§3.6 协方差、相关系数和矩

一、协方差(Covariance)

1. 问题的提出

若随机变量 X 和 Y 相互独立,那么

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

若随机变量 X 和 Y 不相互独立

$$D(X \pm Y) = ?$$

$$D(X\underline{+}Y)=E[(X\underline{+}Y)-E(X\underline{+}Y)]^2$$

$$=E[(X-EX)\underline{+}(Y-EY)]^2$$

$$=E(X-EX)^2+E(Y-EY)^2$$

$$\underline{+}2E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

$$=D(X)+D(Y)\underline{+}2\boxed{E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]}.$$

协方差

2. 定义

$E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$称为随机变量X与Y的**协方差**，记为$\mathrm{cov}(X,Y)$，即

$$\mathrm{cov}(X,Y)=E\left[(X-EX)(Y-EY)\right]$$

对于任意两个随机变量X和Y

$$D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)\pm 2\mathrm{cov}(X,Y)$$

3. 协方差的计算公式

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

证明

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

$$=E[XY-YE(X)-XE(Y)+E(X)E(Y)]$$

$$=E(XY)-2E(X)E(Y)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y).$$

例1 已知（X，Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	0.3	0.2
1	0.4	0.1

求 $E(X), E(Y), \operatorname{cov}(X,Y)$.

解 $E(X) = 0.5 \qquad E(Y) = 0.3$

$$E(XY) = 0\times0\times0.3 + 0\times1\times0.2 + 1\times0\times0.4 + 1\times1\times0.1 = 0.1$$

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY) = 0.1 - 0.5\times0.3 = -0.05$$

例2 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度

函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}(x^2+\frac{1}{2}xy), & 0<x<1, 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求 (X,Y) 的协方差.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 dx\int_0^2 \frac{6}{7}x(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{7},$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 dx\int_0^2 \frac{6}{7}y(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y=\frac{8}{7},$$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^2 \frac{6}{7}xy(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y=\frac{17}{21},$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147},$

4. 性质（定理3.6.1）

1. $\operatorname{cov}(X,X)=D(X)$

2. $\operatorname{cov}(X,Y)=\operatorname{cov}(Y,X)$

3. $\operatorname{cov}(aX,bY)=ab\operatorname{cov}(X,Y)$, a,b为任意常数

4. $\operatorname{cov}(C,X)=0$, C为任意常数

5. $\operatorname{cov}(X_1+X_2,Y)=\operatorname{cov}(X_1,Y)+\operatorname{cov}(X_2,Y)$

（书P108反例）

6. 如果X与Y相互独立，则$\operatorname{cov}(X,Y)=0$，反之未必成立。

7. $D(aX\pm bY)=a^2D(X)+b^2D(Y)\pm 2ab\operatorname{cov}(X,Y)$

设随机变量X,Y的数学期望,方差(>0)都存在,

标准化: $X^* = \dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$ $\quad Y^* = \dfrac{Y-EY}{\sqrt{DY}}$

$E(X^*)=0,\quad D(X^*)=1$ $\quad E(Y^*)=0,\quad D(Y^*)=1$

$$\operatorname{cov}\left(X^*,Y^*\right)=E(X^*Y^*)-E(X^*)E(Y^*)$$

$$=E\left(\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}\cdot\frac{Y-EY}{\sqrt{DY}}\right)=\frac{E(X-EX)(Y-EY)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$$

二、相关系数

1. 定义3.6.2

设随机变量 X,Y 的数学期望，方差都存在，称

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

注意：ρ_{XY} 无量纲

为随机变量 X 与 Y 的 相关系数

例1(续) 已知（X，Y）的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.3	0.2
1	0.4	0.1

求 $E(X)$, $E(Y)$, $\operatorname{cov}(X,Y)$, ρ_{XY}

解 $E(X)=0.5$ $\quad E(Y)=0.3$ $\quad \operatorname{cov}(X,Y)=-0.15$

$D(X)=0.25$ $\quad D(Y)=0.21$

$$\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\frac{-0.05}{\sqrt{0.25}\sqrt{0.21}}=-\frac{\sqrt{21}}{21}$$

例2(续) 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度

函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{6}{7}\left(x^2+\dfrac{1}{2}xy\right), 0<x<1, 0<y<2, \\ 0, \qquad\qquad\qquad 其他\end{cases}$

求 (X,Y) 的协方差及相关系数.

解 $E(X)=\dfrac{5}{7}$, $\quad E(Y)=\dfrac{8}{7}$, $\quad \operatorname{cov}(X,Y)=-\dfrac{1}{147}$,

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 dx\int_0^2\frac{6}{7}x^2\left(x^2+\frac{1}{2}xy\right)dy=\frac{39}{70},$$

故 $D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\dfrac{39}{70}-\left(\dfrac{5}{7}\right)^2=\dfrac{23}{490}$,

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 dx\int_0^2 \frac{6}{7}y^2\left(x^2+\frac{1}{2}xy\right)\mathrm{d}y=\frac{34}{21},$$

故 $D(Y)=E(Y^2)-(EY)^2=\dfrac{34}{21}-\left(\dfrac{8}{7}\right)^2=\dfrac{46}{147},$

X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{69}.$

习题3.6

4. 设$D(X)=25, D(Y)=1, \rho_{XY}=0.4$, 求$D(X-2Y)$.

5. 设(X,Y)是二维正态分布的随机变量, 且$X\sim N(1,9)$, $Y\sim N(1,16)$, $\rho_{XY}=-\frac{1}{2}$, 设随机变量$Z=\frac{X}{3}+\frac{Y}{2}$, 求$E(Z), D(Z)$.

2. 性质 （定理3.6.2）

1. $|\rho_{XY}| \leq 1$

2. $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow \quad P(Y = aX + b) = 1 \quad (a \neq 0)$

称X与Y完全相关，即X与Y之间呈线性相关关系

3. 当$\rho_{XY} = 0$, 称X与Y不相关

即X与Y之间无线性相关关系（可能存在非线性关系）

见书P114例3.6.1

例 3.3.1 设随机变量$\Theta \sim U(-\pi, \pi)$, 令$X = \sin\Theta$, $Y = \cos\Theta$, 求ρ_{XY}.

解 由题意知, 随机变量Θ的密度函数为

$$f(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}, & -\pi < \theta < \pi, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

故

$$E(X) = E(\sin\Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta d\theta = 0,$$

$$E(Y) = E(\cos\Theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\theta d\theta = 0,$$

$$E(XY) = E(\sin\Theta\cos\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin\theta\cos\theta d\theta = 0,$$

类似可得$D(X) > 0, D(Y) > 0$, 又

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 0,$$

从而$\rho_{XY} = 0$, 即X与Y之间没有线性关系, 但X与Y满足关系式$X^2 + Y^2 = 1$.

3. 相关系数的意义

相关系数刻画了随机变量间线性关系的强弱程度.

当 $|\rho_{XY}|$ 较大时, X, Y 的线性相关程度较高.

当 $|\rho_{XY}|$ 较小时, X, Y 的线性相关程度较差.

当 $\rho_{XY} = 0$ 时, X 和 Y 不相关.

4. 注意

(1) 不相关与相互独立的关系

相互独立 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ **不相关** （书P108反例）

(2) 不相关的充要条件

1° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \rho_{XY} = 0$;

2° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$;

3° X, Y 不相关 $\Leftrightarrow E(XY) = E(X)E(Y)$.

例 设$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,试求 X 与 Y 的相关系数.

结论（命题3.6.1）

(1) 二维正态分布密度函数中,参数 ρ 代表了X 与 Y 的相关系数;

(2) 二维正态随机变量 X 与 Y 相关系数为零等价于 X 与 Y 相互独立.

例 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,试求 X 与 Y 的相关系数.

解 由 $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$\Rightarrow f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\ -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\ -\infty<y<+\infty.$$

$$\Rightarrow E(X)=\mu_1, E(Y)=\mu_2, D(X)=\sigma_1^2, D(Y)=\sigma_2^2.$$

而

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)$$

$$\cdot\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\dfrac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),\ u=\dfrac{x-\mu_1}{\sigma_1},$

$\mathrm{Cov}(X,Y)$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}\,tu+\rho\sigma_1\sigma_2u^2)\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}u$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$+\frac{\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}u\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty}t\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t\right)$$

$$=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{2\pi}\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{2\pi}=\rho\sigma_1\sigma_2.$$

于是 $$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=\rho.$$

二维正态分布

若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布.记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

练习册P18

1. 设A,B是随机试验E的两个事件，且$P(A)>0$，$P(B)>0$，随机变量X和Y的定义为

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生},\end{cases}$$

证明：若$\rho_{XY}=0$，则事件A与B相互独立.

三、随机变量的矩

1.定义3.6.4

设 X 和 Y 是随机变量,若$E(X^k)$, $k=1,2,\cdots$ 存在,称它为 X 的 k 阶原点矩,简称 k 阶矩.

若 $E\{[X-E(X)]^k\}$, $k=2,3,\cdots$ 存在,称它为 X 的 k 阶中心矩.

若 $E(X^kY^l)$, $k,l=1,2,\cdots$ 存在,称它为 X 和 Y 的$k+l$阶混合矩.

若 $E\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\}$, $k,l=1,2,\cdots$ 存在,称它为 X 和 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩.

2. 协方差矩阵

设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n$$

都存在,则称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 维随机变量的**协方差矩阵**.

由于 $c_{ij} = c_{ji}\ (i, j = 1,2,\cdots,n)$,所以协方差矩阵为对称的非负定矩阵.

协方差矩阵的应用

协方差矩阵可用来表示多维随机变量的概率密度，从而可通过协方差矩阵达到对多维随机变量的研究

第三章　多维随机变量
习 题 课

一、主要内容

二、重点与难点

三、典型例题

一、主要内容

二维随机变量

- 推广 → 多维随机变量的数字特征
- 定义
- 联合分布
  - 联合分布函数
  - 联合分布律
  - 联合概率密度
- 边缘分布 + 随机变量的相互独立性
- 两个随机变量的函数的分布

二、重点与难点

1.重点

二维随机变量的分布（联合分布、边缘分布）

随机变量的独立性

二维随机变量的函数的分布

多维随机变量的数字特征

2.难点

二维连续型随机变量的（函数的）分布

三、典型例题

例1 在10件产品中有2件一等品、7件二等品和一件次品，从10件产品中不放回地抽取3件，用 X 表示其中的一等品数，Y 表示其中的二等品数．求：

(1) (X,Y) 的联合分布律;

(2) X,Y 的边缘分布律;

(3) X 和 Y 是否独立;

解 由题设知 X 只能取 0, 1, 2,

Y 只能取 0, 1, 2, 3.

当 $i+j<2$ 或 $i+j>3$ 时,有

$$P\{X=i,Y=j\}=0.$$

当 $2\le i+j\le 3$ 时,由古典概率知

$$P\{X=i,Y=j\}=\frac{C_2^i C_7^j C_1^{3-i-j}}{C_{10}^3},$$

$$(i=0,1,2,\ j=0,1,2,3).$$

因此的 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0
2	$\frac{1}{121}$	$\frac{7}{120}$	0	0

(2) X,Y 的边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2	3	$P_{i\bullet}$
0	0	0	$\frac{21}{120}$	$\frac{35}{120}$	$\frac{56}{120}$
1	0	$\frac{14}{120}$	$\frac{42}{120}$	0	$\frac{56}{120}$
2	$\frac{1}{120}$	$\frac{7}{120}$	0	0	$\frac{8}{120}$
$P_{\bullet j}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{21}{120}$	$\frac{63}{120}$	$\frac{35}{120}$	1

(3) 因为 $P\{X=0, Y=0\}=0$,

$$P\{X=0\}P\{Y=0\}=\frac{56}{120}\times\frac{1}{120}\neq 0,$$

所以 X 与 Y 不相互独立.

例2 设随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} cx\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求常数 c;

(2) X 与 Y 是否独立?为什么?

(3) 求 $P\{X<1 \mid Y<2\}$;

(4) 求 (X,Y) 的联合分布函数;

(5) 求 $Z=X+Y$ 的密度函数;

(6) 求 $P\{X+Y<1\}$;

(7) 求 $P\{\min(X,Y)<1\}$.

解 (1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1$, 得

$$1 = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_0^y cx\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x = \frac{c}{2}\int_0^{+\infty} y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = \frac{c}{2}\cdot 2 = c,$$

$$\Rightarrow c = 1.$$

(2) $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_x^{+\infty} x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x\mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= \begin{cases} \int_0^y x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}\,x, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2} y^2 \mathrm{e}^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

由于在 $0 < x < y < +\infty$上, $f(x, y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$,

故 X 与 Y 不独立.

(3) $$P\{X<1 \mid Y<2\} = \frac{P\{X<1, Y<2\}}{P\{Y<2\}}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{1}\int_{-\infty}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\int_{-\infty}^{2} f_Y(y)\,\mathrm{d}y} = \frac{\int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{x}^{2} x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}{\int_{0}^{2}\frac{1}{2}y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y}$$

$$= \frac{1-2\mathrm{e}^{-1}-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}}{1-5\mathrm{e}^{-2}}.$$

(4) 由于 $F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$, 故有:

当 $x<0$ 或 $y<0$ 时,有 $F(x,y)=0$.

当 $0\le y<x<+\infty$ 时, 有

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

$$=\int_0^y \mathrm{d}v\int_0^v u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^y v^2\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$=1-\left(\frac{y^2}{2}+y+1\right)\mathrm{e}^{-y}.$$

当 $0 \le x < y < +\infty$ 时, 有

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \int_0^x \mathrm{d}u \int_u^y u\mathrm{e}^{-v}\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^x u(\mathrm{e}^{-u} - \mathrm{e}^{-y})\,\mathrm{d}u$$

$$= 1 - (x+1)\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}.$$

故得

$$F(x,y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ 1 - (\frac{y^2}{2} + y + 1)\mathrm{e}^{-y}, & 0 \le y < x < \infty, \\ 1 - (x+1)\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{-y}, & 0 \le x < y < \infty. \end{cases}$$

(5) 根据 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x$,

要被积函数 $f(x,z-x)$ 非零,只有当 $0<x<z-x$,即 $0<x<\frac{z}{2}$ 时,

从而有: 当 $z<0$ 时, $f_Z(z)=0$;

当 $z\geq 0$ 时, $f_Z(z)=\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x \quad =\mathrm{e}^{-z}\int_0^{\frac{z}{2}} x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$

$$=\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}};$$

因此 $$f_Z(z)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-z}+\left(\dfrac{z}{2}-1\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}} & z\geq 0,\\ 0, & z<0.\end{cases}$$

(6) $P\{X+Y<1\}=\int_{-\infty}^{1} f_Z(z)\,\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1 [\mathrm{e}^{-z}+(\frac{z}{2}-1)\mathrm{e}^{-\frac{z}{2}}]\,\mathrm{d}z = 1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}-\mathrm{e}^{-1}.$$

(7) $P\{\min(X,Y)<1\} = 1-P\{\min(X,Y)\geq 1\}$

$$=1-P\{X\geq 1, Y\geq 1\}$$

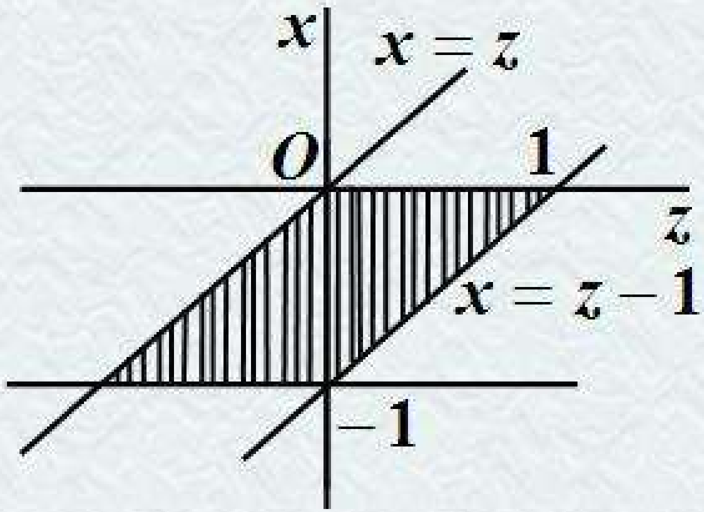
$$=1-\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{y} x\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}x$$

$$=1-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} y^2\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y = 1-\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1}.$$

例3 设随机变量 X 和 Y 分别在 $(-1,0)$ 和 $(0,1)$ 上服从均匀分布, 又设 X 和 Y 相互独立, 求 $Z = X + Y$ 的概率密度.

解 $f_X(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ $\quad f_Y(y) = \begin{cases} 1, & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) \mathrm{d}x.$$



由图知 $\begin{cases} -1 < x < 0, \\ 0 < z - x < 1, \end{cases}$

即 $\begin{cases} -1 < x < 0 \\ z-1 < x < z \end{cases}$ 时上述积分的被积函数不等于零.

并且有 $$f_Z(z) = \begin{cases} \int_{-1}^{z} \mathrm{d}x, & -1 < z < 0, \\ \int_{z-1}^{0} \mathrm{d}x, & 0 \le z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} z+1, & -1 < z < 0, \\ -z+1, & 0 \le z < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

例4 已知（X，Y）的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1
0	0.3	0.2
1	0.4	0.1

求 $E(X)$, $E(Y)$, $E(X-2Y)$, $E(3XY)$, $D(X)$, ρ_{XY}

解 $E(X)=0.5 \qquad E(Y)=0.3$

$$E(X-2Y)=E(X)-2E(Y)=0.5-2\times 0.3=-0.1$$

$$E(3XY)=3E(XY)$$

$$=3(0\times 0\times 0.3+0\times 1\times 0.2+1\times 0\times 0.4+1\times 1\times 0.1)=0.3$$

$D(X)=0.25 \qquad D(Y)=0.21$

例5 设二维连续型随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{6}{7}\left(x^2+\frac{1}{2}xy\right), & 0<x<1,\ 0<y<2,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求 (X,Y) 的协方差及相关系数.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1 dx\int_0^2\frac{6}{7}x\left(x^2+\frac{1}{2}xy\right)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(\frac{12}{7}x^3+\frac{6}{7}x^2\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{7},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 dx\int_0^2 \frac{6}{7}x^2(x^2+\frac{1}{2}xy)dy=\frac{39}{70},$$

故 $D(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{39}{70}-\left(\frac{5}{7}\right)^2=\frac{23}{490},$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 dx\int_0^2 \frac{6}{7}y(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y=\frac{8}{7},$$

$$E(Y^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}y^2 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 dx\int_0^2 \frac{6}{7}y^2(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y=\frac{34}{21},$$

故 $D(Y)=E(Y^2)-(EY)^2=\frac{34}{21}-\left(\frac{8}{7}\right)^2=\frac{46}{147},$

$$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^2 \frac{6}{7}xy(x^2+\frac{1}{2}xy)\mathrm{d}y=\frac{17}{21},$$

故 $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{17}{21}-\frac{5}{7}\times\frac{8}{7}=-\frac{1}{147},$

X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}=-\dfrac{\sqrt{15}}{69}.$