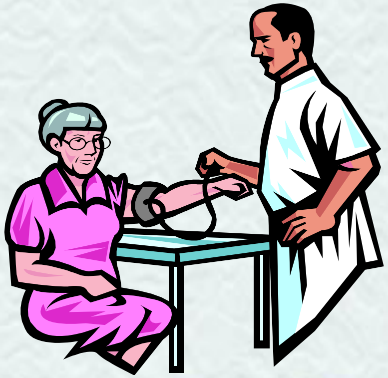
§3.3 二维随机变量的函数的分布

一、问题的引入

有一大群人,令 X 和 Y 分别表示一个人的年龄和体重, Z 表示该人的血压,并且已知 Z 与 X,Y 的函数关系 $Z=g(X,Y)$, 如何通过 X,Y 的分布确定 Z 的分布.

为了解决类似的问题下面我们讨论随机变量函数的分布.



二、二维离散型随机变量函数的分布

例3.3.1 设随机变量 (X,Y) 的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.2	0.3

求 (1)$Z_1 = X + Y$, (2)$Z_2 = \max(X,Y)$ 的分布律.

解

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.2	0.3

$X+Y$

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	-1	0	1
1	0	1	2

$X+Y$	-1	0	1	2
P	0.2	$0.1+0.1$ 0.2	$0.1+0.2$ 0.3	0.3

解

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0.2	0.1	0.1
1	0.1	0.2	0.3

$\max(X,Y)$

$X \backslash Y$	-1	0	1
0	0	0	1
1	1	1	1

$\max(X,Y)$	0	1
P	$0.2+0.1$ 0.3	$0.1+0.1+0.2+0.3$ 0.7

结论

若二维离散型随机变量的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,$$

则随机变量函数 $Z=g(X,Y)$ 的分布律为

$$P\{Z=z_k\}=P\{g(X,Y)=z_k\}$$

$$=\sum_{z_k=g(x_i,y_j)} p_{ij},\qquad k=1,2,\cdots.$$

补例1 设两个独立的随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	1	3
P_X	0.3	0.7

Y	2	4
P_Y	0.6	0.4

求随机变量 $Z=X+Y$ 的分布律.

解 因为 X 与 Y 相互独立, 所以

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\},$$

得

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$X \backslash Y$	2	4
1	0.18	0.12
3	0.42	0.28

$Z=X+Y$

$X \backslash Y$	2	4
1	3	5
3	5	7

所以

$Z=X+Y$	3	5	7
P	0.18	0.54	0.28

补例2 设相互独立的两个随机变量 X, Y 具有同一分布律,且 X 的分布律为

X	0	1
P	0.5	0.5

试求 : $Z = \max(X, Y)$ 的分布律.

解 因为X与Y相互独立,

所以 $P\{X = i, Y = j\} = P\{X = i\}P\{Y = j\}$,

于是

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$$Z=\max(X,Y)$$

$X \backslash Y$	0	1
0	$1/2^2$	$1/2^2$
1	$1/2^2$	$1/2^2$

$X \backslash Y$	0	1
0	0	1
1	1	1

于是 $P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=1/4$

$$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}$$
$$+P\{X=1,Y=1\}=3/4$$

故$Z=\max(X,Y)$的分布律为

Z	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

例3.3.2 独立的泊松分布对参数具有可加性

$r.v.X \sim \pi(\lambda_1),\ Y \sim \pi(\lambda_2)$, 且独立，则$X+Y \sim \pi(\lambda_1+\lambda_2)$.

证明 由题意知，X,Y的所有可能取值均为$0,1,2,\cdots$，因此，Z的所有可能取值也是$0,1,2,\cdots$，故Z为离散型随机变量，且对任意$n\geq 0$有

$$
\begin{aligned}
P(Z=n) &= P(X+Y=n)=P\left(\bigcup_{k=0}^{n}\{X=k,Y=n-k\}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X=k,Y=n-k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=n-k)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_1^k}{k!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda_2}\\
&= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{n!}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\lambda_1^k\lambda_2^{n-k}=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.
\end{aligned}
$$

此即$Z=X+Y\sim\pi(\lambda_1+\lambda_2)$.

结论 设X和Y是相互独立的随机变量，且$X\sim b(n_1,\ p)$，$Y\sim b(n_2,\ p)$，则随机变量$Z=X+Y\sim b(n_1+n_2,\ p)$.(该性质称为**二项分布对第一参数具有可加性**)

练习册P15

9. 网站有两台服务器A和B，每分钟的访问次数都服从泊松分布且相互独立，平均每分钟的访问次数分别为360次和240次，则一秒钟内两台服务器总共接到至少2次访问的概率是____________.

例3.3.3 设X和Y的分布律分别为

X	-1	0	1
P	$1/4$	$1/2$	$1/4$

，

Y	0	1
P	$1/2$	$1/2$

且$P(XY=0)=1$

（1）求X和Y的联合分布律；

（2）问X与Y是否相互独立？为什么？

三、二维连续型随机变量函数的分布

1. Z=X+Y 的分布

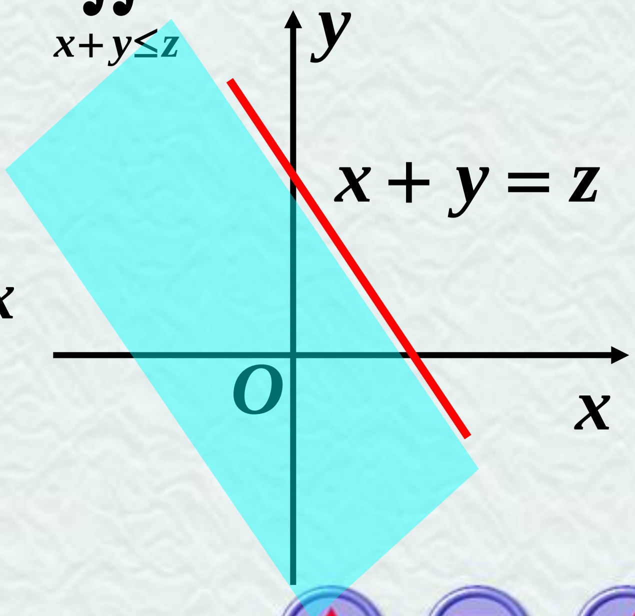
设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,则$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z\}=\iint_{x+y\le z} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]dx$$

$$\overset{y=u-x}{=\!=\!=}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z} f(x,u-x)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,u-x)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}u.$$



由此可得概率密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 X 与 Y 对称, $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y.$

当 X, Y 独立时, $f_Z(z)$也可表示为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

卷积公式

或 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y,$

例3.3.4 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

由公式 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$$

得 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{t=x-\frac{z}{2}}{=\!=\!=\!=}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2(\sqrt{2})^2}}.$$

即 Z 服从 $N(0,2)$ 分布.

注3.3.2

一般,设X,Y相互独立且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$,$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.则$Z=X+Y$仍然服从正态分布,且有$Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

若 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n,$ 且它们相互独立,

则 $\sum_{i=1}^{n}k_iX_i+b\sim N(\sum_{i=1}^{n}k_i\mu_i+b,\sum_{i=1}^{n}k_i^2\sigma_i^2)$, ($k_i$不全为零)

练习册P15

1. 设二维随机变量$(X,Y)\sim N(0,1,0,1,0)$，则 $P\{|X-Y|\le\sqrt{2}\}=(\quad)$

A. 0.5　　B. 0.6826　　C. 0.8413　　D. 0.9332

结论： $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

（1）X与Y的边缘密度函数是一元正态分布；

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

（2）X与Y相互独立的充要条件是 $\rho=0$.

例3.3.5 设随机变量 X 与 Y 相互独立,密度函数分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

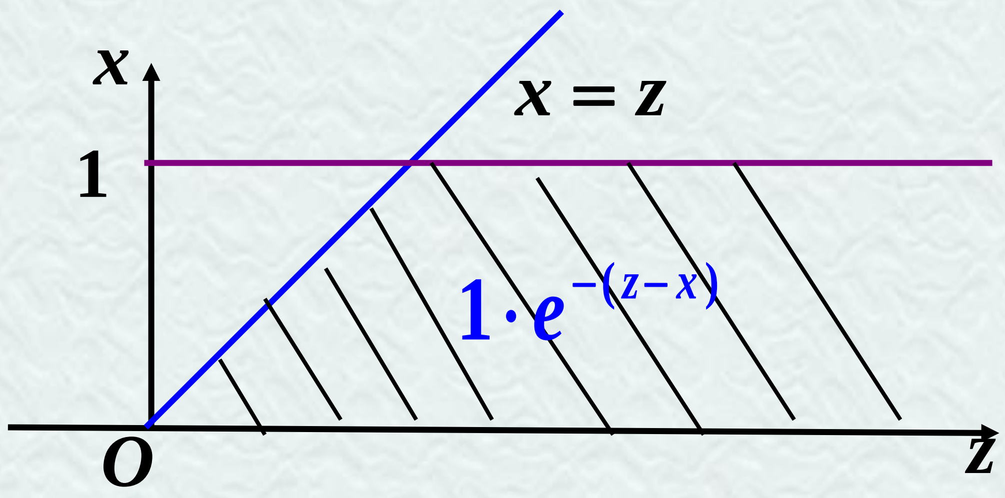
求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立,

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,f_Y(z-x)\,\mathrm{d}\,x.$$

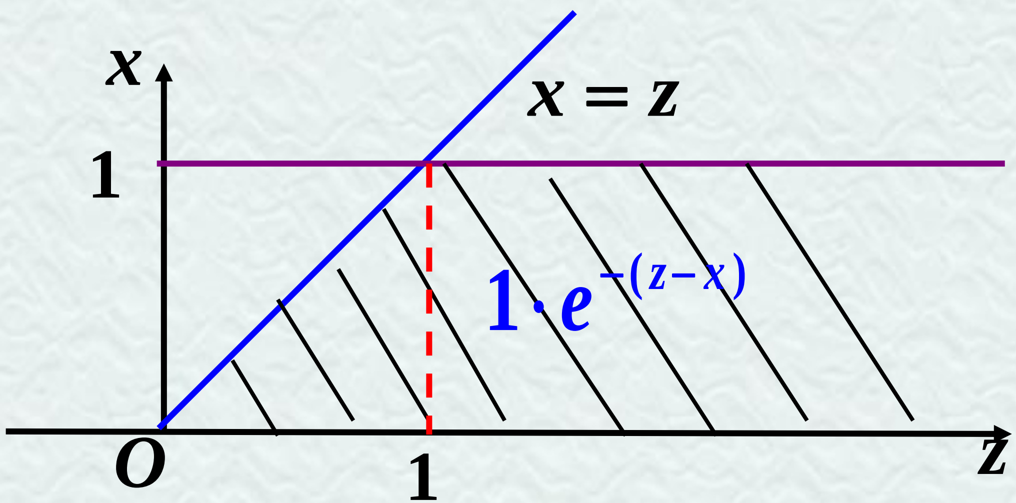
当 $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ z - x > 0 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x < z \end{cases}$ 时

$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$ 的被积函数不为零



此时 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$

$$=\begin{cases}\int_0^z e^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x, & 0<z<1,\\ \int_0^1 e^{-(z-x)}\,\mathrm{d}x, & z\ge 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases} \qquad =\begin{cases}1-e^{-z}, & 0<z<1,\\ (e-1)e^{-z}, & z\ge 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



练习册P16

4. 设二维随机变量(X,Y)的概率密度函数$f(x,y)=\begin{cases}0.25xy, & 0\le x,y\le 2\\ 0, & 其他\end{cases}$，

(3) 当 $0\le z\le 2$ 时，求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度函数$f_Z(z)$.

练习 设X, Y的联合概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0\le x\le 1,\ y>0,\ x+y\le 1\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求 $Z=X+Y$ 概率密度.

解 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x.$

$$=\begin{cases}\int_0^z 6x\,\mathrm{d}x, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad =\begin{cases}3z^2, & 0<z<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2. $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设随机变量X,Y的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$,

则有 $\boxed{F_{\max}(z)=P\{M\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}}$

X, Y独立 且同分布

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z)=\left[F(z)\right]^2$$

$$\boxed{F_{\min}(z)=P\{N\le z\}=1-P\{N>z\}=1-P\{X>z,Y>z\}}$$

X, Y独立

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}$$

且同分布

$$=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]=1-[1-F(z)]^2$$

推广

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为 $F_{X_i}(x_i)\ (i = 1, 2, \cdots, n)$

则 $M = \max(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 及 $N = \min(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数分别为

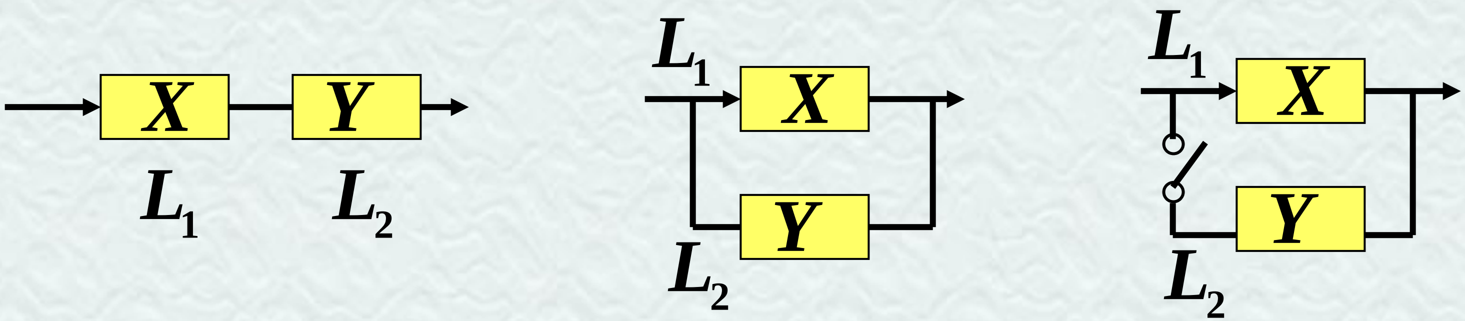
$$F_{\max}(z) = F_{X_1}(z) \cdot F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)].$$

若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且具有相同的分布函数 $F(x)$,则

$$F_{\max}(z) = [F(z)]^n, \quad F_{\min}(z) = 1 - [1 - F(z)]^n.$$

补例3 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 联接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作), 如图所示.



设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y,已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, x>0,\\ 0, \qquad x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, y>0,\\ 0, \qquad y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\neq\beta$. 试分别就以上三种联接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.

解 (i)串联情况

由于当 L_1, L_2 中有一个损坏时,系统 L 就停止工作,所以这时 L 的寿命为 $Z=\min(X,Y)$.

由 $f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, x>0,\\ 0, \qquad x\le 0,\end{cases}\Rightarrow F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, x>0,\\ 0, \qquad x\le 0,\end{cases}$

由 $f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, y>0,\\ 0, \qquad y\le 0;\end{cases} \Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}1-\beta e^{-\beta y}, y>0,\\ 0, \qquad y\le 0.\end{cases}$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, z>0,\\ 0, \qquad z\le 0.\end{cases}$$

$$\Rightarrow f_{\min}(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, z>0,\\ 0, \qquad z\le 0.\end{cases}$$

(ii)并联情况

由于当且仅当 L_1, L_2 都损坏时,系统 L 才停止工作,

所以这时 L 的寿命为 $Z = \max(X, Y)$.

$Z = \max(X, Y)$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z) = F_X(z) \cdot F_Y(z) = \begin{cases} (1 - e^{-\alpha z})(1 - e^{-\beta z}), & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

$$f_{\max}(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha + \beta) e^{-(\alpha + \beta) z}, & z > 0, \\ 0, & z \le 0. \end{cases}$$

(iii)备用的情况

由于这时当系统 L_1 损坏时,系统 L_2 才开始工作,因此整个系统 L 的寿命 Z 是 L_1, L_2 两者之和,即

$$Z = X + Y$$

$Z = X + Y$ 的概率密度为

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \int_0^z \alpha \mathrm{e}^{-\alpha x} \beta \mathrm{e}^{-\beta(z-x)}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}(\mathrm{e}^{-\beta z} - \mathrm{e}^{-\alpha z}), & z > 0 \\ 0, & z \le 0 \end{cases}$$

补例4 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim U(0,\theta)$ 独立同分布

令 $X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$,

$X_{(n)}$ 的分布函数为 $F_{X_{(n)}}(x) = \left[F(x)\right]^n$

$X_{(n)}$ 的概率密度为 $f_{X_{(n)}}(x) = n\left[F(x)\right]^{n-1} f(x)$

$$f_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} \dfrac{nx^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

补例4 $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim U(0,\theta)$ 独立同分布

令 $X_{(1)} = \min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$,

$X_{(1)}$的分布函数为 $F_{X_{(1)}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n$

$X_{(1)}$的概率密度为 $f_{X_{(1)}}(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} f(x)$

$$f_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} \dfrac{n(\theta - x)^{n-1}}{\theta^n}, & 0 \le x \le \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

练习册P17

9. 随机变量 X_1, X_2相互独立且都服从$U(0,1)$, 求以下随机变量的概率密度函数和数学期望

（1）X_1+X_2；（2）Max (X_1, X_2)；（3）Min (X_1, X_2)；（4）$|X_1-X_2|$

补例5 设随机变量 X 与 Y 相互独立,且其分布密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Z=2X+Y$ 的概率密度.

解 由于 X 与 Y 相互独立,

所以 (X,Y) 的概率密度函数为

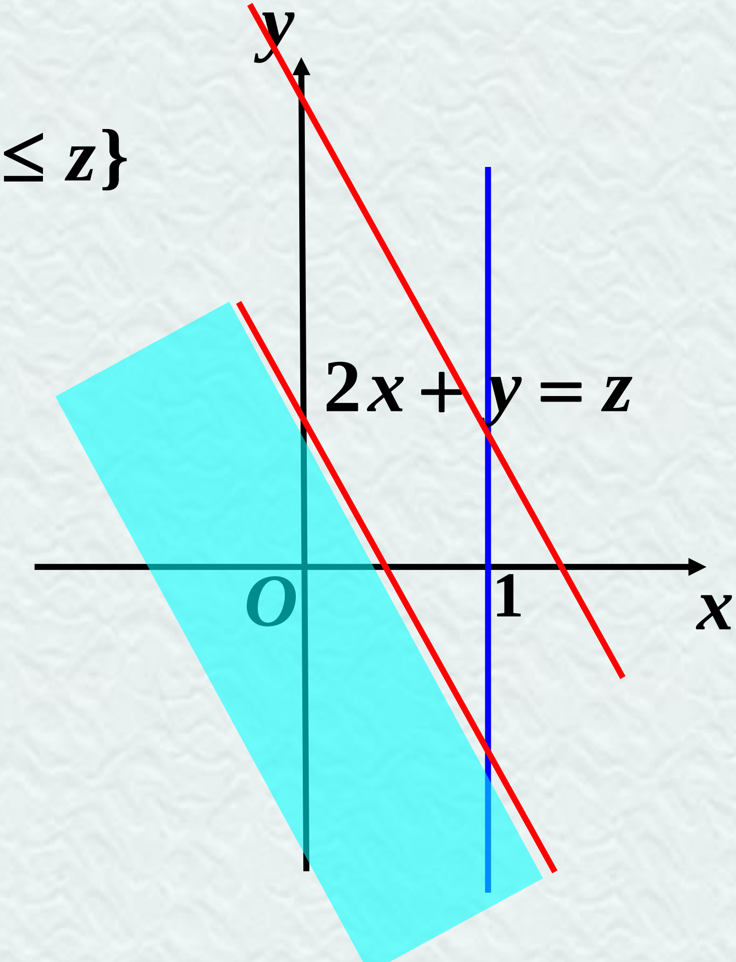
$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

随机变量 Z 的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{2X + Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{2X+Y \le z} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \begin{cases} 0, & z \le 0, \\ \int_0^{\frac{z}{2}} dx \int_0^{z-2x} e^{-y}\,\mathrm{d}y, & 0 < z \le 2, \\ \int_0^{1} dx \int_0^{z-2x} e^{-y}\,\mathrm{d}x, & z > 2. \end{cases}$$



$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ \int_0^{\frac{z}{2}}(1-\mathrm{e}^{2x-z})\,\mathrm{d}\,x=(z+e^{-z}-1)\big/2, & 0<z\le 2,\\ \int_0^{1}(1-\mathrm{e}^{2x-z})\,\mathrm{d}\,x=1-(e^{2}-1)e^{-z}\big/2, & z>2.\end{cases}$$

所以随机变量 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}0, & z\le 0,\\ (1-\mathrm{e}^{-z})\big/2, & 0<z\le 2,\\ (\mathrm{e}^{2}-1)\mathrm{e}^{-z}\big/2, & z\ge 2.\end{cases}$$

补例6 设 X 和 Y 的联合概率密度为

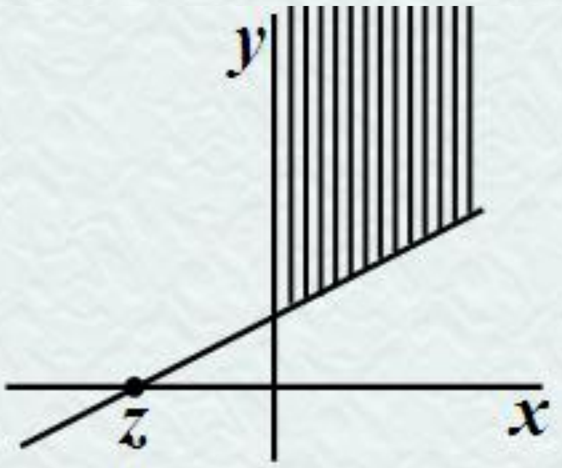
$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Z=X-Y$ 概率密度.

解 先求 $Z=X-Y$ 的分布函数 $F_Z(z)$.

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X-Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x-y\le z} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

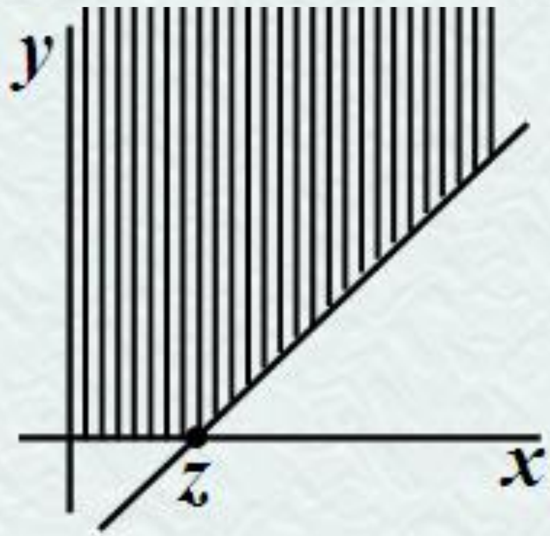


$z\le 0$, $F_Z(z)=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{x-z}^{+\infty} e^{-(x+y)}\mathrm{d}y$

$z \le 0$, $F_Z(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{x-z}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+y)} \mathrm{d}y$

$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x} [-\mathrm{e}^{-y}] \Big|_{y=x-z}^{y=+\infty} \mathrm{d}x$

$= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{e}^{z} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{z}.$



当 $z > 0$ 时, 如图有

$F_Z(z) = \iint\limits_{x-y \le z} f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \mathrm{d}y \int_0^{y+z} \mathrm{e}^{-(x+y)} \mathrm{d}x$

或 $= \int_0^{z} \mathrm{d}x \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+y)} \mathrm{d}y + \int_z^{+\infty} \mathrm{d}x \int_{x-z}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(x+y)} \mathrm{d}y$

$$=\int_0^z e^{-x}[-e^{-y}]\Big|_{y=0}^{y=+\infty}dx+\int_z^{+\infty}e^{-x}[-e^{-y}]\Big|_{y=x-z}^{y=+\infty}dx$$

$$=\int_0^z e^{-x}\,dx+\int_z^{+\infty}e^{-2x+z}\,dx=1-e^{-z}+\frac{1}{2}e^{-z}=1-\frac{1}{2}e^{-z}.$$

将 $F_Z(z)$ 关于求导数, 得到 Z 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{z}, & z\le 0,\\ \frac{1}{2}e^{-z}, & z>0.\end{cases}$$

即 $f_Z(z)=\frac{1}{2}e^{-|z|}.$

例3.3.6 设随机变量 (X,Y) 在矩形

$$G=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 2,0\le y\le 1\}$$

上服从均匀分布,试求边长为 X 和 Y 的矩形面积 S 的概率密度 $f(s)$.

解 由题设知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 若\ (x,y)\in G,\\ 0, & 若\ (x,y)\notin G.\end{cases}$$

$S=X\cdot Y$, 设 $F(s)=P\{S\le s\}$ 为 S 的分布函数,

则当 $s<0$ 时, $F(s)=P\{XY\le s\}=0$,

当 $s \geq 2$ 时, $F(s) = P\{XY \leq s\} = 1,$

当 $0 \leq s < 2$ 时,

$$F(s) = P\{S \leq s\} = P\{XY \leq s\} = 1 - P\{XY > s\}$$

$$= 1 - \iint\limits_{xy>s} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1 - \int_s^2 \mathrm{d}x \int_{\frac{s}{x}}^1 \frac{1}{2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{s}{2}(1 + \ln 2 - \ln s).$$

故 $$f(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\ln 2 - \ln s), & 0 \leq s < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$