 0, conséquence de la dissipation propre au système. On peut considérer alors que ce modèle ne remplit pas les conditions d'un système critique auto-organisé.

FIGURE 7 – Auto-corrélation temporelle pour les modèles de la pile de sable Abélienne et la pile de sable dissipative



(a) Auto-corrélation temporelle de la colonne 3 du modèle sur des lignes minces. On voit que l'auto-corrélation descend très rapidement vers 0, avec de légères fluctuations que nous considérons insignifiantes. l'échelle de temps.

(b) Auto-corrélation temporelle de la colonne 5 du modèle sur des lignes minces. En comparaison avec (a), l'auto-corrélation descend moins rapidement. Par contre, si on compare avec la littérature, on est censé avoir une auto-corrélation beaucoup plus longue sur des lignes minces.

FIGURE 8 – Auto-corrélation temporelle pour la pile de sable sur des lignes minces



## Références

- [1] Autocorrelation - Wikipedia.
- [2] Pink noise - Wikipedia.
- [3] Self-organized criticality, November 2022. Page Version ID : 1123349936.
- [4] Spectral density, December 2022. Page Version ID : 1127215397.
- [5] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality : An explanation of the  $1/f$  noise. *Physical Review Letters*, 59(4) :381–384, July 1987.
- [6] Edwin Dalmaijer. esdalmaijer/abelian\_sandpile, October 2020. original-date : 2015-04-19T12 :59 :42Z.
- [7] Paolo De Los Rios and Yi-Cheng Zhang. Universal  $1/f$  Noise from Dissipative Self-Organized Criticality Models. *Physical Review Letters*, 82(3) :472–475, January 1999.
- [8] P H Diamond and Y Zhang.  $1/f$  noise and self-organized criticality.
- [9] ICTP Quantitative Life Sciences. Self-organized Criticality - 1, 2019.
- [10] Henrik Jeldtoft Jensen. *Self-Organized Criticality : Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems*. Cambridge University Press, 1 edition, January 1998.
- [11] S N Majumdar and D Dhar. Height correlations in the Abelian sandpile model. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 24(7) :L357–L362, April 1991.
- [12] Sergei Maslov, Chao Tang, and Yi-Cheng Zhang.  $1/f$  Noise in Bak-Tang-Wiesenfeld Models on Narrow Stripes. *Physical Review Letters*, 83(12) :2449–2452, September 1999.
- [13] Edoardo Milotti.  $1/f$  Noise : A pedagogical review. *Arxiv : Physics*, May 2002.
- [14] Gunnar Pruessner. *Self-Organised Criticality : Theory, Models and Characterisation*. Cambridge University Press, 1 edition, August 2012.
- [15] Lawrence M. Ward and Priscilla E. Greenwood.  $1/f$  noise. *Scholarpedia*, 2(12) :1537, December 2007.
- [16] Yi-Cheng Zhang. Scaling theory of self-organized criticality. *Physical Review Letters*, 63(5) :470–473, July 1989.