序号

苏州大学 高等数学一（上）期中试卷　　共 5 页

考试形式：闭卷

院系__________ 年级 __________ 专业 __________

学号__________ 姓名__________ 成绩 __________

特别提醒：请将答案填写在答题纸上，若填写在试卷纸上无效.

一． 选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内 (　　)C

   A. 有上界无下界　　B. 有下界无上界

   C. 有界且 $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$　　D. 有界且 $-\dfrac{1}{5}\le f(x)\le\dfrac{1}{5}$

2. 则下列命题正确的是 (　　) B

   A. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，而数列 $\{y_n\}$ 发散，则数列 $\{x_n+y_n\}$ 与数列 $\{x_ny_n\}$ 都发散

   B. 若数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{y_n\}$ 均发散，则数列 $\{x_n+y_n\}$ 与数列 $\{x_ny_n\}$ 可能都收敛

   C. 若数列 $\{x_n\}$ 发散，则该数列一定无界

   D. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 0，而 $\{y_n\}$ 为任意数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$

3. 当 $x\to1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是(　　) D

   A. 2　　B. 0　　C. ∞　　D. 不存在但不为 ∞

4. 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)=-2$，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=$ (　　) A

   A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\dfrac{1}{2}$

5. 下列函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的是 (　　)B

   A. $y=|x|$　　B. $y=\sqrt[3]{x^5}$　　C. $y=\sqrt[3]{x^2}$　　D. $y=\begin{cases}x^2+1, x\ge0\\ x^3, x<0\end{cases}$

二． 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1． 当 $x\to0$ 时，$2\sin x-\sin 2x$ 与 x^k 为等价无穷小，则 $k=$____________. 3

2．已知 $y=\varphi(\sin x^n)$, 且 $\varphi'(u)$ 存在，则 $\mathrm{d}y=$____________. $nx^{n-1}\cdot\varphi'(\sin x^n)\cdot\cos x^n\mathrm{d}x$

3. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos 10x)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}, & x\neq 0\\ 50, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $a=$____________. 1

4. 设函数 $y=x(x^3+2x+1)^2+\mathrm{e}^{2x}$, 则 $y^{(7)}(0)=$____________. $7!+2^7$

5. 设 $f(u)$ 可导， $y=f(x^2)$ 当自变量 x 在 $x=-1$ 处取得增量 $\Delta x=-0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1, 则 $f'(1)=$__________. 0.5

三．　解下列各题：（每小题 8 分，共 40 分）

1．求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$;

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{6x}{\sin x}}$ …………………………….（3 分）

$=\mathrm{e}^6.$ …………………………….（1 分）

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln^3(1+x)}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right].$

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln\frac{2+\cos x}{3}}-1}{x^3}$ …………….（2 分）

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\frac{\cos x-1}{3})}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\cos x-1}{3}}{x^2}=-\dfrac{1}{6}$…………（2 分）

2. 若 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{2x+1}-ax+b)=3$, 求 a,b 的值.

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-2a)x^2+(2b-a)x+b+1}{2x+1}=3,$ …………（4 分）

$\therefore a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{13}{4}.$ …………（4 分）

3．求曲线 $\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^2},\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}\end{cases}$ 在相应于 $t=2$ 的点处的法线方程.

解：$t=2$ 对应点 $(\frac{6a}{5},\frac{12a}{5})$ …………（2 分）

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{2t}{1-t^2}$ …………（3 分）

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{t=2}=-\frac{4}{3}.$ ……………（1 分）

法线方程 $y-\frac{12a}{5}=\frac{3}{4}(x-\frac{6a}{5})$ 即 $3x-4y+6a=0.$…………（2 分）

4. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y+xy=\mathrm{e}$ 所确定，求 $y''(0)$.

解：$x=0,y=1$ …………（1 分）

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{\mathrm{e}^y+x}$ …………（2 分）

$y'(0)=-\frac{1}{\mathrm{e}}$ …………（1 分）

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^y+x)-y(\mathrm{e}^y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+1)}{\left(\mathrm{e}^y+x\right)^2}$$ …………（2 分）

$y''(0)=\frac{1}{\mathrm{e}^2}.$ …………（2 分）

5．找出函数 $f(x)=\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$ 的可去间断点，并补充定义，使该函数在这些点处连续.

解：当 x 取任意正整数时，$f(x)=\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$ 均无意义，故函数的间断点有无数个，但可去间断点为极限存在的点，因而分子满足 $x-x^3=0$，即 $x=0,\pm1.$ 为可去间断点。 …………（4 分）

$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x-x^3}{\pi x}=\frac{1}{\pi}$，补充定义 $f(0)=\frac{1}{\pi}$， …………（2 分）

$\lim\limits_{x\to\pm1}\frac{x-x^3}{\sin(\pi x)}=\frac{2}{\pi}$，补充定义 $f(\pm)=\frac{2}{\pi}.$ …………（2 分）

四．解下列各题：（每小题 10 分，共 30 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right).$

解：$\dfrac{1}{n^2+n+n}+\dfrac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\le\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}$

$$\le\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+1}$$

….（4 分）

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+n}+\dfrac{2}{n^2+n+n}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\dfrac{1}{2}$， ….（2 分）

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+1}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+1}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\dfrac{1}{2}$， ….（2 分）

由夹逼定理 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}.$ ….（2 分）

2. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且 $x\in[0,2]$, $f(x)=x(x^2-4)$, 且若 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 有 $f(x)=kf(x+2)$, 则 k 为何值时， $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导？

解：当 $x\in[0,2]$ 时， $f(x)=x(x^2-4)$,，则 $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x(x^2-4)}{x}=-4,$

. ….（3 分）

当 $x\in[-2,0]$ 时， $x+2\in[0,2]$, $f(x)=kf(x+2)=k(x+2)(x^2+4x)$, ….（2 分）

则 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{k(x+2)(x^2+4x)}{x}=8k,$

….（3 分）

$\because f'_-(0)=f'_+(0)\therefore k=-\dfrac{1}{2}.$ ….（2 分）

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)$.

（1）证明：存在 $\xi\in[0,1]$, 使得 $f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{2})$;

（2）证明：存在 $\eta\in[0,1]$, 使得 $f(\eta)=f(\eta+\dfrac{1}{n})$($n>2$ 且 n 为正整数).

证明：（1）令 $F(x)=f(x)-f(x+\dfrac{1}{2})$, 则 $F(x)$ 在 $[0,\dfrac{1}{2}]$ 上连续，…………（1 分）

由最值定理 $F(x)$ 在 $[0,\dfrac{1}{2}]$ 上存在最大值 M 和最小值 m, 即对任意

$x\in[0,\frac{1}{2}]$，有 $m\le F(x)\le M$， …………（2 分）

$F(0)=f(0)-f(\frac{1}{2}),F(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-f(1),$ …………（1 分）

$m\le F(0)\le M,m\le F(\frac{1}{2})\le M$，即 $m\le\dfrac{F(0)+F(\frac{1}{2})}{2}\le M$，

由介值定理存在 $\xi\in[0,\frac{1}{2}]$，

使 $F(\xi)=\dfrac{F(0)+F(\frac{1}{2})}{2}=\frac{1}{2}[f(0)-f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{2})-f(1)]=0.$

即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})$； …………（2 分）

证明：（2）令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$，则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{n-1}{n}]$ 上连续，

由最值定理 $F(x)$ 在 $[0,\frac{n-1}{n}]$ 上存在最大值 M 和最小值 m，即对任意

$x\in[0,\frac{n-1}{n}]$，有 $m\le F(x)\le M$，

$F(0)=f(0)-f(\frac{1}{n}),F(\frac{1}{n})=f(\frac{1}{n})-f(\frac{2}{n}),\cdots F(\frac{n-1}{n})=f(\frac{n-1}{n})-f(1),$

$m\le F(0)\le M,m\le F(\frac{1}{n})\le M,\cdots m\le F(\frac{n-1}{n})\le M$，即

$m\le\dfrac{F(0)+F(\frac{1}{n})+\cdots+F(\frac{n-1}{n})}{n}\le M,$ …………（2 分）

由介值定理存在 $\eta\in[0,\frac{n-1}{n}]$，

$$F(\eta)=\frac{F(0)+F(\frac{1}{n})+\cdots+F(\frac{n-1}{n})}{n}$$

使 $=\frac{1}{n}[f(0)-f(\frac{1}{n})+f(\frac{1}{n})-f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n-1}{n})-f(1)]$

$=\frac{1}{n}[f(0)-f(1)]=0$

即 $f(\eta)=f(\eta+\frac{1}{n})(n>2)$. …………（2 分）