§2.5 一维随机变量的数字特征

一、数学期望

引例 1654年，梅雷向数学家帕斯卡请教“分赌注问题”：梅雷和赌友各出32枚金币，共64枚金币作为赌注。掷骰子为赌博方式，如果结果出现“6”，梅雷赢1分；如果结果出现“4”，对方赢1分；谁先得到10分，谁就赢得全部赌注。赌博进行了一段时间后，梅雷已得了8分，对方也得了7分。但这时，梅雷接到紧急命令，要立即陪国王接见外宾，于是只好中断赌博。

问题：这64枚金币的赌注应该如何分配才合理呢？

- **方案1：将赌注原数退回** ——梅雷不愿意！
- **方案2：将全部赌注归于当时的赢家** ——赌友更不愿意！
- **方案3：以当时两人比分的比例来计算** ——还是不合理！

帕斯卡：赌徒分得赌注的比例应该等于从这以后继续赌下去他们能获胜的概率。

简化成抛硬币：甲乙两人抛硬币，甲赌“正”，乙赌“反”，赢家得1分，各下赌注32元，先到达10分者获取所有赌注。如果赌博在“甲8分、乙7分”时中断，问应该如何分配这64元赌注？

结果	概率	所得（甲）	概率加权所得（甲）
H H	1/4	64	$64\times 1/4=16$
H T H	1/8	64	$64\times 1/8=8$
H T T H	1/16	64	$64\times 1/16=4$
H T T T	1/16	0	$0\times 1/16=0$
T H H	1/8	64	$64\times 1/8=8$
T H T H	1/16	64	$64\times 1/16=4$
T H T T	1/16	0	$0\times 1/16=0$
T T H H	1/16	64	$64\times 1/16=4$
T T H T	1/16	0	$0\times 1/16=0$
T T T	1/8	0	$0\times 1/8=0$

设甲的最终所得为X，则

X	64	0
P	11/16	5/16

甲的“期望” 所得为

$$E(X)=64\times\frac{11}{16}+0\times\frac{5}{16}$$

$$=44$$

1、离散型随机变量的数学期望

定义2.5.1 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望，记为 $E(X)$. 即

$$\boxed{E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.}$$

简称期望或均值（mean）.

说明

- “绝对收敛”保证期望存在及唯一；

注：并非所有的随机变量都存在数学期望。

例2.5.9(1) $r.v.X \sim P\left\{X=(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}\right\}=\frac{1}{2^n},\quad n=1,2,\ldots$

$$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n p_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n}\right|\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\cdot\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty$$

- 数学期望实际上就是以概率为权数的加权平均；

- $r.v.\ X$的期望也就是它服从的分布的期望。

例1 设*r.v.* X 服从0–1分布，求$E(X)$.

解：*r.v.* X 的分布律为：

X	0	1
P	1–p	p

$$E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$$

也称0–1分布的期望为 p

例2 设$X \sim b(n,p)$，求$E(X)$ 书P62例2.5.3

解 X的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, (k=0,1,2,\cdots,n),$$

则有 $E(X)=\sum_{k=0}^{n} k\cdot P\{X=k\}$

$$=\sum_{k=0}^{n} k\cdot C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)} = np$$

例3 设$X \sim \pi(\lambda)$，求$E(X)$　　书P62例2.5.4

解： X的分布律为

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \qquad k=0,1,2,\cdots, \lambda>0$$

X的数学期望为

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

例4 $X \sim Ge(p)$，求$E(X)$ 书P63例2.5.5

解：X的分布律为

$$P(X=k)=pq^{k-1}, \qquad k=1,2,\cdots, \quad q=1-p$$

X的数学期望为

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'$$

$$=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=p\frac{1}{(1-q)^2}=\frac{1}{p}$$

例5 掷两枚均匀硬币，ξ 表示出现正面的次数，求 $E(\xi)$。

解： 先求出r.v.ξ 的分布律

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

再求 ξ 的期望

$$E(\xi)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$$

例6 新冠10合1混合检测

设被检测对象的核酸检测结果显阳性的概率为 p,

每份样本混合10个个体样本，若呈阳性则逐个再检测一次.

若单独检测，平均每人检测一次.

问题1： 10合1混采下平均每人的检测次数是多少？

问题2： 10合1混采的检测方法一定好吗？

设 X 为10人一组的总测量次数, 则

X	1	11
P	$(1-p)^{10}$	$1-(1-p)^{10}$

$$E(X)=(1-p)^{10}+11[1-(1-p)^{10}]$$

平均每人的检测次数 $\dfrac{E(X)}{10}=1.1-(1-p)^{10}\le 1$

可得 $p\le 1-(0.1)^{1/10}\approx 0.2057$

例7 如何确定投资决策方向?

某人有10万元现金,想投资某项目,欲估成功的机会为30%,可得利润8万元，失败的机会为70%, 将损失2万元. 若存入银行,同期间的利率为5% ,问是否作此项投资?

X	8	-2
P	0.3	0.7

解: 设 X 为投资利润,则

$$E(X) = 8\times 0.3 - 2\times 0.7 = 1(\text{万元}),$$

存入银行的利息: $10\times 5\% = 0.5(\text{万元})$,

故应选择投资.

2、连续型随机变量数学期望

定义2.5.2

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$,

若积分$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ 的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即

$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

说明 可与离散型r.v. X的期望公式比较，帮助记忆。

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

说明

❖ “绝对收敛”保证期望存在及唯一；

注：并非所有的随机变量都存在数学期望。

例2.5.9(2)

$$r.v.\,X \sim f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\ x\in R$$ 柯西(Cauchy)分布

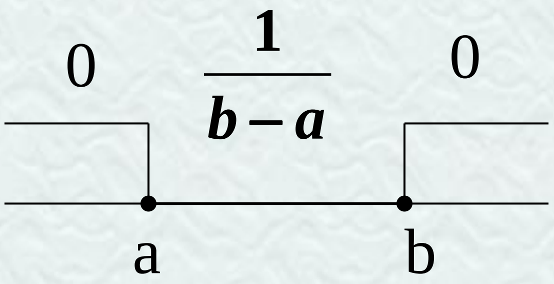
$$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}dx=+\infty$$

❖ r.v. **X**的期望也就是它服从的分布的期望。

例1　设$r.v.\ X \sim U(a,b)$，求$E(X)$．　书P63例2.5.6

解：　$r.v.\ X$的概率密度函数为：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\[2ex] 0 & \text{其它}\end{cases}$$



故 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$ （区间的中点）

例2 设 r.v. $X \sim E(\lambda)$，求E(X)． 书P64例2.5.7

解 X的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

$$\therefore E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-x e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

例如 顾客平均等待多长时间?

设顾客在某银行的窗口等待服务的时间 X(以分计)服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

试求顾客等待服务的平均时间?

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x/5}\,\mathrm{d}x\ =5$(分钟).

因此, 顾客平均等待5分钟就可得到服务.

3、随机变量函数的数学期望

定理2.5.1 设 $Y=g(X)$, g 是连续函数，

（i）若X是离散型随机变量，它的分布律为

$$P(X=x_k)=p_k,\qquad k=1,2,\cdots,$$

若 $\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$ 绝对收敛，则 $E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$

（ii）若 X 是连续型的,它的概率密度为 $f(x)$, 若

$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx$ 绝对收敛，则 $E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x.$

例3 设随机变量X的分布律为

X	-2	-1	0	1	2	3
p	0.10	0.20	0.25	0.20	0.15	0.10

求随机变量函数$Y=X^2$的数学期望

解 $$E(Y)=E(X^2)=\sum_k x_k^2\cdot p_k$$

$$=(-2)^2\times 0.10+(-1)^2\times 0.20+0^2\times 0.25$$

$$+1^2\times 0.20+2^2\times 0.15+3^2\times 0.10=2.30$$

例2.5.11 设随机变量X在区间$(0,\pi)$内服从均匀分布，求随机变量函数$Y=\sin X$的数学期望

解 依题意X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & 0<x<\pi\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(Y)=E(\sin X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\cdot f(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}\sin x\cdot\frac{1}{\pi}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

二、一维随机变量的方差

引例　有两个学生的五次测验成绩如下

甲：	成绩	78	80	82	乙：	成绩	75	80	90
	次数	1	3	1		次数	2	2	1

问谁的成绩好？

解：甲的平均成绩=（78×1+80×3+82×1）÷5=80

乙的平均成绩=（75×2+80×2+90×1）÷5=80。

两人的平均成绩相同；　但分析发现甲的成绩比较稳定，而乙的成绩起伏较大，这就是他们的差别。描述这种差别的量就是方差。

1.定义2.5.3 设X是任一 r.v.，若 $E(X-EX)^2$存在，则称它为r.v. X的方差，记作 $D(X)$ 或Var(X)，即

$$\boxed{D(X)=E(X-EX)^2}$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为r.v. X 的标准差（或均方差）.

说明

- $D(X)\geq 0$，其中$E(X)$视作为一个常数；
- 当 $D(X)$ 较大时，表示r.v. X 的取值比较分散；当$D(X)$ 较小时，表示r.v. X 的取值比较集中，即$D(X)$ 刻画了r.v. X取值的离散程度.

2. 随机变量方差的计算

(1). 利用定义及随机变量函数的期望公式计算

离散型随机变量的方差

$$D(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}[x_k-E(X)]^2 p_k,$$

其中 $P\{X=x_k\}=p_k, k=1,2,\cdots$ 是 X 的分布律.

连续型随机变量的方差

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^2 f(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $f(x)$ 为X的概率密度.

(2). 利用公式计算

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

其中

$$E(X^2)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}x_k^2\,p_k & X\text{是离散型r.v.}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx & X\text{是连续型r.v.}\end{cases}$$

证明 $D(X) = E\left[X - E(X)\right]^2$

$$= E\{X^2 - 2XE(X) + [E(X)]^2\}$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - E^2(X).$$

三、重要概率分布的期望和方差

1. 两点分布

已知随机变量 X 的分布律为

X	1	0
p	p	$1-p$

则有 $E(X)=1\cdot p+0\cdot q=p,$

$$E(X^2)=1^2\cdot p+0^2\cdot(1-p)=p$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=pq.$$

2. 泊松分布

设 $X \sim \pi(\lambda)$, 且分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,2,\cdots,\quad \lambda>0.$$

则有

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\lambda$$

$$=\lambda\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\mathrm{e}^{\lambda}\ =\lambda.$$

$$E(X^2) = E[X(X-1)+X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} + \lambda$$

$$= \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\cdot\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda = \lambda^2\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda.$$

所以 $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

泊松分布的期望和方差都等于参数 λ.

3. 二项分布

设随机变量 X 服从参数为 n, p 二项分布,其分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, (k=0,1,2,\cdots,n),$$

则有 $\quad 0<p<1.$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{n} k \cdot P\{X=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{kn!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{np(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np\sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np[p+(1-p)]^{n-1}$$

$$= np.$$

$$E(X^2) = E[X(X-1) + X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1) C_n^k p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} p^{k-2} (1-p)^{(n-2)-(k-2)}$$

$$+ np$$

$$= n(n-1)p^2 [p + (1-p)]^{n-2} + np$$

$$= (n^2 - n)p^2 + np.$$

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$= (n^2 - n)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p).$$

4. 均匀分布

设 $X \sim U(a,b)$, 其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则有 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \dfrac{1}{b-a}x\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(a+b).$$

结论　均匀分布的数学期望位于区间的中点.

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}\,\mathrm{d}x=\frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

5. 指数分布

$r.v.X \sim E(\lambda)$, X的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

则有

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty} x\cdot\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$$

$$=-x\mathrm{e}^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\lambda}.$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\cdot\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}.$$

指数分布的期望和方差分别为 $\frac{1}{\lambda}$ 和 $\frac{1}{\lambda^2}$.

6. 正态分布

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma > 0, \quad -\infty < x < +\infty.$$

则有 $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d}\, x$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}\, x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma} = t \Rightarrow x = \mu + \sigma t,$

所以 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}(\mu+\sigma t)e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$=\mu\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$=\mu.$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

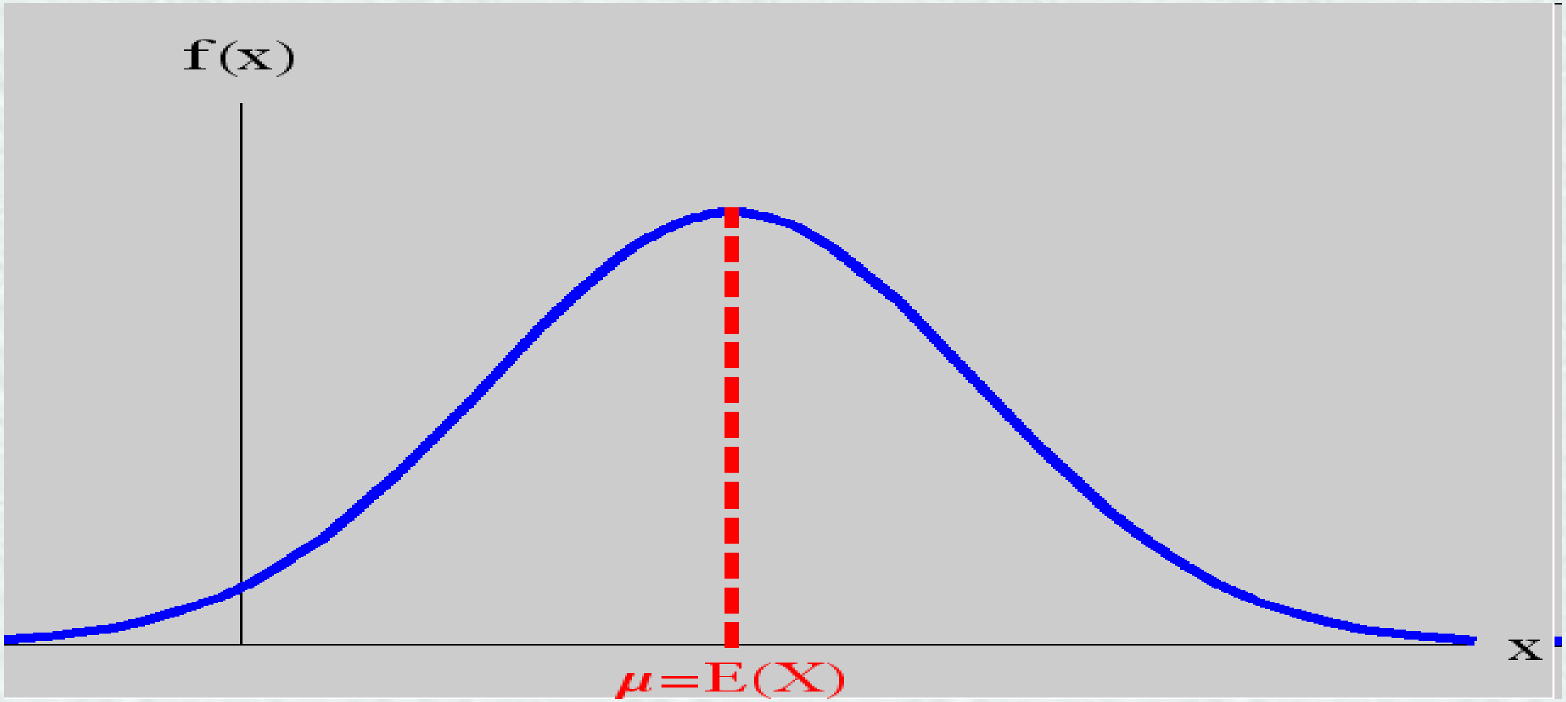
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x.$$

令 $\dfrac{x-\mu}{\sigma}=t$,得

$$D(X)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t^2\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}t\,d(\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}})$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t=\sigma^2.$$

正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的期望和方差分别为两个参数 μ 和 σ^2.



分　　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0 < p < 1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n \geq 1,$ $0 < p < 1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda > 0$	λ	λ
均匀分布	$a < b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\lambda > 0$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正态分布	$\mu,\sigma > 0$	μ	σ^2

补充：数学期望的性质(定理3.5.2)

(1). 设 C 是常数, 则有 $E(C)=C$.

(2). 设 X 是一个随机变量，a, b 是常数, 则有

$$E(aX+b)=aE(X)+b.$$

例如 $E(X)=5$, $E(3X-2)=3E(X)-2=3\times5-2=13.$

(3). 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

推广：

$$E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$$

例1　引入计数随机变量

$$X_i=\begin{cases}1 & 第i次试验中事件A发生\\ 0 & 第i次试验中事件A不发生\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

其中$P(A)=p$ $X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立且服从同一个（$0-1$）分布

则X_i服从$(0-1)$分布，$E(X_i)=p$且 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim b(n,p)$

$$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)=p+p+\cdots+p=np$$

即X的数学期望为np

例2 将一枚骰子连续掷10次，以X表示掷出的点数之和，求X的数学期望.

解 设X_i表示第i次掷出的点数，i=1,2,…,10

则$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$

且X_i同分布，分布律为:

$$P(X_i = k) = \frac{1}{6},\ k = 1,2,3,4,5,6 \qquad E(X_i) = 3.5$$

$$\therefore E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_{10})$$

$$= E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{10}) = 10 \times 3.5 = 35$$

例3　一机场班车载有 20 位旅客自机场开出，旅客有 10 个车站可以下车．如到达一个车站没有旅客下车就不停车，以 X 表示停车的次数，求 $E(X)$（设每位旅客在各个车站下车是等可能的，并设各旅客是否下车相互独立）.

解　引入随机变量 X_i，

$$X_i=\begin{cases}0, & \text{在第 } i \text{ 站没有人下车,}\\ 1, & \text{在第 } i \text{ 站有人下车,}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,10.$$

则　$X=X_1+X_2+\cdots+X_{10}.$

则有 $P\{X_i=0\}=\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$， $P\{X_i=1\}=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$，

$i=1,2,\cdots,10.$

由此 $E(X_i)=1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}$， $i=1,2,\cdots.$

得 $$E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_{10})$$

$$=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_{10})$$

$$=10\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^{20}\right]=8.784(\text{次}).$$

补充：方差的性质（定理3.5.3）

(1) 设 C 是常数, 则有 $D(C)=0.$

证明 $D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2=C^2-C^2=0.$

(2) 设 X 是一个随机变量, a, b 是常数, 则有

$$D(aX+b)=a^2D(X).$$

证明 $D(aX+b)=E[aX+b-E(aX+b)]^2$

$$=E[aX+b-aE(X)-b]^2=a^2E[X-E(X)]^2$$

$$=a^2D(X).$$

例4 设随机变量X的期望、方差均存在，C是任意常数，

证明：$D(X) \le E\left(X-C\right)^2$，当且仅当$C=E(X)$时取等号.

证明

$$E(X-C)^2 = E(X^2 - 2CX + C^2)$$

$$= E(X^2) - 2CE(X) + C^2$$

$$= D(X) + [E(X)]^2 - 2C \cdot E(X) + C^2.$$

$$= D(X) + [E(X) - C]^2 \ge D(X)$$

当且仅当 $C = E(X)$ 时取等号.