

# 线性规划、单纯形法

张腾\*

2023 年 12 月 20 日

线性规划是在一组线性等式或不等式的约束下，求线性目标函数最值的问题，现实中的许多问题都可化为线性规划问题。

例 1 (分数背包问题). 设背包承重量为 10，各物品价值如下：

|    | 物品1 | 物品2 | 物品3 | 物品4 |
|----|-----|-----|-----|-----|
| 重量 | 4   | 7   | 5   | 3   |
| 价值 | 40  | 42  | 25  | 12  |

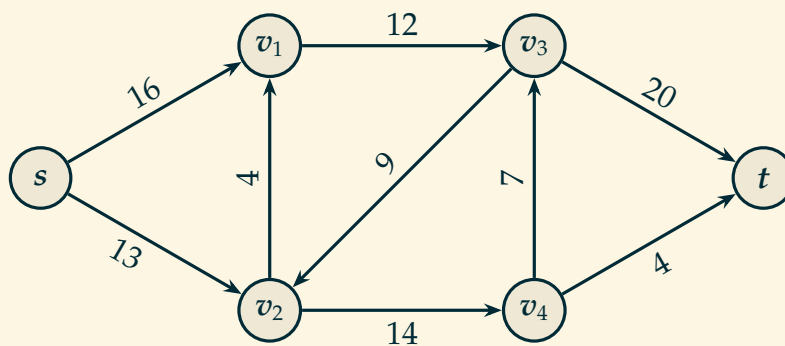
现允许物品按比例取走部分，求最大装包方案。

对  $i \in [4]$ ，设物品  $i$  取走的比例为  $x_i$ ，可得如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ & 0 \leq x_i \leq 1, i \in [4] \end{aligned}$$

注. 如果不允许只取部分 (0/1 背包问题)，约束  $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$  将变成  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$ ，此时问题就变成了整数线性规划，比线性规划要难得多。

例 2 (最大流). 给定如下的流网络，求最大流。



\*tengzhang@hust.edu.cn

设 9 条边上的流量分别为  $x_1, \dots, x_9$ , 可得如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1 \leq 16 \\ & 0 \leq x_2 \leq 13 \\ & 0 \leq x_3 \leq 4 \\ & 0 \leq x_4 \leq 12 \\ & 0 \leq x_5 \leq 9 \\ & 0 \leq x_6 \leq 14 \\ & 0 \leq x_7 \leq 7 \\ & 0 \leq x_8 \leq 20 \\ & 0 \leq x_9 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\ & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\ & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \end{aligned}$$

其中前 9 个不等式约束对应容量限制, 后 4 个等式约束对应流量守恒。

$\mathbb{R}^2$  中的线性规划只有 2 个变量, 线性目标函数和线性等式约束是一条直线, 线性不等式约束是一个半平面, 可采用图解法。

例 3 (图解法示例). 考虑如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

先确定可行域, 即满足所有约束的可行解构成的集合。该例中共有 5 个线性不等式约束, 每个对应一个半平面, 因此可行域为 5 个半平面相交出的凸五边形 (图1中红色部分)。

引入直线簇  $y = 3x_1 + 5x_2$ , 其中不同的  $y$  对应不同的直线, 这些直线都是平行的。先将  $y$  取为一个较大的值使直线与凸五边形不相交, 然后逐渐减小  $y$ , 这相当于从上向下平移直线  $y = 3x_1 + 5x_2$  使其逐渐靠近凸五边形, 当其与凸五边形相切时, 切点就是最优解,

## 1 标准型

当变量多于 2 个时, 图解法就不再适用了, 需要更一般性的方法。线性规划的常用求解算法有单纯形法和内点法。前者在最坏情况下是指数复杂度, 后者是多项式复杂度, 但实际使用中两者几乎没有差别, 单纯形法的最坏情况实际中很难遇到。

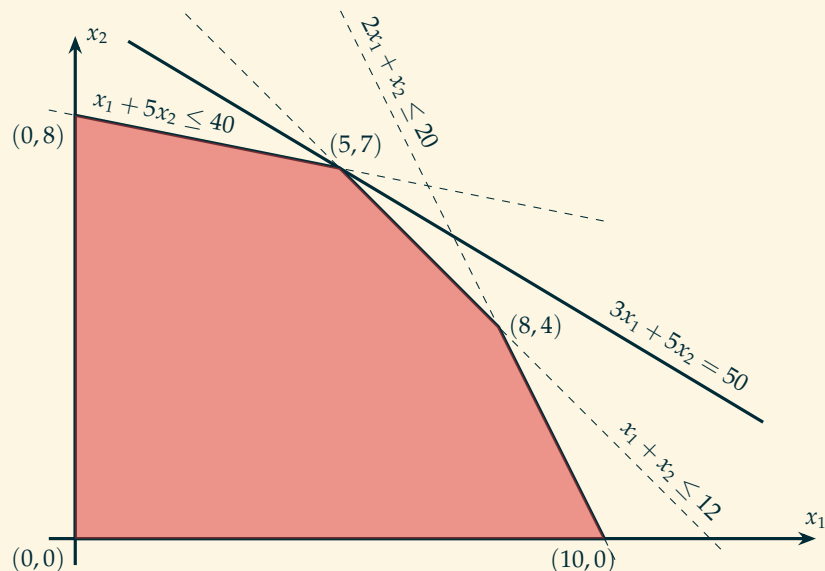


图 1: 直线簇与可行域相切于最优解 (5,7) 处, 目标函数最优值为 50。

要想使用单纯形法, 需要先将问题转化为标准型 (不等式只约束变量非负, 其余都是等式约束):

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

这里为了简化表达, 将所有线性等式约束合并写成了线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的形式, 不失一般性可设

- 共有  $m$  个线性等式约束、 $n$  个变量, 其中  $m < n$ , 否则可行域为单点集或空集;
- $\mathbf{A}$  是行满秩矩阵, 即  $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ , 否则存在冗余约束;
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , 若某个  $b_i < 0$ , 对该约束两边取反即可。

对于任何形式的线性规划, 都可按以下步骤将其转化成标准型, 且两者是等价的:

- 对非正变量  $x \leq 0$ , 令  $y = -x$  作为替代;
- 对无约束变量  $x$ , 将其表示成两个非负变量的差  $x = u - v$ ;
- 对  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$  型不等式约束, 引入松弛变量  $y \geq 0$  将其转化为等式约束  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + y = b$ ;
- 对  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \geq b$  型不等式约束, 引入剩余变量  $y \geq 0$  将其转化为等式约束  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} - y = b$ 。

下面将例1、例2、例3中的问题转化为标准型。

- 分数背包问题有 5 个  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$  型约束, 分别引入松弛变量  $x_5, \dots, x_9$ :

$$\begin{array}{ll}
\max & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\
\text{s.t.} & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10 \\
& x_1 \leq 1 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_3 \leq 1 \\
& x_4 \leq 1 \\
& x_i \geq 0, i \in [4]
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\
\text{s.t.} & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 10 \\
& x_1 + x_6 = 1 \\
& x_2 + x_7 = 1 \\
& x_3 + x_8 = 1 \\
& x_4 + x_9 = 1 \\
& x_i \geq 0, i \in [9]
\end{array}
\tag{1}$$

- 最大流问题有 9 个  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$  型约束, 分别引入松弛变量  $x_{10}, \dots, x_{18}$ :

$$\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 \leq 16 \\
& x_2 \leq 13 \\
& x_3 \leq 4 \\
& x_4 \leq 12 \\
& x_5 \leq 9 \\
& x_6 \leq 14 \\
& x_7 \leq 7 \\
& x_8 \leq 20 \\
& x_9 \leq 4 \\
& x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
& x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
& x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
& x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\
& x_i \geq 0, i \in [9]
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_{10} = 16 \\
& x_2 + x_{11} = 13 \\
& x_3 + x_{12} = 4 \\
& x_4 + x_{13} = 12 \\
& x_5 + x_{14} = 9 \\
& x_6 + x_{15} = 14 \\
& x_7 + x_{16} = 7 \\
& x_8 + x_{17} = 20 \\
& x_9 + x_{18} = 4 \\
& x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
& x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
& x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
& x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\
& x_i \geq 0, i \in [18]
\end{array}
\tag{2}$$

- 例3中的线性规划有 3 个  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$  型约束, 分别引入松弛变量  $x_3, x_4, x_5$ :

$$\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 5x_2 \leq 40 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 20 \\
& x_1 + x_2 \leq 12 \\
& x_i \geq 0, i \in [2]
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = 20 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\
& x_i \geq 0, i \in [5]
\end{array}
\tag{3}$$

例 4. 将如下线性规划转化为标准型

$$\begin{array}{ll}
\max & x_2 - x_1 \\
\text{s.t.} & 3x_1 = x_2 - 5 \\
& |x_2| \leq 2 \\
& x_1 \leq 0
\end{array}$$

- $x_1$  非正, 令  $y_1 = -x_1 \geq 0$  作为替代;
- $x_2$  无约束, 令  $x_2 = y_2 - y_3$ , 其中  $y_2 \geq 0$ 、 $y_3 \geq 0$ ;

$$\begin{array}{ll}
 \max & y_2 - y_3 + y_1 \\
 \text{s.t.} & -3y_1 = y_2 - y_3 - 5 \\
 & y_2 - y_3 \leq 2 \\
 & -y_2 + y_3 \leq 2 \\
 & y_i \geq 0, [i] \in [3]
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{ll}
 \max & y_1 + y_2 - y_3 \\
 \text{s.t.} & 3y_1 + y_2 - y_3 = 5 \\
 & y_2 - y_3 + y_4 = 2 \\
 & -y_2 + y_3 + y_5 = 2 \\
 & y_i \geq 0, [i] \in [5]
 \end{array}$$

## 2 基本解

对于线性规划的标准型, 所有可行解是线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的解与第一象限的交集。根据之前的约定矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  行满秩且  $m < n$ , 因此它有无穷多个解, 但求解线性规划只需要关注其中一类称为**基本解**的解。

记矩阵  $\mathbf{A}$  的  $n$  个列分别为  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , 由于  $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ , 因此可以从中挑出  $m$  个**线性无关**的列  $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_m}$  构成基  $\mathbf{B}$ , 这些列也称为**基向量**, 未被选择的  $\mathbf{a}_{i_{m+1}}, \dots, \mathbf{a}_{i_n}$  称为**非基向量**。为表述方便, 引入矩阵的切片表示  $\mathbf{A}_{\mathcal{R}, \mathcal{C}}$ , 其中  $\mathcal{R}, \mathcal{C}$  为索引元组, 例如记  $\mathcal{B} = (i_1, \dots, i_m)$ 、 $\mathcal{D} = (i_{m+1}, \dots, i_n)$ , 则

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_{:, \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{i_1} & \cdots & \mathbf{a}_{i_m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}_{:, \mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{i_{m+1}} & \cdots & \mathbf{a}_{i_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{Ax} = \mathbf{Bx}_{\mathcal{B}} + \mathbf{Dx}_{\mathcal{D}}$$

其中  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$  称为**基变量**,  $\mathbf{x}_{\mathcal{D}}$  称为**非基变量**。令非基变量  $\mathbf{x}_{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$  可得  $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ , 这就得到了  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  在基  $\mathbf{B}$  下的**基本解**。

- 如果基本解中某些基变量为零, 则称其为**退化**的基本解;
- 如果基本解还是线性规划的可行解 (满足所有变量非负), 则称其为**基本可行解**。

例 5. 设线性规划的等式约束为线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ , 其中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$n = 4$ 、 $m = 2$ , 故基本解最多不超过  $\binom{4}{2} = 6$  个, 对线性方程组的增广矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4 + 6 \\ x_2 = -x_4 + 2 \end{cases} \implies \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 令  $s = t = 0$ ,  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ , 这是关于基  $\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}$  的基本可行解;

- 令  $s = -6, t = 0, x = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}^\top$ , 这是关于基  $\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \end{bmatrix}$  的基本解, 但不可行;
- 令  $s = 0, t = 2, x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^\top$ , 这是同时关于基  $\begin{bmatrix} a_1 & a_4 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} a_2 & a_4 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix}$  的退化基本可行解;
- 令  $s = 1, t = 1, x = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$ , 这是可行解, 但不是基本解。

注意  $a_1, a_3$  线性相关, 因此前三种情况已经找到所有的基本解了。

定理 6 (线性规划基本定理). 对于线性规划的标准型, 有如下两个命题:

1. 如果存在可行解, 则一定存在基本可行解;
2. 如果存在最优可行解, 则一定存在最优基本可行解。

证明. 1. 设  $x$  是一个可行解且有  $l$  个正分量:  $\{i \mid x_i > 0, i \in [n]\} = \{i_1, \dots, i_l\} \triangleq \mathcal{L}$ , 则

$$b = Ax = a_{i_1}x_{i_1} + \dots + a_{i_l}x_{i_l} \quad (4)$$

此时分两种情况:

- $a_{i_1}, \dots, a_{i_l}$  线性无关, 则  $l \leq m$ 。若  $l = m$ ,  $x$  就是基本可行解; 若  $l < m$ , 从  $A$  的剩余列中挑选  $m - l$  个列与  $a_{i_1}, \dots, a_{i_l}$  构成基, 此时  $x$  就是对应该基的基本可行解。
- $a_{i_1}, \dots, a_{i_l}$  线性相关, 可以去掉一些冗余列使其线性无关, 从而转化为前一种情况。设不全为零的实数  $y_{i_1}, \dots, y_{i_l}$  使得

$$0 = a_{i_1}y_{i_1} + \dots + a_{i_l}y_{i_l} \quad (5)$$

且至少某个  $y_{i_k} > 0$ , 否则对所有的  $y_{i_1}, \dots, y_{i_l}$  取反即可, 于是对任意  $\epsilon$ , 令 (4)  $-\epsilon \times$  (5) 有

$$b = a_{i_1}(x_{i_1} - \epsilon y_{i_1}) + \dots + a_{i_l}(x_{i_l} - \epsilon y_{i_l}) = A(x - \epsilon y), \quad y_{\mathcal{L}}^\top \triangleq \begin{bmatrix} y_{i_1} & \dots & y_{i_l} \end{bmatrix}, \quad y_{[n] \setminus \mathcal{L}} = 0$$

让  $\epsilon$  从 0 增大, 对  $y_{\mathcal{L}}$  的所有正分量,  $x_{\mathcal{L}} - \epsilon y_{\mathcal{L}}$  在这些分量上单调减。取  $\epsilon$  使得  $x_{\mathcal{L}} - \epsilon y_{\mathcal{L}}$  第一次出现某个分量变成 0, 即

$$\epsilon = \min\{x_{i_k}/y_{i_k} : y_{i_k} > 0, k \in [l]\}$$

这样就得到了只有  $l - 1$  个正分量的可行解  $x - \epsilon y$ , 重复该操作直到正分量对应的列线性无关。

2. 设  $x$  是一个最优可行解且有  $l$  个正分量:  $\{i \mid x_i > 0, i \in [n]\} = \{i_1, \dots, i_l\} \triangleq \mathcal{L}$ 。

若  $a_{i_1}, \dots, a_{i_l}$  线性无关, 证明同命题 1。若  $a_{i_1}, \dots, a_{i_l}$  线性相关, 可继续沿用命题 1 中去冗余列的方式, 但还需证明对任意  $\epsilon$ ,  $x - \epsilon y$  都是最优解, 这只需证明  $c^\top y = 0$ 。注意  $x_{\mathcal{L}} > 0$ , 只要

$$|\epsilon| \leq \min\{|x_{i_k}/y_{i_k}| : y_{i_k} \neq 0, k \in [l]\} \implies \epsilon y_{i_k} \leq x_{i_k}, \quad \forall k \in [l]$$

$x - \epsilon y$  都是可行解, 因此若  $c^\top y \neq 0$ , 根据其符号总能取某个适当的  $\epsilon$  使得  $c^\top(x - \epsilon y) > c^\top x$ , 这与  $x$  是最优可行解矛盾。

♣

根据该定理, 线性规划的求解可转化为对基本可行解的搜索问题, 依次对基本可行解的最优性进行检查即可。

### 3 几何视角

线性规划的可行域  $\Omega = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$  是凸集, 因为对  $\forall x_1, x_2 \in \Omega$  和  $\forall \alpha \in (0, 1)$  有

$$A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 = \alpha b + (1 - \alpha)b = b, \quad \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$$

即连接  $\Omega$  内任意两点的线段依然属于  $\Omega$ 。对凸集  $\Omega$  中的点  $x$ , 若它无法表示成  $\Omega$  中另外两点的凸组合, 则称  $x$  为  $\Omega$  的**极点**, 即

$$x \text{ 是极点, } x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha \in (0, 1) \implies x_1 = x_2 = x$$

**定理 7 (等价性).**  $x$  是  $\Omega = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$  的极点当且仅当  $x$  是  $Ax = b, x \geq 0$  的基本可行解。

**证明.**  $\Rightarrow$ : 设  $x$  满足  $Ax = b, x \geq 0$  且  $\{i \mid x_i > 0, i \in [n]\} = \{i_1, \dots, i_l\}$ , 则

$$a_{i_1}x_{i_1} + \dots + a_{i_l}x_{i_l} = b$$

设向量  $y$  满足  $a_{i_1}y_{i_1} + \dots + a_{i_l}y_{i_l} = 0$  且  $y_{[n] \setminus \mathcal{L}} = 0$ , 于是对任意  $\epsilon$  有

$$a_{i_1}(x_{i_1} + \epsilon y_{i_1}) + \dots + a_{i_l}(x_{i_l} + \epsilon y_{i_l}) = b$$

$$a_{i_1}(x_{i_1} - \epsilon y_{i_1}) + \dots + a_{i_l}(x_{i_l} - \epsilon y_{i_l}) = b$$

注意所有的  $x_{i_k} > 0$ , 于是存在  $\epsilon \in (0, \min\{|x_{i_k}/y_{i_k}| : y_{i_k} \neq 0, k \in [l]\})$  使得

$$z_1 = x + \epsilon y \in \Omega, \quad z_2 = x - \epsilon y \in \Omega, \quad x = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2$$

由于  $x$  是极点, 因此  $z_1 = z_2 = x$ , 而  $\epsilon > 0$ , 故  $y = 0$ 。这意味着  $a_{i_1}, \dots, a_{i_l}$  线性无关, 于是  $x$  是基本可行解。

$\Leftarrow$ : 设  $x$  是基本可行解, 对应基向量为  $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$ , 记  $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_m\}$ 、 $\mathcal{D} = [n] \setminus \mathcal{B}$ , 则

$$a_{i_1}x_{i_1} + \dots + a_{i_m}x_{i_m} = b, \quad x_{\mathcal{D}} = 0$$

若存在  $y, z \in \Omega$ 、 $\alpha \in (0, 1)$  使得  $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$ , 注意  $\alpha > 0$ 、 $(1 - \alpha) > 0$ , 故  $y_{\mathcal{D}} = z_{\mathcal{D}} = 0$  且

$$a_{i_1}y_{i_1} + \dots + a_{i_m}y_{i_m} = b, \quad a_{i_1}z_{i_1} + \dots + a_{i_m}z_{i_m} = b$$

两式相减可得  $a_{i_1}(y_{i_1} - z_{i_1}) + \dots + a_{i_m}(y_{i_m} - z_{i_m}) = 0$ , 由于  $a_{i_1}, \dots, a_{i_m}$  线性无关, 故  $y_{\mathcal{B}} = z_{\mathcal{B}}$ , 从而  $y = z$ , 即  $x$  是极点。♣

**例 8.** 再看例3中的线性规划, 根据式(3), 其标准型为:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 20, \quad Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_2} x_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_3} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_4} x_4 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_5} x_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}}_b \\ & x_i \geq 0, i \in [5] \end{aligned}$$

显然取  $a_3$ 、 $a_4$ 、 $a_5$  作为基向量，基本可行解是一目了然的 (基为单位阵):

$$40a_3 + 20a_4 + 12a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 \end{bmatrix}$$

对应原问题  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[0,0]$ ，目标函数值  $0 < 50$ ，因此还不是最优解。

根据迭代改进的思路，需要从当前极点移动到邻近极点，同时使目标函数值增大。现选择  $a_1$  作为新的基向量 (入基) 并移除原来的某个基向量 (出基)，注意  $a_1 = a_3 + 2a_4 + a_5$ ，于是

$$\epsilon a_1 + (40 - \epsilon)a_3 + (20 - 2\epsilon)a_4 + (12 - \epsilon)a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \epsilon & 0 & 40 - \epsilon & 20 - 2\epsilon & 12 - \epsilon \end{bmatrix}$$

让  $\epsilon$  从 0 增大， $x_1$  变成正数， $x_3$ 、 $x_4$ 、 $x_5$  逐渐变小，当  $\epsilon$  增大到 10 时， $x_4$  率先减小到 0，即  $a_4$  出基，得到一个新的基本可行解

$$10a_1 + 30a_3 + 2a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10 & 0 & 30 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

对应原问题  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[10,0]$ ，目标函数值  $30 < 50$ ，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择  $a_2$  作为新的基向量，注意  $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{9}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_5$ ，于是

$$\left(10 - \frac{1}{2}\epsilon\right)a_1 + \epsilon a_2 + \left(30 - \frac{9}{2}\epsilon\right)a_3 + \left(2 - \frac{1}{2}\epsilon\right)a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10 - \frac{1}{2}\epsilon & \epsilon & 30 - \frac{9}{2}\epsilon & 0 & 2 - \frac{1}{2}\epsilon \end{bmatrix}$$

让  $\epsilon$  从 0 增大， $x_2$  变成正数， $x_1$ 、 $x_3$ 、 $x_5$  逐渐变小，当  $\epsilon$  增大到 4 时， $x_5$  率先减小到 0，即  $a_5$  出基，得到一个新的基本可行解

$$8a_1 + 4a_2 + 12a_3 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8 & 4 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应原问题  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[8,4]$ ，目标函数值  $44 < 50$ ，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择  $a_4$  作为新的基向量，注意  $a_4 = a_1 - a_2 + 4a_3$ ，于是

$$(8 - \epsilon)a_1 + (4 + \epsilon)a_2 + (12 - 4\epsilon)a_3 + \epsilon a_4 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8 - \epsilon & 4 + \epsilon & 12 - 4\epsilon & \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

让  $\epsilon$  从 0 增大， $x_4$  变成正数， $x_1$ 、 $x_3$  逐渐变小，当  $\epsilon$  增大到 3 时， $x_3$  率先减小到 0，即  $a_3$  出基，得到一个新的基本可行解

$$5a_1 + 7a_2 + 3a_4 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

对应原问题  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[5,7]$ ，目标函数值 50，这就是最优解。

注. 这种从一个极点转移到另一个极点，迭代改进的操作方式就是单纯形法求线性规划的基本思路，但

1. 如何确定初始的基和基本可行解？
2. 如何确定每轮的入基向量以改进当前解？
3. 如何确定当前解为最优解以停止算法？



## 4 单纯形法

例8中每轮迭代都要将  $\mathbf{b}$  和入基向量  $\mathbf{a}_q$  用当前基向量  $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_m}$  线性表出:

$$\mathbf{b} = x_{i_1} \mathbf{a}_{i_1} + \dots + x_{i_m} \mathbf{a}_{i_m}, \quad \mathbf{a}_q = y_{i_1} \mathbf{a}_{i_1} + \dots + y_{i_m} \mathbf{a}_{i_m}$$

由此得到关于  $\epsilon$  的恒等式

$$(x_{i_1} - \epsilon y_{i_1}) \mathbf{a}_{i_1} + \dots + (x_{i_m} - \epsilon y_{i_m}) \mathbf{a}_{i_m} + \epsilon \mathbf{a}_q = \mathbf{b}$$

让  $\epsilon$  从 0 增大直到某个  $\mathbf{a}_p$  出基, 其中  $p = \operatorname{argmin}_{i_k} \{x_{i_k}/y_{i_k} : y_{i_k} > 0, k \in [m]\}$ 。

$\mathbf{b}$  和  $\mathbf{a}_q$  的线性表出系数如何得到呢? 根据线性方程组理论, 对  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的增广矩阵做初等行变换

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{a}_{i_{m+1}} & \dots & \mathbf{a}_{i_n} & \mathbf{b} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{i_{m+1}} & \dots & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_{i_n} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

当基  $\mathbf{B}$  变成单位阵时,  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}_q$  和  $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$  就是  $\mathbf{a}_q$  和  $\mathbf{b}$  的线性表出系数。

下面考察基本可行解变化时目标函数值的变化, 将标准型根据对  $\mathbf{A}$  的分块重写为

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_D^\top \mathbf{x}_D \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{B} \mathbf{x}_B + \mathbf{D} \mathbf{x}_D = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B, \mathbf{x}_D \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- 若  $\mathbf{x}_D = \mathbf{0}$ , 则  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$ , 此时  $\mathbf{x}$  就是关于基  $\mathbf{B}$  的基本可行解, 对应目标函数值为

$$\hat{z} = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$$

- 若  $\mathbf{x}_D \neq \mathbf{0}$ , 则  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{x}_D$ , 对应目标函数值为

$$z = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_D^\top \mathbf{x}_D = \mathbf{c}_B^\top (\mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{x}_D) + \mathbf{c}_D^\top \mathbf{x}_D = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} - (\mathbf{c}_B^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} - \mathbf{c}_D^\top) \mathbf{x}_D = \hat{z} - \mathbf{r}_D^\top \mathbf{x}_D$$

其中  $\mathbf{r}_D^\top = \mathbf{c}_B^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} - \mathbf{c}_D^\top$  称为**检验数**。

注意  $\mathbf{x}_D \geq \mathbf{0}$ , 若  $\mathbf{r}_D \geq \mathbf{0}$ , 则  $z \leq \hat{z}$ , 即关于基  $\mathbf{B}$  的基本可行解就是最优解, 这就回答了前面的问题 3。若  $\mathbf{r}_D$  中某个分量为负, 则将  $\mathbf{x}_D$  中对应的非基变量从 0 变为正数可使目标函数值变大, 因此可取该非基变量对应的列入基, 这就回答了前面的问题 2。

基于此, 构造单纯形表

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}_B^\top & -\mathbf{c}_D^\top & 0 \end{bmatrix}$$

先做初等行变换将基  $\mathbf{B}$  变成单位阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}_B^\top & -\mathbf{c}_D^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}_B^\top & -\mathbf{c}_D^\top & 0 \end{bmatrix}$$

再做初等行变换将最后一行基变量对应的  $-\mathbf{c}_B^\top$  变成  $\mathbf{0}^\top$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}_B^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ -\mathbf{c}_B^\top & -\mathbf{c}_D^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{c}_B^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} - \mathbf{c}_D^\top & \mathbf{c}_B^\top \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b} \end{bmatrix}$$

这张表里包含了一切我们需要的信息:

- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$  里的每列就是当前非基向量在当前基下的线性表出系数;
- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$  是当前基对应的基本可行解中的基变量值;
- $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{D} - \mathbf{c}_D^T$  就是检验数, 可以指示下一个入基向量和是否已达最优解;
- $\mathbf{c}_B^T \mathbf{B}^{-1} \mathbf{b}$  就是当前基本可行解对应的目标函数值。

例 9 (用单纯形法再求例3中的线性规划)。根据式(3), 初始单纯形表为

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_3$ | 1     | 5     | 1     |       |       | 40 |
| $x_4$ | 2     | 1     |       | 1     |       | 20 |
| $x_5$ | 1     | 1     |       |       | 1     | 12 |
|       | -3    | -5    |       |       |       | 0  |

注意此时需要取 3 个线性无关的列组成初始的基, 然后做初等行变换将其变成单位阵, 因此直接取  $a_3$ 、 $a_4$ 、 $a_5$  是最省事的, 已经是单位阵了, 可以少做一次初等行变换:

- 基变量  $x_3$ 、 $x_4$ 、 $x_5$  的名字在最左列, 取值就是最右列的  $\mathbf{b}$
- 非基变量  $x_1$ 、 $x_2$  对应的检验数就是最后一行的  $-\mathbf{c}^T$
- 目标函数值就是右下角的 0

基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 \end{bmatrix}$$

对应  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[0,0]$ , 由于检验数还有负值, 因此还不是最优解。

取最小检验数对应的列入基 (改进幅度最大), 即  $a_2$  入基。注意

$$\mathbf{b} = 40a_3 + 20a_4 + 12a_5, \quad a_2 = 5a_3 + 1a_4 + 1a_5$$

计算  $\min\{40/5, 20/1, 12/1\}$  可知  $a_3$  出基。 $a_2$  和  $x_3$  所在的行的交点 5 称为**主元**, 做初等行变换

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |    |               | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_2$ | 1/5   | 1     | 1/5   |       |       | 8  | $\Rightarrow$ | $x_2$ | 1/5   | 1     | 1/5   |       | 8  |
| $x_4$ | 2     | 1     |       | 1     |       | 20 |               | $x_4$ | 9/5   | -1/5  | 1     |       | 12 |
| $x_5$ | 1     | 1     |       |       | 1     | 12 |               | $x_5$ | 4/5   | -1/5  |       | 1     | 4  |
|       | -3    | -5    |       |       |       | 0  |               |       | -2    | 1     |       |       | 40 |

基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 8 & 0 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

对应  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[0,8]$ , 由于检验数还有负值, 因此还不是最优解。

根据检验数  $a_1$  入基, 计算  $\min\{8/1/5, 12/9/5, 4/4/5\}$  可知  $a_5$  出基。做初等行变换

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$  | $a_4$ | $a_5$ |    | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$  | $a_4$ | $a_5$  |    |
|-------|-------|-------|--------|-------|-------|----|-------|-------|--------|-------|--------|----|
| $x_2$ | $1/5$ | 1     | $1/5$  |       |       | 8  | $x_2$ | 1     | $1/4$  |       | $-1/4$ | 7  |
| $x_4$ | $9/5$ |       | $-1/5$ | 1     |       | 12 | $x_4$ |       | $1/4$  | 1     | $-9/4$ | 3  |
| $x_1$ | 1     |       | $-1/4$ |       | $5/4$ | 5  | $x_1$ | 1     | $-1/4$ |       | $5/4$  | 5  |
|       | -2    |       | 1      |       |       | 40 |       |       | $1/2$  |       | $5/2$  | 50 |

基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

对应  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[5, 7]$ , 由于检验数均非负, 已达最优解。

注. 注意与例8中经过的基本可行解的顺序不一样, 本例中为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 8 & 0 & 12 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

例 10 (用单纯形法求例1中的分数背包问题). 根据式(1), 初始单纯形表为

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_5$ | 4     | 7     | 5     | 3     | 1     |       |       |       |       | 10 |
| $x_6$ | 1     |       |       |       |       | 1     |       |       |       | 1  |
| $x_7$ |       | 1     |       |       |       |       | 1     |       |       | 1  |
| $x_8$ |       |       | 1     |       |       |       |       | 1     |       | 1  |
| $x_9$ |       |       |       | 1     |       |       |       |       | 1     | 1  |
|       | -40   | -42   | -25   | -12   |       |       |       |       |       | 0  |

由于  $a_5$ 、 $a_6$ 、 $a_7$ 、 $a_8$ 、 $a_9$  构成单位阵, 取其做基, 基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

根据检验数  $a_2$  入基, 计算  $\min\{10/7, 1/1\}$  可知  $a_7$  出基。做初等行变换

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_5$ | 4     |       | 5     | 3     | 1     |       | -7    |       |       | 3  |
| $x_6$ | 1     |       |       |       |       | 1     |       |       |       | 1  |
| $x_2$ |       | 1     |       |       |       |       | 1     |       |       | 1  |
| $x_8$ |       |       | 1     |       |       |       |       | 1     |       | 1  |
| $x_9$ |       |       |       | 1     |       |       |       |       | 1     | 1  |
|       | -40   |       | -25   | -12   |       |       | 42    |       |       | 42 |

基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

根据检验数  $a_1$  入基, 计算  $\min\{3/4, 1/1\}$  可知  $a_5$  出基。做初等行变换

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |     |               | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_1$ | 1     |       | 5/4   | 3/4   | 1/4   |       | -7/4  |       |       | 3/4 | $\Rightarrow$ | $x_1$ | 1     | 5/4   | 3/4   | 1/4   |       | -7/4  |       |       | 3/4 |
| $x_6$ | 1     |       |       |       |       | 1     |       |       |       | 1   |               | $x_6$ |       | -5/4  | -3/4  | -1/4  | 1     | 7/4   |       |       | 1/4 |
| $x_2$ |       | 1     |       |       |       |       | 1     |       |       | 1   |               | $x_2$ |       | 1     |       |       |       | 1     |       |       | 1   |
| $x_8$ |       |       | 1     |       |       |       |       | 1     |       | 1   |               | $x_8$ |       |       | 1     |       |       |       | 1     |       | 1   |
| $x_9$ |       |       |       | 1     |       |       |       |       | 1     | 1   |               | $x_9$ |       |       |       | 1     |       |       |       | 1     | 1   |
|       | -40   |       | -25   | -12   |       |       | 42    |       |       | 42  |               |       |       | 25    | 18    | 10    | 40    | -28   |       |       | 72  |

基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

根据检验数  $a_7$  入基, 计算  $\min\{1/4/7/4, 1/1\}$  可知  $a_6$  出基。做初等行变换

|       | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |     |               | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ |     |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| $x_1$ | 1     |       | 5/4   | 3/4   | 1/4   |       | -7/4  |       |       | 3/4 | $\Rightarrow$ | $x_1$ | 1     |       |       |       | 7/4   |       |       |       | 1   |
| $x_7$ |       |       | -5/7  | -3/7  | -1/7  | 1     | 1     |       |       | 1/7 |               | $x_7$ |       | -5/7  | -3/7  | -1/7  | 1     | 1     |       |       | 1/7 |
| $x_2$ |       | 1     |       |       |       |       | 1     |       |       | 1   |               | $x_2$ |       | 1     | 5/7   | 3/7   | 1/7   | -1    |       |       | 6/7 |
| $x_8$ |       |       | 1     |       |       |       |       | 1     |       | 1   |               | $x_8$ |       |       | 1     |       |       |       | 1     |       | 1   |
| $x_9$ |       |       |       | 1     |       |       |       |       | 1     | 1   |               | $x_9$ |       |       |       | 1     |       |       |       | 1     | 1   |
|       |       |       | 25    | 18    | 10    | 40    | -28   |       |       | 72  |               |       |       | 5     | 6     | 6     | 68    |       |       |       | 76  |

基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ 1 & 6/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

由于检验数均非负, 已达最优解。

注. 四个物品是按单价从高到低排好序的, 根据最优解, 先装单价最高的物品 1, 用掉 4 个单位重量, 剩下 6 个单位重量全部用于装单价次高的物品 2, 事实上分数背包问题是可以贪心法来做的。

最后还剩问题 1 没有回答, 前面两个例子只有  $a^T x \leq b$  型约束, 每个约束引入一个松弛变量, 天然产生一个单位阵, 直接取这个单位阵作为初始基, 最右的  $b$  就是基本解中基变量的取值, 而我们开始假定了  $b \geq 0$ , 因此这个基本解也是可行解, 从而单纯形法可以由此迭代下去。

当存在其他约束时, 初始单纯形表里就没有现成的单位阵了, 如果随便取  $m$  列作为基, 如何确保它们线性无关? 此外做初等行变换将基变成单位阵, 如何确保得到的基本解是可行解? 对此可采用下节的两阶段单纯形法。

## 5 两阶段单纯形法

针对线性规划的标准型，构造如下的辅助问题：

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{1}^\top \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}, \mathbf{y} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

辅助问题依然是个线性规划标准型，辅助变量  $\mathbf{y}$  引入了一个单位阵，因此有一个天然的基本可行解。

**定理 11.** 原线性规划问题存在基本可行解当且仅当辅助问题存在使目标函数值为 0 的最优解。

**证明.**  $\Rightarrow$ ：设原问题存在基本可行解  $\mathbf{x}$ ，则  $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$  是辅助问题的基本可行解。显然辅助问题的目标函数最小值为 0，因此这也是辅助问题的最优解。

$\Leftarrow$ ：设辅助问题存在使目标函数值为 0 的最优解  $\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}$ ，则必然  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ，于是  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ， $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ ，即  $\mathbf{x}$  是原问题的可行解，根据线性规划基本定理，原问题存在基本可行解。 ♣

**例 12** (用两阶段单纯形法求例2中的最大流问题). 由于原问题有四个由流量守恒产生的等式约束，因此转化成式(2)的标准型后， $\mathbf{A}$  中没有单位阵，为 13 个等式约束引入辅助标量  $y_1, \dots, y_{13}$ ，构造辅助问题

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_{10} = 16 \\ & x_2 + x_{11} = 13 \\ & x_3 + x_{12} = 4 \\ & x_4 + x_{13} = 12 \\ & x_5 + x_{14} = 9 \\ & x_6 + x_{15} = 14 \\ & x_7 + x_{16} = 7 \\ & x_8 + x_{17} = 20 \\ & x_9 + x_{18} = 4 \\ & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\ & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\ & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\ & x_i \geq 0, i \in [18] \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{ll} \max & -y_1 - \dots - y_{13} \\ \text{s.t.} & x_1 + x_{10} + y_1 = 16 \\ & x_2 + x_{11} + y_2 = 13 \\ & x_3 + x_{12} + y_3 = 4 \\ & x_4 + x_{13} + y_4 = 12 \\ & x_5 + x_{14} + y_5 = 9 \\ & x_6 + x_{15} + y_6 = 14 \\ & x_7 + x_{16} + y_7 = 7 \\ & x_8 + x_{17} + y_8 = 20 \\ & x_9 + x_{18} + y_9 = 4 \\ & x_1 + x_3 - x_4 + y_{10} = 0 \\ & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 + y_{11} = 0 \\ & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 + y_{12} = 0 \\ & x_6 - x_7 - x_9 + y_{13} = 0 \\ & x_i \geq 0, i \in [18] \\ & y_j \geq 0, j \in [13] \end{array}$$

初始单纯形表为

|          | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $a_{16}$ | $a_{17}$ | $a_{18}$ | $a_{19}$ | $a_{20}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $a_{26}$ | $a_{27}$ | $a_{28}$ | $a_{29}$ | $a_{30}$ | $a_{31}$ |    |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----|
| $y_1$    | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 16 |
| $y_2$    |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 13 |
| $y_3$    |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 4  |
| $y_4$    |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 12 |
| $y_5$    |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 9  |
| $y_6$    |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          | 14 |
| $y_7$    |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          | 7  |
| $y_8$    |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          | 20 |
| $y_9$    |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          | 4  |
| $y_{10}$ | 1     |       | 1     | -1    |       |       |       |       |       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          | 0  |
| $y_{11}$ |       | 1     | -1    |       | 1     | -1    |       |       |       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          | 0  |
| $y_{12}$ |       |       |       | 1     | -1    |       | 1     | -1    |       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          | 0  |
| $y_{13}$ |       |       |       |       |       | 1     | -1    |       | -1    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        | 0  |
|          |       |       |       |       |       |       |       |       |       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 0  |

做初等行变换更新最后一行

|          | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $a_{16}$ | $a_{17}$ | $a_{18}$ | $a_{19}$ | $a_{20}$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ | $a_{24}$ | $a_{25}$ | $a_{26}$ | $a_{27}$ | $a_{28}$ | $a_{29}$ | $a_{30}$ | $a_{31}$ |     |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----|
| $y_1$    | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 16  |
| $y_2$    |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 13  |
| $y_3$    |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 4   |
| $y_4$    |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 12  |
| $y_5$    |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 9   |
| $y_6$    |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          | 14  |
| $y_7$    |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          | 7   |
| $y_8$    |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          | 20  |
| $y_9$    |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          |          |          | 4   |
| $y_{10}$ | 1     |       | 1     | -1    |       |       |       |       |       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          | 0   |
| $y_{11}$ |       | 1     | -1    |       | 1     | -1    |       |       |       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          |          | 0   |
| $y_{12}$ |       |       |       | 1     | -1    |       | 1     | -1    |       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        |          | 0   |
| $y_{13}$ |       |       |       |       |       | 1     | -1    |       | -1    |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | 1        | 0   |
|          | -2    | -2    | -1    | -1    | -1    | -1    | -1    |       |       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       | -1       |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          |          | -99 |

基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} & x_{16} & x_{17} & x_{18} & 16 & 13 & 4 & 12 & 9 & 14 & 7 & 20 & 4 & y_{10} & y_{11} & y_{12} & y_{13} \end{bmatrix}$$

\*\*\*\*\*8 根据检验数  $a_1$  入基，计算  $\min\{3/4, 1/1\}$  可知  $a_5$  出基。做初等行变换

例 13. 用单纯形法求例2中的最大流问题，根据式(2)，标准型为：

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 + x_{10} = 16 \\
 & x_2 + x_{11} = 13 \\
 & x_3 + x_{12} = 4 \\
 & x_4 + x_{13} = 12 \\
 & x_5 + x_{14} = 9 \\
 & x_6 + x_{15} = 14 \\
 & x_7 + x_{16} = 7 \\
 & x_8 + x_{17} = 20 \\
 & x_9 + x_{18} = 4 \\
 & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
 & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
 & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
 & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\
 & x_i \geq 0, i \in [18]
 \end{aligned}$$

共有 18 个变量、13 个等式约束，因此基变量有 13 个，非基变量有 5 个。初始不妨取  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_4$ 、 $x_5$ 、 $x_7$  为非基变量，将基变量由  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_4$ 、 $x_5$ 、 $x_7$  表出：

$$\begin{aligned}
 x_3 = -x_1 + x_4 & \Rightarrow x_1 + x_3 - x_4 = 0 & \Rightarrow -x_1 + x_4 + y_3 = 4 \\
 x_8 = x_4 - x_5 + x_7 & \Rightarrow -x_4 + x_5 - x_7 + x_8 = 0 & \Rightarrow x_4 - x_5 + x_7 + y_8 = 20 \\
 x_6 = x_2 + x_5 - x_3 & \Rightarrow -x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 0 & \Rightarrow x_1 + x_2 - x_4 + x_5 + y_6 = 14 \\
 x_9 = x_6 - x_7 & \Rightarrow -x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_7 + x_9 = 0 & \Rightarrow x_1 + x_2 - x_4 + x_5 - x_7 + y_9 = 4
 \end{aligned}$$

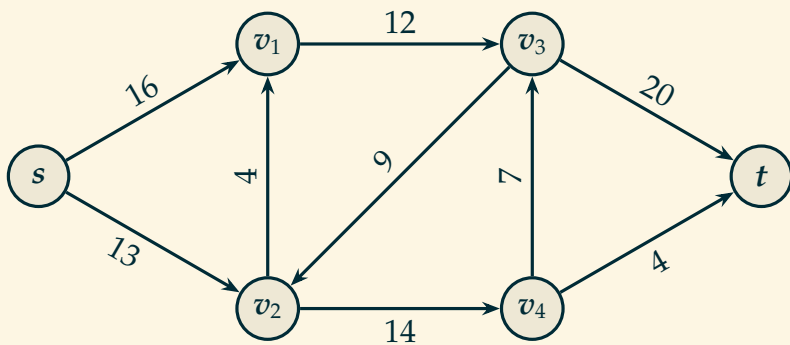
初始单纯形表为

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_3$ | 1     |       | 1     | -1    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0  |
| $x_6$ | -1    | -1    |       | 1     | -1    | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0  |
| $x_8$ |       |       |       | -1    | 1     |       | -1    | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0  |
| $x_9$ | -1    | -1    |       | 1     | -1    |       | 1     |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0  |
| $y_1$ | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 16 |
| $y_2$ |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       | 13 |
| $y_3$ | -1    |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       | 4  |
| $y_4$ |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       | 12 |
| $y_5$ |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       | 9  |
| $y_6$ | 1     | 1     |       | -1    | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       | 14 |
| $y_7$ |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       | 7  |
| $y_8$ |       |       |       | 1     | -1    |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       | 20 |
| $y_9$ | 1     | 1     |       | -1    | 1     |       | -1    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | 4  |
|       | -1    | -1    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0  |

基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 13 & 4 & 12 & 9 & 14 & 7 & 20 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

对应的流网络为





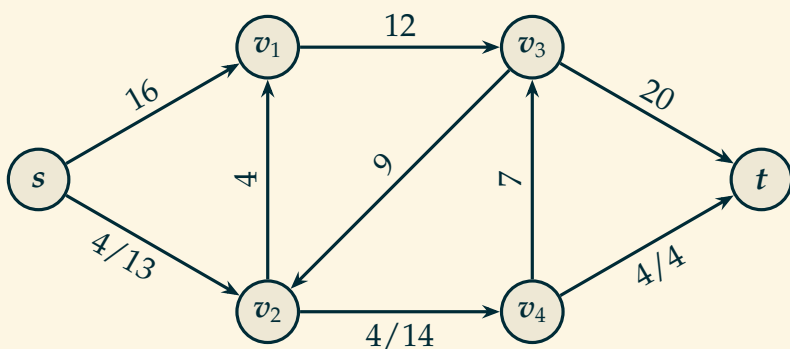
$a_1$ 、 $a_2$  的检验数均为  $-1$ ，不妨让  $a_2$  入基，计算  $\operatorname{argmin}\{^{13/1, 14/1, 4/1}\}$  可知  $a_{18}$  出基。做初等行变换

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_3$ | 1     |       | 1     | -1    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0  |
| $x_6$ |       |       |       |       |       | 1     | -1    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | -1    | 4  |
| $x_8$ |       |       |       | -1    | 1     |       | -1    | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0  |
| $x_9$ |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | 4  |
| $y_1$ | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 16 |
| $y_2$ | -1    |       |       | 1     | -1    |       | 1     |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       | -1    | 9  |
| $y_3$ | -1    |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       | 4  |
| $y_4$ |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       | 12 |
| $y_5$ |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       | 9  |
| $y_6$ |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       | -1    | 10 |
| $y_7$ |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       | 7  |
| $y_8$ |       |       |       | 1     | -1    |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       | 20 |
| $x_2$ | 1     | 1     |       | -1    | 1     |       | -1    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | 4  |
|       |       |       |       | -1    | 1     |       | -1    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | 4  |

当前基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 16 & 9 & 4 & 12 & 9 & 10 & 7 & 20 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



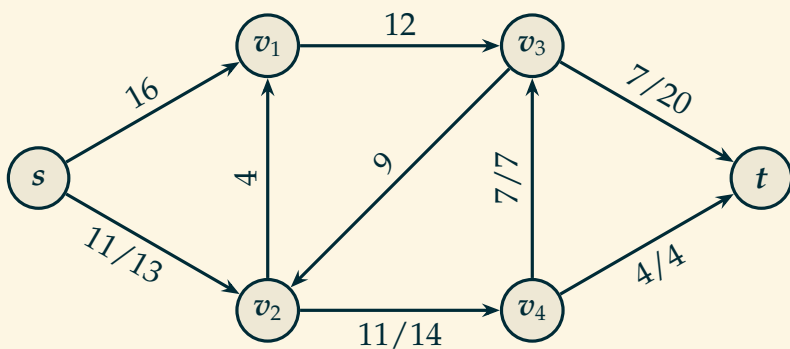
$a_4$ 、 $a_7$  的检验数均为  $-1$ ，不妨让  $a_7$  入基，计算  $\operatorname{argmin}\{9/1, 10/1, 7/1, 20/1\}$  可知  $a_{16}$  出基。做初等行变换

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_3$ | 1     |       | 1     | -1    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0  |
| $x_6$ |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | -1    |       | 11 |
| $x_8$ |       |       |       | -1    | 1     |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       | 7  |
| $x_9$ |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | 4  |
| $y_1$ | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 16 |
| $y_2$ | -1    |       |       | 1     | -1    |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       | -1    | -1    | 2  |
| $y_3$ | -1    |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       | 4  |
| $y_4$ |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       | 12 |
| $y_5$ |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       | 9  |
| $y_6$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | -1    | -1    |       | 3  |
| $x_7$ |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       | 7  |
| $y_8$ |       |       |       | 1     | -1    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | -1    | 1     |       | 13 |
| $x_2$ | 1     | 1     |       | -1    | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       | 1     | 11 |
|       |       |       |       | -1    | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       | 1     | 11 |

当前基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 11 & 7 & 7 & 4 & 16 & 2 & 4 & 12 & 9 & 3 & 0 & 13 & 0 & 11 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



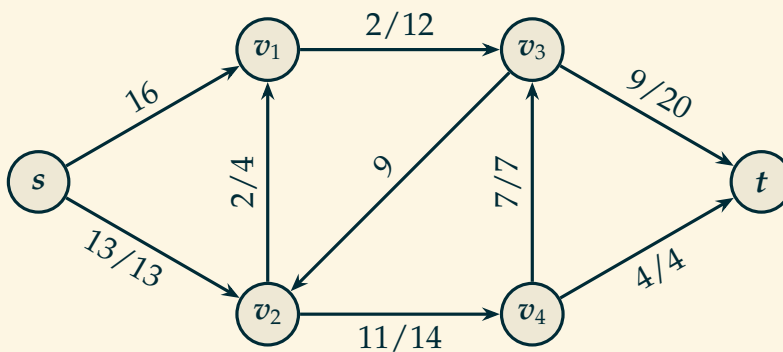
根据检验数  $a_4$  入基, 计算  $\operatorname{argmin}\{2/1, 4/1, 12/1, 13/1\}$  可知  $a_{11}$  出基。做初等行变换

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_3$ |       |       | 1     |       | -1    |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       | -1    |       | -1    | 2  |
| $x_6$ |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       | -1    | 11 |
| $x_8$ | -1    |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       | -1    | 9  |
| $x_9$ |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | 4  |
| $y_1$ | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 16 |
| $x_4$ | -1    |       |       | 1     | -1    |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       | -1    |       | -1    | 2  |
| $y_3$ |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       | -1    | 1     |       |       |       | 1     |       | 1     | 2  |
| $y_4$ | 1     |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       | -1    |       | 1     |       |       | 1     |       | 1     | 10 |
| $y_5$ |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       | 9  |
| $y_6$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | -1    |       | -1    | 3  |
| $x_7$ |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       | 7  |
| $y_8$ | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       | -1    |       |       |       |       |       | 1     | 1     | 11 |
| $x_2$ |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       | 13 |
|       | -1    |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       | 13 |

当前基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 13 & 2 & 2 & 0 & 11 & 7 & 9 & 4 & 16 & 0 & 2 & 10 & 9 & 3 & 0 & 11 & 0 & 13 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



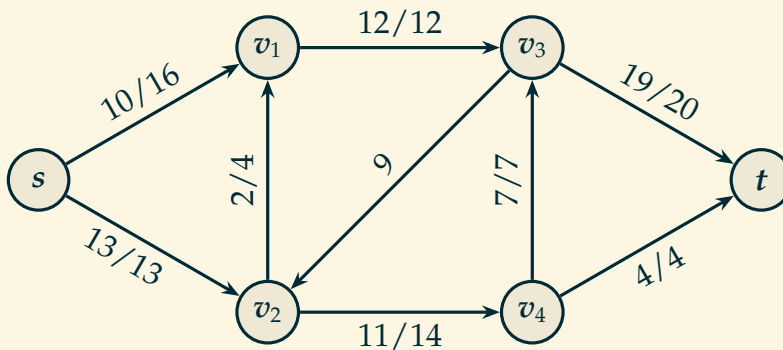
根据检验数  $a_1$  入基，计算  $\operatorname{argmin}\{16/1, 10/1, 11/1\}$  可知  $a_{13}$  出基。做初等行变换

|       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ | $y_9$ |    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $x_3$ |       |       | 1     |       | -1    |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       | -1    | -1    | -1    | 2  |
| $x_6$ |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | -1    | -1    | 11 |
| $x_8$ |       |       |       |       | 1     |       |       | 1     |       |       |       |       | 1     |       |       | 1     |       |       | 19 |
| $x_9$ |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | 4  |
| $y_1$ |       |       |       |       | -1    |       |       |       |       | 1     | 1     |       | -1    |       |       | -1    | -1    | -1    | 6  |
| $x_4$ |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       | 12 |
| $y_3$ |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       | -1    | 1     |       |       |       | 1     | 1     | 1     | 2  |
| $x_1$ | 1     |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       | -1    |       | 1     |       |       | 1     | 1     | 1     | 10 |
| $y_5$ |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       | 9  |
| $y_6$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     | -1    | -1    | -1    | 3  |
| $x_7$ |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       | 7  |
| $y_8$ |       |       |       |       | -1    |       |       |       |       |       |       |       | -1    |       |       | -1    | 1     |       | 1  |
| $x_2$ |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       | 13 |
|       |       |       |       |       | 1     |       |       |       |       |       |       |       | 1     |       |       | 1     |       | 1     | 23 |

当前基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 10 & 13 & 2 & 12 & 0 & 11 & 7 & 19 & 4 & 6 & 0 & 2 & 0 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0 & 23 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



由于检验数均非负，已达最优解。

注. 在最大流的例子中，初始单纯形表中不存在单位阵，需先做一步初等行变换，也可采用两阶段单纯形法。