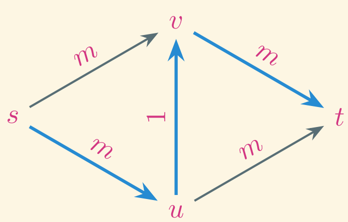
最大流补充资料

张腾

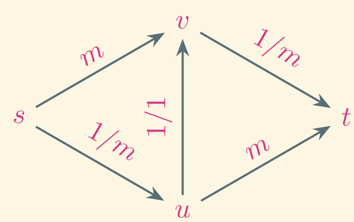
2020 年 11 月 4 日

Ford-Fulkerson 算法的时间复杂度是 $O(E\,|f^*|)$，事实上这个界是紧的。考虑图 1中的流网络，其中 m是一个很大的整数，最大流量 $|f^*| = 2m$，Ford-Fulkerson 算法在此流网络上需迭代 $2m$次才能得到最大流。

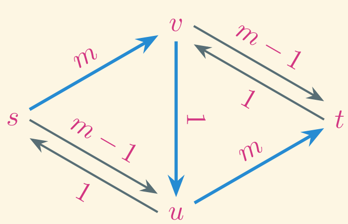
初始化流 $f = 0$，对应的残存网络就是原流网络，假设算法选择增广路径 $s \to u \to v \to t$，流网络该路径上的流量都可以加 1；接着假设选择增广路径 $s \to v \to u \to t$，流网络该路径上的流量都可以加 1；如此交替下去，每次都可以使得总流量增加 1，总共需迭代 $2m$次才能达到最优解。



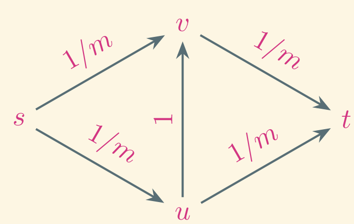
(a) $s \to u \to v \to t$，残存容量 1



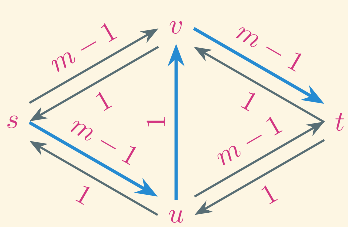
(b) 第一轮，$|f| = 1$



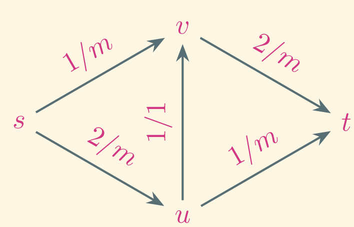
(c) $s \to v \to u \to t$，残存容量 1



(d) 第二轮，$|f| = 2$



(e) $s \to u \to v \to t$，残存容量 1



(f) 第三轮，$|f| = 3$

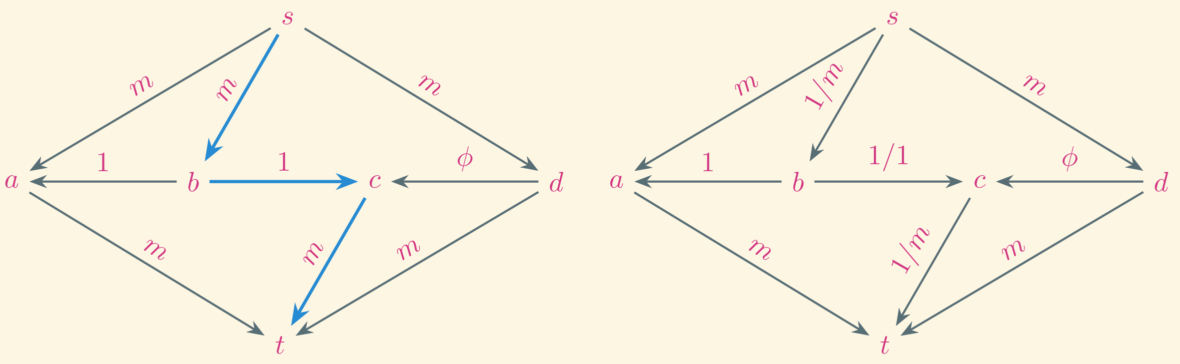
图 1: Ford-Fulkerson 算法达到最坏时间复杂度的例子

无理数容量上限

以上讨论都是针对容量上限为整数的情形，若容量上限为有理数，则先将其全部表示成既约分数，然后乘上分母的最小公倍数使其全部变成整数，之后在这个新的流网络上使用 Ford-Fulkerson 算法得到最大流，再除以分母的最小公倍数即可得到原流网络的最大流。

对于容量上限为无理数的情形，Ford-Fulkerson 算法就无能为力了，它既不会在有限步内停止，生成的流量序列也不趋向于最大流，例如图 2 中的流网络，其中 m 是一个很大的整数，$\phi = (\sqrt{5}-1)/2$ 为黄金分割比，满足 $1-\phi = \phi^2$，最大流量 $|f^*| = 2m+1$。

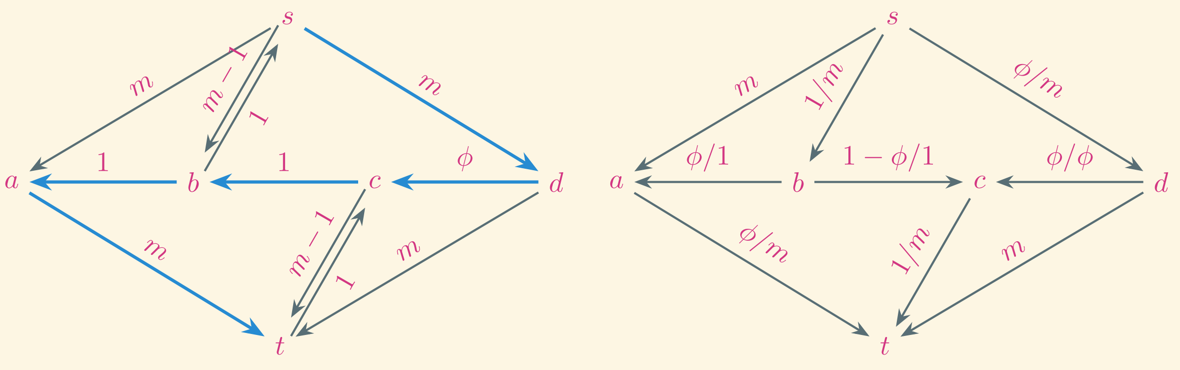
初始化流 $f=0$，对应的残存网络就是原流网络，假设算法选择增广路径 $s \to b \to c \to t$，流网络该路径上的流量都可以加 1，于是第一轮迭代的情况如下所示：



(a) $s \to b \to c \to t$，残存容量 1　　(b) 第一轮，$|f| = 1$

图 2: 无理数容量上限致使 Ford-Fulkerson 算法不收敛的例子

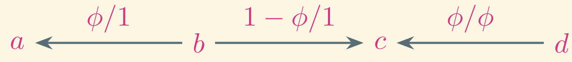
第二轮假设算法选择的增广路径为 $s \to d \to c \to b \to a \to t$，流网络该路径上的流量都可以增加 ϕ，于是



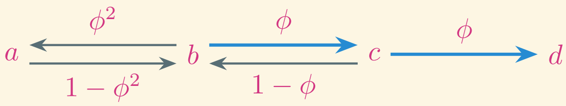
(a) $s \to d \to c \to b \to a \to t$，残存容量 ϕ　　(b) 第二轮，$|f| = 1+\phi$

结合这两个例子可以看出，容量上限为 m 的边不是瓶颈，关键是中间的三条横边，下面我们就省略源点 s、汇点 t 以及和它们相连的边，只画中间这三条边。

(a) $s \to d \to c \to b \to a \to t$，残存容量 ϕ

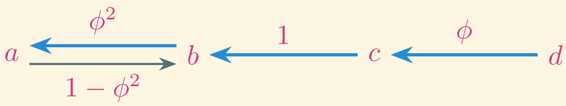


(b) 第二轮，$|f| = 1 + \phi$

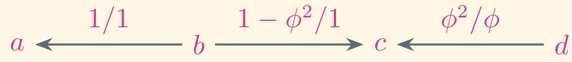


(c) $s \to b \to c \to d \to t$，残存容量 ϕ

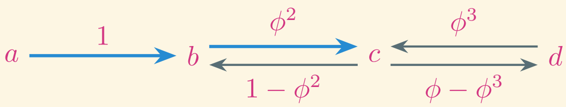
(d) 第三轮，$|f| = 1 + 2\phi$



(e) $s \to d \to c \to b \to a \to t$，残存容量 ϕ^2

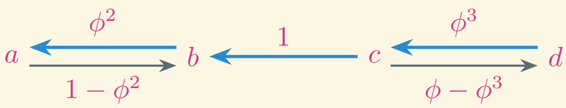


(f) 第四轮，$|f| = 1 + 2\phi + \phi^2$

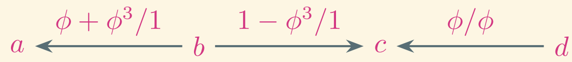


(g) $s \to a \to b \to c \to t$，残存容量 ϕ^2

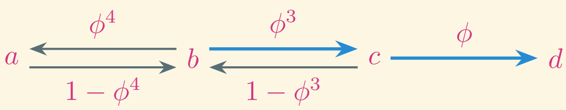
(h) 第五轮，$|f| = 1 + 2\phi + 2\phi^2$



(i) $s \to d \to c \to b \to a \to t$，残存容量 ϕ^3

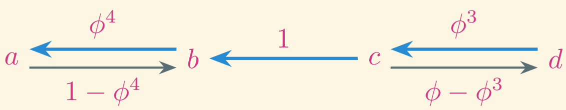


(j) 第六轮，$|f| = 1 + 2\phi + 2\phi^2 + \phi^3$

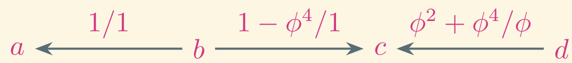


(k) $s \to b \to c \to d \to t$，残存容量 ϕ^3

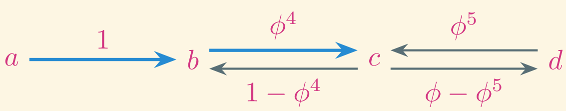
(l) 第七轮，$|f| = 1 + 2\phi + 2\phi^2 + 2\phi^3$



(m) $s \to d \to c \to b \to a \to t$，残存容量 ϕ^4



(n) 第八轮，$|f| = 1 + 2\phi + 2\phi^2 + 2\phi^3 + \phi^4$



(o) $s \to a \to b \to c \to t$，残存容量 ϕ^4

(p) 第九轮，$|f| = 1 + 2\phi + 2\phi^2 + 2\phi^3 + 2\phi^4$

不难看出，每 4轮一个周期，经过 $4n+1$次迭代后，总流量

$$|f| = 1 + 2\sum_{i\in[2n]} \phi^i = 1 + 2\frac{\phi(1-\phi^{2n})}{1-\phi} \xrightarrow{n\to\infty} 1 + 2\frac{\phi}{1-\phi} = 1 + \frac{2}{\phi} = 2 + \sqrt{5} \ll 2m + 1$$