

## 第8章 重积分

定义在闭区间  $[a, b]$  上的一元函数  $f(x)$  在经过分划、近似、求和、取极限后, 得到定积分

$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ , 这种积分思想可以推广到定义于坐标平面的闭区域  $D$  上的二元函数

$f(x, y)$ , 就成为二重积分, 推广到空间闭域  $\Omega$  上的三元函数  $f(x, y, z)$ , 就成为三重积分, 二重积分和三重积分统称为重积分.

### §8.1 直角坐标下的二重积分

#### 8.1.1 二重积分的概念与性质

##### 一、二重积分的概念

###### 1. 情境问题

###### 问题 1——曲顶柱体的体积

如图 8.1.1, 设函数  $z = f(x, y)$  在  $xOy$  面上的有界闭区域  $D$  上定义且连续,  $f(x, y) \geq 0$ . 以曲面  $z = f(x, y)$  为顶部,  $D$  为底部, 以  $D$  的边界为准线且母线平行于  $z$  轴的柱面为侧面确定了一个几何体, 称为  $f(x, y)$  在  $D$  上的曲顶柱体 (简称曲顶柱体), 怎样计算它的体积呢?

类似于定积分的思想, 我们的做法是:

(1) 分划: 用任意曲线网分  $D$  为  $n$  个区域  $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \dots, \Delta\sigma_n$  (它们的面积仍记为  $\Delta\sigma_k$ ), 以它们为底把曲顶柱体分为  $n$  个小曲顶柱体.

(2) 近似: 在每个  $\Delta\sigma_k$  中任取一点  $(\xi_k, \eta_k)$ , 则

$$\Delta V_k \approx f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

(3) 求积分和:  $V = \sum_{k=1}^n \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$ .

(4) 取极限: 令  $\lambda(\Delta\sigma_k) = \max \{ \|P_1 P_2\| \mid P_1, P_2 \in \Delta\sigma_k \}$  (第  $k$  小块的直径),

令  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{ \lambda(\Delta\sigma_k) \}$ , 则曲顶柱体的体积  $V$  应该看作“无限细分”后的积

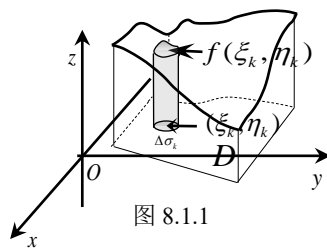


图 8.1.1

注 为简便起见, 本章以后除非特别说明, 平面有界区域都是可求面积的.

注 习惯上, 如同线段  $AB$  的长度仍可用  $AB$  来表示一样, 分划中的区域  $\Delta\sigma_k$  的面积仍记为  $\Delta\sigma_k$ ; 在以后的二重积分、三重积分、曲线积分和曲面积分的积分和分析中还将会出现类似的做法.

注 可以把曲顶柱体比作下端被切平的一根竖放着的萝卜, 先切成许多很细的萝卜丝, 忽略顶端的“不平”, 把它们当作小柱体计算体积, 然后求和.

分和, 即

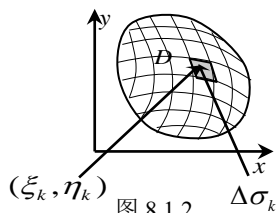
$$V = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k.$$

## 问题 2——平面薄片的质量

有一个平面薄片, 在  $xOy$  平面上占有区域  $D$ , 其面密度为  $\mu(x, y)$  为连续函数, 该薄片的质量怎么求呢?

如果  $\mu(x, y) \equiv \mu$  (常数), 设  $D$  的面积为  $\sigma$ , 则根据科学常识,  $m = \mu \cdot \sigma$ .

如果  $\mu(x, y)$  不是常数, 仍可用“划分、近似、求积分和、取极限”的步骤来做:



(1) 用任意曲线网分  $D$  为  $n$  个小区间  $\Delta \sigma_1, \Delta \sigma_2, \dots, \Delta \sigma_n$ ;

(2) 在每个  $\Delta \sigma_k$  中任取一点  $(\xi_k, \eta_k)$ , 则第  $k$  小块的质量  $\Delta m_k \approx \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ );

(3) 作和式  $m = \sum_{k=1}^n \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$ ;

(4) 质量  $m$  应该是  $D$  被无限细分后的和式的极限, 就是说, 记  $\lambda(\Delta \sigma_k)$  为  $\Delta \sigma_k$  的直径, 令  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{\lambda(\Delta \sigma_k)\}$ , 则

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k.$$

这两个问题的共性在于: 解决问题的步骤相同, 所求数量的结构式相同.

## 2. 二重积分的定义

**定义 8.1.1** 设  $f(x, y)$  是定义在有界闭区域  $D$  上的有界函数, 将  $D$  用任意曲线网分划成  $n$  个小区间  $\Delta \sigma_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) (它们的面积仍记为  $\Delta \sigma_k$ ), 任取  $(\xi_k, \eta_k) \in \Delta \sigma_k$ , 作乘积  $f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$ , 并作积分和

$\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$ , 如果当  $\Delta \sigma_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) 直径的最大者  $\lambda \rightarrow 0$  时,

这个和式的极限  $I$  存在, 且  $I$  的值与区域组  $\{\Delta \sigma_k\}$  的分划法和介点组

$\{(\xi_k, \eta_k)\}_{k=1}^n$  的取法无关, 则称  $f(x, y)$  在  $D$  上可积.  $I$  为  $f(x, y)$  在  $D$  上的二重积分, 记作  $\iint_D f(x, y) d\sigma$ ,

即

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k = \iint_D f(x, y) d\sigma. \quad (8.1.1)$$

这时,  $f(x, y)$  称为被积函数,  $x, y$  称为积分变量,  $D$  称为积分区域.

如果  $f(x, y)$  在  $D$  上可积, 可用平行于坐标轴的直线来分划区域  $D$ , 这时  $\Delta \sigma_k = \Delta x_i \Delta y_j$ , 因此直

注 (1) 除非特别说明, 本章凡积分中的“区域”都是指“有界闭区域”;

(2) 这里说“分划”而不说“分割”, 是因为分划可以让小区域“共享”边界, 得到小的闭区域, 而分割容易产生“切割”的印象, 边界曲线非此即彼, 小区域就不全是闭的了. 但在具体计算时, “分划”与“分割”没有区别 (边界线上的二重积分为零).

角坐标系下的面积元素  $d\sigma$  也常记作  $dx dy$ .  $f(x, y)d\sigma$  称为积分元.

根据这个定义, 问题 1 中曲顶柱体体积为

$$V = \iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(x, y) dx dy;$$

问题 2 中平面薄片的质量为

$$m = \iint_D \mu(x, y) d\sigma = \iint_D \mu(x, y) dx dy.$$

当被积函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上大于或等于零时, 二重积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  总可以理解为

$f(x, y)$  在  $D$  上的曲顶柱体的体积.

如果  $D$  被分划成为有限个闭区域而  $f(x, y)$  分别在这些区域上连续, 则称  $f(x, y)$  在  $D$  上分片连续. 与定积分相似地, 我们有

**定理 8.1.1** (二重积分存在定理) 若函数  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续或分片连续, 则  $f(x, y)$  在  $D$  上可积.

本章如无特别声明, 积分区域  $D$  均为有界闭区域, 并且  $D$  的边界都是分段光滑的连续曲线;  $f(x, y)$  均为  $D$  上连续或分片连续的函数; 我们规定, 二重积分在任何区域的边界以及它们的子集 (点或线) 上的值为零.

## 二、二重积分的性质

与定积分完全相似地, 二重积分有下列性质:

(1) 线性性质  $\iint_D [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] d\sigma = \alpha \iint_D f(x, y) d\sigma + \beta \iint_D g(x, y) d\sigma.$

(2) 可加性  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma$  ( $D_1, D_2$  是  $D$  的一个分划).

(3) 度量性质 若在  $D$  上  $f(x, y) \equiv 1$ ,  $\sigma$  为  $D$  的面积, 则

$$\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$$

(4) 保序性 若在  $D$  上  $f(x, y) \leq \varphi(x, y)$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \leq \iint_D \varphi(x, y) d\sigma.$$

特别地, 由于  $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$ ,

$$\left| \iint_D f(x, y) d\sigma \right| \leq \iint_D |f(x, y)| d\sigma. \quad (8.1.2)$$

(5) 估值定理 设  $M = \max_D f(x, y)$ ,  $m = \min_D f(x, y)$ ,  $\sigma$  为  $D$  的面积, 则有

$$m\sigma \leq \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M\sigma.$$

(6)二重积分的中值定理 若函数  $f(x, y)$  在闭区域  $D$  上连续,  $\sigma$  为  $D$  的面积, 则至少存在一点  $(\xi, \eta) \in D$ , 使

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \sigma. \quad (8.1.3)$$

例 8.1.1 比较下列二重积分的大小:

(1)  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$  与  $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ , 其中  $D$  为圆

$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$  所围闭区域.

(2)  $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$  与  $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ , 其中  $D$  是三角形闭区域,

三顶点各为  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ ,  $(2,0)$ .

解 (1) 如图 8.1.3, 积分域  $D$  的边界为圆周  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 2$ ,

它与  $x$  轴交于点  $(1,0)$ , 域  $D$  位于直线  $x+y=1$  的上方, 故在  $D$  的内部  $x+y > 1$ , 从而

$$(x+y)^2 < (x+y)^3, \text{ 且}$$

$$\iint_D (x+y)^2 d\sigma < \iint_D (x+y)^3 d\sigma.$$

(2) 如图 8.1.4, 三角形斜边方程为  $x+y=2$ , 在  $D$  的内部恒有  $1 < x+y \leq 2 < e$ , 故  $0 < \ln(x+y) < 1$ , 于是

$$\ln(x+y) > [\ln(x+y)]^2,$$

因此

$$\iint_D \ln(x+y) d\sigma > \iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma.$$

例 8.1.2 估计积分  $I = \iint_D \frac{dx dy}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y}$  之值, 其中  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 10\}$ .

解  $D$  的面积为  $\sigma = (10\sqrt{2})^2 = 200$ . 由于  $\frac{1}{102} \leq \frac{1}{100 + \cos^2 x + \cos^2 y} \leq \frac{1}{100}$ ,

故  $\frac{200}{102} \leq I \leq \frac{200}{100}$ , 即:  $\frac{100}{51} \leq I \leq 2$ .

例 8.1.3 判断积分  $I = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy$  的正负号.

解 如图 8.1.5, 为了细致地估计积分值, 将积分区域  $D$  分割为  $D_1, D_2, D_3$ , 其中

注 中值定理之证: 由性质 5 可知,  $m \leq \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma \leq M$ , 由连续函数介值定理, 至少有一点  $(\xi, \eta) \in D$  使  $f(\xi, \eta) = \frac{1}{\sigma} \iint_D f(x, y) d\sigma$ .

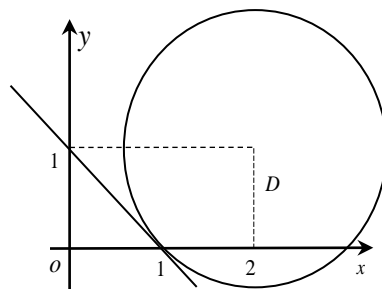


图 8.1.3

思考题 8.1.1 为什么在  $D$  的内部由  $f(x, y) < g(x, y)$  可以推出  $\iint_D f(x, y) d\sigma < \iint_D g(x, y) d\sigma$ ?

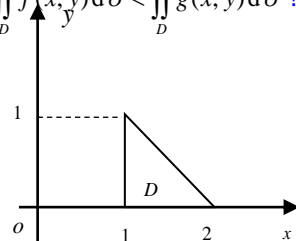


图 8.1.4

$$D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}, \quad D_2 = \{(x, y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 3\}, \quad D_3 = \{(x, y) | 3 < x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

则

$$0 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} 0 dx dy \leq \iint_{D_1} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{x^2+y^2 \leq 1} dx dy = \pi,$$

$$-2\sqrt[3]{2}\pi = \iint_{1 < x^2+y^2 \leq 3} -\sqrt[3]{2} dx dy \leq \iint_{D_2} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{1 < x^2+y^2 \leq 3} 0 dx dy = 0,$$

$$-\sqrt[3]{3}\pi = \iint_{3 < x^2+y^2 \leq 4} -\sqrt[3]{2} dx dy \leq \iint_{D_3} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{3 < x^2+y^2 \leq 4} -\sqrt[3]{2} dx dy = -\sqrt[3]{2}\pi.$$

于是

$$-(2\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3})\pi \leq I \leq (1 - \sqrt[3]{2})\pi.$$

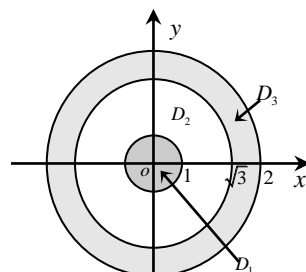


图 8.1.5

因为  $(1 - \sqrt[3]{2})\pi < 0$ , 故  $I$  为负值.

### 练习 8.1.1

1. 二重积分  $I = \iint_{|x|+|y| \leq 1} \ln(x^2 + y^2) dx dy$  的取值符号为\_\_\_\_\_.

2. 比较二重积分的大小:

(1)  $\iint_D (x+y)^2 d\sigma$  与  $\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ , 其中  $D$  是由  $x$  轴、 $y$  轴和直线  $x+y=1$  所围成;

(2)  $\iint_D \ln(x+y) d\sigma$  与  $\iint_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 3 \leq x \leq 7, 0 \leq y \leq 2\}$ ;

(3)  $\iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + 1) dx dy$  与  $\iint_D e^{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , 其中  $D$  由圆  $x^2 + y^2 = 1$  所围成.

3. 利用二重积分性质估计积分值:

(1)  $I = \iint_D (x+y+1) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ ;

(2)  $I = \iint_D (x^2 + 4y^2 + 9) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

## 8.1.2 二重积分的计算

### 一、直角坐标下二重积分的计算公式

我们来将二重积分化作两个定积分计算.

**定理 8.1.2** 设  $f(x, y)$  是定义在闭区域  $D$  上的连续函数,  $D$  可以表示为 X 型区域:

$D = \{(x, y) | \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x), a \leq x \leq b\}$ , 则有计算公式

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad (8.1.4)$$

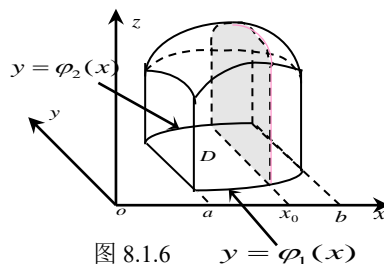


图 8.1.6

证 我们先假定  $f(x, y) \geq 0$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  是  $f(x, y)$  在  $D$  上的曲顶柱体的体积.

任取  $x_0 \in [a, b]$ , 则平面  $x = x_0$  截得柱体的截面积为  $A(x_0) = \int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0, y) dy$ ,

故此曲顶柱体的体积为

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \quad \text{即 (8.1.4) 成立.}$$

若  $f(x, y)$  是一般的 (含有负值的) 有界函数, 设它在有界闭区域  $D$  上的下界为  $m$ , 记

$F(x, y) = f(x, y) - m$ , 则  $F(x, y) \geq 0$ , 于是

$$\begin{aligned} \iint_D f(x, y) d\sigma &= \iint_D [F(x, y) + m] d\sigma = \iint_D F(x, y) d\sigma + \iint_D m d\sigma \\ &= \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} (f(x, y) - m) dy \right] dx + \iint_D m d\sigma = \int_a^b \left[ \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx. \end{aligned}$$

所以, 公式 (8.1.4) 对一般的有界函数都成立. 证毕.

上式右端也称作先对  $y$  后对  $x$  积分的累次积分 (或称二次积分).

累次积分的步骤是:

- (1) 先把  $x$  看作常数, 把  $f(x, y)$  看作是  $y$  的一元函数, 对  $y$  计算从  $\varphi_1(x)$  到  $\varphi_2(x)$  的积分;
- (2) 把所得的结果再对  $x$  计算在区间  $[a, b]$  上的定积分.

式 (8.1.4) 也常写为

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy. \quad (8.1.5)$$

若  $D$  表达为 Y 型区域:  $D = \left\{ (x, y) \left| \begin{array}{l} \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{array} \right. \right\}$ , 则类似于 (8.1.5) 式, 二重积分可化先对

$x$  再对  $y$  积分的累次积分:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_c^d \left[ \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx \right] dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) dx. \quad (8.1.6)$$

对于复杂的区域, 可以添加平行于坐标轴的直线, 把区域  $D$  分割为若干子区域, 使得每个子区域为 X 型或 Y 型区域, 再计算积分的和. 如图 8.1.7, 用一条竖线可以将区域  $D$

分划成三个既是 X 型又是 Y 型的区域  $D_1, D_2, D_3$ , 从而

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma + \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma.$$

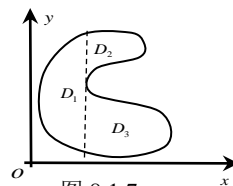


图 8.1.7

**命题 8.1.1** 设  $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ ,  $D = [a, b] \times [c, d]$ , 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy \quad (8.1.7)$$

**注** 集合  $A$  与  $B$  的直积  $A \times B$  被定义为  $\{(a, b) | a \in A, b \in B\}$ . 故  $[a, b] \times [c, d]$  为区间  $[a, b]$  与  $[c, d]$  的乘积, 即矩形区域  $\{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ .

证  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \int_a^b dx \int_c^d f_1(x) f_2(y) dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy$ . 证毕.

这个命题表明, 若矩形  $D$  上的被积函数  $f(x, y)$  可以“分离变量”(即化作两个不同变量的一元函数  $f_1(x)$  和  $f_2(y)$  的乘积), 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  可以化作两个定积分的乘积; 反之, 两个定积分的乘积也可以化为一个矩形上的二重积分.

应当特别注意的是: 二次积分是连续地作两次定积分, 但是由于其面积元素  $d\sigma = dx dy$  总是正数, 因而每个定积分的下限一定要小于上限.

例 8.1.4 求二重积分  $I = \iint_D xy d\sigma$ , 其中  $D$  是直线  $x=1$ ,  $y=x$  及  $y=2$  所围成的

三角形闭区域.

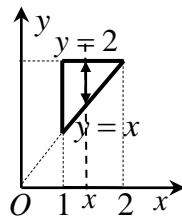


图 8.1.8

解法一 如图 8.1.8, 把  $D$  看作 X-型区域,  $x$  在  $D$  上的最小值为 1, 最大值为 2;  $D$  的上限函数  $\varphi_2(x)=2$ , 下限函数  $\varphi_1(x)=x$ . 故区域的表示为  $D = \{(x, y) | x \leq y \leq 2, 1 \leq x \leq 2\}$ . 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dx \int_x^2 xy dy = \int_1^2 x \left[ \frac{y^2}{2} \right]_x^2 dx = \int_1^2 x \left( 2 - \frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \int_1^2 \left( 2x - \frac{x^3}{2} \right) dx = \left[ x^2 - \frac{x^4}{8} \right]_1^2 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

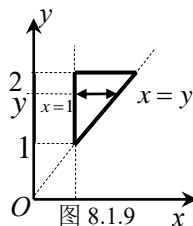


图 8.1.9

解法二 如图 8.1.9, 把  $D$  表示为 Y-型区域,  $y$  在  $D$  上的最小值为 1, 最大值为 2;  $D$  的上限函数  $\psi_2(x)=y$ , 下限函数  $\varphi_1(y)=1$ , 故区域的表示为  $D = \{(x, y) | 1 \leq x \leq y, 1 \leq y \leq 2\}$ . 于是

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 dy \int_1^y xy dx = \int_1^2 y \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^y dy = \int_1^2 y \left( \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2} \right) dy \\ &= \int_1^2 \left( \frac{y^3}{2} - \frac{y}{2} \right) dy = \left[ \frac{y^4}{8} - \frac{y^2}{4} \right]_1^2 = \frac{9}{8}. \end{aligned}$$

例 8.1.5 求  $I = \iint_D (x^2 + y) dx dy$ , 其中  $D$  是由抛物线  $y = x^2$  和  $x = y^2$  所围有界闭区域.

解 如图 8.1.10, 由  $\begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases}$  解得曲线的交点  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ . 所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy = \int_0^1 \left[ x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left( x^2 (\sqrt{x} - x^2) + \frac{1}{2} (x - x^4) \right) dx = \frac{33}{140}. \end{aligned}$$

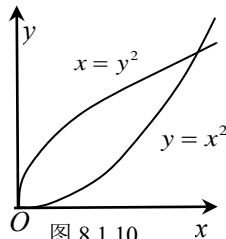


图 8.1.10

例 8.1.6 设  $f(x, y) = x + \iint_D f(x, y) dx dy$ ，其中  $D$  是直线  $x=1, y=2$  和曲线

$xy=1$  所围的有界闭区域. 求  $f(x, y)$ .

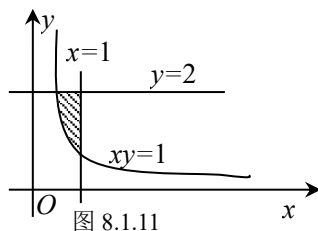


图 8.1.11

解 注意二重积分值是一个实数. 设  $A = \iint_D f(x, y) dx dy$ , 两边在  $D$  上积

分 (如图 8.1.11), 则  $A = \iint_D x dx dy + \iint_D A dx dy$ , 即

$$A = \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx \int_{\frac{1}{x}}^2 dy + A \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 dy,$$

其中

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 x dx \int_{\frac{1}{x}}^2 dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 x \left( 2 - \frac{1}{x} \right) dx = \left[ x^2 - x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4},$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{\frac{1}{x}}^2 dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left( 2 - \frac{1}{x} \right) dx = \left[ 2x - \ln x \right]_{\frac{1}{2}}^1 = 1 - \ln 2.$$

所以  $A = \frac{1}{4} + A(1 - \ln 2)$ , 解此方程即知  $A = \frac{1}{4 \ln 2}$ , 从而

$$f(x, y) = x + \frac{1}{4 \ln 2}.$$

例 8.1.7 计算  $I = \iint_D |y - x^2| d\sigma$ , 其中  $D = [-1, 1] \times [0, 1]$ .

解 如图 8.1.12, 分割积分区域  $D$  为:

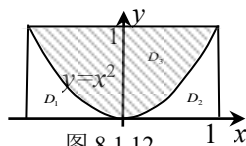


图 8.1.12

$$D_1 = \{(x, y) | 0 \leq y < x^2, -1 \leq x \leq 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq y < x^2, 0 < x \leq 1\},$$

$$D_3 = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}.$$

注 绝对值函数是一种分段函数, 含绝对值的二元函数的重积分需要分割积分区域, 这与含绝对值的一元函数的定积分需要分割积分区间是一样的道理.

于是

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_1+D_2} (x^2 - y) d\sigma + \iint_{D_3} (y - x^2) d\sigma = \int_{-1}^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 - y) dy + \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 (y - x^2) dy \\ &= \int_{-1}^1 \left[ x^2 y - \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{x^2} dx + \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{2} y^2 - x^2 y \right]_{x^2}^1 dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{2} x^4 dx + \int_{-1}^1 \left( \frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \frac{1}{5} + \frac{8}{15} = \frac{11}{15}. \end{aligned}$$



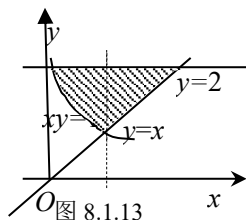
## 二、二重积分的换序

直角坐标下将二重积分化作二次积分有二种顺序, 可能在某种顺序下积分“积不出”或者不简便, 需要改变积分的顺序.

**例 8.1.8** 求积分  $I = \iint_D \frac{y^2}{x^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = x$ ,  $y = 2$  及双曲线  $xy = 1$  围成的有界闭区域.

**解** 如图 8.1.13, 若先  $y$  再  $x$  的积分需要将  $D$  分割成两部分, 计算比较繁琐. 故考虑先  $x$  再  $y$  的积分, 即把  $D$  看作 Y 型区域,  $D = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{y} \leq x \leq y, 1 \leq y \leq 2 \right\}$ , 所以,

$$I = \int_1^2 \left( \int_{\frac{1}{y}}^y \frac{y^2}{x^2} dx \right) dy = \int_1^2 \left[ -\frac{y^2}{x} \right]_{\frac{1}{y}}^y dy = \int_1^2 (-y + y^3) dy = \frac{9}{4}.$$



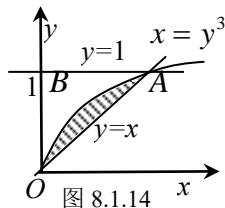
**例 8.1.9** 计算下列二重积分:

(1)  $I = \iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是以点  $O(0,0)$ ,  $A(1,1)$ ,  $B(0,1)$  为顶点的三角形闭区域.

(2)  $I = \iint_D y^2 \sin x^2 d\sigma$ , 其中  $D$  是由曲线  $x = y^3$  和直线  $y = x$  所围的位于第一象限的闭区域.

**解:** (1)  $\int e^{-y^2} dy$  无法用初等函数表示, 积分时必须考虑顺序. 如图 8.1.14,  $D$  是三角形  $OAB$ ,

$$I = \int_0^1 dy \int_0^y x^2 e^{-y^2} dx = \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^3}{3} dy = \int_0^1 e^{-y^2} \cdot \frac{y^2}{6} dy^2 \stackrel{t=y^2}{=} \frac{1}{6} \int_0^1 t e^{-t} dt = \frac{1}{6} \left( 1 - \frac{2}{e} \right).$$



(2)  $D$  是图 8.1.14 中的阴影部分,

$$I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt[3]{x}} y^2 \sin x^2 dy = \int_0^1 \sin x^2 \left[ \frac{1}{3} y^3 \right]_x^{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x - x^3) \sin x^2 dx$$

$$\stackrel{\text{令 } t=x^2}{=} \frac{1}{6} \int_0^1 (1-t) \sin t dt = \frac{1}{6} [-(1-t) \cos t - \sin t]_0^1 = \frac{1}{6} (1 - \sin 1).$$

**注**  $e^{\pm x^2}$ ,  $e^{\frac{1}{x}}$ ,  $\sin(x^2)$ ,  $\frac{\sin x}{x}$  等函数容易出现在二重积分中, 由于它们的原函数“积不出”, 所以在二重积分中通常要换序.

**例 8.1.10** 改变下列积分顺序:

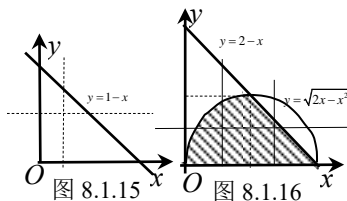
$$(1) I_1 = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy;$$

$$(2) I_2 = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x, y) dy.$$

**解** 根据积分上下限先画出积分区域.

(1) 如图 8.1.15,  $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq x \leq 1\}$ , 故

$$I_1 = \int_0^1 dy \int_0^{1-y} f(x, y) dx.$$

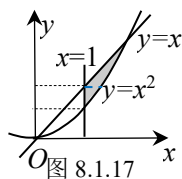


(2) 如图 8.1.16,  $D$  可以表达为 Y 型区域  $D = \{(x, y) \mid 1 - \sqrt{1-y^2} \leq x \leq 2-y, 0 \leq y \leq 1\}$ , 所以

$$I_2 = \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{2-y} f(x, y) dx.$$

**例 8.1.11** 计算  $I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{4}} dy \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{y}} e^x dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^x dx$ .

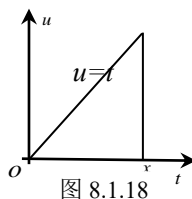
**解** 积分  $\int e^x dx$  不能用初等函数表示, 故先改变积分次序, 把积分区域表达为 X 型区域. 如图 8.1.17,  $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 \leq y \leq x, \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \right\}$ , 所以



$$I = \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_{x^2}^x e^x dy = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[ x e^x \right]_{x^2}^x dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 x(e - e^x) dx = \frac{3}{8}e - \frac{1}{2}\sqrt{e}.$$

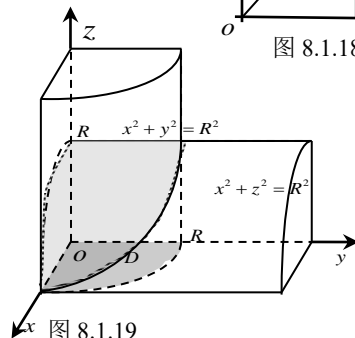
**例 8.1.12** 试用二重积分证明:  $\int_0^x f(t)(x-t)dt = \int_0^x \left[ \int_0^t f(u)du \right] dt$ .

**证** 这是定积分中例 5.3.17 已经用两种方法证明过的问题. 如图 8.1.18, 用二重积分的方法, 将右边看作  $u, t$  为积分变量的二元函数在一个三角形区域上的积分, 换序后得:



$$\int_0^x \left[ \int_0^t f(u)du \right] dt = \int_0^x \left[ \int_u^x f(u)dt \right] du$$

$$= \int_0^x (x-u)f(u)du = \int_0^x f(t)(x-t)dt. \text{ 证毕.}$$



### 三、几何体的体积

作为二重积分的一个几何应用, 我们来讨论几何体的体积的计算. 根据二重积分的几何意义, 曲顶柱体的体积可以用二重积分计算, 由此可以解决一些体积问题. 计算体积的关键是:

(1) 确定曲顶曲面的 (显) 函数  $z = f(x, y)$ ;

(2) (用投影法) 确定  $(x, y)$  的变化区域  $D$ .

**例 8.1.13** 求圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x^2 + z^2 = R^2$  所围的立体的体积.

**解** 如图 8.1.19, 利用对称性, 考虑第一卦限部分, 其曲顶柱体的顶为  $z = \sqrt{R^2 - x^2}$ ,

$(x, y) \in D: \begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \\ 0 \leq x \leq R \end{cases}$ ; 而  $x^2 + y^2 = R^2$  为曲顶柱体的侧面. 故所求

体积为第一卦限部分的 8 倍:

$$\begin{aligned} V &= 8 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2} dx dy = 8 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dy \\ &= 8 \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} R^3. \end{aligned}$$

**注** 按照“平行截面积为已知的立体体积”算法, 在  $x$  轴上点  $x$  处的垂直截面为一个正方形, 其边长为  $\sqrt{R^2 - x^2}$ , 故体积为

$$8 \int_0^R (R^2 - x^2) dx = \frac{16R^3}{3}.$$

**例 8.1.14** 求由下列曲面所围成的立体体积:  $z = x + y$ ,  $z = xy$ ,  $x + y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ .

解 曲面围成的立体如图 8.1.20. 所围立体在  $xOy$  面上的投影三角形  $D$ :  $x+y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$ . 故  $x+y \geq xy$ , 所求体积可以看作以在上方的平面  $z=x+y$  和在下方的马鞍面  $z=xy$  在  $D$  上方的曲顶柱体体积的差, 从而,

$$\begin{aligned} V &= \iint_D ((x+y)-xy) d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y-xy) dy \\ &= \int_0^1 \left[ xy + (1-x) \cdot \frac{1}{2} y^2 \right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left[ x(1-x) + \frac{1}{2} (1-x)^3 \right] dx \\ &\stackrel{\text{令 } 1-x=t}{=} \int_1^0 \left[ (1-t)t + \frac{1}{2} t^3 \right] (-dt) = \int_0^1 \left( t - t^2 + \frac{1}{2} t^3 \right) dt \\ &= \frac{7}{24}. \end{aligned}$$

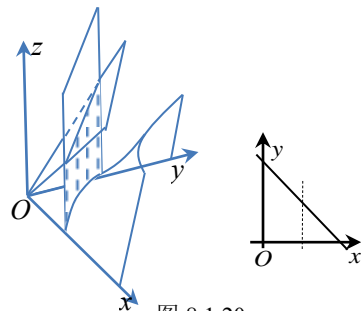


图 8.1.20

注 在  $D$  上  
 $x+y \geq 2\sqrt{xy} \geq 2xy \geq xy$ ,  
 所以平面  $z=x+y$  在马鞍面  
 $z=xy$  的上方.

## 四、曲面的面积

作为二重积分的第二个几何应用, 我们来研究一个空间曲面的面积.

设  $D$  是  $xOy$  平面上的一个区域,  $D$  上定义着光滑曲面  $\Sigma: z=f(x,y), (x,y) \in D$ . 我们来定义并计算  $\Sigma$  的面积  $S$ .

**命题 8.1.2** 设两平面  $\Pi_1, \Pi_2$  的夹角为  $\theta$ .  $\Pi_1$  上区域  $D_1$  的面积为  $S$ ,  $D_1$  在  $\Pi_2$  上投影区域  $D_2$  的面积为  $\sigma$ , 则总有

$$S = \frac{\sigma}{\cos \theta}. \quad (8.1.8)$$

证 如图 8.1.21, 先假定  $D_1$  是一个矩形闭区域, 且其一边平行于平面  $\Pi_1, \Pi_2$  的交线, 设  $D_1$  的平行于交线的边长为  $a$ , 另一边长为  $b$ , 则  $D_1$  的投影  $D_2$  也是一个矩形, 且一边长为  $a$ , 另一边长为  $b \cos \theta$ , 故两个矩形的面积的关系满足 (8.1.8) 式. 若  $D_1$  不是矩形, 把  $D_1$  分成上述类型的小矩形 (不计含边界点的不规则部分), 则小矩形面积  $S_k$  与其投影区域面积  $\sigma_k$  之间符合  $S_k = \frac{\sigma_k}{\cos \theta}$  ( $k=1,2,\dots,m$ ), 各式相加, 则

得  $S = \frac{\sigma}{\cos \theta}$ . 证毕.

如图 8.1.22, 设有对  $f(x,y)$  的定义域  $D$  的一个分划  $T: \{\Delta\sigma_k\}$  ( $k=1,2,\dots,n$ ), 相应地在曲面  $\Sigma$  上也有一个分划  $\{\Delta S_k\}$ , 使  $\Delta\sigma_k$  恰为  $\Delta S_k$  在  $D$  所在平面上的投影. 任取一点  $P_k(\xi_k, \eta_k) \in \Delta\sigma_k$ , 则曲面  $\Sigma$  上对应地有一点  $M_k(\xi_k, \eta_k, f(\xi_k, \eta_k)) \in \Delta S_k$ , 点  $M_k$  处曲面的切平面上也有一

注 这是一个初等数学问题.

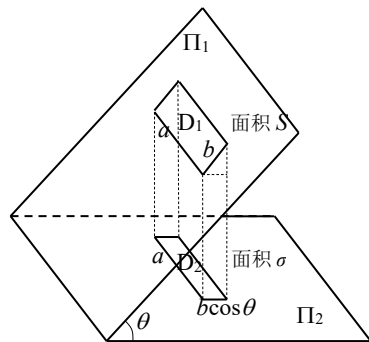


图 8.2.21

注 这里,  $\Delta\sigma_k$ ,  $\Delta S_k$  和  $\Delta S'_k$  既表示图形又表示这个图形的面积.

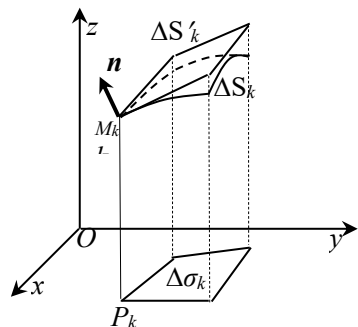


图 8.1.22

个区域  $\Delta S'_k$ , 使  $\Delta S'_k$  的投影为  $\Delta \sigma_k$ . 因为  $D$  在坐标平面  $xOy$  上, 所以式 (8.1.8) 中的角  $\theta$  成为点  $M_k$  处曲面的法向量与  $z$  轴的夹角  $\gamma_k$ . 当  $\Delta \sigma_k$  的直径很小时,  $\Delta S_k \approx \Delta S'_k$ . 而 (见式 (7.4.12) 式)

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(\xi_k, \eta_k) + f_y^2(\xi_k, \eta_k)}}.$$

所以,

$$\Delta S'_k = \frac{\Delta \sigma_k}{\cos \gamma_k} = \sqrt{1 + f_x^2(\xi_k, \eta_k) + f_y^2(\xi_k, \eta_k)} \Delta \sigma_k. \quad (8.1.9)$$

积分和的极限 (如果存在) 就自然地认为是曲面  $\Sigma$  的面积  $S$ , 即

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + f_x^2(\xi_k, \eta_k) + f_y^2(\xi_k, \eta_k)} \Delta \sigma_k.$$

而连续函数  $\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}$  在有界闭域  $D$  上可积, 所以

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma. \quad (8.1.10)$$

这就是曲面的面积公式. 公式 (8.1.10) 告诉我们, 当点  $P(x, y) \in D$  处给定一块包含  $P$  点的面元  $d\sigma$  时, 曲面上相应得到一块包含点  $M(x, y, f(x, y)) \in \Sigma$  的面元  $dS$ , 其函数关系为:

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma. \quad (8.1.11)$$

我们还将下一节学过极坐标下的二重积分后, 对曲面的面积作更深入的讨论.

**例 8.1.15** 求圆柱面  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x^2 + z^2 = R^2$  所围的立体的表面积.

**解** 如图 8.1.19, 考虑第一卦限曲面  $\Sigma_1: x^2 + z^2 = R^2$ , 它可以表达为函数形式

$$z = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}, 0 \leq x \leq R\},$$

由于  $z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$ ,  $z_y = 0$ , 故

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} d\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2 + 0^2} d\sigma = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} d\sigma.$$

根据图形的对称性, 所求面积为  $\Sigma_1$  面积的 16 倍:

$$\begin{aligned} S &= 16 \iint_D \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx dy = 16 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dy = 16R \int_0^R dx \\ &= 16R^2. \end{aligned}$$

注 被积函数  $\frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}$  是区域  $D$  上的无界函数, 因而本题的积分实际上是一个反常二重积分, 式中  $\int_0^R dx$  严格来说应是  $\int_0^R dx$ , 上标  $R^-$  表示  $R$  处的左极限, 但习惯上对于收敛的反常二重积分并不区分端点值还是端点的极限值.

### 练习 8.1.2

1. 把二重积分  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$  化为二次积分 (任意一种积分次序), 其中积分区域  $D$  是:

(1) 矩形  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ ;

(2) 三角形  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 2x, 0 \leq x \leq 1\}$ ;

(3) 上半圆  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\}$ ;

(4) 圆  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

2. 设  $I = \int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y}} f(x, y) dx$ , 则交换积分次序后  $I =$  ( ).

(A)  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x}} f(x, y) dy$  (B)  $\int_0^{\sqrt{1-y}} dx \int_0^1 f(x, y) dy$  (C)  $\int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} f(x, y) dy$  (D)  $\int_0^1 dx \int_0^{1+x^2} f(x, y) dy$

3. 设  $I = \iint_D f(x, y) dx dy$ ,  $D$  是  $O(0, 0)$ ,  $A(1, 2)$  和  $B(2, 1)$  为顶点的三角形域, 则  $I =$  ( ).

(A)  $\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y) dy$  (B)  $\int_0^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy$

(C)  $\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{2x} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{3-x} f(x, y) dy$  (D)  $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} f(x, y) dx$

4. 交换积分次序:  $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx =$  \_\_\_\_\_;  $\int_0^a dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy =$  \_\_\_\_\_.

5. 计算二重积分  $I = \iint_D (x+y) dx dy$ , 其中:

(1)  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ; (2)  $D = \{(x, y) | x \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ ; (3)  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1\}$ .

### 习题 8.1

1. 比较积分  $I_1, I_2, I_3$  的大小:

(1)  $I_1 = \iint_D [\ln(x+y)]^7 dx dy$ ,  $I_2 = \iint_D (x+y)^7 dx dy$ ,  $I_3 = \iint_D [\sin(x+y)]^7 dx dy$ , 其中  $D$  由  $x=0, y=0, x+y=\frac{1}{2}, x+y=1$  所围成.

(2)  $I_1 = \iint_D \cos \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ ,  $I_2 = \iint_D \cos(x^2 + y^2) d\sigma$ ,  $I_3 = \iint_D \cos(x^2 + y^2)^2 d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ .

2. 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D x e^{xy} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(2)  $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$ ;

(3)  $\iint_D x \cos(x+y) d\sigma$ , 其中  $D$  是顶点为  $(0, 0)$ ,  $(\pi, 0)$  和  $(\pi, \pi)$  的三角形区域.

3. 画出积分区域, 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D (2x+y) d\sigma$ , 其中  $D$  由  $y^2 = x$  和  $x=1$  所围成的平面区域;

(2)  $\iint_D xy^2 d\sigma$ , 其中  $D$  是由圆周  $x^2 + y^2 = 4$  及  $y$  轴所围成的右半闭区域;

(3)  $\iint_D e^{x+y} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$ .

4. 设区域  $D$  由  $y = x, y = 2x$ , 及  $x = \frac{\pi}{2}$  所围成, 已知  $\iint_D A \sin(x+y) dx dy = 1$ , 求常数  $A$ .

5. 若  $f(x, y)$  在两坐标轴与直线  $x+y=1$  所围区域上连续, 且  $x \iint_D f(x, y) dx dy = f(x, y) - y$ , 求  $\iint_D f(x, y) dx dy$ .

6. 改变积分次序:

(1)  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ ; (2)  $\int_1^e dx \int_0^{\ln x} f(x, y) dy$ ; (3)  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_0^{4-x^2} f(x, y) dy$ .

7. 用适当的积分次序计算二重积分:

(1)  $\iint_D \sin(y^2) d\sigma$ , 其中  $D$  由  $y=1, x=0, y=x$  围成;

(2)  $\iint_D e^{x^2} dx dy$ ,  $D$  为  $y = x$  和  $y = x^3$  所围成的平面区域在第一象限部分;

(3)  $\int_1^2 dx \int_{\sqrt{x}}^x \sin \frac{\pi x}{2y} dy + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x}}^2 \sin \frac{\pi x}{2y} dy$ .

8. 用二重积分求由曲线  $y = x + \frac{1}{x}$ ,  $x = 2$ ,  $y = 2$  所围图形面积  $A$ .

9. 求由平面  $x = 0, y = 0, x + y = 1$  所围成的柱体被平面  $z = 0$  及抛物面  $x^2 + y^2 = 6 - z$  截得的立体的体积.

10. 用二重积分求平面  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  被三坐标面所割出的有限部分的面积  $S$ .

\*\*\*\*\*

11. 求圆柱面  $x^2 + y^2 = 2y$  被锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和平面  $z = 0$  割下部分的面积  $S$ .

12. 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 用重积分证明,  $\int_a^b dx \int_a^x (x - y)^{n-2} f(y) dy = \frac{1}{n-1} \int_a^b (b - y)^{n-1} f(y) dy$ .

13. 计算二重积分:

(1)  $I = \iint_D \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}^3} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(2)  $I = \iint_D \operatorname{sgn}(y - x^2) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(3)  $I = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2}} [x + y] dx dy$ , 其中  $[a]$  为不超过  $a$  的最大整数;

(4)  $\iint_D \max(xy, x^3) d\sigma$ , 其中:  $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ .

14. 设  $f(x)$  为  $(-\infty, +\infty)$  内的连续函数, 且  $F(t) = \int_0^t dy \int_y^t f(x) dx$ , 求  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(t)}{t^2}$ .

15. 试用二重积分求解上册习题 5.3.18:

设函数  $f(x)$  在区间  $[0, 1]$  上连续, 且  $\int_0^1 f(x) dx = A$ , 求  $\int_0^1 dx \int_x^1 f(x) f(y) dy$ .

16\*. 已知  $f(x), g(x)$  在  $[a, b]$  连续. 试用二重积分证明:

(1) 设  $f(x) > 0$ , 则  $\int_a^b f(x) dx \int_a^b \frac{1}{f(x)} dx \geq (b - a)^2$ .

(2)  $\left[ \int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx \cdot \int_a^b g^2(x) dx$  (施瓦茨不等式).

## §8.2 二重积分的计算 (续)

本节将在上一节理解基本概念和原理的基础上介绍二重积分的计算技巧, 主要是极坐标法和对称区域上的二重积分.

### 8.2.1 利用极坐标计算二重积分

#### 1. 极坐标系下的二重积分

设  $f(x, y)$  在有界闭区域  $D$  上连续, 按定义,

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i,$$

其中  $\Delta\sigma_i$  是对  $D$  的某种分划. 在极坐标表示  $x = \rho \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \theta$  下, 如图 8.2.1, 设从极点  $O$  出发且穿过闭区域  $D$  内部

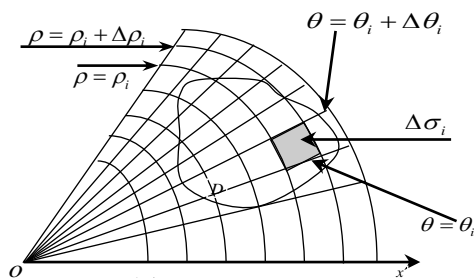


图 8.2.1

的射线与  $D$  的边界的交点不超过两个. 如下分划区域  $D$ : 以极点为中心的一族同心圆:  $\rho = \rho_i$  (常数), 以及从极点出发的一族射线  $\theta = \theta_i$  (常数), 组成曲线网, 除了包含边界点的一些小闭区域外, 把  $D$  分成  $n$  个小闭区域, 第  $i$  个小闭区域的面积为两个扇形的面积之差, 即

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_i &= \frac{1}{2}(\rho_i + \Delta\rho_i)^2 \cdot \Delta\theta_i - \frac{1}{2}\rho_i^2 \cdot \Delta\theta_i = \frac{1}{2}(2\rho_i + \Delta\rho_i)\Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i \\ &= \frac{\rho_i + (\rho_i + \Delta\rho_i)}{2} \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i = \bar{\rho}_i \cdot \Delta\rho_i \cdot \Delta\theta_i, \end{aligned}$$

注 对于“有界闭区域”而言, 当分划很细小时, 包含边界点的小区域的面积之和可以忽略不计.

这里  $\bar{\rho}_i$  是这两个扇形的半径的平均值, 在区间  $[\theta_i, \theta_i + \Delta\theta_i]$  中任取一值  $\bar{\theta}_i$ , 得到点  $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$  的直角坐标对应点  $(\xi_i, \eta_i) = (\bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i, \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i)$ , 于是得到

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i = \sum_{i=1}^n f(\bar{\rho}_i \cos \bar{\theta}_i, \bar{\rho}_i \sin \bar{\theta}_i) \bar{\rho}_i \Delta\rho_i \Delta\theta_i \quad (8.2.1)$$

由于  $f(x, y)$  连续,  $f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho$  也就连续, 从而可积, 且有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (8.2.2)$$

这就是从直角坐标系到极坐标系的二重积分换元公式.

#### 2. 极坐标系下的二次积分

设  $I = \iint_D f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta$ . 在极坐标系下将二重积分化作二次积

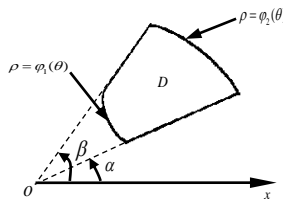


图 8.2.2

分, 除了观察积分区域的形态以外, 还需要充分利用积分区域与极点的相对位置关系.

(1) 极点在区域以外, 如图 8.2.2, 则积分区域可以表示为

$D = \{(\rho, \theta) | \varphi_1(\theta) \leq \rho \leq \varphi_2(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ , 从而

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (8.2.3)$$

(2) 极点在区域边界  $\rho = \varphi(\theta)$  上, 如图 8.2.3, 则

$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq \varphi(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta\}$ , 从而

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (8.2.4)$$

(3) 极点在曲线  $\rho = \varphi(\theta)$  所围区域的内部, 如图 8.2.4,  $D$  可以表为

$D = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq \varphi(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ (或 } -\pi \leq \theta \leq \pi)\}$ , 故

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta. \quad (8.2.5)$$

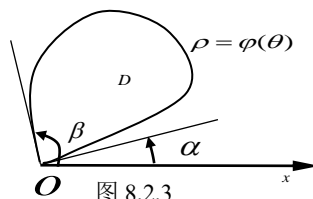


图 8.2.3

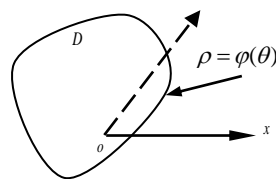


图 8.2.4

以上三种情形描述的积分区域  $D$  均称为  $\theta$  形区域, 是用以极点为起点的射线自极轴开始“扫描”一遍, 得到  $D$  的边界函数  $\rho = \varphi_1(\theta)$  及  $\rho = \varphi_2(\theta)$  和极角的边界值  $\alpha, \beta$ .

下面形态的区域  $D$  称为  $\rho$  型区域. 如图 8.2.5, 是用以极点为中心的同圆心圆自小到大“扫描”得到的, 此时

$D = \{(\rho, \theta) | \theta_1(\rho) \leq \theta \leq \theta_2(\rho), \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2\}$ , 从而

$$I = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left[ \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\theta \right] \rho d\rho. \quad (8.2.6)$$

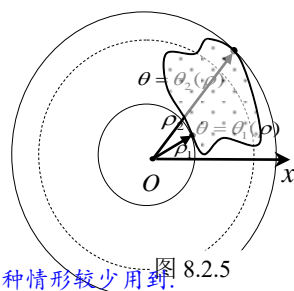


图 8.2.5  
注 这种情形较少用到.

如果积分区域  $D$  的边界用极坐标方程来表示时形式比较简单 (如圆、双纽线等), 或者被积函数中含有用极坐标易于简化的函数 (如  $x^2 + y^2$  等), 就可以选择利用极坐标系来计算二重积分.

**例 8.2.1** 写出积分  $\iint_D f(x, y) dx dy$  在极坐标系的一个二次积分形式, 其中

$$D = \{(x, y) | 1 - x \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, 0 \leq x \leq 1\}.$$

**解** 如图 8.2.6, 在极坐标  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  下, 边界圆弧  $y = \sqrt{1 - x^2}$  的方程为  $\rho = 1$ , 边界直线  $y = 1 - x$  的方程为  $\rho = \frac{1}{\sin \theta + \cos \theta}$ , 所以区域  $D$  的  $\theta$  形区域为

$$\left\{ (\rho, \theta) \middle| \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\},$$

故

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}}^1 f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho.$$

**例 8.2.2** 交换下列积分次序 ( $a > 0$ ):

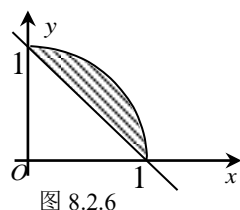
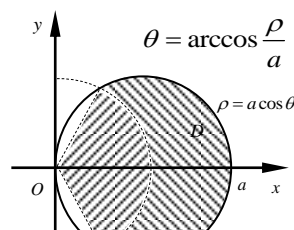


图 8.2.6





$$(1) I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(\rho, \theta) d\rho; \quad (2) I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} f(\rho, \theta) d\rho.$$

解 (1) 从积分的上下限可知积分区域为

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq a \cos \theta, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right\}, \text{ 所以 } D \text{ 是一个圆, 如图 8.2.7.}$$

将  $D$  从  $\theta$  型区域表示转化为  $\rho$  型区域表示:  $D = \left\{ (\rho, \theta) \mid -\arccos \frac{\rho}{a} \leq \theta \leq \arccos \frac{\rho}{a}, 0 \leq \rho \leq a \right\}$ , 所以,

$$I = \int_0^a d\rho \int_{-\arccos \frac{\rho}{a}}^{\arccos \frac{\rho}{a}} f(\rho, \theta) d\theta.$$

(2) 积分是圆上的角形区域部分, 当  $\theta = \pm \frac{\pi}{3}$  时,  $\rho = a \cos \frac{\pi}{3} = \frac{a}{2}$ .  $D$  可被分划成扇形  $D_1$  和月牙形  $D_2$  两块, 其中

牙形  $D_2$  两块, 其中

$$D_1 = \left\{ (\rho, \theta) \mid -\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \rho \leq \frac{a}{2} \right\}, \quad D_2 = \left\{ (\rho, \theta) \mid \arccos \frac{\rho}{a} \leq \theta \leq -\arccos \frac{\rho}{a}, \frac{a}{2} \leq \rho \leq a \right\}.$$

所以

$$I = \int_0^{\frac{a}{2}} d\rho \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} f(\rho, \theta) d\theta + \int_{\frac{a}{2}}^a d\rho \int_{-\arccos \frac{\rho}{a}}^{\arccos \frac{\rho}{a}} f(\rho, \theta) d\theta.$$

**例 8.2.3** 计算二重积分  $I = \iint_D \frac{\sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

解 圆环  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  在极坐标系中可表示为:

$D = \{(\rho, \theta) \mid 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , 所以

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 \frac{\sin \pi \rho}{\rho} \rho d\rho = 2\pi \cdot \left[ -\frac{\cos \pi \rho}{\pi} \right]_1^2 = -4.$$

**例 8.2.4** 计算  $I = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D$  为由圆  $x^2 + y^2 = 2y$ ,  $x^2 + y^2 = 4y$

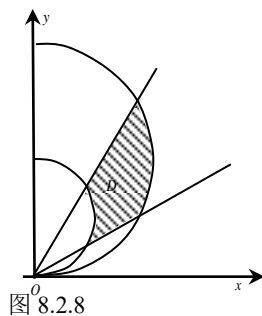


图 8.2.8

及直线  $x - \sqrt{3}y = 0$ ,  $y - \sqrt{3}x = 0$  所围成的平面闭区域.

解 先将积分区域的边界用极坐标方程表示 (如图 8.2.8).

直线  $x - \sqrt{3}y = 0$  和  $y - \sqrt{3}x = 0$  的极坐标方程分别是  $\theta = \frac{\pi}{6}$  和  $\theta = \frac{\pi}{3}$ ; 圆弧  $x^2 + y^2 = 4y$  和

$x^2 + y^2 = 2y$  的极坐标方程分别是  $\rho = 4 \sin \theta$  和  $\rho = 2 \sin \theta$ . 于是

$$D = \{(\rho, \theta) \mid 2 \sin \theta \leq \rho \leq 4 \sin \theta, \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} \rho^2 \cdot \rho d\rho \\
 &= 60 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4 \theta d\theta = 60 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)^2 d\theta = 15 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right).
 \end{aligned}$$

**例 8.2.5** (1) 计算  $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$ , 其中  $D$  是由中心在原点, 半径为  $a$  的圆周在第一象限所围成的闭区域.

(2) 计算泊松积分  $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ .

**解:** (1) 将积分区域表示为:  $D: 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . 故

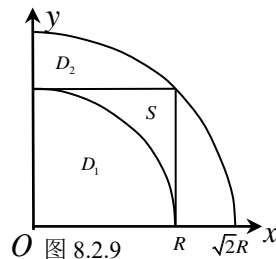
$$\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-a^2}).$$

(2) 如图 8.2.9, 设

$$D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

$$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2R^2, x \geq 0, y \geq 0\},$$

令  $S = \{(x, y) | 0 \leq x \leq R, 0 \leq y \leq R\}$  (正方形区域), 显然有  $D_1 \subset S \subset D_2$ . 因



$e^{-x^2-y^2} > 0$ , 故

$$\iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

将这三个二重积分依次记为  $I_{D_1}, I_S, I_{D_2}$ , 由 (1) 的计算知,

$$I_{D_1} = \iint_{D_1} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2});$$

$$I_{D_2} = \iint_{D_2} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2});$$

又因为

$$I_S = \iint_S e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^R e^{-x^2} dx \int_0^R e^{-y^2} dy = \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2,$$

所以,

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) < \left( \int_0^R e^{-x^2} dx \right)^2 < \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2});$$

当  $R \rightarrow +\infty$  时,  $I_{D_1} \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ,  $I_{D_2} \rightarrow \frac{\pi}{4}$ , 故由夹逼准则, 当  $R \rightarrow +\infty$  时  $I_S \rightarrow \frac{\pi}{4}$ , 即

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}, \text{ 故所求反常积分 } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

### 3. 面积和体积的计算 (续)

作为极坐标方法的应用, 这里给出区域面积、曲顶柱体体积和曲面面积的实例.

**例 8.2.6** 求满足  $(x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2(x^2 - y^2)$  和  $x^2 + y^2 \geq a^2$  的平面图形的面积.

**解** 如图 8.2.10, 由对称性, 这个区域  $D$  的面积是其第一象限部分

注 应用对称性是一种常用的技巧. 我们将作专门讨论.

$D_1$  面积的 4 倍.  $D_1$  的边界

$$x^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow \rho = a \quad (\text{圆弧});$$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2) \Leftrightarrow \rho = a\sqrt{2\cos 2\theta} \quad (\text{双纽线});$$

$$y = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \quad (x \text{ 轴}).$$

$$\text{由 } \begin{cases} \rho = a\sqrt{2\cos 2\theta}, \\ \rho = a \end{cases} \text{ 解得交点 } A = \left(a, \frac{\pi}{6}\right), \text{ 所以}$$

$$D_1 = \left\{(\rho, \theta) \mid a \leq \rho \leq a\sqrt{2\cos 2\theta}, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}\right\}, \text{ 故所求面积为}$$

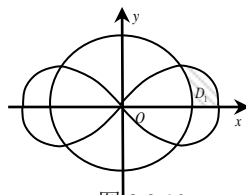


图 8.2.10

$$\begin{aligned} \sigma &= \iint_D dx dy = 4 \iint_{D_1} dx dy = 4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho d\rho \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} [\rho^2]_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} d\theta = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2\cos 2\theta - 1) d\theta = a^2 \left( \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

**例 8.2.7** (维维安尼体的体积) 求圆柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  ( $R > 0$ ) 与球面

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  所围立体的体积.

**解** 如图 8.2.11, 由对称性, 这个几何体的体积是第一卦限部分的四倍, 而第一卦限部分的体积是以球面为顶面, 半圆

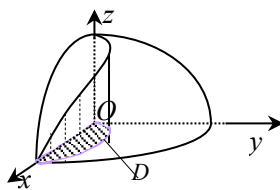


图 8.2.11

$D = \left\{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq R\cos\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right\}$  为底面的曲顶柱体, 所以,

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho \right] d\theta = -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ (R^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{R\cos\theta} d\theta \end{aligned}$$

思考题 8.2.1 (1) 本题中的半圆区域  $D$  可用参数方程

$$\begin{cases} x = \frac{R}{2} + \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases} \quad 0 \leq \rho \leq \frac{R}{2},$$

$0 \leq \theta \leq \pi$  表示吗? 试计算积分

$$4 \int_0^{\pi} \left[ \int_0^{\frac{R}{2}} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho \right] d\theta;$$

(2) 计算积分

$$2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_0^{R\cos\theta} \sqrt{R^2 - \rho^2} \rho d\rho \right] d\theta,$$

它与  $V$  相等吗?

$$= -\frac{4R^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \theta - 1) d\theta = \frac{4}{3} R^3 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right).$$

例 8.2.8 (维维安尼体上的两种曲面面积) 如图 8.2.11.

(1) 求球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  被圆柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  所截得部分的面积.

(2) 求圆柱面  $x^2 + y^2 = Rx$  被球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  所截得部分的面积.

解 (1) 上半球面  $\Sigma_1: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ , 则  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$

$\Sigma_1$  在第一卦限的部分在  $xOy$  平面上的投影为  $D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{Rx - x^2}, 0 \leq x \leq R\}$ . 由对称性得知,

所求球面部分的面积  $S$  是  $\Sigma_1$  的面积  $S(\Sigma_1)$  的 4 倍, 再由曲面的面积分公式 (8.1.10), 得到

$$\begin{aligned} S &= 4S(\Sigma_1) = 4 \iint_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dx dy = 4 \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{R \cos \theta} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \cdot \rho d\rho = 4R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R - R \sin \theta) d\theta = 4R^2 \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

(2) 圆柱面在第一卦限部分  $\Sigma_2$  的方程为:  $y = \sqrt{Rx - x^2}$ ,  $\Sigma_2$  在  $zOx$  平面上的投影为

$$D_{zx} = \{(z, x) | 0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - Rx}, 0 \leq x \leq R\}.$$

由  $y = \sqrt{Rx - x^2}$  得到  $\frac{\partial y}{\partial z} = 0, \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{R - 2x}{2\sqrt{Rx - x^2}}$ . 由柱面的对称性, 所求柱面的面积  $S$  是  $\Sigma_2$  的面

积  $S(\Sigma_2)$  的 4 倍, 故

$$\begin{aligned} S &= 4S(\Sigma_2) = 4 \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dz dx = 4 \iint_{D_{zx}} \frac{R}{2\sqrt{Rx - x^2}} dz dx \\ &= 2R \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2 - Rx}} \frac{dz}{\sqrt{Rx - x^2}} = 2R\sqrt{R} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 4R\sqrt{R} \left[ \sqrt{x} \right]_{0^+}^R = 4R^2. \end{aligned}$$

注  $S$  的计算过程中,

$$(1) \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dz dx$$

是将 (8.1.10) 改造成适合于函数  $y = f(z, x)$  的曲面面积公式;

(2) 最后一个积分  $\int_0^R \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  是反常积分.

### 练习 8.2.1

1. 设  $f(x, y)$  在区域  $D$  上连续, 将二重积分化为极坐标系下的二次积分:

(1) 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma =$  \_\_\_\_\_;

(2) 设  $D$  是由  $x^2 + y^2 = 2x$  与  $x$  轴围成的  $y \geq 0$  的部分, 则  $\iint_D f(x, y) dx dy =$  \_\_\_\_\_.

2.  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt[5]{x^2+y^2} dx dy =$  \_\_\_\_\_.

## 8.2.2 利用区域的对称性计算二重积分

本节介绍利用图形的对称性解决积分问题, 从中感悟数学美的启真价值.

### 一、区域的对称性和二元函数的奇偶性

定义 8.2.1 设  $D(\subset \mathbf{R}^2)$  是平面点集.

(1) 如果对任何点  $(x, y) \in D$ , 有  $(x, -y) \in D$ , 则称  $D$  关于  $x$  轴对称;

(2) 若对任何点  $(x, y) \in D$ , 有  $(-x, y) \in D$ , 则称  $D$  关于  $y$  轴对称;

(3) 若对任何点  $(x, y) \in D$ , 有  $(-x, -y) \in D$ , 则称  $D$  关于原点对称;

(4) 若对任何点  $(x, y) \in D$ , 有  $(y, x) \in D$ , 则称  $D$  关于直线  $y = x$  对称.

区域关于直线  $y = x$  的对称性也称为关于字母  $x, y$  的轮换对称性.

定义 8.2.2 设  $f(x, y)$  在平面点集  $D$  上定义.

(1) 若  $D$  关于  $x$  轴对称, 则

若  $f(x, -y) = f(x, y)$ , 则  $f$  称为关于  $y$  的偶函数, 此时曲面  $z = f(x, y)$  关于  $zOx$  平面对称;

若  $f(x, -y) = -f(x, y)$ , 则  $f$  称为关于  $y$  的奇函数, 此时曲面  $z = f(x, y)$  关于  $x$  轴对称.

(2) 若  $D$  关于  $y$  轴对称, 则

若  $f(-x, y) = f(x, y)$ , 则  $f$  称为关于  $x$  的偶函数, 此时曲面  $z = f(x, y)$  关于  $yOz$  平面对称;

若  $f(-x, y) = -f(x, y)$ , 则  $f$  称为关于  $x$  的奇函数, 此时曲面  $z = f(x, y)$  关于  $y$  轴对称.

对三元函数的奇偶性可以相似地定义.

例 8.2.9 指出下列二元函数关于  $x, y$  的奇偶性:

(1)  $f(x, y) = x \sin(xy)$ ; (2)  $g(x, y) = 2x^3$ ; (3)  $h(x, y) = x \sin(xy)$  ( $y \geq 0$ ).

解 (1) 函数  $f(x, y)$  的定义域是  $\mathbf{R}^2$ , 这是既关于  $x$  轴对称又关于  $y$  轴对称的区域, 在此基础上,

因为  $f(x, -y) = f(x, y)$ ,  $f(-x, y) = -f(x, y)$ , 所以  $f(x, y) = x \sin(xy)$  关于  $x$  是偶函数, 而关于  $y$  是奇函数;

(2) 函数  $g(x, y)$  的定义域也是  $\mathbf{R}^2$ , 因为  $g(x, -y) = g(x, y)$ ,  $g(-x, y) = -g(x, y)$ , 所以

$g(x, y) = 2x^3$  关于  $x$  是奇函数而关于  $y$  是偶函数.

(3) 函数  $h(x, y)$  的定义域是  $D = \{(x, y) | y \geq 0\}$ , 它关于  $y$  轴对称, 且  $h(-x, y) = h(x, y)$ , 故

$h(x, y)$  关于  $x$  是偶函数, 但  $D$  关于  $x$  轴不对称, 故  $h(x, y)$  关于  $y$  既

不是偶函数也不是奇函数.

注  $D_1$  和  $D_2$  是关于直线  $y=x$

对称, 指只要点  $(x, y) \in D_1$ , 则

$(y, x) \in D_2$ .

## 二、对称区域上的二重积分

回顾定积分的恒等式:  $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$ , 当  $f(x)$

为奇函数时  $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$ , 当  $f(x)$  为偶函数时  $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ . 对于可积函数的二重积分, 当二元函数  $f(x, y)$  在对称的积分区域  $D$  上具有某种奇偶性时, 也有类似的命题.

这些结果可以从重积分的定义  $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta \sigma_k$  中解释. 综述如下:

### 命题 8.2.1 (对称区域上的二重积分公式)

注我们将通过阅读材料给出用

“换元法”的证明.

(1) 若  $D$  关于直线  $y=0$  (即  $x$  轴) 对称, 记  $D_{\pm}$  为  $D$  的上半部分. 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(x, -y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_{\pm}} f(x, y) d\sigma, & f(x, -y) = f(x, y) \end{cases} \quad (8.2.7)$$

(2) 若  $D$  关于直线  $x=0$  (即  $y$  轴) 对称, 记  $D_{\text{右}}$  为  $D$  的右半部分. 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f(-x, y) = -f(x, y) \\ 2 \iint_{D_{\text{右}}} f(x, y) d\sigma, & f(-x, y) = f(x, y) \end{cases} \quad (8.2.8)$$

(3) 设  $D_1$  和  $D_2$  是关于直线  $y=x$  对称的两个有界闭区域, 则

$$\iint_{D_1} f(x, y) d\sigma = \iint_{D_2} f(y, x) d\sigma \quad (8.2.9)$$

由此可知, 若  $D$  关于直线  $y=x$  对称, 则

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(y, x) d\sigma,$$

从而

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_D (f(x, y) + f(y, x)) d\sigma \quad (8.2.10)$$

我们来描述上述命题的 (1), 由于积分  $\iint_D f(x, y) d\sigma$  的可积性, 积分和  $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$  的极限与  $\Delta\sigma_k$  的分法及  $(\xi_k, \eta_k)$  的取法无关. 如图 8.2.12, 因为区域  $D$  关于  $x$  轴对称, 可以将  $D$  分划成  $2n$  块, 并分成两类, 一类均在  $x$  轴上方, 设为  $T_1: \{\Delta\sigma_k: k=1, 2, \dots, n\}$ , 另一类在  $x$  轴下方完全轴对称地对应, 设为  $T_2: \{\Delta\sigma_k: k=n+1, n+2, \dots, 2n\}$ ; 在  $T_1$  类的每个  $\Delta\sigma_k$  内任取一点  $(\xi_k, \eta_k)$ , 在  $T_2$  类的相应  $\Delta\sigma_k$  内取点  $(\xi_k, -\eta_k)$ . 则

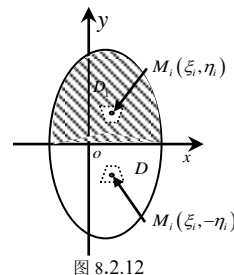


图 8.2.12

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k &= \left( \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k + \sum_{k=n+1}^{2n} f(\xi_k, -\eta_k) \Delta\sigma_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n (f(\xi_k, \eta_k) + f(\xi_k, -\eta_k)) \Delta\sigma_k. \end{aligned}$$

记  $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{\Delta\sigma_k\}$ , 则  $\iint_D f(x, y) d\sigma = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n (f(\xi_k, \eta_k) + f(\xi_k, -\eta_k)) \Delta\sigma_k$ .

现在, 如果函数  $f(x, y)$  关于  $y$  是奇函数, 即  $f(x, -y) = -f(x, y)$  总成立, 则  $f(\xi_k, \eta_k) + f(\xi_k, -\eta_k) = 0$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . 就有  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 0$ .

如果  $f(x, y)$  关于  $y$  是偶函数, 即  $f(x, -y) = f(x, y)$  总成立, 则  $f(\xi_k, -\eta_k) = f(\xi_k, \eta_k)$ ,  $i=1, 2, \dots, n$ . 就有  $\iint_D f(x, y) d\sigma = 2 \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma$ .

(2) (3) 同理可以描述.

**例 8.2.10** 设  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ ,  $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0\}$ ,

$D_2 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

(1) 如果下列积分有倍做关系, 请填入常数:

$$\iint_D x^2 dx dy = \underline{\hspace{1cm}} \iint_{D_1} x^2 dx dy = \underline{\hspace{1cm}} \iint_{D_2} x^2 dx dy = \underline{\hspace{1cm}} \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy.$$

(2) 请在下列积分中填入 “>”, “=” 或 “<” 符号.

$$\iint_D x dx dy \underline{\hspace{1cm}} 0; \iint_D y dx dy \underline{\hspace{1cm}} 0; \iint_{D_1} x dx dy \underline{\hspace{1cm}} 0; \iint_{D_1} y dx dy \underline{\hspace{1cm}} 0; \iint_{D_2} x dx dy \underline{\hspace{1cm}} \iint_{D_2} y dx dy \underline{\hspace{1cm}} \frac{1}{2} \iint_{D_1} y dx dy.$$

**解**  $D$  是一个圆, 关于  $x$  轴和  $y$  轴均对称,  $D_1$  是  $D$  的上半圆部分, 关于  $x$  轴对称,  $D_2$  是  $D_1$  的右半部分.

(1) 由于函数  $x^2$  在  $D$  上关于  $x$  是偶函数, 在  $D_1$  上关于  $y$  也是偶函数, 故

$$\iint_D x^2 dx dy = 2 \iint_{D_1} x^2 dx dy = 4 \iint_{D_2} x^2 dx dy;$$

又因为  $D_2$  关于关于字母  $x, y$  轮换对称, 故又有

$$4 \iint_{D_2} x^2 dx dy = 2 \iint_{D_2} (x^2 + y^2) dx dy.$$

(2) 函数  $x$  在  $D$  和  $D_1$  上关于  $x$  是奇函数, 函数  $y$  在  $D$  上关于  $y$  是奇函数, 而在  $D_1$  上取正值, 故,

$$\iint_D x dx dy = \iint_D y dx dy = 0; \quad \iint_{D_1} x dx dy = 0, \quad \iint_{D_1} y dx dy > 0;$$

区域  $D_2$  关于关于字母  $x, y$  轮换对称, 而故函数  $y$  在  $D_1$  上关于  $x$  是奇函数, 故

$$\iint_{D_2} x dx dy = \iint_{D_2} y dx dy = \frac{1}{2} \iint_{D_1} y dx dy.$$

**例 8.2.11** 用对称性计算下列积分:

(1)  $I = \iint_D \sin xy dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$ ;

(2)  $I = \iint_D |xy| dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | |x| + |y| \leq 1\}$ ;

(3)  $I = \iint_D \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ .

**解** (1)  $D$  是由四条直线  $x + y = \pm 1$  和  $x - y = \pm 1$  所围成的正方形, 它关于  $x$  轴对称, 函数  $\sin xy$  关于  $y$  是奇函数. 故

$$I = 0.$$

(2) **积分** 区域同时关于  $x$  轴和  $y$  轴对称, 且 **函数  $|xy|$**  关于  $x, y$  都是偶函数. 故积分可以化到第一象限, 这时可以去掉绝对值, 所以

$$I = 4 \iint_{\substack{0 \leq x+y \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0}} xy dx dy = 4 \int_0^1 \frac{x}{2} ((1-x)^2 - 0) dx = \frac{1}{6}.$$

(3) 积分区域关于直线  $y = x$  对称, 从而,



$$I = \iint_D \left( \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right) dx dy,$$

进一步得到

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \iint_D \left[ \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) + \left( \frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right) \right] dx dy = \frac{1}{2} \iint_D \left( \frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{x^2 + y^2}{b^2} \right) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 d\rho = \frac{\pi R^4}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right). \end{aligned}$$

例 8.2.12 计算二重积分:

(1)  $I = \iint_D \ln \frac{2+x}{2-x} \sin y dx dy$ , 其中  $D$  是由直线  $y = -x, x = 1, y = 1$  围成的有

界闭域.

(2)  $I = \iint_D (xy^2 + 3e^x \sin y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$ .

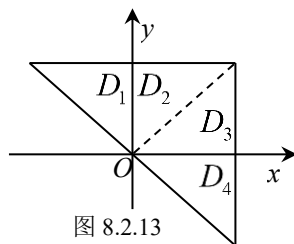


图 8.2.13

解 (1) 如图 8.2.13, 用坐标轴和直线  $y = x$  将区域  $D$  分划成下面四个部分:

$$D_1: -y \leq x \leq 0, 0 \leq y \leq 1, \quad D_2: 0 \leq x \leq y, 0 \leq y \leq 1,$$

$$D_3: 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1, \quad D_4: -x \leq y \leq 0, 0 \leq x \leq 1.$$

由于二元函数  $\ln \frac{2+x}{2-x} \sin y$  在  $D_1 + D_2$  上关于  $x$  是奇函数, 在  $D_3 + D_4$  上关于  $y$  也是奇函数, 就有

$$\iint_{D_1+D_2} \ln \frac{2+x}{2-x} \sin y dx dy = 0, \quad \iint_{D_3+D_4} \ln \frac{2+x}{2-x} \sin y dx dy = 0, \quad \text{于是 } I = 0.$$

(2)  $D$  关于  $x$  轴对称. 将被积函数拆成两个函数可知,  $xy^2$  关于  $y$  是偶函数, 而  $3e^x \sin y$  关于  $y$  是奇函数,  $\iint_D 3e^x \sin y dx dy = 0$ , 从而,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D xy^2 dx dy = 2 \iint_{D_+} xy^2 dx dy = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^4 \cos\theta \sin^2\theta d\rho \\ &= \frac{64}{5} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{64}{5} \left( \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} - \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \right) \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

### 三\*. $\iint_D x dx dy$ 和 $\iint_D y dx dy$ 的计算——形心坐标及其应用

我们希望二重积分  $\iint_D x dx dy$  和  $\iint_D y dx dy$  能在当  $D$  是某种易求面积的

注 这部分讨论的形心方法完全可以迁移到后续三重积分, 以及对弧长的曲线积分和对面积的曲面积分.

中心对称区域（例如圆、椭圆、等边三角形、任意放置的矩形等）时，可以轻易地计算出来。

为了给出这个便捷的计算公式，我们用二重积分的定义讨论平面薄片的质量和质心。设  $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$  是  $xOy$  平面上的  $n$  个质点（这个集合称为一个质点系），其质量分别是  $m_1, m_2, \dots, m_n$ ，这

个质点系的质心坐标为  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$ ， $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i m_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$ 。设  $D$  是  $xOy$  平面上的一个有界闭区域，其面积为

$\sigma$ 。把  $D$  看作带有质量的薄片。若连续函数  $z = f(x, y)$  是  $D$  的质量密度函数，将  $D$  分划成一组直径非常小的小块  $\{\Delta\sigma_i\}_{i=1}^n$ ，在每个小块  $\Delta\sigma_i$ （其面积仍记为  $\Delta\sigma_i$ ）上取点  $(\xi_i, \eta_i)$ ，使  $f(\xi_i, \eta_i)$  作为这一小块的近似的质量密度，则质心的坐标有下列近似式：

$$\bar{x} \approx \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i}{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i}, \quad \bar{y} \approx \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i}{\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i}.$$

令这些小块的最大直径  $\lambda$  趋于零，则质心的坐标应是：

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x f(x, y) d\sigma}{\iint_D f(x, y) d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y f(x, y) d\sigma}{\iint_D f(x, y) d\sigma}.$$

如果  $D$  的质量分布是均匀的，不妨设  $f(x, y) \equiv 1$ ，那么，上式的分母成为  $D$  的面积  $\sigma$ ，从而

$$\bar{x} = \frac{1}{\sigma} \iint_D x d\sigma, \quad \bar{y} = \frac{1}{\sigma} \iint_D y d\sigma. \quad (8.2.11)$$

我们把均匀分布的薄片的质心叫做这个薄片所在平面图形的形心，那么  $D$  的形心坐标就按公式（8.2.11）来计算。变形后就成为我们所要的计算公式：

$$\iint_D x d\sigma = \bar{x} \sigma, \quad \iint_D y d\sigma = \bar{y} \sigma. \quad (8.2.12)$$

如果  $D$  是中心对称图形， $D$  的形心就是它的对称中心。利用这个原理，只需知道  $D$  的对称中

心坐标以及面积，就可以计算  $\iint_D x d\sigma$  和  $\iint_D y d\sigma$ 。

注 在以任意点  $(a, b)$  为中心的圆上用直角坐标和极坐标计算  $\iint_D x d\sigma$  和  $\iint_D y d\sigma$  都是十分困难的。

例 8.2.13 求  $\iint_D x d\sigma$ ， $\iint_D y d\sigma$ ，已知：

- (1)  $D$  为圆  $(x-a)^2 + (y-b)^2 \leq R^2$ ；
- (2)  $D$  为以点  $A(1, 1)$ ， $B(3, 4)$ ， $C(-1, -5)$  顶点的三角形区域。

解 (1) 根据圆的对称性，其形心为圆心，即  $(\bar{x}, \bar{y}) = (a, b)$ ，面积为  $\pi R^2$ ，从而

$$\iint_D x d\sigma = \pi R^2 a, \quad \iint_D y d\sigma = \pi R^2 b. \quad (8.2.13)$$

(2) 由于三角形的形心为重心(三条中线的交点), 故  $\bar{x}=1, \bar{y}=0$ ; 又由面积公式(6.1.23)

知,  $S_{\triangle ABC}=3$ , 从而,

$$\iint_D x d\sigma = 1 \times 3 = 3, \quad \iint_D y d\sigma = 0 \times 3 = 0.$$

**例 8.2.14** 过曲面  $\Sigma_1: z=x^2+y^2+1$  上任一点  $M(x_0, y_0, z_0)$  作切平面  $\Pi$ , 它被曲面  $\Sigma_2: z=x^2+y^2$  截得平面上的椭圆  $\Pi_1$ .

(1) 求  $\Pi_1$  下方的曲顶柱体的体积  $V_1$ ; (2) 求  $\Pi_1$  与  $\Sigma_2$  所围立体的体积  $V_2$ .

**解** (1) 曲面  $\Sigma_1$  在点  $M(x_0, y_0, z_0)$  的切平面方程为

$$z-z_0=2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0), \quad \text{即 } z=2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2.$$

它与曲面  $z=x^2+y^2$  的交线在  $xOy$  面上的投影为圆  $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=1$ , 记所围域为  $D$ , 面积为  $\pi$ ,  $D$  的形心  $P(x_0, y_0)$ . 故

$$\begin{aligned} V_1 &= \iint_D (2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2) dx dy = 2x_0 \iint_D x dx dy + 2y_0 \iint_D y dx dy + (1-x_0^2-y_0^2) \iint_D dx dy \\ &= 2x_0^2 \cdot \pi + 2y_0^2 \cdot \pi + (1-x_0^2-y_0^2) \cdot \pi = \pi(1+x_0^2+y_0^2) = \pi z_0. \end{aligned}$$

(2) 令  $x-x_0=\rho \cos \theta, y-y_0=\rho \sin \theta$ , 则  $D$  用  $(\rho, \theta)$  的表示为  $D: 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . 于是

$$\begin{aligned} V_2 &= \iint_D [(2x_0x+2y_0y+1-x_0^2-y_0^2)-(x^2+y^2)] dx dy \\ &= \iint_D [1-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2] dx dy = \pi - \iint_D \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta \\ &= \pi - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

### 练习 8.2.2

1. 设  $I_1 = \iint_{\substack{-1 \leq x \leq 1, \\ -2 \leq y \leq 2}} (x^2+y^2)^3 dx dy, I_2 = \iint_{\substack{0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 2}} (x^2+y^2)^3 dx dy$ , 根据区域的对称性,  $I_1$  与  $I_2$  有大小关系: \_\_\_\_\_.
2. 设  $D$  由直线  $x+y=1, x-y=1, x=0$  围成, 则  $\iint_D y dx dy =$  \_\_\_\_\_.
3. 设  $D$  是闭区域  $x^2+y^2 \leq 4$ , 则  $\iint_D (1+\sqrt[3]{xy}) d\sigma =$  \_\_\_\_\_.

4.  $I_1 = \iint_{\substack{|x| \leq 1, \\ |y| \leq 1}} (1+x) d\sigma, I_2 = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} xy d\sigma$ , 则  $I_1$  和  $I_2$  的值为 ( ).

- (A)  $I_1 > 0, I_2 = 0$  (B)  $I_1 < 0, I_2 = 0$  (C)  $I_1 = 0, I_2 = 0$  (D)  $I_1 > 0, I_2 < 0$

5. 设  $f(x)$  是连续的奇函数,  $g(x)$  是连续的偶函数, 区域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x}\}$ , 则以下结论正确的是 ( ).

- (A)  $\iint_D f(y)g(x) dx dy = 0$  (B)  $\iint_D f(x)g(y) dx dy = 0$   
(C)  $\iint_D [f(x)+g(y)] dx dy = 0$  (D)  $\iint_D [f(y)+g(x)] dx dy = 0$

## \*8.2.3 二重积分的一般换元法

我们讨论过二重积分从直角坐标系转换为极坐标系的变换公式,在那里,我们把平面上的同一个点  $M$ , 既用直角坐标表示, 又用极坐标表示. 就是说, 由坐标关系式  $\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$  联系的点  $(x, y)$  和点  $(\rho, \theta)$  是同一个平面上的同一个点, 只是采用了不同的坐标罢了. 现在来用另一种观点解释这种变换, 那就是把坐标关系式看作是直角坐标平面  $\rho O\theta$  到直角坐标平面  $xOy$  的一种坐标变换. 在这种变换下,  $\rho O\theta$  平面上的矩形  $D' = \{(\rho, \theta) | 0 \leq \rho \leq \rho_1, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$  可以变换成为  $xOy$  平面上的一个扇形.

对于一般换元, 我们有如下定义.

**定义 8.2.3** 设  $D'(\subset \mathbf{R}_{uv}^2)$ ,  $D(\subset \mathbf{R}_{xy}^2)$  分别是坐标平面  $uO'v$  和  $xOy$  上的有界闭区域, 所谓平面区域的**正则变换**  $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$  指满足下列条件的映射  $T$ :

(I)  $x(u, v), y(u, v)$  在  $D'$  上具有一阶连续偏导数;

(II) 雅可比式  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u, v) \in D'$ ;

(III) 变换  $T: D' \rightarrow D$  是一一对应的.

不难看出:

(1) 任何正则变换  $T$  必存在逆变换  $T^{-1}$ , 且由反函数存在定理:  $u(x, y), v(x, y)$  在  $D$  上也具有连续偏导数;

(2) 正则变换将不相交的曲线变成不相交的曲线 (如图 8.2.14);

通过网格的面积分析可以证明 (见阅读材料 8.2.1), 在正则变换  $T: D' \rightarrow D$  下任何对应的面积元  $\Delta\sigma$  和  $\Delta\sigma'$  满足:

$$\Delta\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \Delta\sigma' + o(\Delta\sigma'). \quad (8.2.14)$$

由此得到

$$d\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| d\sigma'. \quad (8.2.15)$$

将等式

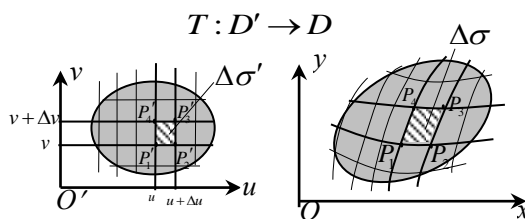


图 8.2.14



阅读材料 8.2.1  
正则变换下  
面积元的变化

注: 将一个变量关系式 (8.2.16) 两边分别乘上微元关系式 (8.2.15) 后再积分的计算模式称为微元代换法, 在后续三重积分各种换元公式、曲线积分和曲面积分的计算公式中都将出现这种模式, 但严格地证明这些公式都与“一致连续性”概念有关.

$$f(x, y) = f(x(u, v), y(u, v)) \quad (8.2.16)$$

乘以 (8.2.15) 式的两边 (见阅读材料 8.2.2), 就有

**定理 8.2.1 (二重积分换元定理)** 设  $f(x, y)$  在平面闭区域  $D$  上连续, 变换  $T: x = x(u, v), y = y(u, v)$  是从  $uO'v$  平面上闭区域  $D'$  到  $xOy$  平面上的  $D$  的正则变换, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad (8.2.17)$$

显然, 在极坐标变换:  $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$  下,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho, \text{ 于是有}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta.$$

用类似的方法可以验证对称区域上的二重积分公式 (8.2.8) - (8.2.10), 见阅读材料 8.2.3.

在定积分理论中, 与定理 8.2.1 相对应的是定积分换元公式:

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x(u)) x'(u) du$  (其中  $f(x)$  和  $x'(u)$  连续,  $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ ), 更确切地说, 是等式

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\min\{\alpha, \beta\}}^{\max\{\alpha, \beta\}} f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du.$$

**例 8.2.15** 求  $\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy$ , 而  $D$  是由直线  $x = 0, y = 0, x + y = 1$  围成的有界闭区域.

**解** 如图 8.2.15, 令  $u = x - y, v = x + y$ , 则  $x = \frac{1}{2}(u + v), y = \frac{1}{2}(v - u)$ ,

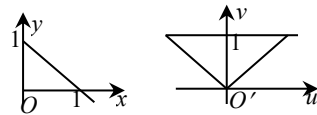


图 8.2.15

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}, \text{ 于是,}$$

**注** 这个值  $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{2}$  表明, 从坐标系  $uO'v$  到坐标系  $xOy$  在这个变换是将面积缩小一半的.

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}} dx dy = \iint_{D'} e^{\frac{u}{v}} \left| \frac{1}{2} \right| du dv = \frac{1}{2} \int_0^1 dv \int_{-v}^v e^{\frac{u}{v}} du$$

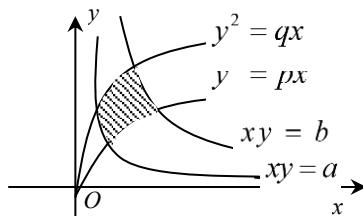


图 8.2.16

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dv \cdot \left[ v e^{\frac{u}{v}} \right]_{-v}^v = \frac{1}{2} (e - e^{-1}) \int_0^1 v dv = \frac{1}{4} (e - e^{-1}).$$

**例 8.2.16** 如图 8.2.16, 求由抛物线  $y^2 = px, y^2 = qx (0 < p < q)$  及双曲线  $xy = a, xy = b (0 < a < b)$  围成的有界闭区域  $D$  的面积  $\sigma$ .

解 令  $u = \frac{y^2}{x}, v = xy$ , 则  $(u, v) \in [p, q] \times [a, b]$ , 则

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix} = -\frac{3y^2}{x} = -3u.$$

根据思考题 7.3.3 的结论,

注 这个负值表明, 从坐标系  $uO'v$  到坐标系  $xOy$  的这个变换将顺时针排列的点变成反时针排列.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{3u} < 0,$$

于是,

$$\begin{aligned} \sigma &= \iint_D dx dy = \iint_{D'} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \int_a^b \left( \int_p^q \frac{1}{3u} du \right) dv \\ &= \frac{1}{3} (\ln q - \ln p) \int_a^b dv = \frac{1}{3} (b - a) \ln \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

**例 8.2.17** 求椭球体  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的体积  $V$ .

解 上半椭球  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  可表示成为  $z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ , 它在  $xOy$  面上的投影为  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ .

令  $x = a\rho \cos \theta, y = b\rho \sin \theta$  (这个变换称为广义极坐标变换, 当  $a = b = 1$  时成为极坐标变换), 则椭圆  $D$  对应矩形  $D': 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1$ , 且

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -a\rho \sin \theta \\ b \sin \theta & b\rho \cos \theta \end{vmatrix} = ab\rho,$$

变量代换满足  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2$ . 设  $D$  在第一象限部分为  $D_1$ , 则由对称性

$$V = 8 \iint_{D_1} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy = 8c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^1 \sqrt{1 - \rho^2} ab \rho d\rho \right) d\theta = 4\pi abc \cdot \left[ -\frac{1}{3} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3} \pi abc .$$

### 练习 8.2.3

1. 在平移变换  $\begin{cases} x = u + a \\ y = v + b \end{cases}$  下, 若区域  $D$  变为  $D'$ , 则  $\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} \underline{\hspace{2cm}} du dv$ .

2. 求  $\iint_D \left( \frac{x-y}{x+y} \right)^2 dx dy$ , 而  $D = \{(x, y) | 1 \leq x+y \leq 2, 1 \leq x-y \leq 2\}$ .

### 习题 8.2

1. 将直角坐标下的二重积分化为极坐标下的累次积分:

(1)  $\int_{-2}^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x, y) dx = \underline{\hspace{2cm}};$

(2)  $\int_{-a}^a dx \int_{a-\sqrt{a^2-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dy = \underline{\hspace{2cm}};$

(3)  $\int_0^1 dy \int_0^y f(x^2 + y^2) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. 用极坐标计算下列二重积分:

(1)  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sin(x^2 + y^2) dx$ ; (2)  $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} e^{x^2+y^2} d\sigma$ ; (3)  $\iint_{x^2+y^2 \leq 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2} dx dy$ ;

(4)  $\iint_D \arctan \frac{y}{x} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, y \leq x\}$ ;

3. 计算下列二重积分:

(1)  $\iint_D \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}$ ;

(2)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , 其中  $D$  由直线  $y = x, y = x + a, y = a, y = 3a$  ( $a > 0$ ) 所围成;

(3)  $\int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 + y^2} dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy$ ;

(4)  $\iint_D x^4 dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$  ( $0 < a < b$ ).

4. 指出  $xOy$  平面上的下列平面区域  $D$  具有何种对称性:

(1)  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$ ;

(2)  $D$  由直线  $y = 2, y = -x$  和  $y = x$  围成;

(3)  $D$  是四条直线  $y = \frac{1}{2}x + 1, y = \frac{1}{2}x - 1$  和  $y = 2x + 1, y = 2x - 1$  所围的平行四边形.

5. 求下列函数关于变量  $x, y$  的奇偶性, 并指出其图型关于坐标平面或坐标轴的对称性:

(1)  $f(x, y) = \frac{\tan(xy)}{y}$ ;

(2)  $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ ;

(3)  $f(x, y) = y$ .

6. 利用对称性计算:

(1) 设  $D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1\}$ , 则  $\iint_D xy dx dy = \underline{\hspace{2cm}};$

(2) 设  $D: |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ , 则  $\iint_D (x^3 + y) y d\sigma =$  \_\_\_\_\_;

(3) 设  $D: |x| \leq 2, |y| \leq 1$ , 则  $\iint_D (xe^y - x^2 \sin y - 1) dx dy =$  \_\_\_\_\_;

(4) 设  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 (a > 0, b > 0)$ , 则  $\iint_D (ax^3 + 1 + by^5) d\sigma =$  \_\_\_\_\_.

7. 计算二重积分  $\iint_D (x+y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$ .

8. 计算二重积分  $\iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} d\sigma$ , 其中  $D$  为  $x^2 + y^2 \leq 1$  在第一象限部分.

9. 求由曲面所围成的立体  $\Omega$  的体积:

(1)  $\Omega$  由  $x^2 + y^2 = 2z$  及  $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$  所围;

(2)  $\Omega$  由  $z = \frac{1}{2}$ ,  $x^2 + y^2 = 2z$  及  $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$  所围;

(3)  $\Omega$  由  $z = x^2 + 2y^2$  及  $z = 6 - 2x^2 - y^2$  所围.

10. 用二重积分计算曲面的面积  $S$ :

(1) 圆锥面  $z = \sqrt{x^2 + y^2} (z \leq R)$ ;

(2) 双曲抛物面  $z = xy$  被柱面  $x^2 + y^2 = R^2$  所截得的部分.

(3) 上半球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (z \geq 0)$ .

\*\*\*\*\*

11. 利用二重积分证明:  $\left(\int_0^1 e^{-x^2} dx\right)^2 > \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{e}\right)$ .

12. 计算二重积分:

(1)  $\iint_{x^2+y^2 \leq 1} (|x| + |y|) dx dy$ ;

(2)  $\iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma$ , 其中  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ ;

(3)  $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq R^2\}$ ;

(4)  $\iint_D \frac{a\sqrt{f(x)} + b\sqrt{f(y)}}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(y)}} d\sigma$ ; 其中  $D = \{x, y | x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ ,  $f(x)$  为  $D$  上的正值连续函数,  $a, b$

为常数.

13. 设  $D$  是由直线  $y=1, y=x, y=-x$  围成的有界区域, 计算二重积分  $\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy$ .

14. 已知平面区域  $D = \{(\rho, \theta) | 2 \leq \rho \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ , 计算二重积分  $\iint_D x dx dy$ .

15\*. 设  $f(x)$  在  $[0, a]$  上连续, 证明:  $\iint_D f(x+y) dx dy = \int_0^a xf(x) dx$ , 其中  $D: x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq a$ .

16\*. 计算二重积分:

(1)  $\iint_{\substack{0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \pi}} |\sin(x+y)| dx dy$ ;

(2)  $\iint_D (5x+3y) dx dy$ , 其中  $D: x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 \leq 0$ ;

(3)  $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ .





## §8.3 三重积分

### 8.3.1 直角坐标系下的三重积分

#### 一、三重积分的概念

如图 8.3.1, 设在空间有限闭区域 $\Omega$ 内分布着某种不均匀的物质, 密度函数 $\mu(x, y, z)$ 连续, 参照二重积分中的方法、记号和步骤, 采用“分划、近似、作和, 求极限”的方法, 使 $\Omega$ 内的物质的质量确定为

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \mu(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k,$$

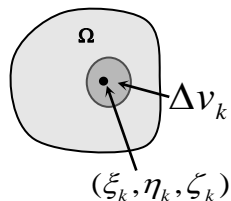


图 8.3.1

其中记号与下面的定义 8.3.1 相同. 将密度 $\mu(x, y, z)$ 抽象成为空间有限闭区域 $\Omega$ 上的一般有界函数 $f(x, y, z)$ , 就是下列三重积分的定义:

**定义 8.3.1** 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ 是可求体积的空间有界闭区域, 函数 $f(x, y, z)$ 是定义在 $\Omega$ 上的有界函数. 对 $\Omega$ 作任意分划 $T: \Delta v_k (k=1, 2, \dots, n)$  (其体积也记为 $\Delta v_k$ ),  $\lambda$ 是这些小块 $\Delta v_k$ 的最大直径. 任意取介点 $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \in \Delta v_k$ , 作积分和 $\sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k$ , 若当 $\lambda \rightarrow 0$ 时此和式极限 $I$ 存在, 且与分划 $T$ 无关, 与介点组 $\{(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\}_{k=1}^n$ 的选取也无关, 则称黎曼和存在极限 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k$ , 这时也称 $f(x, y, z)$ 在 $\Omega$ 上可积,  $I$ 称为函数 $f(x, y, z)$ 在 $\Omega$ 上的三重积分, 记作 $\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$ , 即

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta v_k = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv.$$

这时,  $f(x, y, z)$ 称为被积函数,  $x, y, z$ 称为积分变量,  $\Omega$ 称为积分区域.  $dv$ 称为体积微元素, 在直角坐标系下常写作 $dx dy dz$ .  $f(x, y, z) dv$ 称为积分元.

定义在有界闭区域上的三元连续函数的三重积分是一定存在的, 我们今后总假定三重积分的被积函数是存在的. 三重积分的性质与二重积分相似, 也有线性性质、可加性、度量性质、保序性、估值定理、中值定理等.

**思考题 8.3.1** 设 $f(x, y, z)$ 在空间有界闭区域 $\Omega$ 上连续, 如何计算 $f$ 在 $\Omega$ 上的平均值?

#### 二、利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数 $f(x, y, z) \geq 0$ , 并将它看作某物体的密度函数, 我们通过计算该物体的质量给出几个计算方法.

##### 1. 方法一 (投影法)

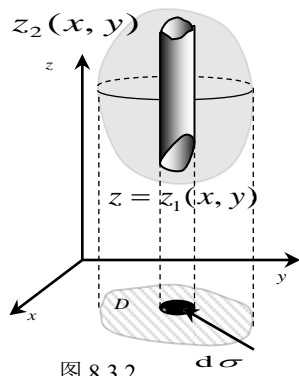


图 8.3.2

这个方法也称“切丝法”，或“先一后二”法。

如图 8.4.2, 设有界闭域  $\Omega$  在  $xOy$  平面上的投影为闭区域  $D_{xy}$ , 如果自  $D_{xy}$  内部任何一点  $(x, y, 0)$  作平行于  $z$  轴的平行线与  $\Omega$  的边界  $\Sigma$  至多有两个交点  $(x, y, z_1(x, y)), (x, y, z_2(x, y))$ , 其中  $z_1(x, y) \leq z_2(x, y)$ , 则  $\Sigma$  被分出下底、上顶和侧面三个部分, 其中下底和上顶分别为

$$\Sigma_1: z = z_1(x, y), \quad \Sigma_2: z = z_2(x, y).$$

于是  $\Omega$  可用集合表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D_{xy}\}.$$

我们将  $\Omega$  切成很多细丝, 细丝是由二重积分的方法在  $D_{xy}$  上作分划而成的, 每根细丝可以近似为一个母线平行于  $z$  轴的柱体, 在  $D_{xy}$  的微元  $d\sigma$  上任意取点  $(x, y)$ , 细丝在  $z$  轴上分布的区间是  $[z_1(x, y), z_2(x, y)]$ , 对于任意小区间  $[z, z+dz] \subset [z_1(x, y), z_2(x, y)]$ , 一根细丝的质量微元是

$$f(x, y, z)(d\sigma dz) = (f(x, y, z)d\sigma)dz.$$

由定积分的定义, 并注意  $d\sigma$  在细丝上是一个常数, 这一根细丝的质量为

$$dm = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} (f(x, y, z)d\sigma)dz = \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz \right) d\sigma,$$

这是一个  $x, y$  的二元函数与面积元  $d\sigma$  的乘积, 由二重积分的定义知, 该物体的全部质量

$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv$  为

$$\iint_{D_{xy}} dm = \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz \right) d\sigma.$$

右边的积分常常写作  $\iint_D dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz$ , 从而有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \iint_D dxdy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz. \quad (8.3.1)$$

当  $f(x, y, z)$  不是非负函数时, 参照二重积分的相应处理方法, 上式也是正确的。

关于重积分计算方法严谨性的说明, 请看阅读材料 8.3.1.

当  $\Omega$  在  $xOy$  平面上的投影  $D_{xy}$  被表示成为  $D_{xy} = \{(x, y) \mid y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$  时,  $\Omega$  可以表示为

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}.$$

利用投影法结果, 把二重积分化成二次积分, 就相当于把三重积分化作三次积分(三次定积分):

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z)dz. \quad (8.3.2)$$

注 将这种区域描述成“平行于  $z$  轴且穿过闭区域  $\Omega$  的内部的直线与  $\Omega$  的边界曲面到多有两个交点”并不合适, 因为可以穿过  $\Omega$  的内部的直线是一定有两个交点的, 无需“至多”; 本书的描述可以包括形如下例的  $\Omega$ :

$0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 1$   
(在原点处一条竖线与  $\Omega$  恰有一个交点)。

阅读材料 8.3.1  
关于重积分  
计算方法严  
谨性的说明

## 2. 方法 2 (截面法)

截面法也称“切片法”或“先二后一”法.

如图 8.3.3, 设  $\Omega$  在  $z$  轴上的投影区间为区间  $[a, b]$ , 对于任意  $z \in [a, b]$ , 过点  $(0, 0, z)$  与  $z$  轴垂直的平面交  $\Omega$  得到一个截面图形  $D_z$ , 则  $\Omega$  可表示为

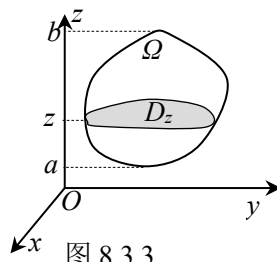


图 8.3.3

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, a \leq z \leq b\}.$$

任取  $z \in [a, b]$ , 区间  $[z, z+dz] \subset [a, b]$  上对应的小质量是分别过  $z$  轴上的点  $z$  和点  $z+dz$  并垂直于  $z$  轴的平面“切”下的一个薄片的“柱体”质量, 每块薄片的质量微元是

$$f(x, y, z)(d\sigma dz) = (f(x, y, z)dz)d\sigma,$$

由二重积分的定义, 并注意  $dz$  在薄片上是一个常数, 故薄片的质量为

$$dm = \iint_{D_z} (f(x, y, z)dz)d\sigma = \left( \iint_{D_z} f(x, y, z)d\sigma \right) dz,$$

这是一个一元函数的微元素, 由定积分的微元法知, 该物体的质量为

$$\int_a^b \left( \iint_{D_z} f(x, y, z)dx dy \right) dz, \text{ 或写为 } \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z)dx dy$$

因此有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)dv = \int_a^b dz \iint_{D_z} f(x, y, z)dx dy. \quad (8.3.3)$$

具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活地选择方法.

**例 8.3.1** 化三重积分  $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)dx dy dz$  为三次积分, 其中:

(1)  $\Omega$  为由曲面  $z = x^2 + 2y^2$  及  $z = 2 - x^2$  所围成的闭区域.

(2)  $\Omega$  为由曲面  $z = x^2 + y^2$ ,  $y = x^2$ ,  $y = 1$ ,  $z = 0$  所围成的空间闭区域.

**解** (1) 如图 8.3.4, 由  $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2 \\ z = 2 - x^2 \end{cases}$  解得  $\Omega$  在  $xOy$  平面的投影区域  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 故

$\Omega$  可用不等式表示为

$$\Omega: \begin{cases} 2 - x^2 \leq z \leq x^2 + 2y^2, \\ -\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}, \\ -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$



图 8.3.4

从而

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x, y, z)dz.$$

(2) 如图 8.3.5,  $\Omega$  在  $xOy$  平面的投影为  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$ ,

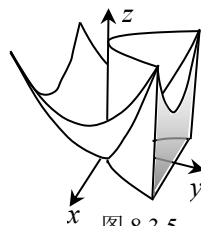


图 8.3.5

故

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\},$$

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{x^2}^1 dy \int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z) dz.$$

☆例 8.3.2 计算三重积分  $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中:

(1)  $\Omega$  为由三个坐标面及平面  $x + y + z = 1$  所围成的闭区域;

(2)  $\Omega$  为由锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  及平面  $z = h$  围成的有界闭域 ( $h > 0$ ).

注 本题的结果常常在曲面积分计算时用到. 请读者对比 (2) (3) 的结果的相似之处, 并思考当被积函数  $z$  换作  $x$  或  $y$  时 (1) 的结果是否变化.

解 (1) 解法一 (投影法) 如图 8.3.6,  $\Omega$  在  $xOy$  平面的投影区域为

$$D_{xy} = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}, \text{ 故}$$

$$\Omega = \{(x, y, z) | 0 \leq z \leq 1 - x - y, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

因此,

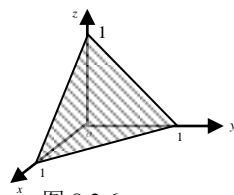


图 8.3.6

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} z dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \frac{1}{2} (1-x-y)^2 dy = \int_0^1 \left[ -\frac{1}{6} (1-x-y)^3 \right]_0^{1-x} dx \\ &= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

解法二(截面法) 对于任意  $z \in [0, 1]$ , 有截面  $D_z = \{(x, y) | x + y \leq 1 - z, x \geq 0, y \geq 0\}$ , 从而

$$\Omega = \{(x, y, z) | (x, y) \in D_z, 0 \leq z \leq 1\}. \text{ 根据三角形面积公式,}$$

$$\iint_{D_z} dx dy = \frac{1}{2} (1-z)(1-z).$$

因此,

$$I = \int_0^1 z dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^1 z \cdot \frac{1}{2} (1-z)^2 dz = \frac{1}{24}.$$

(2) 解法一 (投影法) 如图 8.3.7, 由于

$$\Omega = \{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h, (x, y) \in D_{xy}\}, D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq h^2\}. \text{ 因此,}$$

$$I = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^h z dz = \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (h^2 - x^2 - y^2) dx dy \quad (\text{令 } x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta)$$

$$= \frac{1}{2} \iint_{D_{xy}} (h^2 - \rho^2) \rho d\rho d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h (h^2 \rho - \rho^3) d\rho = \frac{\pi h^4}{4}.$$

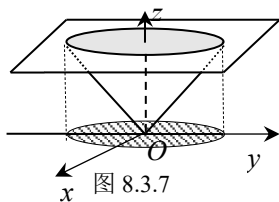


图 8.3.7

解法二 (截面法) 当  $0 \leq z \leq h$  时, 可作截面:  $D_z = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq z^2\}$ . 其面积为  $\pi z^2$ , 故

$$I = \int_0^h z dz \iint_{D_z} dx dy = \int_0^h z \cdot \pi z^2 dz = \frac{\pi h^4}{4}.$$

☆例 8.3.3 计算椭球体  $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  的体积.

解 如图 8.3.8,  $\Omega = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}, -c \leq z \leq c \right\}$ , 其中  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 - \frac{z^2}{c^2}$  确定

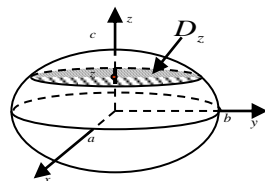


图 8.3.8

椭圆截面  $D_z$ , 根据椭圆的面积公式, 椭圆  $\frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} \leq 1$  的面积为

$$\pi \left( a \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \right) \left( b \sqrt{1 - \frac{z^2}{c^2}} \right) = \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right).$$

注 例 8.2.17 用二重积分的换元法解决了本题.

从而体积

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_{-c}^c dz \iint_{D_z} dx dy = \int_{-c}^c \pi ab \left( 1 - \frac{z^2}{c^2} \right) dz = \frac{4\pi}{3} abc.$$

例 8.3.4 计算三重积分  $I = \iiint_{\Omega} y \sqrt{1-x^2} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  由曲面

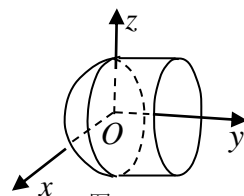


图 8.3.9

$y = -\sqrt{1-x^2-z^2}$ ,  $x^2 + z^2 = 1$ ,  $y=1$  所围成.

解: 如图 8.3.9, 将  $\Omega$  投影到  $zOx$  平面得  $D_{zx} = \{(z, x) \mid z^2 + x^2 \leq 1\}$ , 再求  $D_{zx}$  上的二重积分, 得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{zx}} \sqrt{1-x^2} dz dx \int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^1 y dy = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x^2 + z^2}{2} dz \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{3} (1 + x^2 - 2x^4) dx = \frac{28}{45}. \end{aligned}$$

注 解本题时需要将 (8.3.1) 式略作改造, 将投影从  $D_{xy}$  变成  $D_{zx}$ .

### 练习 8.3.1

1. 填空:

(1) 已知  $\Omega$  为正方体  $\{(x, y, z) \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, |z| \leq 1\}$ , 则  $\iiint_{\Omega} xyz dv =$  \_\_\_\_\_;

(2) 设  $\Omega$  为满足  $a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, l \leq z \leq m$  的长方体, 则  $\iiint_{\Omega} xy^2 z^3 dx dy dz =$  \_\_\_\_\_.

2. 已知  $\Omega$  由  $x+y+z=1$  与三个坐标面所围成, 则将三重积分  $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$  写成三次积分,  $I =$  \_\_\_\_\_.

## 8.3.2 利用柱面坐标和区域的对称性计算三重积分

### 一、用柱面坐标计算三重积分

设点  $M(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ , 将  $x, y$  用极坐标  $\rho, \theta$  代替, 则  $(\rho, \theta, z)$  就称为点  $M$  的柱面坐标. 直角坐标系与柱面坐标系的关系为:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, & 0 \leq \rho < +\infty, \\ y = \rho \sin \theta, \text{ 其中: } & 0 \leq \theta \leq 2\pi, \\ z = z, & -\infty < z < +\infty. \end{cases} \quad (8.3.5)$$

空间点的柱面坐标表示是平面点的极坐标表示方法的一种推广.

如图 8.3.10, 柱面坐标系中的特殊曲面为

$\rho = \text{常数}$ : 以  $z$  轴为轴的圆柱面;

$\theta = \text{常数}$ : 过  $z$  轴的半平面;

$z = \text{常数}$ : 与  $xOy$  平面平行的平面.

因此在直角坐标系下,

圆柱  $x^2 + y^2 = R^2$  可简化为  $\rho = R$ ;

半平面  $y = kx$  可按  $\theta = \arctan k$  等形式转化.

如图 8.3.11, 在柱面坐标系中体积元  $dv$  可以看成是对空间区域  $\Omega$  用很多同心圆柱面、水平面和经过  $z$  轴的竖直平面所截得, 当  $\rho, \theta, z$  分别给以微小增量  $d\rho, d\theta, dz$  时,  $dv$  成为平面极坐标系中的底面面积  $\rho d\rho d\theta$ 、高  $dz$  的柱体, 因此体积微元为

$$dv = \rho d\rho d\theta dz. \quad (8.3.6)$$

仿照二重积分的极坐标换元公式, 我们有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz. \quad (8.3.7)$$

如果积分区域  $\Omega$  的边界包含部分圆柱面、圆锥面、旋转抛物面, 就可以考虑选用柱面坐标.

**例 8.3.5** 计算三重积分:

$$(1) I = \iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 为由柱面 } x^2 + y^2 = 2x \text{ (} y \geq 0 \text{)} \text{ 及平面 } z = 0, z = a \text{ (} a > 0 \text{)},$$

$y = 0$  所围成半圆柱体;

$$(2) I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz, \text{ 其中 } \Omega \text{ 是球面 } x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ 与抛物面 } x^2 + y^2 = 3z \text{ 所围的立体.}$$

**解** (1) 如图 8.3.12,  $\Omega$  是一个母线平行于  $z$  轴的柱体, 在柱面坐标系下, 顶面和底面方程分别为  $z = a$  和  $z = 0$ .  $\Omega$  在  $xOy$  平面上的投影是  $D_{xy} = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0\}$ ,  $\Omega$  可用不等式表示为

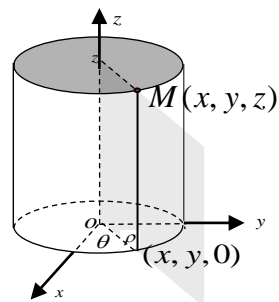


图 8.3.10

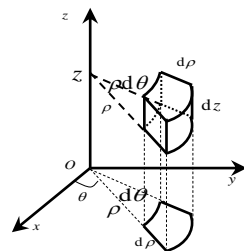


图 8.3.11

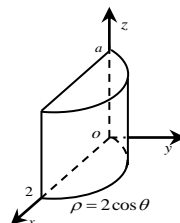


图 8.3.12

$$\Omega: \begin{cases} 0 \leq z \leq a, \\ 0 \leq \rho \leq 2 \cos \theta, \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

所以

$$I = \iiint_{\Omega} z \rho^2 \, d\rho \, d\theta \, dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} \rho^2 \, d\rho \int_0^a z \, dz = \frac{4a^2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \theta \, d\theta = \frac{8}{9} a^2.$$

(2) 如图 8.3.13, 由  $x^2 + y^2 = \rho^2$  知交线为  $\begin{cases} \rho^2 + z^2 = 4, \\ \rho^2 = 3z \end{cases}$ , 即  $z=1, \rho=\sqrt{3}$ , 这是一个圆, 所以  $\Omega$

在  $xOy$  面上的投影为  $D_{xy}: 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . 故  $\Omega$  由不等式

$$\frac{\rho^2}{3} \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}, 0 \leq \rho \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

所确定, 所以,

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho \, d\rho \int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} z \, dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} \rho \cdot \frac{1}{2} \left( 4 - \rho^2 - \frac{\rho^4}{9} \right) d\rho = \frac{13}{4} \pi.$$

**例 8.3.6** 计算  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz$ , 其中  $\Omega$  是曲线  $y^2 = 2z$ ,

$x=0$  绕  $z$  轴旋转一周而成的曲面与两平面  $z=2, z=8$  所围的立体.

**解法一 (割补法)** 由平面曲线  $\begin{cases} y^2 = 2z, \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴旋转得旋转面为  $x^2 + y^2 = 2z$ , 所

围成的立体及其投影区域如图 8.3.14, 看作旋转抛物面在平面  $z=8$  以下的部分  $\Omega_1$  减去在平面  $z=2$  以下的部分  $\Omega_2$ , 故区域的表达为:

$$\Omega_1: \begin{cases} \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 8, \\ 0 \leq \rho \leq 4, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \text{ 投影区域 } D_1: \rho \leq 4; \quad \Omega_2: \begin{cases} \frac{\rho^2}{2} \leq z \leq 2, \\ 0 \leq \rho \leq 2, \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi, \end{cases} \text{ 投影区域 } D_2: \rho \leq 2.$$

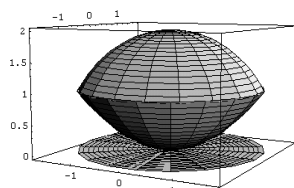
所以,

$$I = I_1 - I_2 = \iiint_{\Omega_1} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz - \iiint_{\Omega_2} (x^2 + y^2) \, dx \, dy \, dz.$$

其中

$$I_1 = \iint_{D_1} \rho \, d\rho \, d\theta \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \rho^2 \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^4 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^8 \rho \cdot \rho^2 \, dz = 2\pi \int_0^4 \left( 8 - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho^3 \, d\rho = \frac{4^5}{3} \pi;$$

$$I_2 = \iint_{D_2} \rho \, d\rho \, d\theta \int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 \rho^2 \, dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho \int_{\frac{\rho^2}{2}}^2 \rho \cdot \rho^2 \, dz = 2\pi \int_0^2 \left( 2 - \frac{\rho^2}{2} \right) \rho^3 \, d\rho = \frac{2^5}{6} \pi;$$



**思考题 8.3.2** 如何用截面法解本题, 即计算  $I = \iiint_{\Omega} z \, dx \, dy \, dz$ ,

其中  $\Omega$  为  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ ,

$x^2 + y^2 \leq 3z$  公共部分.

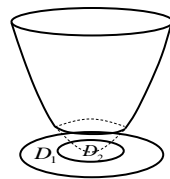


图 8.3.14



故

$$I = \frac{4^5}{3}\pi - \frac{2^5}{6}\pi = 336\pi.$$

解法二（分块法） 把 $\Omega$ 看作中间一个圆柱体 $\Omega_{\text{柱}}$ 和外面一个“环形的”旋转体 $\Omega_{\text{外环}}$ 之和. 于是, 用柱面坐标得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 4} (x^2+y^2) dx dy \int_2^8 dz + \iint_{4 \leq x^2+y^2 \leq 16} (x^2+y^2) dx dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^8 dz \\ &= 6 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho + \int_0^{2\pi} d\theta \int_2^4 \rho^3 \left( 8 - \frac{\rho^2}{2} \right) d\rho = 48\pi + 288\pi = 336\pi. \end{aligned}$$

解法三（截面法） 在每个截面 $D_z$ 上用极坐标计算, 其中 $D_z$ 由 $\rho^2 \leq 2z (2 \leq z \leq 8)$ 确定, 所以,

注意 本题在截面上的二重积分不是截面的面积.

$$\begin{aligned} I &= \int_2^8 dz \iint_{D_z} (x^2+y^2) dx dy = \int_2^8 dz \iint_{\rho \leq \sqrt{2z}} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \int_2^8 dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2z}} \rho^3 d\rho \\ &= \int_2^8 2\pi z^2 dz = 336\pi. \end{aligned}$$

## 二、利用对称性计算三重积分

与平面区域相似地, 设 $\Omega (\subset \mathbf{R}^3)$ 是空间几何体, 对任何点 $(x, y, z) \in \Omega$ , 如果总有

- (1)  $(x, y, -z) \in \Omega$ , 则称 $\Omega$ 关于 $xOy$ 平面对称, 同样地定义另外两种关于坐标面的对称性;
- (2)  $(x, -y, -z) \in \Omega$ , 则称 $\Omega$ 关于 $x$ 轴对称, 同样地定义另外两种关于坐标轴的对称性;
- (3)  $(-x, -y, -z) \in \Omega$ , 则称 $\Omega$ 关于原点(中心)对称;
- (4)  $(y, z, x) \in \Omega$ 和 $(z, x, y) \in \Omega$ , 则称 $\Omega$ 关于 $x, y, z$ 轮换对称.

上述对空间区域的对称性的定义方法, 同样适用于空间曲面 $\Sigma$ 的对称性, 只要把 $\Omega$ 换作 $\Sigma$ 即可, 空间几何体的对称性通常是由边界曲面的对称性来判断的: 如果空间区域 $\Omega$ 的边界的表达式为 $F(x, y, z) = 0$ , 那么可用下列方法判别对称性:

- (1) 若 $F(x, y, -z) = F(x, y, z)$ , 则 $\Omega$ 关于平面 $z = 0$  (即 $xOy$ 平面) 对称;
- (2) 若 $F(y, x, z) = F(x, y, z)$ , 则 $\Omega$ 关于平面 $x = y$ 对称;
- (3) 若 $F(y, z, x) = F(z, x, y) = F(x, y, z)$ , 则 $\Omega$ 具有轮换对称性.

作为例子, 球体在第一卦限中的部分

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

就是一个关于 $x, y, z$ 轮换对称的几何体.

思考题 8.3.3 区域 $\Omega$ 关于 $x, y, z$ 的轮换对称性有两种定义, 定义1: “任意两个自变量对调后, 仍表示原来的区域”; 定义2 (本书的定义): “对 $\Omega$ 上任意点 $(x, y, z)$ , 点 $(x, y, z)$ ,  $(y, z, x)$ 也在 $\Omega$ 上”. 这两种定义有没有蕴含关系? 如何证明?

利用区域的对称性, 可以优化重积分的计算过程.

使用对称性时应注意到: (1) 积分区域关于坐标面的对称性; (2) 被积函数在积分区域上的关于三个变量的奇偶性或其它对称性.

### 1. 用函数的奇偶性计算三重积分

**命题 8.3.1** 设  $f(x, y, z)$  是空间有界闭区域  $\Omega$  上的连续函数.

**若** 积分区域  $\Omega$  关于平面  $z=0$  对称,  $\Omega_{\pm}$  为  $\Omega$  的上半部分. 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega_{\pm}} [f(x, y, z) + f(x, y, -z)] dv, \quad (8.3.15)$$

**注** 若  $\Omega$  关于  $x=0$  对称, 则  $f$  关于  $x$  是奇函数时, 积分  $I=0$ ; 偶函数时,  $I=2I_1$ ; ..... 此处  $x$  可以换作  $y$  或  $z$ .  $I_1$  表示“一侧的积分”, “ $x=0$ ”可指数轴的原点、坐标平面的  $y$  轴、空间的  $yOz$  平面; 并与关于  $x$  的奇偶性相配. 这种记法, 对于定积分、重积分, 及后续的第一型曲线积分、第一型曲面积分都通用.

特别地,

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \begin{cases} 0, & f \text{ 关于 } z \text{ 是奇函数,} \\ 2 \iiint_{\Omega_{\pm}} f(x, y, z) dv, & f \text{ 关于 } z \text{ 是偶函数.} \end{cases}$$

类似地可以推出关于坐标面对称的另外两种公式. 这些等式可以像二重积分的相关命题一样来解释, 例如, 当  $\Omega$  关于平面  $z=0$  对称时, 如果  $f(x, y, z)$  是关于  $z$  的奇函数, 一对“上下对称的”积分元  $f(x, y, z)dv$  与  $f(x, y, -z)dv$  相互抵消; 如果  $f(x, y, z)$  是关于  $z$  的偶函数, 则积分元  $f(x, y, z)dv$  与  $f(x, y, -z)dv$  是相同的.

**例 8.3.7** 计算三重积分:

$$(1) \quad I = \iiint_{\Omega} \frac{z \ln(x^2 + y^2 + z^2 + 1)}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} dx dy dz, \quad \text{其中 } \Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

$$(2) \quad I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz, \quad \text{其中 } \Omega \text{ 是 } x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ 及 } z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \text{ 确定的有界闭区域.}$$

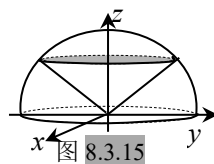
**解** (1) 积分域关于  $z=0$  对称, 被积函数是关于  $z$  的奇函数, 故  $I=0$ .

(2) 如图 8.4.15, 由对称性,  $\Omega$  关于  $yOz$  平面对称, 而  $f(x, y, z)=x$  是关于  $x$  的奇函数, 所以

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz = 0;$$

同理,

$$\iiint_{\Omega} y dx dy dz = 0.$$



以下用柱面坐标计算其余部分, 即

$$I = \iiint_{\Omega} z \rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \rho d\rho \int_{\rho}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z dz = 2\pi \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} \frac{1}{2} (R^2 - \rho^2 - \rho^2) \rho d\rho = \frac{\pi R^4}{8}.$$

## 2. 用轮换对称性计算三重积分

用类似于二重积分中的对称性方法可以得到:

**命题 8.3.2** 设  $f(x, y, z)$  是空间有界闭区域  $\Omega$  上的连续函数.

(1) 若积分区域  $\Omega$  关于平面  $y = x$  对称, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(y, x, z) dv = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [f(x, y, z) + f(y, x, z)] dv. \quad (8.3.16)$$

(2) 若积分区域  $\Omega$  具有轮换对称性, 则

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv = \iiint_{\Omega} f(y, z, x) dv = \iiint_{\Omega} f(z, x, y) dv = \frac{1}{3} \iiint_{\Omega} [f(x, y, z) + f(y, z, x) + f(z, x, y)] dv. \quad (8.3.17)$$

**例 8.3.8** 求三重积分:

(1)  $I = \iiint_{\Omega} (2x^2 + 3xy^2 \ln \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  由  $z = x^2 + y^2, z = 4$  围成.

(2)  $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  与  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  所确定的区域.

**解** (1) 将积分拆成两个积分之和,

$$I = \iiint_{\Omega} 2x^2 dx dy dz + 3 \iiint_{\Omega} xy^2 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz.$$

如图 8.3.16, 后一积分的积分区域关于平面  $x=0$  对称, 且被积函数是  $x$  的奇函数, 故积分为零. 前一积分的积分区域关于平面  $x=y$  对称, 可用式 (8.3.16) 化简,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} 2x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \iiint_{\Omega} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \rho^3 d\rho \int_{\rho^2}^4 dz = 2\pi \int_0^2 \rho^3 (4 - \rho^2) d\rho = \frac{32\pi}{3}. \end{aligned}$$

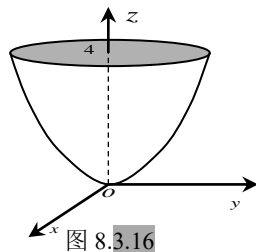


图 8.3.16

(2) 如图 8.4.17,  $\Omega$  具有轮换对称性, 所以

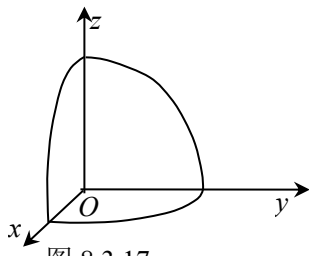


图 8.3.17

$$\iiint_{\Omega} x dx dy dz = \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \iiint_{\Omega} z dx dy dz, \text{ 故 } I = 3 \iiint_{\Omega} z dx dy dz,$$

再用截面法,  $D_z: x^2 + y^2 \leq R^2 - z^2, x \geq 0, y \geq 0$  (四分之一圆),  $z \in [0, R]$ , 故

$$I = 3 \iiint_{\Omega} z dx dy dz = 3 \int_0^R z dz \iint_{D_z} dx dy = 3 \int_0^R z \cdot \frac{\pi}{4} (R^2 - z^2) dz = \frac{3\pi R^4}{16}.$$

### 练习 8.3.2

1. 设空间区域  $\Omega$  由曲面  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  和  $z = 1$  所围成, 将三重积分  $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$  化为柱面坐标系下的三次积分

积分有  $I = \underline{\hspace{2cm}}$

2. 设  $\Omega$  由  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}, z = -1$  围成, 试把  $I = \iiint_{\Omega} f(x^2 + y^2 + z^2) dv$  按如下要求的坐标写出三次积分

(1) 直角坐标:  $I = \underline{\hspace{2cm}}$ ; (2) 柱面坐标:  $I = \underline{\hspace{2cm}}$ ;

3. 设  $\Omega$  为  $x^2 + y^2 = 1$  及  $z = 0, z = 1$  所围成的区域, 则  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz = \underline{\hspace{2cm}}$ .

4. 设  $\Omega$  为球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ , 则  $\iiint_{\Omega} [(x^2 + y^2)z + 3] dv = \underline{\hspace{2cm}}$ .

5. 设  $\Omega$  由  $z = -\sqrt{x^2 + y^2}, z = -1$  围成, 则  $\iiint_{\Omega} (1 + x|z|) dv = \underline{\hspace{2cm}}$ .

## \*8.3.3 用球面坐标和一般换元公式计算三重积分

### 一、用球面坐标计算三重积分

现在来将极坐标系换个角度推广到三维空间.

如图 8.3.18, 设  $P(x, y, z)$  为空间任意一点,  $r$  是  $P(x, y, z)$  到原点的距离, 亦即  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ;

$\varphi$  是射线  $OP$  与  $z$  轴的张角;  $\theta$  是射线  $OP$  在  $xOy$  平面上的投影  $OQ$  与  $x$  轴的夹角. 则

$$x = OR = OQ \cos \theta = r \sin \varphi \cos \theta,$$

$$y = RQ = OQ \sin \theta = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = OS = r \cos \varphi.$$

从而有

$$T: \begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

(8.3.18)

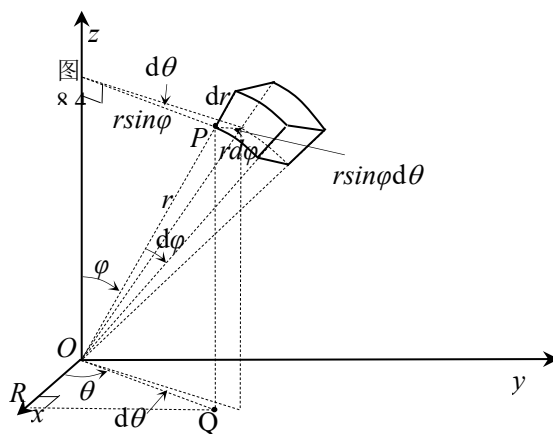


图 8.3.18

显然有下列自然的取值范围： $0 \leq r < +\infty$ ， $0 \leq \varphi \leq \pi$ ， $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 。

在球面坐标系下需要注意的特殊曲面有：

$r = \text{常数 } R$ ，表示球面  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ ；

$\varphi = \text{常数}$ ，表示圆锥面  $z^2 = (x^2 + y^2) \cot^2 \varphi$ ，半顶角为  $\varphi$ ；

$\theta = \text{常数}$ ，表示过  $z$  轴的半平面，当  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$  或  $\frac{3\pi}{2}$  时， $y = x \tan \theta$ 。

空间区域  $\Omega$  被许多同心球面、过  $z$  轴的半平面（以  $z$  轴为边界的部分平面）和以  $z$  轴为轴的圆锥面截割而成。当  $r, \varphi, \theta$  赋予微小增量  $dr, d\varphi, d\theta$  时，体积微元  $dv$  近似于一个长方体的三边长之积，故

$$dv = dr \cdot r \sin \varphi d\theta \cdot r d\varphi = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta. \quad (8.3.19)$$

因此，设  $f(x, y, z)$  在有界闭域  $\Omega$  上连续，则有换元公式：

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta. \quad (8.3.20)$$

球面坐标下各积分限的确定方法如下：

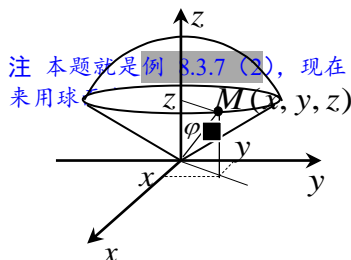
(1) 关于  $\theta$  的限：将  $\Omega$  投影到  $xOy$  面上，得区域  $D_1$ ，再就  $D_1$  按平面极坐标确定  $\theta$  的变化范围， $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ，则  $\theta_1, \theta_2$  分别就是下限和上限。

(2) 关于  $\varphi$  的限：任意固定一个  $\theta$ ，与  $z$  轴形成一个半平面，设这个半平面截  $\Omega$  得到  $D_2$ ，同样按极坐标确定  $\varphi$  的范围， $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ ，则  $\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta)$  分别就是下限和上限。

(3) 关于  $r$  的限：对于任意固定的  $\theta$  和  $\varphi$ ，从原点出发作射线，如果这条射线穿进区域  $\Omega$  时是取值  $r = r_1(\theta, \varphi)$ ，穿出  $\Omega$  时取值  $r = r_2(\theta, \varphi)$ ，那么： $r_1(\theta, \varphi)$  和  $r_2(\theta, \varphi)$  分别就是下限和上限。

如果积分区域  $\Omega$  的边界包含部分球面或圆锥面，或者被积函数出现  $x^2 + y^2 + z^2$  时，就可以考虑使用球面坐标。

**例 8.3.9** 求  $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ ，而  $\Omega$  是由圆锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  与上半球



注 本题就是例 8.3.7 (2)，现在来用球

面  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  围成的有界闭区域.

解 如图 8.3.19, 令  $\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$ , 则  $\Omega$  满足:  $0 \leq r \leq R$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . 因此,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R r^3 \sin \varphi \cos \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{8}. \end{aligned}$$

注 可见, 这个球顶面的锥体在直角坐标系  $\mathbf{R}_{r\varphi\theta}^3$  中对应一个长方体.

例 8.4.10 计算  $I = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是两个球  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ ,

$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$  的公共部分 ( $R > 0$ ).

解 将  $\Omega$  用  $\varphi$  自 0 到  $\frac{\pi}{2}$  的圆锥面扫描一遍, 并且  $\Omega$  投影到  $xOy$  后是中心在原

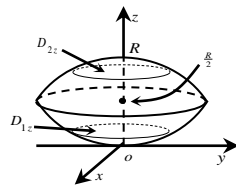


图 8.3.20

点的圆, 故  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . 由于两个球面的交线为  $x^2 + y^2 = \frac{3R^2}{4}$ ,  $z = \frac{R}{2}$ ,

故交线处的  $\varphi = \frac{\pi}{3}$ , 从而  $\Omega$  被圆锥面  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  分割为上下两块. 因此

注 本题如果用柱面坐标系, 则可以一次性地计算积分:

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}R} \rho d\rho \int_{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} z^2 dz,$$

但计算量很大. 建议读者用截面法解答本题.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^R (r \cos \varphi)^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &\quad + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} (r \cos \varphi)^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{3} d\varphi \cdot \frac{R^5}{5} + 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi \sin \varphi}{3} \cdot \frac{32R^5 \cos^5 \varphi}{5} d\varphi = \frac{59\pi R^5}{480}. \end{aligned}$$

例 8.3.11 设  $f$  为可微函数,  $f(0) = 0$ ,  $F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$ , 求  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^5}$ .

解 当  $t$  ( $t > 0$ ) 任意给定时,  $F(t)$  是一个球体上的三重积分, 则  $\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2$  可以在球面坐标下表示为  $\Omega: 0 \leq r \leq t, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ . 所以

$$F(t) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^t f(r^2) r^2 dr = 4\pi \int_0^t f(r^2) r^2 dr,$$

从而  $F'(t) = 4\pi f(t^2) t^2$ , 由洛必达法则和导数定义,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^5} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi f(t^2)t^2}{5t^4} = \frac{4\pi}{5} f'(0).$$

## 二、三重积分的一般换元公式

与二重积分的情形一样, 设  $\Omega'(\subset \mathbf{R}_{uvw}^3), \Omega(\subset \mathbf{R}_{xyz}^3)$  都是空间有界闭区域, 所谓空间区域的正则变换

$$T: \begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases} \quad (u, v, w) \in \Omega'$$

指满足下列条件的映射  $T$ :

(1)  $x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)$  在  $\Omega'$  上连续且各个偏导数连续;

(2) 雅可比式  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0, \forall (u, v, w) \in \Omega';$

(3)  $T: \Omega' \rightarrow \Omega$  是一一对应.

这时,  $T$  必存在逆变换  $T^{-1}: \begin{cases} u = u(x, y, z), \\ v = v(x, y, z), \\ w = w(x, y, z), \end{cases} \quad (x, y, z) \in \Omega$  (参考阅读材料 7.3.2) 且

$u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续且具有连续且偏导数连续.

**定理 8.3.1** 设  $\Omega'(\subset \mathbf{R}_{uvw}^3), \Omega(\subset \mathbf{R}_{xyz}^3)$  都是有界闭区域,  $f(x, y, z)$  在  $\Omega$  上连续, 正则变换

$T: \Omega' \rightarrow \Omega$  为  $\begin{cases} x = x(u, v, w), \\ y = y(u, v, w), \\ z = z(u, v, w), \end{cases}$  则有微元变换式

$$dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \quad (8.3.21)$$

从而有换元公式

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw. \quad (8.3.22)$$

在这个公式下, 柱面坐标和球面坐标的表示看作坐标系的正则变换, 雅可比式分别为

$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \rho$  和  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = r^2 \sin \varphi$ , 从而得到柱面和球面坐标的换元公式 (8.3.7) 和 (8.3.20).

例 8.3.12 应用三重积分计算由如下曲面所围的立体  $\Omega$  的体积  $V$ :

$$z = x^2 + y^2, z = 2(x^2 + y^2), xy = a^2, xy = 2a^2, x = 2y, 2x = y (x > 0, y > 0).$$

解 因为  $\Omega: \begin{cases} 1 \leq \frac{z}{x^2 + y^2} \leq 2, \\ a^2 \leq xy \leq 2a^2, (x > 0, y > 0), \\ \frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 2 \end{cases}$  作变换  $S: \begin{cases} u = \frac{z}{x^2 + y^2}, \\ v = xy, \\ w = \frac{x}{y}, \end{cases}$  则对应  $\Omega': \begin{cases} 1 \leq u \leq 2, \\ a^2 \leq v \leq 2a^2, \\ \frac{1}{2} \leq w \leq 2. \end{cases}$

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} -\frac{2xz}{(x^2 + y^2)^2} & -\frac{2yz}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{1}{x^2 + y^2} \\ y & x & 0 \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{2x}{y(x^2 + y^2)} \neq 0, \text{ 所以存在 } S \text{ 的逆变换, 且}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}} = -\frac{y(x^2 + y^2)}{2x} = -\frac{v}{2}\left(1 + \frac{1}{w^2}\right) < 0,$$

于是

$$\begin{aligned} V(\Omega) &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega'} \frac{v}{2} \left(1 + \frac{1}{w^2}\right) du dv dw = \frac{1}{2} \int_1^2 du \int_{a^2}^{2a^2} v dv \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(1 + \frac{1}{w^2}\right) dw \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{3}{2} a^4 \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} a^4. \end{aligned}$$

思考题 8.3.4 如何利用  $\Omega$  :

例 8.3.13 求  $I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是椭球体

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \leq 1$   
的(球体)对称性计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} (x+2y+4z) dv ?$$

解 令  $\begin{cases} x = ar \sin \varphi \cos \theta, \\ y = br \sin \varphi \sin \theta, \\ z = cr \cos \varphi \end{cases}$  (称为广义球面坐标变换), 则椭球体对应的方程是  $r=1$ , 因为

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = abcr^2 \sin \varphi > 0, \text{ 故}$$

$$I = \iiint_{\Omega'} r^2 \cdot abcr^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta$$



$$= abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^1 r^4 dr = \frac{4}{5} \pi abc.$$

### 练习 8.3.3

1. 试验证在球面坐标变换  $\begin{cases} x = r \sin \varphi \cos \theta, \\ y = r \sin \varphi \sin \theta, \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$  下, 雅可比行列式  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = r^2 \sin \varphi$ .

2. 试用球面坐标推导球体体积公式  $V = \frac{4\pi}{3} R^3$ .

### 习题 8.3

1. 化三重积分  $I = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) dv$  为三次积分:

(1)  $\Omega$  是由  $z = x^2 + 2y^2$  与  $z = 3 - 2x^2 - y^2$  所围成的空间区域;

(2)  $\Omega$  是由  $z = xy$  与  $z = 0$  和  $x + y = 1$  所围成的空间区域.

2. 计算  $\iiint_{\Omega} x(y-z) dv$ , 其中  $\Omega$  由  $0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1, -2 \leq z \leq 2$  所确定 (长方体).

3. 计算  $\iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$ , 其中  $\Omega$  由  $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$  所围成 (四面体).

4. 设  $\Omega$  是平面  $z=0, z=y, y=1$  以及抛物柱面  $y=x^2$  所围成的几何体, 计算.

(1)  $\iiint_{\Omega} z dx dy dz$ ; (2)  $\iiint_{\Omega} xz dx dy dz$ .

5. 设  $f$  在  $[0, 1]$  上连续, 证明:  $\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} f(z) dx dy dz = \pi \int_{-1}^1 f(u)(1-u^2) du$ .

6. 设物体  $\Omega$  由曲面  $z = \sqrt{6-x^2-y^2}$  与  $z = \sqrt{2(x^2+y^2)}$  所围成, 将  $I = \iiint_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2) dv$  在柱面坐标系下化为三次积分.

7. 计算  $I = \iiint_{\Omega} z(x^2+y^2) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是圆锥体  $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 1$ .

8. 计算  $I = \iiint_{\Omega} z dx dy dz$ , 其中:

(1)  $\Omega$  是由曲面  $z = \sqrt{4-3(x^2+y^2)}$  与曲面  $z = x^2+y^2$  所围成的空间区域;

(2)  $\Omega$  是由曲面  $z = \sqrt{6-(x^2+y^2)}$  与平面  $z=0$  和  $z=1$  所围成的空间区域.

9. 求下列几何体  $\Omega$  的体积:

(1)  $\Omega$  由  $z = \sqrt{5-x^2-y^2}$  及  $x^2+y^2 = 4z$  所围成;

(2)  $\Omega$  由  $x^2+y^2+z^2 \leq 2z$  及  $z \geq x^2+y^2$  所确定;

(3)  $\Omega$  由曲面  $z = \ln \sqrt{x^2+y^2}$  与平面  $z=0, z=1$  所围成.

\*\*\*\*\*

10. 计算三重积分  $I = \iiint_{\Omega} (x+z) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由曲面  $z = \sqrt{x^2+y^2}$  与曲面  $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$  所围成的空间区域.

11. 计算三重积分  $I = \iiint_{\Omega} \frac{dx dy dz}{1+x^2+y^2}$ ,  $\Omega$ :  $x^2+y^2 = 4z$  与平面  $z=h (h>0)$  所围成.

12. 计算  $I = \iiint_{\Omega} e^{|x|} dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  由  $x^2+y^2+z^2 \leq 1$  确定.

13\*. 计算下列三重积分:

(1)  $I = \iiint_{\Omega} (x+2y+3z) dv$ , 其中  $\Omega$  是由平面  $x+y+z=1$  及三个坐标面围成的闭区域.

(2)  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + 5xy^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  是由  $x^2 + y^2 = 2z, z = 1$  及  $z = 2$  所围成的空间区域.

14\*. 设  $f(t)$  连续,  $F(t) = \iiint_{\Omega} [z^2 + f(x^2 + y^2)] dv$ , 其中  $\Omega$  由  $x^2 + y^2 \leq t^2, 0 \leq z \leq h$  所确定, 求  $\frac{dF}{dt}, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^2}$ .

15\*. 用球面坐标计算:

(1)  $I = \iiint_{\Omega} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dv$ , 其中  $\Omega: R_1^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq R_2^2$  ( $0 < R_1 < R_2$ );

(2)  $I = \iiint_D z \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$ , 其中  $\Omega$  由不等式  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}$  所确定;

(3)  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz$ . 其中  $\Omega$  是由锥面  $x^2 + y^2 = z^2$  与平面  $z = a (a > 0)$  围成的区域.



## 8.4 本章回顾

重积分的基本方法在于：(a) 画出积分区域的草图，(b) 确定正确的积分次序，(c) 选择合适的坐标系，(d) 恰当应用对称性. 重积分计算对综合能力要求较高，也是曲线积分和曲面积分的基础，应当熟练掌握.

**例 8.4.1** 改变下列二重积分次序：

$$(1) I = \int_{-1}^0 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{y+2} f(x, y) dx + \int_0^1 dy \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x, y) dx :$$

$$(2) I = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy .$$

**解：**(1) 如图 8.4.1， $D$  的 X 型区域表示为

$$D = \left\{ (x, y) \mid -\sqrt{2x-x^2} \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, 0 \leq x \leq 1 \right\} \cup \left\{ (x, y) \mid x-2 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}, 1 \leq x \leq 2 \right\}, \text{ 所以}$$

$$I = \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy + \int_1^2 dx \int_{x-2}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy .$$

(2) 如图 8.4.2， $D$  的 Y 型区域分为  $x$  轴上方和下方两部分.

$D$  在  $x$  轴上方部分  $D_+$  为

$$D_+ = \left\{ (x, y) \mid \arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y, 0 \leq y \leq 1 \right\},$$

$D$  在  $x$  轴下方部分  $D_-$  为

$$D_- = \left\{ (x, y) \mid \pi - \arcsin y \leq x \leq 2\pi + \arcsin y, -1 \leq y \leq 0 \right\},$$

注意在原题  $I = \int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy$  中，当  $\pi < x < 2\pi$  时， $\sin x < 0$ ,

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} f(x, y) dy - \int_\pi^{2\pi} dx \int_{\sin x}^0 f(x, y) dy \\ &= \iint_{D_+} f(x, y) d\sigma - \iint_{D_-} f(x, y) d\sigma \\ &= \int_0^1 dy \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) dx - \int_{-1}^0 dy \int_{\pi - \arcsin y}^{2\pi + \arcsin y} f(x, y) dx . \end{aligned}$$

**例 8.4.2** 计算下列二重积分

$$(1) I = \int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{x^2 - y^2} dx .$$

$$(2) I = \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma. \text{ 其中 } D \text{ 是}$$



阅读材料 8.4.1  
第八章知  
识要点

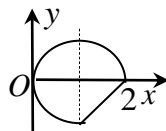


图 8.4.1

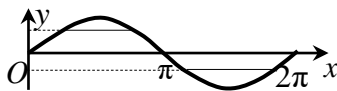


图 8.4.2

**注**  $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$  时  $-\frac{\pi}{2} < x - 2\pi < 0$ ,  
故由  $y = \sin x$  得  $y = \sin(x - 2\pi)$ ,  
 $x - 2\pi = \arcsin y$ , 即  
 $x = 2\pi + \arcsin y$ ; 同理当  
 $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$  时,  $\pi - x = \arcsin y$ .

**注** 要养成画区域草图的习惯, 并用反函数转换区域边界的函数表达式.

1) 心形线  $\rho=a(1+\cos\theta)$  内和圆  $\rho=a$  外的公共部分;

2) 心形线  $\rho=a(1+\cos\theta)$  内和圆  $\rho=a$  内的共同部分.

解: (1) 如图 8.4.3, 变换次序后用圆面积公式得

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{x^2 - y^2} dy = \int_0^1 \frac{1}{4} \pi x^2 dx = \frac{\pi}{12}.$$

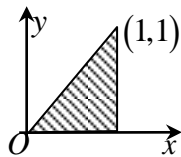


图 8.4.3

(2) 如图 8.4.4, 两种情形的区域  $D$  均关于  $y=0$  对称, 设  $D$  在  $x$  轴上方部分的区域为  $D_+$ , 因被积函数关于  $y$  为偶函数, 得  $I = 2 \iint_{D_+} \sqrt{x^2 + y^2} d\sigma$ . 从而

$$\begin{aligned} 1) \quad I &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^{a(1+\cos\theta)} \rho \cdot \rho d\rho = \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 [(1+\cos\theta)^3 - 1] d\theta \\ &= \frac{2}{3} a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta) d\theta = \frac{2}{3} a^3 \left( 3 + \frac{3\pi}{4} + \frac{2}{3} \right) = a^3 \left( \frac{22}{9} + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned}$$

$$2) \quad I = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \rho \cdot \rho d\rho + 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho \cdot \rho d\rho$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi a^3}{3} + \frac{2a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+\cos\theta)^3 d\theta \\ &= \frac{\pi a^3}{3} + \frac{2a^3}{3} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1+3\cos\theta+3\cos^2\theta+\cos^3\theta) d\theta \\ &= \frac{\pi a^3}{3} + \frac{2a^3}{3} \left( \frac{\pi}{2} - 3 + \frac{3\pi}{4} - \frac{2}{3} \right) = \left( \frac{7\pi}{6} - \frac{22}{9} \right) a^3. \end{aligned}$$

例 8.4.3 计算下列分段函数的二重积分:

$$(1) I = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} - 2xy + 2) dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为圆域 } x^2 + y^2 \leq 1 \text{ 在第一象限}$$

部分.

$$(2) I = \iint_D \sin x \cos y \min\{x, y\} dx dy, \text{ 其中 } D: 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi.$$

解 (1) 如图 8.4.5, 作辅助线  $y=x$  将  $D$  分成  $D_1, D_2$  两部分, 分别在直线  $y=x$  的上、下方, 所以,

$$I = \iint_D (|x-y|+2) dx dy = \iint_{D_1} |x-y| dx dy + \iint_{D_2} |x-y| dx dy + 2 \iint_D dx dy,$$

由于函数  $|x-y|$  关于变量  $x, y$  的轮换对称性, 并且  $D$  关于直线  $y=x$  对称, 有

$$\iint_{D_1} |x-y| dx dy = \iint_{D_2} |x-y| dx dy = \iint_{D_2} (x-y) dx dy,$$

所以,

$$I = 2 \iint_{D_2} (x-y) dx dy + \frac{\pi}{2} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^1 (\rho \cos\theta - \rho \sin\theta) \rho d\rho + \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} (\sqrt{2}-1) + \frac{\pi}{2}.$$

(2) 如图 8.4.6, 用直线  $y=x$  将  $D$  分成  $D_1, D_2$  两部分, 它们分别在直线  $y=x$  的下方和上方,

则在  $D_1$  上  $y < x$ ,  $\min\{x, y\} = y$ ; 在  $D_2$  上  $x < y$ ;  $\min\{x, y\} = x$ . 所以

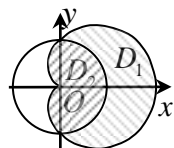


图 8.4.4

注 以下两个积分值图  
(1) 圆面积

$$\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{4} R^2;$$

$$(2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx =$$

$$\begin{cases} \frac{(n-1) \cdots 3 \cdot 1}{n \cdot (n-2) \cdots 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}, & n \text{ 偶} \\ \frac{(n-1) \cdots 4 \cdot 2}{n \cdot (n-2) \cdots 5 \cdot 3}, & n \text{ 奇} \end{cases}$$

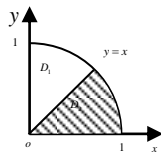


图 8.4.5

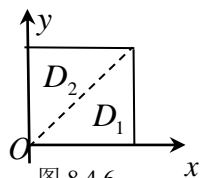


图 8.4.6

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\pi dx \int_x^\pi x \sin x \cos y dy + \int_0^\pi dy \int_y^\pi y \sin x \cos y dx \\
&= -\int_0^\pi x \sin^2 x dx + \int_0^\pi y \cos y (1 + \cos y) dy \quad (\text{前一个积分换字母}) \\
&= -\int_0^\pi y \sin^2 y dy + \int_0^\pi y \cos y (1 + \cos y) dy = \int_0^\pi y \cos 2y dy + \int_0^\pi y \cos y dy \\
&= [y \sin y + \cos y]_0^\pi + \left[ \frac{y}{2} \sin 2y + \frac{1}{4} \cos 2y \right]_0^\pi = -2.
\end{aligned}$$

注 除了会改换积分次序和变量代换, 还应灵活运用对称性, 减少计算量并使解法更优美. 建议读者尝试用轮换对称性解本题(2).

例 8.4.4 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 用重积分证明

$$\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 \leq (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.$$

证 设  $D: \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ a \leq y \leq b \end{cases}$  (正方形闭区域), 两个定积分的乘积可以视为一个正方形上的二重积分

的累次积分, 则

$$\begin{aligned}
\left( \int_a^b f(x) dx \right)^2 &= \int_a^b f(x) dx \int_a^b f(y) dy \\
&= \iint_D f(x) f(y) dx dy \leq \frac{1}{2} \iint_D [f^2(x) + f^2(y)] dx dy \\
&= \frac{1}{2} \left[ \int_a^b dy \int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b dx \int_a^b f^2(y) dy \right] \\
&= \frac{b-a}{2} \left[ \int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b f^2(y) dy \right] = (b-a) \int_a^b f^2(x) dx.
\end{aligned}$$

注: 同时还要学会交换变量  $x, y$  造出新的被积函数.

证毕.

例 8.4.5 计算  $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ , 其中  $\Omega$  为球体  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ .

解法一 (柱面坐标法)  $I = 8 \iiint_{\Omega_1} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \rho d\rho \int_0^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} (\rho^2 + z^2) dz$

$$= 8 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^R \left[ \rho^2 \sqrt{R^2 - \rho^2} + \frac{1}{3} (R^2 - \rho^2) \sqrt{R^2 - \rho^2} \right] \cdot \rho d\rho = \frac{8\pi}{3} \int_0^R \rho^3 \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho + \frac{4\pi R^2}{3} \int_0^R \rho \sqrt{R^2 - \rho^2} d\rho$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\text{令 } \rho = \sin t}} \quad & \frac{8}{3} \pi R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 t - \sin^5 t) dt + \frac{4}{3} \pi R^5 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t - \sin^3 t) dt \\
&= \frac{8}{3} \pi R^5 \cdot \frac{2}{15} + \frac{4}{3} \pi R^5 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{5} \pi R^5.
\end{aligned}$$

解法二 (用轮换对称性和截面法) 由轮换对称性,  $\iiint_{\Omega} x^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} y^2 dx dy dz = \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$ ,

故

$$I = \frac{3}{2} \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \frac{3}{2} \int_{-R}^R dz \iint_{D_z} \rho^2 \cdot \rho d\rho d\theta = \frac{3}{2} \int_{-R}^R dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{R^2 - z^2}} \rho^3 d\rho$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 2\pi \int_{-R}^R \frac{1}{4} (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

或者,

$$I = 3 \iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz = 3 \int_{-R}^R z^2 dz \iint_{D_z} dx dy = 3 \int_{-R}^R z^2 \cdot \pi(R^2 - z^2) dz = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

注 三重积分的主要方法是投影法、截面法, 利用对称性的方法, 柱面坐标法和球面坐标法, 读者思考的重点应是“更好的方法”.

解法三 (球面坐标法)

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^R r^2 \cdot r^2 \sin \varphi dr = 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^5}{5} = \frac{4\pi R^5}{5}.$$

## 第 8 章复习题

1. 改变累次积分  $I = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy$  ( $a > 0$ ) 的次序.

2. 求由平面  $z = x - y, z = 0$  与柱面  $x^2 + y^2 = a^2$  ( $a > 0$ ) 所围成的立体的体积.

3. 计算  $\iint_D (|x| + ye^{x^2}) d\sigma$ , 其中  $D$  由曲线  $|x| + |y| = 1$  所围成.

4. 设  $f(x, y) = \begin{cases} x^2 y, & 0 \leq y \leq x, 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ . 求  $\iint_D f(x, y) dx dy$ , 其中  $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \geq 2x\}$

5. 计算  $\iint_D \min\{x, y\} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$ , 其中  $D$  为全平面.

6. 计算  $\iiint_{\Omega} |z - x^2 - y^2| dv$ , 其中  $\Omega$  由  $x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1$  所围成.

7. 计算  $\iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dx dy dz$ ,  $\Omega = \{(x, y, z) | z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$ .

8. 设  $f(x, y)$  是平面区域  $D$  上的连续函数, 且在  $D$  的任何一个子域  $\sigma$  上, 恒有  $\iint_{\sigma} f(x, y) d\sigma = 0$ , 证明: 在  $D$  内  $f(x, y) \equiv 0$ .

9\*. 设  $f(x, y)$  在单位圆  $x^2 + y^2 \leq 1$  上有连续一阶偏导数, 且在边界上取值为零, 证明:

$$f(0, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2\pi} \iint_D \frac{x f'_x + y f'_y}{x^2 + y^2} dx dy, \text{ 其中 } D \text{ 为圆环域 } \varepsilon^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1.$$

10\*. 设为  $[0, 1]$  上的单调增加的连续函数, 证明:  $\frac{\int_0^1 x f^3(x) dx}{\int_0^1 x f^2(x) dx} \geq \frac{\int_0^1 f^3(x) dx}{\int_0^1 f^2(x) dx}.$