§3.2 边缘分布及随机变量的独立性

一、边缘分布函数

二、离散型随机变量的边缘分布律

三、连续型随机变量的边缘概率密度函数

四、随机变量的独立性

一、边缘分布函数

对于二维随机变量(X,Y),随机变量X和Y各自的分布函数称为(X,Y)关于X和Y的边缘分布函数

记为$F_X(x),F_Y(y)$

故边缘分布函数$F_X(x),F_Y(y)$可由(X,Y)的分布函数所确定

若二维随机变量(X,Y)的

$$F(x,y)=P\{X\le x,Y\le y\}.$$

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{X\le x,Y<+\infty\}$$

$$=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

同理 $F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=F(+\infty,y)$

例3.1.2（续） 设二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

（1）求常数A；

（2）求联合分布函数 $F(x,y)$；

（3）求 $P(X\le Y)$；

（4）求X和Y的边缘分布函数.

(4) $$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{y\to+\infty}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0\\ \lim\limits_{y\to+\infty}0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & y>0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}0, & \text{其他}.\end{cases}=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

二、离散型随机变量的边缘分布律

定义 设离散型随机变量X和Y的联合分布律

为 $P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$

记
$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ i=1,2,\cdots;$$

$$P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij},\ j=1,2,\cdots.$$

补例1 已知下列联合分布律求其边缘分布律.

$X \backslash Y$	0	1
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$

解

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\bullet}=P\{X=x_i\}$
0	$\frac{2}{7}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$
1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$
$p_{\bullet j}=P\{Y=y_j\}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{7}$	1

X和Y的边缘分布律可由(X,Y)的分布律确定

补例2 把两封信随机地投入已经编好号的3个邮筒内，设 X,Y 分别表示投入第1,2个邮筒内信的数目，求 (X,Y) 的分布律及边缘分布律.

解 X,Y 各自的取值为 $0,1,2$. 且 $X+Y\le 2$

再由古典概率计算得：

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}\qquad P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=0,Y=2\}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}\qquad P\{X=1,Y=1\}=\frac{2}{3^2}=\frac{2}{9}$$

$P\{X=1,Y=0\},P\{X=2,Y=0\}$ 可由对称性求得

所有计算结果列表如下：

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

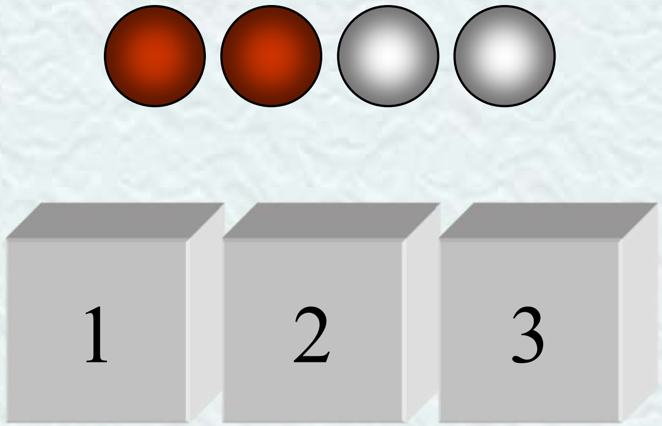
(X,Y)关于Y的边缘分布律

(X,Y)关于X的边缘分布律

补例3 将 2 只红球和 2 只白球随机地投入已经编好号的3个盒子中去,设X表示落入第1个盒子内红球的数目，Y表示落入第2个盒子内白球的数目,求(X,Y)的分布律及边缘分布律.

解　X,Y各自的取值为0 , 1 , 2.

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{\binom{2}{1}\cdot 2\cdot\binom{2}{1}\cdot 2}{3^4}=\frac{16}{81}$$



类似地计算出其他结果：

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{9}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

比较发现，补例2与补例3两者有完全相同的边缘分布，而联合分布却是不相同的.

注意 联合分布 $\underset{\not\longleftarrow}{\longrightarrow}$ 边缘分布

三、连续型随机变量的边缘概率密度函数

定义 对于连续型随机变量 (X,Y), 设它的概率密度函数为 $f(x,y)$, 由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

记
$$\boxed{f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}y,}$$

称其为随机变量 (X,Y) 关于 X 的边缘概率密度函数.

同理可得 Y 的边缘分布函数

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

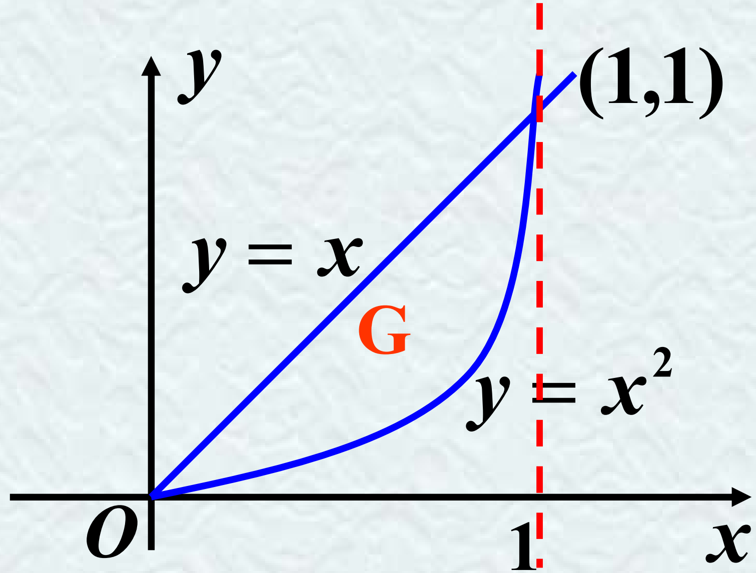
Y 的边缘概率密度函数.

例3.2.3 设(X,Y)在区域$G=\left\{(x,y)\,\middle|\,0\le x\le 1, x^2\le y\le x\right\}$上服从均匀分布，求边缘概率密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$.

解: $\because S_G=\int_0^1\left(x-x^2\right)dx=\left.\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right|_0^1=\frac{1}{6}$

$\therefore$ 联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

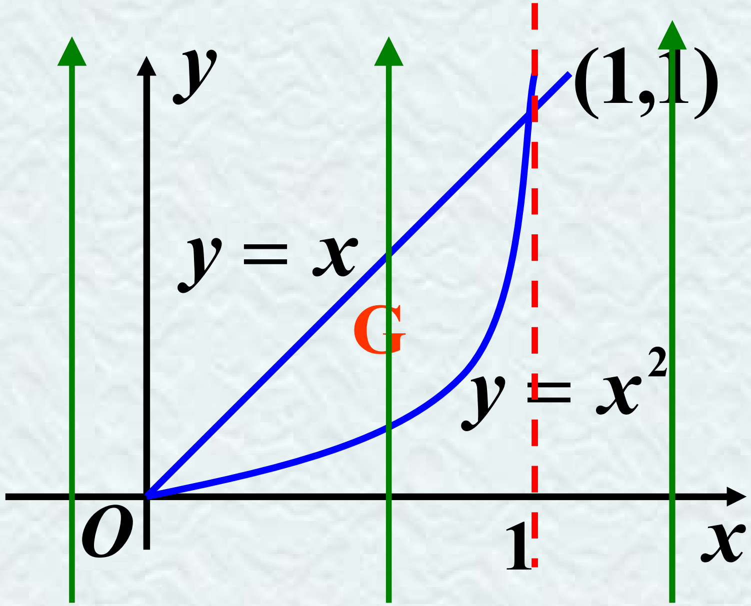


例3.2.3 设(X,Y)在区域$G=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1, x^2\le y\le x\}$上服从均匀分布，求边缘概率密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$.

解: 联合概率密度函数 $f(x,y)=\begin{cases}6, & 0\le x\le 1, x^2\le y\le x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

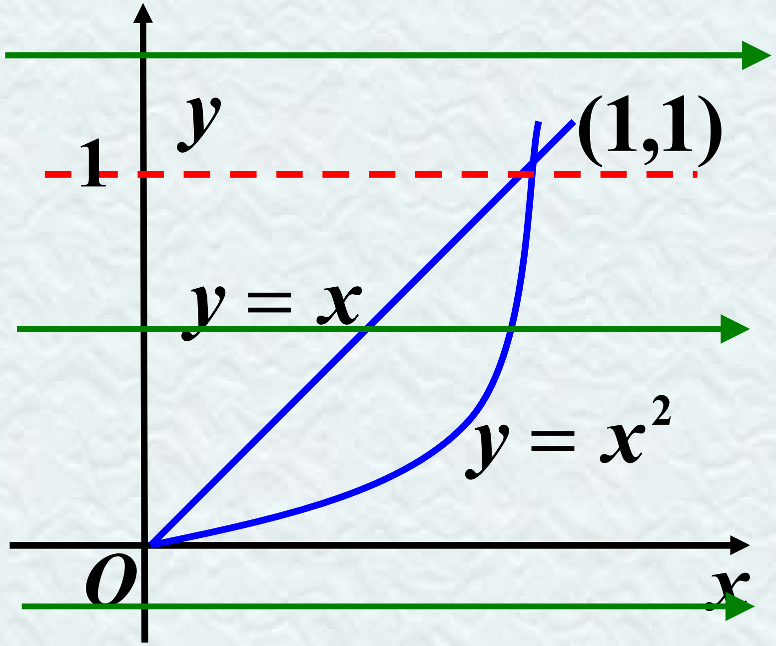
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$=\begin{cases}\int_{x^2}^{x} 6\,\mathrm{d}\,y=6(x-x^2), & 0\le x\le 1\\ \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}\,y=0, & x<0或x>1\end{cases}$$



联合概率密度函数:

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}\int_y^{\sqrt{y}} 6\,\mathrm{d}x = 6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1\\ \int_{-\infty}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0, & y<0 \text{ 或 } y>1\end{cases}$$

练习 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}4.8y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度函数 $f_X(x), f_Y(y)$.

补例4 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty,$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 都是常数,且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,$

$-1<\rho<1.$

试求二维正态随机变量 的边缘概率密度 .

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}\,y,$

由于 $$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2}\mathrm{d}y,$$

令 $$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$$

则有 $$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

即 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

同理可得

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且都不依赖于参数 ρ.

四、随机变量的独立性

1.定义3.2.2

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变 量(X,Y)的联合分布函数及边缘分布函数.

若对于所有 $x,y \in R$,

有 $$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即 $$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

2.说明（命题3.2.1，定理3.2.1）

(1) 若离散型随机变量 (X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, \quad i,j=1,2,\cdots.$$

X 和 Y 相互独立

$\Longleftrightarrow$ 对于(X,Y)的所有可能的取值(x_i, y_i)

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

即 $p_{ij}=p_{i\bullet}\cdot p_{\bullet j} \quad i,j=1,2,\cdots$

(2) 设连续型随机变量 (X,Y)的联合概率密度为 $f(x,y)$,边缘概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$,则有

$$X\text{ 和 }Y\text{ 相互独立} \Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\quad x,y\in R.$$

(3) X 和 Y 相互独立, $h(\cdot)$和$g(\cdot)$都是R上的连续函数,

则$h(X)$ 和 $g(Y)$也相互独立. （定理3. 2. 1）

注

随机变量相互独立 ⟺ 联合分布等于边缘分布的乘积

问题

（1）如何判断两个随机变量是否相互独立？

（2）如何由相互独立的随机变量的边缘分布求它们的联合分布？

注意　联合分布 $\longrightarrow$ 边缘分布

联合分布 $\longleftarrow$ 边缘分布：独立性+

例3.1.2(续)（5）判断X和Y是否相互独立.

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-e^{-y}, & y>0\\ 0 & \text{其他}.\end{cases}$$

$\because F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$ 故X与Y相互独立.

补例3：

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_{\cdot j}$
0	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{16}{81}$	$\frac{16}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{4}{81}$	$\frac{4}{81}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{9}$
$p_{i\cdot}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

$$\because P\{X=i,Y=j\}=P\{X=i\}P\{Y=j\},\ i,j=0,1,2$$

故X与Y相互独立.

补例2:

$Y \backslash X$	0	1	2	$p_{\bullet j}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
$p_{i\bullet}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	

$$\because P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{9}\neq\frac{16}{81}=P\{X=0\}P\{Y=0\}$$

故X与Y不独立.

例3.2.3(续)

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}6(x-x^2), & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}6(\sqrt{y}-y), & 0\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$\because f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$　故X与Y不独立.

例3.2.5 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

（1）X与Y的边缘密度函数是一元正态分布；

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

（2）X与Y相互独立的充要条件是$\rho=0$.

补例5　设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 (X, Y) 的分布律.

解　因为 X 与 Y 相互独立，所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}.$$

$$P\{X=1, Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\}=0.3\times 0.6=0.18,$$

$$P\{X=1, Y=4\}=P\{X=1\}P\{Y=4\}=0.3\times 0.4=0.12,$$

$$P\{X=3,Y=2\}=P\{X=3\}P\{Y=2\}=0.7\times0.6=0.42,$$

$$P\{X=3,Y=4\}=P\{X=3\}P\{Y=4\}=0.7\times0.4=0.28.$$

因此 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

注意 联合分布律 $\xrightarrow{\text{求行和、列和}}$ 边缘分布律

联合分布律 $\xleftarrow[\text{独立性+}]{}$ 边缘分布律

补例6 设随机变量 X 和 Y 相互独立，并且 X 服从 $N(a,\sigma^2)$，Y 在 $[-b,b]$ 上服从均匀分布，求 (X,Y) 的联合概率密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立，

所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

又 $f_X(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty<x<\infty;$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2b}, & -b\le y\le b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

得 $$f(x,y)=\frac{1}{2b}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

其中 $-\infty<x<\infty,\quad -b\le y\le b.$

当 $|y|>b$ 时，$f(x,y)=0.$

例3.2.4 已知 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β

(1) 求 α 与 β 应满足的条件;

(2) 若 X 与 Y 相互独立,求 α 与 β 的值.

解 (1)由分布律的性质知 $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \quad \alpha + \beta = \dfrac{1}{3}.$

解 (2)先求X，Y的边缘分布律

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	α	β	$\frac{1}{3} + \alpha + \beta$
$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9} + \alpha$	$\frac{1}{18} + \beta$	$\frac{2}{3} + \alpha + \beta$

(2) 因为 X 与 Y 相互独立, 所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3)$$

特别有

$$p_{12} = p_{1\bullet} \cdot p_{\bullet 2} \Rightarrow \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} + \alpha\right) \Rightarrow \alpha = \frac{2}{9},$$

又 $\alpha + \beta = \dfrac{1}{3}$, 得 $\beta = \dfrac{1}{9}$.

练习册P15 二、计算题

1. 设随机变量 X_1,X_2相互独立且具有相同的分布， $X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, (其中 $0<p<1$),

随机变量 $X_3=\begin{cases} 0, & \text{若 } X_1+X_2\text{为奇数} \\ 1, & \text{若} X_1+X_2\text{为偶数} \end{cases}$， p为何值时，随机变量 X_1,X_3相互独立?

二维随机变量的推广

1.分布函数

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\},$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为任意实数.

2.概率密度函数

若存在非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 使对于任意实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$
$$=\int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

则称 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度函数.

3.边缘分布函数

$$F_{X_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \cdots, \infty)$$

称为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1 的**边缘分布函数**.

4.边缘概率密度函数

若 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的概率密度,

则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 关于 X_1 的边缘概率密度函数为

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3\cdots\mathrm{d}x_n,$$

5. 相互独立性

称 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是相互独立的，

若对于所有的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 有

（1） $F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) F_{X_2}(x_2) \cdots F_{X_n}(x_n),$

（2）若均为离散型r.v.，则它们的联合分布律为

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n)$$

（3）若均为连续型r.v.，则它们的联合概率密度函数为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \cdots f_{X_n}(x_n)$$

6.重要结论

定理 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立,则 $X_i(1,2,\cdots,m)$ 和 $Y_j(j=1,2,\cdots,n)$ 相互独立.又若 h, g 是连续函数,则 $h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立.