

§6.1 向量代数 §6.2 平面和空间直线的方程 (平面方程)

一、填空题

1. 平行于向量 $a = (6, 7, -6)$ 的单位向量为 $\pm (\frac{6}{11}, \frac{7}{11}, -\frac{6}{11})$.

2. 已知 a, b 均为单位向量, 且 $a \cdot b = \frac{1}{2}$, 则以向量 a, b 为邻边的平行四边形的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
 $\frac{1}{2} = a \cdot b = 1 \times 1 \times \cos \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S = |a| \cdot |b| \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. 已知 a, b 为非零向量, 若 $a \cdot b = |a \times b|$, 则向量 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{4}$. ($\cos \theta = \sin \theta$)

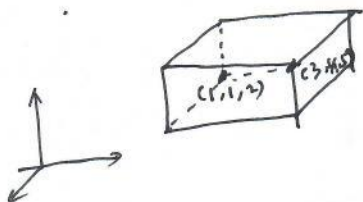
4. 设 $|a| = 3, |b| = 5$, 若 $a + kb$ 与 $a - kb$ 垂直, 则常数 $k = \pm \frac{3}{5}$. ($(a + kb) \cdot (a - kb) = 0$)

5. 设向量 x 与向量 $a = (2, -1, 2)$ 平行, 且 $a \cdot x = -18$, 则 $x = (-4, 2, -4)$. 设 $\vec{x} = (2\lambda, -\lambda, 2\lambda)$
 ~~$(-4, 2, -4)$~~

6. 设 $a = (4, -2, 4), b = (6, 3, -2)$, 则 $\text{Pr}_{j_b} a = \frac{10}{7}$. $\frac{a \cdot b}{|b|}$

7. 设 a, b, c 为单位向量, 且满足 $a + b + c = 0$, 则 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = -\frac{3}{2}$. $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$

二、设长方体的各棱与坐标轴平行, 已知长方体的两个顶点坐标分别为 $(1, 1, 2), (3, 4, 5)$, 试写出余下六个顶点的坐标.



$$\begin{aligned} & \text{顶点: } \{1, 3\} \times \{1, 4\} \times \{2, 5\} \\ & = \{(1, 1, 2), (3, 4, 5)\} \\ & \quad \{(3, 1, 2), (1, 4, 5)\} \\ & \quad \{(1, 4, 2), (1, 1, 5)\} \\ & \quad \{(3, 4, 2), (3, 1, 5)\} \end{aligned}$$

三、一向量的终点为 $B(2, -1, 7)$, 在 x, y, z 轴上的投影依次为 $4, -4, 7$, 求此向量的始点坐标, 方向余弦和方向角.

设起点 A 坐标为 (x, y, z) . 则 $\begin{cases} 2 - x = 4 \\ -1 - y = -4 \\ 7 - z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow A(-2, 3, 0)$

$$\therefore \vec{AB} = (4, -4, 7)$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + 7^2} = 9 \quad \therefore \cos \alpha = \frac{4}{9}, \cos \beta = -\frac{4}{9}, \cos \gamma = \frac{7}{9}$$

$$\therefore \alpha = \arccos \frac{4}{9}, \beta = \arccos(-\frac{4}{9}), \gamma = \arccos \frac{7}{9}$$

四、设 $a = 3i + 5j + 8k, b = 2i - 4j - 7k, c = 5i + j - 4k$, 求向量 $l = 4a + 3b - c$ 在 x 轴上的投影以及在 y 轴上的分向量.

$$\begin{aligned}\vec{l} &= 4(3\vec{i} + 5\vec{j} + 8\vec{k}) + 3(2\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}) - (5\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}) \\ &= 13\vec{i} + 7\vec{j} - 15\vec{k} = (13, 7, -15)\end{aligned}$$

$\therefore \vec{l}$ 在 x 轴上投影为 13
在 y 轴上分向量为 $7\vec{j}$

五、设 $a = 3i - j - 2k, b = i + 2j - k$, 求:

(1) $a \times b$; (2) $\text{Prj}_b a$; (3) $\cos(\hat{a}, \hat{b})$.

$$(1) \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \underline{5\vec{i} + \vec{j} + 7\vec{k}}$$

$$(2) \text{Prj}_b \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{b} = \frac{3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1)}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \underline{\frac{3}{\sqrt{6}}}$$

$$(3) \cos(\hat{a}, \hat{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 \times 1 + (-1) \times 2 + (-2) \times (-1)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \underline{\frac{3}{2\sqrt{2}}}$$

六、已知 $A(1, -1, 2), B(5, -6, 2), C(1, 3, -1)$, 求与 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 都垂直的单位向量.

$$\overrightarrow{AB} = (4, -5, 0),$$

$$\overrightarrow{AC} = (0, 4, -3)$$

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = (15, 12, 16)$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{15^2 + 12^2 + 16^2} = 25.$$

$$\therefore \pm \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \pm \frac{1}{25} (15, 12, 16) \text{ 为所求单位向量}$$

七、在 Oxy 面上, 求垂直于 $a = (5, -3, 4)$, 并与 a 等长的向量 b .

$$\text{设 } \vec{b} = (x, y, 0), \text{ 则}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{50}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 50 \quad (1)$$

$$\text{又: } \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\therefore 5x - 3y = 0 \quad (2)$$

$$\text{联立 (1) (2) 得 } x = \pm \frac{15}{\sqrt{17}}, y = \pm \frac{25}{\sqrt{17}}$$

$$\therefore \vec{b} = \pm \left(\frac{15}{\sqrt{17}}, \frac{25}{\sqrt{17}}, 0 \right)$$

八、已知空间三点 $A(1, 1, 1), B(2, 3, 4), C(3, 4, 5)$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

$$\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{AC} = (2, 3, 4)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

九、已知平面 $Ax + By + Cz + D = 0$, 根据要求填写系数应满足的条件:

过原点	平行于 z 轴	包含 x 轴	平行于 xOy 平面
$D = 0$	$C = 0$	$A = D = 0$	$A = B = 0$

十、求满足下列条件的平面方程:

1. 过点 $(3, 0, -1)$ 且与平面 $3x - 7y + 5z - 12 = 0$ 平行. 答: $3x - 7y + 5z - 4 = 0$

2. 过点 $(1, 1, 1)$ 和点 $(0, 1, -1)$ 且与平面 $x + y + z = 0$ 相垂直. 答: $2x - y - z = 0$

3. 过点 $(1, 1, 1), (-2, -2, 2), (1, -1, 2)$. 答: $x - 3y - 6z - 8 = 0$

4. 平行于 xOz 面且经过点 $(2, -5, 3)$. 答: $y + 5 = 0$

5. 平行于 x 轴且经过两点 $(4, 0, -2), (5, 1, 7)$.

设 $By + D = 0$
 $\Rightarrow D = -5B$

$3(x-3) - 7(y-0) + 5(z+1) = 0$
 $\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -7 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$= (-2, 1, 1)$

$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$
 $= (-1, 3, 6)$

设平面 $By + Cz + D = 0$

则 $\begin{cases} -2C + D = 0 \\ B + 7C + D = 0 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} C = \frac{D}{2} \\ B = -\frac{9}{2}D \end{cases}$

$\therefore -\frac{9}{2}Dy + \frac{D}{2}z + D = 0$

即 $9y - z - 2 = 0$

6. 平面 $x - 2y + 2z + 21 = 0$ 与平面 $7x + 24z - 5 = 0$ 之间的二面角的平分面.

设 (x, y, z) 是所求平面上任意一点, 则

$$\frac{|x - 2y + 2z + 21|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|7x + 24z - 5|}{\sqrt{7^2 + 0^2 + 24^2}}$$

$$\frac{x - 2y + 2z + 21}{3} = \pm \frac{7x + 24z - 5}{25}$$

$\therefore 2x - 25y - 11z + 270 = 0$

或 $46x - 50y + 12z + 510 = 0$

§6.2 平面和空间直线的方程 (续) §6.3 曲面和曲线的方程

一、填空题 (一)

1. 过点 $M_1(4,1,2), M_2(-3,5,-1)$ 的直线方程为 $\frac{x-4}{7} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-2}{3}$

2. 设直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{\lambda}$ 与直线 $x+1=y-1=z$ 相交, 则 $\lambda = \frac{5}{6}$.
 $\Rightarrow \vec{M_1M_2} \perp \vec{S_1} \times \vec{S_2}$

3. 直线 $\begin{cases} 3x-y+2z=0, \\ 6x-3y+2z=0 \end{cases}$ 与 z 轴的夹角为 $\arcsin \frac{3}{\sqrt{14}}$.

4. 过点 $(2,-1,3)$ 且平行于直线 $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{5}$ 的直线方程为 $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{5}$. $\vec{S} = \vec{S_1} \times \vec{S_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = (-2, 3, 1)$

5. 过点 $(0,2,4)$ 且与平面 $x+2z=1$ 和 $y-3z=2$ 都相交的直线方程为 $\frac{x}{-2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{1}$. $\vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2, 3, 1)$

6. 过点 $(0,1,2)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$ 垂直相交的直线方程为 $\frac{x}{-3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$.

二、写出直线 $\begin{cases} 2x+5z+3=0, \\ x-3y+z+2=0 \end{cases}$ 的对称式方程及参数方程. $\vec{S} = \vec{S_1} \times (\vec{M_0M_1} \times \vec{S_1})$

先在直线上找一点, 令 $z=-1$, 则 $\begin{cases} 2x=2 \\ x-3y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{3} \end{cases}$, \therefore 有 $M_0(1, \frac{2}{3}, -1)$

$\therefore \vec{S} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (2, 0, 5) \times (1, -3, 1) = 3(5, 1, -2)$

\therefore 对称式方程: $\frac{x-1}{5} = \frac{y-\frac{2}{3}}{1} = \frac{z+1}{-2} \quad (=t)$

参数式方程: $x=1+5t, y=\frac{2}{3}+t, z=-1-2t$.

三、确定下列各组中的直线和平面间的位置关系:

1. $\frac{x-2}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-4}$ 和 $x+y+z=3$;

$\vec{S} = (3, 1, -4), \vec{n} = (1, 1, 1)$

$\vec{S} \cdot \vec{n} = 0$, 故 直线与平面平行

又直线上点 $(2, -2, 3)$ 满足平面方程, $x+y+z=3$

故 直线在平面上.

$$2. \begin{cases} x+3y+2z+1=0, \\ 2x-y-10z+3=0 \end{cases} \text{ 和 } 4x-2y+z-2=0.$$

$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -10 \end{vmatrix} = (-28, 14, -7)$$

$$\text{取 } \vec{s} = (-4, 2, -1)$$

$$\therefore \vec{n} = (4, -2, 1)$$

$$\therefore \vec{s} \parallel \vec{n}$$

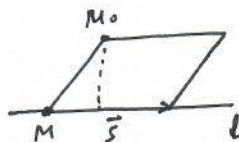
故直线垂直于平面.

四. 求点 $M_0(3, -4, 4)$ 到直线 $\frac{x-4}{2} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-2}{1}$ 的距离.

$$M(4, 5, 2), \quad \vec{s} = (2, -2, 1)$$

$$\vec{M_0M} = (1, 9, -2), \quad |\vec{s}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3, \quad \vec{M_0M} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 9 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (5, -5, -20)$$

$$\therefore d = \frac{|\vec{M_0M} \times \vec{s}|}{|\vec{s}|} = \frac{15\sqrt{2}}{3} = 5\sqrt{2}$$



五. 求直线 $\begin{cases} 2x-4y+z=0, \\ 3x-y-2z-9=0 \end{cases}$ 在 xOy 面上的投影直线的方程.

方法一: 平面束

$$\text{设过直线的平面束方程为 } 2x-4y+z+\lambda(3x-y-2z-9)=0$$

$$\text{即 } (2+3\lambda)x + (-4-\lambda)y + (1-2\lambda)z - 9\lambda = 0$$

$$\text{则 } \vec{n} = (2+3\lambda, -4-\lambda, 1-2\lambda) \perp (0, 0, 1)$$

$$\therefore 1-2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{投影平面 } \frac{7}{2}x - \frac{9}{2}y = \frac{9}{2}$$

$$\therefore \text{投影直线 } \begin{cases} 7x-9y=9 \\ z=0 \end{cases}$$

方法二. 消去 z 得投影面 $7x-9y=9$. 投影线 $\begin{cases} 7x-9y=9 \\ z=0. \end{cases}$

六、选择题

1. 方程 $x^2 - \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ 表示 (A)
A. 旋转双曲面 B. 双叶双曲线 C. 双曲柱面 D. 锥面
2. 二次曲面 $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 与平面 $y = h$ 相截, 其截痕是空间中的 (B)
A. 双曲线 B. 抛物线 C. 椭圆 D. 直线

七、填空题 (二)

1. 一动点到坐标原点的距离等于它到点 $(2, 3, 4)$ 的距离的一半, 则该动点的轨迹方程为

$$(x + \frac{2}{3})^2 + (y + 1)^2 + (z + \frac{4}{3})^2 = (\frac{2}{3}\sqrt{29})^2$$

2. xOy 平面上的双曲线 $4x^2 - 9y^2 = 36$ 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程为 $4x^2 + 4y^2 - 9y^2 = 36$

3. xOy 平面上的圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 绕 y 轴旋转所得的旋转面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 + 3 = 4\sqrt{x^2 + y^2}$

4. yOz 平面上的直线 $2y - 3z + 1 = 0$ 绕 z 轴旋转所得的旋转面方程为 $4(x^2 + y^2) = (3z - 1)^2$

5. 根据方程填入图形名称

	平面解析几何中	空间解析几何中
$y = x + 1$	直线	平行于 z 轴的平面
$x^2 - y^2 = 1$	双曲线	双曲柱面. (母线平行于 z 轴)

6. 母线平行于 x 轴且通过曲线 $\begin{cases} 2y^2 + z^2 + 4x - 4z = 0, \\ y^2 + 3z^2 - 8x - 12z = 0 \end{cases}$ 的柱面方程分别为

$$y^2 + z^2 - 4z = 0$$

7. 曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y = 0 \end{cases}$ 的参数方程为 $x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, y = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t, z = \sin t$

8. 曲线 $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 4, \\ z = 0 \end{cases}$ 的参数方程为 $x = 1 + 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 0$

9. 根据曲线填入它们在三个坐标面上的投影曲线的方程

	在 xOy 面	在 yOz 面	在 zOx 面
$\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + z = 1; \end{cases}$	$\begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{2}, \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} z = (1 - y - z)^2 + y^2, \\ x = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} z = x^2 + (1 - x - z)^2, \\ y = 0 \end{cases}$
$\begin{cases} x = \cos \theta, \\ y = \sin \theta, \\ z = 2\theta. \end{cases}$	$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} x = \cos \frac{z}{2}, \\ y = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y = \sin \frac{z}{2}, \\ x = 0 \end{cases}$

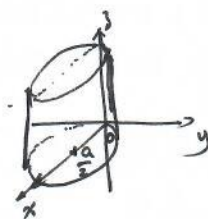
10. 试在表中填入下列曲面所围成的立体在三个坐标面上的投影

	在 xOy 面	在 yOz 面	在 zOx 面
$z = x^2 + y^2$ 与 $z = 2 - x^2 - y^2$	$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$	$\{(y, z) \mid y^2 \leq z \leq 2 - y^2, -1 \leq y \leq 1\}$	$\{(x, z) \mid x^2 \leq z \leq 2 - x^2, -1 \leq x \leq 1\}$
$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $x^2 + y^2 = 1, z = 0$	$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$	$\{(y, z) \mid -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$	$\{(x, z) \mid 0 \leq z \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$

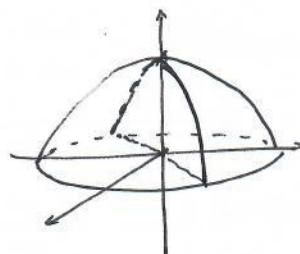


八、画出下列方程所表示的曲面或曲线：

1. $(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = (\frac{a}{2})^2$;



2. $\begin{cases} z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ y = x. \end{cases}$



九、画出由平面 $x = 0, z = 0, x = 1, y = 2, z = \frac{y}{4}$ 所围成的立体的图形.

