

# 匹配与覆盖、流与割

圆眼睛的阿凡提哥哥

2020 年 12 月 11 日

设二部图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , 其中  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2$ ,  $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$ ,  $\delta(v)$  为与点  $v$  相连的边的集合。若  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$  且其中任意两条边没有公共顶点, 即不存在长度  $\geq 2$  的路径, 则称  $\mathcal{M}$  为匹配 (matching), 其可表示为向量  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^{|\mathcal{E}|}$  满足对任意  $v \in \mathcal{V}$  有  $\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1$ 。若  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$  使得  $\mathcal{G}$  的每条边都至少有一个顶点属于  $\mathcal{C}$ , 则称  $\mathcal{C}$  为覆盖 (cover), 其可表示为向量  $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}_+^{|\mathcal{V}|}$  使得对任意  $(u, v) \in \mathcal{E}$  有  $z_u + z_v \geq 1$ 。

设  $\mathbf{A} \in \{0, 1\}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$  是二部图  $\mathcal{G}$  对应的关联矩阵, 即  $a_{v,e} = 1_{e \in \delta(v)}$ , 则

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathcal{V}, \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 &\iff \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{e} \\ \forall (u, v) \in \mathcal{E}, z_u + z_v \geq 1 &\iff \mathbf{A}^\top \mathbf{z} \geq \mathbf{e} \end{aligned}$$

## 1 最大匹配

所有匹配中, 势最大的称为最大匹配, 求解最大匹配可形式化成

$$\max_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{e}^\top \mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^{|\mathcal{E}|}, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{e} \} \quad (1)$$

由于第一个约束的存在, 这是一个整数规划, 难以直接求解, 将可行域放松成连续域可得线性规划

$$\max_{\mathbf{x}} \{ \mathbf{e}^\top \mathbf{x} : \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{e} \} \quad (2)$$

注意  $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{e}\} \iff [\mathbf{A}; -\mathbf{I}]\mathbf{x} \leq [\mathbf{e}; \mathbf{0}]$ , 由于二部图的关联矩阵必然是全幺模矩阵, 故  $[\mathbf{A}; -\mathbf{I}]$  也是全幺模矩阵, 又  $[\mathbf{e}; \mathbf{0}]$  是整数向量, 故凸多面体  $\{\mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{e}\}$  的极点是整数向量。由于线性规划必然在极点处取最优, 因此式 (2) 的最优解就是式 (1) 的最大匹配。

上述将离散整数约束替换为连续实数约束的操作, 其实是将可行域由匹配集合扩大成其凸包。

**定理 1.** 记匹配  $\mathcal{M}$  对应的表示向量为  $\mathbf{x}^{(\mathcal{M})}$ ,  $\mathcal{P}(\mathcal{G}) \triangleq \text{conv}\{\mathbf{x}^{(\mathcal{M}_1)}, \mathbf{x}^{(\mathcal{M}_2)}, \dots\}$ ,  $\mathcal{Q}(\mathcal{G})$  定义为:

$$\mathcal{Q}(\mathcal{G}) = \{ \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{e} \} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|} \mid \forall v \in \mathcal{V}, \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \right\}$$

那么  $\mathcal{P}(\mathcal{G}) = \mathcal{Q}(\mathcal{G})$ 。

证明. 正向比较简单, 对任意  $\mathbf{x} = \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} \mathbf{x}^{(\mathcal{M}_i)} \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ , 易知

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = \sum_{e \in \delta(v)} \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} x_e^{(\mathcal{M}_i)} = \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} \underbrace{\sum_{e \in \delta(v)} x_e^{(\mathcal{M}_i)}}_{\leq 1} \leq \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} = 1$$

其中不等号是因为对任意匹配, 点  $v$  相连的边中最多只有一条属于该匹配。

反向较为麻烦, 对任意  $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}(\mathcal{G})$ , 设  $\text{supp}(\mathbf{x}) = \{e \in \mathcal{E} \mid x_e > 0\}$ 。下面对  $|\text{supp}(\mathbf{x})|$  进行归纳, 若  $|\text{supp}(\mathbf{x})| = 0$ , 则  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  就是零匹配; 若  $|\text{supp}(\mathbf{x})| = 1$ , 显然  $\mathbf{x}$  可以表示成零匹配和单边匹配的凸组合。若  $|\text{supp}(\mathbf{x})| \geq 2$ , 分两种情况讨论:

- $\text{supp}(\mathbf{x})$  不是匹配, 则  $\text{supp}(\mathbf{x})$  包含长度  $\geq 2$  的路径, 不妨就设为  $v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_2} v_3$ , 由于  $x_{e_1}, x_{e_2} > 0$ , 故  $x_{e_1}, x_{e_2} < 1$ , 否则  $\sum_{e \in \delta(v_2)} x_e = x_{e_1} + x_{e_2} > 1$ 。引入

$$d_e = \begin{cases} 1 & e = e_1 \\ -1 & e = e_2 \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

现考虑  $\mathbf{x} + \epsilon \mathbf{d}$ , 当  $\epsilon$  增大时,  $x_{e_1} + \epsilon d_{e_1}$  增大,  $x_{e_2} + \epsilon d_{e_2}$  减小, 当  $x_{e_2} + \epsilon d_{e_2}$  变为零时, 记此时的  $\epsilon$  为  $\epsilon_1$ , 定义  $\mathbf{x}_1 \triangleq \mathbf{x} + \epsilon_1 \mathbf{d}$ ; 同理对于  $\mathbf{x} - \epsilon \mathbf{d}$ , 当  $\epsilon$  增大时,  $x_{e_1} - \epsilon d_{e_1}$  减小,  $x_{e_2} - \epsilon d_{e_2}$  增大, 当  $x_{e_1} - \epsilon d_{e_1}$  变为零时, 记此时的  $\epsilon$  为  $\epsilon_2$ , 定义  $\mathbf{x}_2 \triangleq \mathbf{x} - \epsilon_2 \mathbf{d}$ , 那么

$$\epsilon_2 \epsilon_1 \mathbf{d} = \epsilon_2 \mathbf{x}_1 - \epsilon_2 \mathbf{x} = \epsilon_1 \mathbf{x} - \epsilon_1 \mathbf{x}_2 \implies \mathbf{x} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \mathbf{x}_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \mathbf{x}_2 = \text{conv}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$$

注意  $|\text{supp}(\mathbf{x}_1)| = |\text{supp}(\mathbf{x}_2)| = |\text{supp}(\mathbf{x})| - 1$ , 由归纳假设知  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ , 于是  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}(\mathcal{G})$ 。

- $\text{supp}(\mathbf{x})$  是匹配, 不妨设  $\text{supp}(\mathbf{x}) = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$  且  $x_{e_1} \leq x_{e_2} \leq x_{e_3} \leq \dots \leq x_{e_n}$ , 定义

$$\mathcal{M}_i \triangleq \{e_i, e_{i+1}, \dots, e_n\}, \quad \mathbf{x}^{(\mathcal{M}_i)} = [\underbrace{0, \dots, 0}_{1:i-1}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{i:n}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1:|\mathcal{E}|}], \quad i \in [n]$$

则

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{bmatrix} x_{e_1} \\ x_{e_2} \\ x_{e_3} \\ \vdots \\ x_{e_n} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{e_1} \\ x_{e_1} \\ x_{e_1} \\ \vdots \\ x_{e_1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ x_{e_2} - x_{e_1} \\ x_{e_2} - x_{e_1} \\ \vdots \\ x_{e_2} - x_{e_1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{e_3} - x_{e_2} \\ \vdots \\ x_{e_3} - x_{e_2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \dots \\ &= x_{e_1} \mathbf{x}^{(\mathcal{M}_1)} + (x_{e_2} - x_{e_1}) \mathbf{x}^{(\mathcal{M}_2)} + (x_{e_3} - x_{e_2}) \mathbf{x}^{(\mathcal{M}_3)} \\ &\quad + \dots + (x_{e_n} - x_{e_{n-1}}) \mathbf{x}^{(\mathcal{M}_n)} + (1 - x_{e_n}) \mathbf{0} \in \mathcal{P}(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

□

由定义  $\mathcal{P}(\mathcal{G}) = \text{conv}\{\mathbf{x}^{(\mathcal{M}_1)}, \mathbf{x}^{(\mathcal{M}_2)}, \dots\}$  知  $\mathcal{P}(\mathcal{G})$  的任意极点都是  $\mathcal{G}$  的匹配, 反过来结论也成立。

**定理 2.**  $\mathcal{G}$  的任意匹配都是  $\mathcal{P}$  的极点。

**证明.** 对任意匹配  $\mathcal{M}$  和非零向量  $\mathbf{d}$ , 不妨设  $d_e \neq 0$ , 注意  $x_e^{(\mathcal{M})} \in \{0, 1\}$ , 因此  $x_e^{(\mathcal{M})} \pm \epsilon d_e$  总有一个不属于  $[0, 1]$ , 即  $\mathbf{x}^{(\mathcal{M})} \pm \epsilon \mathbf{d}$  总有一个不属于  $\mathcal{P}$ , 故  $\mathbf{x}^{(\mathcal{M})}$  是  $\mathcal{P}$  的极点。□

## 2 完美匹配

若匹配  $\mathcal{M}^*$  使得在子图  $(\mathcal{V}, \mathcal{M}^*)$  中, 所有点都有且仅有一条相连的边, 则称为完美匹配 (perfect matching)。完美匹配可表示为向量  $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}_+^{|\mathcal{E}|}$  满足对任意  $v \in \mathcal{V}$  有  $\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$ , 显然完美匹配是匹配的真子集。

**定理 3.** 设  $\mathcal{P}^*(\mathcal{G})$  为  $\mathcal{G}$  的所有完美匹配构成的凸包,  $\mathcal{Q}^*(\mathcal{G})$  定义为:

$$\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}) = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{e}\} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|} \mid \forall v \in \mathcal{V}, \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1 \right\}$$

则  $\mathcal{P}^*(\mathcal{G}) = \mathcal{Q}^*(\mathcal{G})$ 。

**证明.** 一方面, 对任意  $\mathbf{x} = \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i^*)} \mathbf{x}^{(\mathcal{M}_i^*)} \in \mathcal{P}^*(\mathcal{G})$ , 易知

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = \sum_{e \in \delta(v)} \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i^*)} x_e^{(\mathcal{M}_i^*)} = \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i^*)} \sum_{e \in \delta(v)} x_e^{(\mathcal{M}_i^*)} = \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i^*)} = 1 \implies \mathbf{x} \in \mathcal{Q}^*(\mathcal{G})$$

另一方面, 对任意  $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{G}) = \mathcal{P}(\mathcal{G})$ , 设  $\mathbf{x} = \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} \mathbf{x}^{(\mathcal{M}_i)}$ 。用反证法, 若其凸组合表示中存在不完美匹配  $\mathcal{M}_j$ , 设  $v$  不是  $\mathcal{M}_j$  中边的顶点, 则

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = \sum_{e \in \delta(v)} \sum_{i \in [n] \setminus \{j\}} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} x_e^{(\mathcal{M}_i)} = \sum_{i \in [n] \setminus \{j\}} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} \sum_{e \in \delta(v)} x_e^{(\mathcal{M}_i)} \leq \sum_{i \in [n] \setminus \{j\}} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} < 1$$

这和  $\mathcal{Q}^*(\mathcal{G})$  的定义矛盾, 故  $\mathbf{x}$  的凸组合表示中不存在不完美匹配, 即  $\mathbf{x} \in \mathcal{P}^*(\mathcal{G})$ 。□

**定理 4.**  $\mathcal{G}$  的任意完美匹配都是  $\mathcal{P}^*$  的极点。

**证明.** 完美匹配也是匹配, 因此是  $\mathcal{P}$  的极点, 故无法由  $\mathcal{P}$  中其它点的凸组合表示, 又  $\mathcal{P}^* \subseteq \mathcal{P}$ , 因此也无法由  $\mathcal{P}^*$  中其它点的凸组合表示, 从而也是  $\mathcal{P}^*$  的极点。□

对于完全二部图  $\mathcal{K}_{n,n}$  有  $|\mathcal{E}| = n^2$ , 对任意  $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}^*(\mathcal{K}_{n,n})$  有

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^{n^2}, \forall v \in \mathcal{V}, \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$$

又每个点恰有  $n$  条相连的边, 因此  $\mathbf{x}$  也可以写成一个  $n \times n$  的双随机矩阵 (所有行和、列和均为 1)。另一方面, 对于完美匹配  $\mathcal{M}$ , 每个点有且仅有一条相连的边, 其对应的  $\mathbf{x}^{(\mathcal{M})}$  可以写成置换矩阵 (每行、每列有且仅有一个 1, 其余为零), 由定理 4 知双随机矩阵集合的极点是置换矩阵, 这就是 Birkhoff-von Neumann 定理。

### 3 König 定理

前文已述最大匹配问题可放松成线性规划

$$\max_x \{e^\top x : x \geq 0, Ax \leq e\}$$

引入 Lagrange 对偶函数  $\mathcal{L}(x, y, z) = e^\top x + y^\top x - z^\top (Ax - e)$ , 易知

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = e + y - A^\top z = 0 \implies A^\top z - e = y \geq 0$$

故对偶问题为

$$\min_z \{e^\top z : z \geq 0, A^\top z \geq e\} \quad (3)$$

显然这是将最小点覆盖问题

$$\min_z \{e^\top z : z \in \mathbb{Z}_+^{|\mathcal{V}|}, A^\top z \geq e\} \quad (4)$$

的离散可行域放松成连续域得到的线性规划。同理由  $\{z \geq 0, A^\top z \geq e\} \iff [-A^\top; -\mathbf{I}]z \leq [-e; 0]$  以及  $A$  是全幺模矩阵知凸多面体  $\{z \mid z \geq 0, A^\top z \geq e\}$  的极点是整数向量。由于线性规划必然在极点处取最优, 因此式 (3) 的最优解就是式 (4) 的最小点覆盖。

综上, 最大匹配、最小点覆盖这两类整数规划问题, 其最优解就是将整数约束放松后导出的线性规划的最优解, 且这两类相应的线性规划互为对偶问题。

**定理 5 (König).** 对于二部图  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , 设最大匹配问题的最优值为  $\max\text{-matching}(\mathcal{G})$ , 最小点覆盖问题的最优值为  $\min\text{-vertex-covering}(\mathcal{G})$ , 则有  $\max\text{-matching}(\mathcal{G}) = \min\text{-vertex-covering}(\mathcal{G})$ 。

**证明.**  $\min\text{-vertex-covering}(\mathcal{G}) \geq \max\text{-matching}(\mathcal{G})$  是显然的, 因为对最大匹配中的任意一条边, 至少要覆盖其中一个顶点。

下面证明另一个方向, 若  $\mathcal{E} = \emptyset$ , 则  $\max\text{-matching}(\mathcal{G}) = \min\text{-vertex-covering}(\mathcal{G}) = 0$ , 故不妨设  $\mathcal{E}$  非空。对  $|\mathcal{V}|$  进行归纳, 若  $|\mathcal{V}| = 2$ , 易知  $\max\text{-matching}(\mathcal{G}) = \min\text{-vertex-covering}(\mathcal{G}) = 1$ 。若  $|\mathcal{V}| > 2$ , 设  $z^*$  是最小点覆盖问题的最优解, 由于存在点  $v$  使得  $z_v^* > 0$ , 故根据互补松弛条件可得

$$z_v^*(A_{v,:}x^* - 1) = 0 \implies 1 = A_{v,:}x^* = \sum_{e \in \delta(v)} x_e^*$$

又原问题的最优解  $x^*$  是最大匹配, 故  $v$  出现在所有的最大匹配中, 于是

$$\max\text{-matching}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) = \max\text{-matching}(\mathcal{G}) - 1$$

由归纳假设知  $\max\text{-matching}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) = \min\text{-vertex-covering}(\mathcal{G} \setminus \{v\})$ , 于是

$$\begin{aligned} \min\text{-vertex-covering}(\mathcal{G}) &\leq \min\text{-vertex-covering}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) + 1 \\ &= \max\text{-matching}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) + 1 \\ &= \max\text{-matching}(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

□

König 定理还可进一步推广, 设  $b$ -匹配对应的表示向量满足对任意  $v \in \mathcal{V}$  有  $\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq b_v$ ;  $c$ -点覆盖对应的表示向量满足对任意  $e = (u, v) \in \mathcal{E}$  有  $z_u + z_v \geq c_e$ , 易知有

$$\max_x \{c^\top x : x \geq 0, Ax \leq b\} = \min_z \{b^\top z : z \geq 0, A^\top z \geq c\}$$

即最大  $c$ -加权  $b$ -匹配等于最小  $b$ -加权  $c$ -点覆盖。

## 4 流与割

类似于最大匹配和最小点覆盖, 最大流和最小割也是一组对偶问题。给定有向流网络  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ , 源点  $s$ 、汇点  $t$ , 设  $\delta_{\text{in}}(v)$  是以点  $v$  为终点的入边集合、 $\delta_{\text{out}}(v)$  是以点  $v$  为起点的出边集合,  $\mathbf{A} \in \{0, \pm 1\}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$  是  $\mathcal{G}$  对应的关联矩阵, 即

$$a_{v,e} = \begin{cases} 1 & e \in \delta_{\text{in}}(v) \\ -1 & e \in \delta_{\text{out}}(v) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$\mathbf{A}_{\overline{st}}$  为  $\mathbf{A}$  去掉  $s, t$  对应行的子矩阵, 注意有向流网络中源点  $s$  只有出边、汇点  $t$  只有入边, 因此  $\mathbf{A}_{\overline{st}}$  其实也是  $\mathcal{G}$  删除  $s, t$  及其所有相连边后的有向图的关联矩阵, 故  $\mathbf{A}_{\overline{st}}$  是全幺模矩阵。

最大流问题可形式化为线性规划:

$$\max_x \{\mathbf{A}_t x : \mathbf{0} \leq x \leq c, \mathbf{A}_{\overline{st}} x = \mathbf{0}\}$$

其中  $\mathbf{A}_t$  是  $\mathbf{A}$  中汇点  $t$  对应的行,  $\mathbf{0} \leq x \leq c$  约束流的上下界,  $\mathbf{A}_{\overline{st}} x = \mathbf{0}$  约束非源点、汇点的流量要守恒。注意

$$\{x \mid \mathbf{0} \leq x \leq c, \mathbf{A}_{\overline{st}} x = \mathbf{0}\} \iff [\mathbf{A}_{\overline{st}}; -\mathbf{A}_{\overline{st}}; \mathbf{I}; -\mathbf{I}]x \leq [\mathbf{0}; \mathbf{0}; c; \mathbf{0}]$$

由  $\mathbf{A}_{\overline{st}}$  是全幺模矩阵知  $[\mathbf{A}_{\overline{st}}; -\mathbf{A}_{\overline{st}}; \mathbf{I}; -\mathbf{I}]$  也是全幺模矩阵, 若流量上限  $c$  是整数向量, 则可行域  $\{x \mid \mathbf{0} \leq x \leq c, \mathbf{A}_{\overline{st}} x = \mathbf{0}\}$  的极点也是整数向量, 即最大流是整数流。

引入 Lagrange 对偶函数  $\mathcal{L}(x, y, z, w) = \mathbf{A}_t x + y^\top x - z^\top (x - c) - w_{\overline{st}}^\top \mathbf{A}_{\overline{st}} x$ , 易知

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = \mathbf{A}_t^\top + y - z - \mathbf{A}_{\overline{st}}^\top w_{\overline{st}} = \mathbf{0} \implies \mathbf{A}_{\overline{st}}^\top w_{\overline{st}} + z \geq \mathbf{A}_t^\top$$

故对偶问题为

$$\min_{w_{\overline{st}}, z} \{c^\top z : z \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{\overline{st}}^\top w_{\overline{st}} + z \geq \mathbf{A}_t^\top\}$$

注意

$$\{z \mid z \geq \mathbf{0}, \mathbf{A}_{\overline{st}}^\top w_{\overline{st}} + z \geq \mathbf{A}_t^\top\} \iff [-\mathbf{A}_{\overline{st}}^\top, -\mathbf{I}; \mathbf{0}, -\mathbf{I}][w_{\overline{st}}; z] \leq [-\mathbf{A}_t^\top; \mathbf{0}]$$

由  $\mathbf{A}_{\overline{st}}$  是全幺模矩阵知  $[-\mathbf{A}_{\overline{st}}^\top, -\mathbf{I}; \mathbf{0}, -\mathbf{I}]$  也是全幺模矩阵, 故对偶问题的最优解  $w_{\overline{st}}^*, z^*$  也是整数向量。

$\mathbf{w}_{st}^*$  的维度为  $|\mathcal{V}|-2$ , 与  $\mathbf{A}_{st}^\top$  的行对应, 现添加  $w_s^* = 0, w_t^* = -1$  将其扩充为  $\mathbf{w}^*$ , 与  $\mathbf{A}$  的行对应, 于是  $\mathbf{A}^\top \mathbf{w}^* + \mathbf{z}^* = \mathbf{A}_{st}^\top \mathbf{w}_{st}^* - \mathbf{A}_t^\top + \mathbf{z}^* \geq \mathbf{0}$ 。由于  $\mathbf{c}$  非负, 故  $\mathbf{z}^*$  应尽量的小, 从而  $\mathbf{z}^* = \max\{\mathbf{0}, -\mathbf{A}^\top \mathbf{w}^*\}$ , 即对  $e = (u, v) \in \mathcal{E}$  有  $z_e^* = \max\{0, w_u^* - w_v^*\}$ 。

定义  $\mathcal{S} = \{v \in \mathcal{V} \mid w_v^* \geq 0\}$ ,  $\bar{\mathcal{S}} = \mathcal{V} \setminus \mathcal{S}$ ,  $\delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}} \triangleq \{(u, v) \in \mathcal{E} \mid u \in \mathcal{S}, v \in \bar{\mathcal{S}}\}$  为所有起点属于  $\mathcal{S}$ 、终点属于  $\bar{\mathcal{S}}$  的边的集合。显然  $s \in \mathcal{S}, t \in \bar{\mathcal{S}}$ , 在将所有  $\delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}}$  中的边删除后,  $s, t$  不再连通, 因此  $\delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}}$  称为割 (cut)。

由于  $w_v^*$  都是整数, 因此对任意  $e = (u, v) \in \delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}}$  有  $z_e^* \geq w_u^* - w_v^* \geq 1$ , 因此

$$\mathbf{c}^\top \mathbf{z}^* \geq \sum_{e \in \delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}}} c_e z_e^* \geq \sum_{e \in \delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}}} c_e \geq \sum_{e \in \delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}}} x_e^* \geq \sum_{e \in \delta_{\text{in}}(t)} x_e^* = \mathbf{A}_t \mathbf{x}^* \geq \mathbf{c}^\top \mathbf{z}^*$$

其中第一个不等号是因为  $z_e^* \geq 0$ ; 第二个不等号是因为对任意  $e \in \delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}}$  有  $z_e^* \geq 1$ ; 第三个不等号是因为  $c_e$  是边  $e$  的流量上限; 第四个不等号是因为从  $\mathcal{S}$  到  $\bar{\mathcal{S}}$  的流量未必会全部进入汇点, 可能会有一部分通过从  $\bar{\mathcal{S}}$  到  $\mathcal{S}$  的边再折回  $\mathcal{S}$ ; 第五个不等号是因为弱对偶性。

综上所述的不等号都取等号, 由此可以得到一些有趣的结论:

- 根据第一个不等号取等号, 对任意  $e \notin \delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}}$  有  $z_e^* = 0$ , 即对任意  $\mathcal{S}$  内部的边  $e$ 、 $\bar{\mathcal{S}}$  内部的边  $e$ 、 $\delta_{\bar{\mathcal{S}}, \mathcal{S}}$  中的边  $e$ , 都有  $z_e^* = 0$ ;
- 根据第二个不等号取等号, 对任意  $e = (u, v) \in \delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}}$  有  $z_e^* = 1$ , 故只可能是  $w_u^* = 0, w_v^* = -1$ , 于是对任意  $\mathcal{S}$  内部的边  $e = (p, u)$ , 必然有  $w_p^* = 0$ , 否则  $z_e^* \geq w_p^* - w_u^* > 0$ , 与前一个结论矛盾, 依此类推, 对所有  $\mathcal{S}$  中的点  $u$  都有  $w_u^* = 0$ 。同理, 对所有  $\bar{\mathcal{S}}$  中的点  $v$  都有  $w_v^* = -1$ ;
- 根据第三个不等号取等号, 当流量达到最大时,  $\delta_{\mathcal{S}, \bar{\mathcal{S}}}$  中的每条边上的流量都达到上限, 这个也可由互补松弛条件  $z_e(x_e - c_e) = 0$  得到:  $z_e^* = 1 > 0 \implies x_e^* = c_e$ ;
- 根据第四个不等号取等号, 从  $\mathcal{S}$  到  $\bar{\mathcal{S}}$  的流量全部进入  $t$ , 不存在折回  $\mathcal{S}$  的情况, 即  $\delta_{\bar{\mathcal{S}}, \mathcal{S}}$  中的每条边上的流量都是零, 这个也可由互补松弛条件  $y_e x_e = 0$  得到: 注意此时  $z_e^* = 0 > -1 = w_u^* - w_v^*$ , 故  $y_e^* = z_e^* - (w_u^* - w_v^*) > 0$ , 从而  $x_e^* = 0$ 。