

线性规划、单纯形法

张腾*

2023 年 12 月 18 日

线性规划是在一组线性等式或不等式的约束下，求线性目标函数最值的问题，现实中的许多问题都可化为线性规划问题。

例 1 (分数背包问题). 设背包承重量为 10，各物品价值如下：

	物品1	物品2	物品3	物品4
重量	4	7	5	3
价值	40	42	25	12

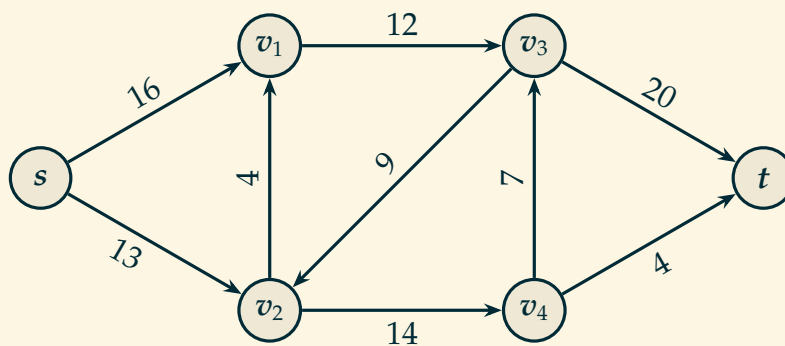
现允许物品按比例取走部分，求最大装包方案。

对 $i \in [4]$ ，设物品 i 取走的比例为 x_i ，可得如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ & 0 \leq x_i \leq 1, i \in [4] \end{aligned}$$

注. 如果不允许只取部分 (0/1 背包问题)，约束 $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$ 将变成 $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$ ，此时问题就变成了整数线性规划，比线性规划要难得多。

例 2 (最大流). 给定如下的流网络，求最大流。



*tengzhang@hust.edu.cn

设 9 条边上的流量分别为 x_1, \dots, x_9 , 可得如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1 \leq 16 \\ & 0 \leq x_2 \leq 13 \\ & 0 \leq x_3 \leq 4 \\ & 0 \leq x_4 \leq 12 \\ & 0 \leq x_5 \leq 9 \\ & 0 \leq x_6 \leq 14 \\ & 0 \leq x_7 \leq 7 \\ & 0 \leq x_8 \leq 20 \\ & 0 \leq x_9 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\ & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\ & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \end{aligned}$$

其中前 9 个不等式约束对应容量限制, 后 4 个等式约束对应流量守恒。

\mathbb{R}^2 中的线性规划只有 2 个变量, 线性目标函数和线性等式约束是一条直线, 线性不等式约束是一个半平面, 可采用图解法。

例 3 (图解法示例). 考虑如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

先确定可行域, 即满足所有约束的可行解构成的集合。该例中共有 5 个线性不等式约束, 每个对应一个半平面, 因此可行域为 5 个半平面相交出的凸五边形 (图1中红色部分)。

引入直线簇 $y = 3x_1 + 5x_2$, 其中不同的 y 对应不同的直线, 这些直线都是平行的。先将 y 取为一个较大的值使直线与凸五边形不相交, 然后逐渐减小 y , 这相当于从上向下平移直线 $y = 3x_1 + 5x_2$ 使其逐渐靠近凸五边形, 当其与凸五边形相切时, 切点就是最优解,

1 标准型

当变量多于 2 个时, 图解法就不再适用了, 需要更一般性的方法。线性规划的常用求解算法有单纯形法和内点法。前者在最坏情况下是指数复杂度, 后者是多项式复杂度, 但实际使用中两者几乎没有差别, 单纯形法的最坏情况实际中很难遇到。

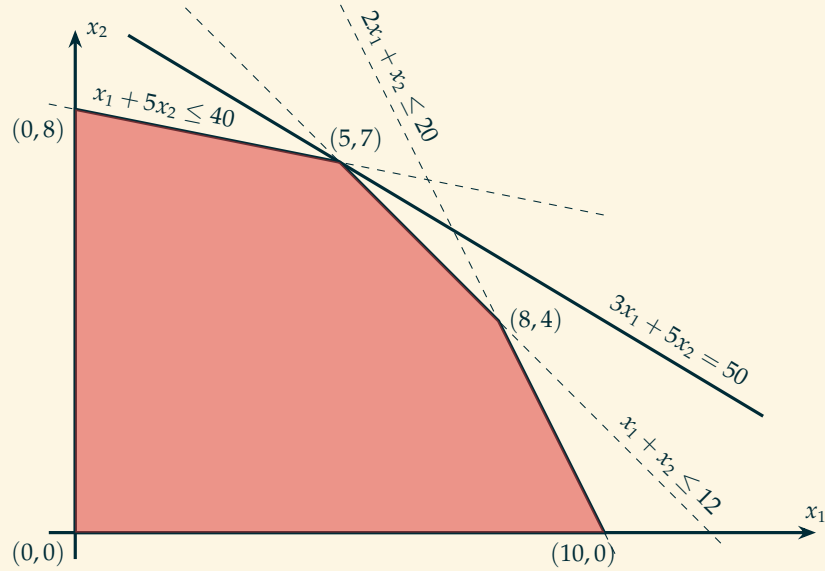


图 1: 直线簇与可行域相切于最优解 (5,7) 处, 目标函数最优值为 50。

要想使用单纯形法, 需要先将问题转化为标准型 (不等式只约束变量非负, 其余都是等式约束):

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

这里为了简化表达, 将所有线性等式约束合并写成了线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的形式, 不失一般性可设

- 共有 m 个线性等式约束、 n 个变量, 其中 $m < n$, 否则可行域为单点集或空集;
- \mathbf{A} 是行满秩矩阵, 即 $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$, 否则存在冗余约束;
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$, 若某个 $b_i < 0$, 对该约束两边取反即可。

对于任何形式的线性规划, 都可按以下步骤将其转化成标准型, 且两者是等价的:

- 对非正变量 $x \leq 0$, 令 $y = -x$ 作为替代;
- 对无约束变量 x , 将其表示成两个非负变量的差 $x = u - v$;
- 对 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$ 型不等式约束, 引入松弛变量 $y \geq 0$ 将其转化为等式约束 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + y = b$;
- 对 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \geq b$ 型不等式约束, 引入剩余变量 $y \geq 0$ 将其转化为等式约束 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} - y = b$ 。

下面将例1、例2、例3中的问题转化为标准型。

- 分数背包问题有 5 个 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$ 型约束, 分别引入松弛变量 x_5, \dots, x_9 :

$$\begin{array}{ll}
\max & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\
\text{s.t.} & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10 \\
& x_1 \leq 1 \\
& x_2 \leq 1 \\
& x_3 \leq 1 \\
& x_4 \leq 1 \\
& x_i \geq 0, i \in [4]
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\
\text{s.t.} & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 10 \\
& x_1 + x_6 = 1 \\
& x_2 + x_7 = 1 \\
& x_3 + x_8 = 1 \\
& x_4 + x_9 = 1 \\
& x_i \geq 0, i \in [9]
\end{array}
\tag{1}$$

- 最大流问题有 9 个 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$ 型约束, 分别引入松弛变量 x_{10}, \dots, x_{18} :

$$\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 \leq 16 \\
& x_2 \leq 13 \\
& x_3 \leq 4 \\
& x_4 \leq 12 \\
& x_5 \leq 9 \\
& x_6 \leq 14 \\
& x_7 \leq 7 \\
& x_8 \leq 20 \\
& x_9 \leq 4 \\
& x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
& x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
& x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
& x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\
& x_i \geq 0, i \in [9]
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max & x_1 + x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + x_{10} = 16 \\
& x_2 + x_{11} = 13 \\
& x_3 + x_{12} = 4 \\
& x_4 + x_{13} = 12 \\
& x_5 + x_{14} = 9 \\
& x_6 + x_{15} = 14 \\
& x_7 + x_{16} = 7 \\
& x_8 + x_{17} = 20 \\
& x_9 + x_{18} = 4 \\
& x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
& x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
& x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
& x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\
& x_i \geq 0, i \in [18]
\end{array}
\tag{2}$$

- 例3中的线性规划有 3 个 $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$ 型约束, 分别引入松弛变量 x_3, x_4, x_5 :

$$\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 5x_2 \leq 40 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 20 \\
& x_1 + x_2 \leq 12 \\
& x_i \geq 0, i \in [2]
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max & 3x_1 + 5x_2 \\
\text{s.t.} & x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\
& 2x_1 + x_2 + x_4 = 20 \\
& x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\
& x_i \geq 0, i \in [5]
\end{array}
\tag{3}$$

例 4. 将如下线性规划转化为标准型

$$\begin{array}{ll}
\max & x_2 - x_1 \\
\text{s.t.} & 3x_1 = x_2 - 5 \\
& |x_2| \leq 2 \\
& x_1 \leq 0
\end{array}$$

- x_1 非正, 令 $y_1 = -x_1 \geq 0$ 作为替代;
- x_2 无约束, 令 $x_2 = y_2 - y_3$, 其中 $y_2 \geq 0$ 、 $y_3 \geq 0$;

$$\begin{array}{ll}
\max & y_2 - y_3 + y_1 \\
\text{s.t.} & -3y_1 = y_2 - y_3 - 5 \\
& y_2 - y_3 \leq 2 \\
& -y_2 + y_3 \leq 2 \\
& y_i \geq 0, [i] \in [3]
\end{array}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{array}{ll}
\max & y_1 + y_2 - y_3 \\
\text{s.t.} & 3y_1 + y_2 - y_3 = 5 \\
& y_2 - y_3 + y_4 = 2 \\
& -y_2 + y_3 + y_5 = 2 \\
& y_i \geq 0, [i] \in [5]
\end{array}$$

2 基本解

对于线性规划的标准型, 所有可行解是线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解与第一象限的交集。根据之前的约定矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 行满秩且 $m < n$, 因此它有无穷多个解, 但求解线性规划只需要关注其中一类称为**基本解**的解。

记矩阵 \mathbf{A} 的 n 个列分别为 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, 由于 $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$, 因此可以从中挑出 m 个**线性无关**的列 $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_m}$ 构成基 \mathbf{B} , 这些列也称为**基向量**。为表述方便, 引入矩阵的切片表示 $\mathbf{A}_{\mathcal{R}, \mathcal{C}}$, 其中 \mathcal{R} 、 \mathcal{C} 为索引集合, 例如记 $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_m\}$ 、 $\mathcal{D} = [n] \setminus \mathcal{B}$, 则

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_{:, \mathcal{B}} = [\mathbf{a}_{i_1} \quad \cdots \quad \mathbf{a}_{i_m}]$$

同理 $\mathbf{D} = \mathbf{A}_{:, \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$ 是**非基向量**构成的矩阵, 进一步有

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = \mathbf{Bx}_{\mathcal{B}} + \mathbf{Dx}_{\mathcal{D}}$$

其中 $\mathbf{x}_{\mathcal{B}}$ 称为**基变量**, $\mathbf{x}_{\mathcal{D}}$ 称为**非基变量**。令 $\mathbf{x}_{\mathcal{D}} = \mathbf{0}$ 可得 $\mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$, 这就得到了 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 在基 \mathbf{B} 下的**基本解**。

- 如果基本解中某些基变量为零, 则称其为**退化的基本解**;
- 如果基本解还是线性规划的可行解 (所有变量非负), 则称其为**基本可行解**。

例 5. 设线性规划的等式约束为线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 其中

$$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3 \quad \mathbf{a}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$n = 4$ 、 $m = 2$, 故基本解最多不超过 $\binom{4}{2} = 6$ 个, 对线性方程组的增广矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 & 8 \\ 0 & -3 & 0 & -3 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

因此

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_4 + 6 \\ x_2 = -x_4 + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 令 $s = t = 0$, $x = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, 这是关于基 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \end{bmatrix}$ 的基本可行解;
- 令 $s = -6$, $t = 0$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}^\top$, 这是关于基 $\begin{bmatrix} a_2 & a_3 \end{bmatrix}$ 的基本解, 但不可行;
- 令 $s = 0$, $t = 2$, $x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^\top$, 这是同时关于基 $\begin{bmatrix} a_1 & a_4 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} a_2 & a_4 \end{bmatrix}$ 、 $\begin{bmatrix} a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ 的退化基本可行解;
- 令 $s = 1$, $t = 1$, $x = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$, 这是可行解, 但不是基本解。

注意 a_1 、 a_3 线性相关, 因此前三种情况已经找到所有的基本解了。

定理 6 (线性规划基本定理). 对于线性规划的标准型, 有如下两个命题:

1. 如果存在可行解, 则一定存在基本可行解;
2. 如果存在最优可行解, 则一定存在最优基本可行解。

证明. 1. 设 x 是一个可行解, 其中 $\{i \mid x_i > 0, i \in [n]\} = \{i_1, \dots, i_l\} \triangleq \mathcal{L}$, 即 x 有 l 个正分量, 则

$$b = Ax = A_{:, \mathcal{L}} x_{\mathcal{L}} = a_{i_1} x_{i_1} + \dots + a_{i_l} x_{i_l} \quad (4)$$

此时分两种情况:

- a_{i_1}, \dots, a_{i_l} 线性无关, 则 $l \leq m$ 。若 $l = m$, x 就是基本可行解; 若 $l < m$, 从 A 的剩余列中挑选 $m - l$ 个列与 a_{i_1}, \dots, a_{i_l} 构成基, 此时 x 就是对应该基的基本可行解。
- a_{i_1}, \dots, a_{i_l} 线性相关, 可以去掉一些冗余列使其线性无关, 从而转化为前一种情况。设不全为零的实数 y_{i_1}, \dots, y_{i_l} 使得

$$0 = a_{i_1} y_{i_1} + \dots + a_{i_l} y_{i_l} \quad (5)$$

且至少某个 $y_{i_k} > 0$, 否则对所有 y_{i_k} 取反即可, 于是对任意 ϵ , 令 (4) $-\epsilon \times$ (5) 有

$$b = a_{i_1} (x_{i_1} - \epsilon y_{i_1}) + \dots + a_{i_l} (x_{i_l} - \epsilon y_{i_l}) = A_{:, \mathcal{L}} (x_{\mathcal{L}} - \epsilon y_{\mathcal{L}}), \quad y_{\mathcal{L}}^\top \triangleq \begin{bmatrix} y_{i_1} & \dots & y_{i_l} \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大, 对所有 $y_{\mathcal{L}}$ 为正的, $x_{\mathcal{L}} - \epsilon y_{\mathcal{L}}$ 在这些分量上单调减。取 ϵ 使得 $x_{\mathcal{L}} - \epsilon y_{\mathcal{L}}$ 第一次出现某个分量变成 0, 即取

$$\epsilon = \min\{x_{i_k}/y_{i_k} : y_{i_k} > 0, k \in [l]\}$$

这样就得到了只有 $l - 1$ 个正分量的可行解 $x - \epsilon y$, 重复该操作直到正分量对应的列线性无关。

2. 设 x 是一个最优可行解且有 l 个正分量: $\{i \mid x_i > 0, i \in [n]\} = \{i_1, \dots, i_l\} \triangleq \mathcal{L}$ 。

若 a_{i_1}, \dots, a_{i_l} 线性无关, 证明同命题 1。若 a_{i_1}, \dots, a_{i_l} 线性相关, 可继续沿用命题 1 中去冗余列的方式, 但还需证明对任意 ϵ , $x - \epsilon y$ 都是最优解, 这只需证明 $c^\top y = 0$ 。注意只要

$$|\epsilon| \leq \min\{|x_{i_k}/y_{i_k}| : y_{i_k} \neq 0, k \in [l]\}$$

$x - \epsilon y$ 都是可行解, 因此若 $c^\top y \neq 0$, 根据其符号总能取某个充分小的 ϵ 使得 $c^\top (x - \epsilon y) > c^\top x$, 这与 x 是最优可行解矛盾。



根据该定理, 线性规划的求解可转化为对基本可行解的搜索问题, 依次对基本可行解的最优性进行检查即可。

3 几何视角

线性规划的可行域 $\Omega = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ 是凸集, 因为对 $\forall x_1, x_2 \in \Omega$ 和 $\forall \alpha \in (0, 1)$ 有

$$A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 = \alpha b + (1 - \alpha)b = b, \quad \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$$

即连接 Ω 内任意两点的线段依然属于 Ω 。对凸集 Ω 中的点 x , 若它无法表示成 Ω 中另外两点的凸组合, 则称 x 为 Ω 的**极点**, 即

$$x \text{ 是极点, } x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha \in (0, 1) \implies x_1 = x_2 = x$$

定理 7 (等价性). x 是 $\Omega = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$ 的极点当且仅当 x 是 $Ax = b, x \geq 0$ 的基本可行解。

证明. \Rightarrow : 设 x 满足 $Ax = b, x \geq 0$ 且 $\{i \mid x_i > 0, i \in [n]\} = \{i_1, \dots, i_l\}$, 则

$$a_{i_1}x_{i_1} + \dots + a_{i_l}x_{i_l} = b$$

设向量 y 满足 $a_{i_1}y_{i_1} + \dots + a_{i_l}y_{i_l} = 0$, 于是对任意 ϵ 有

$$a_{i_1}(x_{i_1} + \epsilon y_{i_1}) + \dots + a_{i_l}(x_{i_l} + \epsilon y_{i_l}) = b$$

$$a_{i_1}(x_{i_1} - \epsilon y_{i_1}) + \dots + a_{i_l}(x_{i_l} - \epsilon y_{i_l}) = b$$

注意所有的 $x_{i_k} > 0$, 于是存在 $\epsilon \in (0, \min\{|x_{i_k}/y_{i_k}| : y_{i_k} \neq 0, k \in [l]\})$ 使得

$$z_1 = x + \epsilon y \in \Omega, \quad z_2 = x - \epsilon y \in \Omega, \quad x = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2$$

由于 x 是极点, 因此 $z_1 = z_2 = x$, 而 $\epsilon > 0$, 故 $y = 0$ 。这意味着 a_{i_1}, \dots, a_{i_l} 线性无关, 于是 x 是基本可行解。

\Leftarrow : 设 x 是基本可行解, 对应基向量为 a_{i_1}, \dots, a_{i_m} , 记 $\mathcal{B} = \{i_1, \dots, i_m\}$ 、 $\mathcal{D} = [n] \setminus \mathcal{B}$, 则

$$a_{i_1}x_{i_1} + \dots + a_{i_m}x_{i_m} = b, \quad x_{\mathcal{D}} = 0$$

假设存在 $y, z \in \Omega$ 、 $\alpha \in (0, 1)$ 使得 $x = \alpha y + (1 - \alpha)z$, 注意 $\alpha > 0$ 、 $(1 - \alpha) > 0$, 于是

$$y_{\mathcal{D}} = 0, \quad a_{i_1}y_{i_1} + \dots + a_{i_m}y_{i_m} = b$$

$$z_{\mathcal{D}} = 0, \quad a_{i_1}z_{i_1} + \dots + a_{i_m}z_{i_m} = b$$

两式相减 $a_{i_1}(y_{i_1} - z_{i_1}) + \dots + a_{i_m}(y_{i_m} - z_{i_m}) = 0$, 由于 a_{i_1}, \dots, a_{i_m} 线性无关, 故 $y = z$, x 是极点。♣

例 8. 再看例3中的线性规划, 根据式(3), 其标准型为:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\ & 2x_1 + x_2 + x_4 = 20, \quad Ax = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_2} x_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_3} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_4} x_4 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_5} x_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}}_b \\ & x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\ & x_i \geq 0, i \in [5] \end{aligned}$$

显然取 a_3 、 a_4 、 a_5 作为基向量，基本可行解是一目了然的 (基为单位阵):

$$40a_3 + 20a_4 + 12a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 \end{bmatrix}$$

对应原问题 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[0,0]$ ，目标函数值 $0 < 50$ ，因此还不是最优解。

根据迭代改进的思路，需要从当前极点移动到邻近极点，同时使目标函数值增大。现选择 a_1 作为新的基向量 (入基) 并移除原来的某个基向量 (出基)，注意 $a_1 = a_3 + 2a_4 + a_5$ ，于是

$$\epsilon a_1 + (40 - \epsilon)a_3 + (20 - 2\epsilon)a_4 + (12 - \epsilon)a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \epsilon & 0 & 40 - \epsilon & 20 - 2\epsilon & 12 - \epsilon \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大， x_1 变成正数， x_3 、 x_4 、 x_5 逐渐变小，当 ϵ 增大到 10 时， x_4 率先减小到 0，即 a_4 出基，得到一个新的基本可行解

$$10a_1 + 30a_3 + 2a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10 & 0 & 30 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

对应原问题 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[10,0]$ ，目标函数值 $30 < 50$ ，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择 a_2 作为新的基向量，注意 $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{9}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_5$ ，于是

$$\left(10 - \frac{1}{2}\epsilon\right)a_1 + \epsilon a_2 + \left(30 - \frac{9}{2}\epsilon\right)a_3 + \left(2 - \frac{1}{2}\epsilon\right)a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10 - \frac{1}{2}\epsilon & \epsilon & 30 - \frac{9}{2}\epsilon & 0 & 2 - \frac{1}{2}\epsilon \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大， x_2 变成正数， x_1 、 x_3 、 x_5 逐渐变小，当 ϵ 增大到 4 时， x_5 率先减小到 0，即 a_5 出基，得到一个新的基本可行解

$$8a_1 + 4a_2 + 12a_3 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8 & 4 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应原问题 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[8,4]$ ，目标函数值 $44 < 50$ ，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择 a_4 作为新的基向量，注意 $a_4 = a_1 - a_2 + 4a_3$ ，于是

$$(8 - \epsilon)a_1 + (4 + \epsilon)a_2 + (12 - 4\epsilon)a_3 + \epsilon a_4 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8 - \epsilon & 4 + \epsilon & 12 - 4\epsilon & \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

让 ϵ 从 0 增大， x_4 变成正数， x_1 、 x_3 逐渐变小，当 ϵ 增大到 3 时， x_3 率先减小到 0，即 a_3 出基，得到一个新的基本可行解

$$5a_1 + 7a_2 + 3a_4 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

对应原问题 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[5,7]$ ，目标函数值 50，这就是最优解。

注. 这种从一个极点转移到另一个极点，迭代改进的操作方式就是单纯形法求线性规划的基本思路，但

1. 如何确定初始的基和解？
2. 如何确定每轮的入基向量以改进当前解？
3. 如何确定当前解为最优解以停止算法？

4 单纯形法

设当前基向量为 a_1, \dots, a_m , 待入基向量为 a_q , 例8中每轮迭代都要将 b 和 a_q 用当前基线性表出

$$b = y_{10}a_1 + \dots + y_{m0}a_m \quad (6)$$

$$a_q = y_{1q}a_1 + \dots + y_{mq}a_m \quad (7)$$

令 (6) - $\epsilon \times$ (7) 可得关于 ϵ 的恒等式

$$(y_{10} - \epsilon y_{1q})a_1 + \dots + (y_{m0} - \epsilon y_{mq})a_m + \epsilon a_q = b$$

让 ϵ 从 0 增大直到某个 a_p 出基, 其中 $p = \operatorname{argmin}_i \{y_{i0}/y_{iq} : y_{iq} > 0\}$ 。

式(6)和式(7)中的系数如何得到呢? 根据线性方程组理论, 对 $Ax = b$ 的增广矩阵做初等行变换

$$\begin{bmatrix} B & a_{m+1} & \dots & a_n & b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}a_{m+1} & \dots & B^{-1}a_n & B^{-1}b \end{bmatrix}$$

当基 B 变成单位阵时, 第 q 列和最后一列就是 a_q 和 b 的线性表出系数。至此还剩两个问题:

1. 如何确定入基向量 a_q ;
2. 如何确定当前解是否为最优解。

下面考察基本可行解变化时目标函数值的变化, 将标准型根据对 A 的分块重写为

$$\begin{aligned} \max \quad & c_B^\top x_B + c_D^\top x_D \\ \text{s.t.} \quad & Bx_B + Dx_D = b \\ & x_B, x_D \geq 0 \end{aligned}$$

- 若 $x_D = 0$, 则 $x_B = B^{-1}b$, 此时 x 就是关于基 B 的基本可行解, 对应的目标函数值为

$$\hat{z} = c_B^\top x_B = c_B^\top B^{-1}b$$

- 若 $x_D \neq 0$, 则 $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D$, 对应的目标函数值为

$$z = c_B^\top x_B + c_D^\top x_D = c_B^\top (B^{-1}b - B^{-1}Dx_D) + c_D^\top x_D = c_B^\top B^{-1}b - (c_B^\top B^{-1}D - c_D^\top)x_D = \hat{z} - r_D^\top x_D$$

其中 $r_D^\top = c_B^\top B^{-1}D - c_D^\top$ 称为检验数。

注意 $x_D \geq 0$, 若 $r_D \geq 0$, 则 $z \geq \hat{z}$, 即关于基 B 的基本可行解就是最优解, 这就回答了前面的问题 2。若 r_D 中某个分量为负, 则将 x_D 中对应的非基变量从 0 变为正数可使目标函数值变大, 也即该非基变量对应的列入基, 这就回答了前面的问题 1。

基于此, 构造单纯形表

$$\begin{bmatrix} A & b \\ -c^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & D & b \\ -c_B^\top & -c_D^\top & 0 \end{bmatrix}$$

先做初等行变换将基 B 变成单位阵

$$\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & D & b \\ -c_B^\top & -c_D^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}D & B^{-1}b \\ -c_B^\top & -c_D^\top & 0 \end{bmatrix}$$

再做初等行变换将最后一行基变量对应的 $-c_B^\top$ 变成 0^\top

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ c_B^\top & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ -c_B^\top & -c_D^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} & \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ 0^\top & c_B^\top \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - c_D^\top & c_B^\top \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}$$

这张表里包含了一切我们需要的信息

- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}$ 里的每列就是该列向量在当前基下的线性表示系数;
- $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 是当前基对应的基本可行解中的基变量值;
- $c_B^\top \mathbf{B}^{-1}\mathbf{D} - c_D^\top$ 就是检验数, 可以指示下一个入基向量和是否已达最优解;
- $c_B^\top \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ 就是当前基本可行解对应的目标函数值

例 9. 用单纯形法再求例3中的线性规划, 先转化为标准型:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

初始单纯形表为

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	1	5	1			40
x_4	2	1		1		20
x_5	1	1			1	12
	-3	-5				0

此时 x_3 、 x_4 、 x_5 是基变量, 基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 & | & 0 \end{bmatrix}$$

对应 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[0,0]$, 由于检验数还有负值, 因此还不是最优解。

取检验数绝对值最大的负数对应的列入基, 即 a_2 入基。注意

$$\mathbf{b} = 40\mathbf{a}_3 + 20\mathbf{a}_4 + 12\mathbf{a}_5, \quad \mathbf{a}_2 = 5\mathbf{a}_3 + 1\mathbf{a}_4 + 1\mathbf{a}_5$$

计算 $\operatorname{argmin}\{40/5, 20/1, 12/1\}$ 可知 a_3 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5			x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0.2	1	0.2			8	\Rightarrow	x_2	0.2	1	0.2		8
x_4	2	1		1		20		x_4	1.8	-0.2	1		12
x_5	1	1			1	12		x_5	0.8	-0.2		1	4
	-3	-5				0			-2	1			40

此时 x_2, x_4, x_5 是基变量，基本可行解为

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 0 & 8 & 0 & 12 & 4 & 40 \end{array} \right]$$

对应 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[0, 8]$ ，由于检验数还有负值，因此还不是最优解。

根据检验数 a_1 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{8/0.2, 12/1.8, 4/0.8\}$ 可知 a_5 出基。做初等行变换

$$\begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_2 & 0.2 & 1 & 0.2 & & & 8 \\ x_4 & 1.8 & & -0.2 & 1 & & 12 \\ x_1 & 1 & & -0.25 & & 1.25 & 5 \\ \hline & -2 & & 1 & & & 40 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \\ \hline x_2 & & 1 & 0.25 & & -0.25 & 7 \\ x_4 & & & 0.25 & 1 & -2.25 & 3 \\ x_1 & 1 & & -0.25 & & 1.25 & 5 \\ \hline & & & 0.5 & & 2.5 & 50 \end{array}$$

此时 x_1, x_2, x_4 是基变量，基本可行解为

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 & 50 \end{array} \right]$$

对应 \mathbb{R}^2 中可行域的极点 $[5, 7]$ ，由于检验数均非负，已达最优解。

例 10. 用单纯形法求例 1 中的分数背包问题，先转化为标准型：

$$\begin{array}{ll} \max & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} & \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & & & & 1 \\ & 1 & & & 1 \\ & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{array}$$

初始单纯形表为

$$\begin{array}{c|cccccccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & \\ \hline x_5 & 4 & 7 & 5 & 3 & 1 & & & & & 10 \\ x_6 & 1 & & & & & 1 & & & & 1 \\ x_7 & & 1 & & & & & 1 & & & 1 \\ x_8 & & & 1 & & & & & 1 & & 1 \\ x_9 & & & & 1 & & & & & 1 & 1 \\ \hline & -40 & -42 & -25 & -12 & & & & & & 0 \end{array}$$

此时 x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 是基变量，基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

根据检验数 a_2 入基, 计算 $\arg\min\{10/7, 1/1\}$ 可知 a_7 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_5	4		5	3	1		-7			3
x_6	1					1				1
x_2		1					1			1
x_8			1					1		1
x_9				1					1	1
	-40		-25	-12			42			42

此时 x_2 、 x_5 、 x_6 、 x_8 、 x_9 是基变量, 基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 42 \end{bmatrix}$$

根据检验数 a_1 入基, 计算 $\arg\min\{3/4, 1/1\}$ 可知 a_5 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_1	1		5/4	3/4	1/4		-7/4			3/4
x_6	1					1				1
x_2		1					1			1
x_8			1					1		1
x_9				1					1	1
	-40		-25	-12			42			42

 \Rightarrow

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_1	1		5/4	3/4	1/4		-7/4			3/4
x_6			-5/4	-3/4	-1/4	1	7/4			1/4
x_2		1					1			1
x_8			1					1		1
x_9				1					1	1
			25	18	10	40	-28			72

此时 x_1 、 x_2 、 x_6 、 x_8 、 x_9 是基变量, 基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1 & 72 \end{bmatrix}$$

根据检验数 a_7 入基, 计算 $\arg\min\{1/7, 1/1\}$ 可知 a_6 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_1	1		5/4	3/4	1/4		-7/4			3/4
x_7			-5/7	-3/7	-1/7	1	1			1/7
x_2		1					1			1
x_8			1					1		1
x_9				1					1	1
			25	18	10	40	-28			72

 \Rightarrow

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
x_1	1					7/4				1
x_7			-5/7	-3/7	-1/7	1	1			1/7
x_2		1	5/7	3/7	1/7	-1				6/7
x_8			1					1		1
x_9				1					1	1
			5	6	6	68				76

此时 x_1 、 x_2 、 x_7 、 x_8 、 x_9 是基变量, 基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & 0 \\ 1 & 6/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 1 & 1 & 76 \end{bmatrix}$$

由于检验数均非负, 已达最优解。

注. 分数背包问题也可采用贪心法来做。

例 11. 用单纯形法求例2中的最大流问题，先转化为标准型：

$$\begin{aligned}
 \max \quad & x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & x_1 + y_1 = 16 \\
 & x_2 + y_2 = 13 \\
 & x_3 + y_3 = 4 \\
 & x_4 + y_4 = 12 \\
 & x_5 + y_5 = 9 \\
 & x_6 + y_6 = 14 \\
 & x_7 + y_7 = 7 \\
 & x_8 + y_8 = 20 \\
 & x_9 + y_9 = 4 \\
 & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
 & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
 & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
 & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\
 & x, y \geq 0
 \end{aligned}$$

共有 18 个变量、13 个等式约束，因此基变量有 13 个，非基变量有 5 个。初始不妨取 x_1 、 x_2 、 x_4 、 x_5 、 x_7 为非基变量，将基变量由 x_1 、 x_2 、 x_4 、 x_5 、 x_7 表出：

$$\begin{aligned}
 x_3 = -x_1 + x_4 & \Rightarrow x_1 + x_3 - x_4 = 0 & \Rightarrow -x_1 + x_4 + y_3 = 4 \\
 x_8 = x_4 - x_5 + x_7 & \Rightarrow -x_4 + x_5 - x_7 + x_8 = 0 & \Rightarrow x_4 - x_5 + x_7 + y_8 = 20 \\
 x_6 = x_2 + x_5 - x_3 & \Rightarrow -x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 0 & \Rightarrow x_1 + x_2 - x_4 + x_5 + y_6 = 14 \\
 x_9 = x_6 - x_7 & \Rightarrow -x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_7 + x_9 = 0 & \Rightarrow x_1 + x_2 - x_4 + x_5 - x_7 + y_9 = 4
 \end{aligned}$$

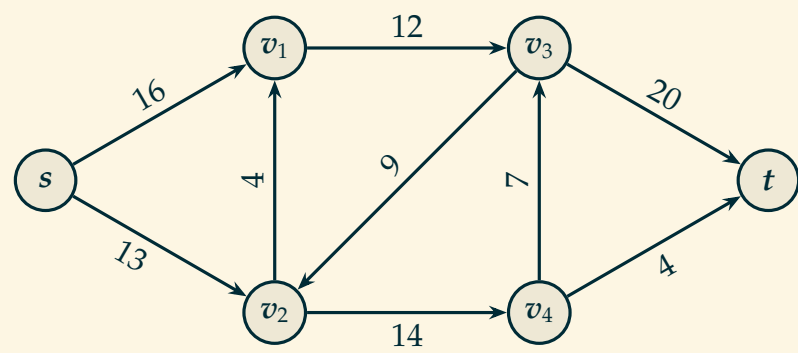
初始单纯形表为

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_3	1		1	-1															0
x_6	-1	-1		1	-1	1													0
x_8				-1	1		-1	1											0
x_9	-1	-1		1	-1		1		1										0
y_1	1									1									16
y_2		1									1								13
y_3	-1			1								1							4
y_4				1									1						12
y_5					1									1					9
y_6	1	1		-1	1										1				14
y_7							1									1			7
y_8				1	-1		1										1		20
y_9	1	1		-1	1		-1											1	4
	-1	-1																	0

基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 13 & 4 & 12 & 9 & 14 & 7 & 20 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



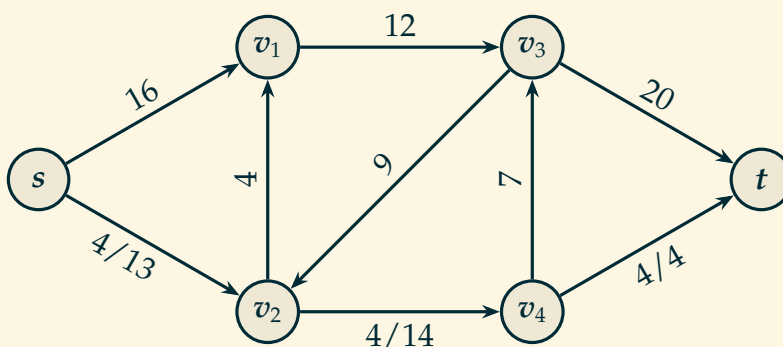
a_1 、 a_2 的检验数均为 -1 ，不妨让 a_2 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{^{13/1, 14/1, 4/1}\}$ 可知 a_{18} 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_3	1		1	-1															0
x_6						1	-1											-1	4
x_8				-1	1		-1	1											0
x_9									1									1	4
y_1	1									1									16
y_2	-1			1	-1		1				1							-1	9
y_3	-1			1								1							4
y_4				1									1						12
y_5					1									1					9
y_6							1								1			-1	10
y_7							1									1			7
y_8				1	-1		1										1		20
x_2	1	1		-1	1		-1											1	4
				-1	1		-1											1	4

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 16 & 9 & 4 & 12 & 9 & 10 & 7 & 20 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



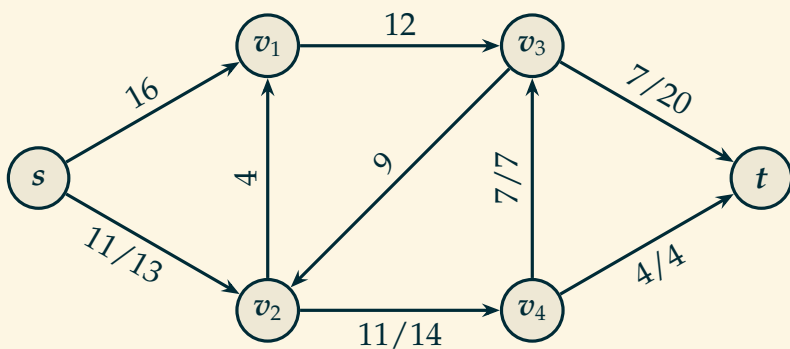
a_4 、 a_7 的检验数均为 -1 ，不妨让 a_7 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{9/1, 10/1, 7/1, 20/1\}$ 可知 a_{16} 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_3	1		1	-1															0
x_6						1										1	-1		11
x_8				-1	1			1								1			7
x_9									1									1	4
y_1	1									1									16
y_2	-1			1	-1						1						-1	-1	2
y_3	-1			1								1							4
y_4				1									1						12
y_5					1									1					9
y_6															1	-1	-1		3
x_7							1									1			7
y_8				1	-1											-1	1		13
x_2	1	1		-1	1											1		1	11
				-1	1											1		1	11

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 11 & 7 & 7 & 4 & 16 & 2 & 4 & 12 & 9 & 3 & 0 & 13 & 0 & 11 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



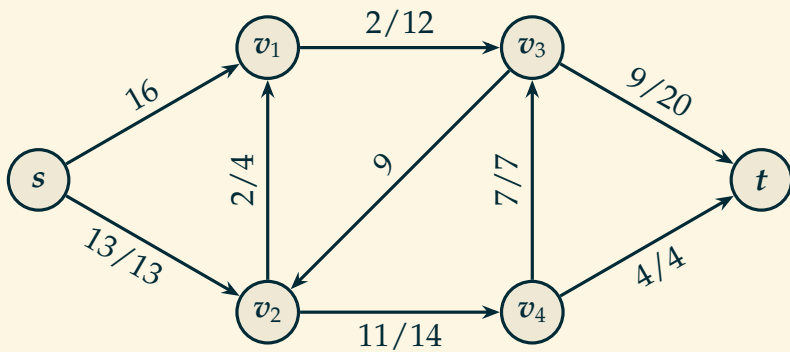
根据检验数 a_4 入基, 计算 $\operatorname{argmin}\{2/1, 4/1, 12/1, 13/1\}$ 可知 a_{11} 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_3			1		-1						1					-1		-1	2
x_6						1										1		-1	11
x_8	-1							1			1							-1	9
x_9									1									1	4
y_1	1									1									16
x_4	-1			1	-1						1					-1		-1	2
y_3					1						-1	1				1		1	2
y_4	1				1						-1		1			1		1	10
y_5					1									1					9
y_6															1	-1		-1	3
x_7							1									1			7
y_8	1										-1						1	1	11
x_2		1									1								13
	-1										1								13

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 13 & 2 & 2 & 0 & 11 & 7 & 9 & 4 & 16 & 0 & 2 & 10 & 9 & 3 & 0 & 11 & 0 & 13 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



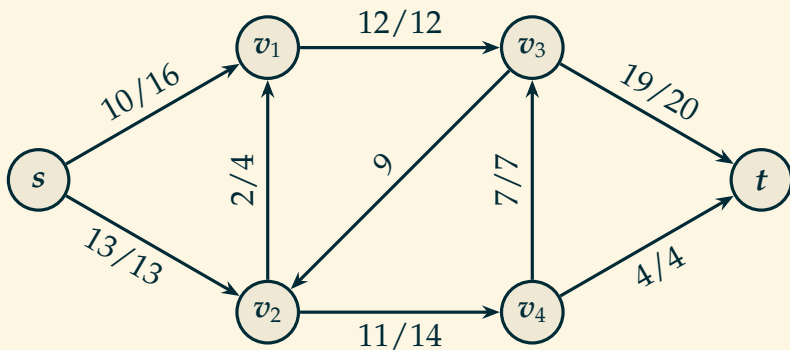
根据检验数 a_1 入基，计算 $\operatorname{argmin}\{16/1, 10/1, 11/1\}$ 可知 a_{13} 出基。做初等行变换

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	
x_3			1		-1						1					-1	-1	-1	2
x_6						1										1	-1	-1	11
x_8					1			1					1			1			19
x_9									1									1	4
y_1					-1					1	1		-1			-1	-1	-1	6
x_4				1									1						12
y_3					1						-1	1				1	1	1	2
x_1	1				1						-1		1			1	1	1	10
y_5					1									1					9
y_6															1	-1	-1	-1	3
x_7							1									1			7
y_8					-1								-1			-1	1		1
x_2		1									1								13
					1								1			1		1	23

当前基本可行解为

$$\left[\begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 10 & 13 & 2 & 12 & 0 & 11 & 7 & 19 & 4 & 6 & 0 & 2 & 0 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0 & 23 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



由于检验数均非负，已达最优解。

注. 在最大流的例子中，初始单纯形表中不存在单位阵，需先做一步初等行变换，也可采用两阶段单纯形法。