2019

苏州大学 高等数学一（上）期中试卷　　共 6 页

考试形式：闭卷

院系__________年级 __________ 专业 __________

学号__________姓名__________

特别提醒：请将答案填写在答题纸上，若填写在试卷纸上无效.

一.　选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在定义域内（　　）

A. 有上界无下界　　B. 有下界无上界

C. 有界且 $-\dfrac{1}{2}\le f(x)\le\dfrac{1}{2}$　　D. 有界且 $-\dfrac{1}{5}\le f(x)\le\dfrac{1}{5}$

2. 则下列命题正确的是（　　）

A. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，而数列 $\{y_n\}$ 发散，则数列 $\{x_n+y_n\}$ 与数列 $\{x_ny_n\}$ 都发散

B. 若数列 $\{x_n\}$ 与数列 $\{y_n\}$ 均发散，则数列 $\{x_n+y_n\}$ 与数列 $\{x_ny_n\}$ 可能都收敛

C. 若数列 $\{x_n\}$ 发散，则该数列一定无界

D. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛于 0，而 $\{y_n\}$ 为任意数列，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$

3. 当 $x\to1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是(　　)

A. 2　　B. 0　　C. ∞　　D. 不存在但不为 ∞

4. 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处可导，且 $f'(x_0)=-2$，则 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=$（　　）

A. 2　　B. $\dfrac{1}{2}$　　C. -2　　D. $-\dfrac{1}{2}$

5. 下列函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导的是（　　）

A. $y=|x|$　　B. $y=\sqrt[3]{x^5}$　　C. $y=\sqrt[3]{x^2}$　　D. $y=\begin{cases}x^2+1, x\ge0\\ x^3, x<0\end{cases}$

二.　填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 当 $x\to0$ 时，$2\sin x-\sin 2x$ 与 x^k 为等价无穷小，则 $k=$__________.

2. 已知 $y=\varphi(\sin x^n)$，且 $\varphi'(u)$ 存在，则 $dy=$__________.

3. 已知函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(1-\cos 10x)}{e^{x^2}-1}, & x\neq 0\\ 50, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=$__________.

4. 设函数$y=x(x^3+2x+1)^2+e^{2x}$, 则$y^{(7)}(0)=$__________.

5. 设$f(u)$可导，$y=f(x^2)$当自变量x在$x=-1$处取得增量$\Delta x=-0.1$时，相应的函数增量Δy的线性主部为0.1, 则$f'(1)=$__________.

三． 解下列各题：（每小题8分，共40分）

1．求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}$;　　　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\ln^3(1+x)}\left[\left(\dfrac{2+\cos x}{3}\right)^x-1\right]$.

2. 若$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2+1}{2x+1}-ax+b)=3$, 求$a,b$的值.

3．求曲线$\begin{cases}x=\dfrac{3at}{1+t^2},\\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^2}\end{cases}$在相应于$t=2$的点处的法线方程.

4. 设函数$y=y(x)$由方程$e^y+xy=e$所确定，求$y''(0)$.

5．找出函数 $f(x)=\dfrac{x-x^3}{\sin(\pi x)}$的可去间断点，并补充定义，使该函数在这些点处连续.

四．解下列各题：（每小题10分，共30分）

1．求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)$.

2．设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，且$x\in[0,2]$, $f(x)=x(x^2-4)$, 且若$\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 有$f(x)=kf(x+2)$, 则$k$为何值时，$f(x)$在点$x=0$处可导？

3. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)$.

（1）证明：存在$\xi\in[0,1]$, 使得$f(\xi)=f(\xi+\dfrac{1}{2})$;

（2）证明：存在$\eta\in[0,1]$, 使得$f(\eta)=f(\eta+\dfrac{1}{n})(n>2$且$n$为正整数).

参考答案

一、选择

1. C　　2. B　　3. D　　4. A　　5. B

二、填空

1. $k=3$　　2. $dy=\varphi'(\sin x^n)\cos x^n nx^{n-1}dx$

3. $a=1$　　4. $7!+2^7$

5. $\frac{1}{2}$

三、解下列各题

1. (1) e^6　　(2) $-\frac{1}{6}$

2. $a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{13}{4}$

3. $y-\frac{12}{5}a=\frac{3}{4}(x-\frac{6}{5}a)$

4. $\frac{1}{e^2}$

5. 可去间断点：$0,\pm1$；补充定义 $f(0)=\frac{1}{\pi}$，$f(1)=\frac{2}{\pi}=f(-1)$

四、解下列各题

1. $\frac{1}{2}$

2. $k=-\frac{1}{2}$

3. （1）$g(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{2})$，$g(0)=f(0)-f(\frac{1}{2})$，$g(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{2})-f(0)$

(2) $h(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$，$h(0)+h(\frac{1}{n})+h(\frac{2}{n})+\cdots+h(\frac{n-1}{n})=0$