第二章　一维随机变量及其分布

§2.1　一维随机变量与分布函数

一、随机变量的概念

1. 为什么引入随机变量?

目的：

量化随机事件

运用微积分工具来研究随机现象

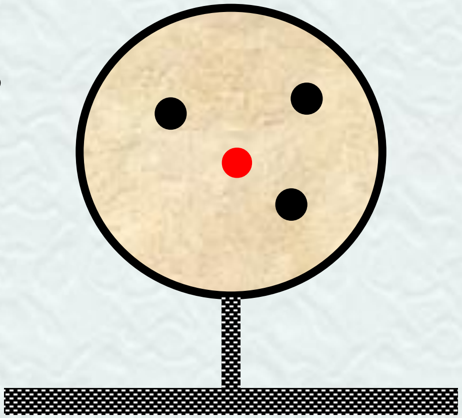
引例　请适当定义一个变量（函数），使之与下列各随机试验的结果对应起来.

引例1　抛掷骰子，观察出现的点数.

$$X = X(e) = \begin{cases} 1, & e = 1 \\ 2, & e = 2 \\ \vdots & \\ 6, & e = 6 \end{cases}$$

引例2 连续射击, 记录直至命中时的射击次数.

试验结果： 1，2，3， …

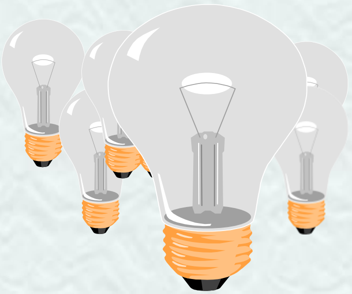


定义变量X 为射击次数,

$$X = X(e) = \begin{cases} 1, & e = 1 \\ 2, & e = 2 \\ 3, & e = 3 \\ \vdots & \end{cases}$$

引例3 在一批灯泡中任取一只，测试它的寿命.

试验结果：$\{t \mid t \geq 0\} = [0, +\infty)$



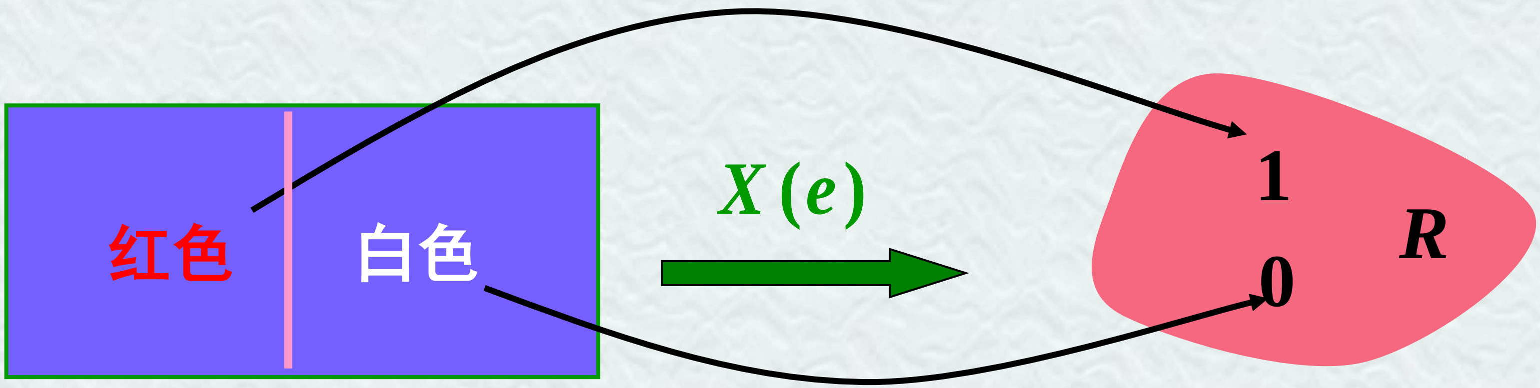
定义变量X —— 灯泡的寿命，

$$X = X(t) = t, \quad t \geq 0.$$

引例4 在一装有红球、白球的袋中任摸一个球,观察摸出球的颜色.

$$\underbrace{\{\text{红色、白色}\}}_{\text{非数量}} \xrightarrow{?} X(e)=\begin{cases}1, & e=\text{红色},\\ 0, & e=\text{白色}.\end{cases}$$

数量化



发现:

不管随机试验的结果是数量的，还是非数量的;

是有限的，还是无限的;

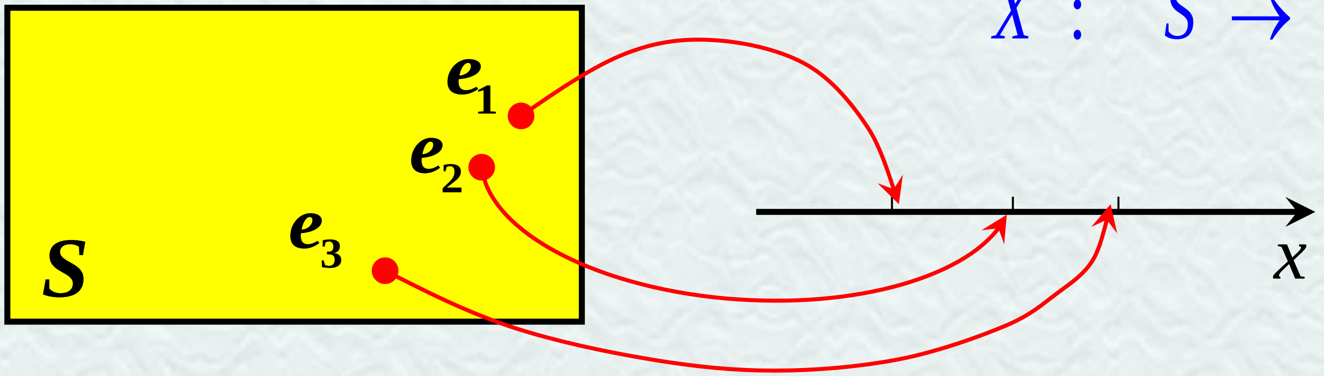
是离散的，还是连续的,

随机试验的结果都可以用一个变量的取值来表示，这个变量就叫做**随机变量**.

2. 随机变量的定义

定义 设$X = X(e)$是定义在样本空间S上的实值函数，称 $X = X(e)$ 为随机变量.

$X: S \to R$



随机变量通常用大写字母X，Y，Z，...等表示，其取值用小写字母 x，y，z，...等表示.

随机事件可以用随机变量的某种取值表示

引例3 在一批灯泡中任取一只，测试它的寿命.

随机变量 X —— 灯泡寿命

事件A = "灯泡的寿命超过1000小时" $=\{X > 1000\}$

B = "灯泡的寿命不超过500小时" $=\{X \le 500\}$

C = "灯泡的寿命大于500但不超过1000小时"

$\vdots$

$=\{500 < X \le 1000\}$

$$\{X = x\}$$
$$\{X \le x\}$$
$$\{X < x\}$$
$$\{X \ge x\}$$
$$\{X > x\}$$

$$\{x_1 < X \le x_2\}$$
$$\{x_1 \le X < x_2\}$$
$$\{x_1 \le X \le x_2\}$$
$$\{x_1 < X < x_2\}$$

量化随机事件

随机事件

二、随机变量的分布函数

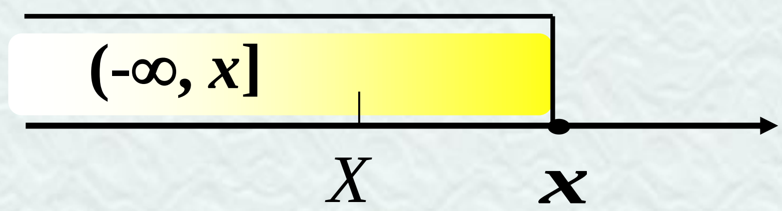
1. 定义 设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数

$$F(x) = P\{X \le x\}, \quad -\infty < x < +\infty$$

称为随机变量 X 的分布函数.

$F(x)$ 的定义域是整个实数轴.

$F(x)$ 表示随机变量 X 的取值落在区间 $(-\infty, x]$ 上的概率.



2. 利用分布函数求各种随机事件的概率

已知随机变量 $X \sim F(x) = P\{X \le x\}$

(1) $P\{X \le a\} = F(a)$

(2) $P\{X > a\} = 1 - P\{X \le a\} = 1 - F(a)$

(3) $P\{X < a\} = \lim\limits_{x \to a^-} F(x) = F(a-0)$

(4) $P\{X \ge a\} = 1 - P\{X < a\} = 1 - F(a-0)$

2. 利用分布函数求各种随机事件的概率

已知随机变量 $X \sim F(x) = P\{X \le x\}$

$$(5)\quad P\{X = a\} = P\{X \le a\} - P\{X < a\}$$

$$= F(a) - F(a-0)$$

$$(6)\quad P\{a < X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X \le a\}$$

$$= F(b) - F(a)$$

2. 利用分布函数求各种随机事件的概率

已知随机变量 $X \sim F(x) = P\{X \le x\}$

(7) $P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\}$

$= F(b-0) - F(a-0)$

(8) $P\{a \le X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X < a\}$

$= F(b) - F(a-0)$

2. 利用分布函数求各种随机事件的概率

已知随机变量 $X \sim F(x) = P\{X \leq x\}$

$$(9)\quad P\{a < X < b\} = P\{X < b\} - P\{X \leq a\}$$

$$= F(b-0) - F(a)$$

注：分布函数完整地描述了随机变量的取值概率，进而完整地刻画了某一随机现象的内在统计规律.

3. 分布函数 $F(x)=P\{X\le x\}$ 的基本性质：定理2.1.1

（1）非负性：$0\le F(x)\le 1$

（2）规范性：$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,$

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1$$

（3）单调不减性：对任意 $x_1<x_2$，有 $F(x_1)\le F(x_2)$

（4）右连续性：$F(x+0)=F(x)$

注：满足以上四条的函数一定是某个随机变量的分布函数.

例2.1.1 设函数 $F_1(x)$, $F_2(x)$分别是随机变量X_1, X_2的分布函数，a是常数，且 $F(x)=\frac{1}{3}F_1(x)+aF_2(x)$ 也是分布函数，试求a的值。

解

$$F(+\infty)=F_1(+\infty)=F_2(+\infty)=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=\frac{1}{3}+a=1$$

得 $a=\frac{2}{3}$.

例2.1.2 设随机变量X的分布函数为

$F(x) = A + B\arctan x, \quad x \in R$ ，求A，B的值。

解 $$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty}(A + B\arctan x) = A + \frac{\pi}{2}B = 1,$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{x\to-\infty}(A + B\arctan x) = A - \frac{\pi}{2}B = 0,$$

解之得 $A = \dfrac{1}{2}, \quad B = \dfrac{1}{\pi}.$

随机变量的分类:

随机变量

离散型　　非离散型

连续型　　其它

离散型　随机变量的可能取值是有限多个或可列无穷多个, 叫做离散型随机变量.

实例1 观察掷一个骰子出现的点数.

随机变量 X 的可能取值是：1, 2, 3, 4, 5, 6.

实例2 若随机变量 X 记为 “连续射击, 直至命中时的射击次数”, 则 X 的可能取值是:

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots.$$

连续型　随机变量所取的可能值可以连续地充满某个区间,叫做连续型随机变量.

实例3　随机变量 X 为"灯泡的寿命".

则 X 的取值范围为 $[0, +\infty)$.

实例4　在区间[0，1]上随机地投点，

随机变量 X 为"点的位置（坐标）".

则 X 的取值范围为 [0，1].

§2.2　一维离散型随机变量

定义2.2.2　设离散型随机变量 X 所有可能取值为

$$x_k \ (k = 1, 2, \cdots)$$

X 取各个可能值的概率，即事件 $\{X = x_k\}$ 的概率为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \cdots \qquad (2.1)$$

则称（2.1）式为离散型随机变量X的**分布律（列）**。

分布律也可以直观地用下面的表格来表示：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

随机变量X的所有可能取值

由概率的定义知，分布律中的p_k应满足以下条件：

$1^\circ \quad p_k \geq 0, \quad k = 1,2,\cdots,$

$2^\circ \quad \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1.$

随机变量X取各个可能值所对应的概率

例1 判断下列各表是否为某一离散型随机变量的分布律

X	1	3	5
p_k	0.1	0.3	0.5

X	1	2	…	n	…
p_k	1/3	$1/3^2$	…	$1/3^n$	…

X	1	2	3
p_k	0.7	0.1	0.2

X	1	2	…	n	…
p_k	1/2	$1/2^2$	…	$1/2^n$	…

级数：$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

等比级数：$$= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} + \cdots$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}, \quad 0<q<1$$

题型1： 求分布律中的未知常数

例2 设随机变量X的分布律为

$$P\{X=k\}=a\left(\frac{2}{3}\right)^{k},\quad k=1,2,\cdots$$

试确定常数a。

练习 设随机变量 X 的分布律为 $P(X=k)=\dfrac{a}{N}$，$k=1,2,\cdots,N$，试确定常数 a。

解:

$$\sum_{k=1}^{N} P(X=k)=\sum_{k=1}^{N}\frac{a}{N}=N\cdot\frac{a}{N}=1$$

$$\therefore a=1$$

题型2： 如何求离散型r.v.的分布律

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

（1）确定r.v.X的所有可能取值；

（2）求X取各个可能值的概率，即求所对应的随机事件的概率.

例4 某盒产品中恰有8件正品，2件次品，每次从中不放回的任取一件进行检查，直到取到正品为止，ξ 表示抽取次数，求 ξ 的分布律。

解： ξ 的可能取值为：1，2，3

$$P\{\xi=1\}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

“第一次取到正品”

$$P\{\xi=2\}=\frac{2}{10}\times\frac{8}{9}=\frac{8}{45}$$

“第一次取到次品，第二次取到正品”

$$P\{\xi=3\}=\frac{2}{10}\times\frac{1}{9}\times\frac{8}{8}=\frac{1}{45}$$

“前两次均取到次品，第三次取到正品”

故 ξ 的分布律为

ξ	1	2	3
P	$\frac{4}{5}$	$\frac{8}{45}$	$\frac{1}{45}$

思考： 将“无放回”改成“有放回”，求 ξ 的分布律。

ξ 的可能取值为：1，2，3，…

$$P\{\xi = k\} = \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{4}{5}\right), k = 1,2,3,\cdots$$ 几何分布

练习 某系统有两台机器相互独立地运转．设第一台与第二台机器发生故障的概率分别为0.1，0.2， 以X表示系统中发生故障的机器数， 求X的分布律。X=0, 1, 2

解 设A_i表示事件“第i台机器发生故障”，$i=1,2$

$$P\{X=0\}=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=0.9\times0.8=0.72$$

$$P\{X=1\}=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=0.1\times0.8+0.9\times0.2=0.26$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2)=0.1\times0.2=0.02$$

故X的分布律为：

X	0	1	2
P	0.72	0.26	0.02

题型3：根据分布律求离散型r.v.落在某个区间里的概率

例3 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
P	0.1	0.5	0.4

求 $P\{X \le \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\}$, $P\{2 \le X \le 3\}$.

解

$$P\{X \le \frac{1}{2}\} = P\{X = -1\} = 0.1$$

$$P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\} = P\{X = 2\} = 0.5$$

X	-1	2	3
P	0.1	0.5	0.4

$$P\{2 \le X \le 3\} = P(X = 2) + P(X = 3)$$

$$= 0.5 + 0.4 = 0.9$$

分布律可以全面描述离散型r.v.的统计规律

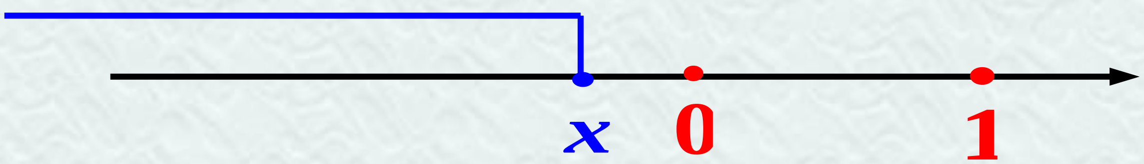
分布律与分布函数的关系

例6 抛一枚均匀硬币, 令 $X = \begin{cases} 1, & \text{正面}, \\ 0, & \text{反面}. \end{cases}$

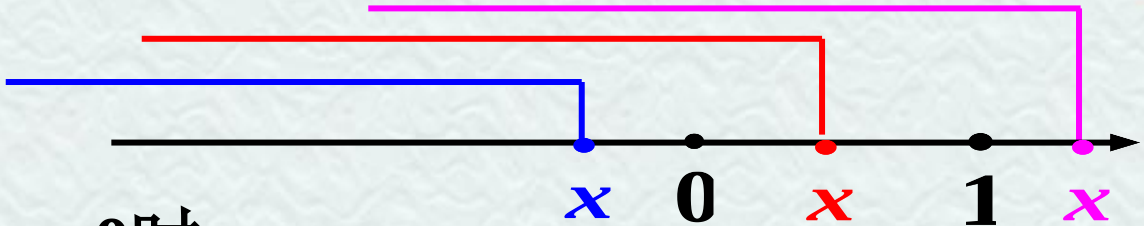
求随机变量 X 的分布函数.

解 $P\{X = 1\} = P\{X = 0\} = \dfrac{1}{2},$

题型4: 根据分布律求离散型r.v.的分布函数



当$x < 0$时, $F(x) = P\{X \le x\} = 0,$



当$x<0$时,

$$F(x)=P\{X\le x\}=0,$$

当 $0\le x<1$ 时,

$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}=\frac{1}{2};$$

当 $x\ge 1$ 时,

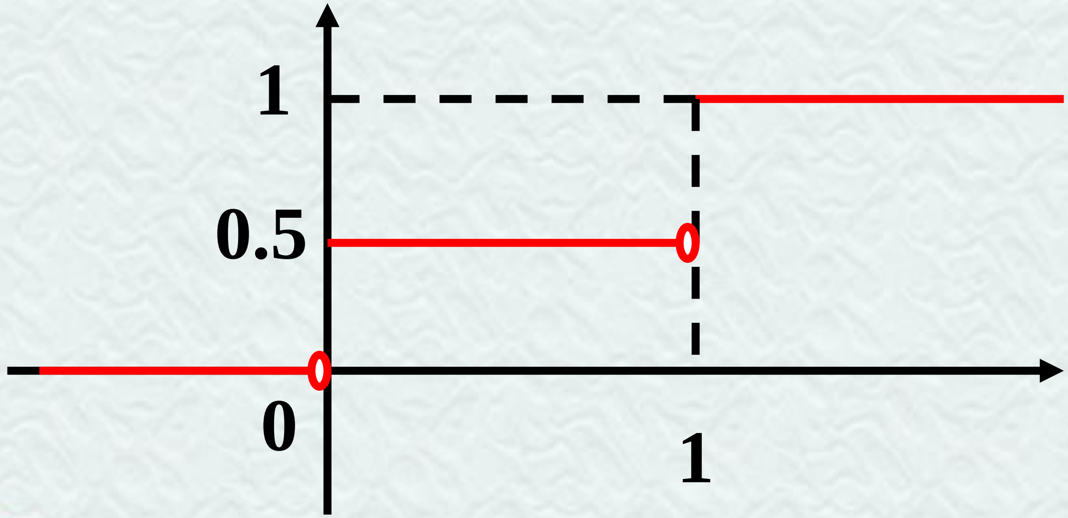
$$F(x)=P\{X\le x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

得 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$

分段函数,

图形是阶梯状曲线。



例2.2.4 设随机变量 X 的分布律为

X	-1	2	3
P	0.1	0.5	0.4

求 X 的分布函数,并求 $P\{X \le \frac{1}{2}\}$, $P\{\frac{3}{2} < X \le \frac{5}{2}\}$, $P\{2 \le X \le 3\}$.

解 由于 X 仅在 $x = -1, 2, 3$ 处概率不为0, 且

$$F(x) = P\{X \le x\},$$

$$F(x) = P\{X \le x\}$$

$$= \begin{cases} 0, & x < -1, \\ P\{X = -1\}, & -1 \le x < 2, \\ P\{X = -1\} + P\{X = 2\}, & 2 \le x < 3, \\ P\{X = -1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\}, & x \ge 3. \end{cases}$$

即 $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ 0.1, & -1 \le x < 2, \\ 0.6, & 2 \le x < 3, \\ 1, & x \ge 3. \end{cases}$$

由 $F(x)=P\{X\le x\}$,

得 $P\{X\le \frac{1}{2}\}=F(\frac{1}{2})=0.1$,

$= P(X=2)$

$P(X=2)=P\{\frac{3}{2}<X\le\frac{5}{2}\}=F(\frac{5}{2})-F(\frac{3}{2})=0.6-0.1=0.5$,

$$P\{2\le X\le 3\}=F(3)-F(2)+P\{X=2\}$$

$= P(X=2)+P(X=3)$ $=1-0.6+0.5=0.9.$

$=0.5+0.4=0.9$

一般地，设离散型r.v.X的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \qquad k = 1,2,\cdots$$

由概率的可列可加性得X的分布函数为

$$F(x) = \sum_{x_k \le x} p_k$$

对所有满足$x_k \le x$的k求和。

也可表示为

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \\ p_1 & x_1 \le x < x_2 \\ \cdots & \\ \sum_{i=1}^{k} p_i & x_k \le x < x_{k+1} \\ \cdots & \\ 1 & x \ge \cdots \end{cases}$$

离散型r.v.的分布函数$F(x)$是一种概率的累加，是分段函数，它的图形是阶梯状曲线，在 $x=x_k, (k=1,2,\cdots)$ 处有跳跃，其跳跃值为 $p_k=P\{X=x_k\}$.

题型5： 根据分布函数求离散型r.v.的分布律

例2.2.5 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.2, & -1\le x<0,\\ 0.3, & 0\le x<1,\\ 0.7, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

求X的分布律.

解

X	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.4	0.3

几种常见的离散型随机变量的分布

（一）退化分布

设X是随机变量，a是常数，若

$$P\{X=a\}=1$$

则称X服从退化分布。

（二）（0—1）分布

设随机变量X只可能取0与1两个值，它的分布律是

$$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1\ (0<p<1)$$

则称X服从参数为p的（0—1）分布或两点分布.

（0—1）分布的分布律也可写成

X	0	1
P	$1-p$	p

抛一枚硬币，观察出现正面H还是反面T，正面$X=0$,反面$X=1$

对于一个随机试验，如果它的样本空间只包含两个元素，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，我们总能在$\Omega$上定义一个服从（0—1）分布的随机变量.

$$X=X(\omega)=\begin{cases}0, & \text{当}\ \omega=\omega_1,\\ 1, & \text{当}\ \omega=\omega_2.\end{cases}$$

来描述这个随机试验的结果。

检查产品的质量是否合格，对新生婴儿的性别进行登记，检验种子是否发芽以及前面多次讨论过的“抛硬币”试验都可以用（0–1）分布的随机变量来描述.

（三） 伯努利试验与二项分布

设试验 E 只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$，则称 E 为伯努利（Bernoulli）试验． 设 $P(A)=p \quad (0<p<1)$， 此时 $P(\overline{A})=1-p$，将 E 独立重复地进行 n 次，则称这一串重复的独立试验为 **n 重伯努利试验**.

若 X 表示 n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，

则 X 所有可能取的值为 $0, \quad 1, \quad 2, \quad \cdots, \quad n.$

X 的分布律：

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k=0,1,2,\cdots,n$$

若以 B_k 记 n 重伯努利试验中事件 A 正好出现 k 次这一事件，即事件 $\{X=k\}$，而以 A_i 表示第 i 次试验中事件 A 发生，则

$$B_k = A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n \cup\cdots\cup \overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-k}A_{n-k+1}\cdots A_n$$

右边的每一项表示 n 次试验中某 k 次试验事件 A 发生，剩下的 $n-k$ 次试验事件 A 没有发生．共有 C_n^k 个，而两两互不相容．

由试验的独立性，得

$$P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)P(\overline{A}_{k+1})\cdots P(\overline{A}_n)$$

$$= p^kq^{n-k} \quad 其中\ q=1-p$$

同理可得上式右边各项所对应的概率均为 p^kq^{n-k}

利用概率的有限可加性知

$$P(B_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

即

$$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n$$

显然 $P\{X=k\}\geq 0$

$$\sum_{k=0}^{n} P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1$$ 其中 $q=1-p$

即$P\{X=k\}$满足分布律的两个条件

注意到 $C_n^k p^k q^{n-k}$ 刚好是二项式$(p+q)^n$的展开式中出现p^k的那一项，故称$r.v.X$服从参数为n,p的二项分布

记为$X\sim b(n,p)$

二项分布 $\xrightarrow{n=1}$ **两点分布** $b(1,p)$

例2.2.2 某人进行射击,设每次射击的命中率为0.02,独立射击 400 次,试求至少击中两次的概率.

解 设击中的次数为 X,

则 $X \sim b(400,0.02)$.

X 的分布律为

$$P\{X=k\}=C_{400}^{k}(0.02)^{k}(0.98)^{400-k}, \quad k=0,1,\cdots,400.$$

因此 $P\{X \geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$

$$=1-(0.98)^{400}-400(0.02)(0.98)^{399}=0.9972.$$

例2.2.1 按规定,某种型号电子元件的使用寿命超过1500小时的为一级品.已知某一大批产品的一级品率为0.2,现在从中随机地抽查20只.问20只元件中恰有k只($k=0,1,\cdots,20$)一级品的概率是多少?

分析 这是不放回抽样.但由于这批元件的总数很大,且抽查元件的数量相对于元件的总数来说又很小,因而此抽样可近似当作放回抽样来处理.

把检查一只元件是否为一级品看成是一次试验,检查20只元件相当于做20重伯努利试验.

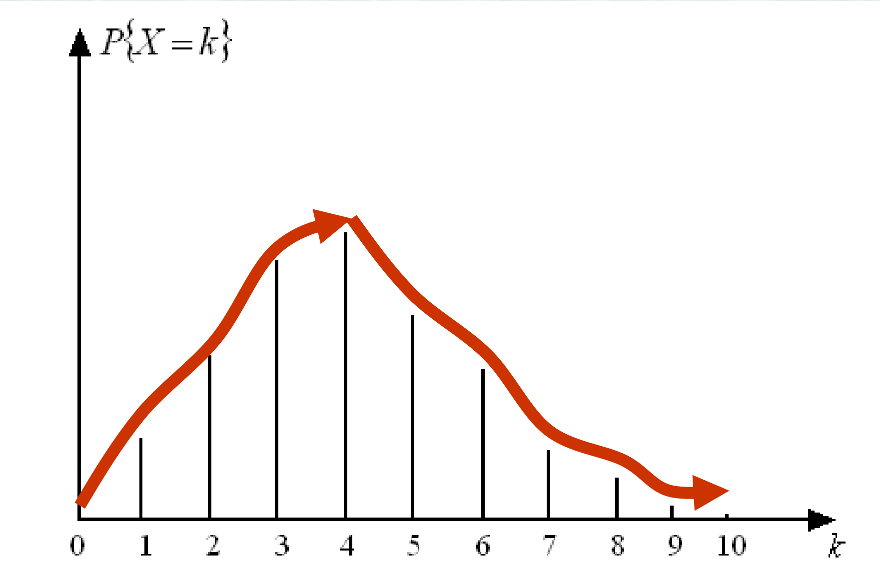
解 以 X 记 20 只元件中一级品的只数，

则 $X \sim b(20, 0.2)$, 因此所求概率为

$$P\{X=k\}=C_{20}^{k}(0.2)^{k}(0.8)^{20-k},\ k=0,1,\cdots,20.$$

$P\{X=0\}=0.012$	$P\{X=4\}=0.218$	$P\{X=8\}=0.022$
$P\{X=1\}=0.058$	$P\{X=5\}=0.175$	$P\{X=9\}=0.007$
$P\{X=2\}=0.137$	$P\{X=6\}=0.109$	$P\{X=10\}=0.002$
$P\{X=3\}=0.205$	$P\{X=7\}=0.055$	
$P\{X=k\}<0.001$, 当 $k \geq 11$ 时		

作出上表的图形，如下图所示

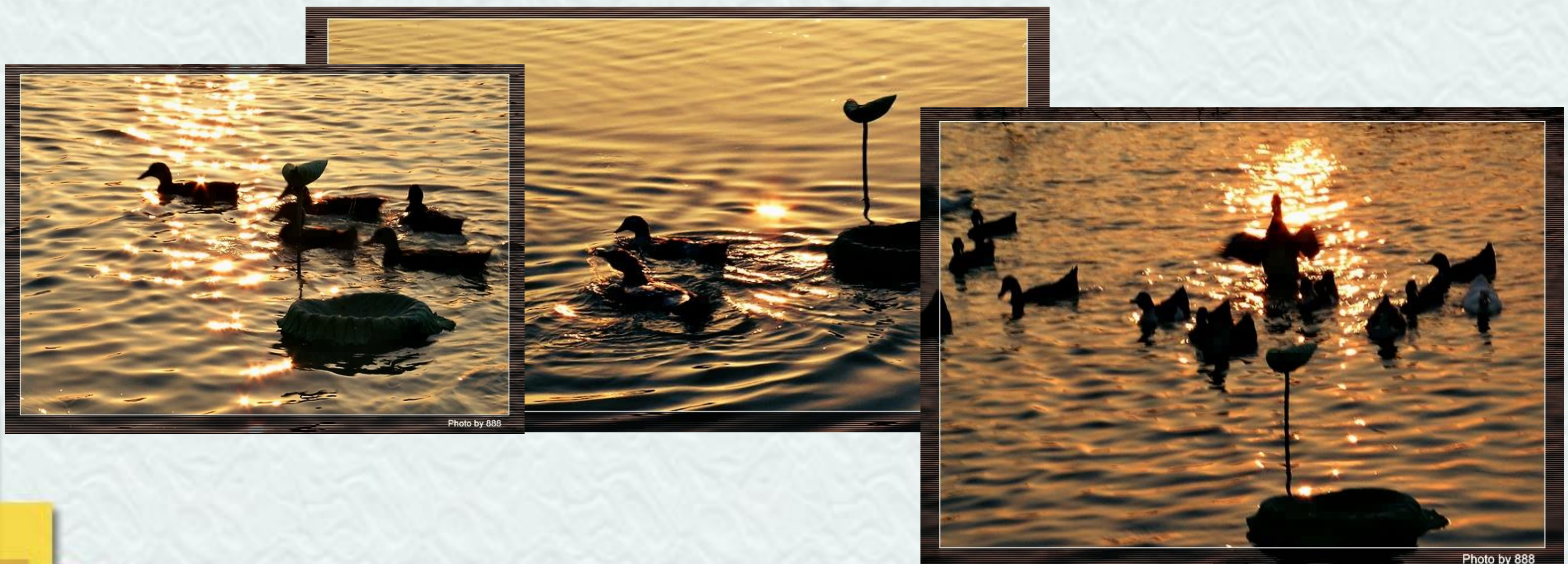


当$(n+1)p-1 \le k \le (n+1)p$时，$P\{X=k\}$的值最大

从上图可以看出，当k增加时，概率$P\{X=k\}$先是随之增加，直至达到最大值（$k=4$），随后单调减少．一般地，对于固定的n及p，二项分布$b(n,p)$都有类似的结果

（书P41命题2.2.1）

例5 设某种鸭在正常情况下感染某种传染病的概率为20%. 现新发明两种疫苗，疫苗A注射到9只健康鸭后无一只感染传染病，疫苗B注射到25只鸭后仅有一只感染，试问应如何评价这两种疫苗，能否初步估计哪种疫苗较为有效？



解 若疫苗A完全无效，则注射后鸭受感染的概率仍为0.2，故9只鸭中无一只感染的概率为

$$(0.8)^9 \approx 0.1342.$$

同理，若疫苗B完全无效，则25只鸭中有一只感染的概率为

$$C_{25}^1 (0.2)^1 (0.8)^{24} \approx 0.0236.$$

因为概率0.0236较小，并且比概率0.1342小得多，

因此可以初步认为疫苗B是有效的，并且比A有效.

（四）泊松分布

设随机变量 X 所有可能取值为 $0,1,2,\cdots$，

而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad k=0,1,2,\cdots,$$ 其中 $\lambda>0$ 是常数

则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记为 $X\sim\pi(\lambda)$

显然，$P\{X=k\}\geq 0, k=1,2,\cdots$，且有

$$\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$$

即 $P\{X=k\}$ 满足分布律的两个条件

泊松分布的背景及应用

二十世纪初卢瑟福和盖克两位科学家在观察与分析放射性物质放出的 α 粒子个数的情况时, 他们做了2608次观察(每次时间为7.5秒)发现放射性物质在规定的一段时间内, 其放射的粒子数 X 服从泊松分布.

在生物学、医学、工业统计、保险科学及公用事业的排队等问题中，泊松分布是常见的. 例如地震、火山爆发、特大洪水、交换台的电话呼唤次数等, 都服从泊松分布.

泊松定理

书定理2.2.2

二项分布 $\xrightarrow{np \to \lambda (n \to +\infty)}$ 泊松分布

当n很大，p很小（$np=\lambda$）时，有以下近似式

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad (其中 \lambda = np)$$

例2.2.2 某人进行射击,设每次射击的命中率为0.02,独立射击 400 次,试求至少击中两次的概率.

解 设击中的次数为 X, 则 $X \sim b(400,0.02)$.

因此 $P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$

$$= 1 - (0.98)^{400} - 400(0.02)(0.98)^{399} = 0.9972.$$

可利用泊松定理计算 $\lambda = 400 \times 0.02 = 8,$

$$P\{X \geq 2\} \approx 1 - e^{-8} - 8e^{-8} \approx 0.997.$$

（五）几何分布

$$P\{X=k\}=p(1-p)^{k-1}, \quad k=1,2,3,\cdots$$

其中$0<p<1$是常数

则称X服从参数为p的几何分布，记为$X\sim Ge(p)$.

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}=\sum_{k=1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}=\frac{p}{1-(1-p)}=1.$$

$$P\{X>n\}=\sum_{k=n+1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}=\frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)}=q^n,$$

$$P\{X>m+n\mid X>n\}=\frac{P\{X>m+n\}}{P\{X>n\}}=\frac{q^{m+n}}{q^n}=q^m$$

$$=P\{X>m\}$$

几何分布的无记忆性