

线性规划、单纯形法

张腾*

2023 年 12 月 14 日

线性规划是在一组线性等式或不等式的约束下，求线性目标函数最值的问题，现实中的许多问题都可化为线性规划问题。

例 1 (分数背包问题). 设背包承重量为 10，各物品价值如下：

| | 物品1 | 物品2 | 物品3 | 物品4 |
|----|-----|-----|-----|-----|
| 重量 | 4 | 7 | 5 | 3 |
| 价值 | 40 | 42 | 25 | 12 |

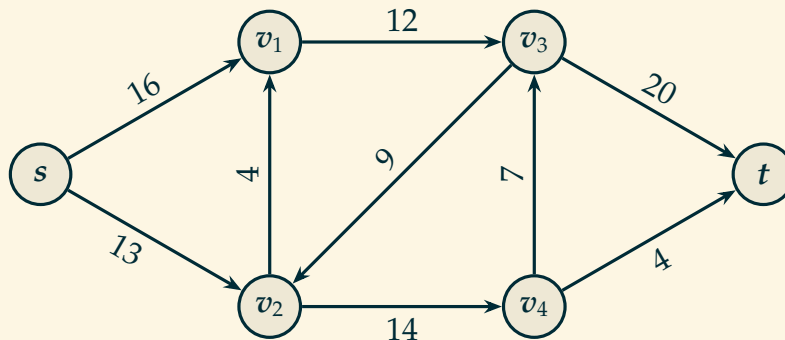
现允许物品按比例取走部分，求最大装包方案。

对 $i \in [4]$ ，设物品 i 取走的比例为 x_i ，可得如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1 \end{aligned}$$

注. 如果不允许只取部分 (0/1 背包问题)，约束 $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$ 将变成 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$ ，此时问题就变成了整数线性规划，比线性规划要难得多。

例 2 (最大流). 给定如下的流网络，求最大流。



*tengzhang@hust.edu.cn

设 9 条边上的流量分别为 x_1, \dots, x_9 , 可得如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1 \leq 16 \\ & 0 \leq x_2 \leq 13 \\ & 0 \leq x_3 \leq 4 \\ & 0 \leq x_4 \leq 12 \\ & 0 \leq x_5 \leq 9 \\ & 0 \leq x_6 \leq 14 \\ & 0 \leq x_7 \leq 7 \\ & 0 \leq x_8 \leq 20 \\ & 0 \leq x_9 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\ & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\ & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \end{aligned}$$

其中前 9 个不等式约束对应容量限制, 后 4 个等式约束对应流量守恒。

\mathbb{R}^2 中的线性规划只有 2 个变量, 线性等式约束是一条直线, 线性不等式约束是一个半平面, 可采用图解法。

例 3. 考虑如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

先确定可行域, 即满足所有约束的可行解构成的集合。该例中共有 5 个线性不等式约束, 每个对应一个半平面, 因此可行域为 5 个半平面相交出的凸五边形 (图1中红色部分)。

引入直线簇 $y = 3x_1 + 5x_2$, 其中不同的 y 对应不同的直线, 这些直线都是平行的。先将 y 取为一个较大的值使直线与凸五边形不相交, 然后逐渐减小 y , 这相当于从上向下平移直线 $y = 3x_1 + 5x_2$ 使其逐渐靠近凸五边形, 当其与凸五边形相切时, 切点就是最优解,

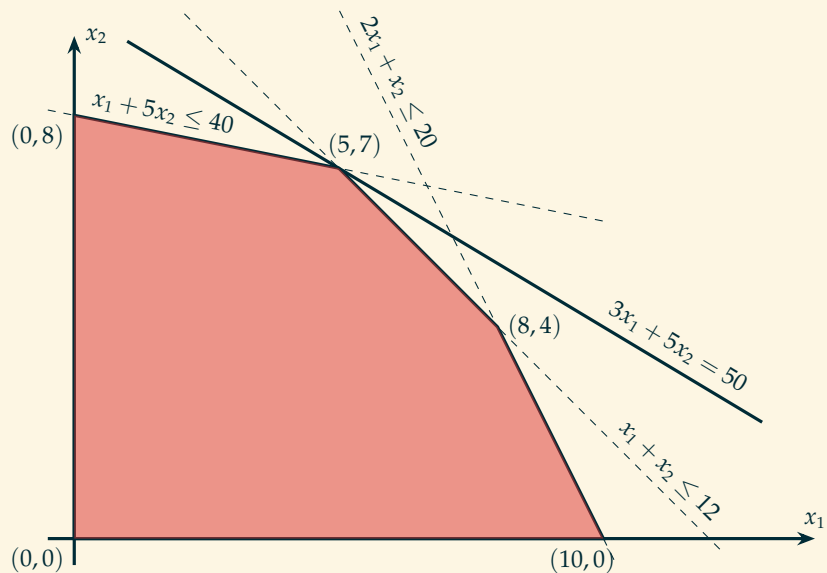


图 1: 直线簇与可行域相切于最优解 (5,7) 处, 目标函数最优值为 50。

1 标准型

当变量多于 2 个时, 图解法就不再适用了, 需要更一般性的方法。对此, 要先将问题转化为如下的标准型 (不等式只约束变量非负, 其余都是等式约束):

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n], \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

不失一般性可设 $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, 若某个 $b_i < 0$, 对该约束两边取反即可。对一般形式的线性规划, 可按以下步骤将其转化成标准型:

- 对非正变量 $x \leq 0$, 令 $y = -x$ 作为替代;
- 对无约束变量 x , 将其表示成两个非负变量的差 $x = u - v$;
- 对 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$ 型不等式约束, 引入松弛变量 $y \geq 0$ 将其转化为等式约束 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + y = b$;
- 对 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \geq b$ 型不等式约束, 引入剩余变量 $y \geq 0$ 将其转化为等式约束 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} - y = b$ 。

例 4. 将如下线性规划转化为标准型

$$\max \quad x_2 - x_1$$

$$\text{s.t. } 3x_1 = x_2 - 5$$

$$|x_2| \leq 2$$

$$x_1 \leq 0$$

x_1 非正, 令 $y_1 = -x_1 \geq 0$ 作为替代, x_2 无约束, 令 $x_2 = y_2 - y_3$, 其中 $y_2 \geq 0$ 、 $y_3 \geq 0$, 注意

$$|x_2| \leq 2 \iff \begin{cases} y_2 - y_3 \leq 2 \iff y_2 - y_3 + y_4 = 2, y_4 \geq 0 \\ -y_2 + y_3 \leq 2 \iff -y_2 + y_3 + y_5 = 2, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

于是可得标准型

$$\max \quad y_1 + y_2 - y_3$$

$$\text{s.t. } 3y_1 + y_2 - y_3 = 5$$

$$y_2 - y_3 + y_4 = 2$$

$$-y_2 + y_3 + y_5 = 2$$

$$y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0$$

2 基本解

所有可行解都是线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{a}_1x_1 + \cdots + \mathbf{a}_nx_n = \mathbf{b}$ 的解, 不失一般性可设 $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$, 即 \mathbf{A} 是行满秩矩阵, 否则存在冗余约束。此外设 $m < n$, 即线性等式约束个数严格小于变量个数, 否则可行域为单点集或空集。

从 \mathbf{A} 的 n 个列中挑选 m 个线性无关的列作为**基向量**, 不妨就取 \mathbf{A} 的前 m 列, 否则做列交换使前 m 列线性无关 (列对应的 x 分量也要跟着交换), 这样 \mathbf{A} 可写成分块矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{m+1} & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$$

其中 \mathbf{B} 是 m 阶可逆方阵。于是

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_D \end{bmatrix} = \mathbf{Bx}_B + \mathbf{Dx}_D$$

其中 \mathbf{x}_B 称为**基变量**, \mathbf{x}_D 为**非基变量**。令非基变量为零可得 $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, 这就得到了 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 在基 \mathbf{B} 下的**基本解**:

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{Bx}_B = \mathbf{b}$$

如果基本解还是线性规划的可行解 (所有变量非负), 则称为**基本可行解**。

定理 5 (线性规划基本定理). 对于线性规划的标准型, 有如下两个命题:

1. 如果存在可行解, 则一定存在基本可行解;

2. 如果存在最优可行解，则一定存在最优基本可行解。

证明. 1. 设 x 是一个可行解并有 p 个正元素，不失一般性，可设前 p 个元素为正，于是

$$\mathbf{A}x = a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b$$

此时分两种情况：

- a_1, \dots, a_p 线性无关，则 $p \leq m$ 。若 $p = m$ ， x 就是基本可行解；若 $p < m$ ，从 \mathbf{A} 的剩余列中挑选 $m - p$ 个列与 a_1, \dots, a_p 构成基，此时 x 就是对应该基的基本可行解。
- a_1, \dots, a_p 线性相关，可以去掉一些冗余列使其线性无关，从而转化为前一种情况。设不全为零的实数 y_1, \dots, y_p 使得 $a_1y_1 + \cdots + a_py_p = 0$ 且至少某个 $y_i > 0$ ，否则对所有 y_i 取反即可，于是对任意 ϵ 有

$$b = a_1(x_1 - \epsilon y_1) + \cdots + a_p(x_p - \epsilon y_p) = \mathbf{A}(x - \epsilon y), \quad y \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大直到 $x - \epsilon y$ 的前 p 个正分量出现 0，即取 $\hat{\epsilon} = \min\{x_i/y_i : y_i > 0, i \in [p]\}$ ，这样就得到了只有 $p - 1$ 个正分量的可行解，重复该操作直到正分量对应的列线性无关。

2. 设 x 是一个最优可行解且前 p 个元素为正，若 a_1, \dots, a_p 线性无关，证明同命题 1；若 a_1, \dots, a_p 线性相关，可继续沿用命题 1 中去冗余列的方式，但还需证明对任意 ϵ ， $x - \epsilon y$ 都是最优解，这只需证明 $c^\top y = 0$ 。注意只要 $|\epsilon| \leq \min\{|x_i/y_i| : y_i \neq 0, i \in [p]\}$ ， $x - \epsilon y$ 都是可行解，因此若 $c^\top y \neq 0$ ，根据其符号总能取某个充分小的 ϵ 使得 $c^\top(x - \epsilon y) = c^\top x - \epsilon c^\top y > c^\top x$ ，这与 x 是最优解矛盾。 ♣

根据该定理，线性规划的求解可转化为对基本可行解的搜索问题，依次对基本可行解的最优性进行检查即可。

3 几何视角下的线性规划

线性规划属于凸优化的范畴，线性目标函数显然是凸函数，可行域 $\Omega = \{x \mid \mathbf{A}x = b, x \geq 0\}$ 是凸集，因为对 $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ 和 $\forall \alpha \in (0, 1)$ 有

$$\mathbf{A}(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha \mathbf{A}x_1 + (1 - \alpha)\mathbf{A}x_2 = \alpha b + (1 - \alpha)b = b, \quad \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$$

即连接 Ω 内任意两点的线段依然属于 Ω 。对凸集 Ω 中的点 x ，若它无法表示成 Ω 中另外两点的凸组合，则称 x 为 Ω 的**极点**，即

$$x \text{ 是极点, } x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha \in (0, 1) \implies x_1 = x_2 = x$$

定理 6. x 是 $\Omega = \{x \mid \mathbf{A}x = b, x \geq 0\}$ 的极点当且仅当 x 是 $\mathbf{A}x = b, x \geq 0$ 的基本可行解。

证明. 待补充。 ♣

例 7. 再看例3中的线性规划：

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

先转化为标准型，为 3 个线性不等式约束分别引入松弛变量 x_3 、 x_4 、 x_5 可得线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_2} x_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_3} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_4} x_4 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_5} x_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}}_b$$

显然取 a_3 、 a_4 、 a_5 作为基向量，即令 x_3 、 x_4 、 x_5 作为基变量，可得基本可行解

$$40a_3 + 20a_4 + 12a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 \end{bmatrix}$$

对应 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[0,0]$ ，目标函数值 $0 < 50$ ，因此还不是最优解。

根据迭代改进的思路，需要从当前极点移动到邻近的可使目标函数值增大的极点。现选择 a_1 作为新的基向量 (入基) 并移除原来的某个基向量 (出基)，注意 $a_1 = a_3 + 2a_4 + a_5$ ，于是

$$\epsilon a_1 + (40 - \epsilon)a_3 + (20 - 2\epsilon)a_4 + (12 - \epsilon)a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \epsilon & 0 & 40 - \epsilon & 20 - 2\epsilon & 12 - \epsilon \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大， x_1 变成正数， x_3 、 x_4 、 x_5 逐渐变小，当 ϵ 增大到 10 时， x_4 减小到 0，即 a_4 出基，得到一个新的基本可行解

$$10a_1 + 30a_3 + 2a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10 & 0 & 30 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

对应 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[10,0]$ ，目标函数值 $30 < 50$ ，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择 a_2 作为新的基向量，注意 $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{9}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_5$ ，于是

$$\left(10 - \frac{1}{2}\epsilon\right)a_1 + \epsilon a_2 + \left(30 - \frac{9}{2}\epsilon\right)a_3 + \left(2 - \frac{1}{2}\epsilon\right)a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10 - \frac{1}{2}\epsilon & \epsilon & 30 - \frac{9}{2}\epsilon & 0 & 2 - \frac{1}{2}\epsilon \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大， x_2 变成正数， x_1 、 x_3 、 x_5 逐渐变小，当 ϵ 增大到 4 时， x_5 减小到 0，即 a_5 出基，得到一个新的基本可行解

$$10a_1 + 30a_3 + 2a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8 & 4 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[8, 4]$ ，目标函数值 $44 < 50$ ，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择 a_4 作为新的基向量，注意 $a_4 = a_1 - a_2 + 4a_3$ ，于是

$$(8 - \epsilon)a_1 + (4 + \epsilon)a_2 + (12 - 4\epsilon)a_3 + \epsilon a_4 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8 - \epsilon & 4 + \epsilon & 12 - 4\epsilon & \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大， x_4 变成正数， x_1 、 x_3 逐渐变小 (x_2 变大不用管，不会破坏非负约束)，当 ϵ 增大到 3 时， x_3 减小到 0，即 a_3 出基，得到一个新的基本可行解

$$5a_1 + 7a_2 + 3a_4 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

对应 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[5, 7]$ ，目标函数值 50，这就是最优解。

这种从一个极点转移到另一个极点，迭代改进的操作方式就是单纯形法求线性规划的基本思路。

4 单纯形法

设当前基向量为 a_1, \dots, a_m ，待入基向量为 a_q ，例7中每轮迭代都要将 b 和 a_q 用当前基线性表出

$$b = y_{10}a_1 + \dots + y_{m0}a_m \quad (1)$$

$$a_q = y_{1q}a_1 + \dots + y_{mq}a_m \quad (2)$$

令 $(1) - \epsilon \times (2)$ 可得关于 ϵ 的恒等式

$$(y_{10} - \epsilon y_{1q})a_1 + \dots + (y_{m0} - \epsilon y_{mq})a_m + \epsilon a_q = b$$

让 ϵ 从 0 增大直到某个 a_p 出基，其中 $p = \operatorname{argmin}_i \{y_{i0}/y_{iq} : y_{iq} > 0\}$ 。

式(1)和式(2)中的系数如何得到呢？根据线性方程组理论，对 $Ax = b$ 的增广矩阵做初等行变换

$$\begin{bmatrix} B & a_{m+1} & \dots & a_n & b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}a_{m+1} & \dots & B^{-1}a_n & B^{-1}b \end{bmatrix}$$

当基 B 变成单位阵时，第 q 列和最后一列就是 a_q 和 b 的线性表出系数。至此还剩两个问题：

1. 如何确定入基向量 a_q ；
2. 如何确定当前解是否为最优解。

下面考察基本可行解变化时目标函数值的变化，将标准型根据对 A 的分块重写为

$$\begin{aligned} \max \quad & c_B^\top x_B + c_D^\top x_D \\ \text{s.t.} \quad & Bx_B + Dx_D = b \\ & x_B, x_D \geq 0 \end{aligned}$$

- 若 $x_D = 0$ ，则 $x_B = B^{-1}b$ ，此时 x 就是关于基 B 的基本可行解，对应的目标函数值为

$$\hat{z} = c_B^\top x_B = c_B^\top B^{-1}b$$

- 若 $x_D \neq 0$, 则 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D$, 对应的目标函数值为

$$z = c_B^T x_B + c_D^T x_D = c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Dx_D) + c_D^T x_D = c_B^T B^{-1}b - (c_B^T B^{-1}D - c_D^T)x_D = \hat{z} - r_D^T x_D$$

其中 $r_D^T = c_B^T B^{-1}D - c_D^T$ 称为检验数。

注意 $x_D \geq 0$, 若 $r_D \geq 0$, 则 $z \geq \hat{z}$, 即关于基 B 的基本可行解就是最优解, 这就回答了前面的问题 2。若 r_D 中某个分量为负, 则将 x_D 中对应的非基变量从 0 变为正数可使目标函数值变大, 也即该非基变量对应的列入基, 这就回答了前面的问题 1。

基于此, 构造单纯形表

$$\begin{bmatrix} A & b \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & D & b \\ -c_B^T & -c_D^T & 0 \end{bmatrix}$$

先做初等行变换将基 B 变成单位阵

$$\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & D & b \\ -c_B^T & -c_D^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}D & B^{-1}b \\ -c_B^T & -c_D^T & 0 \end{bmatrix}$$

再做初等行变换将最后一行基变量对应的 $-c_B^T$ 变成 0^T

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ c_B^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}D & B^{-1}b \\ -c_B^T & -c_D^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}D & B^{-1}b \\ 0^T & c_B^T B^{-1}D - c_D^T & c_B^T B^{-1}b \end{bmatrix}$$

这张表里包含了一切我们需要的信息

- $B^{-1}D$ 里的每列就是该列向量在当前基下的线性表示系数;
- $B^{-1}b$ 是当前基对应的基本可行解中的基变量值;
- $c_B^T B^{-1}D - c_D^T$ 就是检验数, 可以指示下一个入基向量和是否已达最优解;
- $c_B^T B^{-1}b$ 就是当前基本可行解对应的目标函数值

例 8. 用单纯形法再求例3中的线性规划, 先转化为标准型:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

初始单纯形表为

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_3 | 1 | 5 | 1 | | | 40 |
| x_4 | 2 | 1 | | 1 | | 20 |
| x_5 | 1 | 1 | | | 1 | 12 |
| | -3 | -5 | | | | 0 |

此时 x_3, x_4, x_5 是基变量，基本可行解为

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 & 0 \end{array} \right]$$

对应 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[0,0]$ ，由于检验数还有负值，因此还不是最优解。

取检验数绝对值最大的负数对应的列入基，即 a_2 入基。注意

$$b = 40a_3 + 20a_4 + 12a_5, \quad a_2 = 5a_3 + 1a_4 + 1a_5$$

计算 $\operatorname{argmin}\{40/5, 20/1, 12/1\}$ 可知 a_3 出基。做初等行变换

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_2 & 0.2 & 1 & 0.2 & & & 8 \\ x_4 & 2 & 1 & & 1 & & 20 \\ x_5 & 1 & 1 & & & 1 & 12 \\ \hline & -3 & -5 & & & & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_2 & 0.2 & 1 & 0.2 & & & 8 \\ x_4 & 1.8 & & -0.2 & 1 & & 12 \\ x_5 & 0.8 & & -0.2 & & 1 & 4 \\ \hline & -2 & & 1 & & & 40 \end{array}$$

此时 x_2, x_4, x_5 是基变量，基本可行解为

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 0 & 8 & 0 & 12 & 4 & 40 \end{array} \right]$$

对应 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[0,8]$ ，由于检验数还有负值，因此还不是最优解。

根据检验数 a_1 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{8/0.2, 12/1.8, 4/0.8\}$ 可知 a_5 出基。做初等行变换

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_2 & 0.2 & 1 & 0.2 & & & 8 \\ x_4 & 1.8 & & -0.2 & 1 & & 12 \\ x_1 & 1 & & -0.25 & 1.25 & & 5 \\ \hline & -2 & & 1 & & & 40 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_2 & & 1 & 0.25 & & -0.25 & 7 \\ x_4 & & & 0.25 & 1 & -2.25 & 3 \\ x_1 & 1 & & -0.25 & & 1.25 & 5 \\ \hline & & & 0.5 & & 2.5 & 50 \end{array}$$

此时 x_1, x_2, x_4 是基变量，基本可行解为

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 & 50 \end{array} \right]$$

对应 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[5,7]$ ，由于检验数均非负，已达最优解。

例 9. 用单纯形法求例 1 中的分数背包问题，先转化为标准型：

$$\begin{array}{ll} \max & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 1 \\ & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$x \geq 0$$

初始单纯形表为

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_5 | 4 | 7 | 5 | 3 | 1 | | | | | 10 |
| x_6 | 1 | | | | | 1 | | | | 1 |
| x_7 | | 1 | | | | | 1 | | | 1 |
| x_8 | | | 1 | | | | | 1 | | 1 |
| x_9 | | | | 1 | | | | | 1 | 1 |
| | -40 | -42 | -25 | -12 | | | | | | 0 |

此时 x_5 、 x_6 、 x_7 、 x_8 、 x_9 是基变量，基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

根据检验数 a_2 入基，计算 $\arg\min\{10/7, 1/1\}$ 可知 a_7 出基。做初等行变换

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_5 | 4 | | 5 | 3 | 1 | | -7 | | | 3 |
| x_6 | 1 | | | | | 1 | | | | 1 |
| x_2 | | 1 | | | | | 1 | | | 1 |
| x_8 | | | 1 | | | | | 1 | | 1 |
| x_9 | | | | 1 | | | | | 1 | 1 |
| | -40 | | -25 | -12 | | | 42 | | | 42 |

此时 x_2 、 x_5 、 x_6 、 x_8 、 x_9 是基变量，基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & o \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 42 \end{bmatrix}$$

根据检验数 a_1 入基，计算 $\arg\min\{3/4, 1/1\}$ 可知 a_5 出基。做初等行变换

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_1 | 1 | | 5/4 | 3/4 | 1/4 | | -7/4 | | | 3/4 |
| x_6 | 1 | | | | | 1 | | | | 1 |
| x_2 | | 1 | | | | | 1 | | | 1 |
| x_8 | | | 1 | | | | | 1 | | 1 |
| x_9 | | | | 1 | | | | | 1 | 1 |
| | -40 | | -25 | -12 | | | 42 | | | 42 |

 \Rightarrow

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
| x_1 | 1 | | 5/4 | 3/4 | 1/4 | | -7/4 | | | 3/4 |
| x_6 | | | -5/4 | -3/4 | -1/4 | 1 | 7/4 | | | 1/4 |
| x_2 | | 1 | | | | | 1 | | | 1 |
| x_8 | | | 1 | | | | | 1 | | 1 |
| x_9 | | | | 1 | | | | | 1 | 1 |
| | | | 25 | 18 | 10 | 40 | -28 | | | 72 |

此时 x_1 、 x_2 、 x_6 、 x_8 、 x_9 是基变量，基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & o \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1 & 72 \end{bmatrix}$$

根据检验数 a_7 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{1/7, 1/1\}$ 可知 a_6 出基。做初等行变换

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | | | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | |
|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|--------|-------|-------|-------|---------------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| x_1 | 1 | | $5/4$ | $3/4$ | $1/4$ | | $-7/4$ | | | $3/4$ | | x_1 | 1 | | | | $7/4$ | | | | 1 |
| x_7 | | | $-5/7$ | $-3/7$ | $-1/7$ | 1 | 1 | | | $1/7$ | | x_7 | | $-5/7$ | $-3/7$ | $-1/7$ | 1 | 1 | | | $1/7$ |
| x_2 | | 1 | | | | | 1 | | | 1 | \Rightarrow | x_2 | 1 | $5/7$ | $3/7$ | $1/7$ | -1 | | | | $6/7$ |
| x_8 | | | 1 | | | | | 1 | | 1 | | x_8 | | 1 | | | | | 1 | | 1 |
| x_9 | | | | 1 | | | | | 1 | 1 | | x_9 | | | 1 | | | | | 1 | 1 |
| | | | 25 | 18 | 10 | 40 | -28 | | | 72 | | | | 5 | 6 | 6 | 68 | | | | 76 |

此时 x_1 、 x_2 、 x_7 、 x_8 、 x_9 是基变量，基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & | & 0 \\ 1 & 6/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 1 & 1 & | & 76 \end{bmatrix}$$

由于检验数均非负，已达最优解。

注. 分数背包问题也可采用贪心法来做。

例 10. 用单纯形法求例2中的最大流问题，先转化为标准型：

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + y_1 = 16 \\ & x_2 + y_2 = 13 \\ & x_3 + y_3 = 4 \\ & x_4 + y_4 = 12 \\ & x_5 + y_5 = 9 \\ & x_6 + y_6 = 14 \\ & x_7 + y_7 = 7 \\ & x_8 + y_8 = 20 \\ & x_9 + y_9 = 4 \\ & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\ & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\ & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\ & x, y \geq 0 \end{aligned}$$

共有 18 个变量、13 个等式约束，因此基变量有 13 个，非基变量有 5 个。初始不妨取 x_1 、 x_2 、 x_4 、 x_5 、

x_7 为非基变量, 将基变量由 x_1, x_2, x_4, x_5, x_7 表出:

$$\begin{aligned} x_3 = -x_1 + x_4 &\Rightarrow x_1 + x_3 - x_4 = 0 &\Rightarrow -x_1 + x_4 + y_3 = 4 \\ x_8 = x_4 - x_5 + x_7 &\Rightarrow -x_4 + x_5 - x_7 + x_8 = 0 &\Rightarrow x_4 - x_5 + x_7 + y_8 = 20 \\ x_6 = x_2 + x_5 - x_3 &\Rightarrow -x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 0 &\Rightarrow x_1 + x_2 - x_4 + x_5 + y_6 = 14 \\ x_9 = x_6 - x_7 &\Rightarrow -x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_7 + x_9 = 0 &\Rightarrow x_1 + x_2 - x_4 + x_5 - x_7 + y_9 = 4 \end{aligned}$$

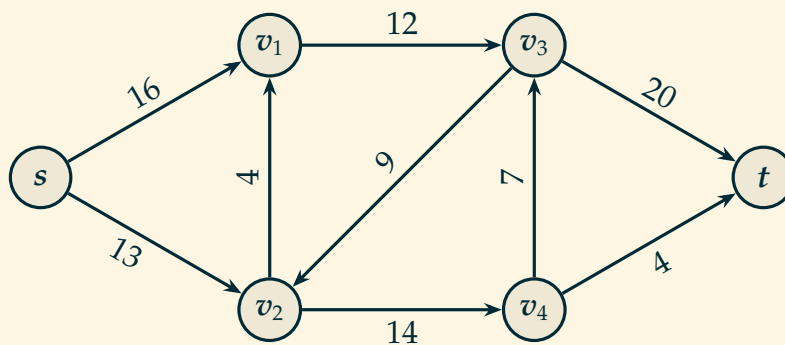
初始单纯形表为

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | y_1 | y_2 | y_3 | y_4 | y_5 | y_6 | y_7 | y_8 | y_9 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_3 | 1 | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| x_6 | -1 | -1 | | 1 | -1 | 1 | | | | | | | | | | | | | 0 |
| x_8 | | | | -1 | 1 | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | 0 |
| x_9 | -1 | -1 | | 1 | -1 | | 1 | | 1 | | | | | | | | | | 0 |
| y_1 | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 16 |
| y_2 | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 13 |
| y_3 | -1 | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | 4 |
| y_4 | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | 12 |
| y_5 | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | 9 |
| y_6 | 1 | 1 | | -1 | 1 | | | | | | | | | | 1 | | | | 14 |
| y_7 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | 7 |
| y_8 | | | | 1 | -1 | | 1 | | | | | | | | | | 1 | | 20 |
| y_9 | 1 | 1 | | -1 | 1 | | -1 | | | | | | | | | | | 1 | 4 |
| | -1 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | | | 0 |

基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 13 & 4 & 12 & 9 & 14 & 7 & 20 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



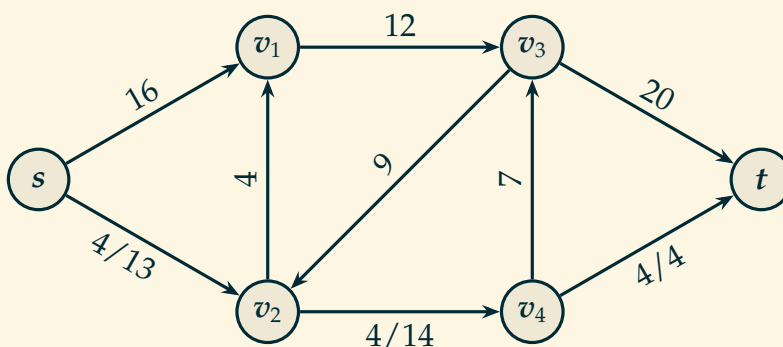
a_1 、 a_2 的检验数均为 -1 ，不妨让 a_2 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{13/1, 14/1, 4/1\}$ 可知 a_{18} 出基。做初等行变换

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | y_1 | y_2 | y_3 | y_4 | y_5 | y_6 | y_7 | y_8 | y_9 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_3 | 1 | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| x_6 | | | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | -1 | 4 |
| x_8 | | | | -1 | 1 | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | 0 |
| x_9 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | 4 |
| y_1 | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 16 |
| y_2 | -1 | | | 1 | -1 | | 1 | | | | 1 | | | | | | | -1 | 9 |
| y_3 | -1 | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | 4 |
| y_4 | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | 12 |
| y_5 | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | 9 |
| y_6 | | | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | -1 | 10 |
| y_7 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | 7 |
| y_8 | | | | 1 | -1 | | 1 | | | | | | | | | | 1 | | 20 |
| x_2 | 1 | 1 | | -1 | 1 | | -1 | | | | | | | | | | | 1 | 4 |
| | | | | -1 | 1 | | -1 | | | | | | | | | | | 1 | 4 |

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 16 & 9 & 4 & 12 & 9 & 10 & 7 & 20 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



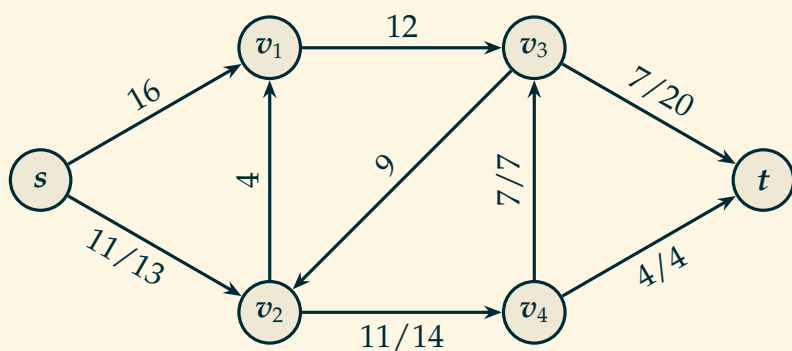
a_4 、 a_7 的检验数均为 -1 ，不妨让 a_7 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{9/1, 10/1, 7/1, 20/1\}$ 可知 a_{16} 出基。做初等行变换

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | y_1 | y_2 | y_3 | y_4 | y_5 | y_6 | y_7 | y_8 | y_9 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_3 | 1 | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | | | | | 0 |
| x_6 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 1 | -1 | | 11 |
| x_8 | | | | -1 | 1 | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | 7 |
| x_9 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | 4 |
| y_1 | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 16 |
| y_2 | -1 | | | 1 | -1 | | | | | | 1 | | | | | | -1 | -1 | 2 |
| y_3 | -1 | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | | 4 |
| y_4 | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | 12 |
| y_5 | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | 9 |
| y_6 | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | -1 | | 3 |
| x_7 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | 7 |
| y_8 | | | | 1 | -1 | | | | | | | | | | | -1 | 1 | | 13 |
| x_2 | 1 | 1 | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | 1 | | 1 | 11 |
| | | | | -1 | 1 | | | | | | | | | | | 1 | | 1 | 11 |

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 11 & 7 & 7 & 4 & 16 & 2 & 4 & 12 & 9 & 3 & 0 & 13 & 0 & 11 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



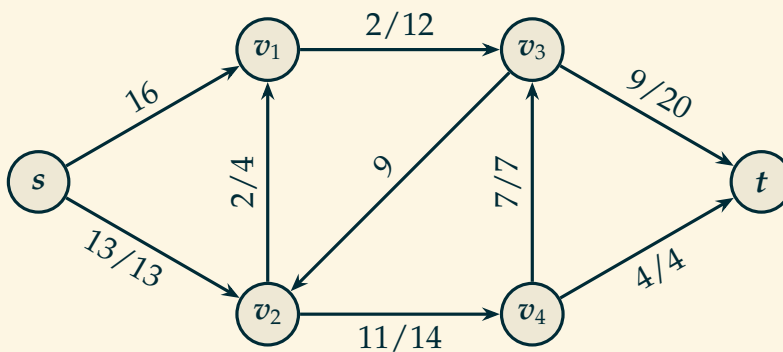
根据检验数 a_4 入基, 计算 $\operatorname{argmin}\{2/1, 4/1, 12/1, 13/1\}$ 可知 a_{11} 出基。做初等行变换

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | y_1 | y_2 | y_3 | y_4 | y_5 | y_6 | y_7 | y_8 | y_9 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_3 | | | 1 | | -1 | | | | | | 1 | | | | | -1 | | -1 | 2 |
| x_6 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 1 | | -1 | 11 |
| x_8 | -1 | | | | | | | 1 | | | 1 | | | | | | | -1 | 9 |
| x_9 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | 4 |
| y_1 | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 16 |
| x_4 | -1 | | | 1 | -1 | | | | | | 1 | | | | | -1 | | -1 | 2 |
| y_3 | | | | | 1 | | | | | | -1 | 1 | | | | 1 | | 1 | 2 |
| y_4 | 1 | | | | 1 | | | | | | -1 | | 1 | | | 1 | | 1 | 10 |
| y_5 | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | 9 |
| y_6 | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | | -1 | 3 |
| x_7 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | 7 |
| y_8 | 1 | | | | | | | | | | -1 | | | | | | 1 | 1 | 11 |
| x_2 | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 13 |
| | -1 | | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 13 |

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 13 & 2 & 2 & 0 & 11 & 7 & 9 & 4 & 16 & 0 & 2 & 10 & 9 & 3 & 0 & 11 & 0 & 13 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



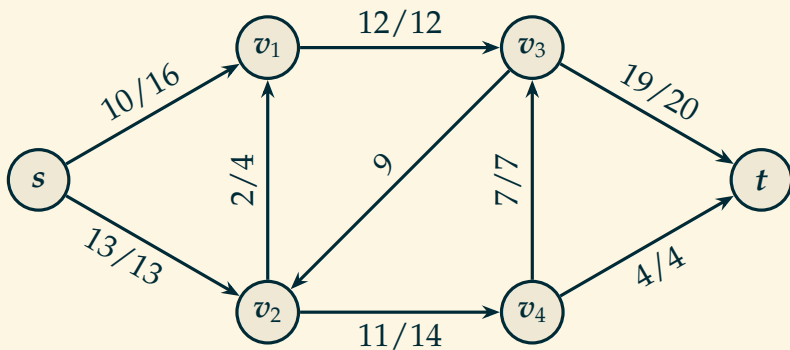
根据检验数 a_1 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{16/1, 10/1, 11/1\}$ 可知 a_{13} 出基。做初等行变换

| | x_1 | x_2 | x_3 | x_4 | x_5 | x_6 | x_7 | x_8 | x_9 | y_1 | y_2 | y_3 | y_4 | y_5 | y_6 | y_7 | y_8 | y_9 | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| x_3 | | | 1 | | -1 | | | | | | 1 | | | | | -1 | -1 | -1 | 2 |
| x_6 | | | | | | 1 | | | | | | | | | | 1 | -1 | -1 | 11 |
| x_8 | | | | | 1 | | | 1 | | | | | 1 | | | 1 | | | 19 |
| x_9 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | 4 |
| y_1 | | | | | -1 | | | | | 1 | 1 | | -1 | | | -1 | -1 | -1 | 6 |
| x_4 | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | 12 |
| y_3 | | | | | 1 | | | | | | -1 | 1 | | | | 1 | 1 | 1 | 2 |
| x_1 | 1 | | | | 1 | | | | | | -1 | | 1 | | | 1 | 1 | 1 | 10 |
| y_5 | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | 9 |
| y_6 | | | | | | | | | | | | | | | 1 | -1 | -1 | -1 | 3 |
| x_7 | | | | | | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | 7 |
| y_8 | | | | | -1 | | | | | | | | -1 | | | -1 | 1 | | 1 |
| x_2 | | 1 | | | | | | | | | 1 | | | | | | | | 13 |
| | | | | | 1 | | | | | | | | 1 | | | 1 | | 1 | 23 |

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 10 & 13 & 2 & 12 & 0 & 11 & 7 & 19 & 4 & 6 & 0 & 2 & 0 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0 & 23 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



由于检验数均非负，已达最优解。

注. 在最大流的例子中，初始单纯形表中不存在单位阵，需先做一步初等行变换，也可采用两阶段单纯形法。