序号

一. 选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若当 $x \to 0$ 时，$x - \arctan x$ 与 ax^n 是等价无穷小，则 $a =$ (　　) B

A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

2. 下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是 (　　)C

A. $f(x) = |x|$　　B. $f(x) = x^3$

C. $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$　　D. $f(x) = \begin{cases} 1, -1 \le x \le 0 \\ 0, 0 < x \le 1 \end{cases}$

3. 如果 $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, 则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x} \mathrm{d}x =$ (　　)B

A. $-\frac{1}{x} + C$　　B. $\frac{1}{x} + C$

C. $-\ln x + C$　　D. $\ln x + C$

4. 曲线 $y = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ 渐近线的条数是(　　) C

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上均具有二阶连续导数，且 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则 $\int_{-a}^{a}[f''(x) + g''(x)]\mathrm{d}x =$ (　　) D

A. $f'(a) + g'(a)$　　B. $f'(a) - g'(a)$　　C. $2f'(a)$　　D. $2g'(a)$

二. 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 要使函数 $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ 在点 $x = 2$ 连续，则应补充定义 $f(2) =$ ____________ . $\frac{1}{4}$

2. 曲线 $y = \mathrm{e}^{-x^2}$ 在区间____________上是凸的. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

3．设函数 $y = x(x^3+2x+1)^2 + e^{2x}$, 则 $y^{(7)}(0) =$______________. $7!+2^7$

4. 曲线 $\begin{cases} x = 1+t^2 \\ y = t^3 \end{cases}$ 在 $t=2$ 点处的切线方程是__________. $y = 3x-7.$

5. 定积分 $\int_{-1}^{1}(x\cos x + \sqrt{1-x^2})\, dx =$__________. $\dfrac{\pi}{2}$

三．解下列各题：（每小题 10 分，共 40 分）

1．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x^2)} - \dfrac{1}{x^2}\right]$..

解：原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\ln(1+x^2)}{x^4}$ …………..2 分

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2x-\dfrac{2x}{1+x^2}}{4x^3} = \frac{1}{2}.$$ ………….3 分

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)^2}{\int_0^x te^{2t^2}dt}$.

解：原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\left(\int_0^x e^{-t^2}dt\right)\cdot e^{-x^2}}{xe^{2x^2}}$ ………….3 分

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{-t^2}dt}{x} = 2\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x^2}}{1} = 2.$$ …………..2 分

2. 求曲线 $y = \int_0^x \tan t\, d t (0 \le x \le \dfrac{\pi}{4})$ 的弧长.

解：$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+(y')^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\tan^2 x}dx$ …………..5 分

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x dx = \ln|\sec x + \tan x|\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1+\sqrt{2}).$$ ………..5 分

3. 设 $f(x)$ 满足 $\int e^x f(x)dx = -\ln(1+e^x)+C$, 求 $\int f(x)dx$.

解： $f(x)=\dfrac{-1}{1+\mathrm{e}^{x}}$, …………..4 分

$$\int f(x)\mathrm{d}x=-\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^{x}}\mathrm{d}x=\int\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$$ …………..3 分

$$=\ln(1+\mathrm{e}^{-x})+C.$$ …………..3 分

4. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\int_{-\infty}^{c}x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$, 求常数 c.

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\mathrm{e}^{2c}$, ………….4 分

$\int_{-\infty}^{c}x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=(\dfrac{c}{2}-\dfrac{1}{4})\mathrm{e}^{2c}$ …………. 4 分

$c=\dfrac{5}{2}$. …………. 2 分

四．解下列各题：（每小题 10 分，共 30 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$, 且 $F(x)=\int_{a}^{x}f(t)\mathrm{d}t-\int_{x}^{b}\dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$, 求证：

（1） $\forall x\in[a,b], F'(x)\geq 2$;

（2） $F(x)$ 在 (a,b) 内恰有一个零点.

证明：（1） $F'(x)=f(x)+\dfrac{1}{f(x)}\geq 2\sqrt{f(x)\cdot\dfrac{1}{f(x)}}=2$, ……3 分

（2） $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 ……1 分

$$F(a)=\int_{a}^{a}f(t)\mathrm{d}t-\int_{a}^{b}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=-\int_{a}^{b}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t<0,$$ ……2 分

$$F(b)=\int_{a}^{b}f(t)\mathrm{d}t-\int_{b}^{b}\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=\int_{a}^{b}f(t)\mathrm{d}t>0,$$ ……2 分

由零点定理， $F(x)$ 在 (a,b) 内至少有一个零点. ……1 分

又 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上严格单调增，从而 $F(x)$ 在 (a,b) 内恰有一个零点.

……1 分

2. 设直线 $y=ax(0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1, 它们与直线 $x=1$ 围成图形的面积为 S_2.

（1）确定 a 的值，使 $S=S_1+S_2$ 取得最小值，并求此最小值；

（2）求该平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

解：$\begin{cases} y=ax \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow (0,0),(a,a^2)$ ……..2 分

$$S=\int_0^a (ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_a^1 (x^2-ax)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^3}{3}-\frac{a}{2}+\frac{1}{3},$$

$S'(a)=a^2-\frac{1}{2}=0, \Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 唯一驻点

$S''(a)=2a>0,$ 最小值 $S(\frac{\sqrt{2}}{2})=\frac{2-\sqrt{2}}{6}.$ ……..4 分

$$V_x=\int_0^{\sqrt{2}/2} \pi[(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2-(x^2)^2]\mathrm{d}x+\int_{\sqrt{2}/2}^1 \pi[(x^2)^2-(\frac{\sqrt{2}}{2}x)^2]\mathrm{d}x$$

$=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi.$ ……..4 分

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，且 $f(0)=f(1)=0,$ 证明：存在 $\xi\in(0,1),$ 使得 $f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0.$

证明：令 $F(x)=xf'(x),$ 则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微， ……..3 分

$f(0)=f(1)=0,$ $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，由罗尔定理存在 $\eta\in(0,1),$ 使 $f'(\eta)$=0

……..3 分

$F(0)=F(\eta)=0,$ 由罗尔定理存在 $\xi\in(0,\eta)\subset(0,1),$ 使 $F'(\xi)$=0

$F'(x)=f'(x)+xf''(x),$

$\therefore \xi\in(0,1), f'(\xi)+\xi f''(\xi)$=0. ……..4 分