班级…………　学号…………　姓名…………

自测题一(向量代数与空间解析几何)

$\Leftrightarrow (\vec a+\vec b)\cdot(\vec a+\vec b)=(\vec a-\vec b)\cdot(\vec a-\vec b)$

$\Rightarrow \vec a\cdot\vec b=0$

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 已知 a,b 为非零向量,且 $|a+b|=|a-b|$,则必有(C).

A. $a-b=0$　　B. $a+b=0$　　C. $a\cdot b=0$　　D. $a\times b=0$

2. 设 a,b,c 为非零向量且 $(a\times b)\cdot c=2$,则 $[(a+b)\times(b+c)]\cdot(c+a)=$(A). 应用分配律

$(a\times b)\cdot c=(b\times c)\cdot a=(c\times a)\cdot b$

A. 4　　B. 2　　C. -2　　D. 0

3. 直线 $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$ 与平面 $2x+y-z+4=0$ 的夹角为(B).

$\sin\alpha=\frac{|\vec s\cdot\vec n|}{|\vec s||\vec n|}$

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{4}$　　D. $\frac{\pi}{2}$

4. 点 $(1,1,1)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影为(C).

垂线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}=t$

将 $\begin{cases}x=t+1\\y=2t+1\\z=1-t\end{cases}$ 代入平面方程

A. $\left(-\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)$　　B. $(1,-1,0)$

C. $\left(\frac{1}{2},0,\frac{3}{2}\right)$　　D. $(0,1,-1)$

5. 方程 $x^2-y^2+z^2=1$ 表示的旋转曲面以及其旋转轴分别为(C).

A. 单叶双曲面、x 轴　　B. 双叶双曲面、x 轴

C. 单叶双曲面、y 轴　　D. 双叶双曲面、y 轴

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 过点 $M(1,2,-1)$ 且与直线 $\begin{cases}x=-t+2,\\y=3t-4,\\z=t-1\end{cases}$ 垂直的平面方程是 $-(x-1)+3(y-2)+(z+1)=0$ 或 $x-3y-z+4=0$

$\vec s=(-1,3,1)$

$\vec n=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\6&-3&2\\4&-1&2\end{vmatrix}=(-4,-4,6)$

2. 设一平面过原点及点 $(6,-3,2)$,且与平面 $4x-y+2z=8$ 垂直,则此平面方程是 $2x+2y-3z=0$

3. 曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 可以由曲线 $\begin{cases}z=2-x\\y=0\end{cases}(x\geq0)$ 或 $\begin{cases}z=2-y\\x=0\end{cases}(y\geq0)$ 绕 z 轴旋转一周得到.

4. 曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\z=x^2\end{cases}$ 在 yOz 平面上的投影为 $\begin{cases}z+y^2=1\\x=0\end{cases}$. $(-1\leq y\leq1)$

5. 点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases}x+y-z+1=0,\\2x-y+z-4=0\end{cases}$ 的距离为 $\frac{3\sqrt2}{2}$ 或 $\frac{3}{\sqrt2}$

三、解下列各题(每小题 10 分,共 40 分)

1. 求直线 $\begin{cases}x+y+z+1=0,\\2x-y+3z+2=0\end{cases}$ 的对称式方程和参数式方程.

$\vec s=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\1&1&1\\2&-1&3\end{vmatrix}=(4,-1,-3)$

令 $z=0$,得直线过点 $(-1,0,0)$

则对称式方程:

$\frac{x+1}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-3}$

参数式方程: $\begin{cases}x=4t-1\\y=-t\\z=-3t\end{cases}$

2. 化曲线的一般方程 $\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2},\\(x-1)^2+y^2=1\end{cases}$ 为参数方程.

令 $x-1=\cos t$　$y=\sin t$,$t\in[0,2\pi]$

则 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

$=\sqrt{2-2\cos t}$

$=2\sin\frac{t}{2}$

参数式方程为: $\begin{cases}x=1+\cos t\\y=\sin t\\z=2\sin\frac{t}{2}\end{cases}$ $0\leq t\leq2\pi$

3. 设一向量与 x 轴、y 轴的夹角相等,而与 z 轴所成的角是它们的两倍,求该向量的单位向量.

设该单位向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$,则 $\alpha=\beta$,$\gamma=2\alpha$

$\begin{cases}0\leq\alpha\leq\pi\\0\leq2\alpha\leq\pi\end{cases}\Rightarrow 0\leq\alpha\leq\frac{\pi}{2}$

$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

即 $2\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$

即 $\cos2\alpha(1+\cos2\alpha)=0$

$\therefore \cos2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}$　故该单位向量为 $\left(\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2},0\right)$

或 $1+\cos2\alpha=0 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{2}$　或 $(0,0,-1)$

4. 求锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与柱面 $z^2=2x$ 所围立体在三个坐标面上的投影.

在xOy面上，消去z得 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$

在yOz面上，消去x得: $\begin{cases}\left(\frac{z^2}{2}-1\right)^2+y^2\le 1\\ x=0\end{cases}$ $(z\geq 0)$

在zOx面上，消去y得: $\begin{cases}x\le z\le\sqrt{2x}\\ y=0\end{cases}$ $(0\le x\le 2)$

四、解下列各题(每题10分,共30分)

1. 试求点 $M_1(3,1,-4)$ 关于直线 $L:\begin{cases}x-y-4z+9=0,\\ 2x+y-2z=0\end{cases}$ 的对称点 M_2 的坐标.

L的方向向量 $\vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -4\\ 2 & 1 & -2\end{vmatrix}=(6,-6,3)=3(2,-2,1)$

L上有一点 $(-3,6,0)$

则L的参数方程为: $\begin{cases}x=2t-3\\ y=-2t+6\\ z=t\end{cases}$

设L上的点N使得 $\overrightarrow{M_1N}\perp L$.

$\overrightarrow{M_1N}=(2t-6,-2t+5,t+4)$

$\therefore \overrightarrow{M_1N}\cdot\vec{s}=0$ 即 $2(2t-6)-2(-2t+5)+(t+4)=0$

$t=2$

则 $\overrightarrow{M_1M_2}=2\overrightarrow{M_1N}=2(-2,1,6)=(-4,2,12)$

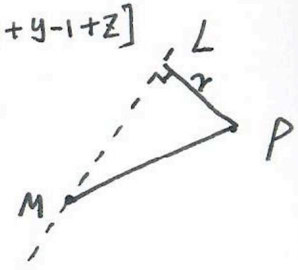
M_2 的坐标为 $(-1,3,8)$

2. 求以直线 $L:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$ 为对称轴，半径为2的圆柱面方程.

直线L的方向向量 $\vec{s}=(2,1,1)$. 且过一点 $M(-2,1,0)$

设圆柱面上一点 $P(x,y,z)$，则 $\overrightarrow{MP}$ 在对称轴上的投影

$$Prj_L\overrightarrow{MP}=\frac{(x+2,y-1,z)\cdot(2,1,1)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt6}[2(x+2)+y-1+z]$$



根据 $\overrightarrow{MP}$ 及其在L上的投影和圆柱面所构成的直角三角形. 有

$$(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{1}{6}(2x+y+z+3)^2+4$$

整理得:

$$2x^2+12x+5y^2-18y+5z^2-6z-4xy-4xz-2yz=3.$$

3. 已知两点 $A(1,0,0)$, $B(0,2,1)$，试在z轴上找一点C，使得 $\triangle ABC$ 的面积最小.

设 $C(0,0,z)$

则 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 0 & z\end{vmatrix}=(2z,z-1,2)$

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{4z^2+(z-1)^2+4}$

$=\frac{1}{2}\sqrt{5z^2-2z+5}$

故当 $z=\frac{1}{5}$，即C点为 $(0,0,\frac{1}{5})$ 时，

$\triangle ABC$ 面积最小.