不定积分中的技巧与思想

The tide of indefinite integrals

作者：虚调子

时间：October 7, 2021

版本：0.0.4

无可奈何花落去，似曾相识燕归来。———晏殊

前言

19 年在知乎发表第一篇关于不定积分的文章时，参阅资料就发现大多数有关不定积分的文章都缺乏一定深度，或者有些过时。当然这与不定积分常常不被当成应试重点有关，以及解决相应问题的需求不高。唔还有就是，有些写的文章零散地放在知乎感觉有些别扭，以及热心的读者希望能得到更多详细的讲解，种种因素促使了这篇笔记的产生。

这是专门讲不定积分方法的笔记，可供感兴趣的学生、老师们阅读。与大学教材不同的是，笔记没有很多定理的严格证明，对于用到的定理，大部分情况只是引用，不做论证。**作者认为读者已经大致了解不定积分的概念，在“微积分”课程上已经有了一定基础。**

同时笔记将讲解一些平常很难遇到的不定积分，以及超越考研难度的不定积分应对策略。笔记中的例题选自较新的考试习题甚至是原创题，以讲究时效性。

仓促所作，有纰漏再所难免。如果有可以改进的地方，欢迎在知乎上私信，或者于 Q 群 1046154546 交流。

本文模板选自Elegant 系列, 感谢模板作者的分享！

同时感谢读者们的支持！(精神抖擞 ~

虚调子

2021 年 3 月 10 日

如有帮助，欢迎投喂！(左：微信/右：支付宝)

目录

第一章 不定积分初识

在微积分之中，求不定积分常常作为求微分/微商的反问题。但是这两者难度并不在同一量级，因为前者是封闭的，后者不封闭。形象地理解就是有些函数是积不出的。为了有效解决实际中的不定积分问题，人们总结了相当多的技巧，正文部分将一一讲解。

1.1 修正

我们将提到笔记的一大特色：**不定积分的修正**。修正的目的一部分在于简洁 (... 或者说懒)，一部分在于这部分与人们对不定积分的需求无关，是一个来自于定积分求解的要求。或者说对讨论不定积分本身来说意义不大。**对于一般考试而言，除了不能省略 C 外，也是可以默认进行其他修正的。**

定义 1.1. 常数与连续修正

由于达布定理等因素，不定积分的原函数将至多含有第一类间断点。于是总可以通过给某些区间分别增加常数来获得连续的原函数。为了方便交流：

- 将省略常数 C，以及在讨论不定积分时，等号的意义扩展为仅相差一个常数。例如：
$$\int (x-1)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x = \frac{(x-1)^2}{2}$$
- 将默认对存在第一类间断点的不定积分已进行修正化。例子可以见例 1.1。

♣

这其实解释了很多初学者的疑惑，比如下面这个“悖论”。
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = x\cdot\frac{1}{x} - \int x\cdot \mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$
$$\Rightarrow 0 = 1$$
当然这并不是悖论，而是因为默认采用了常数修正。在不定积分的等号里，是进行了意义的扩展了的 (相差一个常数依然“相等”)。比如更“离谱”的：
$$\int 0\cdot \mathrm{d}x = 1 = 2 = 3 = 4 = \ldots \tag{1.1}$$
为什么要进行这种扩展呢？不严谨地说，不定积分是一个自发地从低维到高维的过程，两者信息量量级不相当，所得到的高维结果是必有信息缺失的，而这种扩展起到了补充信息的作用，使得过程从左到右和从右到左都是恰当的。另外补充一点，只添加某一个常数 C 是不一定补充完整的，不能解决所有函数的连续修正，见下面的例子。

例 1.1 来尝试修正：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right).$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\tan x\right)+\frac{x}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\tan x}{1+\sqrt{2}\tan^2 x}+\frac{x}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)\sin x\cos x}{\cos^2 x+\sqrt{2}\sin^2 x}+\frac{x}{\sqrt{2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sin 2x}{3+2\sqrt{2}-\cos 2x}+\frac{x}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

如你所见，由之前的间断函数变成了连续函数，连续修正成功。

定义 1.2. sgn 修正

由于开根号、去绝对值等操作会带来一个符号的差别，即原函数与所求得的表达式在某些区间上相差一个符号，或者根据符号的需要缩小或扩大定义域，于是为了方便进行交流：

- 将默认进行了对结果的 sgn 修正，变换过程省略。例如：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln(x)(=\ln|x|)$$

♣

例 1.2 常用的 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\mathrm{arth}x$ 也可以认为默认进行了 sgn 修正。因为由 $\tanh(x)$ 的反函数来定义的定义域在 $|x|<1$. 而不定积分的定义域要更广一些：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\mathrm{arth}x\left(=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right) \tag{1.2}$$

取绝对值也是一种简单的 sgn 修正，对于复杂的函数将会有更复杂的修正结果。在追求结果的简洁和运算的简便方面，采用 sgn 修正是适合的。

1.2 不定积分的部分理解

不定积分的使命在于：**即对一部分函数（积的出）进行操作，算出有较大利用价值的函数（原函数）。**

不定积分有两个古老的方法，一是**凑微分法**，一是**换元法**。前者在于整理信息揭露结构，后者在于消除冗余方便计算。它们的有效性可以在处理简单的复杂病态函数上体现出来，这在微积分的计算训练里是主旋律。

1.2.1 指数函数的引入

积不出的函数数不胜数，积的出的函数却千篇一律。这些函数的灵魂体现在 e^x 与 x^n 上。

$$\int x^n\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{1.3}$$

这应该算是学生学过的第一个不定积分公式！如果利用不定积分的可加性，即可解

决所有多项式的积分。但是对于 $n=-1$ 时会有一些特别的事情发生：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| \tag{1.4}$$

这里引出了 $\ln x$ 函数，它被称之为对数函数，作为指数函数 e^x 的反函数。这是源自指数函数自带的性质 (自导性)：$(e^x)' = e^x$. 利用换元法：

$$\int e^x \mathrm{d}x = e^x \rightarrow \int x\mathrm{d}(\ln x) = x = \int \mathrm{d}x \rightarrow \mathrm{d}(\ln x) = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

可以来说明这一点。不可否认 e^x 在不定积分中的地位不一般，在微分方程领域有更明显的体现。这也是某种简洁优雅核心的存在。

如果我们头铁一点，利用1.3公式写下：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x \sim \frac{x^\varepsilon}{\varepsilon}$$

其中 ε 接近于 0. 于是想当然的，$e^x \sim x^{\frac{1}{\varepsilon}}$，看成了一个很高很高次的单项式。这将暗示：$e^x = x^\varepsilon = 1$ 这个方程应该会有无穷多组解！如果知晓一些关于复数的知识, 可能会灵机一动！

1.2.2 三角函数的引入

我们稍微升级一下，考虑不定积分：$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$。这与不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}$ 相似。对于后者，我们可以利用换元法解决:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x} + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}
\end{aligned}$$

参考过程，可以形式地将前者用 $\frac{1}{2i}\ln\frac{1+ix}{1-ix}$ 表达。

为了方便与流行的符号契合, 我们定义这两个结果分别是反正切函数、反双曲正切函数。记为：

$$\begin{cases}
\operatorname{ar}\tanh\, x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} \\
\operatorname{arc}\tan x = \frac{1}{2i}\mathrm{Ln}\frac{1+ix}{1-ix} \sim \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}
\end{cases} \tag{1.5}$$

当然，从定义的名字上来看，它们的反函数是更“正规”的函数。(注：这种以不定积分的反函数来定义新函数的思想也用来定义了椭圆函数、双纽线 $sn(x)$ 等。)

再来看这个“正规”函数：

$$x = \int_0^{f(x)} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \tag{1.6}$$

这样我们可以两边求导，得到一个微分式：

$$1 + f^2(x) = f'(x) \tag{1.7}$$

若设 $f(x)=\frac{p}{q}$，则上式等价于：

$$\left(p^2+q^2\right)\mathrm{d}x=q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q \tag{1.8}$$

如果再整理一下：

$$p\left(p\mathrm{d}x+\mathrm{d}q\right)+q\left(q\mathrm{d}x-\mathrm{d}p\right)=0 \tag{1.9}$$

那么有趣地，

$$p\mathrm{d}x=-\mathrm{d}q\Longleftrightarrow q\mathrm{d}x=\mathrm{d}p \tag{1.10}$$

而且这样会有一个更有趣的推论, 若上式两边都成立，就有:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\left(p^2+q^2\right)&=2\left(p\mathrm{d}p+q\mathrm{d}q\right)\\&=2\left(pq-pq\right)\mathrm{d}x\\&=0\end{aligned}$$

哈！p^2+q^2 是常数。

出于扩充符号的目的，我们称这组特别函数组为 $\{\sin x,\cos x\}$(三角函数)，这里人为赋予常数的大小为 1，挺自然的想法。如果再利用勾股定理，则可以赋予一定的几何意义。

至于 p,q 在不定积分中的作用，就不得不提到双元法了，请看下章。

1.2.3 初等函数

刘维尔 (**Joseph Liouville**) 划分了六大基本函数：反对幂三指常以及它们的复合。其他的统称非初等函数，也就是俗称“积不出”。在考试范围内都是对初等函数的不定积分。

刘维尔发展了微分域理论，描摹了初等函数不定积分的模样。用大白话来说，也就是非初等函数就是非初等，不能用初等函数表达。

定理 1.1. 刘维尔定理

若 $f(x)$ 是有理函数，$g(x)$ 是多项式函数，那么 $\int f(x)\,e^{g(x)}\mathrm{d}x$ 初等的充要条件就是存在互质的多项式 P,Q 使得下式成立：

$$Q(x)\left[Q(x)f(x)-P'(x)-P(x)g'(x)\right]=-P(x)Q'(x) \tag{1.11}$$

♡

对于不定积分的海洋来说，这甚至连冰山一角也算不上。越来越多的积分凸显了不定积分的局限，如果需要解析表达就要定义新的符号。比如:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi} \tag{1.12}$$

那么它的不定积分是？当然不是初等函数了 ∼ 而是定义为**误差函数**：

$$\operatorname{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x \tag{1.13}$$

然后还有一些无奈的符号：

$$\operatorname{Ei}(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\mathrm{d}t,\operatorname{Si}(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\operatorname{Ci}(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{t}\mathrm{d}t \tag{1.14}$$

分别称为指数积分函数、正弦积分函数等等。在一定程度上拓宽了不定积分的范围，但

还远远不够。

现代大概有了一百多种特殊函数，大致分为 Gamma 函数家族，误差函数与指数积分家族，多对数与 Zeta 函数家族，正交多项式家族，贝塞尔家族，勒让德家族，椭圆函数家族，球谐函数家族，模数形式家族，数论函数家族...

这些函数之间的转换关系也很复杂，有人就希望有一种大一统函数来冲破符号的禁锢：从 Appell 函数到合流超几何函数，再到广义超几何函数，然后是梅耶尔 G 函数... 最后变成了统一函数家族. 按酱紫君的话来说，就是更多的悲剧。

比如 $\int \sin(\sin x)\,\mathrm{d}x$，这太超越了！最后又是一个悲剧的消息：由哥德尔不完备定理的推论，你不可能找到能涵盖所有不定积分的符号表达。

随着新的工具的兴起，人们对不定积分的兴趣逐渐消失。

但古老的技巧仍在传承。

1.3 参考资料

1.3.1 网页

常用的有下面这些。如果电脑上没有安装 MMA，matlab 等数学软件，可以利用下面的网站凑合。作用在于鉴别野题，以及启发思考 (?) 吧。

- https://www.wolframalpha.com/，功能足够强大，除了满足求不定积分外还可以求定积分等。
- https://www.integral-calculator.com/，专门求不定积分的网站，并且支持可读步骤输出，以及相应的图像。
- https://zhuanlan.zhihu.com/p/326288584，知乎大佬零蛋大最近写的不定积分解题技巧。

1.3.2 书籍

下面这些是一些比较流行的书籍，一部分是知道一些名词的来源，一部分是用作查阅。

- 《高等数学》同济大学第 7 版高等教育出版社，主要是后面总结的 137 个不定积分公式。
- 《吉米多维奇数学分析习题集》第三册 (1628 题之后的与不定积分有关的部分)。真 • 习题集。
- 《积分的方法与技巧》金玉明等著，中国科学技术大学出版社，是 17 年的书，基础总结得不错。
- 《Table of Integrals,Series,and Products》, 俗称积分大典，里面有相当详细的公式表和其他扩展内容。英文。

- 《组合积分法》朱永银、郭文秀著，华中科技大学出版社。在零几年的那时候算是很新的方法。
- 《微积分学教程》(不定积分部分). 菲赫金哥尔茨. 俗称菲砖，讲解详细，由浅入深。
- 《Polylogarithms and Associated Functions》.Leonard Lewin. 一部总结性的对数函数相关专著。英文。

第二章 三角、双曲双元积分法

在常见的不定积分题中，常常会发现有一些对称的元素。这诱发了我们是否可以考虑一些更为对称的积分方法。说到对称，我们首先想到的应该是：

定理 2.1. 分部积分

对于关于同一变量的函数 u, v，有：

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u \tag{2.1}$$

♡

定理告诉我们这样一个信息：$u\mathrm{d}v + v\mathrm{d}u$ 的不定积分是 uv。的确是相当对称的结论了。

然后一个自然的问题是 $u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u$ 的不定积分有什么好的表达呢？

2.1 二次元

对于上面的问题，我的一种解决方案是，考虑 $u^2 + v^2 = 1$，这样就会有：

$$\begin{aligned}\int u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u &= \int \frac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2+v^2} \\ &= \int \frac{u^2}{u^2+v^2}\mathrm{d}\left(\frac{v}{u}\right) \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\,(v/u)}{1+(v/u)^2} \\ &= \arctan\frac{v}{u}\end{aligned}$$

当然这样格局就小了。经计算，我们可以适当推广至 3 种情形：

$$(1)\ u^2+v^2=a^2\ \ (2)\ u^2+a^2=v^2\ \ (3)\ u^2-a^2=v^2$$

考虑几何意义的话，可以将第一种称为 (两个二次元的) **实圆 (关系)**，第二、三种称为**虚圆 (关系)**。或者可以写成下面的微分式：

$$(\mathrm{Im})\ u\mathrm{d}u = v\mathrm{d}v\ \ (\mathrm{Re})\ u\mathrm{d}u + v\mathrm{d}v = 0$$

但这一切只是一个称呼，本质上可以进行**虚/实化**进行统一。比如对实圆进行虚化：令 $u \to iu$，则 $u^2+v^2 \to v^2-u^2$，形式上变成了虚圆。这也强烈暗示了相似性与对称性。复数无处不在！

(注: 下面出现的双元将默认为二次元，或者叫三角双元/双曲双元 blabla... 总之就是这个意思)

定理 2.2. 双元第一积分公式

对于双元 x,y，我们有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y}=\begin{cases}\ln{(x+y)} & (\mathrm{Im})\\ \arctan\dfrac{x}{y} & (\mathrm{Re})\end{cases}\tag{2.2}$$

Re 表示实圆，Im 表示虚圆。♡

证明 对于虚圆，我们有 $x\mathrm{d}x=y\mathrm{d}y$，于是有

$$\frac{\mathrm{d}x}{y}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{y+x}\tag{2.3}$$

其中利用了等分性。于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y}=\int\frac{\mathrm{d}\,(x+y)}{x+y}=\ln{(x+y)}\tag{2.4}$$

由于是不定积分，也可以有其他形式。其他比较常见的形式是 $\mathrm{arth}\frac{x}{y}$，以及带常数的 arsh 等，不过推荐用定理中的形式，因为又提示了对称性，又足够简洁。

对于实圆，我们同样有：

$$\frac{\mathrm{d}x}{iy}=\frac{i\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}x+i\mathrm{d}y}{iy+x}\tag{2.5}$$

但这里就不写成 $i\ln{(x+iy)}$ 的形式了，因为不是完全对称的，而且带虚数。推荐写成：

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{y}=\arctan\frac{x}{y}\tag{2.6}$$

另外别的形式有 arcsin 函数等。

敏感的读者可能注意到了，出现了 arctan 函数，和开头的问题可能有点联系！稍加思索可以发现：

定理 2.3. 双元第二积分公式

对于双元 x,y, 我们有：

$$\int f(x,y)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{y}=\int f(x,y)\cdot\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2\pm x^2}\tag{2.7}$$

对于实圆取加号，对于虚圆取减号. 可以注意到这里的分母在两种情况下均为常数。♡

证明 证明是容易的，这里只讨论虚圆，

$$\frac{y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y}{y^2-x^2}=\frac{y\frac{y\mathrm{d}y}{x}-x\mathrm{d}y}{y^2-x^2}=\frac{y^2-x^2}{y^2-x^2}\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{x}=\frac{\mathrm{d}x}{y}\tag{2.8}$$

当然，这与 f 本身没有什么关系。方便记忆可以这么看：

$$\frac{y\mathrm{d}x-\ldots}{y^2\pm\ldots}\sim\frac{y\mathrm{d}x}{y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{y}$$

由此，我们可以用这两个公式推导几乎所有的双元积分。

例题 2.1 求 $\int\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解: 设 $y=\sqrt{1+x^2}$，

$$\begin{aligned}\int y\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\left[\int y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \int \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2-x^2}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\int \mathrm{d}\left(xy\right) + \int \frac{\mathrm{d}x}{y}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[xy + \ln\left(x+y\right)\right]\end{aligned}$$

这里建议读者停下阅读，尝试算算 $\int \sqrt{x^2-4}\mathrm{d}x$ 之类的。这种比较基础的积分需要熟练掌握。

定理 2.4. 双元第三积分公式

对于双元 x,y，我们有：

$$\int f(x,y)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{y^3} = \frac{1}{y^2\pm x^2}\int f(x,y)\cdot\mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right) \tag{2.9}$$

这里是由于 $y^2\pm x^2$ 为常数，可以提到积分号外。另外同前，对于实圆取加号，对于虚圆取减号。是第二积分公式的推论。

♡

证明 利用第二积分公式：

$$\frac{\mathrm{d}x}{y^3} = \frac{1}{y^2}\frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{y^2\pm x^2} = \frac{\mathrm{d}\left(x/y\right)}{y^2\pm x^2} \tag{2.10}$$

同样地，这与 f 本身没什么关系。

下面来看一些简单的例题。

例题 2.2 求 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

解: 设 $y=\sqrt{1-x^2}$, 则有：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{y} &= -\int x\mathrm{d}y\\ &= -\frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}\left(xy\right) + \int \frac{\mathrm{d}y}{x}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\end{aligned}$$

例题 2.3 求 $\int \sqrt{x^2+\sqrt{x^2+\sqrt{x^2+...}}}\mathrm{d}x$

解： 若设被积函数为 $f(x)$，那么有极限等式：

$$\sqrt{x^2+f\left(x\right)} = f\left(x\right) \tag{2.11}$$

解得：$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4x^2}\right)$, 再设 $p=\sqrt{1+4x^2}, q=2x$，(并且利用前面的例题) 就

有：

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{2}(1+p)\,\mathrm{d}x &= \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\int p\mathrm{d}q \\ &= \frac{x}{2}+\frac{1}{8}\left(pq+\ln\left(p+q\right)\right) \\ &= \frac{x}{4}\left(2+\sqrt{1+4x^2}\right)+\frac{1}{8}\ln\left(\sqrt{1+4x^2}+2x\right)\end{aligned}$$

可以看到还是轻松加愉快的。如果熟练了，我们可以同时考虑更多的二次元，它们互相有实圆/虚圆关系。

例题 2.4 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}$.

解：(By 水中星) 若设 $p=\sin x, q=\cos x, r=\sqrt{1+\sin^2 x}$，则有：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\sin^4 x}} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{rq} = \int \frac{\mathrm{d}p}{rq^2} \\ &= \int \frac{r^2}{r^2-2p^2}\frac{\mathrm{d}p}{r^3} = \int \frac{1}{1-2\left(p/r\right)^2}\frac{1}{2}\mathrm{d}\left(\frac{p}{r}\right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{2}p}{r} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{2\sin^2 x}{1+\sin^2 x}}\end{aligned}$$

例题 2.5 求 $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{2+x^3}}\mathrm{d}x$.

解: 若设 $p=x^{\frac{3}{2}}, q=\sqrt{2+x^3}$,

$$\int \sqrt{\frac{x}{2+x^3}}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}p}{q} = \frac{2}{3}\ln\left|p+q\right| \tag{2.12}$$

例题 2.6 [2020 广东省数竞 (民办高职)] 求 $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解:(By 白酱) 令 $y=\sqrt{1+x^2}$，则：

$$\begin{aligned}\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x &= \int \ln\left(x+y\right)\mathrm{d}x \\ &= x\ln\left(x+y\right) - \int \frac{x\left(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\right)}{x+y} \\ &= x\ln\left(x+y\right) - \int x\left(y-x\right)\left(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\right) \\ &= x\ln\left(x+y\right) - \int xy\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y-x^2\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y \\ &= x\ln\left(x+y\right) - \int \left(y^2-x^2\right)\mathrm{d}y \\ &= x\ln\left(x+y\right) - y\end{aligned}$$

下面是三角常用的积分表. 若设 $p=\sin x, q=\cos x$:

- $\int \sin x\mathrm{d}x=\int p\mathrm{d}x=\int -\mathrm{d}q=-\cos x$
- $\int \cos x\mathrm{d}x=\int q\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}p=\sin x$
- $\int \tan x\mathrm{d}x=\int \frac{p}{q}\mathrm{d}x=\int -\frac{\mathrm{d}q}{q}=-\ln(\cos x)$
- $\int \cot x\mathrm{d}x=\int \frac{q}{p}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}p}{p}=\ln(\sin x)$
- $\int \csc x\mathrm{d}x=\int \frac{-\mathrm{d}q}{p^2}=-\int \frac{\mathrm{d}q}{1-q^2}=-\operatorname{arth}(\cos x)$
- $\int \sec x\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}p}{q^2}=\int \frac{\mathrm{d}p}{1-p^2}=\operatorname{arth}(\sin x)$

2.2 双元的降次与递推

在一般的课本上，常常采用三角换元法。而这算是双元换元的一种特殊情形，两者的主要区别在于三角有倍角半角表示，而双元需要变换成倍角形式。后者见以后的内容，这里讲解不用倍角表示来求解高次不定积分。

在这个部分中只有三种富有技巧性的操作，分别是**常数代换、分部积分和混合**。

例题 2.7 求 $\int \sin^3 x\mathrm{d}x$.

解 先进行双元换元 $p=\sin x, q=\cos x$,

$$
\begin{aligned}
\int \sin^3 x\mathrm{d}x &= \int p^3\frac{\mathrm{d}p}{q}=-\int p^2\mathrm{d}q \\
&= -\int (1-q^2)\mathrm{d}q \\
&= \frac{1}{3}q^3-q
\end{aligned}
$$

这里是单纯的常数代换，用来联系 n 次与 $n+2$ 次。

例题 2.8 求 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

解：同前，令 $p=\sin x, q=\cos x$,

$$
\begin{aligned}
\int \sin^4 x\mathrm{d}x &= -\int p^3\mathrm{d}q \\
&= -\int (1-q^2)p\mathrm{d}q=\int q^2p\mathrm{d}q-\int p\mathrm{d}q \\
&= -\int p^2q\mathrm{d}p-\int p\mathrm{d}q \\
&= -\frac{1}{3}p^3q-\int p\mathrm{d}q+\frac{1}{3}\int p^3\mathrm{d}q \\
&= -\frac{1}{4}p^3q-\frac{1}{4}\int p\mathrm{d}q
\end{aligned}
$$

这里我们会发现最开始的 $\int p^3\mathrm{d}q\to\int p\mathrm{d}q$，这个过程就是混合降次。(注：上面最后

一个等号是消去红色部分 1:3 混合得到。)

更高次也可以利用这个方法来降次求得。然后利用

$$\begin{aligned}\int p\mathrm{d}q &= \frac{1}{2}\left[\int p\mathrm{d}q + q\mathrm{d}p + \int \frac{p\mathrm{d}q - q\mathrm{d}p}{q^2+p^2}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}\left(pq\right) + \int \frac{\mathrm{d}q}{p}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(pq + \arctan\frac{q}{p}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\sin x\cos x - x\right)\end{aligned}$$

即可完成积分。

当然不止限于三角函数积分，类似 $\int (1+x^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$ 也可以解决。这里我们可以总结一个常用公式，对于考试来说是绰绰有余的：

结论 对于双元 p, q，有

$$\int p\mathrm{d}q = \frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}(p^2 \pm q^2)\int \frac{\mathrm{d}q}{p} \tag{2.13}$$

其中虚圆取减号，实圆取加号。总之 $p^2 \pm q^2$ 是常数。

下面讨论更高次的情况。不难发现求解更高次的关键在于讨论 $\int y^n\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{d}x}{y^n}$ 的求解。另外两个是 $\int x^n\mathrm{d}x, \int \frac{\mathrm{d}x}{x^n}$，这是显然的，不做讨论。

其中当 n 为偶数时，利用常数代换可以解决 $\int y^n\mathrm{d}x$，而 $\int \frac{\mathrm{d}x}{y^n}$ 可以同时利用常数代换和分部积分化简到 $\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2}$。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^{2n}} = \frac{a_n x}{y^{2n}} + \ldots + \frac{a_2 x}{y^4} + a_1\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2} \tag{2.14}$$

这个我们可以用反正切函数等表达。

其中当 n 为奇数时。$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^n}$ 可以与之前类似，化简到 $\int \frac{\mathrm{d}x}{y^3}$。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{y^{2n+1}} = \frac{a_n x}{y^{2n+1}} + \ldots + a_1\int \frac{\mathrm{d}x}{y^3} \tag{2.15}$$

这个在双元第三积分公式里已经解决。而对于 $\int y^n\mathrm{d}x$，我们则需要还加上混合操作，来得到：

$$\int y^{2n+1}\mathrm{d}x = a_n y^{2n+1}x + \ldots + a_1 yx + a_0\int \frac{\mathrm{d}x}{y} \tag{2.16}$$

然后利用双元第一积分公式得到解决。

至此，我们可以认为如果一个积分能被转化为 $\int x^m y^n\mathrm{d}x$ 这样的双元形式，则必有初等表达。值得一提的是，这与后文将提到的 Ostrogradsky 方法很相似。

2.3 双元的配凑与诱导

在常见的不定积分中，总会有些非齐次的项，读者可能会有一些非常自然的疑问！比如如果不是简单的 $\sqrt{x^2+1}$ 这种应该怎么做呢？

2.3.1 非齐次的配凑

例题 2.9 求解 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+\lambda}$.

解: 若设 $y=\sqrt{1-x^2}$，则分母是一个双元和常数的和。我们可以把双元均看成一次，常数看成二次/零次。因为有 $x^2+y^2=1$。通用方法是有理化：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}+\lambda}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\lambda+y}=\int \frac{\lambda-y}{\lambda^2-y^2}\mathrm{d}x$$

这样可以分成两块来求解。

$$\begin{aligned}I&=\int \frac{\mathrm{d}x}{\lambda^2-y^2}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\lambda^2-1+x^2}\\&=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{\lambda^2-1}}\arctan\dfrac{x}{\sqrt{\lambda^2-1}},|\lambda|>1\\-\frac{1}{x},\lambda=1\\-\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\mathrm{arth}\frac{x}{\sqrt{1-\lambda^2}},|\lambda|<1\end{cases}\end{aligned}$$

与另一部分，需要用到第三公式，并且将次数凑齐。

$$\begin{aligned}J=\int \frac{y\mathrm{d}x}{\lambda^2-y^2}&=\int \frac{y^4}{\left[\lambda^2x^2+\left(\lambda^2-1\right)y^2\right]\left(x^2+y^2\right)}\frac{\mathrm{d}x}{y^3}\\&=\int \frac{\mathrm{d}b}{\left(\lambda^2b^2+\lambda^2-1\right)\left(1+b^2\right)}=\int \frac{\lambda^2\mathrm{d}b}{\lambda^2b^2+\lambda^2-1}-\int \frac{\mathrm{d}b}{1+b^2}\\&=-\arctan\frac{x}{y}+\begin{cases}\dfrac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2-1}}\arctan\dfrac{|\lambda|}{\sqrt{\lambda^2-1}}\dfrac{x}{y},|\lambda|>1\\-\frac{y}{x},\lambda=1\\-\frac{|\lambda|}{\sqrt{1-\lambda^2}}\mathrm{arth}\frac{|\lambda|}{\sqrt{1-\lambda^2}}\frac{x}{y},|\lambda|<1\end{cases}\end{aligned}$$

其中 b 代表两个双元的比。到此本题已经结束了。可以看到计算量略大，这是因为它其实对应着三角换元法中的万能代换，是一种理论上完美的解法。如果不是万不得已，可以不用这么配凑。

另外需要注意，求解这种结构的定积分时要进行连续修正。下面是一个进行过修正的例子：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\lambda+\cos x}=\begin{cases}\frac{2\mathrm{sgn}(\lambda)}{\sqrt{\lambda^2-1}}\left(\frac{x}{2}+\arctan\frac{\left(1-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\sin x}{\left(1+\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)-\left(1-\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda+1}}\right)\cos x}\right),|\lambda|>1\\\cot\frac{x}{2},\lambda=-1;\tan\frac{x}{2},\lambda=1\\\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}\ln\left|\frac{\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}-\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}+\tan\frac{x}{2}}\right|,|\lambda|<1\end{cases}$$

2.3.2 恒等式的诱导

下面用例题来讲解一些常用思路。

例题 2.10 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

解：(By 水中星) 我们首先需要注意到：$2\left(x^2+1\right)=(x+1)^2+(x-1)^2$。当然本质上和待定系数一样，我们是为了把分母的根式以及非齐次项 $x+1$ 化为齐次。什么意思呢？

若令

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x+1}=p, \frac{x-1}{x+1}=q$$

我们有 $p^2=1+q^2$。作用体现在下面：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} &= \int \frac{\frac{1+x}{2}\mathrm{d}q}{p\frac{x+1}{\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}q}{p} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\ln(p+q)\end{aligned}$$

当然，如果我们令

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x-1}=p, \frac{x+1}{x-1}=q$$

也是可以算的，留作读者习题。

例题 2.11 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{t^2-1}}{2-t^2}\mathrm{d}t$.

解:(By 风中鱼) 置 $s=\sqrt{t^2-1}, b=\dfrac{t}{s}$，有：

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{t^2-1}}{2-t^2}\mathrm{d}t &= \int \frac{s\mathrm{d}t}{t^2-2s^2} \\ &= \int \frac{-s^4}{(t^2-2s^2)(t^2-s^2)}\mathrm{d}\left(\frac{t}{s}\right) \\ &= \int \frac{-\mathrm{d}b}{(b^2-2)(b^2-1)} = \int \frac{\mathrm{d}b}{b^2-1}+\int \frac{\mathrm{d}b}{2-b^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{t}{\sqrt{2}\sqrt{t^2-1}}-\operatorname{arth}\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\end{aligned}$$

例题 2.12 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2(1+x^2)}$

解:(By 风中鱼) 置

$$p=\frac{x-1}{x+1}, q=\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x+1}$$

, 则

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2\left(1+x^2\right)}&=\int\frac{2}{q^2}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^4}\\&=\int\frac{1}{q^2}\frac{(1-p)^2}{4}\mathrm{d}p\\&=\frac{1}{4}\int\frac{q^2-2p}{q^2}\mathrm{d}p\\&=\frac{1}{4}p-\frac{1}{2}\ln q\\&=\frac{1}{4}\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}\sqrt{x^2+1}}{x+1}\end{aligned}$$

例题 2.13 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{2x^2-1}}$.

解：(By 风中鱼) 注意到：$x^2-\left(1-x^2\right)=2x^2-1$，于是我们令

$$p=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},q=\frac{\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{1-x^2}},p^2-1=q^2 \tag{2.17}$$

则由前面的第三公式 $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y}\right)=\left(y^2+x^2\right)\dfrac{\mathrm{d}x}{y^3}$ 不难得到：$\mathrm{d}p=\dfrac{\mathrm{d}x}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}$，于是：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\sqrt{2x^2-1}}&=\int\frac{\mathrm{d}p}{q}\\&=\ln(p+q)\\&=\ln\frac{x+\sqrt{2x^2-1}}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

例题 2.14 求 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 不妨设：

$$p=\sqrt{x}+\sqrt{\frac{2}{x}},q=\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2}{x}},r=\sqrt{x+\frac{2}{x}+2}$$

则积分可以转化为双元：

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x}\mathrm{d}x&=\int\frac{r}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\int r\mathrm{d}\left(p+q\right)\\&=\frac{1}{2}\left(p+q\right)r+\left(1-\sqrt{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}p}{r}+\left(1+\sqrt{2}\right)\int\frac{\mathrm{d}q}{r}\\&=\sqrt{x^2+2x+2}+\left(1-\sqrt{2}\right)\ln\left(\sqrt{x+\frac{2}{x}+2}+\sqrt{x}+\sqrt{\frac{2}{x}}\right)\\&+\left(1+\sqrt{2}\right)\ln\left(\sqrt{x+\frac{2}{x}+2}+\sqrt{x}-\sqrt{\frac{2}{x}}\right)\\&=\sqrt{x^2+2x+2}+\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right)\\&+\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+2x+2}+x-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+2x+2}+x+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

例题 2.15 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2+3x^4}}$.

解:(By 风中鱼) 注意到恒等式：

$$1+x^2+3x^4=\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^2+\frac{11}{4}x^4$$

我们置 $p=\dfrac{2\sqrt{1+x^2+3x^4}}{\sqrt{11}x^2},q=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{11}x^2},\mathrm{d}q=\dfrac{-4\mathrm{d}x}{\sqrt{11}x^3}$，于是

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2+3x^4}}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{p\frac{\sqrt{11}}{2}x^3}\\&=\int\frac{-\frac{\sqrt{11}}{4}x^3\mathrm{d}q}{p\frac{\sqrt{11}}{2}x^3}\\&=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}q}{p}=-\frac{1}{2}\ln\left(p+q\right)\end{aligned}$$

例题 2.16 求 $\displaystyle\int\frac{R\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}{\left(R^2+r^2-2Rr\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta$.

解:(By 风中鱼) 注意到：

$$\left(R\cos\theta-r\right)^2+\left(R\sin\theta\right)^2=R^2+r^2-2Rr\cos\theta=\left(R-r\cos\theta\right)^2+\left(r\sin\theta\right)^2\tag{2.18}$$

则有：

$$R^2\left(R-r\cos\theta\right)^2-r^2\left(R\cos\theta-r\right)^2=\left(R^2-r^2\right)\left(R^2+r^2-2Rr\cos\theta\right)\tag{2.19}$$

若设

$$m=\frac{r}{R}\frac{R\cos\theta-r}{R-r\cos\theta},n=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}\frac{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}{R-r\cos\theta}\tag{2.20}$$

则构成了双元 $m^2+n^2=1$。同时：$\mathrm{d}m=\dfrac{r}{R}\dfrac{\left(r^2-R^2\right)\sin\theta}{(R-r\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta$，于是：

$$\begin{aligned}\int\frac{R\sin\theta\cos\theta-r\sin\theta}{\left(R^2+r^2-2Rr\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\theta&=-\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r^2R}\int\frac{m\mathrm{d}m}{n^3}\\&=\frac{\sqrt{R^2-r^2}}{r^2R}\int\frac{\mathrm{d}n}{n^2}\\&=-\frac{R-r\cos\theta}{r^2\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}\end{aligned}$$

例题 2.17 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+4\right)\left(x^2-x\right)}$.

解:(By 水中星) 由于有恒等式：

$$5\left(x^2+4\right)=4(x-1)^2+(x+4)^2$$

故不妨设

$$p=\sqrt{5}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4},q=2\frac{x-1}{x+4},p^2=q^2+1\tag{2.21}$$

同时有 $\mathrm{d}q=\dfrac{10}{(x+4)^2}\mathrm{d}x$，故：

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+4\right)\left(x^2-x\right)}&=\int\frac{\mathrm{d}x}{\left(x^2+4\right)(x-1)}-\int\frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^2+4\right)}\\&=\int\frac{\mathrm{d}q}{p^2q(x+4)}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}\left(x^2\right)}{x^2\left(x^2+4\right)}\\&=\int\frac{1-q/2}{5p^2q}\mathrm{d}q-\frac{1}{4}\ln\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\\&=\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}\left(q^2\right)}{\left(q^2+1\right)q^2}-\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}q}{p^2}-\frac{1}{4}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\\&=\frac{1}{10}\ln\frac{q^2}{q^2+1}-\frac{1}{10}\arctan q-\frac{1}{4}\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}\end{aligned}$$

例题 2.18 求 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{(x-1)^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x$.

解:(By 虚调子) 注意到恒等式：

$$4\left(1+x^3\right)=3(x-1)^2(x+1)+(x+1)^3\tag{2.22}$$

若设双元：

$$p=\frac{2}{x-1}\sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}},q=\frac{x+1}{x-1},p^2=3+q^2\tag{2.23}$$

则：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+1}{(x-1)^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+x^3}}\mathrm{d}x &= \int \frac{2\frac{x^2+1}{(x-1)^2}}{p\sqrt{q}}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2} \\ &= -\int \frac{q^2+1}{p\sqrt{q}}\frac{\mathrm{d}q}{2} = -\frac{1}{6}\int \frac{2q^2+p^2}{p\sqrt{q}}\mathrm{d}q \\ &= -\frac{1}{3}\int \frac{2q\mathrm{d}p+p\mathrm{d}q}{2\sqrt{q}} = -\frac{1}{3}\int \mathrm{d}\left(p\sqrt{q}\right) \\ &= -\frac{1}{3}p\sqrt{q} = -\frac{2}{3}\frac{\sqrt{1+x^3}}{(x-1)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

我们可以总结出一类双元思路：

$$\boxed{p,q,r \longmapsto \frac{2}{x-1}\sqrt{\frac{x^3+1}{x+1}},\frac{x+1}{x-1},\sqrt{2}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-1}}$$

这对解具备相似结构的不定积分提供了便利。在这里面令 $x=\frac{t}{a}$ 可以进行一点小的推广。

2.4 双元的旋转变换

定理 2.5. 辅助角公式

对于常数 a,b，有：

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\phi\right) \tag{2.24}$$

其中 $\tan\phi=\frac{b}{a}$。

同样地利用辅助角公式可以得到：

$$b\sin x-a\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cos\left(x+\phi\right) \tag{2.25}$$

这里我们可以发现双元

$$\left\{\frac{a\sin x+b\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b\sin x-a\cos x}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\}$$

它对应着初始双元 $\{\sin x,\cos x\}$ 逆时针旋转了 ϕ: $\{\sin\left(x+\phi\right),\cos\left(x+\phi\right)\}$.

类似地我们可以对其他双元旋转来产生新的双元。而且在实际中旋转后的双元很有效果。

下面是一些常见双元的例子：

2.4.1 $x\pm\frac{a}{x}$

因为有恒等式 $\left(x-\frac{a}{x}\right)^2+4a=\left(x+\frac{a}{x}\right)^2$，所以这里可以诱导出一对双元。

$$p,q,r \longmapsto x+\frac{a}{x}, x-\frac{a}{x}, \sqrt{x^2+\frac{a^2}{x^2}+b}$$

在化简一些四次的不定积分上，有奇效。

例题 2.19 求 $\displaystyle\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

解:(By 风中鱼) 设

$$p=x+\frac{1}{x}, q=x-\frac{1}{x}, r=\frac{\sqrt{x^4+x^2+1}}{x} \tag{2.26}$$

则：

$$\begin{aligned}\int \frac{1-x^2}{1+x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}} &= -\int \frac{\mathrm{d}p}{pr} \\ &= -\int \frac{\mathrm{d}r}{p^2} = -\int \frac{\mathrm{d}r}{r^2+1} \\ &= \arctan \frac{x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\end{aligned}$$

例题 2.20 求 $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^4+x^2+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}$.

解:(By 风中鱼) 设

$$p=x-\frac{1}{x}, q=x+\frac{1}{x}, r=\frac{\sqrt{1+x^2+x^4}}{x}, s=\frac{\sqrt{1+x^4}}{x} \tag{2.27}$$

则有双元分解：

$$\begin{aligned}\int \frac{x^4-1}{x^4+x^2+1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}} &= \int \frac{pq}{r^2 s}\frac{\mathrm{d}x}{x} \\ &= \int \frac{pq}{r^2 s}\frac{q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q}{4} = \int \frac{\left(q^2-p^2\right)\mathrm{d}s}{4r^2} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}s}{r^2} \\ &= \arctan \frac{\sqrt{1+x^4}}{x} \to -\arctan \frac{x}{\sqrt{1+x^4}}\end{aligned}$$

例题 2.21 求 $\displaystyle\int \frac{x^4-1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}$.

解:(By 风中鱼) 设

$$p=x+\frac{1}{x}, q=x-\frac{1}{x}, r=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}$$

则有双元分解：

$$\begin{aligned}\int\frac{x^4-1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^4+x^2+1}}&=\int\frac{pq}{r}\frac{\mathrm{d}q}{p}\\&=\int\frac{q\mathrm{d}q}{r}=\int\mathrm{d}r\\&=\sqrt{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-1}\end{aligned}$$

例题 2.22 求 $\displaystyle\int\frac{x^2+n^2x+1}{x^4-nx^2+1}\mathrm{d}x$, 其中 $n\in(0,2)$.

解：(By 水中星) 使 $a=1$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{p+n^2}{p^2-2-n}\frac{\mathrm{d}p+\mathrm{d}q}{p+q}&=\int\frac{p+n^2}{p^2-2-n}\frac{p\mathrm{d}q-q\mathrm{d}p}{p^2-q^2}\\&=\int\frac{\mathrm{d}q}{p^2-2-n}+n^2\int\frac{p^2\mathrm{d}\left(q/p\right)}{p^2-\frac{2+n}{4}\left(p^2-q^2\right)}\\&=\int\frac{\mathrm{d}q}{q^2+2-n}+4n^2\int\frac{\mathrm{d}b}{\left(2+n\right)b^2+\left(2-n\right)}\\&=\frac{1}{\sqrt{2-n}}\arctan\frac{q}{\sqrt{2-n}}+\frac{4n^2}{\sqrt{4-n^2}}\arctan\sqrt{\frac{2+n}{2-n}}\frac{q}{p}\\&=\frac{1}{\sqrt{2-n}}\arctan\frac{x-1/x}{\sqrt{2-n}}+\frac{4n^2}{\sqrt{4-n^2}}\arctan\sqrt{\frac{2+n}{2-n}}\frac{x^2-1}{x^2+1}\end{aligned}$$

例题 2.23 求 $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

解：(By 风中鱼) 使 $a=1,b=1$ 也即令：

$$p=x+\frac{1}{x},q=x-\frac{1}{x},r=\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}$$

那么我们可以简化原式：

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2+1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x&=\int\frac{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x}{x^2+\frac{1}{x^2}+x+\frac{1}{x}+1}\\&=\int\frac{\mathrm{d}q}{r^2+p}=\int\frac{\mathrm{d}q}{p^2+p-1}\\&=\int\frac{\mathrm{d}q}{p-\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\int\frac{\mathrm{d}q}{p+\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\end{aligned}$$

然后利用一个常用结论 (属于王者百题热身题)。

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}q}{p+a}&=\int\frac{\left(p-a\right)\mathrm{d}q}{p^2-a^2}\\&=\int\frac{\mathrm{d}q}{p}+a^2\int\frac{1}{p^2-a^2}\frac{\mathrm{d}q}{p}-a\int\frac{\mathrm{d}q}{q^2+4-a^2}\\&=\ln\left(p+q\right)+a^2\int\frac{p^2\mathrm{d}\left(q/p\right)}{\left(4-a^2\right)p^2+a^2q^2}-a\int\frac{\mathrm{d}q}{q^2+4-a^2}\end{aligned}$$

然后分别带入一定的 a 值即可。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}q}{p-\frac{\sqrt{5}-1}{2}} &= \ln(p+q)+\int \frac{\mathrm{d}b}{\frac{1}{5+2\sqrt{5}}+b^2}+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\int \frac{\mathrm{d}q}{q^2+\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \\
&= \ln(p+q)+\sqrt{5+2\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\frac{q}{p}\right) \\
&+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\arctan\frac{\sqrt{2}q}{\sqrt{5+\sqrt{5}}}
\end{aligned}
$$

同理：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}q}{p+\frac{\sqrt{5}+1}{2}} &= \ln(p+q)+\sqrt{5-2\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\frac{q}{p}\right) \\
&-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\arctan\frac{\sqrt{2}q}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}
\end{aligned}
$$

最后带入原式，

$$
\begin{aligned}
\int \ldots\mathrm{d}x = \sqrt{5+2\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5+2\sqrt{5}}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\arctan\frac{\sqrt{2}(x-1/x)}{\sqrt{5+\sqrt{5}}} \\
-\sqrt{5-2\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5-2\sqrt{5}}\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)-\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\arctan\frac{\sqrt{2}(x-1/x)}{\sqrt{5-\sqrt{5}}}
\end{aligned}
$$

例题 2.24 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$.

解：(By 风中鱼) 设

$$
p=\sqrt{x-1}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}, q=\sqrt{x-1}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}, r=\sqrt{x+\frac{1}{x-1}} \tag{2.28}
$$

则不难求解：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-x+1}} &= \int \frac{x+\sqrt{x^2-x+1}}{x-1}\mathrm{d}x \\
&= x+\ln|x-1|+\int r\mathrm{d}(p+q) \\
&= x+\ln|x-1|+r\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\ln(p+r)+\frac{3}{2}\ln(q+r) \\
&= x+\sqrt{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x-\sqrt{x^2-x+1}\right) \\
&+\frac{3}{2}\ln\left(x-2+\sqrt{x^2-x+1}\right)
\end{aligned}
$$

读者习题: 求

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+x+1}} \tag{2.29}
$$

例题 2.25 求 $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\mathrm{d}x$.

解:(By 虚调子) 设 $p=\dfrac{1}{x}+x, q=\dfrac{1}{x}-x, r=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}$, 则:

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\mathrm{d}x&=\int\frac{r}{pq}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int\frac{r}{pq}\frac{p+q}{2}\mathrm{d}\left(\frac{p-q}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}\int\frac{r}{pq}\left(q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q\right)=\frac{1}{4}\int\frac{r\mathrm{d}p}{p}-\frac{1}{4}\int\frac{r\mathrm{d}q}{q}\\&=\frac{1}{4}\left(\int\frac{r^2\mathrm{d}r}{r^2+2}-\int\frac{r^2\mathrm{d}r}{r^2-2}\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{arth}\frac{r}{\sqrt{2}}-\arctan\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\\&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{arth}\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{2}x}-\arctan\frac{\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{2}x}\right)\end{aligned}$$

例题 2.26 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}$

解:(By 零蛋大) 设 $p=x+x^{-1}, q=x-x^{-1}, r=\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}$，则

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}}&=\int\frac{\mathrm{d}\left(p+q\right)}{2r}\\&=\frac{1}{2}\ln\left[\left(p+r\right)\left(q+r\right)\right]\\&=\frac{1}{2}\ln\left(2x^2-10+2x\sqrt{(x+x^{-1})^2-12}\right)\end{aligned}$$

例题 2.27 求 $\displaystyle\int\frac{1-x+3x^2}{(1+x+x^2)^2\sqrt{1-x+x^2}}\mathrm{d}x$

解:(By 风中鱼) 利用前面的经验，我们置:

$$\begin{cases}p=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}, q=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\\r=\sqrt{x+\frac{1}{x}-1}, s=\sqrt{x+\frac{1}{x}+1}\end{cases}\tag{2.30}$$

若已知元素:

$$I=\int\frac{\mathrm{d}q}{s^2r}=\int\frac{r^2}{3r^2-2q^2}\mathrm{d}\left(\frac{q}{r}\right)=\frac{1}{\sqrt{6}}\mathrm{arth}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{q}{r}\tag{2.31}$$

$$J=\int\frac{\mathrm{d}p}{s^2r}=-\int\frac{r^2}{r^2+2p^2}\mathrm{d}\left(\frac{p}{r}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}\frac{p}{r}\tag{2.32}$$

于是有

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1-x+3x^2}{\left(1+x+x^2\right)^2\sqrt{1-x+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{1-x+x^2}\mathrm{d}x}{\left(1+x+x^2\right)^2} + \int \frac{2x^2\mathrm{d}x}{\left(1+x+x^2\right)^2\sqrt{1-x+x^2}} \\
&= \int \frac{\sqrt{x}r}{x^2s^4}\mathrm{d}x + \int \frac{2\mathrm{d}x}{\sqrt{x}s^4r} \\
&= \int \frac{r}{s^4}\left(\mathrm{d}q-\mathrm{d}p\right) + 2\int \frac{\mathrm{d}p+\mathrm{d}q}{s^4r} \\
&= \int \frac{r^2+2}{s^4r}\mathrm{d}q + \int \frac{2-r^2}{s^4r}\mathrm{d}p = \int \frac{\mathrm{d}q+\mathrm{d}p}{s^2r} - 2\int \frac{r\mathrm{d}p}{s^4} \\
&= I + J + 2\int \frac{r\mathrm{d}p}{s^2} - 2\int \frac{rp^2\mathrm{d}p}{s^4} \\
&= I - 3J + 2\int \frac{\mathrm{d}p}{r} - 2\int \frac{rp^2\mathrm{d}p}{s^4}
\end{aligned}
$$

同时我们注意到：

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\frac{pr}{s^2}\right) &= \frac{p\mathrm{d}r + r\mathrm{d}p}{s^2} - \frac{2pr\mathrm{d}s}{s^3} \\
&= \frac{\left(p^2+r^2\right)\mathrm{d}p}{s^2r} - 2\frac{rp^2\mathrm{d}p}{s^4} \\
&= 2\frac{\mathrm{d}p}{r} - J - 2\frac{rp^2\mathrm{d}p}{s^4}
\end{aligned}
$$

这样原积分结构明了，

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1-x+3x^2}{\left(1+x+x^2\right)^2\sqrt{1-x+x^2}}\mathrm{d}x = I - 2J + \frac{pr}{s^2} &= \frac{pr}{s^2} - \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arth}\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{q}{r} + \sqrt{2}\arctan\sqrt{2}\frac{p}{r} \\
&= \frac{(1+x)\sqrt{1-x+x^2}}{1+x+x^2} \\
&\quad + \sqrt{2}\arctan\frac{\sqrt{2}\,(1+x)}{\sqrt{1-x+x^2}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{6}\,(1-x)}{3\sqrt{1-x+x^2}}
\end{aligned}
$$

2.4.2 $\cos x \pm \sin x$

下面我们将设 $p=\cos x+\sin x, q=\cos x-\sin x$，这其实是原来的初始双元进行了 45° 旋转。如果必要还可以加一个二次元：$r=\sqrt{2\sin x\cos x}$。

$$
\boxed{p, q, r \longmapsto \cos x+\sin x, \cos x-\sin x, \sqrt{2\sin x\cos x}}
$$

- 有数量关系：$r^2=p^2-1=1-q^2$
- 有导数关系：$\mathrm{d}p=q\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}q=-p\mathrm{d}x$.

例题 2.28 求 $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解：(By 风中鱼)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin^2 x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{r^2}{2}\cdot\frac{p-q}{2}}{p}\frac{\mathrm{d}p}{q} \\
&= \frac{1}{4}\int\frac{r^2\mathrm{d}p}{q}-\frac{1}{4}\int\frac{r^2\mathrm{d}p}{p} \\
&= \frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}p}{q}-\frac{1}{4}\int q\mathrm{d}p-\frac{1}{4}\int\frac{p^2-1}{p}\mathrm{d}p \\
&= -\frac{1}{8}\int p\mathrm{d}q+q\mathrm{d}p-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}p^2-\ln p\right) \\
&= \frac{1}{4}\ln p-\frac{1}{8}\left(pq+p^2\right) \\
&= \frac{1}{4}\ln\left(\sin x+\cos x\right)-\frac{1}{4}\cos x\left(\sin x+\cos x\right)
\end{aligned}$$

例题 2.29 求

$$\int\frac{\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x \tag{2.33}$$

解:(By 风中鱼) 这里我们需要推广一下，另设 $m=\sin x+2\cos x, n=\cos x-2\sin x$，这也是一种旋转。顺便，此类双元对应了组合积分法，或者说是一种推广。

$$\begin{aligned}
\int\frac{\cos^2 x}{\sin x+2\cos x}\mathrm{d}x &= \int\frac{(2m+n)^2}{5m}\frac{\mathrm{d}m}{n} \\
&= \frac{4}{5}\int\frac{m\mathrm{d}m}{n}+\frac{4}{5}\int\mathrm{d}m+\frac{1}{5}\int\frac{n\mathrm{d}m}{m} \\
&= \frac{4}{5}(m-n)-\frac{1}{5}\int\frac{n^2\mathrm{d}n}{5-n^2} \\
&= \frac{4}{5}(m-n)+\frac{n}{5}-\int\frac{\mathrm{d}n}{5-n^2} \\
&= \frac{4m-3n}{5}-\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{arth}\frac{n}{\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

例题 2.30 一般地，求 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x.$

解:(By 风中鱼) 若设 $p=a\sin x+b\cos x, q=a\cos x-b\sin x$，则：

$$\sin x\cos x=\frac{(ap-bq)(bp+aq)}{\left(a^2+b^2\right)^2} \tag{2.34}$$

带入即可：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin x\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{p}\frac{(ap-bq)(bp+aq)}{\left(a^2+b^2\right)^2}\frac{\mathrm{d}p}{q}\\
&= \frac{1}{\left(a^2+b^2\right)^2}\left[ab\int\left(\frac{p\mathrm{d}p}{q}-\frac{q\mathrm{d}p}{p}\right)+\left(a^2-b^2\right)\int \mathrm{d}p\right]\\
&= \frac{1}{\left(a^2+b^2\right)^2}\begin{bmatrix}\left(a^2-b^2\right)p-abq\\ +ab\int\frac{q^2\mathrm{d}q}{a^2+b^2-q^2}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{\left(a^2+b^2\right)^2}\begin{bmatrix}\left(a^2-b^2\right)p-2abq\\ +ab\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{arth}\frac{q}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{bmatrix}\\
&= \frac{a\sin x-b\cos x}{a^2+b^2}+\frac{ab}{\left(a^2+b^2\right)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arth}\frac{a\cos x-b\sin x}{\sqrt{a^2+b^2}}
\end{aligned}
$$

例题 2.31 求 $\displaystyle\int\sqrt{\sin x-\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解:(By 水中星) 设

$$
p=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2},q=\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}=\sqrt{1-\sin x},r=\sqrt{\sin x} \tag{2.35}
$$

于是就转化为双元积分了：

$$
\begin{aligned}
\int\sqrt{\sin x-\sin^2 x}\mathrm{d}x &= \int qr\frac{2\mathrm{d}p}{q}\\
&= 2\int r\mathrm{d}p=\int \mathrm{d}(rp)-\int\frac{\mathrm{d}p}{r}\\
&= pr-\ln(p+r)\\
&= \sqrt{(1+\sin x)\sin x}-\ln\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{\sin x}\right)
\end{aligned}
$$

结果进行 sgn 修正的话，在前面乘一个 $\operatorname{sgn}\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)$ 即可。

例题 2.32 求 $\displaystyle\int\sin^{\frac{3}{2}}x\cos^{\frac{5}{2}}x\mathrm{d}x$.

解: 若设 $p=\sin x+\cos x,q=\cos x-\sin x,r=\sqrt{2\sin x\cos x}$,(这里需要用到前面的混合降次) 则：

$$
\begin{aligned}
\int\sin^{\frac{3}{2}}x\cos^{\frac{5}{2}}x\mathrm{d}x &= \int\frac{r^3}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{p+q}{2}\frac{\mathrm{d}p}{q}\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(\int r^3\mathrm{d}p-\int r^3\mathrm{d}q\right)\\
&= \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}r^3p-\frac{3}{8}rp+\frac{3}{8}\ln|r+p|\\ -\frac{1}{4}r^3q-\frac{3}{8}rq-\frac{3}{8}\arctan\frac{q}{r}\end{pmatrix}\\
&= \frac{2r^3\sin x-3r\cos x}{16\sqrt{2}}+\frac{3}{32\sqrt{2}}\left(\ln|r+p|-\arctan\frac{q}{r}\right)
\end{aligned}
$$

例题 2.33 求

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x + \sin x \cos x} \tag{2.36}$$

解：(By 风中鱼)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x + \sin x \cos x} &= \int \frac{-1}{p + r^2/2} \frac{\mathrm{d}q}{p} = -2\int \frac{\mathrm{d}q}{p\left(2p + p^2 - 1\right)} \\
&= -2\int \frac{\mathrm{d}q}{p\left(p - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(p - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
&= 2\int \frac{\mathrm{d}q}{p} - \left(3\sqrt{2} + 1\right)\int \frac{\mathrm{d}q}{p + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \\
&+ \left(3\sqrt{2} - 1\right)\int \frac{\mathrm{d}q}{p - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}
\end{aligned}$$

这是前面用过的模型，这里将剩下的一些简单的计算过程省略。

例题 2.34 求 $\displaystyle\int \arctan\left(1 - \frac{\sec x}{\sin x}\right)\cos x\mathrm{d}x.$

解：(By 风中鱼)

$$\begin{aligned}
\int \arctan\left(1 - \frac{\sec x}{\sin x}\right)\cos x\mathrm{d}x &= \sin x \arctan\left(1 - \frac{\sec x}{\sin x}\right) - \int \frac{p - q}{2} \frac{\frac{4}{r^3}\mathrm{d}r}{1 + \left(1 - \frac{2}{r^2}\right)^2} \\
&= \sin x \arctan\left(1 - \frac{\sec x}{\sin x}\right) - 2\int \frac{(p - q)\, r\mathrm{d}r}{r^4 + \left(r^2 - 2\right)^2} \\
&= \sin x \arctan\left(1 - \frac{\sec x}{\sin x}\right) - \int \frac{p^2\mathrm{d}p + q^2\mathrm{d}q}{r^4 - 2r^2 + 2}
\end{aligned}$$

后面其实算是固定的套路了。另设 $m = p + \frac{\sqrt{5}}{p}, n = p - \frac{\sqrt{5}}{p}$，

$$\begin{aligned}
\int \frac{p^2\mathrm{d}p}{r^4 - 2r^2 + 2} &= \int \frac{p^2\mathrm{d}p}{p^4 - 4p^2 + 5} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}\left(m + n\right)}{2\left(p^2 + 5/p^2 - 4\right)} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}m}{m^2 - \left(4 + 2\sqrt{5}\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}n}{n^2 + 2\sqrt{5} - 4} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\sqrt{5} - 4}}\arctan\frac{n}{\sqrt{2\sqrt{5} - 4}} - \frac{1}{2\sqrt{4 + 2\sqrt{5}}}\operatorname{arth}\frac{m}{\sqrt{4 + 2\sqrt{5}}}
\end{aligned}$$

另一部分同理，

$$\begin{aligned}
\int \frac{q^2\mathrm{d}q}{r^4 - 2r^2 + 2} &= \int \frac{q^2\mathrm{d}q}{q^4 + 1} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{q - 1/q}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{q + 1/q}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

回代即可得到结果。

命题 2.1. 王者百题 094

验证：

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arth}\frac{2\sqrt{\tan x}}{\tan x+1} + \frac{1}{2}\ln\left(\cos x - \sin x\right) - \frac{x}{2} - \frac{\ln\left(\sqrt{2\sin x\cos x}+\sin x+\cos x\right)}{\sqrt{2}}$$

解：(By 风中鱼)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sqrt{\tan x}+1}\mathrm{d}x &= \int \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sqrt{\sin x}\left(\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin x}\right)}{\cos x - \sin x}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\frac{r}{\sqrt{2}} - \frac{p-q}{2}}{q}\frac{\mathrm{d}p}{q} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{r\mathrm{d}p}{1-r^2} - \frac{1}{2}\int \frac{p\mathrm{d}p}{q^2} + \frac{\mathrm{d}p}{q} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{r^2\mathrm{d}r}{p\left(1-r^2\right)} + \frac{1}{2}\ln q - \frac{1}{2}\arctan\frac{p}{q} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\int \frac{\mathrm{d}r}{p} + \int \frac{\mathrm{d}r}{p\left(1-r^2\right)}\right) + \ldots \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{p\mathrm{d}r - r\mathrm{d}p}{p^2-2r^2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left(r+p\right) + \ldots \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{arth}\frac{\sqrt{2}r}{p} - \frac{\ln\left(r+p\right)}{\sqrt{2}} + \frac{\ln q}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{p}{q}
\end{aligned}$$

后面的化简过程省略。

例题 2.35 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x}$

解：(By 水中星) 设 $p=\sin x+\cos x, q=\cos x-\sin x$，则

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sin x\mathrm{d}x}{\sqrt{2}+\sin x+\cos x} &= \int \frac{p-q}{\sqrt{2}+p}\frac{\mathrm{d}p}{2q} \\
&= \int \frac{p-q}{2q^2}\left(\sqrt{2}-p\right)\frac{\mathrm{d}p}{q} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\int \frac{p\mathrm{d}p}{q^3} - \int \frac{q\mathrm{d}p}{q^3}\right) - \int \frac{p^2\mathrm{d}p}{2q^3} + \int \frac{pq\mathrm{d}p}{2q^3} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2q} - \operatorname{arth}\frac{q}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln q + \int \frac{p\mathrm{d}q}{2q^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2q} - \operatorname{arth}\frac{q}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln q - \frac{p}{2q} + \frac{1}{2}\arctan\frac{p}{q}
\end{aligned}$$

下面是一个系列的题目：

例题 2.36 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x}$.

解:(By 水中星) 按 $p=\sin x+\cos x, q=\cos x-\sin x, r=\sqrt{2\sin x\cos x}$ 设双元:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x+\cos^3 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)} \\
&= \int \frac{1}{p\left(1-\frac{r^2}{2}\right)}\frac{\mathrm{d}q}{p} = \int \frac{2\mathrm{d}q}{(2-q^2)(1+q^2)} \\
&= \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}q}{2-q^2}+\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}q}{1+q^2} \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{q}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\arctan q \\
&= \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{3}\arctan(\sin x-\cos x)
\end{aligned}$$

例题 2.37 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

解: 可以简单凑 $\tan x$ 解决:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-\sqrt{2}\sin x\cos x}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2}\sin x\cos x} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x-\sqrt{2}\tan x+1}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\tan^2 x+\sqrt{2}\tan x+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\tan x-1\right)+\arctan\left(\sqrt{2}\tan x+1\right)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\sqrt{2}\tan x}{1-\tan^2 x}
\end{aligned}$$

例题 2.38 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x+\cos^5 x}$.

解: (By 虚调子) 设双元: $p=\sin x+\cos x, q=\sin x-\cos x, r=\sqrt{2\sin x\cos x}$ 就有:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x+\cos^5 x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)\left(1-\sin x\cos x-\sin^2 x\cos^2 x\right)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}q}{p^2\left(1-\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)} = \int \frac{4\mathrm{d}q}{(2-q^2)\left(5-(2-q^2)^2\right)} \\
&= \frac{4}{5}\int \frac{\mathrm{d}q}{2-q^2}-\frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{5}+2-q^2}+\frac{2}{5}\int \frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{5}-2+q^2} \\
&= \frac{4}{5\sqrt{2}}\operatorname{arth}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{2}}-\frac{2}{5\sqrt{\sqrt{5}+2}}\operatorname{arth}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sqrt{5}+2}} \\
&+\frac{2}{5\sqrt{\sqrt{5}-2}}\arctan\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sqrt{5}-2}}
\end{aligned}$$

例题 2.39 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x+\cos^6 x}$.

解：(By 水中星) 比 5 次要简单的多：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^6 x+\cos^6 x} &= \int \frac{8\mathrm{d}x}{5+3\cos 4x}\\ &= \int \frac{2\mathrm{d}\left(2x\right)}{4\cos^2\left(2x\right)+\sin^2\left(2x\right)}\\ &= \arctan\frac{\tan\left(2x\right)}{2}\\ &\sim 2x-\arctan\frac{\sin 4x}{\cos 4x+3}\end{aligned}$$

最后这个是进行了连续修正。对于更高次，可以由递推式：

$$\frac{\sin^n x+\cos^n x}{\sin x+\cos x}=\frac{\sin^{n-1} x+\cos^{n-1} x}{\sin x+\cos x}-\sin^2 x\cos^2 x\frac{\sin^{n-2} x+\cos^{n-2} x}{\sin x+\cos x} \tag{2.37}$$

来进行双元简化。

2.4.3 $\sec x, \tan x$

有的时候以 $\sec x, \tan x$ 等为双元可以简化问题，更快地得出结果。

例题 2.40 求 $\displaystyle\int \sqrt{1+\sec^4 x}\tan x\mathrm{d}x$.

解：(By 风中鱼) 若设

$$\sec x-\cos x=p, \sec x+\cos x=q, \sqrt{\sec^2 x+\frac{1}{\sec^2 x}}=r \tag{2.38}$$

则不难得到：

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+\sec^4 x}\tan x\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1+\sec^4 x}\frac{\mathrm{d}\left(\sec x\right)}{\sec x}\\ &= \int r\frac{\mathrm{d}\left(p+q\right)}{2}\\ &= \frac{1}{4}\left(p+q\right)r-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}p}{r}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}q}{r}\\ &= \frac{1}{4}\left(p+q\right)r+\frac{1}{2}\ln\frac{q+r}{p+r}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{1+\sec^4 x}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sec^2 x+1+\sqrt{1+\sec^4 x}}{\sec^2 x-1+\sqrt{1+\sec^4 x}}\end{aligned}$$

例题 2.41 求 $\displaystyle\int \frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{\left(\sec x+\tan x\right)^n}$.

解: 若设 $t=\sec x+\tan x$，则 $\frac{1}{t}=\sec x-\tan x$，于是我们有：

$$\begin{cases}\sec x=\dfrac{1}{2}\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\\ \mathrm{d}t=t\sec x\mathrm{d}x\end{cases}$$

带入：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sec^2 x\mathrm{d}x}{(\sec x+\tan x)^n} &= \int \frac{1}{t^n}\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{t} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^n}+\frac{1}{t^{n+2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{t^{1-n}}{1-n}-\frac{t^{-1-n}}{1+n}\right)
\end{aligned}
$$

另外，对于 $n=\pm 1$，其相应的奇点部分取 $\ln x$ 形式即可。

2.5 含双元的复杂分式不定积分

下面是一些经典的例题。

例题 2.42 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x.$

解:(By 南极撸) 若设 $t=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}$，那么 $t^2=2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$，同时 $\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$. 最后我们可以得到：

$$
\begin{cases}
x=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{t^2}{2}+\dfrac{2}{t^2}\right)=\dfrac{t^4+4}{4t^2} \\
\sqrt{x^2-1}=\dfrac{t^4-4}{4t^2}
\end{cases}
$$

于是：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}{x+2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x &= \int \frac{2\sqrt{x^2-1}\mathrm{d}\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}\right)}{x+2\sqrt{x^2-1}} \\
&= \int \frac{\dfrac{t^4-4}{2t^2}\mathrm{d}t}{\dfrac{3t^4-4}{4t^2}} = 2\int \frac{t^4-4}{3t^4-4}\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{3}t-\frac{16}{9}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^4-\frac{4}{3}} \\
&= \frac{2}{3}\left[t+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{3}}\left(\arctan\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}t\right)+\operatorname{arth}\left(\frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt{2}}t\right)\right)\right]
\end{aligned}
$$

然后回代即可。

例题 2.43 求

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^9 x+\sin^3 x} \tag{2.39}
$$

解：(By 风中鱼) 由于次数很高，所以想办法降次：

$$
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^9 x+\sin^3 x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}-\int \frac{\sin^3 x\mathrm{d}x}{1+\sin^6 x} \tag{2.40}
$$

前面的还是挺简单的：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} \to \int \frac{1}{p^3}\frac{\mathrm{d}p}{q} &= \int \frac{\mathrm{d}p}{pq} + \int \frac{q\mathrm{d}p}{p^3} \\
(p, q = \sin x, \cos x) &= -\frac{q}{2p^2} - \int \frac{\mathrm{d}q}{2p^2} \\
&= -\frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{arth}(\cos x)
\end{aligned}
$$

重置双元：$\sec x = p, \tan x = q$，就有

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sin^3 x}{1+\sin^6 x}\mathrm{d}x &= \int \frac{p^2 q^2}{p^6+q^6}\mathrm{d}p \\
&= \frac{1}{3}\left[\int \frac{p^2+q^2}{p^4-p^2q^2+q^4}\mathrm{d}p - \int \frac{\mathrm{d}p}{p^2+q^2}\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\int \frac{2p^2-1}{p^4-p^2+1}\mathrm{d}p - \int \frac{\mathrm{d}p}{2p^2-1}\right]
\end{aligned}
$$

再利用之前的技巧，令

$$
m = p + \frac{1}{p}, n = p - \frac{1}{p}, l = \sqrt{p^2 + \frac{1}{p^2} - 1}
$$

有：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{2p^2-1}{p^4-p^2+1}\mathrm{d}p &= \int \frac{3\mathrm{d}m + \mathrm{d}n}{2l^2} \\
&= \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}m}{m^2-3} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}n}{n^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\arctan n - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{arth}\frac{m}{\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

总之：

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^9 x + \sin^3 x} &= \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arth}\frac{\sec^2 x + 1}{\sqrt{3}\sec x} - \frac{1}{6}\arctan\left(\sec x - \frac{1}{\sec x}\right) \\
&\quad - \frac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arth}\sqrt{2}\sec x - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} - \frac{1}{2}\operatorname{arth}(\cos x)
\end{aligned}
$$

例题 2.44 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x}$.

解：(By Mirion) 首先可以乘上 $\sin x\cos x$ 来化简函数名，最后仍然是前面的双元体系。但是因为是非齐次的，需要有不同的处理。令：

$$
\sin x + \cos x, \cos x - \sin x, \sqrt{2\sin x\cos x} \to \sqrt{2}\frac{u^2-1}{u^2+1}, \sqrt{2}\frac{2u}{u^2+1}, \frac{\sqrt{u^4-6u^2+1}}{u^2+1} \tag{2.41}
$$

则：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x+\tan x+\cot x+\sec x+\csc x} \\
&=\int \frac{\sin x\cos x\mathrm{d}x}{(\sin x+\cos x)(\sin x\cos x+1)+1} \\
&=\int \frac{\dfrac{u^4-6u^2+1}{2\left(u^2+1\right)^2}}{\sqrt{2}\dfrac{u^2-1}{u^2+1}\left(\dfrac{u^4-6u^2+1}{2\left(u^2+1\right)^2}+1\right)+1}\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{2}\dfrac{u^2-1}{u^2+1}\right)}{\sqrt{2}\dfrac{2u}{u^2+1}} \\
&=2\int \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)u^2-\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}+4\right)u^4-\sqrt{2}+4}\mathrm{d}u {\color{blue}(u\in(0,1))} \\
&=\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+4}\int \frac{u^2-\left(3-2\sqrt{2}\right)}{u^4+\dfrac{9-4\sqrt{2}}{7}}\mathrm{d}u \\
&=\frac{3\sqrt{2}+2}{7}\int \frac{\left(3\sqrt{2}-5\right)\mathrm{d}p+\left(6-3\sqrt{2}\right)\mathrm{d}q}{u^2+\left(9-4\sqrt{2}\right)/\left(7u^2\right)} \\
&=\frac{10+14\sqrt{2}}{7}\operatorname{arth}\left[\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(u+\frac{1}{\left(9+4\sqrt{2}\right)u}\right)\right] \\
&+3\sqrt{2}\arctan\left[\left(2+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(u-\frac{1}{\left(9+4\sqrt{2}\right)u}\right)\right]
\end{aligned}
$$

最后我们考虑 u 的显化：

$$
u=\frac{\sin x+\cos x+\sqrt{2}}{\cos x-\sin x} \tag{2.42}
$$

然后回代即可。

例题 2.45 求 $\displaystyle\int \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解：(By 风中鱼) 若设 $t=\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$, 则有 $t^2-\frac{1}{t^2}=2x$，于是题目结构已经解析完毕。

$$
\begin{aligned}
\int \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x &=\frac{1}{2}\int t\mathrm{d}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right) \\
&=\int t\left(t+\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t \\
&=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{t}
\end{aligned}
$$

例题 2.46 求 $\displaystyle\int \arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)\cos x\sin x\mathrm{d}x\left(0<\alpha<x<\frac{\pi}{2}\right).$

解:(By 虚之花) 先分部一次：

$$\begin{aligned}\int \arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)\cos x\sin x\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\int \arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)\mathrm{d}\left[\cos 2x\right]\\ &= -\frac{1}{4}\ldots+\frac{\tan\alpha}{4}\int \cos 2x\frac{\cot x\sec^2 x\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}\\ &= -\frac{1}{4}\ldots+\frac{\tan\alpha}{4}\int \frac{\cot x-\tan x}{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

若置 $p=\tan x, q=\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}, r=\sqrt{\tan^2 x+1}$：

$$\begin{aligned}\int \frac{\cot x-\tan x}{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan^2 x\right)}{\tan^2 x\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}\\ &\quad -\int \frac{\mathrm{d}\left(\tan^2 x\right)}{\left(\tan^2 x+1\right)\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}\\ &= \int\frac{p\mathrm{d}p}{p^2 q}-2\int\frac{p\mathrm{d}p}{r^2 q}=\int\frac{\mathrm{d}q}{p^2}-2\int\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\\ &= \frac{1}{\tan\alpha}\arctan\frac{q}{\tan\alpha}-\frac{2}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}\arctan\frac{q}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}\end{aligned}$$

回代即有：

$$\begin{aligned}\int \arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)\cos x\sin x\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan x}\right)\cos 2x\\ &\quad +\frac{1}{4}\arctan\frac{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}{\tan\alpha}\\ &\quad -\frac{\tan\alpha}{2\sqrt{\tan^2\alpha+1}}\arctan\frac{\sqrt{\tan^2 x-\tan^2\alpha}}{\sqrt{\tan^2\alpha+1}}\end{aligned}$$

例题 2.47 求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n}\ (n\in\mathbb{N}^+)$.

解:(By 虚调子) 设 $p=\sqrt{1+\sin x}, q=\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}$，就有 $p^2+q^2=2$,

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^n} &= 2\int\frac{\mathrm{d}q}{p^{2n+1}}=\int\frac{(p^2+q^2)\mathrm{d}q}{2p^{2n+1}}\\ &= \int\frac{p\mathrm{d}q-q\mathrm{d}p}{2p^{2n}}\\ &= \int\frac{p^2\left(p^2+q^2\right)^{n-1}}{2^n p^{2n}}\mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right)\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\int\binom{n-1}{k}\frac{q^{2k}}{p^{2k}}\mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right)\\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{1}{2k+1}\frac{q^{2k+1}}{p^{2k+1}}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\tan^{2k+1}\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2^n\left(2k+1\right)}\end{aligned}$$

2.6 三角函数的倍角半角类

如果以三角函数本身出题的话，双元可能就无法发挥功效了。双元相比三角函数表达最大的一个区别是没有倍角表示。这其实也是人为赋予的，我们有时也可以定义双元的倍角来类似操作。

2.6.1 倍角展开

对于一些简单的高次三角函数积分，是可以有相对简单的倍角表达的。首先我们考虑**欧拉公式:** $e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta$ 以及

定理 2.6. De Moivre's formula

若 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$，则

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2)\, e^{i(\theta_1+\theta_2)} \tag{2.43}$$

它有一个相当常用的推论：

结论 若设 $y = e^{i\theta}$，则 $2\cos\theta = y + \frac{1}{y}, 2i\sin\theta = y - \frac{1}{y}$，更进一步：

$$2\cos(n\theta) = y^n + \frac{1}{y^n}, 2i\sin(n\theta) = y^n - \frac{1}{y^n} \tag{2.44}$$

例题 2.48 求 $\int \cos^8 x \mathrm{d}x$.

解: 利用之前的推论，我们有

$$\begin{aligned}
2^8\cos^8 x &= \left(y + \frac{1}{y}\right)^8 \\
&= \left(y^8 + \frac{1}{y^8}\right) + 8\left(y^6 + \frac{1}{y^6}\right) + 28\left(y^4 + \frac{1}{y^4}\right) + 56\left(y^2 + \frac{1}{y^2}\right) + 70 \\
&= 2\cos 8x + 16\cos 6x + 56\cos 4x + 112\cos 2x + 70
\end{aligned}$$

因此我们可以有：

$$\begin{aligned}
\int \cos^8 x \mathrm{d}x &= \frac{1}{2^7}\int (\cos 8x + 8\cos 6x + 28\cos 4x + 56\cos 2x + 35)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2^7}\left(\frac{\sin 8x}{8} + \frac{4\sin 6x}{3} + 7\sin 4x + 28\sin 2x + 35x\right)
\end{aligned}$$

更一般地，我们有一些相关的恒等式：

$$\cos^n x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k}\cos\left[(n-2k)\,x\right] \tag{2.45}$$

$$\sin^n x = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n+k}}{2^n}\binom{n}{k}\cos\left[(n-2k)\,x + \frac{\pi}{2}n\right] \tag{2.46}$$

例题 2.49 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x+4\cos x+4}$.

解: 化半角：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{3\sin x+4\cos x+4} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+8\cos^2\frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{3\tan\frac{x}{2}+4} = \frac{1}{3}\ln\left(3\tan\frac{x}{2}+4\right)\end{aligned}$$

例题 2.50 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x}$.

法一:(By 学数垃圾) 利用倍角公式：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x} &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x\left(1+\cos x\right)} \\ &= \int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos^3\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} \\ &= \frac{1}{8\cos^2\frac{x}{2}} + \frac{1}{4}\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right)\end{aligned}$$

法二:(By 鈺) 若设 $p=\sin x, q=\cos x$，则：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x+2\sin x} &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{p\left(q+1\right)}\frac{\mathrm{d}p}{q} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1-q}{p^3}\frac{\mathrm{d}p}{q} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}p}{p^3q} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}p}{p^3} \\ &= -\frac{1}{4}\frac{1}{p^2q} - \frac{1}{4}\int \frac{p^2+q^2}{p^2q^2}\mathrm{d}p + \frac{1}{4p^2} \\ &= \frac{1}{4p^2}\left(1-\frac{1}{q}\right) - \frac{1}{4}\mathrm{arth}p + \frac{1}{4p}\end{aligned}$$

2.6.2 和差化积

对于不同倍角之间，还有变换公式。

定理 2.7. 和差化积公式

- $\sin x \pm \sin y = 2\sin\frac{x\pm y}{2}\cos\frac{x\mp y}{2}$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
- $\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

同样的，这里还有积化和差公式。

定理 2.8. 积化和差公式

- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) - \sin(x-y))$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$

这里给出一些例题：

例题 2.51 求 $\int \sin x \sin 3x \sin 5x \mathrm{d}x$.

提示： 利用积化和差公式可以将三角的积变成三角的和。

$$\begin{aligned}\int \sin x \sin 3x \sin 5x \mathrm{d}x &= \int \frac{\cos(2x) - \cos(4x)}{2} \sin 5x \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{4} \int \sin 7x + \sin 3x - \sin 9x - \sin x \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\cos 7x}{7} + \frac{\cos 3x}{3} - \frac{\cos 9x}{9} - \cos x\right)\end{aligned}$$

例题 2.52 求 $\int \frac{\sin(nx)}{\sin x} \mathrm{d}x$.

提示： 递推，考虑

$$\int \frac{\sin nx}{\sin x} \mathrm{d}x - \int \frac{\sin(n-2)x}{\sin x} \mathrm{d}x$$

并利用和差化积公式即可, 具体过程略。

可以参考：https://www.zhihu.com/answer/1118683700.

第三章 含参不定积分

3.1 莱布尼兹公式

莱布尼兹是用来求两个函数积的 n 阶导。

定理 3.1. 莱布尼兹公式

对于足够光滑的 $u(x), v(x)$，

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} u^{(n-k)} v^{(k)} \tag{3.1}$$

♡

下面是一些常见的 n 阶导：

- $[\ln(1 \pm x)]^{(n)} = (\mp 1)^n \dfrac{-(n-1)!}{(1 \pm x)^n}$
- $\left(\dfrac{1}{a \pm x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!\,(\mp 1)^n}{(a \pm x)^{n+1}}$
- $[\sin x]^{(n)} = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2} n\right)$
- $\left[\sin^2 x\right]^{(n)} = 2^n \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2} n\right)$
- $[\arctan x]^{(n)} = \dfrac{(-)^{n+1}(n-1)!}{(1+x^2)^{\frac{n}{2}}} \sin\left(n \arctan \dfrac{1}{x}\right)$
- $\left[\dfrac{\ln x}{x}\right]^{(n)} = \dfrac{(-)^{n+1} n!}{x^{n+1}} (H_n - \ln x)$
- $[e^{ax} \sin bx]^{(n)} = \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin\left(bx + n \arctan \dfrac{b}{a}\right)$

证明过程略。

3.2 简单的含参积分

如果被积函数内部有明显的微分关系，可以直接套公式解决。

例题 3.1 求 $\displaystyle\int x^m \ln^n x \mathrm{d}x$.

解:(By 虚调子) 简单地，我们有

$$\int x^m \mathrm{d}x = \frac{x^{m+1}}{m+1} \tag{3.2}$$

两边对 m 求 n 阶导，并用莱布尼兹公式就有：

$$\int x^m \ln^n x \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!\,(-1)^k x^{m+1} \ln^{n-k} x}{(n-k)!\,(m+1)^{k+1}} \tag{3.3}$$

显然地，这里要求 $m \neq -1$，对于这种情况有：

$$\int \frac{\ln^n x}{x} \mathrm{d}x = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1} \tag{3.4}$$

例题 3.2 求 $\displaystyle\int \frac{x\cos x\mathrm{d}x}{3+4\sin x-\cos 2x}$.

提示: 将分母化为齐次在分部积分。

具体可以参考https://zhuanlan.zhihu.com/p/114713997.

3.3 含参构造

在一些没有参数的不定积分里，也可以加入参数来简化计算。

例题 3.3 求 $\displaystyle\int \arcsin^n x\mathrm{d}x$.

先去掉反函数名, 令 $t=\arcsin x$: $\displaystyle\int \arcsin^n x\mathrm{d}x=\int t^n\cos t\mathrm{d}t$，构造含参不定积分:

$$\int \cos at\mathrm{d}t=\frac{\sin at}{a} \tag{3.5}$$

$$\int t\cos at\mathrm{d}t=\frac{at\sin at-\cos at}{a^2} \tag{3.6}$$

公式3.5 两边对 a 求导，就有:

$$\int t^{2n}(-)^n\cos(at)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}t^{2n-k}(-)^n\sin\left(at-k\frac{\pi}{2}\right)\frac{(-)^k k!}{a^{k+1}}$$

略微化简就有:

$$\int t^{2n}\cos(at)\,\mathrm{d}t=\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!\,(-)^k}{(2n-k)!}\frac{t^{2n-k}}{a^{k+1}}\sin\left(at-k\frac{\pi}{2}\right) \tag{3.7}$$

利用公式3.6, 同理我们有:

$$\begin{aligned}\int t^{2n+1}\cos(at)\mathrm{d}t=&\sum_{k=0}^{2n}\frac{(2n)!\,(-)^k}{(2n-k)!}\frac{t^{2n-k}}{a^{k+1}}\\&\times\left[t\sin\left(at-k\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(at-k\frac{\pi}{2}\right)\frac{k+1}{a}\right]\end{aligned}$$

最后令 $a=1$，

$$\int t^n\cos t\mathrm{d}t=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,(-)^k}{(n-k)!}t^{n-k}\sin\left(t-k\frac{\pi}{2}\right),n|2\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!\,(-)^k}{(n-k)!}t^{n-k}\left[\begin{matrix}t\sin\left(t-k\frac{\pi}{2}\right)\\-(k+1)\cos\left(t-k\frac{\pi}{2}\right)\end{matrix}\right],n\nmid 2\end{cases} \tag{3.8}$$

以及：

$$\int \arcsin^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!\,(-)^k}{(n-k)!} \arcsin^{n-k} x \sin\left(\arcsin x - k\dfrac{\pi}{2}\right), n|2 \\ \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!\,(-)^k}{(n-k)!} \arcsin^{n-k} x \left[\begin{array}{c} \arcsin x \sin\left(\arcsin x - k\frac{\pi}{2}\right) \\ -(k+1)\cos\left(\arcsin x - k\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right], n \nmid 2 \end{cases} \tag{3.9}$$

第 四 章 简单的高次有理积分与 $\mho$ 函数

对于大多数三次及三次以上的不定积分，利用双元法就会有些麻烦，或者说这两者就不是同一个东西！想想，我们最开始诱导双元的应该是 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$。

那么我们升级一下，考虑 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

例 4.1 求 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

解：求解是容易的，

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} &= \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2-x+1\right)-x^2+(x+1)}{1+x^3}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x} - \frac{1}{6}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^3\right)}{1+x^3} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x+x^2} \\ &= \frac{1}{2}\ln \frac{1+x}{\sqrt[3]{1+x^3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

可以看到，其实没有什么新的函数产生，仍然是初等的。

这里为了更一般化，我们定义：

定义 4.1. $\mho$ 函数

$$\mho_{m,n}^{\pm}(x) = \int \frac{x^{m-1}\mathrm{d}x}{1\pm x^n}$$

♣

一般我会简写,$\mho_n^{\pm}(x) \equiv \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1\pm x^n}$,之前求的就是 $\mho_3^{+}(x)$。下面将证明形如 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}\ (n \in N*)$ 的均有初等函数表达，也即 $\mho_{m,n}^{\pm}(x)$ 是初等函数。

4.1 $\mho$ 函数的通式

$$\begin{aligned}\mho_{m,2n}^{+}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{m}{2k}(2k-1)\pi \arctan \frac{x\sin\frac{2k-1}{2n}\pi}{1-x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi} \\ -\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{m}{2k}(2k-1)\pi\ln\left|x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n}\pi+1\right|\end{aligned}$$

4.2 $\mho$ 函数的性质

4.3 应用及初等判定

4.4 高次有理积分

我们先来看一个求有理积分常用的定理。

定理 4.1. Ostrogradsky 定理

对于多项式 $P(x), Q(x)$，

例题 4.1 求 $\displaystyle\int \frac{1+x^4}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

解: 设 $y=\sqrt[4]{1-x^4}$，则有 $y^3\mathrm{d}y+x^3\mathrm{d}x=0$. 则:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+x^4}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x &= \int \frac{2x^4+y^4}{y^6}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{y^3\left(-2x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x\right)}{y^6} \\
&= \int \frac{y^2\mathrm{d}x-2xy\mathrm{d}y}{y^4} = \int \mathrm{d}\left(\frac{x}{y^2}\right) \\
&= \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}
\end{aligned}$$

例题 4.2 求 $\displaystyle\int \frac{x^4\mathrm{d}x}{(1+x^4)^3}$.

解:(By 虚调子) 我们可以利用含参构造解决：

例题 4.3 求 $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 设 $p=\sqrt[4]{x}, q=\sqrt[4]{1-x}, r=\sqrt[4]{1+x}$, 则有：

$$\frac{\mathrm{d}p}{q^3}=\frac{q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q}{q^4+p^4}=q^2\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right)$$

, 于是可以简化结构：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt[4]{x(1-x)^3}}{(1+x)^3}\mathrm{d}x &= \int \frac{4p^4q^3\mathrm{d}p}{r^{12}} \\
&= 4\int \frac{p^4q^4}{r^{12}}\frac{\mathrm{d}p}{q} \\
&= 4\int \frac{p^4q^8}{r^{12}}\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right) = 4\int \frac{b^4\mathrm{d}b}{(1+2b^4)^3}
\end{aligned}$$

其中 $b=\frac{p}{q}$，利用前一例题的结论即可。

第五章 不定积分之锁

如果能完成考试范围的计算题，大多数人就会失去了对不定积分的兴趣。一种声音是这样的：现在软件这么发达，何必手算那么多不定积分呢？

首先软件还不够发达，有些很简单的不定积分也是算不出来的，比如 $\displaystyle\int \frac{x-2}{\sqrt{e^x-x^2}}\mathrm{d}x$。然后实际是这样的，有些“无聊”的计算有时不是单纯加减乘除就可以的，需要考虑真正的本质，例如涉及高次多项式的不定积分初等表达。而技巧则是思考的浓缩，需要有足够的计算来证明有效。最后真正的计算题是很简单的，就算普普通通算一遍，对于熟练的积佬来说不会花太多时间，达不到浪费的意味，例如 $\int \sin^4 x\mathrm{d}x$。

还有一种声音是这样的：随便找一个自创的复杂函数，求导就可以出成一题不定积分，所以求不定积分没什么技巧/深度。

唔，如果你尝试一下的话，会发现所谓的“复杂函数”结构可能是非常简单的，放进软件里都是秒解。我个人觉得求不定积分相似于在一定的规则内破译一种密码，而不同规则下的密码也将有着不同的强度。哈！所以我将一些特别的不定积分称为“锁”。如何有效设置/破译密码是有一定意义的。

正如标题所言，这里讲解几种相对常见的锁。

5.1 三角函数混合的不定积分

这类中有常见的，也有不常见的。大致分为三类，一类是分部积分就能解决的，一部分类似下面要讲的双元锁，另一部分是待定系数。

5.1.1 反正切与 $1/(1+x^2)$

例题 5.1 求 $\displaystyle\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.

解: 设 $y=\sqrt{1+x^2}$，注意到：$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{y^2}=\arctan x$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{x\mathrm{d}x}{y^3}e^{\arctan x} \\
&= -\int \mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right)e^{\arctan x} = -\frac{e^{\arctan x}}{y}+\int \frac{\mathrm{d}x}{y^3}e^{\arctan x} \\
&= -\frac{e^{\arctan x}}{y}+\int \mathrm{d}\left(\frac{x}{y}\right)e^{\arctan x} \\
&= \frac{x-1}{y}e^{\arctan x}-\int \frac{x\mathrm{d}x}{y^3}e^{\arctan x} \\
&= \frac{x-1}{2\sqrt{1+x^2}}e^{\arctan x}
\end{aligned}$$

最后一步是与原积分混合。

5.1.2 $(x,1)\times(\sin x,\cos x)$

注意到恒等式：

$$2\left(x^2+1\right)=\begin{cases}(x\cos x-\sin x)^2+(x\sin x+\cos x)^2\\(x\sin x-\cos x)^2+(x\cos x+\sin x)^2\end{cases}\tag{5.1}$$

于是可以诱导出两对双元。

对于第一对，我们设

$$x\cos x-\sin x=m,x\sin x+\cos x=n\tag{5.2}$$

有单元微分关系：

$$\mathrm{d}m=-x\sin x\mathrm{d}x,\mathrm{d}n=x\cos x\mathrm{d}x\tag{5.3}$$

有多元微分关系：

$$m\mathrm{d}n-n\mathrm{d}m=x^2\mathrm{d}x\tag{5.4}$$

$$n\mathrm{d}(\sin x)-\sin x\mathrm{d}n=\cos^2 x\mathrm{d}x\tag{5.5}$$

$$m\mathrm{d}(\sin x)-\sin x\mathrm{d}m=(x-\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x\tag{5.6}$$

$$\cos x\mathrm{d}m-m\mathrm{d}(\cos x)=-\sin^2 x\mathrm{d}x\tag{5.7}$$

$$\cos x\mathrm{d}n-n\mathrm{d}(\cos x)=(x+\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x\tag{5.8}$$

来看一些例题吧。

例题 5.2 求 $\displaystyle\int\frac{x\left(x^2+x\tan x+1\right)}{(x\tan x-1)^2}\mathrm{d}x$

解:(By 风中鱼) 若置 $p=x\sin x-\cos x,q=x\sin x+\cos x$，则我们有：

$$q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q=2\,(x+\sin x\cos x)\,\mathrm{d}x\rightarrow\frac{x^2}{2}\,(q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q)=x^3+x^2\sin x\cos x\tag{5.9}$$

和

$$pq=x^2\sin^2 x-\cos^2 x\rightarrow xpq=x^3\sin^2 x-x\cos^2 x\tag{5.10}$$

于是：

$$\begin{aligned}\int\frac{x\cos x\left(x^2\cos x+x\sin x+\cos x\right)}{(x\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{\frac{x^2}{2}\,(q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q)-xpq\mathrm{d}x}{p^2}\\&=-\frac{qx^2}{2p}=\frac{x^2}{2}\frac{1+x\tan x}{1-x\tan x}\end{aligned}$$

5.2 双元锁

这种锁的特征在于，有两只对称的函数进行了融合，使得消除了相关项。具体我们从例子中来看看吧。

例题 5.3 求

$$\int \frac{(\sin x + 2x)\left[\left(x^2+1\right)\sin x - x(\cos x + 2)\right]}{(\cos x+2)^2\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}\mathrm{d}x \tag{5.11}$$

解：(By 虚调子) 若设 $p=\sin x+2x, q=x^2+1$，则原式可以适当化简：

$$\begin{aligned}
\int \frac{p\left(-qp''-q'p'/2\right)}{p'^2q^{3/2}}\mathrm{d}x &= -\int \frac{p\mathrm{d}\left(p'\right)}{p'^2q^{1/2}} - \int \frac{p\mathrm{d}q}{2p'q^{3/2}} \\
&= \frac{p}{p'\sqrt{q}} - \int \frac{\sqrt{q}\mathrm{d}p - \frac{p}{2\sqrt{q}}\mathrm{d}q}{p'q} - \int \frac{p\mathrm{d}q}{2p'q^{3/2}} \\
&= \frac{p}{p'\sqrt{q}} - \int \frac{\mathrm{d}p}{p'\sqrt{q}} \\
&= \frac{\sin x+2x}{(\cos x+2)\sqrt{x^2+1}} - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{\sin x+2x}{(\cos x+2)\sqrt{x^2+1}} - \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)
\end{aligned}$$

例题 5.4 求

$$\int \frac{(x+1)^2\sqrt{x+\ln x}+(3x+1)\ln x+3x^2+x}{\left(x\ln x+x^2\right)\sqrt{x+\ln x}+x^2\ln x+x^3}\mathrm{d}x \tag{5.12}$$

解：(By 虚调子) 不妨设 $p=\sqrt{x+\ln x}$，有 $2p\mathrm{d}p=\left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}
\int \frac{2p^2(x+1)x\mathrm{d}p+(3x+1)p^2\mathrm{d}x}{xp^3+x^2p^2} &= \int \frac{2px^2\mathrm{d}p+2px\mathrm{d}p+(3x+1)p\mathrm{d}x}{xp^2+x^2p} \\
&= \int \frac{2px\mathrm{d}(p+x)+\left(2px^2+2p^2x\right)\mathrm{d}p}{xp(x+p)} \\
&= 2\ln(x+p)+2\int \mathrm{d}p \\
&= 2\ln\left(x+\sqrt{x+\ln x}\right)+2\sqrt{x+\ln x}
\end{aligned}$$

例题 5.5 求 $\displaystyle\int \frac{\cosh x+x^2+1}{(x\sinh x-1)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x.$

解:(By 风中鱼) 若置 $p=x\sinh x-1, q=x+\sinh x$，则有 $p^2+q^2=\left(1+x^2\right)\cosh^2 x$，以及：

$$\begin{aligned}
q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q &= 1+\sinh^2 x+\cosh x\left(1+x^2\right) \\
&= \cosh x\left(\cosh x+1+x^2\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

于是：

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cosh x+x^2+1}{(x\sinh x-1)\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x &= \int \frac{q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q}{p\sqrt{p^2+q^2}} \\
&= \int \frac{q^2}{p\sqrt{p^2+q^2}}\mathrm{d}\left(\frac{p}{q}\right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}b}{b\sqrt{1+b^2}} = -\operatorname{arth}\sqrt{1+b^2} \\
&= -\operatorname{arth}\sqrt{1+\left(\frac{x\sinh x-1}{x+\sinh x}\right)^2}
\end{aligned}$$

注：下题具体思路也类似，留作读者习题。

命题 5.1. 王者百题 001

求

$$\int \frac{\cos(\sin x)+\cos^2 x}{1+\sin x\cdot\sin(\sin x)}\mathrm{d}x \tag{5.13}$$

♠

例题 5.6 (From 魏念辉) 求 $\displaystyle\int \frac{\sin x+\cosh(\cos x)}{\cos x\sinh(\cos x)+\cosh(\cos x)-\sin x}\mathrm{d}x$.

解：(By Mirion) 注意到恒等式：

$$[\cos x\sinh(\cos x)+\cosh(\cos x)]^2=\sin^2 x+[\sinh(\cos x)+\cos x\cosh(\cos x)]^2 \tag{5.14}$$

将分母“有理化”后，我们有：

$$\begin{aligned}
\int \ldots\mathrm{d}x &= \int \frac{[\sin x+\cosh(\cos x)][\sin x+\cosh(\cos x)+\cos x\sinh(\cos x)]}{[\sinh(\cos x)+\cos x\cosh(\cos x)]^2}\mathrm{d}x \\
&= \ldots \\
&= \frac{1+\sin x\cosh(\cos x)}{\sinh(\cos x)+\cos x\cosh(\cos x)}
\end{aligned}$$

例题 5.7 求 $\displaystyle\int \frac{\left[\left(2+\sqrt{3}\right)x+1\right]\sqrt{x^3-1}}{\left(x+2+\sqrt{3}\right)^3(x-1)\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 这里我们需要注意到恒等式：

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x^2+x+1\right)=\left(x^2-1\right)+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\left(x+2+\sqrt{3}\right)^2 \tag{5.15}$$

于是置双元：$p=\sqrt{\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{x^2+x+1}{\left(x+2+\sqrt{3}\right)^2}}, q=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x+2+\sqrt{3}}$，有

$$\mathrm{d}q=\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\left(x+2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{x^2-1}}{\left(x+2+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{\left(2+\sqrt{3}\right)x+1}{\left(x+2+\sqrt{3}\right)^2\sqrt{x^2-1}}$$

则：

$$\int \frac{\left[\left(2+\sqrt{3}\right)x+1\right]\sqrt{x^3-1}}{\left(x+2+\sqrt{3}\right)^3(x-1)\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x = \int \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}p\mathrm{d}q$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}pq + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\ln|p+q|$$

$$= \frac{\sqrt{(x^3-1)(x+1)}}{2\left(x+2+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$+ \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{2\sqrt{3}}}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2-1}+\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}(x^2+x+1)}}{x+2+\sqrt{3}}\right|$$

5.3 指数锁

锁在于，原本在分子分母均应出现的指数项合并于分母。

所以我们不妨称其为指数锁。对于指数锁有一个标准式：

$$\int \frac{P^m(aP+P')}{\left(be^{-nax}\pm P^n\right)^{\frac{m+1}{n}}}\mathrm{d}x \tag{5.16}$$

其中 P 是任意函数,a,b 是常数，上述形式都将会有初等表达。但值得一提的是，mma 等软件会遇上困难，解不出来。从而一些软件小子会认为是不可初等表达。

在进行变换：$t=e^{ax}P(x)$ 后，标准形式化简为**契比雪夫型**。

$$\int t^m\left(b\pm t^n\right)^{-\frac{m+1}{n}}\mathrm{d}t \tag{5.17}$$

然后套路地，令 $k=\dfrac{\sqrt[n]{b\pm t^n}}{t}$ 就可以化成普通有理积分了。

例题 5.8 求

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{e^x-x^2}}\mathrm{d}x \tag{5.18}$$

解：(By 虚调子) 若设 $t=xe^{-\frac{x}{2}}$，则：

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{e^x-x^2}}\mathrm{d}x = -2\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= -2\arcsin t$$

$$= -2\arcsin\left(xe^{-\frac{x}{2}}\right)$$

例题 5.9 求 $\displaystyle\int \frac{x(x+1)\,\mathrm{d}x}{\left(e^x+x+1\right)^2}$.

解:(By 风中鱼) 设 $y=e^x+x+1$，则有：$\mathrm{d}y=(y-x)\,\mathrm{d}x$，于是：

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,(x+1)\,\mathrm{d}x}{(e^x+x+1)^2} &= \int \frac{(x+1)\,(y\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)}{y^2} \\
&= \int \frac{x+1}{y}\mathrm{d}x + \int (x+1)\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{y}\right) \\
&= \int \frac{x+1}{y}\mathrm{d}x + \frac{x+1}{y} - \int \frac{\mathrm{d}x}{y} \\
&= \frac{x+1}{y} + \int \frac{y\mathrm{d}x-\mathrm{d}y}{y} \\
&= \frac{x+1}{e^x+x+1} + x - \ln\left(e^x+x+1\right)
\end{aligned}$$

例题 5.10 求 $\displaystyle\int \frac{x\,(x+1)^{n-1}\,e^x\mathrm{d}x}{(e^x+x+1)^{n+1}}$.

解:(By 鉨) 若设 $p=e^x+x+1, q=1+x$，则有：

$$q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q=\left[(x+1)\,(e^x+1)-(e^x+x+1)\right]\mathrm{d}x=xe^x\mathrm{d}x \tag{5.19}$$

于是：

$$\begin{aligned}
\int \frac{x\,(x+1)^{n-1}\,e^x\mathrm{d}x}{(e^x+x+1)^{n+1}} &= \int \frac{q^{n-1}}{p^{n-1}}\frac{q\mathrm{d}p-p\mathrm{d}q}{p^2} \\
&= -\int \left(\frac{q}{p}\right)^{n-1}\mathrm{d}\left(\frac{q}{p}\right) \\
&= -\frac{1}{n}\left(\frac{q}{p}\right)^{n}
\end{aligned}$$

5.4 周期的连续修正

第六章 对数混合与指对双元

从此章开始，我们将要远离最开始的初等积分的道路了。

6.1 多重对数函数的引入

对对数函数 $\ln x$ 的积分处理往往都是利用分部积分公式来处理。这是因为某种意义上还没有定义其“积分”的函数，而是定义了其“微分”的函数。于是初等范围内的表达依赖于用求导处理对数函数。

那么如果在不定积分"d 的两端" 都出现了对数函数，利用分部积分公式可能就失效了！例如

$$\int \ln x \mathrm{d}\left(\ln\left(x+1\right)\right) = \ln x \ln\left(1+x\right) - \int \ln\left(1+x\right) \mathrm{d}\left(\ln x\right)$$

如果碰巧两边的对数函数一样，

$$\int \ln x \mathrm{d}\left(\ln x\right) = \frac{1}{2}\ln^2 x$$

这样就有简单的初等表达了！这似乎和前面的双元积分有关系...

在双元积分里我们引入了反正切函数来表达，这里我们或许也可以试着引入一些函数。双元积分的核心在于 $x^2+y^2=c^2$. 而我们这里进行一些微调，$e^x+e^y=e^c$. 哦豁，那我们这里有 $e^x\mathrm{d}x=\pm e^y\mathrm{d}y$ 了，是熟悉的味道！

当然这里函数的定义是有很大随意性的，我们仍然遵循流行的符号减少麻烦。也就是说，定义**二重对数函数**：

$$\mathrm{Li}_2\left(x\right) = -\int_0^x \ln\left(1-x\right)\mathrm{d}\left(\ln x\right) \tag{6.1}$$

这么定义有一个显见的好处：

$$\mathrm{Li}_2\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^2} \tag{6.2}$$

函数的级数表达非常干净，另外这也是下标 2 的由来。

$$\mathrm{Li}_n\left(x\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k^n} = \int_0^x \frac{\mathrm{Li}_{n-1}\left(t\right)}{t}\mathrm{d}t \tag{6.3}$$

或者可以写成

$$\int \mathrm{Li}_{n-1}\left(\lambda e^x\right)\mathrm{d}x = \mathrm{Li}_n\left(\lambda e^x\right) \tag{6.4}$$

有了这个定义就能解决一系列的不定积分了。

除此之外还有一个小小的细节，$\mathrm{Li}_2\left(x\right)$ 在 $x>1$ 的时候不是纯实数，带有一个虚部。

$$\mathrm{Im}\mathrm{Li}_2\left(e^x\right) = -\pi x \quad \left(x>0\right) \tag{6.5}$$

除此之外，还有很多多重对数函数的恒等式以及恒等式蕴含的特殊值，在求定积分的时候有所体现。

6.2 简单的对数积分

那么我们开头那个积分如何算呢？

例题 6.1 求 $\int \frac{\ln(1+x)}{x} dx$

解: 这个只需在二重对数函数的定义里，做变换 $x \to -x$ 即可。

$$\int \frac{\ln(1+x)}{x} dx = -\mathrm{Li}_2(-x) \tag{6.6}$$

另外我们不难总结出下面的公式：

定理 6.1. 指对双元积分公式

对于指对双元 p, q，我们有：

$$\int p\mathrm{d}q = \begin{cases} \ln(e^{qc}) - \mathrm{Li}_2(e^{q-c}) & if\ e^p + e^q = e^c \\ \ln(e^{qc}) - \mathrm{Li}_2(-e^{q-c}) & if\ e^p = e^c + e^q \\ \ln(-e^{qc}) - \mathrm{Li}_2(e^{q-c}) & if\ e^p + e^c = e^q \end{cases} \tag{6.7}$$

我们需要注意第三种情况引入了虚数，这其实不矛盾，因为和后面 Li 函数的虚部抵消了。除此之外也可以对第二种情况使用分部积分公式得到另外一个形式的结果，这里讲究一致性就不写出来了。

细致的读者在上面的验算过程中可以得到一个相关的经典恒等式：

命题 6.1. Li2 恒等式 1

若 $e^p + e^q = 1$，

$$\mathrm{Li}_2(e^p) + \mathrm{Li}_2(e^q) + pq = \mathrm{Li}_2(1) = \frac{\pi^2}{6} \tag{6.8}$$

例题 6.2 求 $\int \frac{\ln(1-x^2)}{1+x} dx$

解: 利用之前的公式即可。设 $s = \ln(1-x), t = \ln(1+x)$，则有 $e^s + e^t = e^{\ln 2}$ 于是

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(1-x^2)}{1+x} dx &= \int (s+t)\, dt \\ &= t\ln 2 - \mathrm{Li}_2\left(e^{t-\ln 2}\right) + \frac{1}{2}t^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln^2(1+x) + \ln 2\ln(1+x) - \mathrm{Li}_2\left(\frac{1+x}{2}\right) \end{aligned}$$

例题 6.3 求 **(From 苹果糖)** $\int \frac{x^4 dx}{(e^x-1)^2}$.

解:(By 虚调子) 若设 $e^y = 1 - e^x$，先分部一次，

$$\int \frac{x^4 e^x \mathrm{d}x}{(e^x - 1)^2} = \frac{x^4}{1 - e^x} - 4\int \frac{x^3}{1 - e^x}\mathrm{d}x \tag{6.9}$$

我们可以转化为之前的指对双元型：

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^n \mathrm{d}x}{1 - e^x} &= \int \frac{x^n e^x \mathrm{d}x}{e^x e^y} = -\int \frac{x^n}{e^x}\mathrm{d}y \\
&= -\int x^n \mathrm{d}y - \int x^n \frac{e^y}{e^x}\mathrm{d}y \\
&= -\int x^n \mathrm{d}y + \int x^n \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

由引入的公式我们有

$$\int y\mathrm{d}x = -\mathrm{Li}_2\left(e^x\right) \tag{6.10}$$

于是：

$$\begin{aligned}
\int x^3 \mathrm{d}y &= x^3 y - 3\int x^2 y \mathrm{d}x \\
&= x^3 y + 3\int x^2 \mathrm{d}\left[\mathrm{Li}_2\left(e^x\right)\right] \\
&= x^3 y + 3x^2 \mathrm{Li}_2\left(e^x\right) - 6\int \mathrm{Li}_2\left(e^x\right) x\mathrm{d}x \\
&= x^3 y + 3x^2 \mathrm{Li}_2\left(e^x\right) - 6x\mathrm{Li}_3\left(e^x\right) + 6\int \mathrm{Li}_3\left(e^x\right)\mathrm{d}x \\
&= x^3 y + 3x^2 \mathrm{Li}_2\left(e^x\right) - 6x\mathrm{Li}_3\left(e^x\right) + 6\mathrm{Li}_4\left(e^x\right)
\end{aligned}$$

回代即有：

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 e^x \mathrm{d}x}{(e^x - 1)^2} &= \frac{x^4}{1 - e^x} + 4\left(\int x^3 \mathrm{d}y - \int x^3 \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{x^4}{1 - e^x} - x^4 + 4x^3 \ln\left|1 - e^x\right| \\
&\quad + 12x^2 \mathrm{Li}_2\left(e^x\right) - 24x\mathrm{Li}_3\left(e^x\right) + 24\mathrm{Li}_4\left(e^x\right)
\end{aligned}$$

例题 6.4 (From Mirion) 求 $\displaystyle\int \ln(\sin x)\ln(\cos x)\sin 4x\mathrm{d}x$.

解:(By 风中鱼) 注意到: $\sin 4x = \sin 2x \cdot 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \left(\sin^2 x\right)' \cdot 2\left(1 - 2\sin^2 x\right)$，于是我们置

$$p = \ln\left(\sin^2 x\right), q = \ln\left(\cos^2 x\right), e^p + e^q = 1$$

则: $\displaystyle\int \ln(\sin x)\ln(\cos x)\sin 4x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int pq\left(e^q - e^p\right)e^p\mathrm{d}p$, 这里我们可以考虑按阶数分

别求解：

$$
\begin{aligned}
I=\int pq\left(e^{q}+e^{p}\right)e^{p}\mathrm{d}p=\int pqe^{p}\mathrm{d}p=\int q\left[\mathrm{d}\left(pe^{p}\right)-e^{p}\mathrm{d}p\right]\\
=pqe^{p}-\int pe^{p}\mathrm{d}q-\int e^{p}q\mathrm{d}p\\
=pqe^{p}-\int p\left(1-e^{q}\right)\mathrm{d}q+\int qe^{q}\mathrm{d}q\\
=pqe^{p}-\int p\mathrm{d}q-e^{p}\left(p-1\right)+e^{q}\left(q-1\right)
\end{aligned}
$$

与另一个：

$$
\begin{aligned}
J&=\int pqe^{p}e^{p}\mathrm{d}p=\int q\frac{1}{4}\mathrm{d}\left[\left(2p+1\right)e^{2p}\right]\\
&=\frac{q}{4}\left(2p+1\right)e^{2p}-\frac{1}{4}\int\left(2p+1\right)\left(1-e^{q}\right)^{2}\mathrm{d}q\\
&=\frac{q}{4}\left(2p+1\right)e^{2p}-\frac{1}{2}\int p\mathrm{d}q-\frac{q}{4}-\frac{1}{2}\int\left(2p+1\right)e^{p}\mathrm{d}p-\frac{1}{8}\int\left(2p+1\right)\mathrm{d}\left(e^{2q}\right)\\
&=\frac{q}{4}\left(2p+1\right)e^{2p}-\frac{q}{4}-\frac{1}{2}e^{p}\left(2p-1\right)-\frac{1}{2}\int p\mathrm{d}q\\
&-\frac{1}{8}\left(2p+1\right)e^{2q}+\frac{1}{4}\left(1-2e^{p}+\frac{1}{2}e^{2p}\right)
\end{aligned}
$$

最后利用

$$
\int\ln\left(\sin x\right)\ln\left(\cos x\right)\sin 4x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(I-2J\right)
$$

回代即可。值得一提的是结果是初等的。

6.3 与 Li 函数相关的特殊函数

下面是一些可能为了使结果更简洁而出现的特殊函数，和 Li 函数有密不可分的关系。

6.3.1 Ti 函数

定义为

$$
\mathrm{Ti}_n\left(x\right)=\mathrm{Im}\mathrm{Li}_n\left(ix\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{k}x^{2k+1}}{\left(2k+1\right)^{n}} \tag{6.11}
$$

值得一提的是，

$$
\mathrm{Li}_n\left(ix\right)=\frac{1}{2^{n}}\mathrm{Li}_n\left(-x^{2}\right)+i\mathrm{Ti}_n\left(x\right) \tag{6.12}
$$

以及

$$
\mathrm{Ti}_2\left(x\right)=\int\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x,\mathrm{Ti}_n\left(x\right)=\int\frac{\mathrm{Ti}_{n-1}\left(x\right)}{x}\mathrm{d}x \tag{6.13}
$$

6.3.2 χ 函数

χ 函数和 Ti 函数的关系就好像反正切与反双曲正切函数的关系一样：

$$\chi_n(ix) = i\mathrm{Ti}_n(x), \mathrm{Ti}_n(ix) = i\chi_n(x) \tag{6.14}$$

不定积分的定义也就是

$$\chi_2(x) = \int \frac{1}{2x}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x \tag{6.15}$$

6.3.3 Cl 函数

定义为

$$\mathrm{Cl}_n(\theta) = \mathrm{ImLi}_n\left(e^{i\theta}\right) \tag{6.16}$$

不定积分的定义是，

$$\mathrm{Cl}_2(\theta) = -\int_0^\theta \ln\left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\theta \tag{6.17}$$

6.4 一些杂例

首先是一些简单定积分的不定积分结果：

命题 6.2. 指对碰上三角 1

$$\int \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \ln(1+x)\arctan x - \frac{1}{2}\mathrm{Ti}_2\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{\pi}{8}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{1}{4}\mathrm{Ti}_2\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Ti}_2(x) \tag{6.18}$$

取相反数可以得到关于 $\ln(1-x)$ 的结果。

证明 略

命题 6.3. 指对碰上三角 2

$$\int \frac{x\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\mathrm{Li}_2(-x^2) + \frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(-x) + \frac{1}{8}\ln^2(1+x^2) \tag{6.19}$$

证明 略

下面一般是用来钓鱼的题，不过在引入多重对数函数后还是可以解的。

例题 6.5 求

$$\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x \tag{6.20}$$

解：(By 虚调子) 先换元 $x=\sin t$, 则

$$\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x=\int \frac{\ln(1+\tan t)}{\tan t}\mathrm{d}t+\int \frac{\ln(\cos t)}{\tan t}\mathrm{d}t \tag{6.21}$$

分别求解

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(1+\tan t)}{\tan t}\mathrm{d}t&=\int \frac{\ln(1+u)}{u\left(1+u^2\right)}\mathrm{d}u\\(u=\tan t)&=\int \frac{\ln(1+u)}{u}\mathrm{d}u-\int \frac{u\ln(1+u)}{1+u^2}\mathrm{d}u\\&=-\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(-u)-\frac{1}{8}\mathrm{Li}_2\left(-u^2\right)-\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(\frac{-2u}{1+u^2}\right)-\frac{1}{8}\ln^2\left(1+u^2\right)\\\int \frac{\ln(\cos t)}{\tan t}\mathrm{d}t&=\int \frac{v\ln v}{1-v^2}\mathrm{d}v\\(v=\cos t)&=\frac{1}{4}\int \frac{\ln\left(v^2\right)}{1-v^2}\mathrm{d}\left(v^2\right)\\&=\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(1-v^2\right)\end{aligned}$$

然后再回代即可

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)}{x}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2(-\tan t)-\frac{1}{8}\mathrm{Li}_2\left(-\tan^2 t\right)-\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2(-\sin 2t)\\&-\frac{1}{2}\ln^2(\cos t)+\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(\sin^2 t\right)\\&=\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(x^2\right)-\frac{1}{2}\mathrm{Li}_2\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)-\frac{1}{8}\mathrm{Li}_2\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)\\&-\frac{1}{4}\mathrm{Li}_2\left(-2x\sqrt{1-x^2}\right)-\frac{1}{8}\ln^2\left(1-x^2\right)\end{aligned}$$

第七章 椭圆函数与三/四元积分法

7.1 椭圆函数简介

椭圆函数算是一类很常见的特殊函数了，在不定积分中还是有存在感的。一般定义如下：

第一类不完全椭圆积分：

$$F\left(x;k\right)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}}\tag{7.1}$$

第二类不完全椭圆积分：

$$E\left(x;k\right)=\int_0^x\sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}}\mathrm{d}x\tag{7.2}$$

第三类不完全椭圆积分：

$$\pi\left(x;n,k\right)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{\left(1-nx^2\right)\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-k^2x^2\right)}}\tag{7.3}$$

除此之外还有其他的定义，这里我们只关注这种和双元密切相关的形式。

这里我们用三元的语言重新写一下，若 $A=\sqrt{a^2-x^2},B=\sqrt{b^2-x^2},C=\sqrt{c^2-x^2}$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{AB}=\frac{1}{b}F\left(\frac{x}{a};\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{a}F\left(\frac{x}{b};\frac{b}{a}\right)\tag{7.4}$$

$$\int\frac{A\mathrm{d}x}{B}=aE\left(\frac{x}{b};\frac{b}{a}\right)\tag{7.5}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{ABC^2}=\frac{1}{bc^2}\pi\left(\frac{x}{a};\frac{a^2}{c^2},\frac{a}{b}\right)=\frac{1}{ac^2}\pi\left(\frac{x}{b};\frac{b^2}{c^2},\frac{b}{a}\right)\tag{7.6}$$

不过个人认为符号是有瑕疵的。首先限制了 A,B,C 对 x 只能成实圆关系。然后 F 函数并不独立，对于同一函数有相当多的等价表达。唔... 差不多就是这样吧，多的嘛不谈。

7.2 椭圆函数的三元基本形式

本章介绍几种常见的三元形式。首先三元是继承之前的双元模式，双元中区分不同符号的思路是，虚圆和实圆关系。但是这里，我们将不止两种。

若考虑 $\int\frac{p}{qr}\cdot q\mathrm{d}q$(其中字母都互为双元),此时我们可以称之为三元。如果类似 $\int\frac{p\mathrm{d}q}{qr}$ 这种，我们会发现可以退化为双元解决 (如何操作？见后)。而前者是无法退化的，所以那是我们将要讨论的 (货真价实的) 三元！

后者可以称之为伪三元，前面的双元例题中我们其实也遇到过很多次了。下文中的三元将默认指的是前者这种无法退化的情形。

那么如何更准确的判定呢?

定理 7.1. 三元判定定理

对于形如 $\int p^a q^b r^{c-1}\mathrm{d}r$ 的三元积分，当且仅当 $a+b+c$ 是偶数时可以退化为双元积分。

证明 若为偶数，不妨设 $Ap^2+B=Cq^2+D=r^2$，那么我们有

$$\frac{ADp^2-BCq^2}{D-B}=r^2 \tag{7.7}$$

这意味着：$\sqrt{\left|\frac{AD}{D-B}\right|}\frac{p}{r},\sqrt{\left|\frac{BC}{D-B}\right|}\frac{q}{r}$ 构成了双元。如果我们带入积分：

$$\begin{aligned}\int p^a q^b r^{c-1}\mathrm{d}r&=\int p^a q^{b+3} r^{c-1}\frac{\mathrm{d}r}{q^3}\\&\sim\int\left(\frac{p}{r}\right)^a\left(\frac{q}{r}\right)^{b+3}r^{c-a-b-4}\mathrm{d}\left(\frac{r}{q}\right)\\&=\int\left(\frac{p}{r}\right)^a\left(\frac{q}{r}\right)^{b+3}\left[\begin{array}{c}\frac{AD}{D-B}\left(\frac{p}{r}\right)^2\\+\frac{BC}{D-B}\left(\frac{q}{r}\right)^2\end{array}\right]^{\frac{c-a-b-4}{2}}\mathrm{d}\left(\frac{r}{q}\right)\end{aligned}$$

便成为了一个双元积分。目的已经达到。

所以我们更关注那些奇次型，其中奇次型中最简单的也就是-1 次和 1 次。如你所见，第一类、第二类椭圆积分恰好分别就是-1 次与 1 次，前人还是有所考虑的。

对比双元中的 2 次与 0 次：$\int y\mathrm{d}x,\int\frac{\mathrm{d}x}{y}$，他们之间存在一定关系：2 次可以提取出 0 次。见前文的一个结论。事实上，我们这里第一类也是可以转化为第二类椭圆积分的 (如何转化？)。

例题 7.1 求 $\int\sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$

解: 若置 $y=\sqrt{b^2-x^2},z=\sqrt{a^2+x^2}$，这是最简单的三元情形。我们有很多条路来走：(一)

$$\begin{aligned}\int\sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}}\mathrm{d}x&=\int\frac{y\mathrm{d}x}{z}=\int\frac{xy\mathrm{d}x}{xz}=-\int\frac{y^2\mathrm{d}y}{xz}\\&=\int\frac{\left(a^2+b^2\right)x^2-b^2z^2}{a^2xz}\mathrm{d}y\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2}\int\frac{x\mathrm{d}y}{z}-\frac{b^2}{a^2}\int\frac{z\mathrm{d}y}{x}\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2}\int\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{\sqrt{a^2+b^2-y^2}}\mathrm{d}y-\ldots\\&=\frac{a^2+b^2}{a^2}bE\left(\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)-\frac{b^2}{a^2}\sqrt{a^2+b^2}E\left(\frac{z}{b};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\end{aligned}$$

(二)

$$
\begin{aligned}
\int\sqrt{\frac{b^2-x^2}{a^2+x^2}}\mathrm{d}x &= \int\frac{y\mathrm{d}x}{z} = -\int\frac{y^2\mathrm{d}y}{xz} \\
&= \int\frac{z^2-\left(a^2+b^2\right)}{xz}\mathrm{d}y \\
&= \int\frac{z\mathrm{d}y}{x} - \left(a^2+b^2\right)\int\frac{\mathrm{d}y}{xz} \\
&= bE\left(\frac{y}{\sqrt{a^2+b^2}};\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right) - \frac{\left(a^2+b^2\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}F\left(\frac{y}{b};\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)
\end{aligned}
$$

综上我们可以看出:

结论 第一类椭圆积分可以向第二类转化:

$$
\begin{aligned}
\int\frac{\mathrm{d}x}{AB} = \int\frac{A^2-B^2\mathrm{d}x}{AB\left(b^2-a^2\right)} &= \frac{1}{a}F\left(\frac{x}{b};\frac{b}{a}\right) \\
&= \frac{1}{b^2-a^2}\left[aE\left(\frac{x}{b};\frac{b}{a}\right) - bE\left(\frac{x}{a};\frac{a}{b}\right)\right]
\end{aligned}
$$

而且若将下限均取为 0，两者相差的常数则为 0. 如果使用流行的符号就是:

$$
\left(\lambda^2-1\right)F\left(x;\lambda\right) = E\left(x;\lambda\right) - \lambda E\left(\lambda x;\frac{1}{\lambda}\right) \tag{7.8}
$$

接下来讨论符号的问题。

如果把 $A=\sqrt{a^2-x^2}, B=\sqrt{b^2-x^2}, x$ 三元的符号简写为 $-,-,+$，**符号相反的两项成实圆，相同的两项成虚圆**。那么上面的例题显示，$-,+,+$ 可以分解成几个 $-,-,+$。唔这种分解完全是因为只有 $-,-,+$ 才有配套的符号表示。

哦豁，那我们重新建一套符号吧。先别急!

再看看，如果对于 $\int\sqrt{\frac{a^2+x^2}{b^2-x^2}}\mathrm{d}x$, 我们可以利用一个简单的双元变换:

$$
\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{b^2-x^2}} = -\frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{b^2-x^2}\right)}{x}
$$

，使得 $+,+,-$ 可以变换为 $+,-,+$，这对于符号的定义来说，等价于 $-,+,-$。

7.3 椭圆函数的四元基本形式

这里介绍几种常见的四元形式。

7.3.1 0 阶

7.3.2 2 阶

7.4 与高次双元的关系

第八章 伪椭圆不定积分与多项式锁

本章的结果是相当有趣的，不过难度要比之前的高出不少，读者谨慎食用。

所谓伪椭圆积分 (pseudo-elliptic integral)，是指常见的积分软件只能输出椭圆函数形式的解，而实质上应该是具备初等解的。Rubi 库中的公式能解决其中一部分 (Rubi 库里有一系列求解不定积分的法则，用于机器的快速积分，与常见积分计算的 Risch 算法有一定区别, 具体自行搜索):

定理 8.1. Rubi 库里的一个公式

若 $71c^2+100ae=0$，或者 $1152c^3-125b^2e=0$，则令

$$
\begin{aligned}
P(x) = {} & \frac{1}{320}\left(33b^2c+6ac^2+40a^2e\right)-\frac{22}{5}acex^2+\frac{22}{15}bcex^3 \\
& +\frac{1}{4}e\left(5c^2+4ae\right)x^4+\frac{4}{3}be^2x^5+2ce^2x^6+e^3x^8
\end{aligned}
$$

于是：

$$
\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx+cx^2+ex^4}} = \frac{1}{8\sqrt{e}}\ln\left[P(x)+\frac{P'(x)}{8\sqrt{ex}}\sqrt{a+bx+cx^2+ex^4}\right] \tag{8.1}
$$

♡

证明对右边求导即可，但作用是有限的。下面将说明这个式子如何得到。啊哈，我说这是看出来的你信吗？(笑

8.1 伪椭圆积分的标准式

8.2 莫比乌斯变换