线性规划

张腾

线性规划 (linear programming) 是在一组线性等式或不等式的约束下，求线性目标函数最值的问题，许多现实问题都可以形式化为线性规划问题。

例 1 (分数背包问题). 设背包承重量为 10，各物品价值如下：

	物品1	物品2	物品3	物品4
重量	4	7	5	3
价值	40	42	25	12

现允许物品按比例取走部分，求最大装包方案。

对 $i \in [4]$，设物品 i 取走的比例为 x_i，则分数背包问题可形式化为

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ & 0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1 \end{aligned}$$

例 2 (最大流). 单点

其标准形式为

$$\begin{aligned} \max_{\boldsymbol{x}} \quad & \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中

$$\boldsymbol{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}_1 & \ldots & \boldsymbol{a}_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

集合 $\Omega = \{\boldsymbol{x} \mid \mathbf{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}\}$ 称为可行域，其中的点称为可行解。不失一般性设 $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = m < n$，否则可行域为单点集或空集。

例 3 (非标准形式的线性规划都可等价转化为标准形式). 考虑线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & x_2 - x_1 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 = x_2 - 5, \ |x_2| \leq 2, \ x_1 \leq 0 \end{aligned}$$

为使不等式只约束变量非负，其余都是等式约束

1. 记 $y_1 = -x_1$，则 $x_1 \le 0$ 变成非负约束 $y_1 \ge 0$
2. 由于 x_2 本身没有非负约束，只能记 $x_2 = y_2 - y_3$，其中 $y_2 \ge 0$、$y_3 \ge 0$
3. 注意 $|x_2| \le 2$ 等价于 $-2 \le y_2 - y_3 \le 2$，引入松弛变量 $y_4 \ge 0$、$y_5 \ge 0$ 有 $y_2 - y_3 + y_4 = 2$、$-y_2 + y_3 + y_5 = 2$

综上有

$$\begin{aligned} \max \quad & y_1 + y_2 - y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 3y_1 + y_2 - y_3 = 5 \\ & y_2 - y_3 + y_4 = 2 \\ & -y_2 + y_3 + y_5 = 2 \\ & y_{\{1,2,3,4,5\}} \ge 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$，$\boldsymbol{b} \ge \mathbf{0}$。的 a 的