线性规划、单纯形法

张腾[*]

2023 年 12 月 19 日

线性规划是在一组线性等式或不等式的约束下，求线性目标函数最值的问题，现实中的许多问题都可化为线性规划问题。

例 1 (分数背包问题). 设背包承重量为 10，各物品价值如下：

	物品1	物品2	物品3	物品4
重量	4	7	5	3
价值	40	42	25	12

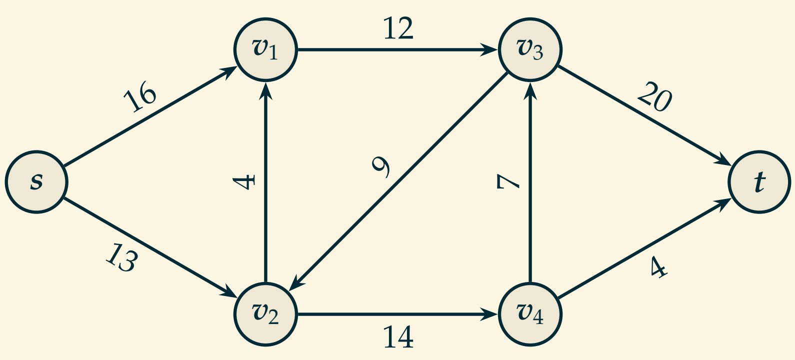
现允许物品按比例取走部分，求最大装包方案。

对 $i \in [4]$，设物品 i 取走的比例为 x_i，可得如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 10 \\ & 0 \le x_i \le 1,\ i \in [4] \end{aligned}$$

注. 如果不允许只取部分 (0/1 背包问题)，约束 $0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 1$ 将变成 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$，此时问题就变成了整数线性规划，比线性规划要难得多。

例 2 (最大流). 给定如下的流网络，求最大流。



*tengzhang@hust.edu.cn

设 9 条边上的流量分别为 $x_1, \ldots, x_9$，可得如下线性规划

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 0 \le x_1 \le 16 \\
& 0 \le x_2 \le 13 \\
& 0 \le x_3 \le 4 \\
& 0 \le x_4 \le 12 \\
& 0 \le x_5 \le 9 \\
& 0 \le x_6 \le 14 \\
& 0 \le x_7 \le 7 \\
& 0 \le x_8 \le 20 \\
& 0 \le x_9 \le 4 \\
& x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
& x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
& x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
& x_6 - x_7 - x_9 = 0
\end{aligned}
$$

其中前 9 个不等式约束对应容量限制，后 4 个等式约束对应流量守恒。

$\mathbb{R}^2$ 中的线性规划只有 2 个变量，线性目标函数和线性等式约束是一条直线，线性不等式约束是一个半平面，可采用图解法。

例 3 (图解法示例). 考虑如下线性规划

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 \le 40 \\
& 2x_1 + x_2 \le 20 \\
& x_1 + x_2 \le 12 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

先确定可行域，即满足所有约束的可行解构成的集合。该例中共有 5 个线性不等式约束，每个对应一个半平面，因此可行域为 5 个半平面相交出的凸五边形 (图1中红色部分)。

引入直线簇 $y = 3x_1 + 5x_2$，其中不同的 y 对应不同的直线，这些直线都是平行的。先将 y 取为一个较大的值使直线与凸五边形不相交，然后逐渐减小 y，这相当于从上向下平移直线 $y = 3x_1 + 5x_2$ 使其逐渐靠近凸五边形，当其与凸五边形相切时，切点就是最优解，

1 标准型

当变量多于 2 个时，图解法就不再适用了，需要更一般性的方法。线性规划的常用求解算法有单纯形法和内点法。前者在最坏情况下是指数复杂度，后者是多项式复杂度，但实际使用中两者几乎没有差别，单纯形法的最坏情况实际中很难遇到。

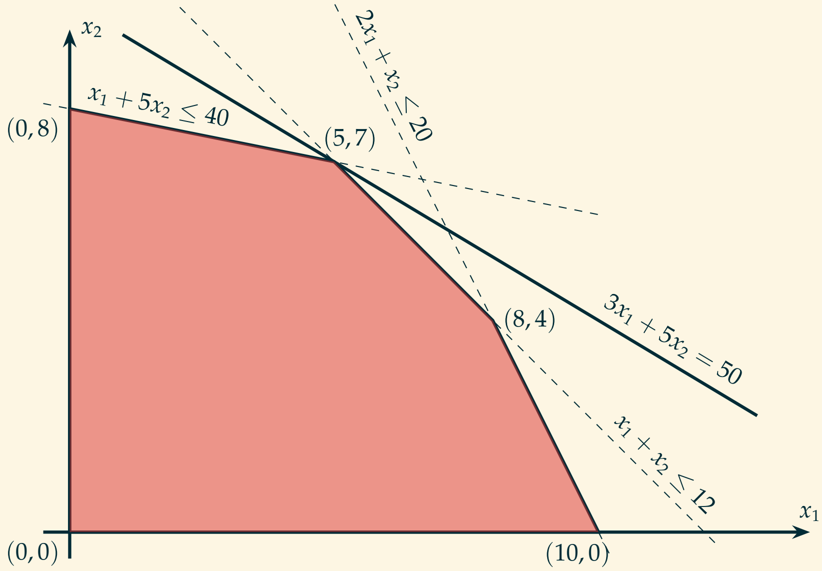


图 1: 直线簇与可行域相切于最优解 $(5,7)$ 处，目标函数最优值为 50。

要想使用单纯形法，需要先将问题转化为标准型 (不等式只约束变量非负，其余都是等式约束)：

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

这里为了简化表达，将所有线性等式约束合并写成了线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的形式，不失一般性可设

- 共有 m 个线性等式约束、n 个变量，其中 $m < n$，否则可行域为单点集或空集；
- $\mathbf{A}$ 是行满秩矩阵，即 $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$，否则存在冗余约束；
- $\boldsymbol{b} \geq \mathbf{0}$，若某个 $b_i < 0$，对该约束两边取反即可。

对于任何形式的线性规划，都可按以下步骤将其转化成标准型，且两者是等价的：

- 对非正变量 $x \leq 0$，令 $y = -x$ 作为替代；
- 对无约束变量 x，将其表示成两个非负变量的差 $x = u - v$；
- 对 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \leq b$ 型不等式约束，引入松弛变量 $y \geq 0$ 将其转化为等式约束 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} + y = b$；
- 对 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \geq b$ 型不等式约束，引入剩余变量 $y \geq 0$ 将其转化为等式约束 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - y = b$。

下面将例1、例2、例3中的问题转化为标准型。

- 分数背包问题有 5 个 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \le b$ 型约束，分别引入松弛变量 $x_5, \ldots, x_9$：

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 10 \\ & x_1 \le 1 \\ & x_2 \le 1 \\ & x_3 \le 1 \\ & x_4 \le 1 \\ & x_i \ge 0,\ i \in [4] \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 10 \\ & x_1 + x_6 = 1 \\ & x_2 + x_7 = 1 \\ & x_3 + x_8 = 1 \\ & x_4 + x_9 = 1 \\ & x_i \ge 0,\ i \in [9] \end{aligned} \tag{1}$$

- 最大流问题有 9 个 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \le b$ 型约束，分别引入松弛变量 $x_{10}, \ldots, x_{18}$：

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \le 16 \\ & x_2 \le 13 \\ & x_3 \le 4 \\ & x_4 \le 12 \\ & x_5 \le 9 \\ & x_6 \le 14 \\ & x_7 \le 7 \\ & x_8 \le 20 \\ & x_9 \le 4 \\ & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\ & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\ & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\ & x_i \ge 0,\ i \in [9] \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_{10} = 16 \\ & x_2 + x_{11} = 13 \\ & x_3 + x_{12} = 4 \\ & x_4 + x_{13} = 12 \\ & x_5 + x_{14} = 9 \\ & x_6 + x_{15} = 14 \\ & x_7 + x_{16} = 7 \\ & x_8 + x_{17} = 20 \\ & x_9 + x_{18} = 4 \\ & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\ & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\ & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\ & x_i \ge 0,\ i \in [18] \end{aligned} \tag{2}$$

- 例3中的线性规划有 3 个 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \le b$ 型约束，分别引入松弛变量 x_3, x_4, x_5：

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 \le 40 \\ & 2x_1 + x_2 \le 20 \\ & x_1 + x_2 \le 12 \\ & x_i \ge 0,\ i \in [2] \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 20 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ & x_i \ge 0,\ i \in [5] \end{aligned} \tag{3}$$

例 4. 将如下线性规划转化为标准型

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 - x_1 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 = x_2 - 5 \\ & |x_2| \le 2 \\ & x_1 \le 0 \end{aligned}$$

- x_1 非正，令 $y_1 = -x_1 \geq 0$ 作为替代；
- x_2 无约束，令 $x_2 = y_2 - y_3$，其中 $y_2 \geq 0$、$y_3 \geq 0$；

$$
\begin{aligned}
\max \quad & y_2 - y_3 + y_1 \\
\text{s.t.} \quad & -3y_1 = y_2 - y_3 - 5 \\
& y_2 - y_3 \leq 2 \\
& -y_2 + y_3 \leq 2 \\
& y_i \geq 0,\ [i] \in [3]
\end{aligned}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{aligned}
\max \quad & y_1 + y_2 - y_3 \\
\text{s.t.} \quad & 3y_1 + y_2 - y_3 = 5 \\
& y_2 - y_3 + y_4 = 2 \\
& -y_2 + y_3 + y_5 = 2 \\
& y_i \geq 0,\ [i] \in [5]
\end{aligned}
$$

2 基本解

对于线性规划的标准型，所有可行解是线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解与第一象限的交集。根据之前的约定矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 行满秩且 $m < n$，因此它有无穷多个解，但求解线性规划只需要关注其中一类称为基本解的解。

记矩阵 $\mathbf{A}$ 的 n 个列分别为 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$，由于 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = m$，因此可以从中挑出 m 个线性无关的列 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m}$ 构成基 $\mathbf{B}$，这些列也称为基向量，未被选择的 $\boldsymbol{a}_{i_{m+1}}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_n}$ 称为非基向量。为表述方便，引入矩阵的切片表示 $\mathbf{A}_{\mathcal{R},\mathcal{C}}$，其中 $\mathcal{R}$、$\mathcal{C}$ 为索引元组，例如记 $\mathcal{B} = (i_1, \ldots, i_m)$、$\mathcal{D} = (i_{m+1}, \ldots, i_n)$，则

$$
\mathbf{B} = \mathbf{A}_{:,\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{i_1} & \cdots & \boldsymbol{a}_{i_m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \mathbf{A}_{:,\mathcal{D}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{i_{m+1}} & \cdots & \boldsymbol{a}_{i_n} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{B}\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{D}\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}}
$$

其中 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}}$ 称为基变量，$\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}}$ 称为非基变量。令 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ 可得 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，这就得到了 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 在基 $\mathbf{B}$ 下的基本解。

- 如果基本解中某些基变量为零，则称其为退化的基本解；
- 如果基本解还是线性规划的可行解 (所有变量非负)，则称其为基本可行解。

例 5. 设线性规划的等式约束为线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$，其中

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}
$$

$n = 4$、$m = 2$，故基本解最多不超过 $\binom{4}{2} = 6$ 个，对线性方程组的增广矩阵做初等行变换：

$$
\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

因此

$$
\begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4 + 6 \\ x_2 = -x_4 + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

- 令 $s = t = 0$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$，这是关于基 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \end{bmatrix}$ 的基本可行解；

- 令 $s=-6$、$t=0$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0 & 2 & -6 & 0\end{bmatrix}^\top$，这是关于基 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\end{bmatrix}$ 的基本解，但不可行；
- 令 $s=0$、$t=2$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}^\top$，这是同时关于基 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_4\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_4\end{bmatrix}$、$\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_3 & \boldsymbol{a}_4\end{bmatrix}$ 的退化基本可行解；
- 令 $s=1$、$t=1$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}4 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}^\top$，这是可行解，但不是基本解。

注意 a_1、a_3 线性相关，因此前三种情况已经找到所有的基本解了。

定理 6 (线性规划基本定理). 对于线性规划的标准型，有如下两个命题：

1. 如果存在可行解，则一定存在基本可行解；
2. 如果存在最优可行解，则一定存在最优基本可行解。

证明. 1. 设 $\boldsymbol{x}$ 是一个可行解，其中 $\{i \mid x_i > 0,\ i \in [n]\} = \{i_1, \ldots, i_l\}$，即 $\boldsymbol{x}$ 有 l 个正分量，则 **

$$\boldsymbol{b} = \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{A}_{:,\mathcal{L}}\boldsymbol{x}_{\mathcal{L}} = \boldsymbol{a}_{i_1}x_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_l}x_{i_l} \tag{4}$$

此时分两种情况：

- $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_l}$ 线性无关，则 $l \le m$。若 $l=m$，$\boldsymbol{x}$ 就是基本可行解；若 $l<m$，从 $\mathbf{A}$ 的剩余列中挑选 $m-l$ 个列与 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_l}$ 构成基，此时 $\boldsymbol{x}$ 就是对应该基的基本可行解。
- $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_l}$ 线性相关，可以去掉一些冗余列使其线性无关，从而转化为前一种情况。设不全为零的实数 $y_{i_1}, \ldots, y_{i_l}$ 使得

  $$\mathbf{0} = \boldsymbol{a}_{i_1}y_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_l}y_{i_l} \tag{5}$$

  且至少某个 $y_{i_k} > 0$，否则对所有 y_{i_k} 取反即可，于是对任意 ϵ，令 (4) $-\,\epsilon \times$ (5) 有

  $$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_{i_1}(x_{i_1} - \epsilon y_{i_1}) + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_l}(x_{i_l} - \epsilon y_{i_l}) = \mathbf{A}_{:,\mathcal{L}}(\boldsymbol{x}_{\mathcal{L}} - \epsilon \boldsymbol{y}_{\mathcal{L}}), \quad \boldsymbol{y}_{\mathcal{L}}^\top \triangleq \begin{bmatrix} y_{i_1} & \cdots & y_{i_l}\end{bmatrix}$$

  让 ϵ 从 0 增大，对所有 $\boldsymbol{y}_{\mathcal{L}}$ 为正的分量，$\boldsymbol{x}_{\mathcal{L}} - \epsilon\boldsymbol{y}_{\mathcal{L}}$ 在这些分量上单调减。取 ϵ 使得 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{L}} - \epsilon\boldsymbol{y}_{\mathcal{L}}$ 第一次出现某个分量变成 0，即取

  $$\epsilon = \min\{x_{i_k}/y_{i_k} : y_{i_k} > 0,\ k \in [l]\}$$

  这样就得到了只有 $l-1$ 个正分量的可行解 $\boldsymbol{x} - \epsilon\boldsymbol{y}$，重复该操作直到正分量对应的列线性无关。

2. 设 $\boldsymbol{x}$ 是一个最优可行解且有 l 个正分量：$\{i \mid x_i > 0,\ i \in [n]\} = \{i_1, \ldots, i_l\} \triangleq \mathcal{L}$。

若 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_l}$ 线性无关，证明同命题 1。若 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_l}$ 线性相关，可继续沿用命题 1 中去冗余列的方式，但还需证明对任意 ϵ，$\boldsymbol{x} - \epsilon\boldsymbol{y}$ 都是最优解，这只需证明 $\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{y} = 0$。注意只要

$$|\epsilon| \le \min\{|x_{i_k}/y_{i_k}| : y_{i_k} \neq 0,\ k \in [l]\}$$

$\boldsymbol{x} - \epsilon\boldsymbol{y}$ 都是可行解，因此若 $\boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{y} \neq 0$，根据其符号总能取某个充分小的 ϵ 使得 $\boldsymbol{c}^\top(\boldsymbol{x} - \epsilon\boldsymbol{y}) > \boldsymbol{c}^\top\boldsymbol{x}$，这与 $\boldsymbol{x}$ 是最优可行解矛盾。

♣

根据该定理，线性规划的求解可转化为对基本可行解的搜索问题，依次对基本可行解的最优性进行检查即可。

3 几何视角

线性规划的可行域 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ 是凸集，因为对 $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Omega$ 和 $\forall \alpha \in (0,1)$ 有

$$\mathbf{A}(\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2) = \alpha \mathbf{A}\boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\mathbf{A}\boldsymbol{x}_2 = \alpha \boldsymbol{b} + (1-\alpha)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}, \quad \alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2 \geq \boldsymbol{0}$$

即连接 Ω 内任意两点的线段依然属于 Ω。对凸集 Ω 中的点 $\boldsymbol{x}$，若它无法表示成 Ω 中另外两点的凸组合，则称 $\boldsymbol{x}$ 为 Ω 的极点，即

$$\boldsymbol{x}\text{是极点},\ \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\boldsymbol{x}_2,\ \alpha \in (0,1) \Longrightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}$$

定理 7 (等价性). $\boldsymbol{x}$ 是 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}\}$ 的极点当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ 的基本可行解。

证明. $\Rightarrow$：设 $\boldsymbol{x}$ 满足 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$ 且 $\{i \mid x_i > 0,\ i \in [n]\} = \{i_1, \ldots, i_l\}$，则

$$\boldsymbol{a}_{i_1} x_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_l} x_{i_l} = \boldsymbol{b}$$

设向量 $\boldsymbol{y}$ 满足 $\boldsymbol{a}_{i_1} y_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_l} y_{i_l} = \boldsymbol{0}$，于是对任意 ϵ 有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_{i_1}(x_{i_1} + \epsilon y_{i_1}) + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_l}(x_{i_l} + \epsilon y_{i_l}) = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a}_{i_1}(x_{i_1} - \epsilon y_{i_1}) + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_l}(x_{i_l} - \epsilon y_{i_l}) = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

注意所有的 $x_{i_k} > 0$，于是存在 $\epsilon \in (0, \min\{|x_{i_k}/y_{i_k}| : y_{i_k} \neq 0,\ k \in [l]\}]$ 使得

$$\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{x} + \epsilon \boldsymbol{y} \in \Omega, \quad \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{x} - \epsilon \boldsymbol{y} \in \Omega, \quad \boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{z}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{z}_2$$

由于 $\boldsymbol{x}$ 是极点，因此 $\boldsymbol{z}_1 = \boldsymbol{z}_2 = \boldsymbol{x}$，而 $\epsilon > 0$，故 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$。这意味着 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_l}$ 线性无关，于是 $\boldsymbol{x}$ 是基本可行解。

$\Leftarrow$：设 $\boldsymbol{x}$ 是基本可行解，对应基向量为 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m}$，记 $\mathcal{B} = \{i_1, \ldots, i_m\}$、$\mathcal{D} = [n] \setminus \mathcal{B}$，则

$$\boldsymbol{a}_{i_1} x_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_m} x_{i_m} = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{0}$$

假设存在 $\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \Omega$、$\alpha \in (0,1)$ 使得 $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{z}$，注意 $\alpha > 0$、$(1-\alpha) > 0$，于是

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{a}_{i_1} y_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_m} y_{i_m} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{z}_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{a}_{i_1} z_{i_1} + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_m} z_{i_m} = \boldsymbol{b} \end{aligned}$$

两式相减 $\boldsymbol{a}_{i_1}(y_{i_1} - z_{i_1}) + \cdots + \boldsymbol{a}_{i_m}(y_{i_m} - z_{i_m}) = \boldsymbol{0}$，由于 $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_m}$ 线性无关，故 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{x}$ 是极点。 ♣

例 8. 再看例3中的线性规划，根据式(3)，其标准型为：

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 20 \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ & x_i \geq 0,\ i \in [5] \end{aligned}, \quad \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \underbrace{\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix}5\\1\\1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_2} x_2 + \underbrace{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_3} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_4} x_4 + \underbrace{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_5} x_5 = \underbrace{\begin{bmatrix}40\\20\\12\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

显然取 $\boldsymbol{a}_3$、$\boldsymbol{a}_4$、$\boldsymbol{a}_5$ 作为基向量，基本可行解是一目了然的 (基为单位阵)：

$$40\boldsymbol{a}_3+20\boldsymbol{a}_4+12\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{b},\quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 \end{bmatrix}$$

对应原问题 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[0,0]$，目标函数值 $0<50$，因此还不是最优解。

根据迭代改进的思路，需要从当前极点移动到邻近极点，同时使目标函数值增大。现选择 $\boldsymbol{a}_1$ 作为新的基向量 (入基) 并移除原来的某个基向量 (出基)，注意 $\boldsymbol{a}_1=\boldsymbol{a}_3+2\boldsymbol{a}_4+\boldsymbol{a}_5$，于是

$$\epsilon\boldsymbol{a}_1+(40-\epsilon)\boldsymbol{a}_3+(20-2\epsilon)\boldsymbol{a}_4+(12-\epsilon)\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{b},\quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \epsilon & 0 & 40-\epsilon & 20-2\epsilon & 12-\epsilon \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大，x_1 变成正数，x_3、x_4、x_5 逐渐变小，当 ϵ 增大到 10 时，x_4 率先减小到 0，即 $\boldsymbol{a}_4$ 出基，得到一个新的基本可行解

$$10\boldsymbol{a}_1+30\boldsymbol{a}_3+2\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{b},\quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10 & 0 & 30 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

对应原问题 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[10,0]$，目标函数值 $30<50$，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择 $\boldsymbol{a}_2$ 作为新的基向量，注意 $\boldsymbol{a}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1+\frac{9}{2}\boldsymbol{a}_3+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}_5$，于是

$$\left(10-\frac{1}{2}\epsilon\right)\boldsymbol{a}_1+\epsilon\boldsymbol{a}_2+\left(30-\frac{9}{2}\epsilon\right)\boldsymbol{a}_3+\left(2-\frac{1}{2}\epsilon\right)\boldsymbol{a}_5=\boldsymbol{b},\quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10-\frac{1}{2}\epsilon & \epsilon & 30-\frac{9}{2}\epsilon & 0 & 2-\frac{1}{2}\epsilon \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大，x_2 变成正数，x_1、x_3、x_5 逐渐变小，当 ϵ 增大到 4 时，x_5 率先减小到 0，即 $\boldsymbol{a}_5$ 出基，得到一个新的基本可行解

$$8\boldsymbol{a}_1+4\boldsymbol{a}_2+12\boldsymbol{a}_3=\boldsymbol{b},\quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8 & 4 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应原问题 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[8,4]$，目标函数值 $44<50$，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择 $\boldsymbol{a}_4$ 作为新的基向量，注意 $\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{a}_1-\boldsymbol{a}_2+4\boldsymbol{a}_3$，于是

$$(8-\epsilon)\boldsymbol{a}_1+(4+\epsilon)\boldsymbol{a}_2+(12-4\epsilon)\boldsymbol{a}_3+\epsilon\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{b},\quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8-\epsilon & 4+\epsilon & 12-4\epsilon & \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大，x_4 变成正数，x_1、x_3 逐渐变小，当 ϵ 增大到 3 时，x_3 率先减小到 0，即 $\boldsymbol{a}_3$ 出基，得到一个新的基本可行解

$$5\boldsymbol{a}_1+7\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{b},\quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

对应原问题 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[5,7]$，目标函数值 50，这就是最优解。

注. 这种从一个极点转移到另一个极点，迭代改进的操作方式就是单纯形法求线性规划的基本思路，但

1. 如何确定初始的基和解？
2. 如何确定每轮的入基向量以改进当前解？
3. 如何确定当前解为最优解以停止算法？

4 单纯形法

例8中每轮迭代都要将 $\boldsymbol{b}$ 和入基向量 $\boldsymbol{q}$ 用当前基向量 $\boldsymbol{a}_{i_1},\ldots,\boldsymbol{a}_{i_m}$ 线性表出：

$$\boldsymbol{b} = x_{i_1}\boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + x_{i_m}\boldsymbol{a}_{i_m}, \quad \boldsymbol{q} = y_{i_1}\boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + y_{i_m}\boldsymbol{a}_{i_m}$$

由此得到关于 ϵ 的恒等式

$$(x_{i_1,0} - \epsilon y_{i_1,q})\boldsymbol{a}_{i_1} + \cdots + (x_{i_m,0} - \epsilon y_{i_m,q})\boldsymbol{a}_{i_m} + \epsilon \boldsymbol{a}_q = \boldsymbol{b}$$

让 ϵ 从 0 增大直到某个 $\boldsymbol{a}_p$ 出基，其中 $p = \operatorname{argmin}_i\{y_{i0}/y_{iq} : y_{iq} > 0\}$。

式(??)和式(??)中的系数如何得到呢？根据线性方程组理论，对 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的增广矩阵做初等行变换

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \boldsymbol{a}_{m+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n & \boldsymbol{b} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{a}_{m+1} & \cdots & \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{a}_n & \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

当基 $\mathbf{B}$ 变成单位阵时，第 q 列和最后一列就是 $\boldsymbol{a}_q$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的线性表出系数。至此还剩两个问题：

1. 如何确定入基向量 $\boldsymbol{a}_q$；
2. 如何确定当前解是否为最优解。

下面考察基本可行解变化时目标函数值的变化，将标准型根据对 $\mathbf{A}$ 的分块重写为

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{B}\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} + \mathbf{D}\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}}, \boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- 若 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，此时 $\boldsymbol{x}$ 就是关于基 $\mathbf{B}$ 的基本可行解，对应的目标函数值为

$$\hat{z} = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

- 若 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} \neq \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}}$，对应的目标函数值为

$$z = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathcal{B}} + \boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} - \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}}) + \boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - \boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^\top)\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} = \hat{z} - \boldsymbol{r}_{\mathcal{D}}^\top \boldsymbol{x}_{\mathcal{D}}$$

  其中 $\boldsymbol{r}_{\mathcal{D}}^\top = \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - \boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^\top$ 称为检验数。

  注意 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}} \geq \mathbf{0}$，若 $\boldsymbol{r}_{\mathcal{D}} \geq \mathbf{0}$，则 $z \geq \hat{z}$，即关于基 $\mathbf{B}$ 的基本可行解就是最优解，这就回答了前面的问题 2。若 $\boldsymbol{r}_{\mathcal{D}}$ 中某个分量为负，则将 $\boldsymbol{x}_{\mathcal{D}}$ 中对应的非基变量从 0 变为正数可使目标函数值变大，也即该非基变量对应的列入基，这就回答了前面的问题 1。

基于此，构造单纯形表

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c}^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top & -\boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^\top & 0 \end{bmatrix}$$

先做初等行变换将基 $\mathbf{B}$ 变成单位阵

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} & \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top & -\boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^\top & -\boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^\top & 0 \end{bmatrix}$$

再做初等行变换将最后一行基变量对应的 $-\boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^{\top}$ 变成 $\mathbf{0}^{\top}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^{\top} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^{\top} & -\boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^{\top} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \mathbf{0}^{\top} & \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - \boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^{\top} & \boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

这张表里包含了一切我们需要的信息

- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$ 里的每列就是该列向量在当前基下的线性表示系数；
- $\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 是当前基对应的基本可行解中的基变量值；
- $\boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - \boldsymbol{c}_{\mathcal{D}}^{\top}$ 就是检验数，可以指示下一个入基向量和是否已达最优解；
- $\boldsymbol{c}_{\mathcal{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 就是当前基本可行解对应的目标函数值

例 9. 用单纯形法再求例3中的线性规划，先转化为标准型：

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & & \\ 2 & 1 & & 1 & \\ 1 & 1 & & & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

初始单纯形表为

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_3 & 1 & 5 & 1 & & & 40 \\ x_4 & 2 & 1 & & 1 & & 20 \\ x_5 & 1 & 1 & & & 1 & 12 \\ \hline & -3 & -5 & & & & 0 \end{array}$$

此时 x_3、x_4、x_5 是基变量，基本可行解为

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 & 0 \end{array}\right]$$

对应 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[0,0]$，由于检验数还有负值，因此还不是最优解。

取检验数绝对值最大的负数对应的列入基，即 $\boldsymbol{a}_2$ 入基。注意

$$\boldsymbol{b} = 40\boldsymbol{a}_3 + 20\boldsymbol{a}_4 + 12\boldsymbol{a}_5, \quad \boldsymbol{a}_2 = 5\boldsymbol{a}_3 + 1\boldsymbol{a}_4 + 1\boldsymbol{a}_5$$

计算 $\operatorname{argmin}\{^{40}/_{5}, ^{20}/_{1}, ^{12}/_{1}\}$ 可知 $\boldsymbol{a}_3$ 出基。做初等行变换

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_2 & 0.2 & 1 & 0.2 & & & 8 \\ x_4 & 2 & 1 & & 1 & & 20 \\ x_5 & 1 & 1 & & & 1 & 12 \\ \hline & -3 & -5 & & & & 0 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_2 & 0.2 & 1 & 0.2 & & & 8 \\ x_4 & 1.8 & & -0.2 & 1 & & 12 \\ x_5 & 0.8 & & -0.2 & & 1 & 4 \\ \hline & -2 & & 1 & & & 40 \end{array}$$

此时 x_2、x_4、x_5 是基变量，基本可行解为

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 0 & 8 & 0 & 12 & 4 & 40 \end{array}\right]$$

对应 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[0,8]$，由于检验数还有负值，因此还不是最优解。

根据检验数 $\boldsymbol{a}_1$ 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{8/0.2, 12/1.8, 4/0.8\}$ 可知 $\boldsymbol{a}_5$ 出基。做初等行变换

$$\begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_2 & 0.2 & 1 & 0.2 & & & 8 \\ x_4 & 1.8 & & -0.2 & 1 & & 12 \\ x_1 & 1 & & -0.25 & & 1.25 & 5 \\ \hdashline & -2 & & 1 & & & 40 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|ccccc:c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_2 & & 1 & 0.25 & & -0.25 & 7 \\ x_4 & & & 0.25 & 1 & -2.25 & 3 \\ x_1 & 1 & & -0.25 & & 1.25 & 5 \\ \hdashline & & & 0.5 & & 2.5 & 50 \end{array}$$

此时 x_1、x_2、x_4 是基变量，基本可行解为

$$\left[\begin{array}{ccccc:c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 & 50 \end{array}\right]$$

对应 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[5,7]$，由于检验数均非负，已达最优解。

例 10. 用单纯形法求例1中的分数背包问题，先转化为标准型：

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 & 3 & 1 & & & & \\ 1 & & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & & 1 & & \\ & & 1 & & & & & 1 & \\ & & & 1 & & & & & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & \boldsymbol{x} \geq 0 \end{aligned}$$

初始单纯形表为

$$\begin{array}{c|ccccccccc:c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\ \hline x_5 & 4 & 7 & 5 & 3 & 1 & & & & & 10 \\ x_6 & 1 & & & & & 1 & & & & 1 \\ x_7 & & 1 & & & & & 1 & & & 1 \\ x_8 & & & 1 & & & & & 1 & & 1 \\ x_9 & & & & 1 & & & & & 1 & 1 \\ \hdashline & -40 & -42 & -25 & -12 & & & & & & 0 \end{array}$$

此时 x_5、x_6、x_7、x_8、x_9 是基变量，基本可行解为

$$\left[\begin{array}{ccccccccc:c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

根据检验数 $\boldsymbol{a}_2$ 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{10/7, 1/1\}$ 可知 $\boldsymbol{a}_7$ 出基。做初等行变换

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\
\hline
x_5 & 4 & & 5 & 3 & 1 & & -7 & & & 3 \\
x_6 & 1 & & & & & 1 & & & & 1 \\
x_2 & & 1 & & & & & 1 & & & 1 \\
x_8 & & & 1 & & & & & 1 & & 1 \\
x_9 & & & & 1 & & & & & 1 & 1 \\
\hline
 & -40 & & -25 & -12 & & & 42 & & & 42
\end{array}
$$

此时 x_2、x_5、x_6、x_8、x_9 是基变量，基本可行解为

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & o \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 42
\end{array}\right]
$$

根据检验数 $\boldsymbol{a}_1$ 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{3/4, 1/1\}$ 可知 $\boldsymbol{a}_5$ 出基。做初等行变换

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\
\hline
x_1 & 1 & & 5/4 & 3/4 & 1/4 & & -7/4 & & & 3/4 \\
x_6 & 1 & & & & & 1 & & & & 1 \\
x_2 & & 1 & & & & & 1 & & & 1 \\
x_8 & & & 1 & & & & & 1 & & 1 \\
x_9 & & & & 1 & & & & & 1 & 1 \\
\hline
 & -40 & & -25 & -12 & & & 42 & & & 42
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\
\hline
x_1 & 1 & & 5/4 & 3/4 & 1/4 & & -7/4 & & & 3/4 \\
x_6 & & & -5/4 & -3/4 & -1/4 & 1 & 7/4 & & & 1/4 \\
x_2 & & 1 & & & & & 1 & & & 1 \\
x_8 & & & 1 & & & & & 1 & & 1 \\
x_9 & & & & 1 & & & & & 1 & 1 \\
\hline
 & & & 25 & 18 & 10 & 40 & -28 & & & 72
\end{array}
$$

此时 x_1、x_2、x_6、x_8、x_9 是基变量，基本可行解为

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & o \\
3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1 & 72
\end{array}\right]
$$

根据检验数 $\boldsymbol{a}_7$ 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{1/7, 1/1\}$ 可知 $\boldsymbol{a}_6$ 出基。做初等行变换

$$
\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\
\hline
x_1 & 1 & & 5/4 & 3/4 & 1/4 & & -7/4 & & & 3/4 \\
x_7 & & & -5/7 & -3/7 & -1/7 & 1 & 1 & & & 1/7 \\
x_2 & & 1 & & & & & 1 & & & 1 \\
x_8 & & & 1 & & & & & 1 & & 1 \\
x_9 & & & & 1 & & & & & 1 & 1 \\
\hline
 & & & 25 & 18 & 10 & 40 & -28 & & & 72
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{c|ccccccccc|c}
 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\
\hline
x_1 & 1 & & & & & 7/4 & & & & 1 \\
x_7 & & & -5/7 & -3/7 & -1/7 & 1 & 1 & & & 1/7 \\
x_2 & & 1 & 5/7 & 3/7 & 1/7 & -1 & & & & 6/7 \\
x_8 & & & 1 & & & & & 1 & & 1 \\
x_9 & & & & 1 & & & & & 1 & 1 \\
\hline
 & & & 5 & 6 & 6 & 68 & & & & 76
\end{array}
$$

此时 x_1、x_2、x_7、x_8、x_9 是基变量，基本可行解为

$$
\left[\begin{array}{ccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & o \\
1 & 6/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 1 & 1 & 76
\end{array}\right]
$$

由于检验数均非负，已达最优解。

注. 分数背包问题也可采用贪心法来做。

例 11. 用单纯形法求例2中的最大流问题，先转化为标准型：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + y_1 = 16 \\
& x_2 + y_2 = 13 \\
& x_3 + y_3 = 4 \\
& x_4 + y_4 = 12 \\
& x_5 + y_5 = 9 \\
& x_6 + y_6 = 14 \\
& x_7 + y_7 = 7 \\
& x_8 + y_8 = 20 \\
& x_9 + y_9 = 4 \\
& x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
& x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
& x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
& x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\
& \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

共有 18 个变量、13 个等式约束，因此基变量有 13 个，非基变量有 5 个。初始不妨取 x_1、x_2、x_4、x_5、x_7 为非基变量，将基变量由 x_1、x_2、x_4、x_5、x_7 表出：

$$
\begin{aligned}
x_3 = -x_1 + x_4 \quad &\Rightarrow \quad x_1 + x_3 - x_4 = 0 &&\Rightarrow \quad -x_1 + x_4 + y_3 = 4 \\
x_8 = x_4 - x_5 + x_7 \quad &\Rightarrow \quad -x_4 + x_5 - x_7 + x_8 = 0 &&\Rightarrow \quad x_4 - x_5 + x_7 + y_8 = 20 \\
x_6 = x_2 + x_5 - x_3 \quad &\Rightarrow \quad -x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 0 &&\Rightarrow \quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 + y_6 = 14 \\
x_9 = x_6 - x_7 \quad &\Rightarrow \quad -x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_7 + x_9 = 0 &&\Rightarrow \quad x_1 + x_2 - x_4 + x_5 - x_7 + y_9 = 4
\end{aligned}
$$

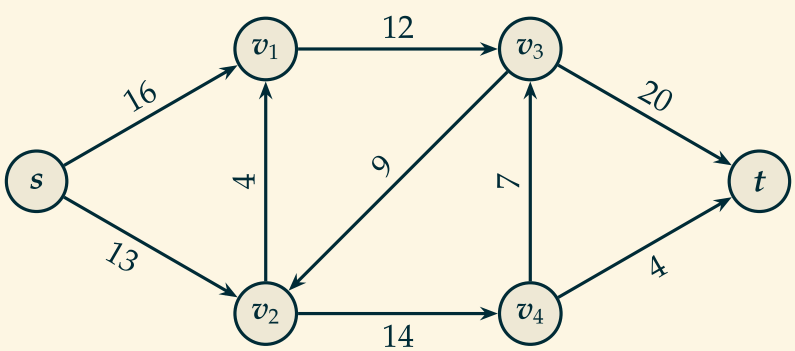
初始单纯形表为

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_3	1		1	−1															0
x_6	−1	−1		1	−1	1													0
x_8				−1	1		−1	1											0
x_9	−1	−1		1	−1		1		1										0
y_1	1									1									16
y_2		1									1								13
y_3	−1			1								1							4
y_4				1									1						12
y_5					1									1					9
y_6	1	1		−1	1										1				14
y_7							1									1			7
y_8				1	−1		1										1		20
y_9	1	1		−1	1		−1											1	4
	−1	−1																	0

基本可行解为

$$
\left[\begin{array}{cccccccccccccccccc:c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 13 & 4 & 12 & 9 & 14 & 7 & 20 & 4 & 0
\end{array}\right]
$$

对应的流网络为



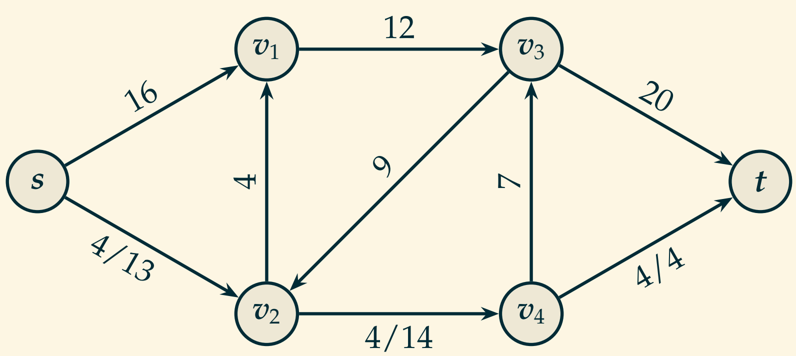
$\boldsymbol{a}_1$、$\boldsymbol{a}_2$ 的检验数均为 -1，不妨让 $\boldsymbol{a}_2$ 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{^{13}/_1, {}^{14}/_1, {}^{4}/_1\}$ 可知 $\boldsymbol{a}_{18}$ 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_3	1		1	-1															0
x_6						1	-1											-1	4
x_8				-1	1		-1	1											0
x_9									1									1	4
y_1	1									1									16
y_2	-1			1	-1		1				1							-1	9
y_3	-1			1								1							4
y_4				1									1						12
y_5					1									1					9
y_6							1								1			-1	10
y_7							1									1			7
y_8				1	-1		1										1		20
x_2	1	1		-1	1		-1											1	4
				-1	1		-1											1	4

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 16 & 9 & 4 & 12 & 9 & 10 & 7 & 20 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

对应的流网络为



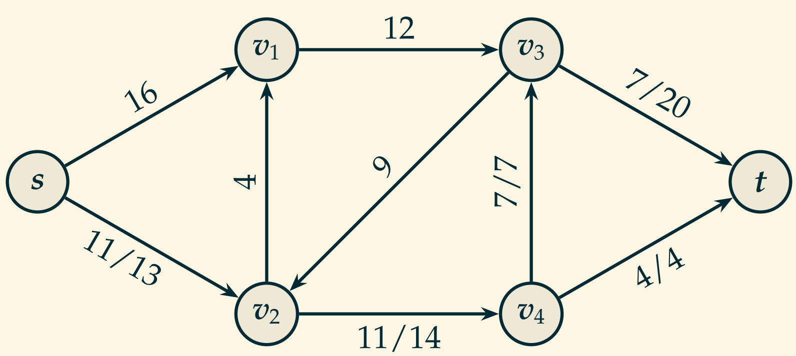
a_4、a_7 的检验数均为 -1，不妨让 a_7 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{{}^9/_1, {}^{10}/_1, {}^7/_1, {}^{20}/_1\}$ 可知 a_{16} 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_3	1		1	-1															0
x_6						1										1		-1	11
x_8				-1	1			1								1			7
x_9									1									1	4
y_1	1									1									16
y_2	-1			1	-1						1					-1		-1	2
y_3	-1			1								1							4
y_4				1									1						12
y_5					1									1					9
y_6															1	-1		-1	3
x_7							1									1			7
y_8				1	-1											-1	1		13
x_2	1	1		-1	1											1		1	11
				-1	1											1		1	11

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccc:c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 11 & 7 & 7 & 4 & 16 & 2 & 4 & 12 & 9 & 3 & 0 & 13 & 0 & 11 \end{array}\right]$$

对应的流网络为



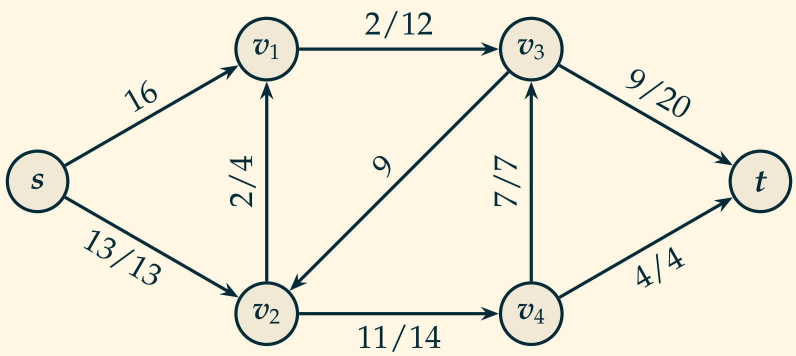
根据检验数 a_4 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{2/1, 4/1, 12/1, 13/1\}$ 可知 a_{11} 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_3			1		−1						1					−1		−1	2
x_6						1										1		−1	11
x_8	−1							1			1							−1	9
x_9									1									1	4
y_1	1									1									16
x_4	−1			1	−1						1					−1		−1	2
y_3					1						−1	1				1		1	2
y_4	1				1						−1		1			1		1	10
y_5					1									1					9
y_6															1	−1		−1	3
x_7							1									1			7
y_8	1										−1						1	1	11
x_2		1									1								13
	−1										1								13

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccc:c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 13 & 2 & 2 & 0 & 11 & 7 & 9 & 4 & 16 & 0 & 2 & 10 & 9 & 3 & 0 & 11 & 0 & 13 \end{array}\right]$$

对应的流网络为



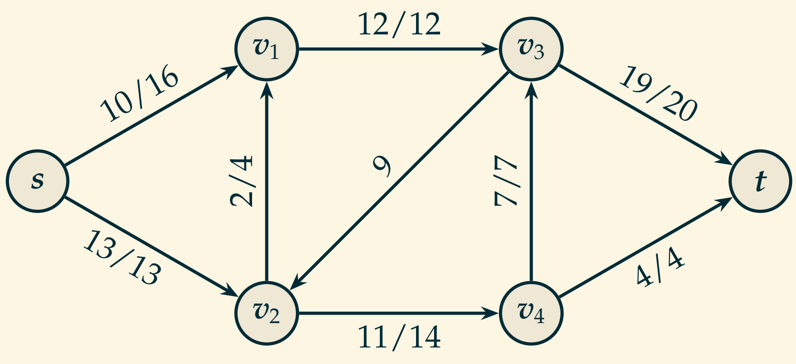
根据检验数 $\boldsymbol{a}_1$ 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{{}^{16}/_{1}, {}^{10}/_{1}, {}^{11}/_{1}\}$ 可知 $\boldsymbol{a}_{13}$ 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_3			1		-1						1					-1		-1	2
x_6						1										1		-1	11
x_8					1			1					1			1			19
x_9									1									1	4
y_1					-1					1	1		-1			-1		-1	6
x_4				1									1						12
y_3					1						-1	1				1		1	2
x_1	1				1						-1		1			1		1	10
y_5					1									1					9
y_6															1	-1		-1	3
x_7							1									1			7
y_8					-1								-1			-1	1		1
x_2		1									1								13
					1								1			1		1	23

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccc:c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 10 & 13 & 2 & 12 & 0 & 11 & 7 & 19 & 4 & 6 & 0 & 2 & 0 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0 & 23 \end{array}\right]$$

对应的流网络为



由于检验数均非负，已达最优解。

注. 在最大流的例子中，初始单纯形表中不存在单位阵，需先做一步初等行变换，也可采用两阶段单纯形法。