§3.5 多维随机变量函数的期望、方差及其性质

一、二维随机变量函数的期望

二、数学期望的性质

三、方差的性质

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} x_k\ p_k & X\text{是离散型r.v.}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} x\ \ f(x)dx & X\text{是连续型r.v.}\end{cases}$$

$$E[g(X)]=\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)\ p_k & X\text{是离散型r.v.}\\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f(x)dx & X\text{是连续型r.v.}\end{cases}$$

$$D(X)=E(X-EX)^2=E(X^2)-(EX)^2$$

一、二维随机变量函数的期望（定理3.5.1）

(1) 设 X,Y 为离散型随机变量, $g(x,y)$ 为二元函数,则

$$E[g(X,Y)]=\sum_{i}\sum_{j}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

其中 (X,Y) 的联合概率分布为 p_{ij}.

(2) 设 X,Y 为连续型随机变量, $g(x,y)$ 为二元函数,则

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

其中 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$.

例1 设 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	0	1	
0	0.3	0.4	
1	0.2	0.1	

求: $E(X)$, $E(Y)$, $E(X-2Y)$, $E(3XY)$.

例2 设随机变量（X，Y）的概率密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x, x>1\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求 $E(Y)$, $E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$.

解 $E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\int_{1}^{+\infty}dx\int_{1/x}^{x} y\dfrac{3}{2x^3y^2}dy=\dfrac{3}{4}$

$$E\left(\frac{1}{XY}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{xy}f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{1}^{+\infty}dx\int_{1/x}^{x}\frac{1}{xy}\cdot\frac{3}{2x^3y^2}dy=\frac{3}{5}$$

练习册P18

7. 二维随机变量(X,Y)的概率密度函数为：$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, 则$E(X+Y)=$________.

二、数学期望的性质（定理3.5.2）

1. 设 C 是常数, 则有 $E(C)=C$.

2. 设 X 是一个随机变量，a, b 是常数, 则有

$$E(aX+b)=aE(X)+b.$$

3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

推广: $E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+\cdots+E(X_n)$

4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

注3.5.1　反例

5. 设 a, b 是常数, 若 $a \le X \le b$，则有 $a \le E(X) \le b$.

说明　当r.v.的期望存在时，可利用期望的性质求r.v（函数）的期望。

注3.5.1　反例

随机变量X与Y的独立性只是使得等式$E(XY)=E(X)E(Y)$成立的一个充分条件，而非必要条件. **反例**: 设随机变量(X,Y)的分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1	
-1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
0	$1/8$	0	$1/8$	$1/4$
1	$1/8$	$1/8$	$1/8$	$3/8$
	$3/8$	$1/4$	$3/8$	

由于

$$P(X=-1,Y=-1)=\frac{1}{8}\neq\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=P(X=-1)P(Y=-1),$$

因此, 随机变量X与Y不相互独立. 但显然有$E(X)=E(Y)=0$及$E(XY)=0$, 即等式$E(XY)=E(X)E(Y)$成立.

三、方差的性质（定理3.5.3）

(1) 设 C 是常数, 则有 $D(C)=0.$

证明 $D(C)=E(C^2)-[E(C)]^2=C^2-C^2=0.$

(2) 设 X 是一个随机变量, a, b 是常数, 则有

$$D(aX+b)=a^2D(X).$$

证明 $D(aX+b)=E[aX+b-E(aX+b)]^2$

$=E[aX+b-aE(X)-b]^2=a^2E[X-E(X)]^2$

$=a^2D(X).$

(3) 设 X, Y 相互独立, $D(X)$, $D(Y)$ 存在, 则

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$$

证明 $D(X \pm Y) = E[(X \pm Y) - E(X \pm Y)]^2$

$$= E[(X - EX) \pm (Y - EY)]^2$$

$$= E(X - EX)^2 + E(Y - EY)^2 \pm 2E\left[(X - EX)(Y - EY)\right]$$

$$\overset{\text{独立}}{=} D(X) + D(Y) \pm 2E(X - EX) \cdot E(Y - EY)$$

$$= D(X) + D(Y)$$

推广　若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,则有

$$D(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n).$$

(4) $D(X) = 0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 C,即 $P\{X = C\} = 1.$

(5) 对任意常数C，$E(X - C)^2 \geq D(X).$

表明当$C = E(X)$时，$E(X - C)^2$取到最小值$D(X).$

注：

$$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$$

设 X,Y 相互独立,

$$D(aX+bY+c)=a^2D(X)+b^2D(Y)$$

例如：设 X,Y 相互独立，$E(X)=1, E(Y)=-1$

$D(X)=1,\quad D(Y)=2,$

$$E(2X-3Y-5)=2E(X)-3E(Y)-5$$

$$=2\times1-3\times(-1)-5=0$$

$$D(2X-3Y-5)=2^2D(X)+(-3)^2D(Y)$$

$$=4\times1+9\times2=22$$

例3.5.4 二项分布

引入计数随机变量　　　　其中 $P(A)=p$

$$X_i=\begin{cases}1 & \text{第}i\text{次试验中事件}A\text{发生}\\ 0 & \text{第}i\text{次试验中事件}A\text{不发生}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n$$

则 X_i 服从 $(0-1)$ 分布，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立

$$E(X_i)=p,\ D(X_i)=pq$$

$$X=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim b(n,p)\ ,E(X)=E(X_1+X_2+\cdots+X_n)=np$$

$$D(X)=D(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

$$=D(X_1)+D(X_2)+\cdots+D(X_n)=npq$$

结论

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, n,$ 且它们相互独立

则$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i + b \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i + b, \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2)$（$C_i$不全为零）

$$E(C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n) = C_1E(X_1) + C_2E(X_2) + \cdots + C_nE(X_n)$$

$$= C_1\mu_1 + C_2\mu_2 + \cdots + C_n\mu_n = \sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i$$

$$D(C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n) = C_1^2D(X_1) + C_2^2D(X_2) + \cdots + C_n^2D(X_n)$$

$$= C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \cdots + C_n^2\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^{n} C_i^2\sigma_i^2$$

结论 若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, n,$ 且它们相互独立

则$\sum_{i=1}^{n} C_i X_i + b \sim N(\sum_{i=1}^{n} C_i \mu_i + b\,,\ \sum_{i=1}^{n} C_i^2 \sigma_i^2)$（$C_i$不全为零）

例3.5.3 $X \sim N(-1, 5), Y \sim N(0, 4)$，且X，Y相互独立

求:(1) $U = 2X + Y - 1, V = Y - X$ 的分布;

(2) $P(Y > X + 1)$, $P(X + Y \le 2)$.

练习册P18

6. 设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$, 则$D(X+Y)=$____________,

$D(XY)=$____________, $P\{XY-Y<0\}=$____________.

结论： $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,

（1）X与Y的边缘密度函数是一元正态分布；

$$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\ Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$$

（2）X与Y相互独立的充要条件是$\rho=0$.