最大匹配与最小点覆盖

圆眼睛的阿凡提哥哥

2020 年 12 月 11 日

设二部图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，其中 $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \uplus \mathcal{V}_2$，$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2$，$\delta(v)$ 为与点 v 相连的边的集合。若 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{E}$ 且其中任意两条边没有公共顶点，即不存在长度 ≥ 2 的路径，则称 $\mathcal{M}$ 为匹配 (matching)，其可表示为向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_+^{|\mathcal{E}|}$ 满足对任意 $v \in \mathcal{V}$ 有 $\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1$。若 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{V}$ 使得 $\mathcal{G}$ 的每条边都至少有一个顶点属于 $\mathcal{C}$，则称 $\mathcal{C}$ 为覆盖 (cover)，其可表示为向量 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}_+^{|\mathcal{V}|}$ 使得对任意 $(u, v) \in \mathcal{E}$ 有 $z_u + z_v \geq 1$。

设 $\mathbf{A} \in \{0, 1\}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$ 是二部图 $\mathcal{G}$ 对应的关联矩阵，即 $a_{v,e} = 1_{e \in \delta(v)}$，则

$$\forall v \in \mathcal{V},\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \Longleftrightarrow \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{e}$$

$$\forall (u, v) \in \mathcal{E},\ z_u + z_v \geq 1 \Longleftrightarrow \mathbf{A}^\top \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{e}$$

1 最大匹配

所有匹配中，势最大的称为最大匹配，求解最大匹配可形式化成

$$\max_{\boldsymbol{x}} \{\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_+^{|\mathcal{E}|},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{e}\} \tag{1}$$

由于第一个约束的存在，这是一个整数规划，难以直接求解，将可行域放松成连续域可得线性规划

$$\max_{\boldsymbol{x}} \{\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{e}\} \tag{2}$$

注意 $\{\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{e}\} \Longleftrightarrow [\mathbf{A}; -\mathbf{I}]\boldsymbol{x} \leq [\boldsymbol{e}; \mathbf{0}]$，由于二部图的关联矩阵必然是全幺模矩阵，故 $[\mathbf{A}; -\mathbf{I}]$ 也是全幺模矩阵，又 $[\boldsymbol{e}; \mathbf{0}]$ 是整数向量，故凸多面体 $\{\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{e}\}$ 的极点是整数向量。由于线性规划必然在极点处取最优，因此式 (2) 的最优解就是式 (1) 的最大匹配。

上述将离散整数约束替换为连续实数约束的操作，其实是将可行域由匹配集合扩大成其凸包。

定理 1. 记匹配 $\mathcal{M}$ 对应的表示向量为 $\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M})}$，$\mathcal{P}(\mathcal{G}) \triangleq \operatorname{conv}\{\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_1)}, \boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_2)}, \ldots\}$，$\mathcal{Q}(\mathcal{G})$ 定义为：

$$\mathcal{Q}(\mathcal{G}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{e}\} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|} \mid \forall v \in \mathcal{V},\ \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1\right\}$$

那么 $\mathcal{P}(\mathcal{G}) = \mathcal{Q}(\mathcal{G})$。

证明. 正向比较简单，对任意 $\boldsymbol{x}=\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_i)}\in\mathcal{P}(\mathcal{G})$，易知

$$\sum_{e\in\delta(v)}x_e=\sum_{e\in\delta(v)}\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}x_e^{(\mathcal{M}_i)}=\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}\underbrace{\sum_{e\in\delta(v)}x_e^{(\mathcal{M}_i)}}_{\leq 1}\leq\sum_{i\in[n]}\alpha^{(\mathcal{M}_i)}=1$$

其中不等号是因为对任意匹配，点 v 相连的边中最多只有一条属于该匹配。

反向较为麻烦，对任意 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{Q}(\mathcal{G})$，设 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})=\{e\in\mathcal{E}\mid x_e>0\}$。下面对 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})|$ 进行归纳，若 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})|=0$，则 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 就是零匹配；若 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})|=1$，显然 $\boldsymbol{x}$ 可以表示成零匹配和单边匹配的凸组合。若 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})|\geq 2$，分两种情况讨论：

- $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})$ 不是匹配，则 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})$ 包含长度 ≥ 2 的路径，不妨就设为 $v_1\xrightarrow{e_1}v_2\xrightarrow{e_2}v_3$，由于 $x_{e_1},x_{e_2}>0$，故 $x_{e_1},x_{e_2}<1$，否则 $\sum_{e\in\delta(v_2)}x_e=x_{e_1}+x_{e_2}>1$。引入

$$d_e=\begin{cases}1 & e=e_1\\ -1 & e=e_2\\ 0 & \text{o.w.}\end{cases}$$

  现考虑 $\boldsymbol{x}+\epsilon\boldsymbol{d}$，当 ϵ 增大时，$x_{e_1}+\epsilon d_{e_1}$ 增大，$x_{e_2}+\epsilon d_{e_2}$ 减小，当 $x_{e_2}+\epsilon d_{e_2}$ 变为零时，记此时的 ϵ 为 ϵ_1，定义 $\boldsymbol{x}_1\triangleq\boldsymbol{x}+\epsilon_1\boldsymbol{d}$；同理对于 $\boldsymbol{x}-\epsilon\boldsymbol{d}$，当 ϵ 增大时，$x_{e_1}-\epsilon d_{e_1}$ 减小，$x_{e_2}-\epsilon \boldsymbol{d}_{e_2}$ 增大，当 $x_{e_1}-\epsilon\boldsymbol{d}_{e_1}$ 变为零时，记此时的 ϵ 为 ϵ_2，定义 $\boldsymbol{x}_2\triangleq\boldsymbol{x}-\epsilon_2\boldsymbol{d}$，那么

$$\epsilon_2\epsilon_1\boldsymbol{d}=\epsilon_2\boldsymbol{x}_1-\epsilon_2\boldsymbol{x}=\epsilon_1\boldsymbol{x}-\epsilon_1\boldsymbol{x}_2\Longrightarrow\boldsymbol{x}=\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}\boldsymbol{x}_1+\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2}\boldsymbol{x}_2=\operatorname{conv}\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\}$$

  注意 $|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}_1)|=|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x}_2)|=|\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})|-1$，由归纳假设知 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathcal{P}(\mathcal{G})$，于是 $\boldsymbol{x}\in\mathcal{P}(\mathcal{G})$。
- $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})$ 是匹配，不妨设 $\operatorname{supp}(\boldsymbol{x})=\{e_1,e_2,e_3,\dots,e_n\}$ 且 $x_{e_1}\leq x_{e_2}\leq x_{e_3}\leq\cdots\leq x_{e_n}$，定义

$$\mathcal{M}_i\triangleq\{e_i,e_{i+1},\dots,e_n\},\quad \boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_i)}=[\underbrace{0,\dots,0}_{1:i-1},\underbrace{1,1,\dots,1}_{i:n},\underbrace{0,\dots,0}_{n+1:|\mathcal{E}|}],\quad i\in[n]$$

  则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_{e_1}\\x_{e_2}\\x_{e_3}\\\vdots\\x_{e_n}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}x_{e_1}\\x_{e_1}\\x_{e_1}\\\vdots\\x_{e_1}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\x_{e_2}-x_{e_1}\\x_{e_2}-x_{e_1}\\\vdots\\x_{e_2}-x_{e_1}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\x_{e_3}-x_{e_2}\\\vdots\\x_{e_3}-x_{e_2}\\\mathbf{0}\end{bmatrix}+\cdots\\&=x_{e_1}\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_1)}+(x_{e_2}-x_{e_1})\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_2)}+(x_{e_3}-x_{e_2})\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_3)}\\&\quad+\cdots+(x_{e_n}-x_{e_{n-1}})\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_n)}+(1-x_{e_n})\mathbf{0}\in\mathcal{P}(\mathcal{G})\end{aligned}$$

□

由定义 $\mathcal{P}(\mathcal{G})=\operatorname{conv}\{\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_1)},\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_2)},\dots\}$ 知 $\mathcal{P}(\mathcal{G})$ 的任意极点都是 $\mathcal{G}$ 的匹配，反过来结论也成立。

定理 2. $\mathcal{G}$ 的任意匹配都是 $\mathcal{P}$ 的极点。

证明. 对任意匹配 $\mathcal{M}$ 和非零向量 $\boldsymbol{d}$，不妨设 $d_e \neq 0$，注意 $x_e^{(\mathcal{M})} \in \{0,1\}$，因此 $x_e^{(\mathcal{M})} \pm \epsilon d_e$ 总有一个不属于 $[0,1]$，即 $\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M})} \pm \epsilon \boldsymbol{d}$ 总有一个不属于 $\mathcal{P}$，故 $\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M})}$ 是 $\mathcal{P}$ 的极点。 □

2 完美匹配

若匹配 $\mathcal{M}^\star$ 使得在子图 $(\mathcal{V}, \mathcal{M}^\star)$ 中，所有点都有且仅有一条相连的边，则称为完美匹配 (perfect matching)。完美匹配可表示为向量 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{Z}_+^{|\mathcal{E}|}$ 满足对任意 $v \in \mathcal{V}$ 有 $\sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$，显然完美匹配是匹配的真子集。

定理 3. 设 $\mathcal{P}^\star(\mathcal{G})$ 为 $\mathcal{G}$ 的所有完美匹配构成的凸包，$\mathcal{Q}^\star(\mathcal{G})$ 定义为：

$$\mathcal{Q}^\star(\mathcal{G}) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}\} = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{|\mathcal{V}|} \mid \forall v \in \mathcal{V}, \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1\right\}$$

则 $\mathcal{P}^\star(\mathcal{G}) = \mathcal{Q}^\star(\mathcal{G})$。

证明. 一方面，对任意 $\boldsymbol{x} = \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i^\star)} \boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_i^\star)} \in \mathcal{P}^\star(\mathcal{G})$，易知

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = \sum_{e \in \delta(v)} \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i^\star)} x_e^{(\mathcal{M}_i^\star)} = \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i^\star)} \sum_{e \in \delta(v)} x_e^{(\mathcal{M}_i^\star)} = \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i^\star)} = 1 \Longrightarrow \boldsymbol{x} \in \mathcal{Q}^\star(\mathcal{G})$$

另一方面，对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{Q}^\star(\mathcal{G}) \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{G}) = \mathcal{P}(\mathcal{G})$，设 $\boldsymbol{x} = \sum_{i \in [n]} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} \boldsymbol{x}^{(\mathcal{M}_i)}$。用反证法，若其凸组合表示中存在不完美匹配 $\mathcal{M}_j$，设 v 不是 $\mathcal{M}_j$ 中边的顶点，则

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e = \sum_{e \in \delta(v)} \sum_{i \in [n] \setminus \{j\}} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} x_e^{(\mathcal{M}_i)} = \sum_{i \in [n] \setminus \{j\}} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} \sum_{e \in \delta(v)} x_e^{(\mathcal{M}_i)} \leq \sum_{i \in [n] \setminus \{j\}} \alpha^{(\mathcal{M}_i)} < 1$$

这和 $\mathcal{Q}^\star(\mathcal{G})$ 的定义矛盾，故 $\boldsymbol{x}$ 的凸组合表示中不存在不完美匹配，即 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{P}^\star(\mathcal{G})$。 □

定理 4. $\mathcal{G}$ 的任意完美匹配都是 $\mathcal{P}^\star$ 的极点。

证明. 完美匹配也是匹配，因此是 $\mathcal{P}$ 的极点，故无法由 $\mathcal{P}$ 中其它点的凸组合表示，又 $\mathcal{P}^\star \subseteq \mathcal{P}$，因此也无法由 $\mathcal{P}^\star$ 中其它点的凸组合表示，从而也是 $\mathcal{P}^\star$ 的极点 □

对于完全二部图 $\mathcal{K}_{n,n}$ 有 $|\mathcal{E}| = n^2$，对任意 $\boldsymbol{x} \in \mathcal{Q}^\star(\mathcal{K}_{n,n})$ 有

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_+^{n^2},\ \forall v \in \mathcal{V}, \sum_{e \in \delta(v)} x_e = 1$$

又每个点恰有 n 条相连的边，因此 $\boldsymbol{x}$ 也可以写成一个 $n \times n$ 的双随机矩阵 (所有行和、列和均为 1)。另一方面，对于完美匹配 $\mathcal{M}$，每个点有且仅有一条相连的边，其对应的 $\boldsymbol{x}^{(\mathcal{M})}$ 可以写成置换矩阵 (每行、每列有且仅有一个 1，其余为零)，由定理4知双随机矩阵集合的极点是置换矩阵，这就是 Birkhoff-von Neumann 定理。

3 König 定理

前文已述最大匹配问题可放松成线性规划

$$\max_{\boldsymbol{x}} \{\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{e}\}$$

引入 Lagrange 对偶函数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}^\top (\mathbf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{e})$，易知

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{e} + \boldsymbol{y} - \mathbf{A}^\top \boldsymbol{z} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{A}^\top \boldsymbol{z} - \boldsymbol{e} = \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}$$

故对偶问题为

$$\min_{\boldsymbol{z}} \{\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{z} : \boldsymbol{z} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}^\top \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{e}\} \tag{3}$$

显然这是将最小点覆盖问题

$$\min_{\boldsymbol{z}} \{\boldsymbol{e}^\top \boldsymbol{z} : \boldsymbol{z} \in \mathbb{Z}_+^{|\mathcal{V}|},\ \mathbf{A}^\top \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{e}\} \tag{4}$$

的离散可行域放松成连续域得到的线性规划。同理由 $\{\boldsymbol{z} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}^\top \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{e}\} \Longleftrightarrow [-\mathbf{A}^\top; -\mathbf{I}]\boldsymbol{z} \leq [-\boldsymbol{e}; \mathbf{0}]$ 以及 $\mathbf{A}$ 是全幺模矩阵知凸多面体 $\{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} \geq \mathbf{0},\ \mathbf{A}^\top \boldsymbol{z} \geq \boldsymbol{e}\}$ 的极点是整数向量。由于线性规划必然在极点处取最优，因此式 (3) 的最优解就是式 (4) 的最小点覆盖。

综上，最大匹配、最小点覆盖这两类整数规划问题，其最优解就是将整数约束放松后导出的线性规划的最优解，且这两类相应的线性规划互为对偶问题。

定理 5 (König)**.** 对于二部图 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$，设最大匹配问题的最优值为 $\text{max-matching}(\mathcal{G})$，最小点覆盖问题的最优值为 $\text{min-vertex-covering}(\mathcal{G})$，则有 $\text{max-matching}(\mathcal{G}) = \text{min-vertex-covering}(\mathcal{G})$。

证明. $\text{min-vertex-covering}(\mathcal{G}) \geq \text{max-matching}(\mathcal{G})$ 是显然的，因为对最大匹配中的任意一条边，至少要覆盖其中一个顶点。

下面证明另一个方向，若 $\mathcal{E} = \emptyset$，则 $\text{max-matching}(\mathcal{G}) = \text{min-vertex-covering}(\mathcal{G}) = 0$，故不妨设 $\mathcal{E}$ 非空。对 $|\mathcal{V}|$ 进行归纳，若 $|\mathcal{V}| = 2$，易知 $\text{max-matching}(\mathcal{G}) = \text{min-vertex-covering}(\mathcal{G}) = 1$。若 $|\mathcal{V}| > 2$，设 $\boldsymbol{z}^\star$ 是最小点覆盖问题的最优解，由于存在点 v 使得 $z_v^\star > 0$，故根据互补松弛条件可得

$$z_v^\star (\mathbf{A}_{v,:} \boldsymbol{x}^\star - 1) = 0 \Longrightarrow 1 = \mathbf{A}_{v,:} \boldsymbol{x}^\star = \sum_{e \in \delta(v)} x_e^\star$$

又原问题的最优解 $\boldsymbol{x}^\star$ 是最大匹配，故 v 出现在所有的最大匹配中，于是

$$\text{max-matching}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) = \text{max-matching}(\mathcal{G}) - 1$$

由归纳假设知 $\text{max-matching}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) = \text{min-vertex-covering}(\mathcal{G} \setminus \{v\})$，于是

$$\begin{aligned} \text{min-vertex-covering}(\mathcal{G}) &\leq \text{min-vertex-covering}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) + 1 \\ &= \text{max-matching}(\mathcal{G} \setminus \{v\}) + 1 \\ &= \text{max-matching}(\mathcal{G}) \end{aligned}$$

□

König 定理还可进一步推广，设 b-匹配对应的表示向量满足对任意 $v \in \mathcal{V}$ 有 $\sum_{e \in \delta(v)} x_e \le b_v$；$c$-点覆盖对应的表示向量满足对任意 $e = (u, v) \in \mathcal{E}$ 有 $z_u + z_v \ge c_e$，易知有

$$\max_{\boldsymbol{x}} \{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} : \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{A}\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\} = \min_{\boldsymbol{z}} \{\boldsymbol{b}^\top \boldsymbol{z} : \boldsymbol{z} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{A}^\top \boldsymbol{z} \ge \boldsymbol{c}\}$$

即最大 c-加权 b-匹配等于最小 b-加权 c-点覆盖。

4 最大流与最小割

类似于最大匹配和最小点覆盖，最大流和最小割也是一组对偶问题。给定有向流网络 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$、源点 s、汇点 t，设 $\delta_{\text{in}}(v)$ 是以点 v 为终点的入边集合、$\delta_{\text{out}}(v)$ 是以点 v 为起点的出边集合，$\mathbf{A} \in \{0, \pm 1\}^{|\mathcal{V}| \times |\mathcal{E}|}$ 是 $\mathcal{G}$ 对应的关联矩阵，即

$$a_{v,e} = \begin{cases} 1 & e \in \delta_{\text{in}}(v) \\ -1 & e \in \delta_{\text{out}}(v) \\ 0 & \text{o.w.} \end{cases}$$

$\mathbf{A}_{\overline{st}}$ 为 $\mathbf{A}$ 去掉 s、t 对应行的子矩阵，注意有向流网络中源点 s 只有出边、汇点 t 只有入边，因此 $\mathbf{A}_{\overline{st}}$ 其实也是 $\mathcal{G}$ 删除 s、t 及其所有相连边后的有向图的关联矩阵，故 $\mathbf{A}_{\overline{st}}$ 是全幺模矩阵。

最大流问题可形式化为线性规划：

$$\max_{\boldsymbol{x}} \{\mathbf{A}_t \boldsymbol{x} : \mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{c},\ \mathbf{A}_{\overline{st}} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$$

其中 $\mathbf{A}_t$ 是 $\mathbf{A}$ 中汇点 t 对应的行，$\mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{c}$ 约束流的上下界，$\mathbf{A}_{\overline{st}} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 约束非源点、汇点的流量要守恒。注意

$$\{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{c},\ \mathbf{A}_{\overline{st}} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\} \Longleftrightarrow [\mathbf{A}_{\overline{st}}; -\mathbf{A}_{\overline{st}}; \mathbf{I}; -\mathbf{I}] \boldsymbol{x} \le [\mathbf{0}; \mathbf{0}; \boldsymbol{c}; \mathbf{0}]$$

由 $\mathbf{A}_{\overline{st}}$ 是全幺模矩阵知 $[\mathbf{A}_{\overline{st}}; -\mathbf{A}_{\overline{st}}; \mathbf{I}; -\mathbf{I}]$ 也是全幺模矩阵，若流量上限 $\boldsymbol{c}$ 是整数向量，则可行域 $\{\boldsymbol{z} \mid \mathbf{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{c},\ \mathbf{A}_{\overline{st}} \boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ 的极点也是整数向量，即最大流是整数流。

引入 Lagrange 对偶函数 $\mathcal{L}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{w}) = \mathbf{A}_t \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}^\top (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{w}_{\overline{st}}^\top \mathbf{A}_{\overline{st}} \boldsymbol{x}$，易知

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{x}} = \mathbf{A}_t^\top + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z} - \mathbf{A}_{\overline{st}}^\top \boldsymbol{w}_{\overline{st}} = \mathbf{0} \Longrightarrow \mathbf{A}_{\overline{st}}^\top \boldsymbol{w}_{\overline{st}} + \boldsymbol{z} \ge \mathbf{A}_t^\top$$

故对偶问题为

$$\min_{\boldsymbol{w}_{\overline{st}}, \boldsymbol{z}} \{\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{z} : \boldsymbol{z} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{A}_{\overline{st}}^\top \boldsymbol{w}_{\overline{st}} + \boldsymbol{z} \ge \mathbf{A}_t^\top\}$$

注意

$$\{\boldsymbol{z} \mid \boldsymbol{z} \ge \mathbf{0},\ \mathbf{A}_{\overline{st}}^\top \boldsymbol{w}_{\overline{st}} + \boldsymbol{z} \ge \mathbf{A}_t^\top\} \Longleftrightarrow [-\mathbf{A}_{\overline{st}}^\top, -\mathbf{I}; \mathbf{0}, -\mathbf{I}][\boldsymbol{w}_{\overline{st}}; \boldsymbol{z}] \le [-\mathbf{A}_t^\top; \mathbf{0}]$$

由 $\mathbf{A}_{\overline{st}}$ 是全幺模矩阵知 $[-\mathbf{A}_{\overline{st}}^\top, -\mathbf{I}; \mathbf{0}, -\mathbf{I}]$ 也是全幺模矩阵，故对偶问题的最优解 $\boldsymbol{w}_{\overline{st}}^\star$、$\boldsymbol{z}^\star$ 也是整数向量。

$\boldsymbol{w}_{\overline{st}}^\star$ 的维度为 $|\mathcal{V}|-2$，与 $\mathbf{A}_{\overline{st}}$ 的行对应，现添加 $w_s^\star=0$、$w_t^\star=-1$ 将其扩充为 $\boldsymbol{w}^\star$，与 $\mathbf{A}$ 的行对应，于是 $\mathbf{A}^\top\boldsymbol{w}^\star+\boldsymbol{z}^\star=\mathbf{A}_{\overline{st}}^\top\boldsymbol{w}_{\overline{st}}^\star-\mathbf{A}_t^\top+\boldsymbol{z}^\star\geq\mathbf{0}$。由于 $\boldsymbol{c}$ 非负，故 $\boldsymbol{z}^\star$ 应尽量的小，从而 $\boldsymbol{z}^\star=\max\{\mathbf{0},-\mathbf{A}^\top\boldsymbol{w}^\star\}$，即对 $e=(u,v)\in\mathcal{E}$ 有 $z_e^\star=\max\{0,w_u^\star-w_v^\star\}$。

定义 $\mathcal{S}=\{v\in\mathcal{V}\mid w_v^\star\geq 0\}$，$\overline{\mathcal{S}}=\mathcal{V}\setminus\mathcal{S}$，$\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}\triangleq\{(u,v)\in\mathcal{E}\mid u\in\mathcal{S},\ v\in\overline{\mathcal{S}}\}$ 为所有起点属于 $\mathcal{S}$、终点属于 $\overline{\mathcal{S}}$ 的边的集合。显然 $s\in\mathcal{S}$、$t\in\overline{\mathcal{S}}$，在将所有 $\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}$ 中的边删除后，s、t 不再连通，因此 $\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}$ 称为割 (cut)。

由于 $w_v^\star$ 都是整数，因此对任意 $e=(u,v)\in\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}$ 有 $z_e^\star\geq w_u^\star-w_v^\star\geq 1$，因此

$$\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{z}^\star\geq\sum_{e\in\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}}c_e z_e^\star\geq\sum_{e\in\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}}c_e\geq\sum_{e\in\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}}x_e^\star\geq\sum_{e\in\delta_{\text{in}}(t)}x_e^\star=\mathbf{A}_t\boldsymbol{x}^\star\geq\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{z}^\star$$

其中第一个不等号是因为 $z_e^\star\geq 0$；第二个不等号是因为对任意 $e\in\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}$ 有 $z_e^\star\geq 1$；第三个不等号是因为 c_e 是边 e 的流量上限；第四个不等号是因为从 $\mathcal{S}$ 到 $\overline{\mathcal{S}}$ 的流量未必会全部进入汇点，可能会有一部分通过从 $\overline{\mathcal{S}}$ 到 $\mathcal{S}$ 的边再折回 $\mathcal{S}$；第五个不等号是因为弱对偶性。

综上所有的不等号都取等号，由此可以得到一些有趣的结论：

- 根据第一个不等号取等号，对任意 $e\notin\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}$ 有 $z_e^\star=0$，即对任意 $\mathcal{S}$ 内部的边 e、$\overline{\mathcal{S}}$ 内部的边 e、$\delta_{\overline{\mathcal{S}},\mathcal{S}}$ 中的边 e，都有 $z_e^\star=0$；
- 根据第二个不等号取等号，对任意 $e=(u,v)\in\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}$ 有 $z_e^\star=1$，故只可能是 $w_u^\star=0$、$w_v^\star=-1$，于是对任意 $\mathcal{S}$ 内部的边 $e=(p,u)$，必然有 $w_p^\star=0$，否则 $z_e^\star\geq w_p^\star-w_u^\star>0$，与前一个结论矛盾，依此类推，对所有 $\mathcal{S}$ 中的点 u 都有 $w_u^\star=0$。同理，对所有 $\overline{\mathcal{S}}$ 中的点 v 都有 $w_v^\star=-1$；
- 根据第三个不等号取等号，当流量达到最大时，$\delta_{\mathcal{S},\overline{\mathcal{S}}}$ 中的每条边上的流量都达到上限，这个也可由互补松弛条件 $z_e(x_e-c_e)=0$ 得到：$z_e^\star=1>0\Longrightarrow x_e^\star=c_e$；
- 根据第四个不等号取等号，从 $\mathcal{S}$ 到 $\overline{\mathcal{S}}$ 的流量全部进入 t，不存在折回 $\mathcal{S}$ 的情况，即 $\delta_{\overline{\mathcal{S}},\mathcal{S}}$ 中的每条边上的流量都是零，这个也可由互补松弛条件 $y_e x_e=0$ 得到：注意此时 $z_e^\star=0>-1=w_u^\star-w_v^\star$，故 $y_e^\star=z_e^\star-(w_u^\star-w_v^\star)>0$，从而 $x_e^\star=0$。