§9.2 曲面积分（高斯公式）§10.1 常数项级数（概念和性质）

一、填空题（一）

2．设区域Ω由坐标面与$x+y+z=1$围成，Σ为Ω边界曲面的外侧，

则$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $\iiint\limits_{\Omega}(1+1+0)dv=2\cdot V(\Omega)=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

3．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ $\iiint\limits_{\Omega}dv=\frac{4}{3}\pi a^3$；

$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ $\iiint\limits_{\Omega}2x\,dv=0$ 奇函数；$\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ $\iiint\limits_{\Omega}3x^2dv=3\iiint\limits_{\Omega}z^2dv=3\int_{-a}^{a}z^2dz\iint\limits_{D_z}dxdy=3\int_{-a}^{a}z^2\cdot\pi(a^2-z^2)$ $=\frac{4\pi}{5}a^5$

4．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ $\oiint\limits_{\Sigma}x\,dydz=\frac{4\pi}{3}$.

5．设是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$的下侧，加盖 $\Sigma_1: z=1$ 向上．$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\,dydz+2y\,dzdx+3(z-1)\,dxdy$ $=\iiint\limits_{\Omega}(1+2+3)dv=6\times\frac{\pi}{3}$

则$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ $2\pi-0=2\pi$. $\iint\limits_{\Sigma_1}=0+0+0=0$

二、计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是$z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$的上侧.

设 Σ_1：$z=1$，$x^2+y^2\le 1$，取上侧，Σ_1与Σ^-围成几何体为Ω，则

$$\oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma^-}(2x+z)dydz+z\,dxdy=\iiint\limits_{\Omega}(2+1)dv=3\int_0^1dz\iint\limits_{D_z}dxdy=3\int_0^1\pi z\,dz=\frac{3\pi}{2}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(2x+z)dydz+z\,dxdy=\iint\limits_{D_{xy}}(2x+1)\times 0+\iint\limits_{D_{xy}}1\,dxdy=\pi$$

Σ_1面垂直于yOz面

$$\therefore\ -I+\pi=\frac{3\pi}{2},\quad I=-\frac{\pi}{2}$$

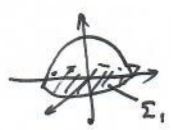
三、计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

$$I=\frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma}x\,dydz+y\,dzdx+z\,dxdy=\frac{1}{a^3}\iiint\limits_{\Omega}3\,dv=\frac{3}{a^3}\cdot\frac{4\pi a^3}{3}=4\pi$$

四、设Σ是$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧，计算曲面积分

1．$I=\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；2．$I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(1). 加盖 Σ_1：$z=0$，$x^2+y^2\le 4$，向下. 设Σ与Σ_1围成几何体Ω，则



$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} yz\,dz\,dx+2\,dx\,dy=\iiint\limits_{\Omega} z\,dV=\int_0^2 z\,dz\iint\limits_{D_z}dx\,dy=\int_0^2 z\,dz\cdot\pi(4-z^2)$$

$$=\pi\left(2z^2-\frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^2=\pi(8-4)=4\pi.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} yz\,dz\,dx+2\,dx\,dy=\underset{\Sigma_1与zOx面垂直}{0}+\left(-2\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy\right)=-2\pi\cdot 2^2=-8\pi$$

$\therefore\ I+(-8\pi)=4\pi$，$I=12\pi$

(2). $\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz=0+0+2\iiint\limits_{\Omega}z\,dxdydz+\cdots$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy=0+0-0=0$

$\therefore$ ~~I~~ $\therefore\ I+0=8\pi$，$I=8\pi$

五、设是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，利用高斯公式计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^4+y^4+z^4\right)\mathrm{d}S$.

$$\vec{n}=(2x,2y,2z),\ \vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$$

$$\therefore I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^4\cdot\frac{dydz}{\cos\gamma}+y^4\cdot\frac{dzdx}{\cos\beta}+z^4\cdot\frac{dxdy}{\cos\gamma}\right)$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma} ax^3dydz+ay^3dzdx+az^3dxdy$$

$$=3a\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$$

$$=9a\iiint\limits_{\Omega}z^2\,dxdydz$$

$$\overset{习-(3)}{=\!=}9a\cdot\frac{4\pi}{15}a^5=\frac{12\pi}{5}a^6$$

六、填空题（二）

1．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}\left(u_n{}^2-2u_n-3\right)=$ $\underline{0-0-3}=\underline{-3}$

2．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，则 $\lim_{n\to\infty}(S_{n+1}+S_{n-1}-2S_n)=$ $\underline{0-0}=\underline{0}$

$=\lim_{n\to\infty} u_{n+1}-u_n$

3．级数 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$ 的和是 $\underline{1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}$．

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

4．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和是3，则级数 $\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ 的和是 $\underline{3-u_1-u_2}$．

5．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ 的和是 2，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2}$ 的和是 $\underline{\quad 1 \quad}$．

6．设 x 是一个任意给定的数，当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的和是 $\underline{\frac{x}{1-x}}$． $\left(=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)$

7．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ 的和等于 $\underline{1+1=2}$

$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)=1$

七、判断下列级数的敛散性

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$．

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

∴ 收敛．

2．$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$．

$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\therefore S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{i+2}+\sqrt{i+1}}-\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\to-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=-(\sqrt{2}-1)\quad(n\to\infty)$$

∴ 收敛．

八、判断下列级数的敛散性

1．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$．

$u_n=(-1)^{n-1} \nrightarrow 0$

$\therefore$ 发散

2．$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^n$．

$|q|=\frac{1}{5}<1$

$\therefore$ 收敛

3．$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$．

$|q|=\frac{3}{2}>1$

$\therefore$ 发散．

4．$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.01}$．

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.01}=1\neq 0$

$\therefore$ 发散

5．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n+e^n}{6^n}$．

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{6}\right)^n$ 收敛

$\therefore$ 原级数收敛．

6．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{2^n}$．

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ 收敛

$\therefore$ 原级数发散．

§10.1 常数项级数（续：正项级数和一般项级数）§10.2 幂级数（收敛域）

一.填空（填序号）

1.下列正项级数中收敛的是 ③④⑥⑨⑩.

①$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n-3}}$ ； ②$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+2}$ ； ③$\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n-3}}$ ； ④$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}$ ； ⑤$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3}}$；

⑥$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$； ⑦$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$； ⑧$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^2}$； ⑨$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ ⑩$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}\sin^2\frac{2}{n}$

2.下列级数中绝对收敛的是 ②③⑥⑨⑩，条件收敛的是 ①⑦⑧，发散的是 ④⑤

①$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln n}$； ② $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n}{n^2}$； ③$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n\sqrt{n}}$； ④$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$ $u_n \not\to 0$ ⑤$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2n-1}$ $u_n \not\to 0$

⑥$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ ； ⑦$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$；⑧$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$；⑨$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n}{2^n}$； ⑩$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^4}{n!}$.

二、判断下列正项级数的敛散性

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{6^n}$ 收敛

$\sin\frac{\pi}{6^n} \sim \frac{\pi}{6^n}$. $(n\to\infty)$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{6^n}$ 收敛.

2．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{3^n}{n\cdot 2^n}}=\frac{3}{2}>1$$

∴ 发散

3．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n\cdot n!}{n^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{(n+1)^n}}{\frac{1}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{2}{e}<1$$

∴ 收敛.

4．$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n-1}$

$\left(\frac{n}{3n+1}\right)^{2n-1}$ ~~$\lim_{n\to\infty}$~~

$<\left(\frac{1}{3}\right)^{2n-1}$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{2n-1}}$ 收敛

∴原级数收敛.

三、.讨论下列级数是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$

$1-\cos\frac{\pi}{n} \sim \left(\frac{\pi}{n}\right)^2$ 而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{n^2}$ 收敛.

∴原级数绝对收敛.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 单调递减趋于零.

而 $\left|(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right|=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}>\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n+1}}$ 发散.

∴级数不绝对收敛，从而条件收敛

3. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!}}{\frac{2^{n^2}}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n+1}}{n+1}=\infty$$

∴ $u_n \not\to 0$ ∴原级数发散.

四、已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$都收敛，试证明$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$绝对收敛

$$|a_n b_n| \le \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n^2 + b_n^2)$ 收敛

从而 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 收敛.

五、设正项数列$\{a_n\}$单调~~减~~递，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，判断$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$的敛散性

由条件知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，且 $a \neq 0$.（否则，由莱布尼茨判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛）

$$\because \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{1+a_{n+1}}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)\cdot\left(\frac{1+a_n}{1+a_{n+1}}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{a_n - a_{n+1}}{1+a_{n+1}}\right)^n$$

~~当n充分大时 $a-\frac{a}{2} < a_n < a+\frac{3a}{2}$，即 $a_n <$~~

从而 $a_n \ge a$，$\frac{1}{1+a_n} \le \frac{1}{1+a}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a}\right)^n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$ 也收敛.

六、设级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\pi}}$是否收敛？如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

$$\left|(-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\pi}}\right| = |a_n|\cdot\frac{1}{\sqrt{n^2+\pi}} \le \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{n^2+\pi}\right)$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\pi}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\pi}}$ 绝对收敛.

七、填空题（二）

1．若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{x-3}{2}\right)^n$ 在 $x=0$ 处收敛，则在 $x=5$ 处 收敛 .（收敛，发散）

$\left|\frac{x-3}{2}\right| < \left|\frac{0-3}{2}\right|$ 时的x处都收敛

2．若 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 2$，则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$ 的收敛半径为 $\sqrt{2}$.

3．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$ 的收敛域 $[-1, 1]$.

4．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为3，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n+1}$ 的收敛区间是 $(-2, 4)$.

5．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(x-5)^n$ 的收敛域为 $[4, 6)$.

八、试确定下列各幂级数的收敛域

1．$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{3^n n}$.

$R=3$.

$x-3=-3$ 即 $x=0$ 时

级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛，

$x-3=3$ 时，成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$，发散

故收敛域为 $[0, 6)$

2．$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$.

$R=1$.

$x=-1$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$，收

$x=1$ 时 级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$，发

∴收敛域为 $[-1, 1)$

3．$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n^2}$.

$R=1$.

$|x-3| \le 1$ 时 收敛.

∴收敛域为

$[2, 4]$

4．$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{4^n n}$.

$R=\sqrt{4}=2$.

$|x-2|<2$ 时 收敛 （端点发

∴收敛域为

$(0, 4)$

§10.2 幂级数（续：和函数与展开式）

一.选择和填空

1. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n$在$(-\infty,+\infty)$的和函数是（ A ）.

（A）$e^{-\frac{x}{2}}$ （B）$e^{\frac{x}{2}}$ （C）$-e^{\frac{x}{2}}$ （D）$-e^{-\frac{x}{2}}$

2. 函数$\sin\frac{x}{2}$的麦克劳林展开式中x^3的系数为 $-\frac{1}{48}$.

二、求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n}$的和函数，并求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n n}$的和.

易见，收敛域为 $[-1,1)$.

令 $\frac{x}{3}=t$，$s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n}$，则 $s'(t)=\sum_{n=1}^{n}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$，$s(0)=0$.

$\therefore s(t)=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t)$. $\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n n}=-\ln(1-\frac{x}{3})$,

$x\in[-3,3)$

$\therefore -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n n}=\ln(1-\frac{-1}{3})=\ln\frac{4}{3}$.

三、求$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域及和函数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n+\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)'+x\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)'+x\left(\frac{1}{1-x}\right)'$$

$$=\frac{1}{(1-x)^2}-1+x\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=\frac{1+x}{(1-x)^2}-1,\quad x\in(-1,1).$$

四.求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}-2^n}{n}x^n$的和函数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n}$$

$$=\ln(1+x)+\ln(1-2x)$$

$$x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

五.求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2 2^{n-2}}{3^n}$的和

令 $s(x)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$，则此级数收敛域为 $(-1,1)$

$$s(x)=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}n(x^n)'=\frac{1}{6}\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^n\right)'$$

$$=\frac{1}{6}\left(x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)'$$

$$=\frac{1}{6}\left[x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'\right]'=\frac{1}{6}\left[x\left(\frac{1}{1-x}-1\right)'\right]'$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{x}{(1-x)^2}\right]'=\frac{1}{6}\cdot\frac{1+x}{(1-x)^3}$$

令 $x=\frac{2}{3}$，得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cdot2^{n-2}}{3^n}=s\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{15}{2}$

六、将函数$f(x)=\frac{x+5}{2x^2-x-6}$展开成$x$的幂级数，并求$f^{(n)}(0)$.

$$f(x)=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{2x+3}=\frac{1}{3+2x}+\frac{1}{2-x}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2x}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}}$$

$$x\in\left(-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n\cdot2^n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]x^n,$$

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\frac{(-1)^n\cdot2^n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}},\quad\therefore f^{(n)}(0)=\left[\frac{(-1)^n\cdot2^n}{3^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\right]\cdot n!$$

七、将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2}$ 展开成 $(x-2)$ 的幂级数.

$$f(x)=\frac{1}{[2+(x-2)]^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left[1+\left(\frac{x-2}{2}\right)\right]^2}$$

$$\underline{\underline{令\ \frac{x-2}{2}=t}}\quad \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1+t)^2}=-\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{1+t}\right)'$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right)'=-\frac{1}{4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n t^{n-1}$$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{x-2}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2^{n+1}}(x-2)^{n-1},\quad x\in(0,4)$$

八、将函数 $f(x)=\frac{2x-3}{(x-1)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

$$f(x)=\frac{2x-2-1}{(x-1)^2}=2\cdot\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(1-x)^2}$$

$$=-2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)'$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}(n+3)x^n,\quad x\in(-1,1)$$

九、已知 $f(x) = x\arctan x - \ln\sqrt{1+x^2}$

1．将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数；2．指出该幂级数的收敛域；3．求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(2n-1)\cdot 3^n}$ 的和.

(1) $f'(x) = \arctan x$, $\quad f''(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$,

$$\therefore\ f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\left[\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}dx\right] + f(0)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}x^{2n+2},\quad = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 2n}x^{2n}$$

(2) 此级数收敛域为 $[-1,1]$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n-1)\cdot 3^n} = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\cdot 2n}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}$$

$$= -2f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -2\cdot\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6} - \ln\frac{2}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= -\frac{\pi\sqrt{3}}{9} + 2\ln 2 - \ln 3.$$