线性规划、单纯形法、对偶

张腾*

2023 年 12 月 13 日

线性规划是在一组线性等式或不等式的约束下，求线性目标函数最值的问题，现实中的许多问题都可化为线性规划问题。

例 1 (分数背包问题). 设背包承重量为 10，各物品价值如下：

	物品1	物品2	物品3	物品4
重量	4	7	5	3
价值	40	42	25	12

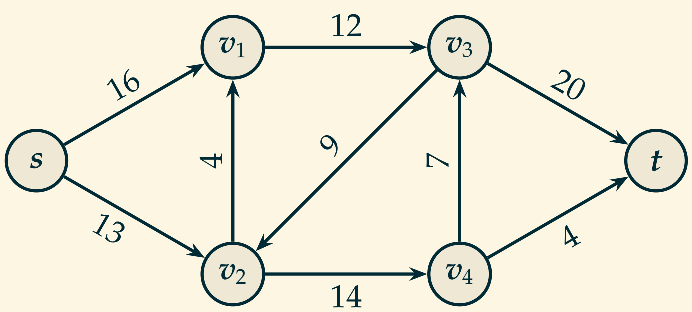
现允许物品按比例取走部分，求最大装包方案。

对 $i \in [4]$，设物品 i 取走的比例为 x_i，可得如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \le 10 \\ & 0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 1 \end{aligned}$$

注. 如果不允许物品按比例取走部分，约束 $0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le 1$ 将变成 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$，此时问题就变成了整数线性规划，比线性规划要难得多。

例 2 (最大流). 给定如下的流网络，求最大流。



*tengzhang@hust.edu.cn

设 9 条边上的流量分别为 $x_1, \ldots, x_9$，可得如下线性规划

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} \quad & 0 \le x_1 \le 16 \\
& 0 \le x_2 \le 13 \\
& 0 \le x_3 \le 4 \\
& 0 \le x_4 \le 12 \\
& 0 \le x_5 \le 9 \\
& 0 \le x_6 \le 14 \\
& 0 \le x_7 \le 7 \\
& 0 \le x_8 \le 20 \\
& 0 \le x_9 \le 4 \\
& x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
& x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
& x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
& x_6 - x_7 - x_9 = 0
\end{aligned}
$$

其中前 9 个不等式约束对应容量限制，后 4 个等式约束对应流量守恒。

$\mathbb{R}^2$ 中的线性规划只有 2 个变量，线性等式约束是一条直线，线性不等式约束是一个半平面，可采用图解法。

例 3. 考虑如下线性规划

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 \le 40 \\
& 2x_1 + x_2 \le 20 \\
& x_1 + x_2 \le 12 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

先确定可行域，即满足所有约束的可行解构成的集合。该例中共有 5 个线性不等式约束，每个对应一个半平面，因此可行域为 5 个半平面相交出的凸五边形 (图1中红色部分)。

引入直线簇 $y = 3x_1 + 5x_2$，其中不同的 y 对应不同的直线，这些直线都是平行的。先将 y 取为一个较大的值使直线与凸五边形不相交，然后逐渐减小 y，这相当于从上向下平移直线 $y = 3x_1 + 5x_2$ 使其逐渐靠近凸五边形，当其与凸五边形相切时，切点就是最优解，

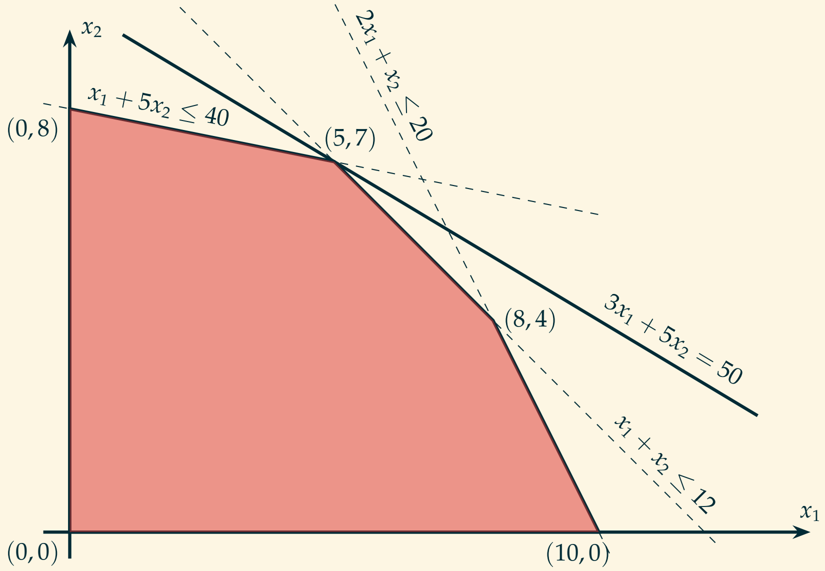


图 1: 直线簇与可行域相切于最优解 (5,7) 处，目标函数最优值为 50。

1 标准型

当变量多于 2 个时，图解法就不再适用了，需要更一般性的方法。对此，要先将问题转化为如下的标准型 (不等式只约束变量非负，其余都是等式约束)：

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \dots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

不失一般性可设 $\boldsymbol{b} \ge \mathbf{0}$，若某个 $b_i < 0$，对该约束两边取反即可。对一般形式的线性规划，可按以下步骤将其转化成标准型：

- 对非正变量 $x \le 0$，令 $y = -x$ 作为替代；
- 对无约束变量 x，将其表示成两个非负变量的差 $x = u - v$；
- 对 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \le b$ 型不等式约束，引入松弛变量 $y \ge 0$ 将其转化为等式约束 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} + y = b$；
- 对 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} \ge b$ 型不等式约束，引入剩余变量 $y \ge 0$ 将其转化为等式约束 $\boldsymbol{a}^\top \boldsymbol{x} - y = b$。

例 4. 将如下线性规划转化为标准型

$$\max \quad x_2 - x_1$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & 3x_1 = x_2 - 5 \\
& |x_2| \le 2 \\
& x_1 \le 0
\end{aligned}
$$

x_1 非正，令 $y_1 = -x_1 \ge 0$ 作为替代，x_2 无约束，令 $x_2 = y_2 - y_3$，其中 $y_2 \ge 0$、$y_3 \ge 0$，注意

$$
|x_2| \le 2 \Longleftrightarrow \begin{cases} y_2 - y_3 \le 2 \Longleftrightarrow y_2 - y_3 + y_4 = 2,\ y_4 \ge 0 \\ -y_2 + y_3 \le 2 \Longleftrightarrow -y_2 + y_3 + y_5 = 2,\ y_5 \ge 0 \end{cases}
$$

于是可得标准型

$$
\begin{aligned}
\max\quad & y_1 + y_2 - y_3 \\
\text{s.t.}\quad & 3y_1 + y_2 - y_3 = 5 \\
& y_2 - y_3 + y_4 = 2 \\
& -y_2 + y_3 + y_5 = 2 \\
& y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0
\end{aligned}
$$

2 基本解

所有可行解都是线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_n x_n = \boldsymbol{b}$ 的解，不失一般性可设 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = m$，即 $\mathbf{A}$ 是行满秩矩阵，否则存在冗余约束。此外设 $m < n$，即线性等式约束个数严格小于变量个数，否则可行域为单点集或空集。

从 $\mathbf{A}$ 的列中挑选 m 个线性无关的列作为基向量，不妨就取 $\mathbf{A}$ 的前 m 列，否则做列交换使前 m 列线性无关 (列对应的 x 分量也要跟着交换)，这样 $\mathbf{A}$ 可写成分块矩阵

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \cdots & \boldsymbol{a}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_{m+1} & \cdots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}
$$

其中 $\mathbf{B}$ 是 m 阶可逆方阵。求解 $\mathbf{B}\boldsymbol{x}_\mathbf{B} = \boldsymbol{b}$ 可得 $\boldsymbol{x}_\mathbf{B} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，显然

$$
\hat{\boldsymbol{x}} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_\mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_\mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{B}\boldsymbol{x}_\mathbf{B} = \boldsymbol{b}
$$

如此构造的 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 称为 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 在基 $\mathbf{B}$ 下的基本解，$\boldsymbol{x}_\mathbf{B}$ 中的元素称为基变量，即基本解中的非基变量都是 0。如果基本解也是线性规划的可行解 (所有变量非负)，则称为基本可行解。

定理 5 (线性规划基本定理). 对于线性规划的标准型，有如下两个命题：

1. 如果存在可行解，则一定存在基本可行解；
2. 如果存在最优可行解，则一定存在最优基本可行解。

证明. 1. 设 $\boldsymbol{x}$ 是一个可行解并有 p 个正元素，不失一般性，可设前 p 个元素为正，于是

$$
\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_p x_p = \boldsymbol{b}
$$

此时分两种情况：

- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ 线性无关，则 $p \le m$。若 $p = m$，$\boldsymbol{x}$ 就是基本可行解；若 $p < m$，从 $\mathbf{A}$ 的剩余列中挑选 $m - p$ 个列与 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ 构成基，此时 $\boldsymbol{x}$ 就是对应该基的基本可行解。
- $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ 线性相关，可以去掉一些冗余列使其线性无关，从而转化为前一种情况。设不全为零的实数 $y_1, \ldots, y_p$ 使得 $\boldsymbol{a}_1 y_1 + \cdots + \boldsymbol{a}_p y_p = \mathbf{0}$ 且至少某个 $y_i > 0$，否则对所有 y_i 取反即可，于是对任意 ϵ 有

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_1(x_1 - \epsilon y_1) + \cdots + \boldsymbol{a}_p(x_p - \epsilon y_p) = \mathbf{A}(\boldsymbol{x} - \epsilon \boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{y} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大直到 $\boldsymbol{x} - \epsilon \boldsymbol{y}$ 的前 p 个正分量出现 0，即取 $\hat{\epsilon} = \min\{x_i / y_i : y_i > 0, i \in [p]\}$，这样就得到了只有 $p - 1$ 个正分量的可行解，重复该操作直到正分量对应的列线性无关。

2. 设 $\boldsymbol{x}$ 是一个最优可行解且前 p 个元素为正，若 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ 线性无关，证明同命题 1；若 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_p$ 线性相关，可继续沿用命题 1 中去冗余列的方式，但还需证明对任意 ϵ，$\boldsymbol{x} - \epsilon \boldsymbol{y}$ 都是最优解，这只需证明 $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y} = 0$。注意只要 $|\epsilon| \le \min\{|x_i / y_i| : y_i \neq 0, i \in [p]\}$，$\boldsymbol{x} - \epsilon \boldsymbol{y}$ 都是可行解，因此若 $\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y} \neq 0$，根据其符号总能取某个充分小的 ϵ 使得 $\boldsymbol{c}^\top(\boldsymbol{x} - \epsilon \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} - \epsilon \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{y} > \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x}$，这与 $\boldsymbol{x}$ 是最优解矛盾。 ♣

根据该定理，线性规划的求解可转化为对基本可行解的搜索问题，依次对基本可行解的最优性进行检查即可。

3 几何视角下的线性规划

线性规划属于凸优化的范畴，线性目标函数显然是凸函数，可行域 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}\}$ 是凸集，因为对 $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \Omega$ 和 $\forall \alpha \in (0, 1)$ 有

$$\mathbf{A}(\alpha \boldsymbol{x}_1 + (1 - \alpha)\boldsymbol{x}_2) = \alpha \mathbf{A}\boldsymbol{x}_1 + (1 - \alpha)\mathbf{A}\boldsymbol{x}_2 = \alpha \boldsymbol{b} + (1 - \alpha)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}, \quad \alpha \boldsymbol{x}_1 + (1 - \alpha)\boldsymbol{x}_2 \ge \mathbf{0}$$

即连接 Ω 内任意两点的线段依然属于 Ω。对凸集 Ω 中的点 $\boldsymbol{x}$，若它无法表示成 Ω 中另外两点的凸组合，则称 $\boldsymbol{x}$ 为 Ω 的极点，即

$$\boldsymbol{x}\text{是极点}, \ \boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + (1 - \alpha)\boldsymbol{x}_2, \ \alpha \in (0, 1) \Longrightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}$$

定理 6. $\boldsymbol{x}$ 是 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}\}$ 的极点当且仅当 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}$ 的基本可行解。

证明. 略。 ♣

例 7. 再看例3中的线性规划：

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 \le 40 \\ & 2x_1 + x_2 \le 20 \end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 \le 12$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

先转化为标准型，为 3 个线性不等式约束分别引入松弛变量 x_3、x_4、x_5 可得线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_2} x_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_3} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_4} x_4 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{a}_5} x_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b}}$$

显然取 $\boldsymbol{a}_3$、$\boldsymbol{a}_4$、$\boldsymbol{a}_5$ 作为基向量，即令 x_3、x_4、x_5 作为基变量，可得基本可行解

$$40\boldsymbol{a}_3 + 20\boldsymbol{a}_4 + 12\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{b}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 \end{bmatrix}$$

对应 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[0,0]$，目标函数值 $0 < 50$，因此还不是最优解。

根据迭代改进的思路，需要从当前极点移动到邻近的可使目标函数值增大的极点。现选择 $\boldsymbol{a}_1$ 作为新的基向量 (入基) 并移除原来的某个基向量 (出基)，注意 $\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4 + \boldsymbol{a}_5$，于是

$$\epsilon\boldsymbol{a}_1 + (40-\epsilon)\boldsymbol{a}_3 + (20-2\epsilon)\boldsymbol{a}_4 + (12-\epsilon)\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{b}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \epsilon & 0 & 40-\epsilon & 20-2\epsilon & 12-\epsilon \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大，x_1 变成正数，x_3、x_4、x_5 逐渐变小，当 ϵ 增大到 10 时，x_4 减小到 0，即 $\boldsymbol{a}_4$ 出基，得到一个新的基本可行解

$$10\boldsymbol{a}_1 + 30\boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{b}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10 & 0 & 30 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

对应 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[10,0]$，目标函数值 $30 < 50$，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择 $\boldsymbol{a}_2$ 作为新的基向量，注意 $\boldsymbol{a}_2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_1 + \frac{9}{2}\boldsymbol{a}_3 + \frac{1}{2}\boldsymbol{a}_5$，于是

$$\left(10 - \frac{1}{2}\epsilon\right)\boldsymbol{a}_1 + \epsilon\boldsymbol{a}_2 + \left(30 - \frac{9}{2}\epsilon\right)\boldsymbol{a}_3 + \left(2 - \frac{1}{2}\epsilon\right)\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{b}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10-\frac{1}{2}\epsilon & \epsilon & 30-\frac{9}{2}\epsilon & 0 & 2-\frac{1}{2}\epsilon \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大，x_2 变成正数，x_1、x_3、x_5 逐渐变小，当 ϵ 增大到 4 时，x_5 减小到 0，即 $\boldsymbol{a}_5$ 出基，得到一个新的基本可行解

$$10\boldsymbol{a}_1 + 30\boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_5 = \boldsymbol{b}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8 & 4 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[8,4]$，目标函数值 $44 < 50$，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择 $\boldsymbol{a}_4$ 作为新的基向量，注意 $\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$，于是

$$(8-\epsilon)\boldsymbol{a}_1 + (4+\epsilon)\boldsymbol{a}_2 + (12-4\epsilon)\boldsymbol{a}_3 + \epsilon\boldsymbol{a}_4 = \boldsymbol{b}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8-\epsilon & 4+\epsilon & 12-4\epsilon & \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大，x_4 变成正数，x_1、x_3 逐渐变小 (x_2 变大不用管，不会破坏非负约束)，当 ϵ 增大到 3 时，x_3 减小到 0，即 $\boldsymbol{a}_3$ 出基，得到一个新的基本可行解

$$5\boldsymbol{a}_1+7\boldsymbol{a}_2+3\boldsymbol{a}_4=\boldsymbol{b}, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

对应 $\mathbb{R}^2$ 中可行域的极点 $[5,7]$，目标函数值 50，这就是最优解。

这种从一个极点转移到另一个极点，迭代改进的操作方式就是单纯形法求线性规划的基本思路。

4 单纯形法

例7的每轮迭代中，首先选择一个列向量入基 (如何选尚不明确)，但出基的基向量是确定的，迭代将 $\mathbf{A},\boldsymbol{c},\boldsymbol{b}$ 都写成分块的形式 (基与非基)：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{D}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_\mathbf{B}\\ \boldsymbol{c}_\mathbf{D}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_\mathbf{B}\\ \boldsymbol{x}_\mathbf{D}\end{bmatrix}$$

于是线性规划的标准型可写为

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top \boldsymbol{x}_\mathbf{B}+\boldsymbol{c}_\mathbf{D}^\top \boldsymbol{x}_\mathbf{D} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{B}\boldsymbol{x}_\mathbf{B}+\mathbf{D}\boldsymbol{x}_\mathbf{D}=\boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x}_\mathbf{B},\boldsymbol{x}_\mathbf{D}\geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

- 若 $\boldsymbol{x}_\mathbf{D}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{x}_\mathbf{B}=\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，这样就得到了关于基 $\mathbf{B}$ 的基本可行解

$$\hat{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}$$

对应的目标函数值为 $\hat{z}=\boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top \boldsymbol{x}_\mathbf{B}=\boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}$。
- 若 $\boldsymbol{x}_\mathbf{D}\neq\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{x}_\mathbf{B}=\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\boldsymbol{x}_\mathbf{D}$，对应的目标函数值为

$$z=\boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top \boldsymbol{x}_\mathbf{B}+\boldsymbol{c}_\mathbf{D}^\top \boldsymbol{x}_\mathbf{D}=\boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top(\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\boldsymbol{x}_\mathbf{D})+\boldsymbol{c}_\mathbf{D}^\top \boldsymbol{x}_\mathbf{D}=\boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}-\boldsymbol{c}_\mathbf{D}^\top)\boldsymbol{x}_\mathbf{D}=\hat{z}-\boldsymbol{r}_\mathbf{D}^\top \boldsymbol{x}_\mathbf{D}$$

其中 $\boldsymbol{r}_\mathbf{D}^\top=\boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}-\boldsymbol{c}_\mathbf{D}^\top$。注意 $\boldsymbol{x}_\mathbf{D}\geq\mathbf{0}$，若 $\boldsymbol{r}_\mathbf{D}\geq\mathbf{0}$，则 $z\geq\hat{z}$，即关于基 $\mathbf{B}$ 的基本可行解就是最优解；若 $\boldsymbol{r}_\mathbf{D}$ 中某个分量为负，则可将 $\boldsymbol{x}_\mathbf{D}$ 中对应的非基变量从 0 变为正数，从而使目标函数值变大。

基于此，构造单纯形表

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{c}^\top & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{D} & \boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top & -\boldsymbol{c}_\mathbf{D}^\top & 0\end{bmatrix}$$

先做初等行变换将基 $\mathbf{B}$ 变成单位阵

$$\begin{bmatrix}\mathbf{B}^{-1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0}^\top & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{D} & \boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top & -\boldsymbol{c}_\mathbf{D}^\top & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{c}_\mathbf{B}^\top & -\boldsymbol{c}_\mathbf{D}^\top & 0\end{bmatrix}$$

再做初等行变换将最后一行基变量对应的 $-\boldsymbol{c}_{\mathbf{B}}^{\top}$ 变成 $\mathbf{0}^{\top}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c}_{\mathbf{B}}^{\top} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{c}_{\mathbf{B}}^{\top} & -\boldsymbol{c}_{\mathbf{D}}^{\top} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} \\ \mathbf{0}^{\top} & \boldsymbol{c}_{\mathbf{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - \boldsymbol{c}_{\mathbf{D}}^{\top} & \boldsymbol{c}_{\mathbf{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b} \end{bmatrix}$$

注意最右列中的 $\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 就是关于基 $\mathbf{B}$ 的基变量，最后一行的 $\boldsymbol{c}_{\mathbf{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - \boldsymbol{c}_{\mathbf{D}}^{\top} = \boldsymbol{r}_{\mathbf{D}}^{\top}$ 就是检验数，右下角的 $\boldsymbol{c}_{\mathbf{B}}^{\top}\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{b}$ 就是当前基本可行解对应的目标函数值。

，单纯形法正是这么做的