§7.1 多元函数的极限与连续　§7.2 偏导数和全微分

一、填空题：

1. 函数 $z=\arcsin 2x+\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为____________.

2. 设三角形区域 D 由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 所围成，则 D 可用 X 型和 Y 型区域两种形式分别表示为

$D=$________________________，$D=$________________________.

3. 函数 $z=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}$ 在__________________处是间断的.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$____________.

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$____________.

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{y}=$____________.

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$____________.

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-x+xy}{x^2+y^2}=$____________.

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=$____________.

10. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{xy}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}(a\neq 0)=$________________.

二、讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点(0,0)处的连续性.

三、选择题：

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点(0,0)处(　　).

A. 连续，偏导数存在　　B. 连续，偏导数不存在

C. 不连续，偏导数存在　　D. 不连续，偏导数不存在

2. 已知函数 $z=x^2e^y+(x-1)\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $z_x(1,0)=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

四、求下列函数的偏导数：

1. $z=x^2y-xy^3$.　　2. $z=\ln\cos(2x+y)$.

3. $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.　　4. $u=\displaystyle\int_{xz}^{yz}e^{t^2}\,dt$.

五、求旋转曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ 与平面 $x=1$ 的交线在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向之间的夹角.

六、求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$：

1. $z=x^4+y^4-4x^2y^2$.

2. $z=x\arcsin\sqrt{y}$.

3. $z=\mathrm{e}^{xy^2}$.

七、求函数 $z=5x^2+y^2$ 当 $x=1$，$y=2$，$\Delta x=0.005$，$\Delta y=0.1$ 时的全增量和全微分.

八、设二元函数 $z=x\mathrm{e}^{x+y}+(x+1)\ln(1+y)$，求 $\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}z|_{(1,0)}$.

九、设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(1) 求 $f_x(0,0)$，$f_y(0,0)$；

(2) 讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微.

§7.3 复合函数和隐函数的偏导数

一、用链式法则求下列函数的导数或偏导数：

1. $z=u^v, u=x+2y, v=x-y$，求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

2. $z=\frac{y}{x}, x=\mathrm{e}^t, y=1-\mathrm{e}^{2t}$，求$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$.

二、求下列复合函数的一阶偏导数：

1. $u=f(x,xy,xyz)$，求$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$.

2. $z=f\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 f,φ 均可微，求$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

三、设函数 $z=f(x,y)$ 在点$(1,1)$处可微，且 $f(1,1)=1, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)}=3$，$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

四、设函数 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

五、设函数 $z=yf(\mathrm{e}^x,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

六、求下列方程所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的一阶导数：

1. $x^2+xy-e^y=0$.　　2. $x^y=y^x$.

七、求方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导数.

八、已知 $x^2+y^2+z^2=4z$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

九、已知 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}\mathrm{d}t=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

十、设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^z-xz=0$ 所确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

十一、求由下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数：

1. $\begin{cases}x+y+z=0,\\ xyz=1,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2. $\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\ v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$ 其中 f,g 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

§7.4 可微函数的几何性质

一、填空题：

1. 曲线$\begin{cases} z=\dfrac{1}{4}(x^2+y^2), \\ y=4 \end{cases}$在点(2,4,5)处的切线与 x 轴的夹角为__________.

2. 若曲面 Σ:$F(x,y,z)=0$ 上点 Q 处的法线经过曲面外一点 $P(a,b,c)$,则点 $Q(x,y,z)$ 必须满足__________.

二、求曲线 Γ:$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=\dfrac{9}{4}, \\ 3x^2+(y-1)^2+z^2=\dfrac{17}{4} \end{cases}$ 在点 $M\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$处的切线与法平面方程.

三、证明:曲线 Γ:$\begin{cases} x^2-z=0, \\ 3x+2y+1=0 \end{cases}$ 上点(1,−2,1)处的法平面与直线$\begin{cases} 9x-7y-21z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$平行.

四、求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点(1,2,0)处的切平面和法线方程.

五、求曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 的切平面,使之平行于平面 $2x-3y+2z=1$.

六、求由曲线$\begin{cases} 3x^2+2y^2=12, \\ z=0 \end{cases}$绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外侧的单位法向量.

七、设直线 $l:\begin{cases}x+y+b=0,\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求实数 a,b 的值.

八、求下列函数在指定点 M_0 处沿指定方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数：

(1) $z=xe^{xy}$，$M_0(-3,0)$，$\boldsymbol{l}$ 为从点 $(-3,0)$ 到点 $(-1,3)$ 的方向向量；

(2) $u=x\arctan\dfrac{y}{z}$，$M_0(1,2,-2)$，$\boldsymbol{l}=(1,1,-1)$.

九、求函数 $z=x^2-y^2$ 在点 $M(1,1)$ 处沿与 x 轴正向成角 $\alpha=60^\circ$ 的方向向量 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数.

十、设 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量，求函数 $u=\dfrac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

十一、二元函数 $u=x^2-xy+y^2$ 在点 $(-1,1)$ 处沿哪个方向变化得最快？沿哪个方向 u 的值不变？

§7.5 多元函数的极值

一、选择题：

1. 若点(x_0,y_0)使 $f_x(x,y)=0$ 且 $f_y(x,y)=0$ 成立，则(　　).

A. (x_0,y_0)是 $f(x,y)$的极值点　　B. (x_0,y_0)是 $f(x,y)$的最小值点

C. (x_0,y_0)是 $f(x,y)$的最大值点　　D. (x_0,y_0)可能是 $f(x,y)$的极值点

2. 函数 $z=xy(1-x-y)$的极值点是(　　).

A. $\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$　　D. $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

3. 已知函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$的某个邻域内连续，且$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则(　　).

A. 点$(0,0)$不是 $f(x,y)$的极值点

B. 点$(0,0)$是 $f(x,y)$的极大值点

C. 点$(0,0)$是 $f(x,y)$的极小值点

D. 根据所给条件无法判断点$(0,0)$是否为 $f(x,y)$的极值点

二、求下列函数的极值：

1. $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$.

2. $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

三、求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$在闭域$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$内的最大值和最小值，并对上述计算结果作出几何解释.

四、设有曲线 $L:\begin{cases} z=x^2+3y^2, \\ z=4-3x^2-y^2, \end{cases}$ 求 L 在 xOy 平面上的投影，并求 L 上的 z 坐标的最大值和最小值.

五、在 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

六、在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 内所有内接长方体(各棱分别平行于坐标轴)中，求其体积最大者.

七、欲造一个无盖的长方体容器，已知底部造价为每平方米 3 元，侧面造价均为每平方米 1 元，现想用 36 元造一个容积最大的容器，求它的尺寸.