

# 线性规划、单纯形法

张腾\*

2023 年 12 月 15 日

线性规划是在一组线性等式或不等式的约束下，求线性目标函数最值的问题，现实中的许多问题都可化为线性规划问题。

例 1 (分数背包问题). 设背包承重量为 10，各物品价值如下：

	物品1	物品2	物品3	物品4
重量	4	7	5	3
价值	40	42	25	12

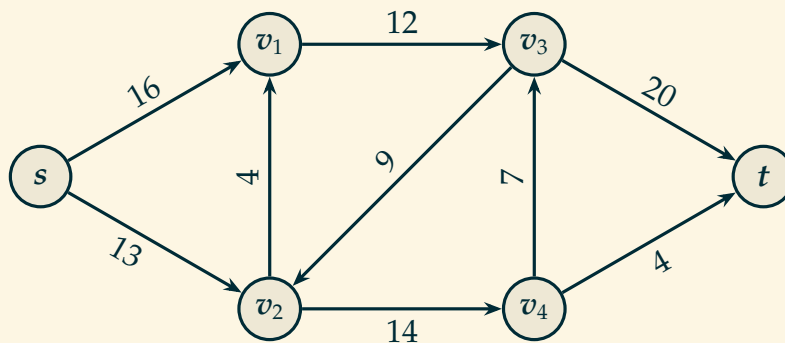
现允许物品按比例取走部分，求最大装包方案。

对  $i \in [4]$ ，设物品  $i$  取走的比例为  $x_i$ ，可得如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10 \\ & 0 \leq x_i \leq 1, i \in [4] \end{aligned}$$

注. 如果不允许只取部分 (0/1 背包问题)，约束  $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 1$  将变成  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$ ，此时问题就变成了整数线性规划，比线性规划要难得多。

例 2 (最大流). 给定如下的流网络，求最大流。



\*tengzhang@hust.edu.cn

设 9 条边上的流量分别为  $x_1, \dots, x_9$ , 可得如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_1 \leq 16 \\ & 0 \leq x_2 \leq 13 \\ & 0 \leq x_3 \leq 4 \\ & 0 \leq x_4 \leq 12 \\ & 0 \leq x_5 \leq 9 \\ & 0 \leq x_6 \leq 14 \\ & 0 \leq x_7 \leq 7 \\ & 0 \leq x_8 \leq 20 \\ & 0 \leq x_9 \leq 4 \\ & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\ & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\ & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \end{aligned}$$

其中前 9 个不等式约束对应容量限制, 后 4 个等式约束对应流量守恒。

$\mathbb{R}^2$  中的线性规划只有 2 个变量, 线性目标函数和线性等式约束是一条直线, 线性不等式约束是一个半平面, 可采用图解法。

例 3 (图解法示例). 考虑如下线性规划

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

先确定可行域, 即满足所有约束的可行解构成的集合。该例中共有 5 个线性不等式约束, 每个对应一个半平面, 因此可行域为 5 个半平面相交出的凸五边形 (图1中红色部分)。

引入直线簇  $y = 3x_1 + 5x_2$ , 其中不同的  $y$  对应不同的直线, 这些直线都是平行的。先将  $y$  取为一个较大的值使直线与凸五边形不相交, 然后逐渐减小  $y$ , 这相当于从上向下平移直线  $y = 3x_1 + 5x_2$  使其逐渐靠近凸五边形, 当其与凸五边形相切时, 切点就是最优解,

## 1 标准型

当变量多于 2 个时, 图解法就不再适用了, 需要更一般性的方法。线性规划的常用求解算法有单纯形法和内点法。前者在最坏情况下是指数复杂度, 后者是多项式复杂度, 但实际使用中两者几乎没有差别, 单纯形法的最坏情况实际中很难遇到。

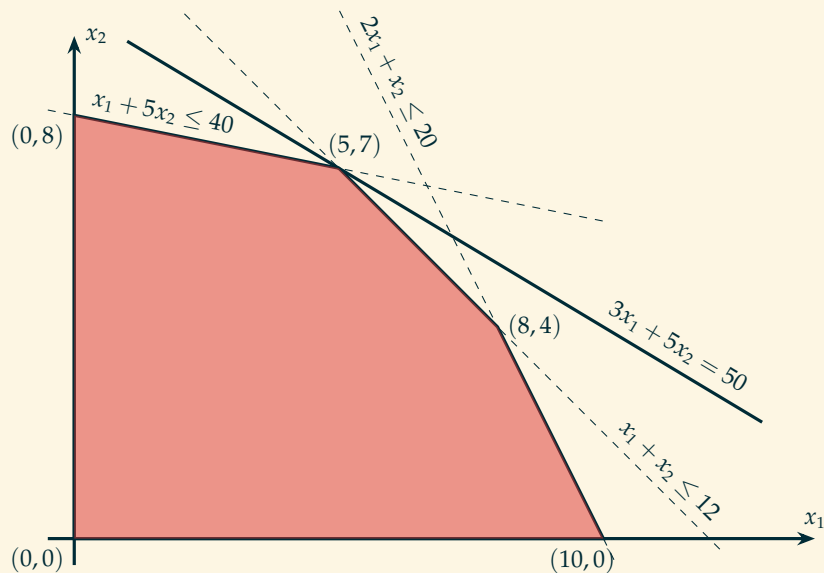


图 1: 直线簇与可行域相切于最优解 (5,7) 处, 目标函数最优值为 50。

要想使用单纯形法, 需要先将问题转化为标准型 (不等式只约束变量非负, 其余都是等式约束):

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{c}^\top \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

这里为了简化表达, 将所有线性等式约束合并写成了线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的形式, 不失一般性可设

- 共有  $m$  个线性等式约束、 $n$  个变量, 其中  $m < n$ , 否则可行域为单点集或空集;
- $\mathbf{A}$  是行满秩矩阵, 即  $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ , 否则存在冗余约束;
- $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ , 若某个  $b_i < 0$ , 对该约束两边取反即可。

对于任何形式的线性规划, 都可按以下步骤将其转化成标准型, 且两者是等价的:

- 对非正变量  $x \leq 0$ , 令  $y = -x$  作为替代;
- 对无约束变量  $x$ , 将其表示成两个非负变量的差  $x = u - v$ ;
- 对  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$  型不等式约束, 引入松弛变量  $y \geq 0$  将其转化为等式约束  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} + y = b$ ;
- 对  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \geq b$  型不等式约束, 引入剩余变量  $y \geq 0$  将其转化为等式约束  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} - y = b$ 。

下面将例1、例2、例3中的问题转化为标准型。

- 分数背包问题有 5 个  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$  型约束, 分别引入松弛变量  $x_5, \dots, x_9$ :

$$\begin{array}{ll}
 \max & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\
 \text{s.t.} & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 \leq 10 \\
 & x_1 \leq 1 \\
 & x_2 \leq 1 \\
 & x_3 \leq 1 \\
 & x_4 \leq 1 \\
 & x_i \geq 0, i \in [4]
 \end{array}
 \quad \Longrightarrow \quad
 \begin{array}{ll}
 \max & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\
 \text{s.t.} & 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 3x_4 + x_5 = 10 \\
 & x_1 + x_6 = 1 \\
 & x_2 + x_7 = 1 \\
 & x_3 + x_8 = 1 \\
 & x_4 + x_9 = 1 \\
 & x_i \geq 0, i \in [9]
 \end{array}
 \quad (1)$$

- 最大流问题有 9 个  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$  型约束, 分别引入松弛变量  $x_{10}, \dots, x_{18}$ :

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 \leq 16 \\
 & x_2 \leq 13 \\
 & x_3 \leq 4 \\
 & x_4 \leq 12 \\
 & x_5 \leq 9 \\
 & x_6 \leq 14 \\
 & x_7 \leq 7 \\
 & x_8 \leq 20 \\
 & x_9 \leq 4 \\
 & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
 & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
 & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
 & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\
 & x_i \geq 0, i \in [9]
 \end{array}
 \quad \Longrightarrow \quad
 \begin{array}{ll}
 \max & x_1 + x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 + x_{10} = 16 \\
 & x_2 + x_{11} = 13 \\
 & x_3 + x_{12} = 4 \\
 & x_4 + x_{13} = 12 \\
 & x_5 + x_{14} = 9 \\
 & x_6 + x_{15} = 14 \\
 & x_7 + x_{16} = 7 \\
 & x_8 + x_{17} = 20 \\
 & x_9 + x_{18} = 4 \\
 & x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\
 & x_2 + x_5 - x_3 - x_6 = 0 \\
 & x_4 + x_7 - x_5 - x_8 = 0 \\
 & x_6 - x_7 - x_9 = 0 \\
 & x_i \geq 0, i \in [18]
 \end{array}
 \quad (2)$$

- 例3中的线性规划有 3 个  $\mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b$  型约束, 分别引入松弛变量  $x_3, x_4, x_5$ :

$$\begin{array}{ll}
 \max & 3x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 + 5x_2 \leq 40 \\
 & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\
 & x_1 + x_2 \leq 12 \\
 & x_i \geq 0, i \in [2]
 \end{array}
 \quad \Longrightarrow \quad
 \begin{array}{ll}
 \max & 3x_1 + 5x_2 \\
 \text{s.t.} & x_1 + 5x_2 + x_3 = 40 \\
 & 2x_1 + x_2 + x_4 = 20 \\
 & x_1 + x_2 + x_5 = 12 \\
 & x_i \geq 0, i \in [5]
 \end{array}
 \quad (3)$$

例 4. 将如下线性规划转化为标准型

$$\begin{array}{ll}
 \max & x_2 - x_1 \\
 \text{s.t.} & 3x_1 = x_2 - 5 \\
 & |x_2| \leq 2 \\
 & x_1 \leq 0
 \end{array}$$

- $x_1$  非正, 令  $y_1 = -x_1 \geq 0$  作为替代;
- $x_2$  无约束, 令  $x_2 = y_2 - y_3$ , 其中  $y_2 \geq 0$ 、 $y_3 \geq 0$

于是

$$\begin{array}{ll}
 \max & y_2 - y_3 + y_1 \\
 \text{s.t.} & -3y_1 = y_2 - y_3 - 5 \\
 & y_2 - y_3 \leq 2 \\
 & -y_2 + y_3 \leq 2 \\
 & y_i \geq 0, [i] \in [3]
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{ll}
 \max & y_1 + y_2 - y_3 \\
 \text{s.t.} & 3y_1 + y_2 - y_3 = 5 \\
 & y_2 - y_3 + y_4 = 2 \\
 & -y_2 + y_3 + y_5 = 2 \\
 & y_i \geq 0, [i] \in [5]
 \end{array}$$

## 2 基本解

对于线性规划的标准型, 所有可行解是线性方程组  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  的解与第一象限的交集。根据之前的约定矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  行满秩且  $m < n$ , 因此它有无穷多个解。下面说明求解线性规划只需要关注其中一类称为基本解的解。

记矩阵  $\mathbf{A}$  的  $n$  个列分别为  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , 由于  $\text{rank}(\mathbf{A}) = m$ , 因此可以从中挑出  $m$  个线性无关的列。不妨就取  $\mathbf{A}$  的前  $m$  列, 否则做列交换使前  $m$  列线性无关 (列对应的  $x$  分量也要跟着交换), 这样  $\mathbf{A}$  可写成分块矩阵

作为基向量,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{a}_1 x_1 + \dots + \mathbf{a}_n x_n = \mathbf{b}$$

从  $\mathbf{A}$  的  $n$  个列中

$$\mathbf{A} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{D}], \quad \mathbf{B} = [\mathbf{a}_1 \quad \dots \quad \mathbf{a}_m], \quad \mathbf{D} = [\mathbf{a}_{m+1} \quad \dots \quad \mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times (n-m)}$$

其中  $\mathbf{B}$  是  $m$  阶可逆方阵。于是

$$\mathbf{b} = \mathbf{Ax} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{D}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_D \end{bmatrix} = \mathbf{Bx}_B + \mathbf{Dx}_D$$

其中  $\mathbf{x}_B$  称为基变量,  $\mathbf{x}_D$  为非基变量。令非基变量为零可得  $\mathbf{x}_B = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b}$ , 这就得到了  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  在基  $\mathbf{B}$  下的基本解:

$$\hat{\mathbf{x}}_B = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{D}] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{Bx}_B = \mathbf{b}$$

- 如果基本解中某些基变量为零, 则称为退化的基本解;
- 如果基本解还是线性规划的可行解 (所有变量非负), 则称为基本可行解。

例 5. SSS

定理 6 (线性规划基本定理). 对于线性规划的标准型, 有如下两个命题:

1. 如果存在可行解, 则一定存在基本可行解;
2. 如果存在最优可行解, 则一定存在最优基本可行解。

证明. 1. 设  $x$  是一个可行解并有  $p$  个正元素, 不失一般性, 可设前  $p$  个元素为正, 于是

$$\mathbf{A}x = a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b$$

此时分两种情况:

- $a_1, \dots, a_p$  线性无关, 则  $p \leq m$ 。若  $p = m$ ,  $x$  就是基本可行解; 若  $p < m$ , 从  $\mathbf{A}$  的剩余列中挑选  $m - p$  个列与  $a_1, \dots, a_p$  构成基, 此时  $x$  就是对应该基的基本可行解。
- $a_1, \dots, a_p$  线性相关, 可以去掉一些冗余列使其线性无关, 从而转化为前一种情况。设不全为零的实数  $y_1, \dots, y_p$  使得  $a_1y_1 + \cdots + a_py_p = 0$  且至少某个  $y_i > 0$ , 否则对所有  $y_i$  取反即可, 于是对任意  $\epsilon$  有

$$b = a_1(x_1 - \epsilon y_1) + \cdots + a_p(x_p - \epsilon y_p) = \mathbf{A}(x - \epsilon y), \quad y \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \\ 0 \end{bmatrix}$$

让  $\epsilon$  从 0 增大直到  $x - \epsilon y$  的前  $p$  个正分量出现 0, 即取  $\hat{\epsilon} = \min\{x_i/y_i : y_i > 0, i \in [p]\}$ , 这样就得到了只有  $p - 1$  个正分量的可行解, 重复该操作直到正分量对应的列线性无关。

2. 设  $x$  是一个最优可行解且前  $p$  个元素为正, 若  $a_1, \dots, a_p$  线性无关, 证明同命题 1; 若  $a_1, \dots, a_p$  线性相关, 可继续沿用命题 1 中去冗余列的方式, 但还需证明对任意  $\epsilon$ ,  $x - \epsilon y$  都是最优解, 这只需证明  $c^\top y = 0$ 。注意只要  $|\epsilon| \leq \min\{|x_i/y_i| : y_i \neq 0, i \in [p]\}$ ,  $x - \epsilon y$  都是可行解, 因此若  $c^\top y \neq 0$ , 根据其符号总能取某个充分小的  $\epsilon$  使得  $c^\top(x - \epsilon y) = c^\top x - \epsilon c^\top y > c^\top x$ , 这与  $x$  是最优解矛盾。♣

根据该定理, 线性规划的求解可转化为对基本可行解的搜索问题, 依次对基本可行解的最优性进行检查即可。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

### 3 几何视角下的线性规划

线性规划属于凸优化的范畴, 线性目标函数显然是凸函数, 可行域  $\Omega = \{x \mid \mathbf{A}x = b, x \geq 0\}$  是凸集, 因为对  $\forall x_1, x_2 \in \Omega$  和  $\forall \alpha \in (0, 1)$  有

$$\mathbf{A}(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha \mathbf{A}x_1 + (1 - \alpha)\mathbf{A}x_2 = \alpha b + (1 - \alpha)b = b, \quad \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$$

即连接  $\Omega$  内任意两点的线段依然属于  $\Omega$ 。对凸集  $\Omega$  中的点  $x$ , 若它无法表示成  $\Omega$  中另外两点的凸组合, 则称  $x$  为  $\Omega$  的极点, 即

$$x \text{ 是极点, } x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha \in (0, 1) \implies x_1 = x_2 = x$$

定理 7.  $x$  是  $\Omega = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}$  的极点当且仅当  $x$  是  $Ax = b, x \geq 0$  的基本可行解。

证明. 待补充。



例 8. 再看例3中的线性规划：

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 5x_2 \leq 40 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 20 \\ & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

先转化为标准型，为 3 个线性不等式约束分别引入松弛变量  $x_3, x_4, x_5$  可得线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_1} x_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_2} x_2 + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_3} x_3 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{a_4} x_4 + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{a_5} x_5 = \underbrace{\begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}}_b$$

显然取  $a_3, a_4, a_5$  作为基向量，即令  $x_3, x_4, x_5$  作为基变量，可得基本可行解

$$40a_3 + 20a_4 + 12a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 \end{bmatrix}$$

对应  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[0,0]$ ，目标函数值  $0 < 50$ ，因此还不是最优解。

根据迭代改进的思路，需要从当前极点移动到邻近的可使目标函数值增大的极点。现选择  $a_1$  作为新的基向量（入基）并移除原来的某个基向量（出基），注意  $a_1 = a_3 + 2a_4 + a_5$ ，于是

$$\epsilon a_1 + (40 - \epsilon)a_3 + (20 - 2\epsilon)a_4 + (12 - \epsilon)a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \epsilon & 0 & 40 - \epsilon & 20 - 2\epsilon & 12 - \epsilon \end{bmatrix}$$

让  $\epsilon$  从 0 增大， $x_1$  变成正数， $x_3, x_4, x_5$  逐渐变小，当  $\epsilon$  增大到 10 时， $x_4$  减小到 0，即  $a_4$  出基，得到一个新的基本可行解

$$10a_1 + 30a_3 + 2a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10 & 0 & 30 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

对应  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[10,0]$ ，目标函数值  $30 < 50$ ，依然不是最优解。

重复前面的操作，现选择  $a_2$  作为新的基向量，注意  $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{9}{2}a_3 + \frac{1}{2}a_5$ ，于是

$$\left(10 - \frac{1}{2}\epsilon\right)a_1 + \epsilon a_2 + \left(30 - \frac{9}{2}\epsilon\right)a_3 + \left(2 - \frac{1}{2}\epsilon\right)a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 10 - \frac{1}{2}\epsilon & \epsilon & 30 - \frac{9}{2}\epsilon & 0 & 2 - \frac{1}{2}\epsilon \end{bmatrix}$$

让  $\epsilon$  从 0 增大,  $x_2$  变成正数,  $x_1$ 、 $x_3$ 、 $x_5$  逐渐变小, 当  $\epsilon$  增大到 4 时,  $x_5$  减小到 0, 即  $a_5$  出基, 得到一个新的基本可行解

$$10a_1 + 30a_3 + 2a_5 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8 & 4 & 12 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

对应  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[8, 4]$ , 目标函数值  $44 < 50$ , 依然不是最优解。

重复前面的操作, 现选择  $a_4$  作为新的基向量, 注意  $a_4 = a_1 - a_2 + 4a_3$ , 于是

$$(8 - \epsilon)a_1 + (4 + \epsilon)a_2 + (12 - 4\epsilon)a_3 + \epsilon a_4 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 8 - \epsilon & 4 + \epsilon & 12 - 4\epsilon & \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

让  $\epsilon$  从 0 增大,  $x_4$  变成正数,  $x_1$ 、 $x_3$  逐渐变小 ( $x_2$  变大不用管, 不会破坏非负约束), 当  $\epsilon$  增大到 3 时,  $x_3$  减小到 0, 即  $a_3$  出基, 得到一个新的基本可行解

$$5a_1 + 7a_2 + 3a_4 = b, \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

对应  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[5, 7]$ , 目标函数值 50, 这就是最优解。

这种从一个极点转移到另一个极点, 迭代改进的操作方式就是单纯形法求线性规划的基本思路。

## 4 单纯形法

设当前基向量为  $a_1, \dots, a_m$ , 待入基向量为  $a_q$ , 例8中每轮迭代都要将  $b$  和  $a_q$  用当前基线性表出

$$b = y_{10}a_1 + \dots + y_{m0}a_m \quad (4)$$

$$a_q = y_{1q}a_1 + \dots + y_{mq}a_m \quad (5)$$

令 (4) -  $\epsilon \times$  (5) 可得关于  $\epsilon$  的恒等式

$$(y_{10} - \epsilon y_{1q})a_1 + \dots + (y_{m0} - \epsilon y_{mq})a_m + \epsilon a_q = b$$

让  $\epsilon$  从 0 增大直到某个  $a_p$  出基, 其中  $p = \operatorname{argmin}_i \{y_{i0}/y_{iq} : y_{iq} > 0\}$ 。

式(4)和式(5)中的系数如何得到呢? 根据线性方程组理论, 对  $Ax = b$  的增广矩阵做初等行变换

$$\begin{bmatrix} B & a_{m+1} & \dots & a_n & b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}a_{m+1} & \dots & B^{-1}a_n & B^{-1}b \end{bmatrix}$$

当基  $B$  变成单位阵时, 第  $q$  列和最后一列就是  $a_q$  和  $b$  的线性表出系数。至此还剩两个问题:

1. 如何确定入基向量  $a_q$ ;
2. 如何确定当前解是否为最优解。

下面考察基本可行解变化时目标函数值的变化, 将标准型根据对  $A$  的分块重写为

$$\begin{aligned} \max \quad & c_B^\top x_B + c_D^\top x_D \\ \text{s.t.} \quad & Bx_B + Dx_D = b \\ & x_B, x_D \geq 0 \end{aligned}$$



- 若  $x_D = 0$ , 则  $x_B = B^{-1}b$ , 此时  $x$  就是关于基  $B$  的基本可行解, 对应的目标函数值为

$$\hat{z} = c_B^T x_B = c_B^T B^{-1}b$$

- 若  $x_D \neq 0$ , 则  $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Dx_D$ , 对应的目标函数值为

$$z = c_B^T x_B + c_D^T x_D = c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Dx_D) + c_D^T x_D = c_B^T B^{-1}b - (c_B^T B^{-1}D - c_D^T)x_D = \hat{z} - r_D^T x_D$$

其中  $r_D^T = c_B^T B^{-1}D - c_D^T$  称为检验数。

注意  $x_D \geq 0$ , 若  $r_D \geq 0$ , 则  $z \geq \hat{z}$ , 即关于基  $B$  的基本可行解就是最优解, 这就回答了前面的问题 2。若  $r_D$  中某个分量为负, 则将  $x_D$  中对应的非基变量从 0 变为正数可使目标函数值变大, 也即该非基变量对应的列入基, 这就回答了前面的问题 1。

基于此, 构造单纯形表

$$\begin{bmatrix} A & b \\ -c^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & D & b \\ -c_B^T & -c_D^T & 0 \end{bmatrix}$$

先做初等行变换将基  $B$  变成单位阵

$$\begin{bmatrix} B^{-1} & 0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B & D & b \\ -c_B^T & -c_D^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}D & B^{-1}b \\ -c_B^T & -c_D^T & 0 \end{bmatrix}$$

再做初等行变换将最后一行基变量对应的  $-c_B^T$  变成  $0^T$

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ c_B^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}D & B^{-1}b \\ -c_B^T & -c_D^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & B^{-1}D & B^{-1}b \\ 0^T & c_B^T B^{-1}D - c_D^T & c_B^T B^{-1}b \end{bmatrix}$$

这张表里包含了一切我们需要的信息

- $B^{-1}D$  里的每列就是该列向量在当前基下的线性表示系数;
- $B^{-1}b$  是当前基对应的基本可行解中的基变量值;
- $c_B^T B^{-1}D - c_D^T$  就是检验数, 可以指示下一个入基向量和是否已达最优解;
- $c_B^T B^{-1}b$  就是当前基本可行解对应的目标函数值

例 9. 用单纯形法再求例 3 中的线性规划, 先转化为标准型:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

初始单纯形表为

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_3$	1	5	1			40
$x_4$	2	1		1		20
$x_5$	1	1			1	12
	-3	-5				0

此时  $x_3$ 、 $x_4$ 、 $x_5$  是基变量，基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 0 & 0 & 40 & 20 & 12 & 0 \end{array} \right]$$

对应  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[0,0]$ ，由于检验数还有负值，因此还不是最优解。

取检验数绝对值最大的负数对应的列入基，即  $a_2$  入基。注意

$$b = 40a_3 + 20a_4 + 12a_5, \quad a_2 = 5a_3 + 1a_4 + 1a_5$$

计算  $\operatorname{argmin}\{40/5, 20/1, 12/1\}$  可知  $a_3$  出基。做初等行变换

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	0.2	1	0.2			8	$\Rightarrow$	$x_2$	0.2	1	0.2		8
$x_4$	2	1		1		20		$x_4$	1.8	-0.2	1		12
$x_5$	1	1			1	12		$x_5$	0.8	-0.2		1	4
	-3	-5				0			-2	1			40

此时  $x_2$ 、 $x_4$ 、 $x_5$  是基变量，基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 0 & 8 & 0 & 12 & 4 & 40 \end{array} \right]$$

对应  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[0,8]$ ，由于检验数还有负值，因此还不是最优解。

根据检验数  $a_1$  入基，计算  $\operatorname{argmin}\{8/0.2, 12/1.8, 4/0.8\}$  可知  $a_5$  出基。做初等行变换

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
$x_2$	0.2	1	0.2			8	$x_2$		1	0.25		-0.25	7
$x_4$	1.8		-0.2	1		12	$\Rightarrow$ $x_4$			0.25	1	-2.25	3
$x_1$	1		-0.25		1.25	5	$x_1$	1		-0.25		1.25	5
	-2		1			40				0.5		2.5	50

此时  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_4$  是基变量，基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & o \\ 5 & 7 & 0 & 3 & 0 & 50 \end{array} \right]$$

对应  $\mathbb{R}^2$  中可行域的极点  $[5,7]$ ，由于检验数均非负，已达最优解。

例 10. 用单纯形法求例1中的分数背包问题，先转化为标准型：

$$\begin{aligned} \max \quad & 40x_1 + 42x_2 + 25x_3 + 12x_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 & 3 & 1 & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & & \\ & 1 & & & & 1 & & & \\ & & 1 & & & & 1 & & \\ & & & 1 & & & & 1 & \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

初始单纯形表为

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
$x_5$	4	7	5	3	1					10
$x_6$	1					1				1
$x_7$		1					1			1
$x_8$			1					1		1
$x_9$				1					1	1
	-40	-42	-25	-12						0

此时  $x_5$ 、 $x_6$ 、 $x_7$ 、 $x_8$ 、 $x_9$  是基变量，基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & o \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

根据检验数  $a_2$  入基，计算  $\arg\min\{10/7, 1/1\}$  可知  $a_7$  出基。做初等行变换

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
$x_5$	4		5	3	1		-7			3
$x_6$	1					1				1
$x_2$		1					1			1
$x_8$			1					1		1
$x_9$				1					1	1
	-40		-25	-12			42			42

此时  $x_2$ 、 $x_5$ 、 $x_6$ 、 $x_8$ 、 $x_9$  是基变量，基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & o \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & 42 \end{bmatrix}$$

根据检验数  $a_1$  入基，计算  $\arg\min\{3/4, 1/1\}$  可知  $a_5$  出基。做初等行变换

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
$x_1$	1		$5/4$	$3/4$	$1/4$		$-7/4$			$3/4$		$x_1$	1		$5/4$	$3/4$	$1/4$		$-7/4$		$3/4$
$x_6$	1					1				1		$x_6$		$-5/4$	$-3/4$	$-1/4$	1	$7/4$			$1/4$
$x_2$		1					1			1	$\Rightarrow$	$x_2$	1					1			1
$x_8$			1					1		1		$x_8$		1					1		1
$x_9$				1					1	1		$x_9$			1					1	1
	-40		-25	-12			42			42				25	18	10	40	-28			72

此时  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_6$ 、 $x_8$ 、 $x_9$  是基变量，基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 1 & 1 & 72 \end{array} \right]$$

根据检验数  $a_7$  入基，计算  $\arg\min\{1/7, 1/1\}$  可知  $a_6$  出基。做初等行变换

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$			$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	
$x_1$	1		$5/4$	$3/4$	$1/4$		$-7/4$			$3/4$		$x_1$	1				$7/4$				1
$x_7$			$-5/7$	$-3/7$	$-1/7$	1	1			$1/7$		$x_7$		$-5/7$	$-3/7$	$-1/7$	1	1			$1/7$
$x_2$		1					1			1	$\Rightarrow$	$x_2$	1	$5/7$	$3/7$	$1/7$	-1				$6/7$
$x_8$			1					1		1		$x_8$		1					1		1
$x_9$				1					1	1		$x_9$			1					1	1
			25	18	10	40	-28			72				5	6	6	68				76

此时  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_7$ 、 $x_8$ 、 $x_9$  是基变量，基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & 0 \\ 1 & 6/7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/7 & 1 & 1 & 76 \end{array} \right]$$

由于检验数均非负，已达最优解。

注. 分数背包问题也可采用贪心法来做。

例 11. 用单纯形法求例2中的最大流问题，先转化为标准型：

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + y_1 = 16 \\ & x_2 + y_2 = 13 \\ & x_3 + y_3 = 4 \\ & x_4 + y_4 = 12 \\ & x_5 + y_5 = 9 \\ & x_6 + y_6 = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_7 + y_7 &= 7 \\
x_8 + y_8 &= 20 \\
x_9 + y_9 &= 4 \\
x_1 + x_3 - x_4 &= 0 \\
x_2 + x_5 - x_3 - x_6 &= 0 \\
x_4 + x_7 - x_5 - x_8 &= 0 \\
x_6 - x_7 - x_9 &= 0 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}$$

共有 18 个变量、13 个等式约束，因此基变量有 13 个，非基变量有 5 个。初始不妨取  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_4$ 、 $x_5$ 、 $x_7$  为非基变量，将基变量由  $x_1$ 、 $x_2$ 、 $x_4$ 、 $x_5$ 、 $x_7$  表出：

$$\begin{aligned}
x_3 = -x_1 + x_4 &\Rightarrow x_1 + x_3 - x_4 = 0 &\Rightarrow -x_1 + x_4 + y_3 = 4 \\
x_8 = x_4 - x_5 + x_7 &\Rightarrow -x_4 + x_5 - x_7 + x_8 = 0 &\Rightarrow x_4 - x_5 + x_7 + y_8 = 20 \\
x_6 = x_2 + x_5 - x_3 &\Rightarrow -x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 0 &\Rightarrow x_1 + x_2 - x_4 + x_5 + y_6 = 14 \\
x_9 = x_6 - x_7 &\Rightarrow -x_1 - x_2 + x_4 - x_5 + x_7 + x_9 = 0 &\Rightarrow x_1 + x_2 - x_4 + x_5 - x_7 + y_9 = 4
\end{aligned}$$

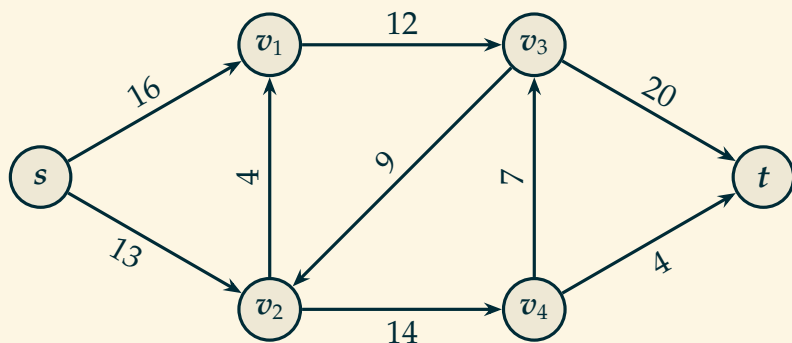
初始单纯形表为

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	
$x_3$	1		1	-1															0
$x_6$	-1	-1		1	-1	1													0
$x_8$				-1	1		-1	1											0
$x_9$	-1	-1		1	-1		1		1										0
$y_1$	1									1									16
$y_2$		1									1								13
$y_3$	-1			1								1							4
$y_4$				1									1						12
$y_5$					1									1					9
$y_6$	1	1		-1	1										1				14
$y_7$							1									1			7
$y_8$				1	-1		1										1		20
$y_9$	1	1		-1	1		-1											1	4
	-1	-1																	0

基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc|c}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 13 & 4 & 12 & 9 & 14 & 7 & 20 & 4 & 0
\end{array} \right]$$

对应的流网络为



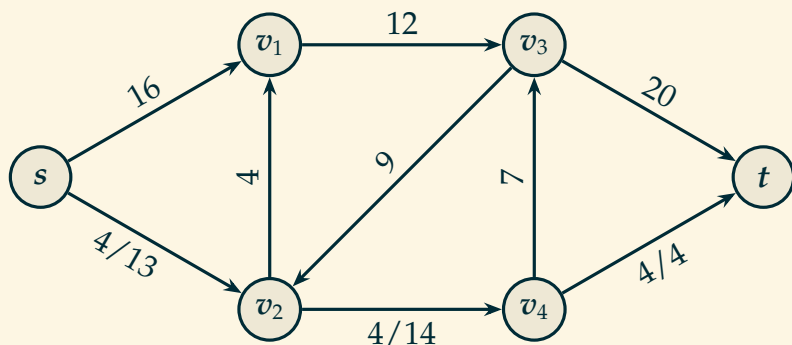
$a_1$ 、 $a_2$  的检验数均为  $-1$ ，不妨让  $a_2$  入基，计算  $\operatorname{argmin}\{13/1, 14/1, 4/1\}$  可知  $a_{18}$  出基。做初等行变换

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	
$x_3$	1		1	-1															0
$x_6$						1	-1											-1	4
$x_8$				-1	1		-1	1											0
$x_9$									1									1	4
$y_1$	1									1									16
$y_2$	-1			1	-1		1				1							-1	9
$y_3$	-1			1								1							4
$y_4$				1									1						12
$y_5$					1									1					9
$y_6$							1								1			-1	10
$y_7$							1									1			7
$y_8$				1	-1		1										1		20
$x_2$	1	1		-1	1		-1											1	4
				-1	1		-1											1	4

当前基本可行解为

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 4 & 16 & 9 & 4 & 12 & 9 & 10 & 7 & 20 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

对应的流网络为



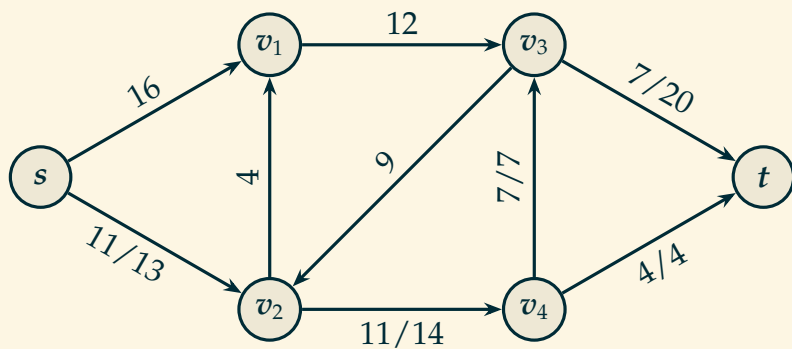
$a_4$ 、 $a_7$  的检验数均为  $-1$ ，不妨让  $a_7$  入基，计算  $\operatorname{argmin}\{9/1, 10/1, 7/1, 20/1\}$  可知  $a_{16}$  出基。做初等行变换

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	
$x_3$	1		1	-1															0
$x_6$						1										1	-1		11
$x_8$				-1	1			1									1		7
$x_9$									1									1	4
$y_1$	1									1									16
$y_2$	-1			1	-1						1						-1	-1	2
$y_3$	-1			1								1							4
$y_4$				1									1						12
$y_5$					1									1					9
$y_6$															1	-1	-1		3
$x_7$							1									1			7
$y_8$				1	-1											-1	1		13
$x_2$	1	1		-1	1											1		1	11
				-1	1											1		1	11

当前基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 11 & 7 & 7 & 4 & 16 & 2 & 4 & 12 & 9 & 3 & 0 & 13 & 0 & 11 \end{array} \right]$$

对应的流网络为



根据检验数  $a_4$  入基，计算  $\operatorname{argmin}\{2/1, 4/1, 12/1, 13/1\}$  可知  $a_{11}$  出基。做初等行变换

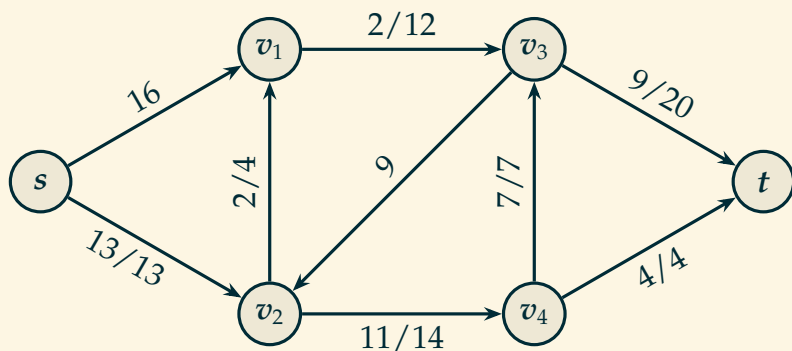
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	
$x_3$			1		-1						1					-1	-1		2
$x_6$						1										1	-1		11
$x_8$	-1							1			1							-1	9
$x_9$									1									1	4
$y_1$	1									1									16
$x_4$	-1			1	-1						1					-1	-1		2
$y_3$					1						-1	1				1	1		2
$y_4$	1				1						-1		1			1	1		10
$y_5$					1									1					9
$y_6$															1	-1	-1		3
$x_7$							1									1			7
$y_8$	1										-1						1	1	11
$x_2$		1									1								13
	-1										1								13

当前基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 0 & 13 & 2 & 2 & 0 & 11 & 7 & 9 & 4 & 16 & 0 & 2 & 10 & 9 & 3 & 0 & 11 & 0 & 13 \end{array} \right]$$

对应的流网络为





根据检验数  $a_1$  入基，计算  $\arg\min\{16/1, 10/1, 11/1\}$  可知  $a_{13}$  出基。做初等行变换

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$x_9$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	
$x_3$			1		-1						1					-1	-1		2
$x_6$						1										1	-1		11
$x_8$					1			1					1			1			19
$x_9$									1								1		4
$y_1$					-1					1	1		-1			-1	-1		6
$x_4$				1									1						12
$y_3$					1						-1	1				1	1		2
$x_1$	1				1						-1		1			1	1		10
$y_5$					1									1					9
$y_6$															1	-1	-1		3
$x_7$							1									1			7
$y_8$					-1								-1			-1	1		1
$x_2$		1									1								13
					1								1			1	1		23

当前基本可行解为

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & o \\ 10 & 13 & 2 & 12 & 0 & 11 & 7 & 19 & 4 & 6 & 0 & 2 & 0 & 9 & 3 & 0 & 1 & 0 & 23 \end{array} \right]$$

对应的流网络为

由于检验数均非负，已达最优解。

注. 在最大流的例子中，初始单纯形表中不存在单位阵，需先做一步初等行变换，也可采用两阶段单纯形法。

