算法设计与分析 分治出题

张腾

2026 年 1 月 3 日

给定两个 n 位数 x、y，求乘积 $z = xy$。记 $x = X[0,\dots,n-1]$、$y = Y[0,\dots,n-1]$，乘积 z 的长度不超过 $2n$，记为 $Z[0,\dots,2n-1]$。易知有

$$\sum_{k=0}^{2n-1} Z[k]10^k = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} X[i]Y[j]10^{i+j} = \sum_{k=0}^{2n-2} \underbrace{\sum_{(i,j):i+j=k} X[i]Y[j]}_{c_k} 10^k = \sum_{k=0}^{2n-2} c_k 10^k$$

上式左右都是 10^k 的线性组合，但左边的组合系数 $Z[k]$ 是一位正整数，右边的组合系数 c_k 是若干个一位正整数的乘积，因此它们通常并不相等。

第一项 10^0 的系数 $c_0 = \sum_{(i,j):i+j=0} X[i]Y[j] = X[0]Y[0]$ 是个个位数乘积，可能为两位数、也可能为一位数，但不管哪种情况都有 $c_0 = \lfloor c_0/10 \rfloor \cdot 10 + (c_0 \bmod 10)$，其中 $h \leftarrow \lfloor c_0/10 \rfloor$ 作为进位会参与到 $Z[1]$ 的计算中，而 $c_0 \bmod 10$ 就是 $Z[0]$。第二项 10^1 的系数 $c_1 = X[0]Y[1] + X[1]Y[0]$ 是两个个位数乘积的和，可能为三位数、两位数、一位数，此外还要加上进位 h，最终 $h \leftarrow \lfloor (c_1 + h)/10 \rfloor$ 作为进位参与 $Z[2]$ 的计算，$(c_1 + h) \bmod 10$ 就是 $Z[1]$。如此迭代，继续计算 $Z[2], Z[3], \dots, Z[2n-1]$。

上述正是我们小学所学的乘法，算法 1 给出了伪代码，该算法通常以填一个 $n \times n$ 二维表的形式实现，图 1 给出了计算 $123 \times 456 = 56088$ 的例子。

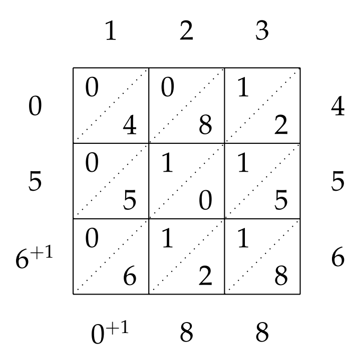
算法 1 n 位数乘法

输入： $X[0,\dots,n-1]$、$Y[0,\dots,n-1]$

输出： $Z[0,\dots,2n-1]$

```
1: 初始化进位 h ← 0
2: for k = 0 → 2n − 1 do
3:     for each (i, j) : i + j = k do
4:         h ← h + X[i]Y[j]
5:     end for
6:     Z[k] = h (mod 10)
7:     h ← ⌊h/10⌋                    // 下一位的进位
8: end for
```

图 1: 填表实现



问题 1：算法 1 第 2、3 行的二重 for 循环共遍历 n^2 个 (i,j) 二元组，即二维表中的每一格，因此

算法时间复杂度为 $\Theta(n^2)$，请设计一种时间复杂度更优的分治算法解决乘法问题。

参考答案：Karatsuba 乘法将 x 分成两个 $n/2$ 位数 a、b，将 y 分成两个 $n/2$ 位数 c、d，于是

$$x = a \cdot 10^{n/2} + b, \quad y = c \cdot 10^{n/2} + d, \quad xy = ac \cdot 10^n + (ad + bc) \cdot 10^{n/2} + bd$$

如此会产生 4 个乘法子问题 ac、ad、bd、bc，根据 Strassen 乘法的启示：多做加法、少做乘法，利用等式 $ad + bc = (a + b)(c + d) - ac - bd$，可将子问题个数减少到 3 个：$ac$、$bd$、$(a + b)(c + d)$，显然加法部分 ($\Theta(n)$ 位数相加) 复杂度为 $\Theta(n)$，因此有递推关系

$$T(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 3 \cdot T(n/2) + \Theta(n), & n > 1 \end{cases}$$

利用主定理易知 $T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$。

问题 2：给定 n 位数 x，计算 x^2。最平凡的做法是将平方看作乘法并利用算法 1 求解，请设计一种时间复杂度更优的分治算法解决平方问题。

参考答案：将 x 二等分成 a、b，即设 $x = a \cdot 10^{n/2} + b$，于是 $x^2 = a^2 \cdot 10^n + 2ab \cdot 10^{n/2} + b^2$，注意 $2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$，故该分解产生 3 个平方子问题：$a^2$、$b^2$、$(a + b)^2$，显然加法部分复杂度为 $\Theta(n)$，因此有递推关系 $T(n) = 3 \cdot T(n/2) + \Theta(n)$，与将平方看作乘法并利用 Karatsuba 乘法求解时间复杂度相同。

若将 x 三等分，即设 $x = a \cdot 10^{2n/3} + b \cdot 10^{n/3} + c$，于是

$$x^2 = a^2 \cdot 10^{4n/3} + 2ab \cdot 10^n + (b^2 + 2ac) \cdot 10^{2n/3} + 2bc \cdot 10^{n/3} + c^2$$

注意 $2ab = (a + b)^2 - a^2 - b^2$、$2ac = (a + c)^2 - a^2 - c^2$、$2bc = (b + c)^2 - b^2 - c^2$，故该分解产生 6 个平方子问题，有递推关系 $T(n) = 6 \cdot T(n/3) + \Theta(n) \Longrightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_3 6})$，不及 Karatsuba 乘法。

引入多项式 $x(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$，当 $t = 10^{n/3}$ 时即为 x，此时

$$\begin{aligned} w(t) = x^2(t) &= a^2 \cdot t^4 + 2ab \cdot t^3 + (b^2 + 2ac) \cdot t^2 + 2bc \cdot t + c^2 \\ &\triangleq w_4 \cdot t^4 + w_3 \cdot t^3 + w_2 \cdot t^2 + w_1 \cdot t + w_0 \end{aligned}$$

是 4 次多项式，确定 5 个系数 w_4、w_3、w_2、w_1、w_0 再代入 $t = 10^{n/3}$ 即可 (相当于每个系数后面依次添加 $4n/3$、n、$2n/3$、$n/3$、0 个 0 再相加)。取 t 为 5 个特殊值可得 5 变量线性方程组

$$\begin{cases} t = 0 & : & c^2 & = & w(0) & = & w_0 \\ t = 1 & : & (a + b + c)^2 & = & w(1) & = & w_4 + w_3 + w_2 + w_1 + w_0 \\ t = -1 & : & (a - b + c)^2 & = & w(-1) & = & w_4 - w_3 + w_2 - w_1 + w_0 \\ t = 2 & : & (4a + 2b + c)^2 & = & w(2) & = & 16w_4 + 8w_3 + 4w_2 + 2w_1 + w_0 \\ t = \infty & : & \widehat{x}^2(\infty) = a^2 & = & \widehat{w}(\infty) & = & w_4 \end{cases}$$

其中 $\widehat{x}(t) = x(t)/t^2$、$\widehat{w}(t) = w(t)/t^4$，求解可得

$$\begin{cases} w_4 &=& a^2 \\ w_3 &=& (-12a^2 + (4a+2b+c)^2 - (a-b+c)^2 - 3(a+b+c)^2 + 3c^2)/6 \\ w_2 &=& (-2a^2 + (a-b+c)^2 + (a+b+c)^2 - 2c^2)/2 \\ w_1 &=& (12a^2 - (4a+2b+c)^2 - 2(a-b+c)^2 + 6(a+b+c)^2 - 3c^2)/6 \\ w_0 &=& c^2 \end{cases}$$

因此共有 5 个平方子问题：a^2、$(4a+2b+c)^2$、$(a-b+c)^2$、$(a+b+c)^2$、c^2，时间复杂度 $\Theta(n^{\log_3 5})$，优于 Karatsuba 乘法。

更一般的将 x 作 k 等分，此时 $w(t)$ 是 $2k-2$ 次多项式，共有 $2k-1$ 个系数，线性方程组需包含 $2k-1$ 个方程，由此产生 $2k-1$ 个子问题，时间复杂度 $\Theta(n^{\log_k(2k-1)})$。