§9.1　曲线积分

一、填空题：

1. 设 L 为曲线 $y=-\sqrt{1-x^2}$，则 $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ＿＿＿＿＿＿.

2. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=a^2(a>0)$，则 $\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ ＿＿＿＿＿＿；

$\oint_L y^2\mathrm{d}s=$ ＿＿＿＿＿＿；$\oint_L (2x^2+3y^2)\mathrm{d}s=$ ＿＿＿＿＿＿.

3. 设 L 为曲线 $x^2+y^2=1(y\geqslant 0)$，则 $\int_L \mathrm{e}^{x^2+y^2}\arctan\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=$ ＿＿＿＿＿＿.

4. 设 Γ 为曲线 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8,\\ z=2,\end{cases}$ 则 $\oint_\Gamma \dfrac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}=$ ＿＿＿＿＿＿.

5. 设 Γ 为 $x^2+y^2=4$ 的正向，则 $\oint_\Gamma \dfrac{x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$ ＿＿＿＿＿＿.

6. 设 Γ 是从点 $(1,1,1)$ 到点 $(2,3,4)$ 的一段直线，则 $\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z=$

＿＿＿＿＿＿.

二、计算曲线积分 $I=\oint_L x\mathrm{d}s$，其中 L 为由直线 $y=x$ 及抛物线 $y=x^2$ 所围成的区域的整个边界.

三、计算曲线积分 $I=\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中：

(1) L 为圆周 $x^2+y^2=4x$；

(2) L 为区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant \sqrt{2-y^2}\}$ 的边界.

四、计算曲线积分 $I=\int_\Gamma \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中 Γ 为曲线 $\begin{cases}x=\mathrm{e}^t\cos t,\\ y=\mathrm{e}^t\sin t,\\ z=\mathrm{e}^t\end{cases}$ 上对应于 t 从 0 到 2 的一段弧.

五、计算曲线积分 $I=\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$,其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点$(-1,1)$到点$(1,1)$ 的一段弧.

六、计算曲线积分 $I=\int_L (x^2-y^2)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$,$L$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$.

(1) L 的方程为 $y=x^5$;

(2) L 的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}$;

(3) L 是从点 O 开始沿 $y=-x$ 经点 $B(-1,1)$,再沿 $y=\sqrt{2-x^2}$ 到点 A.

七、计算曲线积分 $I=\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$,其中 L 分别为

(1) 从点 $O(0,0)$ 开始沿 $y=1-|1-x|$ 经点 $A(1,1)$ 到点 $B(2,0)$ 的折线;

(2) 沿圆周$(x-1)^2+y^2=1$ 的上半部分从点 $O(0,0)$ 到点 $B(2,0)$ 的一段弧.

八、设 Γ 为曲线 $\begin{cases} x=t, \\ y=t^2, \\ z=t^3 \end{cases}$ 上对应于 t 从 0 到 1 的曲线弧,把对坐标的曲线积分 $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$ 化为对弧长的曲线积分.

§9.1 曲线积分(续:格林公式、曲线积分与路径无关的条件)

一、填空题:

1. 设 L 是 $|x|+|y|=1$ 沿逆时针方向一周,则 $\oint_L \frac{x\,dy-y\,dx}{|x|+|y|}=$ ____________.

2. 设 L 是圆 $x^2+y^2=a^2$ 沿逆时针方向一周,则 $\oint_L \frac{xy^2\,dy-x^2y\,dx}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ ____________.

3. 设 L 是圆 $x^2+y^2=9$ 沿逆时针方向一周,则:$\oint_L x\,dy=$ ____________;

$\oint_L x\,ds=$ ____________.

4. 设 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 顺时针方向一周,则

$$\oint_L(\sqrt{x+1}+2y)dx+(y\cos y+5x)dy= \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

5. $\int_{(1,0)}^{(2,1)}(2xy-y^4+3)dx+(x^2-4xy^3)dy=$ ____________.

6. 若 L 是光滑曲线,曲线积分 $\int_L(x^4+4xy^a)dx+(6x^{a-1}y^2-5y^4)dy$ 与路径无关,则实数 a 的值是____________.

7. $(x+2y)dx+(2x+y)dy=d($____________$)$.

二、计算曲线积分 $I=\oint_L(2x-y+4)dx+(5y+3x-6)dy$,其中 L 是以(0,0),(3,0)和(3,2)为顶点的三角形的正向边界.

三、求曲线积分 $I=\int_L\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})dy$,其中 L 是从点 $A(1,0)$ 沿上半圆周 $(x-2)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$ 到点 $B(3,0)$ 的路径.

四、计算曲线积分 $I=\oint_L\frac{y\,dx-(x-1)dy}{(x-1)^2+y^2}$,其中 L 分别为

(1) $x^2+y^2-2y=0$ 的正向;

(2) $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向.

五、验证：$\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{2x}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\ln x-\dfrac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y\,(x>0,y>0)$ 是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$ 及 $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(2,3)}\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{2x}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\ln x-\dfrac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y$.

六、利用曲线积分求摆线 $x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 与 x 轴所围图形的面积.

七、确定光滑闭曲线 C，使曲线积分 $\displaystyle\oint_C\left(x+\dfrac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x+\left(y+x-\dfrac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}y$ 达到最大值.

八、设 $\widehat{AO}$ 是点 $A(a,0)$ 到点 $O(0,0)$ 的上半圆周 $x^2+y^2=ax$，分别计算：

(1) $I_1=\displaystyle\int_{\widehat{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$；

(2) $I_2=\displaystyle\int_{\widehat{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-m)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-mx)\mathrm{d}y$；

(3) $I_3=\displaystyle\int_{\widehat{AO}}(\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-mx)\mathrm{d}y$.

§9.2 曲面积分

一、填空题(一)：

1. 设 Σ 为 $z=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 所截得的有限曲面，则 $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{\mathrm{d}S}{\sqrt{1+x^2+y^2}}=$ ________.

2. 设 Σ 是椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{4}=1$，其面积为 A，则曲面积分 $\oint\!\!\!\!\iint\limits_{\Sigma}(2xy+6x^2+4y^2+3z^2)\mathrm{d}S=$ ________.

3. 设 Σ 是平面 $x+y+z=6$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截得的部分平面，则 $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S=$ ________.

4. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=$ ________；$\oiint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=$ ________；$\oiint\limits_{\Sigma}\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}S=$ ________.

二、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+2y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是平面 $2x+2y+z-2=0$ 在第一卦限的部分.

三、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+3y+4z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

四、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 分别是

(1) 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围区域的整个边界；

(2) 锥面 $z^2=3(x^2+y^2)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

五、填空题(二)：

1. 设 Σ 为平面 $z=3$ 上满足 $x^2+y^2\leqslant 1$ 的区域，方向朝下，则 $\iint\limits_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________；$\iint\limits_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ __________；$\iint\limits_{\Sigma}(z+1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$ __________.

2. 设 Σ 为柱面 $x^2+y^2=1(x\geqslant 0)$ 被平面 $z=0,z=1$ 所截得的第一卦限部分的前侧，则 $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________；$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ __________；$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}z\mathrm{d}x=$ __________.

3. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 的外侧，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ __________；$\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=$ __________.

六、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x+2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 分别是

(1) 以 $A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$ 为顶点的三角形平面的上侧；

(2) 半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧.

七、设 $f(u)$ 是连续函数，Σ 是平面 $2x-2y+z=4$ 在第四卦限部分的上侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}[x+(y-z)f(xyz)]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[y+(x-z)f(xyz)]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[z+2(x-y)f(xyz)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

§9.2　曲面积分(高斯公式)　　§10.1　常数项级数(概念和性质)

一、填空题(一):

1. 设区域 Ω 由坐标面与 $x+y+z=1$ 围成,Σ 为 Ω 边界曲面的外侧,则 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

2. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$ 的外侧,则 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________;$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________;$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________.

3. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧,则 $\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ________.

4. 设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧,则 $\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

二、计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Σ 是 $z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的上侧.

三、计算曲面积分 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

四、设 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧,计算下列曲面积分:

(1) $I=\iint_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$;　　(2) $I=\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

五、设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$,利用高斯公式计算曲面积分 $I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}(x^4+y^4+z^4)\mathrm{d}S$.

六、填空题(二)：

1. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}(u_n^2-2u_n-3)=$__________.

2. 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，且$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(S_{n+1}+S_{n-1}-2S_n)=$__________.

3. 级数$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$的和是__________.

4. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的和是3，则级数$\sum\limits_{n=3}^{\infty}u_n$的和是__________.

5. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}t^n$的和是2，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2}$的和是__________.

6. 设x是一个任意给定的数，当$|x|<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$的和是__________.

7. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right]$的和等于__________.

七、判断下列级数的敛散性：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

八、判断下列级数的敛散性：

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.01}$.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n+e^n}{6^n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{2^n}$.