

# 常微分方程

圓眼睛的阿凡提哥哥

2020 年 10 月 13 日

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\top \mathbf{L} \mathbf{x} &= \sum_{u \in \mathcal{V}} \sum_{v \in \mathcal{V}} [\mathbf{x}]_u ([\mathbf{D}]_{uv} - [\mathbf{A}]_{uv}) [\mathbf{x}]_v \\&= \sum_{u \in \mathcal{V}} \sum_{v \in \mathcal{V}} [\mathbf{x}]_u [\mathbf{D}]_{uv} [\mathbf{x}]_v - \sum_{u \in \mathcal{V}} \sum_{v \in \mathcal{V}} [\mathbf{x}]_u [\mathbf{A}]_{uv} [\mathbf{x}]_v \\&= \sum_{u \in \mathcal{V}} [\mathbf{x}]_u^2 [\mathbf{D}]_{uu} - \sum_{u \in \mathcal{V}} \sum_{v \in \mathcal{V}} [\mathbf{x}]_u [\mathbf{A}]_{uv} [\mathbf{x}]_v \\&= \sum_{u \in \mathcal{V}} \sum_{v \in \mathcal{V}} [\mathbf{x}]_u^2 [\mathbf{A}]_{uv} - \sum_{u \in \mathcal{V}} \sum_{v \in \mathcal{V}} [\mathbf{x}]_u [\mathbf{A}]_{uv} [\mathbf{x}]_v \\&= \frac{1}{2} \left( \sum_{u \in \mathcal{V}} \sum_{v \in \mathcal{V}} [\mathbf{x}]_u^2 [\mathbf{A}]_{uv} + \sum_{v \in \mathcal{V}} \sum_{u \in \mathcal{V}} [\mathbf{x}]_v^2 [\mathbf{A}]_{vu} - 2 \sum_{u \in \mathcal{V}} \sum_{v \in \mathcal{V}} [\mathbf{x}]_u [\mathbf{A}]_{uv} [\mathbf{x}]_v \right) \\&= \frac{1}{2} \sum_{u \in \mathcal{V}} \sum_{v \in \mathcal{V}} [\mathbf{A}]_{uv} ([\mathbf{x}]_u - [\mathbf{x}]_v)^2\end{aligned}$$