集 合 论

3-1 集合论的基本概念

3-2 集合上的运算

3-3 * 包含排斥原理

3-4 序偶与笛卡尔积

3-1　集合论的基本概念

一、集合的概念

集合是作为论述的事物的整体，在某些场合有时又称为类、族或搜集。

组成集合的每个事物称为此集合的元素，集合用大写英文子母A，B，C，…等表示。

集合中的元素用小写英文子母a,b,c, …表示。

a是集合A中的元素记为：$a \in A$。

1．集合的表示法

① 列举法 (将集合中的元素一一列举在{ }中)

例：偶数集合 $A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$

②描述法：用谓词描述出集合元素的特征来表示集合。

例1：$A = \{x|x = a \vee x = b\}$（$A=\{a,b\}$）

例2：A为偶数集合 $A=\{x|\exists y(y\in I \wedge x=2y)\}$ (I表示整数集)

例3：永真式集合 $A=\{p|p\in wff \wedge p \Leftrightarrow T\}$

一般地，$S = \{a|P(a)\}$ 表示$a\in S$ 当且仅当$P(a)$是真。

2．集合概念的注记

a) 集合中的元素可以是集合。例：$A = \{a,b,c, \{a,b,c\}\}$

b) 仅含一个元素的集合称为单元素集合。

c) 应把单元素集合与单元素区别开来。

例：$\{a\}$与a不同。$\{a\}$表示仅以a为元素的集合。$\{\{1，0\}\}$与$\{1，0\}$不同，$\{\{1，0\}\}$表示仅以$\{1，0\}$为元素的集合，$\{1，0\}$是$\{\{1，0\}\}$的元素。

3. 集合的基数或势

含有有限个元素的集合称有限集合，否则称为无限集.有限集合的元素个数称为该集合的基数或势,记为$|A|$.

例：$A = \{a,b\}$,则$|A|=2$,

$|\{A\}|=1$; $B=\{a,\{a,b\}\}$, $|B|=2$。

4．集合相等公理

外延公理：集合*A*，*B*相等，*iff*

$$\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$$

即当且仅当*A*与*B*有相同的元素,故

1.列举法中,元素的次序无关紧要,即$\{x,y,z\}$与$\{z,x,y\}$相等。

2.元素的重复出现无关紧要,即$\{x,y,x\}$,$\{y,x\}$,$\{x,x,x,x,y\}$相等.

3.集合的表示不唯一,如$\{x|\,x^2=1\}$与$\{-1,1\}$表示相同的集合.

二、集合间的包含关系

1. 子集与真子集

定义1(3-1.1)：设A和B是集合，若$\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)$，那么$A$是$B$的子集，记为$A\subseteq B$。读作'$B$包含$A$'或'$A$是$B$的子集'，又称"$B$是$A$的扩集"。

定义2(3-1.2)：若$A\subseteq B$，且$A\neq B$，称A是B的真子集，记

$A\subset B$。读"B真包含A"。即

$$A\subset B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\exists x(x\notin A\wedge x\in B)。$$

2. 全集

我们讨论的元素和集合是限于某一论述区域中，此论述区域称为全集U。虽然有时这个论述区域未明晰给出。

定理1：任意集合$A\subseteq U$。

证：$\because\forall x(x\in A\rightarrow x\in U)$为真，$\therefore$定理1正确。 #

推论：$A\subseteq A$

定理2(3−1.1)：$A=B$等价于$A\subseteq B\wedge B\subseteq A$。

证：$\because A=B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$

$\Leftrightarrow A\subseteq B\wedge B\subseteq A$，$\therefore$定理2正确。 #

定理3：若$A\subseteq B$，且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。

证：$\because A\subseteq B\Leftrightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in B),B\subseteq C\Leftrightarrow\forall x(x\in B\rightarrow x\in C)$

$\therefore\forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge\forall x(x\in B\rightarrow x\in C)\Rightarrow\forall x(x\in A\rightarrow x\in C)$

即定理3正确。 #

3. 空集

定义3(3−1.3)：没有元素的集合称为空集，记为Φ。

定理4(3−1.2)：对任意集合A，$\Phi\subseteq A$。

证：$\because\forall x(x\in\Phi\rightarrow x\in A)$永真，

$\therefore\Phi\subseteq A$。 #

定理5：空集是唯一的。

证：设有二个空集:Φ，Φ\`，则Φ⊆Φ\`，Φ\`⊆Φ，∴ Φ\` =Φ.

注：Φ与{Φ}不同，前者没有元素，后者是以空集为一个元素的集合。

定义4(3-1. 5)　给定集合A，由集合A的所有子集为元素组成的集合，称为集合A的幂集,记为$\rho(A)$ 。

例1：试用空集构造幂集合。

解：Φ，{Φ}，{Φ，{Φ}}，{Φ，{Φ}，{Φ，{Φ}}}，……

其中第i个集合有i-1个元素，序列中每一集合以它之前的所有集合作为它的元素。

例2：试求出集合{p,q}的幂集。

解：Φ，{p},{q},{p,q}是{p,q}的子集，

∴{Φ,{p},{q},{p,q}}是{p,q}的幂集。

3-2　集合上的运算

一、　并交差运算

1.　基本概念（设*A*和*B*为集合）

定义1(3-2.1)　*A*和*B*的并：

$A\cup B=\{x \mid x\in A\vee x\in B\}$

定义2(3-2.2)　*A*和*B*的交：

$A\cap B=\{x \mid x\in A\wedge x\in B\}$

定义3(3-2.3)　*A*和*B*的差：

$A-B=\{x \mid x\in A\wedge x\notin B\}$

2. 基本性质

定理1：a) $A\cup B=B\cup A$

b) $A\cap B= B\cap A$

c) $(A\cup B)\cup C=A\cup (B\cup C)$

d) $(A\cap B)\cap C=A\cap (B\cap C)$

即交、并运算是可交换和可结合的。

证：b) $\forall x\in U$

$x\in A\cap B \Leftrightarrow x\in A\wedge x\in B$ ，（$\cap$的定义）

$\Leftrightarrow x\in B\wedge x\in A$（$\wedge$的可交换性）

$\Leftrightarrow x\in B\cap A$，

$\therefore \forall x(x\in A\cap B\leftrightarrow x\in B\cap A)$，即$A\cap B= B\cap A$。 #

注：a), c), d) 的方法与b) 类似。（请学生自证）

定理2(3-2.1)：分配律

a) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$　　$\cup$在$\cap$上可分配

b) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$　　$\cap$在$\cup$上可分配

证：b) $\forall x\in U$

$$
\begin{aligned}
x\in A\cap(B\cup C) &\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in(B\cup C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in B\vee x\in C)\\
&\Leftrightarrow (x\in A\wedge x\in B)\vee(x\in A\wedge x\in C)\\
&\Leftrightarrow x\in A\cap B\vee x\in A\cap C \quad (\wedge\text{在}\vee\text{上可分配})\\
&\Leftrightarrow x\in (A\cap B)\cup(A\cap C)
\end{aligned}
$$

$\therefore A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。　　　　#

注：a）证明方法与上类似。

定理3:设A,B,C,D是全集U的任意子集,则

a) $A \cup A = A$

b) $A \cap A = A$

c) $A \cup \Phi = A$

d) $A \cap \Phi = \Phi$

e) $A - \Phi = A$

f) $A - B \subseteq A$

g) 若$A \subseteq B$, $C \subseteq D$, 那么, $A \cup C \subseteq B \cup D$

h) 若$A \subseteq B$, $C \subseteq D$, 那么, $A \cap C \subseteq B \cap D$

i) $A \subseteq A \cup B$

J) $A \cap B \subseteq A$

（定理3-2.3） k) 若$A \subseteq B$, 那么, $A \cup B = B$

L) 若$A \subseteq B$, 那么, $A \cap B = A$

证：b) $\forall x\in U$,

$x\in A\cap A \Leftrightarrow x\in A \wedge x\in A$

$\Leftrightarrow x\in A$

$\therefore A\cap A=A$。

d) $\forall x\in U$, $x\in(A\cap\Phi)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in\Phi$。（$\because x\in\Phi$永假）

$\Leftrightarrow x\in\Phi$

$\therefore A\cap\Phi=\Phi$。

f) $\because x\in(A-B)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\notin B\Rightarrow x\in A$，

$\therefore A-B\subseteq A$。

h) 由$A\subseteq B$, $C\subseteq D$,

$\because x\in(A\cap C)\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in C\Rightarrow x\in B\wedge x\in D\Leftrightarrow x\in(B\cap D)$

$\therefore A\cap C\subseteq B\cap D$。

L) $\because A\subseteq B$,又$A\subseteq A$,

根据（h）$A\cap A\subseteq A\cap B$，即$A\subseteq A\cap B$，

另一方面，$A\cap B\subseteq A$，$\therefore A=A\cap B$。

推论3： a)$A\cup U=U$ b)$A\cap U=A$

定理2(3-2.2)：（吸收律）设A、B为任意两个集合，则

a) $A\cup(A\cap B)=A$

b) $A\cap(A\cup B)=A$

证明： a) $A\cup(A\cap B)=(A\cap E)\cup(A\cap B)$

$=A\cap(E\cup B)$

$=A$

b) $A\cap(A\cup B)=(A\cup A)\cap(A\cup B)$

$=A\cup(A\cap B)$

$=A$

注：也可以利用谓词性质证明,类似定理3-2.1的证明方法。

你能试试吗？

二、补运算

1. 补运算的定义

定义 (3-2.4) 设U是全集，A的补集为：

$$\sim A = U - A = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\} = \{x \mid x \notin A\}$$

2. 补运算性质

定理1：设A为任意集合，则

a) $A \cup \sim A = U$

b) $A \cap \sim A = \Phi$

证：a) $x \in (A \cup \sim A) \Leftrightarrow x \in A \vee x \notin A$

$\Leftrightarrow T$

$\Leftrightarrow x \in U$

$\therefore A \cup \sim A = U$

b) $x \in (A \cap \sim A) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin A \Leftrightarrow F \Leftrightarrow x \in \Phi$

$\therefore A \cap \sim A = \Phi$

#

3. 补运算的唯一性

定理2： 设A、B为任意两个集合，

则 $B=\sim A$ *iff* $A\cup B=U$和$A\cap B=\Phi$。

证：“⇒”由定理1直接得出。

“⇐” $B=U\cap B$

$=(A\cup\sim A)\cap B$

$=(A\cap B)\cup(\sim A\cap B)$

$=\Phi\cup(\sim A\cap B)$

$=(\sim A\cap A)\cup(\sim A\cap B)$

$=\sim A\cap(A\cup B)$

$=\sim A\cap U$

$=\sim A$。 #

注:定理2给出了证明集合B为集合A为补集的方法。只需验证$A\cup B=U$和$A\cap B=\Phi$即可。

推论：a) $\sim\Phi=U$， b) $\sim U=\Phi$

证：∵$U\cup\Phi=U$，$U\cap\Phi=\Phi$，∴ $\sim\Phi=U$， $\sim U=\Phi$。 #

定理3： ~~A=A。

证：∵A∩~A=Φ，A∪~A=U。

∴由定理2，A是~A的补。

又∵ ~A也是A的补，由补的唯一性知， ~~A=A。 #

4． 德•摩根定律

（定理4）(3-2.4)设A、B为任意两个集合，则：

a) ~（A∪B）= ~A∩~B

b) ~（A∩B）= ~A∪~B

证：b)∵(~A∪~B)∩(A∩B)= (~A∩A∩B)∪(~B∩A∩B)

= Φ∪Φ = Φ,

(~A∪ ~B)∪(A∩B)=(~A∪~B∪A)∩(~A∪~B∪B)=U

∴ ~A∪~B是A∩B的补，

但~(A∩B)也是A∩B的补，由补的唯一性，

∴ ~（A∩B）= ~A∪~B。 #

定理5(3-2.5)设A、B为任意两个集合，则：

$$a)\ A-B = A\cap\sim B$$

$$b)\ A-B = A-(A\cap B)$$

证明：a)由定义显然可得.

$$\begin{aligned} b)\ A-(A\cap B) &= A\cap\sim(A\cap B) \\ &= A\cap(\sim A\cup\sim B) \\ &= (A\cap\sim A)\cup(A\cap\sim B) \\ &= \Phi\cup(A\cap\sim B) \\ &= A-B \end{aligned}$$

#

定理6(3-2.6)设A、B、C为任意三个集合，则：

$$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$$

证明：$A\cap(B-C) =A\cap(B\cap\sim C)$

$$=A\cap B\cap\sim C$$

$$(A\cap B)-(A\cap C)$$

$$= (A\cap B)\cap\sim(A\cap C)$$

$$=(A\cap B)\cap(\sim A\cup\sim C)$$

$$= (A\cap B\cap\sim A) \cup(A\cap B\cap\sim C)$$

$$= \Phi \cup(A\cap B\cap\sim C)$$

$$=A\cap B\cap\sim C$$

所以：$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$。 #

定理7(3-2.7)设A、B为任意两个集合,若$A\subseteq B$，则：

a) $\sim B\subseteq \sim A$

b) $(B-A)\cup A=B$

证明：a) 由$A\subseteq B$可得:若$x\in A$，则$x\in B$。

因此$x\notin B$则必有$x\notin A$。

所以$x\in\sim B$必有$x\in\sim A$，即$\sim B\subseteq \sim A$。

b) $(B-A)\cup A=(B\cap\sim A)\cup A$

$= (B\cup A)\cap(\sim A\cup A)$

$= (B\cup A)\cap U$

$= B\cup A$

因为$A\subseteq B$，就有$B\cup A=B$。因此$(B-A)\cup A=B$。 #

三、对称差

1．定义

定义(3-2.5)：集合A和B的对称差为$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$。

2．对称差的一些性质

①**引理**：

$$\underline{A\oplus B=(A\cup B)\cap(\sim A\cup\sim B)}$$

$$=\underline{(A\cup B)-(A\cap B)}$$

证：$A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$

$=(A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A)$

$=((A\cap\sim B)\cup B)\cap((A\cap\sim B)\cup\sim A)$

$=(A\cup B)\cap(\sim B\cup B)\cap(A\cup\sim A)\cap(\sim B\cup\sim A)$

$=(A\cup B)\cap(\sim B\cup\sim A)$

$=(A\cup B)\cap\sim(A\cap B)$

$=(A\cup B)-(A\cap B)$。 #

② 推论：a) $\sim A\oplus\sim B=A\oplus B$

证：$\underline{A\oplus B=(A\cup B)\cap(\sim A\cup\sim B)}$

$= \sim A\oplus\sim B$。 #

b) $A\oplus B=B\oplus A$

c) $A\oplus A=\Phi$

③ $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$

证：见书。

④ $C\cap(A\oplus B)=(C\cap A)\oplus(C\cap B)$

证：$C\cap(A\oplus B)=C\cap((A\cap\sim B)\cup(B\cap\sim A))$

$=((C\cap A\cap\sim B)\cup(C\cap B\cap\sim A))$

$=(C\cap A\cap(\sim C\cup\sim B))\cup(C\cap B\cap(\sim C\cup\sim A))$

$=(C\cap A)\oplus(C\cap B)$。 #

3-3 * 包含排斥原理

1.　有限集基数的有关结果

定理：a) $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$　　　$(|A\cap B|\le \min(|A|,|B|))$

b) $|A\oplus B|=|A|+|B|-2|A\cap B|$

c) $|A-B|\ge|A|-|B|$ $(\because |A-B|+|B|=|A\cup B|\ge|A|)$

a)证明：①当$A\cap B=\Phi$,则$|A\cup B|=|A|+|B|$，a)成立。

②当$A\cap B\ne\Phi$，

则：$|A|=|A\cap(B\cup\sim B)|=|A\cap\sim B|+|A\cap B|$,

$|B|= |B\cap\sim A|+|A\cap B|$

$\therefore |A|+|B|=|A\cap\sim B|+|B\cap\sim A|+|A\cap B|+|A\cap B|$

$=|A\cup B|+|A\cap B|$

（$|A\cup B|= |A\cap\sim B|+|B\cap\sim A|+|A\cap B|$）

$\therefore |A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$ 。　　{包含排斥原理}

例：设某班有60名同学，其中班足球队员有28名，篮球队员有15名。若有25名同学没有参加这两个队，问同时参加这两个队的队员有多少名？

解：设A为足球队员集合，B为篮球队员集合，则

$$|A\cup B|=60-25=35,$$

$$\therefore |A\cap B|=|A|+|B|-|A\cup B|=28+15-35=8$$

2. 包含n个集合的包含排斥原理

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n|$

$= \Sigma_{i=1}^{n} |A_i| + \Sigma_{1\le I<j\le n}|A_i \cap A_j| + \Sigma_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots\ldots$

$+(-1)^{n-1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots\ldots \cap A_n|$

特别地,n=3, $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2|$

$-|A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$

证明:当n=2时,结论成立（前面已证明）。

设n-1时,结论成立,则

$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_n|$

$= |\cup_{i=1}^{n-1} A_i| + |A_n| - |(\cup_{i=1}^{n-1} A_i) \cap A_n|$

$= \Sigma_{i=1}^{n}|A_i| - \Sigma_{1\le i<j\le n-1}|A_i \cap A_j| + \ldots\ldots + (-1)^{n-2}|\cap_{i=1}^{n-1} A_i| -$

$[\Sigma_{i=1}^{n-1}|A_i \cap A_n| - \Sigma_{1\le i<j<n-1}|A_i \cap A_j \cap A_n| + \ldots\ldots$

$+(-1)^{n-2}|\cap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n|]$

$= \Sigma_{i=1}^{n}|A_i| - \Sigma_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_n| + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}|\cap_{i=1}^{n} A_i|$

例2:试决定在1到100之间能被2,3,5中某一数整除的个数。

解：A_1表示1到100之间能被2整除的整数集，

A_2表示1到100之间能被3整除的整数集，

A_3表示1到100之间能被5整除的整数集，

则：$|A_1|=100/2=50$，$|A_2|=100/3=33$, $|A_3|=100/5=20$，

$|A_1\cap A_2|=100/（2\times3）=16$, $|A_1\cap A_3|=100/（2\times5）=10$，

$|A_2\cap A_3|=100/（3\times5）=6$，

$\therefore |A_1\cup A_2\cup A_3|$

$=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|$

$-|A_2\cap A_3|+|A_1\cap A_2\cap A_3|$

$=50+33+20-16-10-6+3$

$=74$

3-4 集合的笛卡尔积

一、概念

1. N重组

定义1：两个元素a_1, a_2组成的序列记作$\langle a_1, a_2\rangle$，称为二重组或序偶。

定义2(3-4.1)：二个序偶$\langle a, b\rangle$和$\langle c, d\rangle$相等，当且仅当$a=c$且$b=d$，

即：$\langle a, b\rangle=\langle c, d\rangle$ *iff* $a=c\wedge b=d$。

定义3：$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle=\langle\langle a_1, \ldots, a_{n-1}\rangle, a_n\rangle$称为n重组（n重序元）。

注：①二重组的元素次序是重要的。

例:$\langle 2, 3\rangle\neq\langle 3, 2\rangle$，而集合$\{2，3\}=\{3，2\}$。

②n重组是一个二重组，其中第一分量是n-1重组。

例：$\langle 2, 3, 4, 5\rangle=\langle\langle 2, 3, 4\rangle, 5\rangle\neq\langle 2, \langle 3, 4, 5\rangle\rangle$

③由二重组相等定义知：

$\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle=\langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$当且仅当$a_i=b_i$（$1\leqslant i\leqslant n$）。

2. 笛卡尔积

定义1(3-4.2)：集合A和B的笛卡尔积是一个二重组集合，记为A×B。

即：$A\times B=\{<a,b> \mid a\in A \wedge b\in B\}$

定义2：集合A_1，A_2，…，A_n的笛卡尔积是一个n重组集合，定义为：$(A_1\times A_2\times\ldots\times A_{n-1})\times A_n$。

即：$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n=\{<a_1,a_2,\ldots,a_n> \mid a_i\in A_i \wedge 1\le i\le n\}$

3. 举例

例1：设A={a,b},B={1,2,3},C={p,q}, E={0}。

则：$A\times B=\{<a,1>,<a,2>,<a,3>,<b,1>,<b,2>,<b,3>\}$,

$A\times \Phi=\Phi$,

$(A\times E)\times E=\{<a,0,0>,<b,0,0>\}$

$(A\times B)\cap(B\times A)=\Phi$

二、笛卡尔积的一些性质

1. 笛卡尔积不符结合律和交换律。

2. 定理(3-4.1)：设A、B、C为任意三个集合，

则：

a) $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

b) $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

c) $(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$

d) $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

证明：（d）设$\langle x,y\rangle$是$(A\cap B)\times C$的任一元素，

$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle\in(A\cap B)\times C\\
&\Leftrightarrow(x\in A\cap B)\wedge y\in C\\
&\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\in B)\wedge y\in C\\
&\Leftrightarrow(x\in A\wedge y\in C)\wedge(x\in B\wedge y\in C)\\
&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C\ \wedge\ \langle x,y\rangle\in B\times C\\
&\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in(A\times C)\cap(B\times C)
\end{aligned}$$

$\therefore(A\cap B)\times C=A\times C\cap B\times C$。(a),b),c)的证明类似)

定理(3-4.2):若$C\neq\Phi$,则：$A\subseteq B\Leftrightarrow(A\times C\subseteq B\times C)$

$\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)$ 。

证明：若$y\in C$，设$A\subseteq B$，有

$$\langle x,y\rangle\in A\times C\Rightarrow(x\in A\wedge y\in C)$$
$$\Rightarrow(x\in B\wedge y\in C)$$
$$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C$$

因此 $A\times C\subseteq B\times C)$。

反之，若$C\neq\Phi$，$A\times C\subseteq B\times C$，取$y\in C$，则有

$$x\in A\Rightarrow x\in A\wedge y\in C$$
$$\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in A\times C$$
$$\Rightarrow\langle x,y\rangle\in B\times C$$
$$\Leftrightarrow x\in B\wedge y\in C$$
$$\Rightarrow x\in B$$

因此 $A\subseteq B$

类似可证：$A\subseteq B\Leftrightarrow(C\times A\subseteq C\times B)$ 。

定理(3-4.3)：设A,B,C,D为四个非空集，

则：$A\times B\subseteq C\times D$的充分必要条件为$A\subseteq C$, $B\subseteq D$。

证明：若$A\times B\subseteq C\times D$，对任意$x\in A$和$y\in B$有

$$x\in A\wedge y\in B \Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in A\times B$$

$$\Rightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D$$

$$\Leftrightarrow x\in C\wedge y\in D$$

即：　$A\subseteq C$且 $B\subseteq D$。

反之，若$A\subseteq C$且 $B\subseteq D$，设任意$x\in A$和$y\in B$有

$$\langle x,y\rangle\in A\times B \Leftrightarrow x\in A\wedge y\in B$$

$$\Rightarrow x\in C\wedge y\in D$$

$$\Leftrightarrow \langle x,y\rangle\in C\times D$$

因此　$A\times B\subseteq C\times D$ 。

#

3. 若 $A_i(1\le i\le n)$都是有限集合，

则$|A_1\times A_2\times\ldots\times A_n|=|A_1|\times|A_2|\times\ldots\times|A_n|$。

证明：(数学归纳法）

当$n=1$时, $|A_1|=|A_1|$ 显然成立。

当$n=2$时,设$|A_1|=p$, $|A_2|=q$,因A_1中的每一个元素与A_2中的q个不同元素可构成q个不同序偶，

$\therefore |A_1\times A_2| = pq = |A_1|\times|A_2|$ 。

假设对任意$n\ge 2$,结论成立，则

$$|A_1\times A_2\times\ldots\times A_{n+1}|$$
$$=|(A_1\times\ldots\times A_n)\times A_{n+1}|$$
$$=|A_1\times\ldots\times A_n|\times|A_{n+1}|$$
$$=|A_1|\times|A_2|\times\ldots\times|A_n|\times|A_{n+1}|$$

关 系 论

本章节的主要内容为:

3-5　关系及其表示　　3-6　关系的性质

3-7　复合关系和逆关系　　3-8　关系的闭包运算

3-9　集合的划分和覆盖　　3-10　等价关系和等价类

3-11　相容关系　　3-12　序关系

例：设全组同学为集合A,且有4名同学，其中1，2同寝室，3，4同寝室。则：

R={<1,1>,<1,2>,<2,1>,<2,2>,<3,3>,<3,4>,<4,3>,<4,4>}

反映了同寝室关系，则 **R**$\subseteq$A×A。

一. 关系的定义

1. 关系的定义

定义（3-5.3）

①A×B的<u>子集</u>叫做A到B上的一个二元关系。

②$A_1 \times A_2 \times A_3$的子集叫做$A_1 \times A_2 \times A_3$上的一个三元关系。

③$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$的子集叫做$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$上的一个n元关系。

④A×A×…×A的子集叫做A上的n元关系。

2． 空关系、全域关系（关系相等）

定义1． 设A_i是集合(i=1, 2..., n)， 若R=∅ ，则称R为空关系， 若 $R=A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$则称R为全域关系。

3． 关系的个数

设$|A_i|=ri$，则$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n$ 上有$2^{r1r2\ldots rn}$个n元关系。

二. 二元关系(“关系” 均指二元关系)_

定义1(3-5.1)$\langle x, y\rangle\in R$，或xRy读作x和y有关系R。

$\langle x, y\rangle\notin R$， 则称x和y没有关系。

例(5, 7)∈<，或5<7。

定义2（3-5.2） $dom(R)=\{x|\exists y(\langle x, y\rangle\in R)\}$叫做关系R的前域。$Ran(R)=\{y|\exists x(\langle x, y\rangle\in R)\}$叫做关系R的值域。R的前域和值域统称为R的域， 记为$FLDR=dom(R)\cup Ran(R)$。

例1. 设$A=\{x_1, \ldots, x_7\}$,$B=\{y_1, \ldots, y_6\}$

$R=\{\langle x_3,y_1\rangle, \langle x_3,y_2\rangle, \langle x_6,y_2\rangle, \langle x_5,y_6\rangle\}$

解：$dom(R)=\{x_3,x_6,x_5\}$, $ran(R)=\{y_1,y_2,y_6\}$

注：

1. 不仅对二元关系可以进行运算, 对多元关系也可以进行运算.
2. A到B上的二元关系可以看成是$A\cup B$上的关系。
3. $R=\{\langle x, x\rangle \mid x\in A\}$称为恒等关系, 记为$I_A$。
4. 关系是集合，故集合中的所有运算在关系中均适用。
   如:交、并、差、补、对称差。

三. 关系矩阵与关系图

1. 关系矩阵

设集合$X=\{x_1,x_2, \ldots,x_m\}$,$Y=\{y_1,y_2, \ldots,y_n\}$,R是从X到Y的一个二元关系,则对应于关系R有一个关系矩阵:

$M_R=(r_{ij})_{m\times n}$ 且有

$$r_{ij}=\begin{cases}1,<x_i,y_i>\in R\\0,<x_i,y_j>\notin R\end{cases}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

2.关系图

设集合$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$,R是X上的一个关系。用小圆圈表示元素$x_i\in X$，$1\le i\le m$。

（1）若$<x_i,y_i>\in$ R,则从结点x_i到结点y_i画一带箭头的边。

（2）若$<x_i,x_i>\in$ R,则通过结点x_i画一带箭头的自回路。

这样的图称为关系图。

例：设A=$\{x_1,x_2\}$，B=$\{y_1,y_2,y_3\}$

R=$\{<x_1,y_1>,<x_2,y_1>,<x_2,y_3>\}$

则关系矩阵为:

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

定义：设R和S是给定同一集合上的二个二元关系, 则:

①$x\,(R\cup S)\,y \Leftrightarrow x\,R\,y \vee x\,S\,y$ ② $x\,(R\cap S)\,y \Leftrightarrow x\,R\,y \wedge x\,S\,y$

③ $x(R-S)y \Leftrightarrow x\,Ry \wedge x\,\not{S}y$ ④ $x \sim R\,y \Leftrightarrow x\,\not{R}\,y$

3．关系的定义方法(与集合相同, 有列举法和描述法。)

一个n元谓词P(x_1, …, x_n)可以定义n元关系R 。

即： $R=\{<x_1, \ldots, x_n> \mid P(x_1, \ldots, x_n)\}$。

例： 实数R上 “>”关系：

$>=\{<x,y> \mid x\in R \wedge y\in R \wedge x>y\}$ 。

注：1）一个n元关系可定义一个谓词

$$P(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \begin{cases} 1, < x_1, x_2, \cdots, x_n > \in R \\ 0, < x_1, x_2, \cdots, x_n > \notin R \end{cases}$$

2）当n=1时, $R=\{<x> \mid P(x)\}$称为一元关系。其意义与

$R=\{x \mid P(x)\}$相同。

3-6　关系的性质

一. 自反性

二. 反自反性

三. 对称性

四. 反对称性

五. 传递性

六. 举例

自反性:（设R是A上的二元关系）

定义(3-6.1)若$\forall x\in$**A**，均有x**R**x，那么称**R**是自反的。

注：1）**A**上关系**R**是自反的$\Leftrightarrow \forall x$（$x\in \mathbf{A}\rightarrow x\mathbf{R}x$）

2）在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为1。

在关系图中，反映为每结点都有自回路。

例 **X=｛1，2，3｝，R={<1,1>,<2,2>,<3,3>,<1,2>}**为自反关系。

反自反性:

定义(3-6.4)**A**上的关系**R**是反自反的$\Leftrightarrow \forall x$（$x\in \mathbf{A}\rightarrow x\not{\mathbf{R}}x$）

注： 在关系矩阵中，反映为主对角线元素均为0。

在关系图中，反映为每结点都无自回路。

注：有些关系可以既不是自反的，也不是反自反的。

如例：**A={1,2,3} R={<1,2>,<1,1>,<2,3>}**。

对称性:定义(3-6.2) A上的关系R是对称的

$$\Leftrightarrow \forall x \forall y(x\in A \wedge y\in A \wedge xRy \rightarrow yRx)$$

注：关系矩阵是对称矩阵。

在关系图中，若有a到b的弧则必有b到a的弧。

例 A={1, 2, 3}，R={<1, 2>, <2, 1>, <3, 3>}，

$$M_R=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

反对称性:

定义(3-6.5) **A上的关系R是反对称的**

$\Leftrightarrow\forall x\forall y(x\in A\wedge y\in A\wedge xRy\wedge yRx\rightarrow x=y)$。

注：在关系矩阵中, 反映为若x_{ij}=1, 则x_{ji}=0；若x_{ij}=0, 不一定有x_{ji}=1。在关系图上，反映为若存在x到y的弧，则不存在y到x的弧。

例 A={1,2,3} R={<1,2>,<1,3>}

注：1)有些关系可以既非对称的，又非反对称的。

例：**A={1,2,3} R={<1,2>,<2,1>,<1,3>}**

2)有些关系既是对称的，又是反对称的。

例如:恒等关系、空关系。

传递性:定义（3-6.3）:A上的关系是传递的

$$\Leftrightarrow \forall x\, \forall y\, \forall z(x \in A \wedge y \in A \wedge z \in A \wedge xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$$

注：传递关系图特征是：若a到b存在一条有向路径(即存在一结点序列$a=a_1, \ldots, a_n=b$, 其中$\langle a_i, a_{i+1}\rangle \in R$, $1 \leqslant i \leqslant n-1$)则a到b也存在一条弧。传递关系在关系矩阵、关系图上都不易看出来。

例：**A={1,2,3,4},**

R_1={<1,4>,<4,3>,<1,3>,<3,1>,<1,2>,<3,2>,<2,3>,<4,2>, <1,1>,<3,3>,<4,1>},R_2={<1,1> ,<2,2> ,<3,3> ,<4,4> },R_3={ },

R_4={<1,2> ， <3,2> }。则:R_1， R_2， R_3， R_4是传递的。

R={<1,1> ， <1,2>， <2,1> }不是传递关系。

<u>**举例**</u>

	自反性	反自反性	对称性	反对称性	传递性
任何集合上的**相等关系**	Y	N	Y	Y	Y
空集合上的**空关系**	Y	Y	Y	Y	Y
基数大于1的集合上的**全域关系**	Y	N	Y	N	Y
xRy⇔(x-y)/2是整数	Y	N	Y	N	Y

3-7 复合关系和逆关系

1. 复合关系

（1）复合关系的定义

定义(3-7.1) 设R_1是A到B的关系，R_2是B到C的关系，则$R_1 \circ R_2$是A到C的复合关系，定义如下：

$$\mathbf{R_1 \circ R_2=\{<a,c>|(\exists b)(a\in A \land c\in C \land b\in B \land <a,b>\in R_1 \land <b,c>\in R_2)\}}$$

注：①关系图上，$R_1 \circ R_2$是由<a, c>这样的序偶组成，从a∈A到c∈C有一长度为2的路径，其中第一条弧属于R_1, 第二条弧属于R_2。

② 若R_1的值域与R_2的前域的交集为空，则$R_1 \circ R_2$为空关系。

③ 设$\mathbf{I_A}$、$\mathbf{I_B}$分别为A和B上的相等关系，R是A到B的二元关系，则 $\mathbf{I_A \circ R=R \circ I_B=R}$。

（但 $\mathbf{R \circ I_A, I_B \circ R}$无意义）

例1 设$A=\{1,2,3,4,5\}$，A上的二元关系

$R=\{<1,2>,<3,4>,<2,2>\}$,$S=\{<4,2>,<2,5>,<3,1>,<1,3>\}$。

则$R \circ S=\{<1,5>,<3,2>,<2,5>\}$,$S \circ R=\{<4,2>,<3,2>,<1,4>\}$

$(R \circ S) \circ R=\{<3,2>\}$， $R \circ (S \circ R)=\{<3,2>\}$

$R \circ R=\{<1,2>,<2,2>\}$， $S \circ S=\{<4,5>,<3,3>,<1,1>\}$

例2：

xR_1y表示x是y的兄弟，yR_2z表示y是z的父亲

则 $xR_1 \circ R_2z$ 表示x是z的叔伯，

$xR_2 \circ R_2z$ 表示x是z的祖父。

例3：R是A上的二元关系，试证R是传递的充要条件是

$R \circ R \subseteq R$。

（证明思路：

R是传递的$\Leftrightarrow \forall x \forall y \forall z(\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \rightarrow \langle x,z\rangle \in R)$ ）

证： “$\Rightarrow$” 若R传递 。

$\forall \langle x,z\rangle \in R \circ R$ $\exists y$使得 $\langle x,y\rangle \in R$，$\langle y,z\rangle \in R$。

$\because$ R是传递的， $\therefore \langle x,z\rangle \in R$， $\therefore R \circ R \subseteq R$。

“$\Leftarrow$” 若 $R \circ R \subseteq R$ 。

$\forall \langle x,y\rangle \in R, \langle y,z\rangle \in R$ 则$\langle x,z\rangle \in R \circ R$

$\because R \circ R \subseteq R$ $\therefore \langle x,z\rangle \in R$

$\therefore$ 由x,y,z任意性知

$\forall x \forall y \forall z$（$\langle x,y\rangle \in R \wedge \langle y,z\rangle \in R \rightarrow \langle x,z\rangle \in R$）

$\therefore$ R是传递的。 #

（2）复合运算满足结合律

定理:设R_1,R_2,R_3分别是从A到B,从B到C,从C到D的关系,则　（$R_1 \circ R_2) \circ R_3=R_1 \circ(R_2 \circ R_3)$

证：设$<a,d>$是（$R_1 \circ R_2) \circ R_3$的任一序偶。

则　$<a,d> \in (R_1 \circ R_2) \circ R$

$\Leftrightarrow \exists c(<a,c> \in R_1 \circ R_2 \wedge <c,d> \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists c(\exists b(<a,b> \in R_1 \wedge <b,c> \in R_2) \wedge <c,d> \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists c \exists b(<a,b> \in R_1 \wedge <b,c> \in R_2 \wedge <c,d> \in R_3)$

$\Leftrightarrow \exists b \exists c(<a,b> \in R_1 \wedge (<b,c> \in R_2 \wedge <c,d> \in R_3))$

$\Leftrightarrow \exists b(<a,b> \in R_1 \wedge <b,d> \in R_2 \circ R_3)$

$\Leftrightarrow <a,d> \in R_1 \circ(R_2 \circ R_3)$

（$R_1 \circ R_2) \circ R_3=R_1 \circ(R_2 \circ R_3)=R_1 \circ R_2 \circ R_3$。　#

2.关系R的幂

（1）关系R的幂的定义

定义 设R是集合A上的二元关系，$n\in N$,R的n次幂记为R^n.定义如下:

1）R^0是A的相等关系，$R^0=\{<x,x>|x\in A\}=I_A$。

2) $R^{n+1}= R^n \circ R$。

（2）R^n的关系图的意义

在R^2的图形上,有一条a到b的弧,则在R的图形上从a到b有一条长度为2的路径。

在R^n的图形上,有一条a到b的弧,则在R的图形上从a到b有一条长度为n的路径。

3.复合关系的矩阵表达

（1）复合关系的矩阵

定理 设$X=\{x_1,\ldots,x_m\}$,$Y=\{y_1,\ldots,y_n\}$,$Z=\{z_1,\ldots,z_p\}$。

R、S分别是X到Y,Y到Z的关系。

则 $M_{R\circ S}=[C_{ij}]=M_R\circ M_S$

其中:$M_R=[a_{ik}]$,$M_S=[b_{kj}]$， $C_{ij}=a_{ik}\wedge b_{kj}$ 。

（“$\wedge$”表示逻辑加， $1\le i\le m$，$1\le j\le p$，$1\le k\le n$）

证：若$C_{ij}=1$则存在某K使 $a_{ik}\wedge b_{kj}=1$，则$C_{ij}=1$ 。

$\because a_{ik}=1\Leftrightarrow x_i R y_K$， $b_{kj}=1\Leftrightarrow y_k S z_j$ 。

$\therefore x_i(R\circ S)z_j$， $\therefore M_R\circ M_S=M_{R\circ S}$。

注：若存在多个K，使a_{ik}、b_{kj}都为1，则C_{ij}仍为1，只是从x_i到z_j存在多条长度为2的路径，此时等式仍然正确。

例1设$x=\{1,2\}$，$y=\{a,b,c\}$，$z=\{\alpha,\beta\}$，

$R=\{<1,a>,<1,b>,<2,c>\}$，$S=\{<a,\beta>,<b,\beta>\}$。

解:

$$M_R=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},M_S=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$M_R\circ M_S=M_{R\circ S}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix}$$

（2）用关系矩阵表达关系运算后的新关系

设: $M_R=[a_{ik}],M_S=[b_{kj}]$）

① $M_{R\cup S}=M_R\cup M_S$ 其中$c_{ij}=a_{ij}\cup b_{ij}$。

② $M_{R\cap S}=M_R\cap M_S$ 其中$c_{ij}=a_{ij}\cap b_{ij}$。

③ $M_{\sim R}=[c_{ij}]$ 其中$c_{ij}=\neg a_{ij}$。

④ $M_{R-S}=M_R\cap M_{\sim S}$ 其中$c_{ij}=a_{ij}\cap(\neg b_{ij})$。

4.逆关系

(1)逆关系的定义

定义(3-7.2)：设R是A到B的二元关系，则R的逆是B到A的二元关系,记为 R^c 其中 $R^c=\{<y,x> \mid <x,y>\in R\}$。

例1 整数集上的 ‘<’ 关系的逆是 ‘>’ 关系。

集合族上的 ‘$\subseteq$’ 关系的逆是 ‘$\supseteq$’。

空关系的逆是空关系。

A×B的全域关系的逆是B×A的全域关系。

例2 $A=\{0,1,2,3\}$ $R=\{<0,0>,<0,3>,<3,2>,<1,3>\}$

则 $R^c=\{\langle 0,0\rangle,\langle 3,0\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 3,1\rangle\}$

注：(1)$xRy\Leftrightarrow yR^cx$.

(2)交换R 的关系矩阵的行和列，即得R^c的关系矩阵.

(3)颠倒R的关系图中每条弧线的箭头方向，既得R^c的关系图。

(2)复合关系的逆关系

定理1 (3-7.2) 设R、S分别是A到B、B到C的关系。

则（$R \circ S)^c=S^c \circ R^c$

证: 设$<c,a>$是$(R \circ S)^c$ 的任一元素，则

$$<c,a> \in (R \circ S)^c \Leftrightarrow <a,c> \in R \circ S$$

$$\Leftrightarrow \exists b(<a,b> \in R \land <b,c> \in S)$$

$$\Leftrightarrow \exists b（c,b> \in S^c \land <b,a> \in R^c）$$

$$\Leftrightarrow <c,a> \in S^c \circ R^c$$

定理2 (3-7.1) 设R,R_1,R_2是A到B的关系，则

a） $(R^c)^c=R$

b） $(R_1 \cup R_2)^c=R_1^c \cup R_2^c$

c） $(R_1 \cap R_2)^c =R_1^c \cap R_2^c$

d） $(\sim R)^c =\sim(R^c)$, 注：$\underline{\sim R=A \times B-R}$

e） $(R_1-R_2)^c =R_1^c -R_2^c$

f) $R_1 \subseteq R_2 \Rightarrow R_1^c \subseteq R_2^c$

证：(a） $<a,b>\in R \Leftrightarrow <b,a>\in R^c \Leftrightarrow <a,b> \in (R^c)^c$

$\therefore R=(R^c)^c$ 。

(c) $<b,a>\in(R_1\cap R_2)^c \Leftrightarrow <a,b>\in R_1\cap R_2$

$\Leftrightarrow <a,b>\in R_1 \wedge <a,b>\in R_2$

$\Leftrightarrow <b,a>\in R_1^c \wedge <b,a>\in R_2^c$

$\Leftrightarrow <b,a>\in R_1^c\cap R_2^c$

(f) $<b,a>\in R_1^c \Leftrightarrow <a,b>\in R_1 \Rightarrow <a,b>\in R_2 \Leftrightarrow <b,a>\in R_2^c$

$\therefore$若$R_1\subseteq R_2$，，　$R_1^c\subseteq R_2^c$ 。

(3)逆关系的一些性质

定理3 (3-7.3)：R是A上的二元关系，

（a）R是对称的$\Leftrightarrow R=R^c$，（b)R是反对称的$\Leftrightarrow R\cap R^c\subseteq I_A$。

证：(a) ‘$\Rightarrow$’ 设R是对称

$<a,b>\in R \Leftrightarrow <b,a>\in R \Leftrightarrow <a,b>\in R^c$。

即$R=R^c$。

‘$\Leftarrow$’　设 $<a,b>\in R$ 则$<b,a>\in R^c$

$\because R=R^c$ ，$\therefore <b,a>\in R$，故R是对称的。

(b)略。

3-8 关系的闭包运算

一.闭包的定义及求法

1.闭包的定义

定义(3-8.1)：设R是A上的二元关系，R的自反（对称、传递）闭包是关系R’，其中R’满足：

1）R’是自反的（对称的、传递的）。

2）$R \subseteq R'$。

3）对任何自反的（对称的、传递的）关系R”，$R'' \supseteq R$，则$R'' \supseteq R'$。

R的自反（对称、传递）闭包分别记作：

$$r(R), s(R), t(R)$$

如：X=｛a,b,c｝，R=｛<a,a>,<b,b>,<c,c>,<a,b>,<b,c>｝

R是自反的，可以证明：R=r(R)。

定理3-8.1 设R是X上的二元关系，那么

1）R的自反闭包记为r(R),若R是自反的，则R=r(R),反之也成立。

2）R的对称闭包记为s(R),若R是对称的，则R=s(R),反之也成立。

3）R的传递闭包记为t(R),若R是传递的，则R=t(R),反之也成立。

证明：

1）如果R是自反的，因为$R \supseteq R$，且任何包含R的自反关系R”，有

$R'' \supseteq R$，故R就是满足自反闭包的定义，即R=r(R)。

反之，如果R=r(R)，由定义3-8.1，R必是自反的。

2）和3）的证明完全类似1）。 #

已知关系R，构作它的闭包可以采取添加序偶的方法来完成。

如： X=｛a,b,c｝，

R=｛<a,a>, <b,b>,<b,c> ｝,则可以证明：

r(R)=｛<a,a>,<b,b>,<c,c>,<b,c> ｝

2.闭包的求法

(1)定理3-8.2：设R是X上的二元关系, 则：

$$r(R)=R\cup I。$$

证明：设$R'=R\cup I$,

∵①$\forall x\in A, \langle x,x\rangle \in R'$

∴R'具有自反性。

② $R\subseteq R'$。

③ 设R"是自反的，且$R\subseteq R''$,

∵R是自反的，∴$I_A\subseteq R''$ 。

又∵$R\subseteq R''$， ∴$R'=I_A\cup R\subseteq R''$。 #

(2)定理3-8.3：设R是X上的二元关系，则：$S(R)= R\cup R^c$。

证明：设 $R' = R\cup R^c$，

①$R'^c=(R\cup R^c)^c=R^c\cup (R^c)^c= R^c\cup R=R$。

②$R'=R\cup R^c\supseteq R$，

③设R”是对称的，且$R\subseteq R''$ 要证 $R'\subseteq R''$

$\langle a,b\rangle\in R' = R\cup R^c$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R\vee\langle a,b\rangle\in R^c$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle b,a\rangle\in R$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle b,a\rangle\in R''$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R''\vee\langle a,b\rangle\in R''$

$\Leftrightarrow \langle a,b\rangle\in R''$

$\therefore R'=R\cup R^c\subseteq R''$。 #

(3) 定理3-8.4设R是X上的二元关系，则：$t(R)=\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$ 。

证明：(1)先证 $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i \subseteq t(R)$

a)先用归纳法证，对$\forall n>0$, $R^n\subseteq t(R)$

i) 由定义$R\subseteq t(R)$

ii)设$R^n\subseteq t(R)$成立，要证$R^{n+1}\subseteq t(R)$ 设$\langle a,b\rangle\in R^{n+1}=R^n\circ R$

$\therefore$存在c使$\langle a,c\rangle\in R^n$, $\langle c,b\rangle\in R$

$\because$由归纳法设和基础步骤知$\langle a,c\rangle\in t(R)$ $\langle a,c\rangle\in t(R)$

$\because$ t(R)是传递的，$\therefore\langle a,b\rangle\in t(R)$ 即$R^{n+1}\subseteq t(R)$

$\therefore$对一切n，$R^n\subseteq t(R)$。

b) 设$\langle a,b\rangle\in \bigcup_{i=1}^{\infty}R^i$

$\therefore$存在一n，使$\langle a,b\rangle\in R^n\subseteq t(R)$ ，$\therefore\langle a,b\rangle\in t(R)$

$\therefore$ $\bigcup_{i=1}^{\infty}R^i\subseteq t(R)$ 。

(2) 再证 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \supseteq t(R)$

a）设⟨a, b⟩, ⟨b, c⟩是 $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 的任意元素。

∴∃s, ∃t, 使得⟨a, b⟩∈R^s, ⟨b, c⟩∈R^t ∴⟨a, c⟩∈R^t 。R^s=R^{t+s}。

∴⟨a, c⟩∈$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ ， ∴$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 是传递的。

b）∵t(R)包含R的最小传递关系，∴ $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \supseteq t(R)$ 。

所以，$t(R) = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ 。 #

3. 举例

关系R	自反闭包	对称闭包	传递闭包
整数集I上的$<$关系	$\le$	$\ne$	$<$
整数集I上的$\le$关系	$\le$	全域关系	$\le$
整数集I上的$\ne$关系	全域关系	$\ne$	全域关系
空关系	相等关系	空关系	空关系
整数集上$y=x+1$	$y=x$或 $y=x+1$	$y=x+1$或 $y=x-1$	$<$

二.有限集的传递闭包

1．定理3-8.5设R是有限集A的二元关系,｜A｜=n,则,$t(R)=\bigcup_{i=1}^{n} R^i$。

证：设任意$<x,y>\in t(R)$ ∴存在一个最小的正整数k，使xR^ky

用反证法证明 $k\le n$。

∵xR^ky ∴存在序列$x=a_0,a_1,\ldots\ldots,a_k=y$,使得

$xRa_{1,}\ldots\ldots_{,}a_{k-1}Ry$

又∵$k>n$,

∴$a_0,\ldots\ldots,a_k$中必有两个元素相同，不妨设$a_i=a_j$, $0\le i<j\le k$

∴$xRa_1,a_1Ra_2,\ldots,a_{i-1}Ra_i,a_jRa_{j+1},\ldots,a_{k-1}Ry$成立

令 $S=R-(j-i),S<R$, 则xR^Sy这与R是最小的假设矛盾　证毕。

例1 设A={a,b,c,d}，给定A上的关系R为：

R=｛〈a,b〉,〈b,a〉,〈b,c〉,〈c,d〉｝,求t(R)。

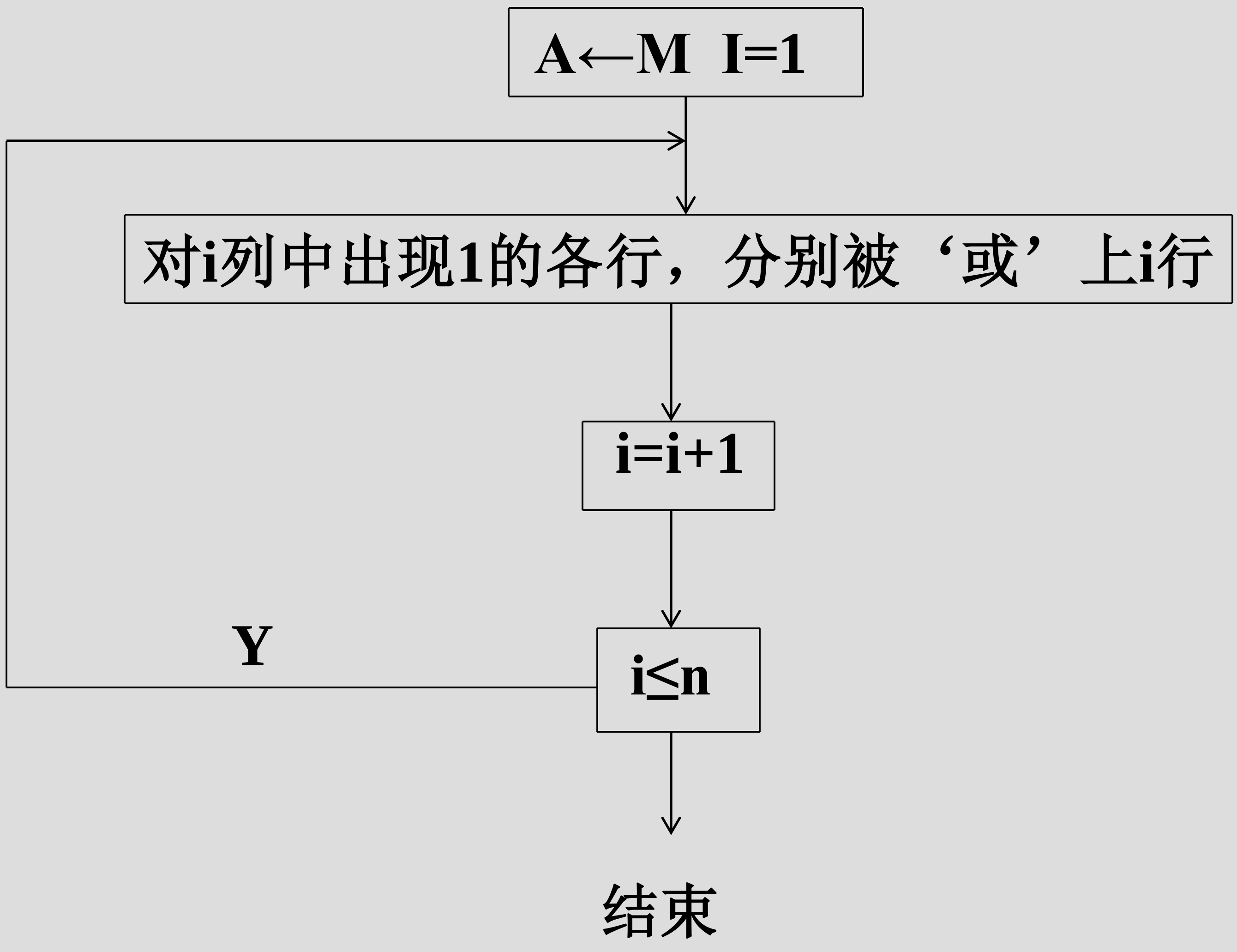
解：

$$M_R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M_{R^2}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^3}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$M_{R^4}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad M_{t(R)}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

2.Warshall算法



三．关系的性质与其闭包(设R是X上的二元关系)

定理1： a)若R是自反的，则s(R)和t(r)是自反的。

b)若R是对称的，则r(R)和t(R)是对称的。

c)若R是传递的，则r(R)是传递的，但s(R)不一定传递。

证：a) ∵R是自反的，∴$I_A \subseteq R$。

∴$I_A \subseteq R \cup R^c = s(R)$。∴s(R)是自反的。

∵$I_A \subseteq R \subseteq t(R)$,

∴t(R)是自反的。

b) i) $r(R)=I_A \cup R$

$=I_A{}^c \cup R^c$

$=(I_A \cup R)^c$

$=r(R)^c$

∴r(R)是对称的。

ii)若R是对称的，（用数学归纳法证，R^n也是对称的）

∵i=1时结论成立。

设i=n时结论成立，则i=n+1时。

$<a,c>\in R^{n+1} \Leftrightarrow \exists b(<a,b>\in R^n \wedge <b,c>\in R)$

$\Rightarrow \exists b(<c,b>\in R \wedge <b,a>\in R^n)$

$\Rightarrow <c,a>\in R^{n+1}$

∴R^{n+1}对称。

∴$\forall i\in N$，$(R^i)^c=R^i$。即：t(R)是对称的。

c)由R的传递性可知：R=t(R)。

因为tr(R)=t($I_A \cup R$)

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty}(I_A \cup R)^i = \bigcup_{i=1}^{\infty}(I_A \cup \bigcup_{j=1}^{i} R^j) = I_A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty}\bigcup_{j=1}^{i} R^j = I_A \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = I_A \cup t(R) = rt(R)$$

=r(R),所以r(R)是传递的。

（s(R)不一定传递，学生可以自己举一个反例。）

定理2(3-8.6)设R是X上的二元关系,则：

a) rs(R)=sr(R) (自反对称闭包等于对称自反闭包)

b) tr(R)=rt(R)

c) ts(R)$\supseteq$st(R) （证明较困难，书上说不困难。）

证:a)rs(R)=r(R∪R^c)=I_A∪R∪R^c=I_A∪R∪$(I_A∪R)^c$

=s(I_A∪R)=sr(R)。

b)定理1中已证明。

c) 1）若$R_1\supseteq R_2$,则$s(R_1)\supseteq s(R_2)$，$t(R_1)\supseteq t(R_2)$。

i)∵$R_1\supseteq R_2$，

∴$\langle b,a\rangle\in R_2^c\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R_2\Rightarrow\langle a,b\rangle\in R_1\Leftrightarrow\langle b,a\rangle\in R_1^c$。

∴$R_1^c\supseteq R_2^c$，

∴$R_1\cup R_1^c\supseteq R_2\cup R_2^c$，即$s(R_1)\supseteq s(R_2)$。

ii)n=1， $R_2\subseteq R_1$ ，假设$R_2^n\subseteq R_1^n$， 则

$\langle a,b\rangle\in R_2^{n+1}\Leftrightarrow\exists c(\langle a,c\rangle\in R_2^n\wedge\langle a,c\rangle\in R_2)$

$\Rightarrow\exists c(\langle a,c\rangle\in R_1^n\wedge\langle a,c\rangle\in R_1)$

$\Leftrightarrow\langle a,b\rangle\in R_1^{n+1}$

$\therefore R_2^{n+1} \subseteq R_1^{n+1}$， $\therefore \bigcup_{i=1}^{\infty} R_1^i \supseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R_2^i$， $\therefore t(R_1) \supseteq t(R_2)$。

2) $\because s(R) \supseteq R$，

$\therefore ts(R) \supseteq t(R)$ 。

$\therefore sts(R) \supseteq st(R)$。

又$\because s(R)$是对称的。

由定理1(b)知$ts(R)$是对称的。

$\therefore sts(R)=ts(R)$

$\therefore ts(R) \supseteq st(R)$。 #

下例说明上包含可以是真包含： 整数集I上的<关系

$st(<)=s(<)=\neq$ ， $ts(<)=t(\neq)=I \times I$

$\therefore st(<) \subseteq ts(<)$

注：R^+表示R的传递闭包，即$R^+=t(R)$ 读做"R正"。

R^*表示R的自反传递闭包，即$R^*=tr(R)=$ 读做"R星"。

3-9 集合的划分和覆盖

我们除了把二个集合进行相互比较外，还常把一个集合分成若干个子集进行讨论。

一．覆盖和划分

定义(3-9.1)：设A为非空集，$S=\{S_1,\ldots,S_m\},S_i\subseteq A$，$S_i\neq\varnothing(i=1,\ldots,m)$且$S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_m=A$。称S是A的覆盖。若再加$S_i\cap S_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\ldots,m)$则称S是A的划分,m称为S的秩.

例1 设$A=\{1,2,3,4,5\}$，

则$X=\{\{1,2\},\{3\},\{4,5\}\}$，

$Y=\{\{1,2\},\{2,3\},\{4,5\}\}$，

$Z=\{\{1,2,3\},\{4\},\{5\}\}$均为覆盖

$U=\{\{1,2,3,4,5\}\}$，$V=\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\}\}$为划分

U称为A的最小划分，V称为A的最大划分。

二. 交叉划分

定义(3-9.2)：若$S_1=\{A_1,\ldots,A_m\}$,$S_2=\{B_1,\ldots,B_n\}$是A的两个划分,则 $S=\{A_i\cap B_j \mid A_i\in S_1\wedge B_j\in S_2\}$称为A的交叉划分。

定理(3-9.1)：交叉划分是在集合A的划分。

证明：$S=\{A_1\cap B_1, \ldots, A_1\cap B_n, \ldots, A_m\cap B_1, \ldots, A_m\cap B_n\}$

① 则$(A_1\cap B_1)\cup\ldots\cup(A_1\cap B_n)\cup\ldots\cup(A_m\cap B_n)$

$$= A_1\cap(B_1\cup B_2\cup \ldots\cup B_n)$$
$$\cup A_2\cap(B_1\cup B_2\cup \ldots\cup B_n)$$
$$\cup\ldots$$
$$\cup A_2\cap(B_1\cup B_2\cup \ldots\cup B_n)$$
$$= (A_1\cup A_2\cup \ldots\cup A_m)\cap(B_1\cup B_2\cup \ldots\cup B_n)$$
$$=A\cap A=A$$

∴S是A的一个覆盖

② $\forall(A_i \cap B_h),(A_j \cap B_k) \in S$

$$(A_i \cap B_h) \cap (A_j \cap B_k) = \begin{cases} \varnothing & ,i \neq j \\ \varnothing & ,i=j,h \neq k \\ A_i \cap B_h & ,i=j,h=k \end{cases}$$

∴S是A的一个划分.

三.细分

定义(3-9.3)：设S,S’是集合A的两个划分，若S的每一块均是S’中某块的子集,称S是S’的细分(或加细)。

例： A=整数集，

S={{1,3,5,7…},{2,4,6…}}

S’={{1,5,9…},{1,3,7…},{2,4,6…}

则：S’是S的细分。

3-10 等价关系和等价类

一.等价关系

1.等价关系的定义

定义(3-10.1)：若集合A上的二元关系R是：

(1)自反的,(2)对称的,(3)传递的

则称R是A上的等价关系。若aRb，可读为a等价于b。

例： 数中的“相等”关系,集合中的“相等”关系,命题演算中

“$\Leftrightarrow$”关系,全域关系,空集上任何关系

都是等价关系。

注：

1)非空集合上空关系不是等价关系,因为它不是自反的。

2）等价关系的有向图中每一结点有自回路，每两结点或没有边相连，或有两条不同方向的边成对出现

2.模K等价

定义：R是一正整数，a,b∈R，若存在某一整数m,
使a-b=mk,称a,b具有模k关系,记为a≡b(mod k)。
k称为模数。

jh1.模K关系是整数集I上的等价关系。

证：设∀a,b,c∈I,则

i) 自反的：∀a∈I ,

∵ a-a=0k, ∴a≡a(mod k)。

ii) 对称的：若a≡b(mod k)，则a-b=mk,

∴b-a=(-m)k ,∴b≡a(mod k)。

iii)传递的：若a≡b(mod k)，b≡c(mod k)，

则$a-b=m_1k$，$b-c=m_2k$。

∴ $a-c=(a-b)+(b-c)= m_1k+m_2k=(m_1+m_2)k$，∴a≡ c(mod k)。

所以，模K关系是整数集I上的等价关系。 #

注：模K关系是任何整数集A⊆I上的等价关系。

3.等价类

定义(3-10.2)：设R是A上的等价关系，$\forall a\in A$，$[a]_R=\{x \mid x\in A, xRa\}$称为元素a形成的R等价类,a称为等价类$[a]_R$的代表元素。

例：设I是整数集，R是模3关系，

即$R=\{\langle x,y\rangle \mid x\in I \wedge y\in I \wedge x\equiv y \pmod 3\}$是等价关系。

其等价类为：$[0]_R=\{\ldots -6,-3,0,3,6\ldots\}$

$[1]_R=\{\ldots -2,1,4\ldots\}$

$[2]_R=\{\ldots -4,-1,2,5\ldots\}$

（注：等价类的每一元素均可作本等价类的代表元素）

jh2定理(3-10.1)设R是A上的二元关系,$\forall a,b\in A$,

则：$aRb \Leftrightarrow [a]_R=[b]_R$。

证：'$\Leftarrow$' 由R的自反性知：$a\in[a]_R$。

故：$a\in[a]_R=[b]_R$，根据等价类定义可知：aRb。

'$\Rightarrow$' $x\in[a]_R \Leftrightarrow xRa \Leftrightarrow xRa \wedge aRb \Rightarrow xRb \Leftrightarrow x\in[b]_R$

由x的任意性知$[a]_R\subseteq[b]_R$。

同理可证：$[b]_R\subseteq[a]_R$。所以，$[a]_R=[b]_R$。 #

小结：设R是A上的等价关系，$\forall a\in A$，$[a]_R$的性质有：

1） $\forall a\in A$，$[a]_R$是非空的。（因为$a\in[a]_R$）

2）$\forall a,b\in A$,则：$aRb\Leftrightarrow[a]_R=[b]_R$。（定理(3-10.1)已证）

3） $\forall a,b\in A$， 或者$[a]_R=[b]_R$，或者$[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$。

证： $\forall a,b\in A$，假设$[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing$。则$\exists c\in[a]_R\cap[b]_R$

$\therefore cRa, cRb$。$\because$R是传递的，$\therefore aRb$由2）知：$[a]_R=[b]_R$。

4） $\cup[a]_R=A$。

证：1） $\forall a\in A$， $a\in[a]_R$，故$A\subseteq\cup[a]_R$。

2） 由$[a]_R$定义显然可得： $\cup[a]_R\subseteq A$。

4.商集

定义(3-10.3)：集合A上的等价关系R，其等价类集合$\{[a]_R \mid a \in A\}$称为A关于R的商集记为A/R。

例 I/R=$\{[0]_R,[1]_R,[2]_R\}$（为模3等价关系的商集）

二.等价关系与划分

1.Jh3定理(3-10.2)集合A上的等价关系R诱导了A的一个划分A/R。

证明：由等价类的性质显然可得。A/R=$\{[a]_R \mid a\in A\}$

$\because \forall a\in A$， $\therefore$ aRa， 即：$a\in[a]_R$。

（1） $\therefore \bigcup_{a\in A}[a]_R=A$， $\therefore$A/R是一个覆盖。

（2） $\forall a,b\in A$， $[a]_R\neq[b]_R$ ， 则$[a]_R\cap[b]_R=\varnothing$。

反证法：若$[a]_R\cap[b]_R\neq\varnothing$ ， 则$\exists c\in[a]_R\cap[b]_R$，

$\therefore$cRa， cRb 。$\because$R是传递的 $\therefore$aRb。

由jh2 知$[a]_R=[b]_R$与前提矛盾。

2.Jh4定理(3-10.3)集合A的任一划分S诱导了A的一个等价关系R。

证明：设$S=\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$，定义关系R：aRb：a,b在S的同一分块中，现证R是等价关系。

1° $\forall a \in A$，a与a在同一块中，∴aRa，自反性成立。

2° $\forall a,b \in A$，a与b在同一块中，则b与a也在同一块。

即 $aRb \Rightarrow bRa$，∴对称性成立。

3° $\forall a,b,c \in A$，若a与b在同一块，b与c在同一块，

∵$S_i \cap S_j = \varnothing (i \neq j)$。∴a与c在同一块,即$aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

∴传递性满足。∴R是A的一个等价关系，且A/R=S。

例 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$S=\{\{a,b\},\{c\},\{d,e\}\}$。

则 $R_1=\{a,b\}\times\{a,b\}=\{<a,a>,<a,b>,<b,a>,<b,b>\}$。

$R_2=\{c\}\times\{c\}=\{<c,c>\}$。

$R_3=\{d,e\}\times\{d,e\}=-\{<d,d>,<d,e>,<e,d>,<e,e>\}$。

则$R=R_1 \cup R_2 \cup R_3$是由S诱导的等价关系。

3.诱导的唯一性

jh5定理(3-10.4)设R_1，R_2是非空集合上的等价关系，

则 $R_1=R_2 \Leftrightarrow A/R_1=A/R_2$。

证明： '$\Rightarrow$' 若$R_1=R_2$ $\because A/R_1=\{[a]_{R1} \mid a\in A\}$，

$A/R_2=\{[a]_{R2} \mid a\in A\}$，

$\forall a\in A$，$x\in[a]_{R1} \Leftrightarrow \langle x,a\rangle\in R_1 \Leftrightarrow \langle x,a\rangle\in R_2 \Leftrightarrow x\in[a]_{R2}$。

$\therefore [a]_{R1}=[a]_{R2}$，$\therefore A/R_1=A/R_2$。

'$\Leftarrow$' 若$A/R_1=A/R_2$，

$\therefore \forall a\in A$，$[a]_{R1}\in A/R_1$，$\exists c\in A$，使 $[a]_{R1}=[c]_{R2}$。

$\therefore \forall a,b\in A$

$\langle a,b\rangle\in R_1 \Leftrightarrow a\in[a]_{R1} \wedge b\in[a]_{R1} \Leftrightarrow a\in[c]_{R2} \wedge b\in[c]_{R2}$

$\Rightarrow \langle a,b\rangle\in R_2$

$\therefore R_1\subseteq R_2$， 同理可证$R_2\subseteq R_1$。

$\therefore R_1=R_2$。 #

（划分与等价关系本质上相同，唯一区别是关系可以在空集上定义，划分则不能。）

例 设Π和Π'是非空集A的划分,R、R'是分别由Π、Π'诱导的等价关系。

试证Π' 细分Π⇔ $R' \subseteq R$。

证： '⇒' $\forall \langle a,b \rangle \in R'$ 则a、b在Π'的同一块中，

∵Π' 细分Π∴a、b在Π的同一块 。

$\therefore \langle a,b \rangle \in R$， $\therefore R' \subseteq R$，

'⇐' 设$\forall S_i' \in \Pi'$ $\forall a \in S_i'$ 则$S_i' = [a]_{R'} = \{x \mid xR'a\}$

$\therefore \forall x \in S_i'$ $xR'a \Rightarrow xRa \Rightarrow x \in [a]_R$

$\therefore [a]_{R'} \subseteq [a]_R$

由 S_i'的任意性知：Π' 细分Π。 #

3-11 相容关系

一．相容关系

1.定义(3-11.1)：

设R是集合A上的二元关系，若R是自反的和对称的，称R是相容关系。

例：a) 所有等价关系是相容关系。

b)A={a,b,c,d},R={<a,a>,<b,b>,<c,c>,<d,d>,<a,b>,<b,a>}

2.相容关系的关系矩阵与关系图

1)仅给出关系矩阵的左下角就可描写相容关系（不包括主对角线元素）。

2)相容关系的关系图可简记（用无向边代替二条有向边、不用自回路）。

二.最大相容类

定义(3-11.2)：设R是集合A的相容关系，子集B满足∀x,y∈B ,则xRy。则B称为A关于R的相容类。

定义(3-11.3)：设R是集合A的相容关系，子集B满足：

1. $\forall x,y \in B$， 则xRy。

2. $\forall x \in A-B$，x不能与B中所有元素都有关系R，则B称为A关于R的最大相容类。

上例b)中$A_1=\{a,b\}$，$A_2=\{d\}$是R的最大相容类。

注:

1)A上的相容关系R的最大相容类集合$\{A_1, \ldots, A_m\}$构成A的一个覆盖。

2)构造一个覆盖并不需要所有的相容类。

3)最大相容类在关系图上反映为一个完全图。

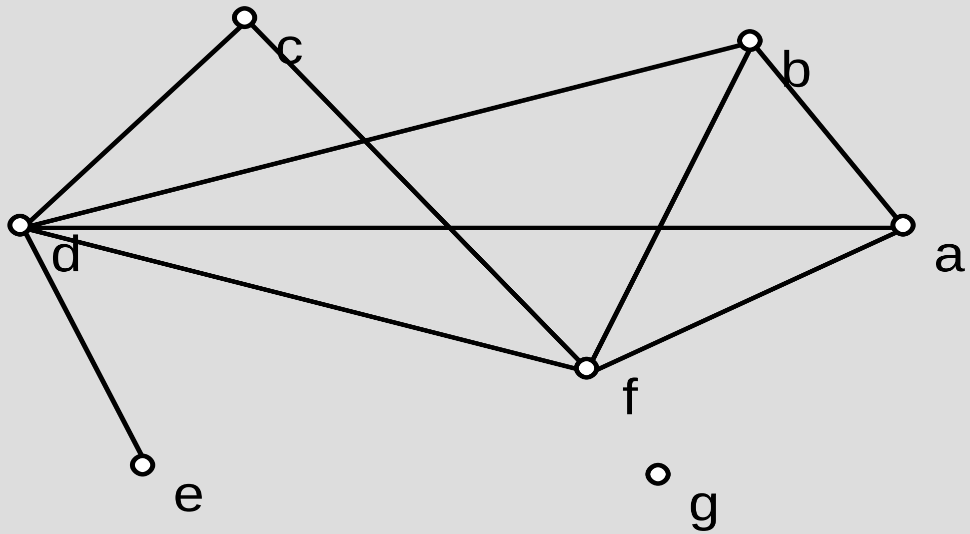
（完全图：图中每一对结点间都有边相连）

三. 最大相容类的求法

利用关系图

方法：求出图中所有最大完全图，则这些完全图表示了相应的最大相容类。

例：



最大相容类：**{a,b,d,f}，{c,d,f,}，{d,e}，{g}。**

四.相容关系与覆盖类

定义(3-11.4) 在集合A上给定相容关系R，其最大相容类的集合称作集合A的完全覆盖。记作C_R（A）。

1.A上的相容关系R诱导一个完全覆盖。

证：$\because \forall a\in A\ \ aRa\quad \therefore \cup_{a\in A}[a]_R$ 所在的最大想容类$=A$

2.定理(3-11.2)A上的覆盖$\{A_1，\ldots，A_n\}$诱导出一个相容关系：$R= A_1\times A_1\cup A_2\times A_2\cup \ldots\cup A_n\times A_n$

证: 现证 R 是一个相容关系

① $\forall a\in A\ \ \exists i\ ,a\in A_i(1\leq i\leq n)$

$\therefore <a,a>\in A_i\times A_i\subseteq R$

即 aRa $\therefore$自反性成立。

② $\forall a,b\in A$， 若$<a,b>\in R$,

$\therefore \exists i(1\leq i\leq n),<a,b>\in A_i\times A_i$,

$\therefore <b,a>\in A_i\times A_i$, $<b,a>\in R$,

$\therefore aRb\Rightarrow bRa$,

$\therefore$R是相容关系。 #

3-1 2　序关系

　　序关系是集合上的传递关系，它提供了比较集合元素的工具，它有偏序关系、拟序关系、线序关系、良序关系等不同的次序关系。

一．偏序集合

1.定义

定义(3-12.1)：若集合A上的二元关系R是自反的、反对称的和传递的，则称R是A的偏序关系，序偶<A,R>称为偏序集合。

注：① 实数集合R的“小于或等于”关系是偏序关系。

② 我们常把偏序关系R记为“≤”即小于等于。则<A,R>记为<A,≤>，aRb记为a≤b，或a在b之前，这里符号“≤”表示了一种更为普遍的“小于等于关系”即偏序关系。

例 1　$<P(A), \subseteq>$是一偏序关系。

例 2　若R是A上的偏序，R^c也是A上的偏序，故若用$\leq$表示R，则可用$\geq$表示R^c。

例 3　$A=\{2,3,6,8\}$，D表示整除关系，M表示整倍数关系。则:$D=\{<2,2>,<3,3>,<6,6>,<8,8>,<2,6>,<2,8>,<3,6>\}$

$M=\{<2,2>,<3,3>,<6,6>,<8,8>,<6,2>,<8,2>,<6,3>\}$

$\because D^c=M$

$\therefore <A,D>$与$<A,M>$互为对偶。

2.哈斯图（*hasse*图）

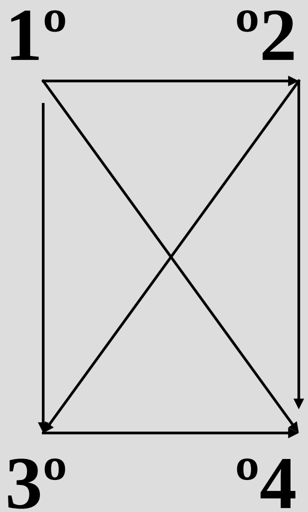
定义(3-12.2)对偏序集合，将A的关系图略去所有结点的自回路,每条有向边改为自下向上，从而略去有向边全部箭头指向。且略去表示偏序关系可传递性的各条边（即仅当不存在这样的元素c使$a\leq c,c\leq b$时，才保留a到b的一条边)，并称b盖住a,保留结点集合。

记为$CovA=\{<a,b> \mid b盖住a\}$,这样的关系图称为哈斯图。

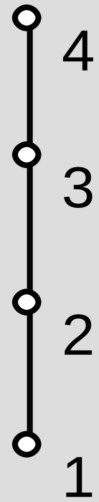
例4

a) P={1,2,3,4}

<P, ≤>的关系图为

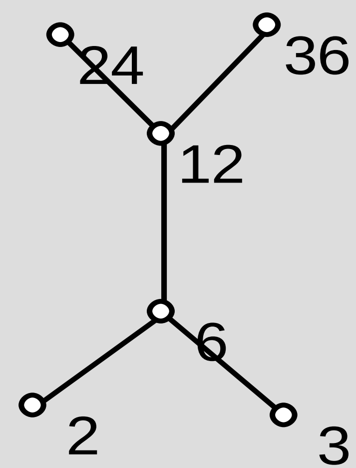


<P, ≤>的哈斯图为



b)A={2,3,6,12,24,36},

<A,整除>的哈斯图为



二.偏序集合的子集的特异元素

1. 最大（最小）元素

1）定义(3-12.6)：设<A,≤>是一偏序集合，B是A的子集。

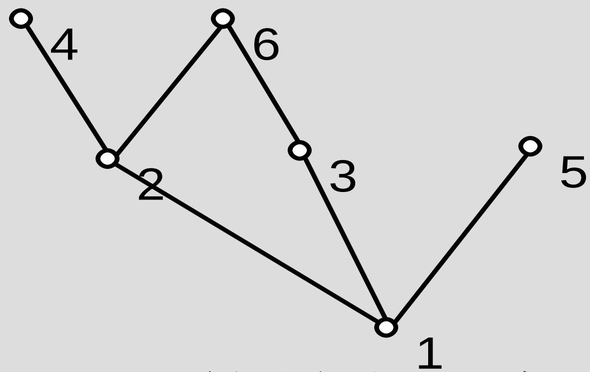
a)若每一元素$x \in B$，$x \le b, b \in B$，b称为B的最大元素。

b)若每一元素$x \in B$，$x \ge b, b \in B$，b称为B的最小元素。

注：子集B中的最大元素可能存在，也可能不存在。

例 A={1,2,3,4,5,6}

则<A,整除>哈斯图为



a) B={1, 2, 3, 6}，则6是B的最大元素，1是B的最小元素。

b) B={2, 3, 6}，则6是B的最大元素，B没有最小元素。

c) B={1, 2, 3, 4, 5, 6}，则B没有最大元素，1是B的最小元。

d) B={2, 3, 4, 6}，则B没有最大元素，B没有最小元素。

e) B={4}，则4既是B的最大元素，又是B的最小元素。

2)定理(3-12.1) 设<A, ≤>是一偏序集合，且B⊆A则B若有最大（最小）元，则最大（最小）元是唯一的。

证：设a,b都是B的最大元素，那末a≤b,b≤a，

由反对称性得a=b。

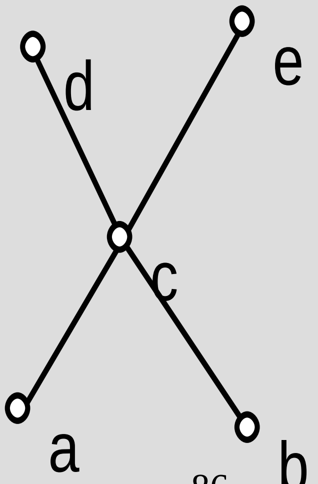
2.极大（极小）元

定义3(3-12.5) 设<A, ≤>是一偏序集合，B是A的子集

a)若b∈B,且B中不存在元素x,使b≠x且b≤x，称b∈B是B的极大元素。

b)若b∈B,且B中不存在元素x,使b≠x且b≥x 称b∈B是B的极小元素。

例：



则A=｛a,b,c,d,e｝不存在最大、最小元素。

但极大元素为d,e,极小元素为a,b。

若B={c,a,b}则极大元素为c,极小元素为a,b。

3.上界、下界

定义4(3-12.7) 设$<A, \leq>$是一偏序集合，B是A的子集。若$\forall b \in B, b \leq a$,则$a \in A$称为B的上界。若$\forall b \in B, b \geq a$,则$a \in A$称为B的下界。

定义5(3-12.8)设$<A, \leq>$是一偏序集合，B是A的子集。若a是B的上界（下界）,且对B的每一上界（下界）a',有 $a \leq a'$(或$a' \leq a$)。那么$a \in A$叫做B的最小上界(上确界)记为LUB（或最大下界(下确界)记为GLB）。

注 :(1)B的最大（小）元素和极大（小）元素必须是子集B的元素，而B的上界（下界）和最小上界(最大下界)可以是也可以不是B的元素。

(2)上界和下界可以存在也可以不存在,可以唯一也可以不唯一。

(3)极大元素和极小元素可以存在也可以不存在,可以唯一也可以不唯一。

(4)最大元素、最小元素可以存在也可以不存在,但若存在

则唯一。例如: <I, ≤>设B={i｜i∈N},则B的极大元素不存在，最大元素不存在，极小元素为0，最小元素为0。

(5)对于非空有限偏序集合，其极大元素和极小元素总是存在。

4. 其他一些说明:

(一)特异元素之间的关系:

设<A, ≤>是偏序关系，B是A的子集。则:

a）如果b是B的最大元素，那么b是B的极大元素，即极大元素唯一。

b）如果b是B的最大元素，那么b是B的LUB。

c）如果b是B的上界且b∈B,则b是B的最大元素。

（对最小元素、极小元素和GLB也存在类似的关系）。

(二)对<P, ≤>来说,它的对偶<P,≥>也是一个偏序集合。偏序‘≤’是P中的最大元素、极大元素、上界、GLB是偏序关系‘≥’是P中的最小元素、极小元素、下界、LUB,反之亦然。

三.线序集合和良序集合

对偏序集合来说，若a≤b或b≤a，称a,b是可比的。

1.线序集合（<u>全序集合</u>）

定义(3-12.3)：在偏序集合<A,≤>中,B⊆A若每一a、b∈B或a≤b或b≤a称<u>B为链</u>。若A是<u>链</u>，序偶<A, ≤>叫做线序集合，‘≤’称为<u>线序关系</u>。

若∀a,b∈B,a、b无关系，称B是反链。

注： 线序集合的哈斯图是一竖立的结点序列，每相邻的结点用一条弧连接。

例 a)<I, ≤>是一线序集合。

b) {1,2,3,6}的整除关系不能构成一个线序集合。

2.良序集合

定义(3-12.9)：若R是A上的一个线序关系，且A的每个非空子集<u>都有最小元素</u>，则称R是A上的<u>良序关系</u>，序偶<A,R>称良序集合。

例 （a）每一个有限的线序集合都是良序集合。

定理(3-12.2)：每一个良序集合，一定是全序集合。

证：设<R,≤>为良序集合，则对于任意两个元素a,b∈R可构成子集｛a,b｝,必存在最小元素不是a就是b,因此一定有a≤b或b≤a.所以<R,≤>为全序集。 #

定理(3-12.3)：每一个有限的线序集合都是良序集合。

证：设A={a_1,a_2, …,a_n}令<A,≤>是全序集合,

现在假定<A,≤>不是良序集合,那么必存在一个非空子集B⊆A,在B中不存在最小元素,由于B是一个有限集合,故一定可以找出两个元素*x*与*y*是无关的,由于<A,≤>是全序集，*x*,*y*∈A，所以*x*,*y*必有关系，得出矛盾，故<A,≤>必是良集合。 #