初等数学中的基本公式

一、式的恒等变换

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + 1)$

二、幂

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$(a^m)^n = a^{mn}$

$a^m \div a^n = a^{m-n}$

$(a_1 a_2 \cdots a_k)^n = a_1^n a_2^n \cdots a_k^n$

三、根式

1、$(\sqrt[n]{a})^n = a,\ (a > 0),\ \ n > 1$为自然数

当 n 为奇数时$\sqrt[n]{a^n} = a$ ，a是任意实数

当 n 为偶数时$\sqrt[n]{a^n} = |a|$

2、$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_k} = \sqrt[n]{a_1}\sqrt[n]{a_2}\cdots\sqrt[n]{a_k}$ ，其中$a_i \geq 0, 1 \leq i \leq k, n > 1$

$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (a \geq 0, b > 0, n > 1)$

$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} \quad (a \geq 0, n > 1)$

$\sqrt[n]{a^{mn}} = a^m \quad (a \geq 0, m, n > 1)$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a} \quad (a \geq 0, m, n > 1)$

四、等差数列与等比数列

1、 等差数列：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$

通项公式：$a_n=a_1+(n-1)d,\quad d$ 为公差，

前 n 项和的公式 $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$； 若 a,b,c 成等差数列，则有 $b=\frac{a+c}{2}$

2、 等比数列：$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$

通项公式：$a_n=a_1q^{n-1},\quad q$ 为公比；前 n 项和的公式 $S_n=\frac{a_1(q^n-1)}{q-1}$

3、 某些特殊数列前 n 项的和：

$$1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$
$$2+4+6+\cdots+2n=n(n+1)$$
$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$
$$1^3+2^3+\cdots+n^3=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$$
$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$
$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

五、排列、组合及二项式定理

1、 从 n 个不同元素中取出 m $(m\le n)$ 个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的排列，记为 $P_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}$

n 个不同元素全部取出的排列叫做这 n 个不同元素的全排列 $P_n^n=n!$

2、从 n 个不同元素中取出 m $(m \le n)$ 个元素的所有组合的个数，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数，用符号 C_n^m 表示

$$C_n^m = \frac{P_n^m}{P_m^m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

3、二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n$$

组合数有性质：$C_n^m = C_n^{n-m}, C_n^0 = 1, C_n^n = 1$

4、 重要不等式

若 $a,\ b$ 都是实数，则有 $a^2 + b^2 \ge 2ab$ （当且仅当 $a = b$ 时，取等号）

若 $a,\ b$ 都是正数，则有 $\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}$ （当且仅当 $a = b$ 时，取等号）

若 a, b, c 都是正数，则有 $\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}$

六、初等函数的基本性质

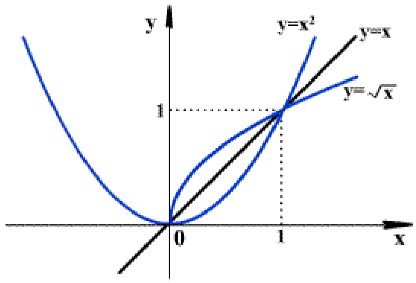
初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合而成的，所以下面仅介绍基本初等函数

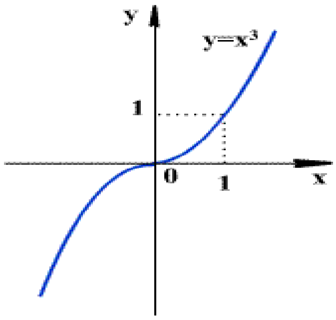
1、常量函数 $y \equiv C$（常数）

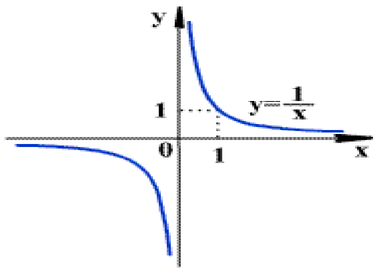
此函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为{C}，所以是有界函数，其图形为平行于 x 轴，截距为 C 的直线。

2、幂函数 $y = x^\alpha$ （α 为实数）

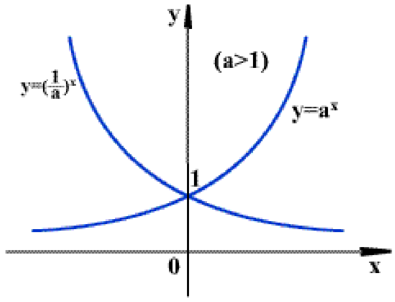
随 α 取值的不同，其定义域、图形也均不同。当 α 为自然数时，定义域为全体实数；当 α 为负整数时，$x \ne 0$；而当 $x \in (0,+\infty)$ 时，$y = x^\alpha$ 恒有意义，且当 $\alpha > 0$ 时为单调增，当 $\alpha < 0$ 时为单调减，图形均过点（1，1）。







3、指数函数　　$y=a^x$，$a>0$，$a\neq 1$



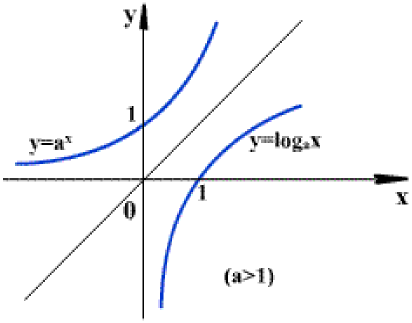
定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域$(0,+\infty)$，图形恒通过点（0，1）；当$a>1$时单调增；当$0<a<1$时单调减。特别当$a=e$时，即$y=e^x$是常用的指数函数，其中　$e=2.7182\cdots$为无理数。

运算性质：
$$a^x\cdot a^y=a^{x+y},\quad a^x\div a^y=a^{x-y},\quad (a^x)^y=a^{xy},$$
$$\sqrt[y]{a^x}=a^{\frac{x}{y}},\qquad a^{-x}=\frac{1}{a^x},\qquad a^0=1$$

当$a>1$时，$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=0,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}a^x=+\infty$

当$0<a<1$时，$\lim\limits_{x\to-\infty}a^x=+\infty,\quad \lim\limits_{x\to+\infty}a^x=0$

4、对数函数　　$y=\log_a x,\quad a>0且a\neq 1$



对数函数是指数函数的反函数，其定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(-\infty,+\infty)$；

当$a>1$时单调增，当$0<a<1$时单调减。其图形与$y=a^x$的图形关于直线$y=x$对称，均过点(1，0)，特别当$a=e$时为自然对数，记为$y=\ln x$，即$y=e^x$与$y=\ln x$互为反函数

运算性质：$\log_a xy=\log_a x+\log_a y,\quad \log_a\dfrac{x}{y}=\log_a x-\log_a y,$

$$\log_a x^{\mu} = \mu \log_a x,\quad a^{\log_a x} = x,\quad \log_a 1 = 0,\quad \log_a a = 1,$$

换底公式：$b>0,\ b\neq 1$，则有$\log_a A = \dfrac{\log_b A}{\log_b a}$

当$a>1$时，$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x = -\infty,\quad \lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x = +\infty,$

当$0<a<1$时，$\lim\limits_{x\to 0^+}\log_a x = +\infty,\quad \lim\limits_{x\to +\infty}\log_a x = -\infty,$

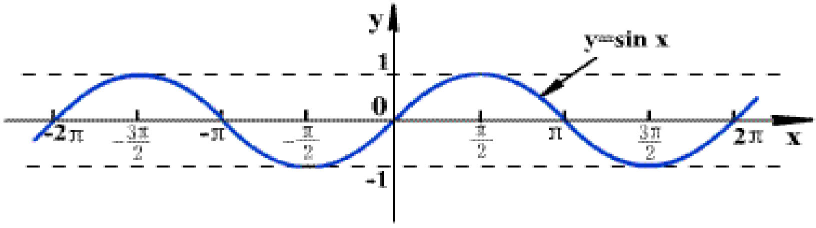
5、三角函数

$$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$$

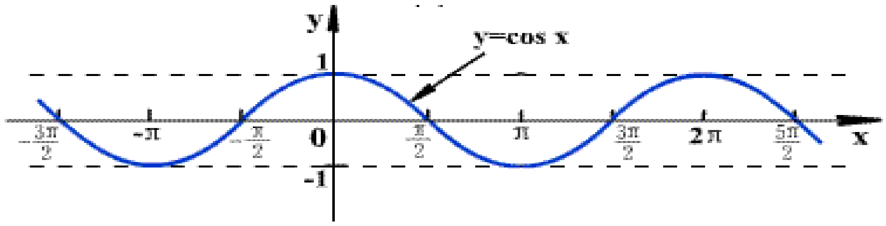
（1）定义域及值域：

① $y=\sin x$,定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域$[-1,1]$，为奇函数，以2π为周期，在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$内单调增，在$(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$内单调减。

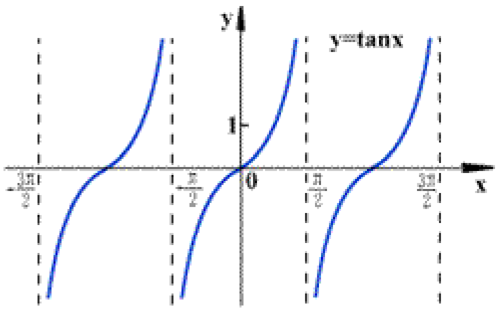
②



$y=\cos x$，定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域$[-1,1]$，为偶函数，以2π为周期，在$(0,\pi)$内内单调减，在$(\pi,2\pi)$内单调增。



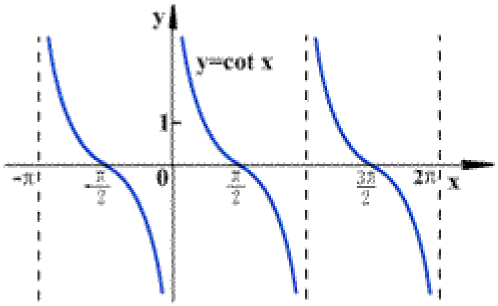
③ $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$，定义域为$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，值域为$(-\infty,+\infty)$,为奇函数，以$\pi$为周期，在



$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内为单调增。

④ $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ ，定义域为 $x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，为奇函数，

以 π 为周期，在 $(0,\pi)$ 内单调减。



⑤ $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ ，定义域为 $x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

⑥ $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$ ，定义域为 $x\neq k\pi,k=0,\pm1,\pm2,\cdots$

（2） 同角三角函数的基本关系：

$$\sin x\csc x=1,\quad \cos x\sec x=1,\quad \tan x\cot x=1$$

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\quad 1+\tan^2 x=\sec^2 x,\quad 1+\cot^2 x=\csc^2 x$$

（3） 两角和与差的公式：

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$$

倍角公式：

$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

（4） 和差化积公式：

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\qquad \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\;;\quad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

（5）积化和差公式：

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$$

$$\sin x\sin y=-\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$

（6）附表：

特殊角的三角函数值：

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos x$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan x$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0

三角函数在各象限的符号：

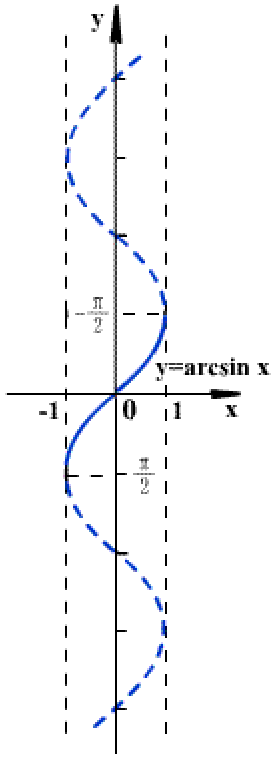
	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\cot x$
第一象限	正	正	正	正
第二象限	正	负	负	负
第三象限	负	负	正	正
第四象限	负	正	负	负

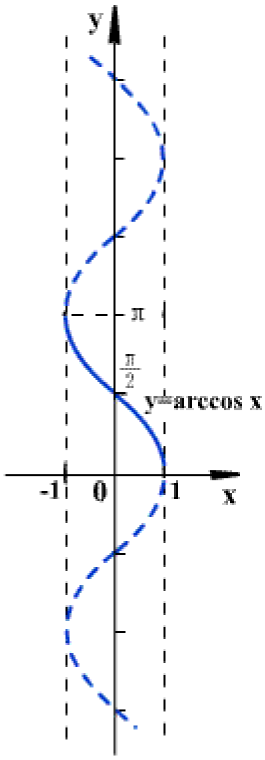
6、 反三角函数

（1）$y=\arcsin x$

当$x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$时，$y=\sin x$单调增，有反函数，记为$y=\arcsin x$，其定义域为

[-1，1]值域为$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$为有界函数，且为奇函数，单调增。





（2）$y=\arccos x$

当$x\in[0,\pi]$时，$y=\cos x$单调下降，有反函数，记为$y=\arccos x$，其定义域为

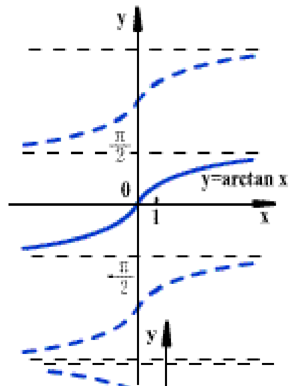
[-1，1]，值域为$[0,\pi]$，单调减、有界。

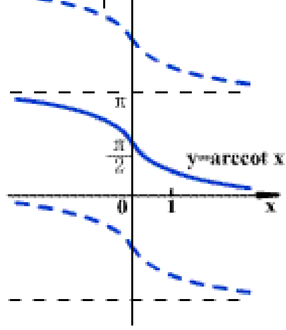
（3）$y=\arctan x$

当$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$时，$y=\tan x$单调增，有反函数，记为$y=\arctan x$，其定义域为

$(-\infty,+\infty)$，值域为$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，有界、单调增，也是奇函数。且有

$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$。





（4） $y = arc\cot x$

当 $x \in (0, \pi)$ 时， $y = \cot x$ 单调减，有反函数，记为 $y = arc\cot x$ ，其定义域为 $(-\infty, +\infty)$ ，值域为 $(0, \pi)$ ，有界。

（5） 附表：

特殊点的反三角函数值：

x \ y	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\arccos x$	π	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

x \ y	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\arctan x$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$arc\cot x$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$