

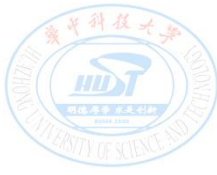


# 算法设计与分析

Computer Algorithm Design & Analysis

文明

[mwenaa@hust.edu.cn](mailto:mwenaa@hust.edu.cn)



# 第12讲

## All-Pairs Shortest Paths

---

所有结点对的最短路径问题

## 一个新的最短路径问题：

给定一个带权重的**有向图** $G=(V,E)$ ，其权重函数为 $\omega:E\rightarrow\mathbb{R}$ 。  
在图中，对**所有的结点对**  $u,v\in V$ ，找出从结点 $u$ 到结点 $v$ 的最短路径。

该问题的解以**表格**（二维数组）的形式给出：第 $u$ 行第 $v$ 列给出从结点 $u$ 到结点 $v$ 的最短路径权重。

➤ **一条路径的权重是组成该路径的所有边的权重之和。**

## 本章约定:

- 1) **结点编号**: 不失一般性, 结点编号为  $1, 2, \dots, |V|$ 。
- 2) **成本邻接矩阵**: 图  $G$  用一个  $n \times n$  的邻接矩阵  $W = (w_{ij})$  表示, 其中,

$$w_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{若 } i = j \\ \text{有向边 } (i, j) \text{ 的权重} & \text{若 } i \neq j \text{ 且 } (i, j) \in E \\ \infty & \text{若 } i \neq j \text{ 且 } (i, j) \notin E \end{cases}$$

- 3) **允许存在权重为负值的边, 但不能包含权重为负值的环路。**
  - 否则无解。

- 4) **最短路径矩阵**: 算法的输出为一个  $n \times n$  的**最短路径矩阵**

**$D = (d_{ij})$** , 其中  $d_{ij}$  表示从结点  $i$  到结点  $j$  的一条最短路径的权重。算法结束时有  **$d_{ij} = \delta(i, j)$** 。

## 5) 前驱结点矩阵:

前驱结点矩阵记为:  $\Pi = (\pi_{ij})$ , 其中

$$\pi_{ij} = \begin{cases} NIL, & \text{若 } i = j \text{ 或者从 } i \text{ 到 } j \text{ 不存在路径} \\ \text{从结点 } i \text{ 到结点 } j \text{ 的某条最短路径上结点 } j \text{ 的前驱结点, 否则} \end{cases}$$

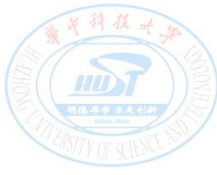
■ 利用前驱结点矩阵  $\Pi$  可以计算出每对结点间的最短路径。

前驱结点矩阵  $\Pi$  的第  $i$  行所诱导 (induce) 的子图是一棵根结点为  $i$  的最短路径树。

对于每个结点  $i \in V$ , 定义图  $G$  对于结点  $i$  的**前驱子图**为

$$V_{\pi,i} = \{j \in V : \pi_{ij} \neq NIL\} \cup \{i\}$$

$$E_{\pi,i} = \{(\pi_{ij}, j) : j \in V_{\pi,i} - \{i\}\} .$$



## 6) PRINT-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATH过程:

如果 $G_{\pi,i}$ 是一棵最短路径树, 则**PRINT-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATH**过程输出从结点*i*到结点*j*的一条最短路径。

PRINT-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATH( $\Pi, i, j$ )

```
1  if  $i == j$ 
2      print  $i$ 
3  elseif  $\pi_{ij} == \text{NIL}$ 
4      print “no path from”  $i$  “to”  $j$  “exists”
5  else PRINT-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATH( $\Pi, i, \pi_{ij}$ )
6      print  $j$ 
```



## 25.1 最短路径和矩阵乘法

本节给出有向图所有结点对最短路径问题的一种**动态规划算法**。时间复杂度 $\Theta(V^4)$ ，然后改进到 $\Theta(V^3 \lg V)$ 。

### ■最短路径的最优子结构性质：每条路径都是最短路径

考虑从结点*i*到结点*j*的一条最短路径*p*。假定*p*至多包含*m*条边（假定没有权重为负值的环路），且*m*为有限值。

- 如果*i=j*，则*p*中不包含任何边，所以*p*的权重等于0；
- 如果*i≠j*，则将路径*p*分解为  $i \xrightarrow{p'} k \rightarrow j$ ，其中
  - *p'*至多包含*m-1*条边，根据引理24.1，*p'*是从*i*到*k*的一条最短路径，
  - 且 $\delta(i, j) = \delta(i, k) + w_{kj}$ 。



## ■ 递归解

设  $l_{ij}^{(m)}$  是从结点i到结点j的**至多包含m条边**的任意路径中的最小权重。

- ▶ 当 $m=0$ 时，表示从结点i到结点j**中间没有边**的最短路径，  
所以有

$$l_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i = j, \\ \infty & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

- ▶ 当 $m \geq 1$ 时，可以在  $l_{ij}^{(m-1)}$  的基础上计算从i到j的**最多由m条边**组成的任意路径的最小权重  $l_{ij}^{(m)}$  。
- ▶  $l_{ij}^{(m-1)}$  是从i到j最多由 $m-1$ 条边组成的最短路径的权重。



- $l_{ij}^{(m)}$  的计算：通过对j的所有可能的前驱k进行检查获得。

$$\begin{aligned} l_{ij}^{(m)} \text{ 的递归定义: } l_{ij}^{(m)} &= \min \left( l_{ij}^{(m-1)}, \min_{1 \leq k \leq n} \{ l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj} \} \right) \\ &= \min_{1 \leq k \leq n} \{ l_{ik}^{(m-1)} + w_{kj} \} . \end{aligned}$$

含有  $l_{ij}^{(m-1)}$

- 结点间的最短路径权重  $\delta(i,j)$

如果图G不包含权重为负值的环路，则对于每一对结点i和j，如果  $\delta(i,j) < \infty$ ，则从i到j之间存在一条最短路径。并且，由于最短路径是简单路径，其中至多包含n-1条边，因此有：

$$\delta(i, j) = l_{ij}^{(n-1)}$$

且：

$$\delta(i, j) = l_{ij}^{(n-1)} = l_{ij}^{(n)} = l_{ij}^{(n+1)} = \dots$$

## ■ 自底向上计算最短路径权重

(1)  $I_{ij}^{(1)}$  表示从结点i到结点j中间至多包含1条边的路径的最小权重，因此  $I_{ij}^{(1)} = w_{ij}$ 。

(2) 自底向上计算方法：

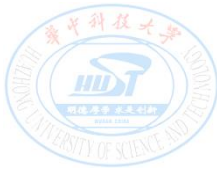
根据输入矩阵  $W = (w_{ij})$ ，计算  $L(1) = (I_{ij}^{(1)})$ ，然后根据递归关系式计算  $L(2)$ 、 $\dots$ 、 $L(n-1)$ 。其中，

$$L^1 = (w_{ij}) = W$$

$$L^m = I_{ij}^{(m)}, \quad m=1, 2, \dots, n-1.$$

(3)  $L(n-1)$  即是最后的最短路径权重结果矩阵，有

$$I_{ij}^{(n-1)} = \delta(i, j)$$



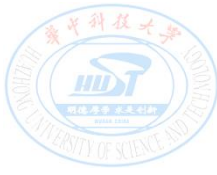
# 自底向上计算算法的伪代码表示

EXTEND-SHORTEST-PATHS算法在给定 $W$ 和 $L^{(m-1)}$ 的情况下计算 $L^{(m)}$  :

EXTEND-SHORTEST-PATHS( $L, W$ )

```
1   $n = L.rows$ 
2  let  $L' = (l'_{ij})$  be a new  $n \times n$  matrix
3  for  $i = 1$  to  $n$ 
4      for  $j = 1$  to  $n$ 
5           $l'_{ij} = \infty$ 
6          for  $k = 1$  to  $n$ 
7               $l'_{ij} = \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$ 
8  return  $L'$ 
```

- 算法将最近计算出的最短路径扩展一条边：
  - 找一条从 $i$ 到某结点 $k$ ，再经过边 $(k, j)$ 到达 $j$ 的更短路径。
- 算法结束时返回结果矩阵 $L' = L^{(m)}$ 。
- 时间复杂度 $O(n^3)$ 。



所以从上述L的计算过程以及与矩阵乘法的对比可以看出：

设 $A \bullet B$ 表示由算法EXTEND-SHORTEST-PATHS(A, B)返回的矩阵“乘积”，可以得到以下从 $L^{(1)}$ 到 $L^{(n-1)}$ 的计算序列：

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= L^{(0)} \cdot W = W, \\ L^{(2)} &= L^{(1)} \cdot W = W^2, \\ L^{(3)} &= L^{(2)} \cdot W = W^3, \\ &\vdots \\ L^{(n-1)} &= L^{(n-2)} \cdot W = W^{n-1}. \end{aligned}$$

矩阵 $L^{(n-1)}=W^{(n-1)}$ 将包含最短路径权重

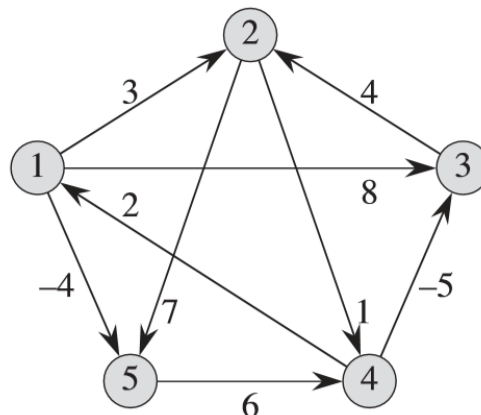
计算矩阵序列的过程：

SLOW-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS( $W$ )

```
1   $n = W.rows$ 
2   $L^{(1)} = W$ 
3  for  $m = 2$  to  $n - 1$ 
4      let  $L^{(m)}$  be a new  $n \times n$  matrix
5       $L^{(m)} = \text{EXTEND-SHORTEST-PATHS}(L^{(m-1)}, W)$ 
6  return  $L^{(n-1)}$ 
```

时间复杂度： $O(n^4)$

例：已知有向图：



EXTEND-SHORTEST-PATHS( $L, W$ )

```

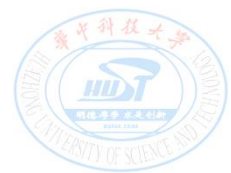
1   $n = L.rows$ 
2  let  $L' = (l'_{ij})$  be a new  $n \times n$  matrix
3  for  $i = 1$  to  $n$ 
4      for  $j = 1$  to  $n$ 
5           $l'_{ij} = \infty$ 
6      for  $k = 1$  to  $n$ 
7           $l'_{ij} = \min(l'_{ij}, l_{ik} + w_{kj})$ 
8  return  $L'$ 
    
```

**SLOW-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS**的计算过程：

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad L^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & \infty & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad L^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 2 & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ 8 & 5 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵序列： $L^{(1)} \rightarrow L^{(2)} \rightarrow L^{(3)} \rightarrow L^{(4)}$ 。而任何 $m \geq 4$ ， $L^{(m)} = L^{(4)}$ 。



## 改进的算法:

我们的目标是算出矩阵 $L^{(n-1)}$ ，而对所有 $m \geq n-1$ ， $L^{(m)} = L^{(n-1)}$ ，因此可用以下 $\lceil \lg(n-1) \rceil$ 个矩阵乘过程来计算矩阵 $L^{(n-1)}$ ，而不是依次计算所有的 $L^{(1)} \sim L^{(n-1)}$ 矩阵。

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= W, \\ L^{(2)} &= W^2 = W \cdot W, \\ L^{(4)} &= W^4 = W^2 \cdot W^2, \\ L^{(8)} &= W^8 = W^4 \cdot W^4, \\ &\vdots \\ L^{(2^{\lceil \lg(n-1) \rceil})} &= W^{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil}} = W^{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1}} \cdot W^{2^{\lceil \lg(n-1) \rceil - 1}}. \end{aligned}$$

**注：**由于  $2^{\lceil \lg(n-1) \rceil} \geq n-1$ ，所以最后的乘积  $L^{(2^{\lceil \lg(n-1) \rceil})}$  等于 $L^{(n-1)}$ 。

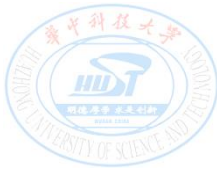
## 改进的计算过程如下:

下面的过程使用 “**重复平方技术**” (**repeated squaring**) 来计算上述矩阵序列:

FASTER-ALL-PAIRS-SHORTEST-PATHS( $W$ )

```
1   $n = W.rows$ 
2   $L^{(1)} = W$ 
3   $m = 1$ 
4  while  $m < n - 1$ 
5      let  $L^{(2m)}$  be a new  $n \times n$  matrix
6       $L^{(2m)} = \text{EXTEND-SHORTEST-PATHS}(L^{(m)}, L^{(m)})$ 
7       $m = 2m$ 
8  return  $L^{(m)}$ 
```

- 计算从 $m=1$ 开始, 每次迭代后对 $m$ 加倍;
- 最后计算的 $L^{(2m)}$ 即是 $L^{(n-1)}$ :  $L^{(2m)} = L^{(n-1)}$ , 其中 $n-1 \leq 2m \leq 2n-2$ 。
- 算法的运行时间是:  $O(n^3 \lg n)$ 。



## 25.2 Floyd-Warshall算法

本节讨论另一种动态规划策略来求解有向图的所有结点对最短路径问题——Floyd-Warshall算法。

- 算法的时间复杂度 $\Theta(V^3)$ 。
- 算法允许图中存在负权重的边，但不能存在权重为负值的环路。

### ■最短路径结构的重新描述：

**中间结点**：一条简单路径 $p = \langle v_1, v_2, \dots, v_l \rangle$ 上的**中间结点**是指路径 $p$ 上除 $v_1$ 和 $v_l$ 之外的其它任意结点。





假定图 $G$ 的结点集为 $V=\{1,2,\dots,n\}$ 。考虑其中的一个子集 $\{1,2,\dots,k\}$ ，这里 $k$ 是小于 $n$ 的某个整数，并是其中的最大编号。

对于任意一对结点 $i, j \in V$ ，定义 $p$ 是从 $i$ 到 $j$ 、且所有中间结点均取自于集合 $\{1,2,\dots,k\}$ 的最短路径。

■  $p$ 是简单路径，且 $p$ 的中间结点都不大于 $k$ 。

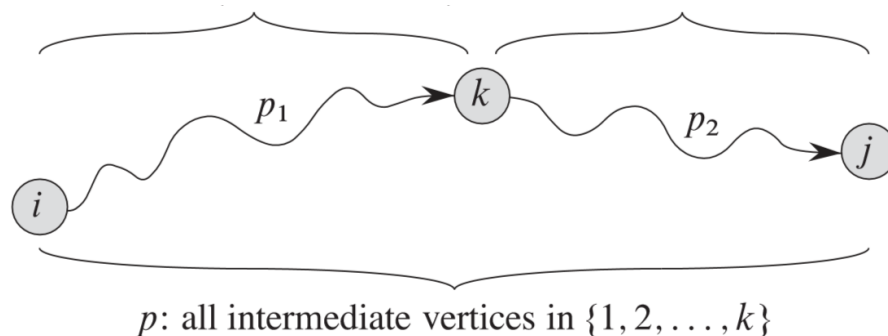
- $p$ 从 $i$ 到 $j$ ，仅经过集合 $\{1, 2, \dots, k\}$ 中的结点，但，
  - 不一定经过其中的每一个结点；
  - 也可能不存在这样的路径，此时 $p$ 的权重等于 $\infty$ 。

在从 $i$ 到 $j$ 之间中间结点均取自集合 $\{1,2,\dots,k-1\}$ 的基础上，试图回答这样一个问题：结点 $k$ 是否是路径 $p$ 上的一个中间结点？

## 结点k是否是路径p上的一个中间结点?

- 情况1: 如果结点k不是路径p上的中间结点, 则p上的所有中间结点都属于集合  $\{1, 2, \dots, k-1\}$ 。
  - 此时, 从结点i到结点j的中间结点取自集合  $\{1, 2, \dots, k-1\}$  的一条最短路径也是从结点i到结点j的中间结点取自集合  $\{1, 2, \dots, k\}$  的一条最短路径。

- 情况2：如果结点k是路径p上的中间结点，则k将路径p分解为两段： $i \xrightarrow{p_1} k \xrightarrow{p_2} j$



- 根据引理24.1（最优子结构性）， $p_1$ 是从结点i到结点k的一条最短路径，且中间结点全部取自集合 $\{1, 2, \dots, k-1\}$ 。

因为结点k不是路径 $p_1$ 上的中间结点，所以路径 $p_1$ 上的所有结点都属于集合 $\{1, 2, \dots, k-1\}$ 。

- 同理， $p_2$ 是从结点k到结点j的一条最短路径，且中间结点全部取自集合 $\{1, 2, \dots, k-1\}$ 。

## 状态转移方程：

设  $d_{ij}^{(k)}$  为从结点i到结点j的所有中间结点全部取自集合  $\{1, 2, \dots, k\}$  的一条最短路径的权重，则有：

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0, \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{if } k \geq 1. \end{cases}$$

其中，

- $k=0$ 时，代表从结点i到结点j的一条不包含编号大于0的中间结点的路径，这样的路径没有任何中间结点，最多只有一条边。所以  $d_{ij}^{(0)} = w_{ij}$ 。

$$d_{ij}^{(k)} = \begin{cases} w_{ij} & \text{if } k = 0, \\ \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}) & \text{if } k \geq 1. \end{cases}$$

- 而因为任何路径的中间结点都属于集合  $\{1, 2, \dots, n\}$ ，所以  $k=n$  时， $d_{ij}^{(n)}$  给出所有可能的从结点  $i$  到结点  $j$  的中间结点均取自集合  $\{1, 2, \dots, n\}$  的一条最短路径的权重，也就是从结点  $i$  到结点  $j$  的最短路径的权重。所以对所有的  $i, j \in V$  有：

$$d_{ij}^{(n)} = \delta(i, j)$$

- 矩阵  $D^{(n)} = (d_{ij}^{(n)})$  为结果矩阵。

## 算法描述:

FLOYD-WARSHALL( $W$ )

```
1   $n = W.rows$ 
2   $D^{(0)} = W$ 
3  for  $k = 1$  to  $n$ 
4      let  $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$  be a new  $n \times n$  matrix
5      for  $i = 1$  to  $n$ 
6          for  $j = 1$  to  $n$ 
7               $d_{ij}^{(k)} = \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$ 
8  return  $D^{(n)}$ 
```

- $W_{n \times n}$ : 权重邻接矩阵;
- $D_{n \times n}$ : 最短路径权重矩阵
- FLOYD-WARSHALL自底向上地完成D矩阵的计算。
- D矩阵的计算可以在原址上完成。



# 构建最短路径

在计算矩阵 $D^{(k)}$ 的同时，计算前驱矩阵 $\Pi$ 序列： $\Pi^{(0)}$ ， $\Pi^{(1)}$ ，  
 $\dots$ ， $\Pi^{(n)} = \Pi$ 。

其中，

- 为  $\pi_{ij}^{(k)}$  从结点 $i$ 到结点 $j$ 的一条所有中间结点都取自集合  $\{1, 2, \dots, k\}$  的最短路径上 $j$ 的前驱结点。

- $k=0$ 时：

$$\pi_{ij}^{(0)} = \begin{cases} \text{NIL} & \text{if } i = j \text{ or } w_{ij} = \infty, \\ i & \text{if } i \neq j \text{ and } w_{ij} < \infty. \end{cases}$$

➤  $k=0$ 时，是一条从 $i$ 到 $j$ 的没有中间结点的最短路径，所以当路径存在时 ( $w_{ij} < \infty$ )， $j$ 的前驱就是 $i$ 。

- $k \geq 1$ 时, 从结点*i*到结点*j*的一条所有中间结点都取自集合 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的最短路径或者经过*k*, 或者不经过*k*。

➤ 若不经过*k*, 则有  $d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$

➤ 此时求从结点*i*到结点*j*的所有中间结点都取自集合 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的最短路径上的*j*的前驱等价于求从结点*i*到结点*j*的所有中间结点都取自集合 $\{1, 2, \dots, k-1\}$ 的最短路径上的*j*的前驱。

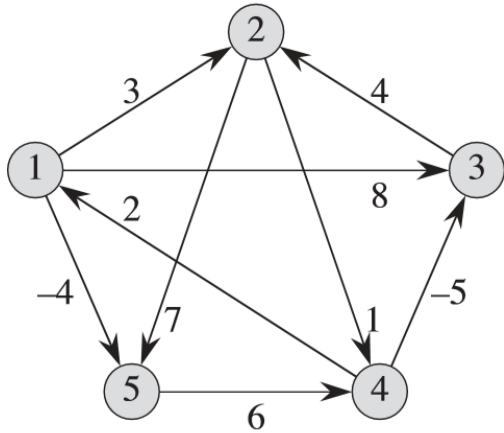
➤ 若经过*k*, 则有  $d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$

➤ 此时求从结点*i*到结点*j*的所有中间结点都取自集合 $\{1, 2, \dots, k\}$ 的最短路径上的*j*的前驱等价于求从结点*k*到结点*j*的所有中间结点都取自集合 $\{1, 2, \dots, k-1\}$ 的最短路径上的*j*的前驱。

$$\text{所以有 } \pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{if } d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}, \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{if } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}. \end{cases}$$



例：对下例， FLOYD-WARSHALL算法的计算过程如下：



$$D^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & -5 & 0 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(0)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\ 4 & \text{NIL} & 4 & \text{NIL} & \text{NIL} \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \infty & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \infty & \infty \\ 2 & \underline{5} & -5 & 0 & \underline{-2} \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(1)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} \\ 4 & \underline{1} & 4 & \text{NIL} & \underline{1} \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

$$D^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & \underline{4} & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & \underline{5} & \underline{11} \\ 2 & 5 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(2)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & \underline{2} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & \underline{2} & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & \underline{2} & \underline{2} \\ 4 & 1 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

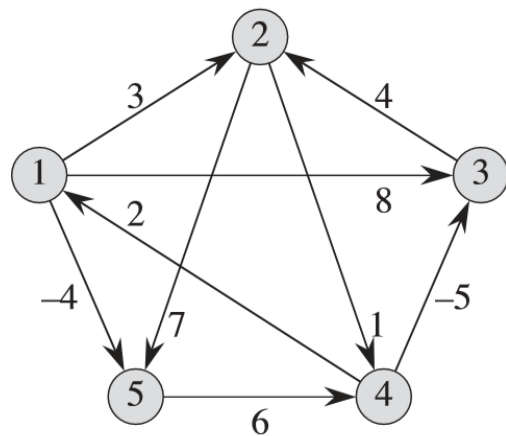
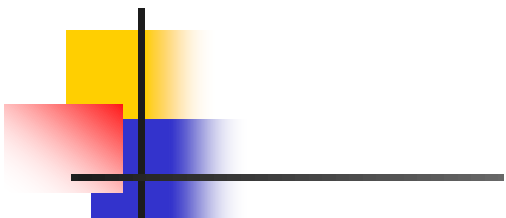
$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & \underline{-1} & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & 2 & 2 \\ 4 & \underline{3} & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

FLOYD-WARSHALL( $W$ )

```

1   $n = W.rows$ 
2   $D^{(0)} = W$ 
3  for  $k = 1$  to  $n$ 
4      let  $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$  be a new  $n \times n$  matrix
5      for  $i = 1$  to  $n$ 
6          for  $j = 1$  to  $n$ 
7               $d_{ij}^{(k)} = \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$ 
8  return  $D^{(n)}$ 
    
```



$$D^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 4 & -4 \\ \infty & 0 & \infty & 1 & 7 \\ \infty & 4 & 0 & 5 & 11 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \infty & \infty & \infty & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



$$D^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \underline{-1} & 4 & -4 \\ \underline{3} & 0 & \underline{-4} & 1 & \underline{-1} \\ \underline{7} & 4 & 0 & 5 & \underline{3} \\ \underline{2} & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \underline{8} & \underline{5} & \underline{1} & 6 & 0 \end{pmatrix}$$



$$D^{(5)} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{1} & \underline{-3} & \underline{2} & -4 \\ 3 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 7 & 4 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 0 & -2 \\ \underline{8} & \underline{5} & \underline{1} & \underline{6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Pi^{(3)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & 1 & 2 & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 2 & 2 \\ \text{NIL} & 3 & \text{NIL} & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \text{NIL} & \text{NIL} & \text{NIL} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$



$$\Pi^{(4)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & 1 & \underline{4} & 2 & 1 \\ \underline{4} & \text{NIL} & \underline{4} & 2 & \underline{1} \\ \underline{4} & 3 & \text{NIL} & 2 & \underline{1} \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ \underline{4} & \underline{3} & \underline{4} & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$



$$\Pi^{(5)} = \begin{pmatrix} \text{NIL} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & 1 \\ 4 & \text{NIL} & \underline{4} & \underline{2} & 1 \\ 4 & 3 & \text{NIL} & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & \text{NIL} & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 5 & \text{NIL} \end{pmatrix}$$

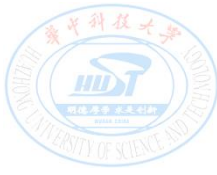
$$\pi_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \pi_{ij}^{(k-1)} & \text{if } d_{ij}^{(k-1)} \leq d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \\ \pi_{kj}^{(k-1)} & \text{if } d_{ij}^{(k-1)} > d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)} \end{cases}$$

# 算法时间分析

- 3层嵌套的for循环，所以时间是： $\Theta(n^3)$ 。

```
FLOYD-WARSHALL( $W$ )
1   $n = W.rows$ 
2   $D^{(0)} = W$ 
3  for  $k = 1$  to  $n$ 
4      let  $D^{(k)} = (d_{ij}^{(k)})$  be a new  $n \times n$  matrix
5      for  $i = 1$  to  $n$ 
6          for  $j = 1$  to  $n$ 
7               $d_{ij}^{(k)} = \min(d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)})$ 
8  return  $D^{(n)}$ 
```

**思考：**怎么在上述算法中加入计算 $\Pi$ 的代码？



# 有向图的传递闭包

定有向图 $G=(V, E)$ ，定义图 $G$ 的传递闭包 $G^*=(V, E^*)$ ，其中

$E^*=\{(i, j): \text{如果图} G \text{中包含一条从结点} i \text{到结点} j \text{的路径}\}$ 。

## 求有向图的传递闭包：

**方法一：**给 $E$ 中每条边赋权重1，然后运行FLOYD-WARSHALL算法，可以在 $\Theta(n^3)$ 求出权重路径矩阵 $D$ 。在 $D$ 中若 $d_{ij} < n$ ，则表示存在一条从结点 $i$ 到结点 $j$ 的路径；否则 $d_{ij} = \infty$ 。

**方法二：**定义矩阵 $T = \{t_{ij}\}$ ，若存在一条从结点 $i$ 到结点 $j$ 的路径， $t_{ij}=1$ ，否则 $t_{ij}=0$ 。

## 计算T

对FLOYD-WARSHALL算法进行改造：用**逻辑或**操作（**V**）和**逻辑与**操作（**^**）替换算术操作min和+，得以下计算公式：

$$k=0\text{时}, \quad t_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \text{ and } (i, j) \notin E, \\ 1 & \text{if } i = j \text{ or } (i, j) \in E, \end{cases}$$

$$k \geq 1\text{时}, \quad t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}) .$$

## 计算过程如下:

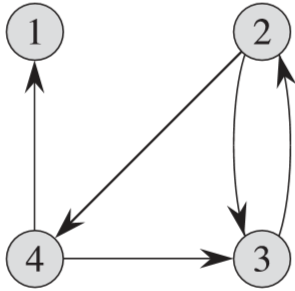
### TRANSITIVE-CLOSURE( $G$ )

```
1   $n = |G.V|$ 
2  let  $T^{(0)} = (t_{ij}^{(0)})$  be a new  $n \times n$  matrix
3  for  $i = 1$  to  $n$ 
4      for  $j = 1$  to  $n$ 
5          if  $i == j$  or  $(i, j) \in G.E$ 
6               $t_{ij}^{(0)} = 1$ 
7          else  $t_{ij}^{(0)} = 0$ 
8  for  $k = 1$  to  $n$ 
9      let  $T^{(k)} = (t_{ij}^{(k)})$  be a new  $n \times n$  matrix
10     for  $i = 1$  to  $n$ 
11         for  $j = 1$  to  $n$ 
12              $t_{ij}^{(k)} = t_{ij}^{(k-1)} \vee (t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)})$ 
13 return  $T^{(n)}$ 
```

时间复杂度:  $\Theta(n^3)$

注: 逻辑运算比算术运算快; 空间需求也较小

例，求如图所示的图G的传递闭包矩阵T。



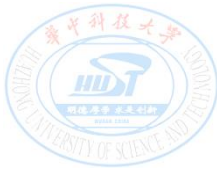
$$T^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \underline{1} \\ 0 & \underline{1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \underline{1} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \underline{1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ \underline{1} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

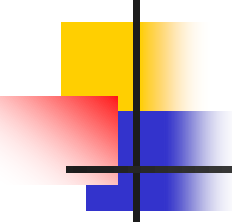


## 25.4 用于稀疏图的Johnson算法

对于有 $|V|$ 个结点、 $|E|$ 条边的有向图，求每对结点之间的最短路径：

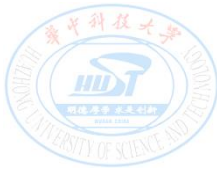
- FLOYD-WARSHALL算法的时间复杂度： $\Theta(n^3)$
- 用单源最短路径算法，执行 $|V|$ 次单源最短路径算法，每次使用一个不同的结点作为源点，求出每个结点到其他所有结点的最短路径。
- 如果所有的边的权重为非负值，用Dijkstra算法：
  - 用线性数组实现最小优先队列： $O(V^3+VE)=O(V^3)$ ；
  - 用二叉堆实现最小优先队列： $O(VE \lg V)$ ；（对稀疏图较好）
  - 用斐波那契堆实现最小优先队列： $O(V^2 \lg V + VE)$ ；



- 
- A decorative graphic in the top-left corner consisting of overlapping yellow, red, and blue squares with a black crosshair.
- 
- 用单源最短路径算法
  - 如果有权重为负值边，用Bellman-Ford算法：
    - 一般的运行时间： $O(V^2E)$ ；
    - 对稠密图，运行时间为 $O(V^4)$ 。

**Johnson算法**：在**稀疏图**中求每对结点之间的最短路径权重。

- 对稀疏图，Johnson算法优于Floyd-Warshall算法，时间复杂度可达 $O(V^2 \lg V + VE)$ 。
- Johnson算法使用**Dijkstra算法**和**Bellman-Ford算法**作为自己的子程序，可处理带有**负权重的图**。
- 如果图中包含所有结点对的最短路径，Johnson算法输出一个包含所有结点对的最短路径权重矩阵；否则报告图中包含权重为负值的环路。



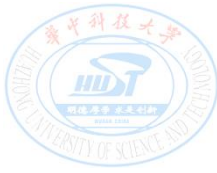
**重赋权重**：Johnson算法使用**重新赋予权重**的技术求解。

## 工作原理：

- 如果图 $G=(V, E)$ 中所有的边权重 $\omega$ 皆为非负值，则通过对每个结点运行一次**Dijkstra**算法来找到所有结点对之间的最短路径；
- 如果图 $G$ 包含权重为负值的边，但没有权重为负值的环路，则通过**重赋权重**，构造出一组**新的非负权重值**，然后使用上面同样的方法求解(**Dijkstra**算法)。

新赋予的权重函数记为： $\hat{w}$

- $\hat{w}$  必须满足以下两个重要性质：



新赋予的权重  $\hat{w}$  必须满足以下两个重要性质：

1. **路径等价性**：对于所有结点对  $u, v \in V$ ，一条路径  $p$  是在使用权重函数  $w$  时的从结点  $u$  到结点  $v$  的一条最短路径，**当且仅当**  $p$  是在使用权重  $\hat{w}$  时的从  $u$  到  $v$  的一条最短路径。

- 即不管是使用原来的权重函数还是新的权重函数，所能求出来的最短路径应是一致的。

2. **非负性**：对于所有的边  $(u, v)$ ，新权重  $\hat{w}(u, v)$  为非负值。

- 即，需要经过技术处理，把负权重的边的权重改造成非负值。



下面的引理，使得我们可以对边的权重重新赋值，  
以满足上面的两个条件：

这里，

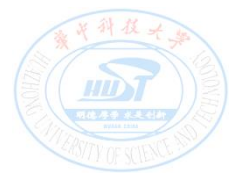
- 用  $\delta$  表示从权重函数  $\omega$  所导出的最短路径权重；
- 用  $\hat{\delta}$  表示从权重函数  $\hat{\omega}$  所导出的最短路径权重。

**引理25.1** (重新赋予权重并不改变最短路径) 给定带权重的有向图 $G=(V, E)$ , 其权重函数为 $\omega: E \rightarrow \mathbb{R}$ , 设 $h: V \rightarrow \mathbb{R}$ 为任意函数, **该函数将结点映射到实数上**。对于每条边 $(u, v) \in E$ , 定义

$$\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v) .$$

设 $p = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ 为从结点 $v_0$ 到结点 $v_k$ 的任意一条路径, 那么,  $p$ 是在使用权重函数 $\omega$ 时从结点 $v_0$ 到结点 $v_k$ 的一条最短路径, 当且仅当 $p$ 是在使用权重函数 $\hat{w}$ 时从结点 $v_0$ 到结点 $v_k$ 的一条最短路径, 即:  $\omega(p) = \delta(v_0, v_k)$  当且仅当  $\hat{w}(p) = \hat{\delta}(v_0, v_k)$  。

而且, 图 $G$ 在使用权重函数 $\omega$ 时不包含权重为负值的环路, 当且仅当 $p$ 在使用权重函数 $\hat{w}$ 也不包含权重为负值的环路。



## 证明:

(1) 首先证明:  $\hat{w}(p) = w(p) + h(v_0) - h(v_k)$

根据定义, 对于边有:  $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$ .

所以有:

$$\begin{aligned}\hat{w}(p) &= \sum_{i=1}^k \hat{w}(v_{i-1}, v_i) \\ &= \sum_{i=1}^k (w(v_{i-1}, v_i) + h(v_{i-1}) - h(v_i)) \\ &= \sum_{i=1}^k w(v_{i-1}, v_i) + h(v_0) - h(v_k) \\ &= w(p) + h(v_0) - h(v_k).\end{aligned}$$

因为 $h(v_0)$ 和 $h(v_k)$ 不依赖于任何具体路径, 因此, 如果从结点 $v_0$ 到结点 $v_k$ 的一条路径在使用权重函数 $w$ 时比另一条路径短, 则其在使用权重函数 $\hat{w}$ 时也比另一条短。因此 $w(p) = \delta(v_0, v_k)$ 当且仅当 $\hat{w}(p) = \hat{\delta}(v_0, v_k)$

然后证明：

若G在使用权重函数 $\omega$ 时包含一个权重为负值的环路当且仅当p在使用权重函数  $\hat{w}$  也包含一个权重为负值的环路。

考虑任意环路  $c = \langle v_0, v_1, \dots, v_k \rangle$ ，其中  $v_0 = v_k$ 。

因为 
$$\hat{w}(p) = w(p) + h(v_0) - h(v_k)$$

所以有 
$$\begin{aligned}\hat{w}(c) &= w(c) + h(v_0) - h(v_k) \\ &= w(c),\end{aligned}$$

因此，环路c在使用权重函数 $\omega$ 时为负当且仅当在使用权重函数 $\hat{w}$ 时也为负值

剩下的问题就是到哪里去找能使 $\hat{w}$  为非负的h函数映射



# 通过重新赋值来生成非负权重

对于图 $G$ 构造一幅新图 $G'=(V', E')$ ，其中

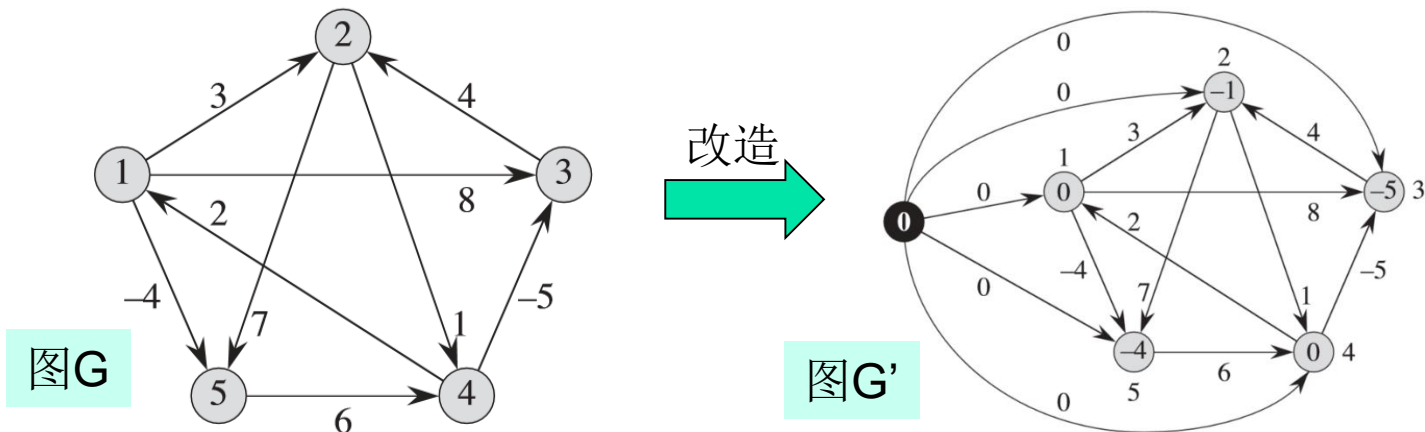
$$V' = V \cup \{s\}, \quad s \text{ 是一个新结点}, \quad s \notin V,$$

$$E' = E \cup \{(s, v) : v \in V\} \quad .$$

并令，对于所有结点 $v \in V$ ，有 $\omega(s, v)=0$ 。

注：由于结点 $s$ 没有入边，所以除了以 $s$ 为源点的最短路径外，图 $G'$ 中没有其它包含 $s$ 的最短路径。而且 $G'$ 不包含权重为负值的环路当且仅当图 $G$ 不包含权重为负值的环路。

如：



假定图 $G$ 和图 $G'$  都不包含权重为负值的环路。

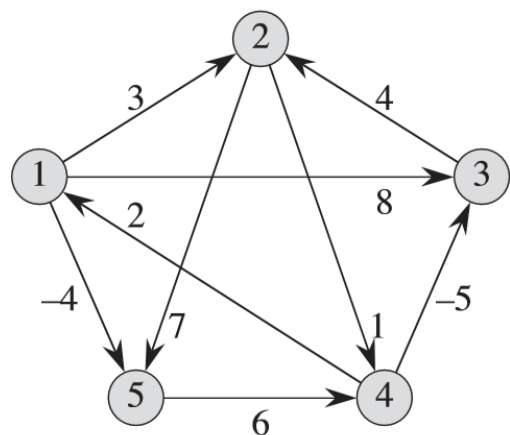
对于所有的结点 $v \in V'$ ，定义： $h(v) = \delta(s, v)$ 。

■根据三角不等式，对于所有的边 $(u, v) \in E'$ ，有

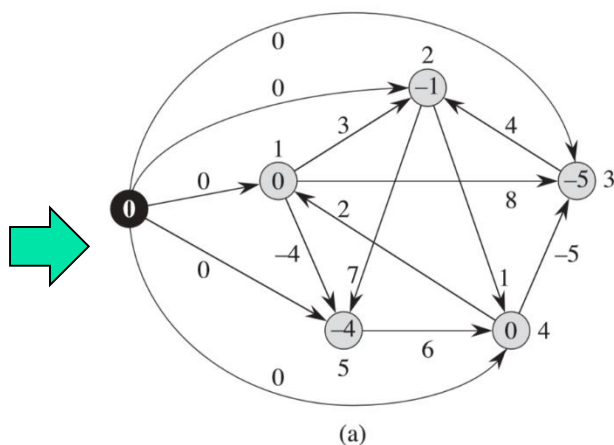
$$h(v) \leq h(u) + \omega(u, v)。$$

定义新权重  $\hat{w}$ ，有  $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + \underline{h(u) - h(v)} \geq 0$

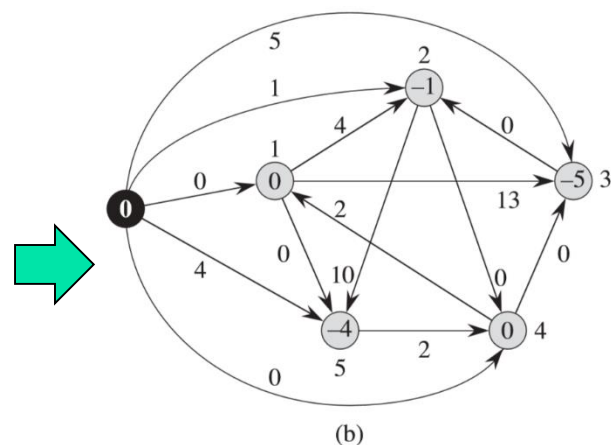
即满足性质二的要求（性质1已经证明成立）。



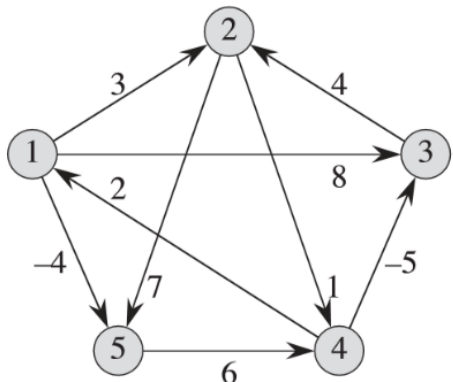
图G



结点里标记的是 $h(v) = \delta(s, v)$ 的值

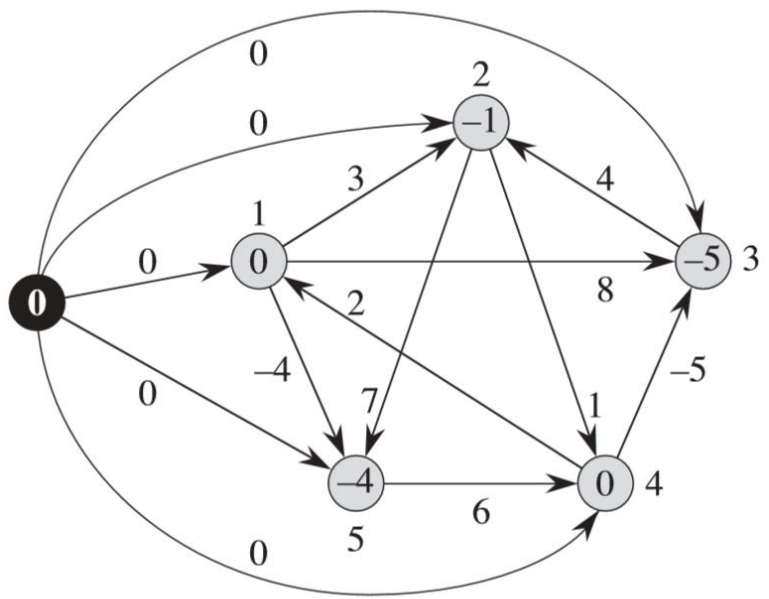


重新赋予权重的图 $G'$   
每条边的新权重函数为：  
 $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$

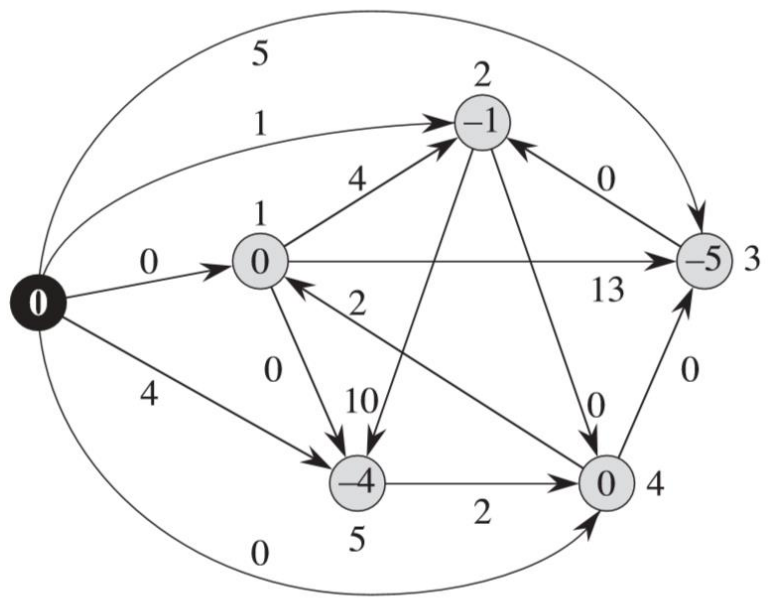
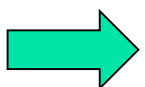


图G

$$\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$$



(a)

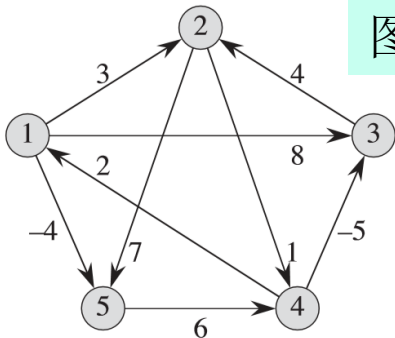


(b)

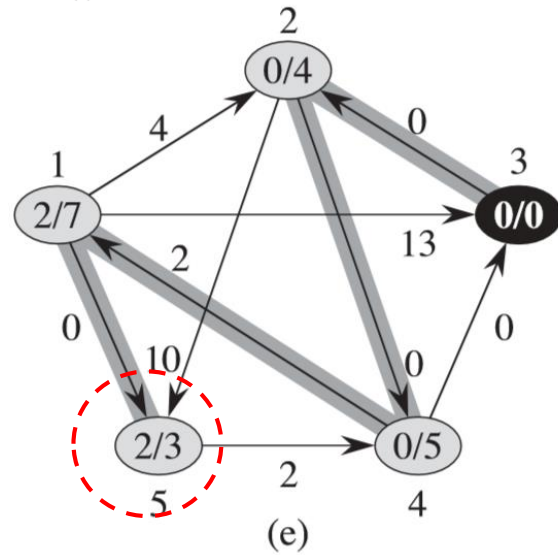
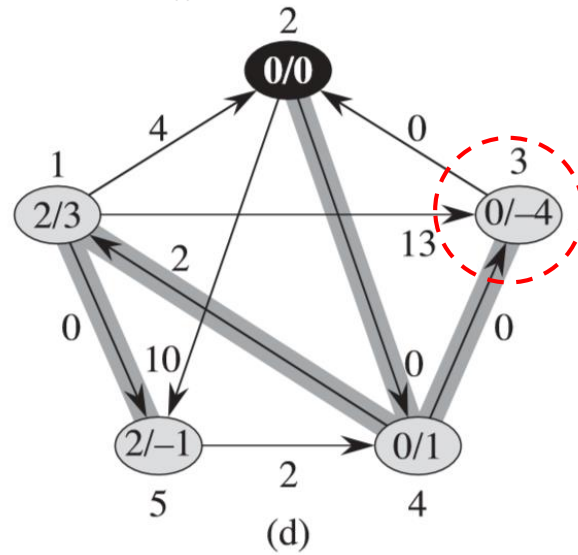
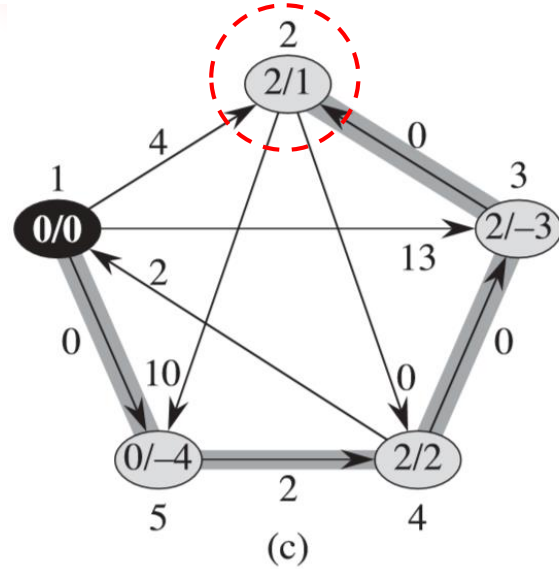
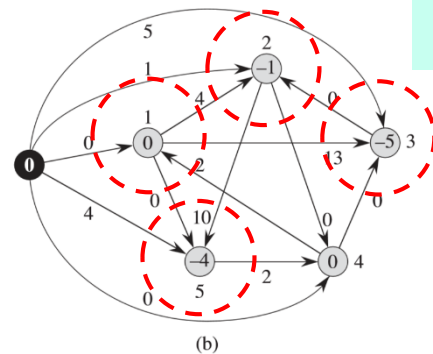
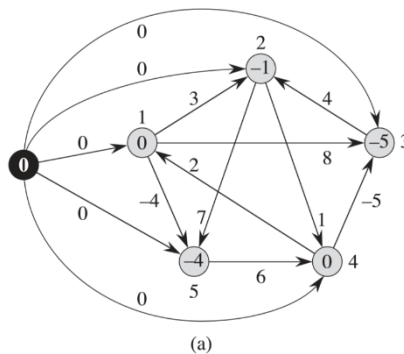
结点里标记的是  $h(v) = \delta(s, v)$  的值

重新赋予权重的图  $G'$   
 每条边的新权重函数为：  
 $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$

图G



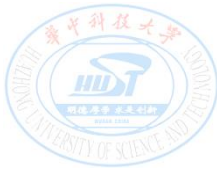
图G'



- (c)~(g)使用权重函数  $\hat{w}$  在G的每个结点上运行Dijkstra算法。
- 黑色结点是当前源结点u。
- 加了阴影的边是由算法计算出来的属于最短路径树里面的边。
- 每个结点里面标记的是  $\hat{\delta}(u, v) / \delta(u, v)$  的值。还原：

$$d_{uv} = \delta(u, v) = \hat{\delta}(u, v) + h(v) - h(u)$$

如：  
 $d_{12} = 2 + h(2) - h(1)$   
 $= 2 + (-1) - 0 = 1$   
 $d_{23} = 0 + h(3) - h(2)$   
 $= 0 + (-5) - (-1) = -4$   
 $d_{35} = 2 + h(5) - h(3)$   
 $= 2 + (-4) - (-5) = 3$



# Johnson算法计算所有结点对之间的最短路径

Johnson算法使用Bellman-Ford算法和Dijkstra算法作为子程序来计算所有结点之间的最短路径。

JOHNSON( $G, w$ )

```
1  compute  $G'$ , where  $G'.V = G.V \cup \{s\}$ ,  
    $G'.E = G.E \cup \{(s, v) : v \in G.V\}$ , and  
    $w(s, v) = 0$  for all  $v \in G.V$   
2  if BELLMAN-FORD( $G', w, s$ ) == FALSE  
3    print "the input graph contains a negative-weight cycle"  
4  else for each vertex  $v \in G'.V$   
5    set  $h(v)$  to the value of  $\delta(s, v)$   
   computed by the Bellman-Ford algorithm  
6  for each edge  $(u, v) \in G'.E$   
7     $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$   
8  let  $D = (d_{uv})$  be a new  $n \times n$  matrix  
9  for each vertex  $u \in G.V$   
10    run DIJKSTRA( $G, \hat{w}, u$ ) to compute  $\hat{\delta}(u, v)$  for all  $v \in G.V$   
11    for each vertex  $v \in G.V$   
12       $d_{uv} = \hat{\delta}(u, v) + h(v) - h(u)$   
13  return  $D$ 
```

先用Bellman-Ford算法计算s到各个结点的最短路径，并判断是否存在负权重的环路。

利用Bellman-Ford算法计算得到的 $\delta(s, v)$ 定义 $h(v)$ 的值，并重新赋边的权重。

还原路径权重，得到原图的路径权重矩阵D。

JOHNSON( $G, w$ )

```
1  compute  $G'$ , where  $G'.V = G.V \cup \{s\}$ ,  
    $G'.E = G.E \cup \{(s, v) : v \in G.V\}$ , and  
    $w(s, v) = 0$  for all  $v \in G.V$   
2  if BELLMAN-FORD( $G', w, s$ ) == FALSE  
3      print “the input graph contains a negative-weight cycle”  
4  else for each vertex  $v \in G'.V$   
5      set  $h(v)$  to the value of  $\delta(s, v)$   
       computed by the Bellman-Ford algorithm  
6  for each edge  $(u, v) \in G'.E$   
7       $\hat{w}(u, v) = w(u, v) + h(u) - h(v)$   
8  let  $D = (d_{uv})$  be a new  $n \times n$  matrix  
9  for each vertex  $u \in G.V$   
10     run DIJKSTRA( $G, \hat{w}, u$ ) to compute  $\hat{\delta}(u, v)$  for all  $v \in G.V$   
11     for each vertex  $v \in G.V$   
12          $d_{uv} = \hat{\delta}(u, v) + h(v) - h(u)$   
13  return  $D$ 
```

- Johnson算法假定所有的边都保存在邻接表里。返回一个 $|V| \times |V|$ 的矩阵 $D = d_{ij}$ , 其中 $d_{ij} = \delta(i, j)$ 。
- 或者报告图 $G$ 中包含权重为负值的环路。



## 时间分析：

算法的运行时间依赖于Dijkstra算法中最小优先队列的实现方式：

- 如果使用斐波那契堆实现，则Johnson算法的运行时间为 $O(V^2 \lg V + VE)$ 。 $O(V \lg V + E)$
- 如果使用二叉最小堆实现，则Johnson算法的运行时间为 $O(VE \lg V)$ 。 $O((V+E) \lg V)$
- 在稀疏图的情况下，该算法的时间比Floyd-Warshall算法的表现( $O(V^3)$ )要好。