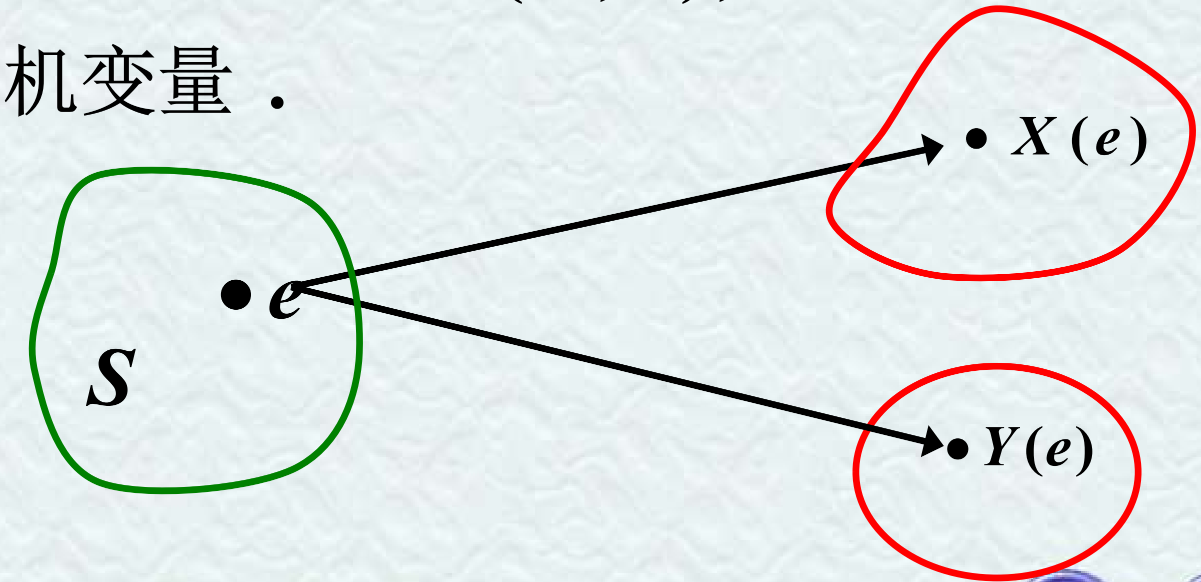
# 第三章　多维随机变量

# §3.1 二维随机变量及其分布函数

## 一、二维随机变量的定义

设 $E$ 是一个随机试验，它的样本空间是 $S$，设 $X = X(e)$ 和 $Y = Y(e)$ 是定义在 $S$ 上的随机变量，由它们构成的一个向量 $(X, Y)$，叫作二维随机向量或二维随机变量．

图示



**实例1** 炮弹的弹着点的位置 $(X, Y)$ 就是一个二维随机变量.

**实例2** 考查某一地 区学前儿童的发育情况，则儿童的身高 $H$ 和体重 $W$ 就构成二维随机变量 $(H, W)$.

**说明**

二维随机变量 $(X, Y)$ 的性质不仅与 $X$、$Y$ 有关,而且还依赖于这两个随机变量的相互关系.

# 二、二维随机变量的分布函数

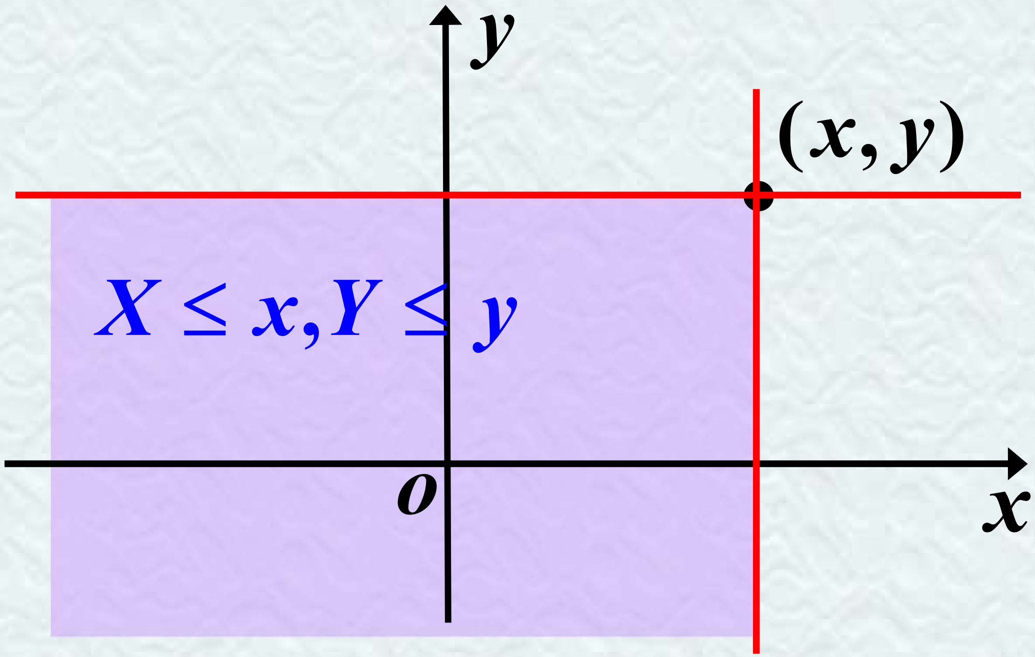
## 1. 分布函数的定义

设 $(X,Y)$ 是二维随机变量,对于任意实数 $x, y$, 二元函数:

$$F(x,y) = P\{(X \le x) \cap (Y \le y)\} = P\{X \le x, Y \le y\}$$

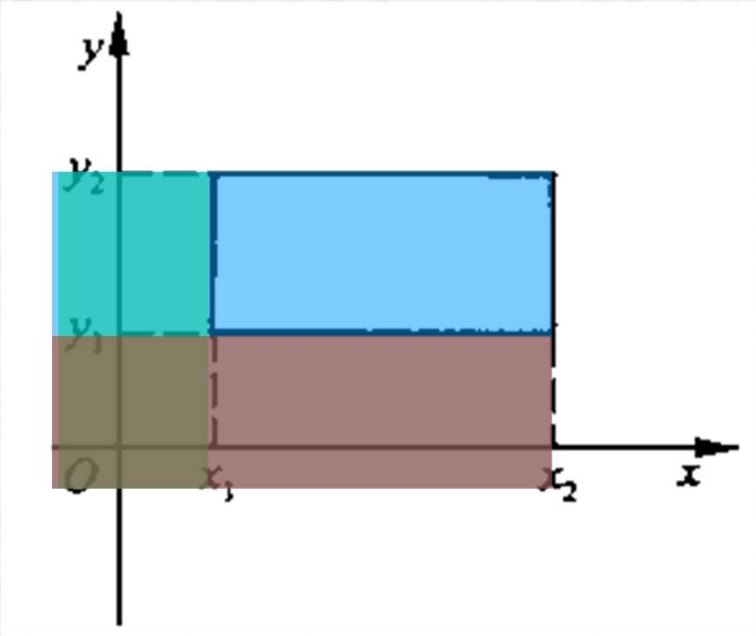
称为二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数,或称为随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合分布函数.

若将二维随机变量$(X,Y)$看成是平面上随机点$(X,Y)$的坐标,则分布函数$F(x,y)$就表示随机点$(X,Y)$落在以点$(x,y)$为顶点的左下方的无限矩形域内的概率.



这时,点$(X,Y)$落入任一矩形区域

$G=\{(x,y)\mid x_1<x\le x_2\,,\,y_1<y\le y_2\}$ 的概率,




$$P\{x_1<X\le x_2\,,\,y_1<Y\le y_2\}$$

$$=F(x_2\,,\,y_2)-F(x_2\,,\,y_1)-F(x_1\,,\,y_2)+F(x_1\,,\,y_1)$$

## 2. 分布函数的性质（定理3.1.1）

$1^{\circ}$ $F(x,y)$ 是变量 $x$ 和 $y$ 的不减函数，即对于任意固定的 $y$，当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2,y) \ge F(x_1,y)$，

对于任意固定的 $x$，当 $y_2 > y_1$ 时 $F(x,y_2) \ge F(x,y_1)$.

$2^{\circ}$ $0 \le F(x,y) \le 1$，且有

对于任意固定的 $y$，$F(-\infty,y) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = 0$,

对于任意固定的 $x$，$F(x,-\infty) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0$,

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$

$3^{\circ}$ $F(x,y)=F(x+0,y),F(x,y)=F(x,y+0),$

即 $F(x,y)$ 关于 $x$ 右连续,关于 $y$ 也右连续.

$4^{\circ}$ 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ x_1<x_2,\ y_1<y_2,$

有 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0.$

# 三、二维离散型随机变量

## 1. 定义3.1.3

若二维随机变量 $(X, Y)$ 所取的可能值是有限对或可列无穷多对,则称 $(X, Y)$ 为二维离散型随机变量.

## 2. 二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 所有可能取的值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \cdots$, 记

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

称此为二维离散型随机变量 $(X,Y)$ 的分布律, 或随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合分布律.

二维随机变量 $(X,Y)$ 的分布律也可表示为

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | $y_2$ | $\cdots$ | $y_j$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $p_{12}$ | $\cdots$ | $p_{1j}$ | $\cdots$ |
| $x_2$ | $p_{21}$ | $p_{22}$ | $\cdots$ | $p_{2j}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $p_{i2}$ | $\cdots$ | $p_{ij}$ | $\cdots$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | |

其中 $p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

问题：如何求（X，Y）的分布律？

（1）分别确定X，Y的可能取值；

（2）求每个 $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$

方法一：利用概率的乘法公式计算

方法二：直接利用古典概率计算

**例3.1.1** 设随机变量 $X$ 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取值, 另一个随机变量 $Y$ 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数值. 试求 $(X,Y)$ 的分布律.

**解** $\{X=i, Y=j\}$ 的取值情况是： $i=1,2,3,4,$

$j$取不大于$i$的正整数. 且由乘法公式得

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j \mid X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},$$

$$i=1,2,3,4, \quad j \le i.$$

于是 $(X,Y)$ 的分布律为

| $X \backslash Y$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{4}$ | 0 | 0 | 0 |
| 2 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | 0 | 0 |
| 3 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{12}$ | 0 |
| 4 | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{16}$ |

**练习** 从一个装有3支蓝色、2支红色、3支绿色圆珠笔的盒子里, 随机抽取两支, 若 $X$、$Y$ 分别表示抽出的蓝笔数和红笔数,求 $(X, Y)$ 的分布律.

**解** X，Y=0，1，2， 且X+Y≤2, 则(X,Y)的可能取值

(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,2), (2,0).

抽

抽取一支绿笔,一支红笔

$C_8$ 28

$$P\{X=0, Y=1\}=\frac{C_2^1 C_3^1}{C_8^2}=\frac{3}{14},$$ 其余类似可得

故所求分布律为

| $X \backslash Y$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 3/28 | 3/14 | 1/28 |
| 1 | 9/28 | 3/14 | 0 |
| 2 | 3/28 | 0 | 0 |

# 说明

离散型随机变量 $(X,Y)$ 的分布函数归纳为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

其中和式是对一切满足 $x_i \le x, y_j \le y$ 的 $i, j$ 求和.

# 四、二维连续型随机变量

## 1.定义3.1.4

对于二维随机变量 $(X,Y)$的分布函数 $F(x,y)$，如果存在非负的函数 $f(x,y)$使对于任意 $x,y$有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,$$

则称 $(X,Y)$ 是连续型的二维随机变量，函数 $f(x,y)$ 称为二维随机变量 $(X,Y)$的概率密度函数，或称为随机变量 $X$ 和 $Y$ 的联合概率密度函数.

## 2.性质（定理3.1.3）

(1) $f(x,y)\geq 0,\ \ x,y\in(-\infty,+\infty).$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\ \mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y=1.$

(3) 设 $G$ 是 $xoy$ 平面上的一个区域，点 $(X,Y)$ 落在 $G$ 内的概率为

$$P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_{G} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y.$$

(4)若 $f(x,y)$ 在 $(x,y)$ 连续，则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y).$

## 3.说明

几何上, $z = f(x, y)$ 表示空间的一个曲面.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

表示介于 $f(x, y)$和 $xoy$ 平面之间的空间区域的全部体积等于1.

$$P\{(X, Y) \in G\} = \iint_G f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$P\{(X, Y) \in G\}$的值等于以$G$为底,以曲面$z = f(x, y)$为顶面的柱体体积.

例3.1.2 设二维随机变量 $(X,Y)$ 具有概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

（1）求常数A；

（2）求联合分布函数 $F(x,y)$；

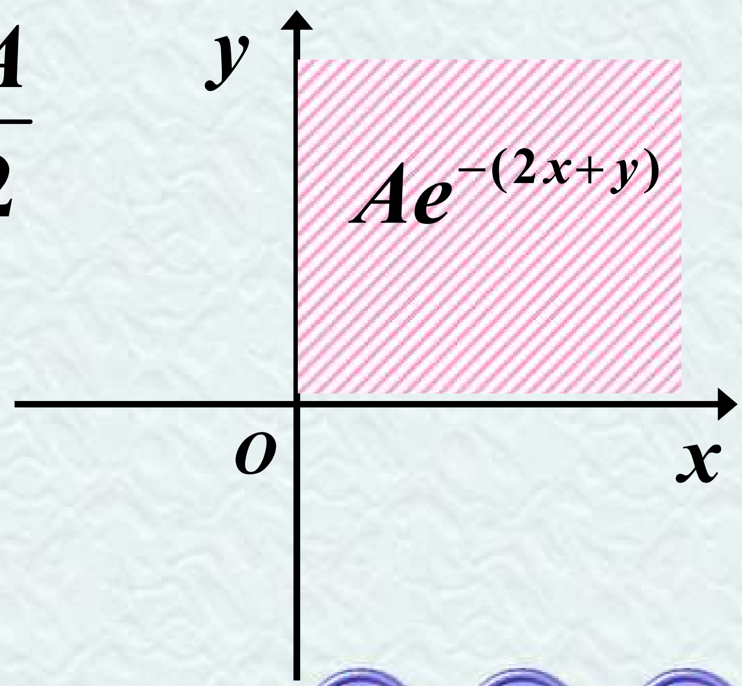
（3）求 $P(X\le Y)$；

**解**

$$(1)1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{R^2\setminus I}0dxdy+\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{A}\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}dx\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\,\mathrm{d}y=\frac{A}{2}$$




$$\therefore\quad A=2$$

解 (2) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2\mathrm{e}^{-(2u+v)}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

得 $$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{-y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(3) 将 $(X,Y)$看作是平面上随机点的坐标,

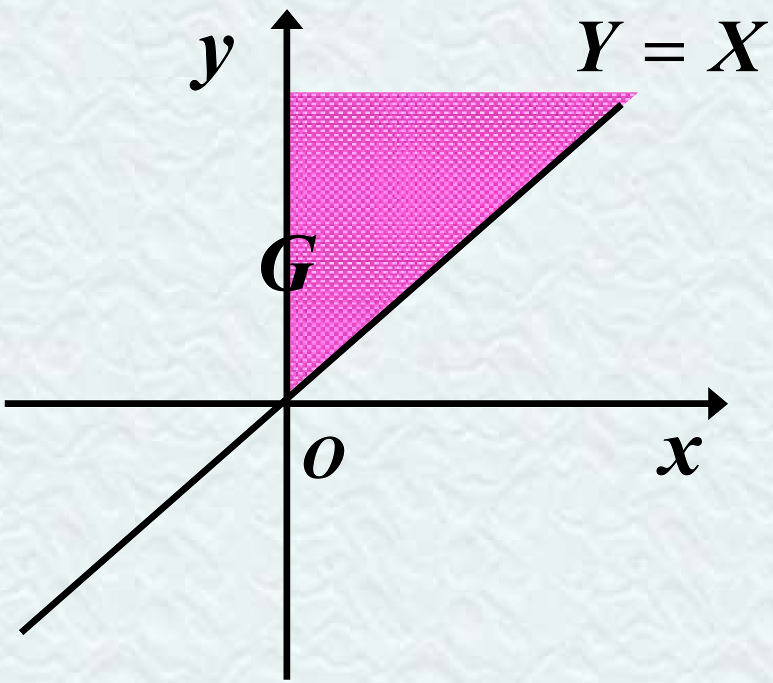
即有 $\{X \le Y\} = \{(X,Y) \in G\},$

$$P\{X \le Y\} = P\{(X,Y) \in G\}$$

$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_x^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{3}.$$



# 两个常用的分布

## 1.均匀分布

定义3.1.5　设 $D$ 是平面上的有界区域, 其面积为 $S$ $(S \neq 0)$, 若二维随机变量 $(X, Y)$ 具有概率密度函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S}, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则称 $(X, Y)$ 在 $D$ 上服从均匀分布.

# 练习册P15

8. 二维随机变量$(X,Y)$服从区域$D=\{(x,y)|(x-1)^2+y^2\leq 1\}$上的均匀分布，

则$P\{X<Y\}=$______________，$P\{X+Y>1\}=$______________.

## 2.二维正态分布

定义3.1.6　若二维随机变量 $(X,Y)$ 具有概率密度函数

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}$$

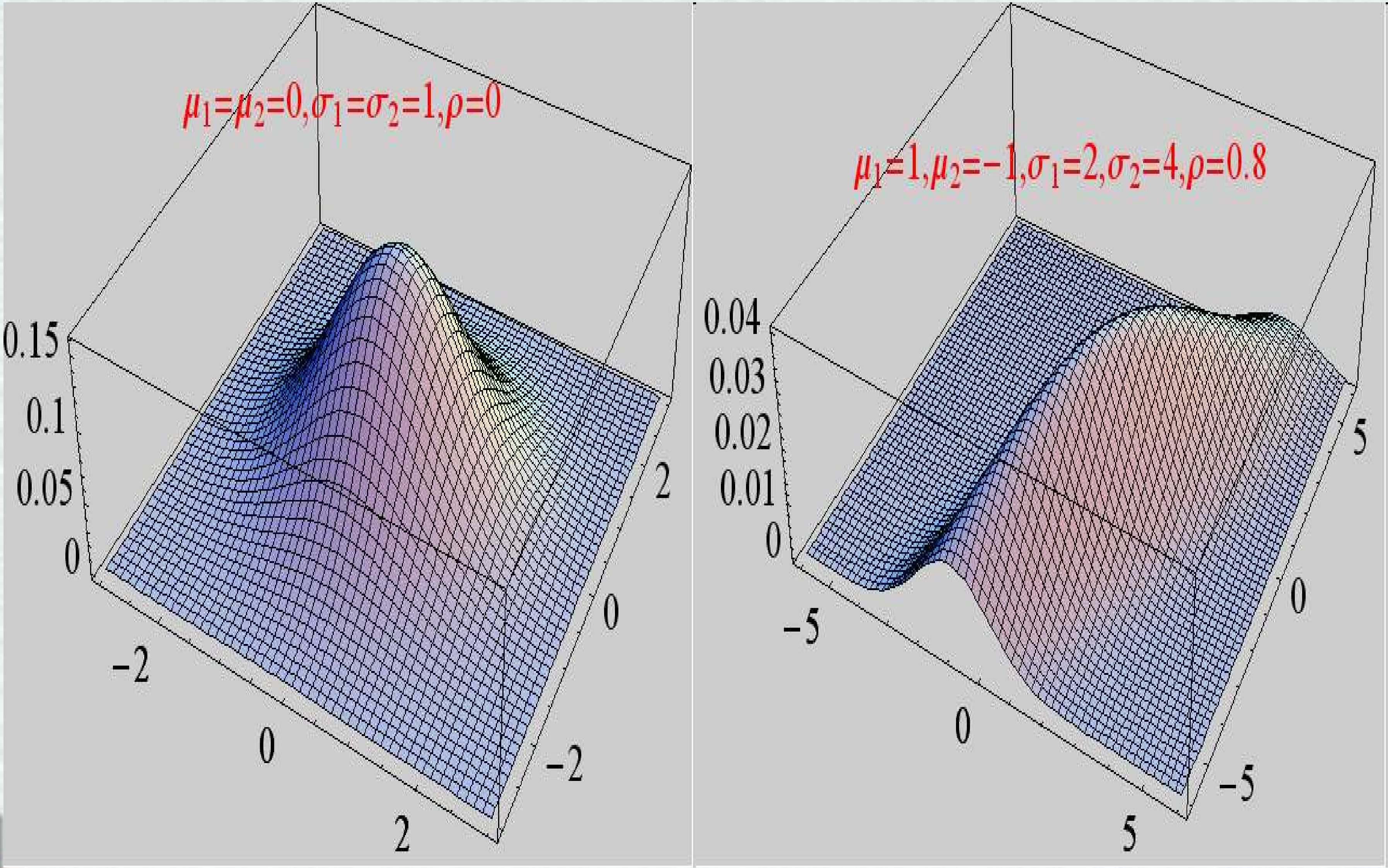
$$(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty),$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$均为常数,且$\sigma_1>0,\sigma_2>0,-1<\rho<1.$

则称 $(X,Y)$服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的二维正态分布 .记为

$$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

# 二维正态分布的图形



$\mu_1=\mu_2=0,\sigma_1=\sigma_2=1,\rho=0$
0.15
0.1
0.05
0
-2
0
2
2
0
-2
$\mu_1=1,\mu_2=-1,\sigma_1=2,\sigma_2=4,\rho=0.8$
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-5
0
5
5
0
-5

# 推广　$n$ 维随机变量的概念

**定义**　设 $E$ 是一个随机试验，它的样本空间是 $S$，设 $X_1 = X_1(e), X_2 = X_2(e), \cdots, X_n = X_n(e)$，是定义在 $S$ 上的随机变量，由它们构成的一个 $n$ 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 $n$ 维随机向量或 $n$ 维随机变量.

对于任意 $n$ 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，$n$ 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的联合分布函数.