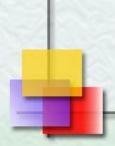
# § 3.5 多维随机变量函数的期望、 方差及其性质

- 一、二维随机变量函数的期望
- 二、数学期望的性质
- 三、方差的性质







$$E(X) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k & \text{X是离散型r.v.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \text{X是连续型r.v.} \end{cases}$$

$$E[g(X)] = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k & \text{X是离散型r.v.} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx & \text{X是连续型r.v.} \end{cases}$$

$$D(X) = E(X - EX)^2 = E(X^2) - (EX)^2$$







# 一、二维随机变量函数的期望(定理3.5.1)

(1) 设 X,Y 为离散型随机变量,g(x,y) 为二元函 数 则

数,则
$$E[g(X,Y)] = \sum_{i} \sum_{j} g(x_{i}, y_{j}) p_{ij}$$

其中(X,Y)的联合概率分布为 $p_{ij}$ .

(2) 设 X,Y 为连续型随机变量, g(x,y) 为二元函数,则

$$E[g(X,Y)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y) dx dy.$$

其中(X,Y)的联合概率密度为f(x,y).

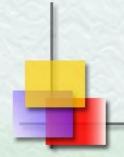






例1 设 (X,Y) 的分布律为

YX	0	1	
0	0.3	0.4	
1	0.2	0.1	







例2 设随机变量(X,Y)的概率密度函数为

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2x^3y^2}, & \frac{1}{x} < y < x, x > 1 \\ 0, & \text{‡th.} \end{cases}$$

求 
$$E(Y)$$
,  $E\left(\frac{1}{XY}\right)$ .

$$\cancel{\mathbb{R}} E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y f(x, y) dx dy = \int_{1}^{+\infty} dx \int_{1/x}^{x} y \frac{3}{2x^{3}y^{2}} dy = \frac{3}{4}$$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{xy} f(x,y) dx dy$$
$$= \int_{1}^{+\infty} dx \int_{1/x}^{x} \frac{1}{xy} \cdot \frac{3}{2x^{3}y^{2}} dy = \frac{3}{5}$$







#### 练习册P18

7. 二维随机变量(*X*, *Y*)的概率密度函数为: 
$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
,则 $E(X + Y) = \underline{\qquad}$ .

# 二、数学期望的性质(定理3.5.2)

- 1. 设 C 是常数,则有E(C) = C.
- 2. 设 X 是一个随机变量, a, b 是常数,则有 E(aX + b) = aE(X) + b.
- 3. 设 X, Y 是两个随机变量,则有

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y).$$

推广:  $E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)$ 







4. 设X,Y是相互独立的随机变量,则有

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$
.

注3.5.1 反例

5. 设 a, b 是常数, 若 $a \le X \le b$ , 则有 $a \le E(X) \le b$ .

说明 当r.v.的期望存在时,可利用期望的性质求r.v (函数)的期望。







#### 注3.5.1 反例

随机变量X与Y的独立性只是使得等式E(XY) = E(X)E(Y)成立的一个充分条件,而非必要条件. **反例**: 设随机变量(X,Y)的分布律为

X	-1	0	1	
-1	1/8	1/8	1/8	3/8
0	1/8	0	1/8	$\begin{array}{ c c }\hline 3/8\\1/4\\ \end{array}$
1	1/8	1/8	1/8	3/8
	3/8	1/4	3/8	

由于

$$P(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{8} \neq \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = P(X = -1)P(Y = -1),$$

因此,随机变量X与Y不相互独立.但显然有E(X)=E(Y)=0及E(XY)=0,即等式E(XY)=E(X)E(Y)成立.







### 三、方差的性质(定理3.5.3)

(1) 设 C 是常数,则有 D(C) = 0.

证明 
$$D(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 = C^2 - C^2 = 0$$
.

(2) 设 X 是一个随机变量, a, b 是常数,则有  $D(aX + b) = a^2 D(X)$ .

证明 
$$D(aX+b) = E[aX+b-E(aX+b)]^2$$
  
=  $E[aX+b-aE(X)-b]^2 = a^2E[X-E(X)]^2$   
=  $a^2D(X)$ .







(3) 设 
$$X, Y$$
 相互独立,  $D(X), D(Y)$  存在, 则 
$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

证明 
$$D(X \pm Y) = E[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2$$
  
 $= E[(X - EX) \pm (Y - EY)]^2$   
 $= E(X - EX)^2 + E(Y - EY)^2$   
 $\pm 2E[(X - EX)(Y - EY)]$   
 $\stackrel{\text{独立}}{=} D(X) + D(Y) \pm 2E(X - EX) \cdot E(Y - EY)$   
 $= D(X) + D(Y)$ 







推广 若 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立,则有

$$D(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n).$$

(4) D(X) = 0 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C,即  $P\{X = C\} = 1$ .





注:

$$E(aX + bY + c) = aE(X) + bE(Y) + c$$
  
设X,Y相互独立。

$$D(aX + bY + c) = a^2D(X) + b^2D(Y)$$

例如:设X,Y相互独立,E(X)=1,E(Y)=-1

$$D(X) = 1$$
,  $D(Y) = 2$ ,

$$E(2X-3Y-5) = 2E(X)-3E(Y)-5$$

$$=2\times 1-3\times (-1)-5=0$$

$$D(2X-3Y-5) = 2^2D(X) + (-3)^2D(Y)$$

$$=4 \times 1 + 9 \times 2 = 22$$







#### 例3.5.4 二项分布

引入计数随机变量

其中
$$P(A) = p$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{第i次试验中事件A发生} \\ 0 & \text{第i次试验中事件A不发生} \end{cases}$$
  $i = 1, 2, \dots, n$ 

则 $X_i$ 服从(0-1)分布,且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立

$$E(X_i) = p, D(X_i) = pq$$

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_{i} \sim b(n, p)$$
,  $E(X) = E(X_{1} + X_{2} + \cdots + X_{n}) = np$ 

$$D(X) = D(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

$$= D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n) = npq$$







## 结论

$$E(C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n) = C_1E(X_1) + C_2E(X_2) + \dots + C_nE(X_n)$$

$$= C_1\mu_1 + C_2\mu_2 + \dots + C_n\mu_n = \sum_{i=1}^n C_i\mu_i$$

$$D(C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n) = C_1^2D(X_1) + C_2^2D(X_2) + \dots + C_n^2D(X_n)$$

$$= C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \dots + C_n^2\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n C_i^2\sigma_i^2$$

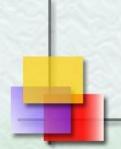






结论 若 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \dots, n$ ,且它们相互独立 则 $\sum_{i=1}^n C_i X_i + \mathbf{b} \sim N(\sum_{i=1}^n C_i \mu_i + \mathbf{b}), \sum_{i=1}^n C_i^2 \sigma_i^2)$ ( $C_i$ 不全为零)

例3.5.3  $X \sim N(-1,5)$ ,  $Y \sim N(0,4)$ , 且X, Y相互独立 求:(1) U = 2X + Y - 1, V = Y - X 的分布; (2) P(Y > X + 1),  $P(X + Y \le 2)$ .





#### 练习册P18

结论: 
$$(X,Y) \sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$
,

(1) X与Y的边缘密度函数是一元正态分布;

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

(2) X与Y相互独立的充要条件是 $\rho = 0$ .