第七章　假设检验

第一节 假设检验问题概述

第二节 单正态总体参数的假设检验

第一节　假设检验问题概述

一、假设检验的基本问题

二、假设检验的基本原理和思想

三、假设检验的相关概念

四、假设检验的一般步骤

一、假设检验的基本问题

在总体的分布函数完全未知或只知其形式、但不知其参数的情况下, 为了推断总体的某些性质, 提出某些关于总体的假设.

例如, 提出总体服从泊松分布的假设;

又如, 对于正态总体提出数学期望等于 μ_0 的假设等.

假设检验就是根据样本对所提出的假设作出判断: 是拒绝, 还是接受.

原假设或零假设（H_0）：事先对总体某方面的特征提出一个假设。

备择假设（H_1）：：在原假设被拒绝后可供选择的假设。通常备择假设与原假设是对立的。

若假设是针对总体分布中的未知参数提出的，则称之为参数检验；其他称之为非参数检验。

问题：如何利用样本值对一个具体的假设进行检验?

二、假设检验的基本原理和思想

基本原理： 实际推断原理："**一个小概率事件在一次试验中几乎是不可能发生的**"．

基本思想： 首先**假设"H_0为真"，** 然后进行统计推断，如果导致一个不合理的现象出现，即**导致一个小概率事件在一次试验中发生了**，这就表明事先假设"H_0为真"是错误的，应**拒绝H_0**。

关键： 构造小概率事件A，满足：

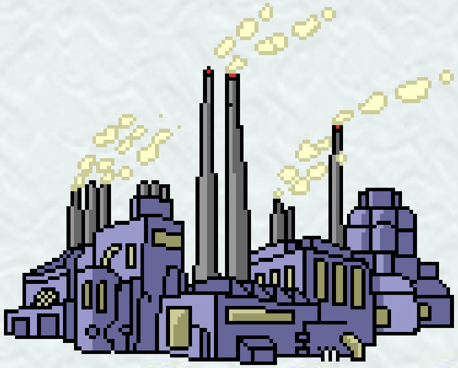
$$P\{A \mid H_0\text{为真}\} = \alpha\ (\text{很小})$$

例7.1.1 某车间用一台包装机包装白砂糖, 包得的袋装糖重是一个随机变量, 它服从正态分布. 当机器正常时, 其均值为0.5千克, 标准差为0.015千克. 某日开工后为检验包装机是否正常, 随机地抽取它所包装的糖9袋, 称得净重为(千克):

0.494 0.523 0.515 0.514 0.508 0.516

0.511 0.516 0.492, 长期实践表明标准差不变, 问机器这一天工作是否正常?

分析: 用 μ 和 σ 分别表示这一天袋装糖重总体 X 的均值和标准差,



由长期实践可知, 标准差较稳定, 设 $\sigma = 0.015$,

则 $\boxed{X \sim N(\mu,\ 0.015^2),\ \text{其中}\ \mu\ \text{未知.}}$

问题: 根据样本值判断 $\mu = 0.5$ 还是 $\mu \neq 0.5$.

提出两个对立假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 0.5 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \mu \neq \mu_0 .$$

再利用已知样本作出判断是接受 H_0 (认为机器工作是正常的) , 还是拒绝 H_0 (认为机器工作不正常的).

由于要检验的是关于总体均值的假设, 故可借助于样本均值来判断.

因为 $\overline{X}$ 是 μ 的无偏估计量,

所以若 H_0 为真, 则 $|\overline{X}-\mu_0|$ 不应太大,

当H_0为真时, $\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

衡量$|\overline{X}-\mu_0|$的大小可归结为衡量 $\dfrac{|\overline{X}-\mu_0|}{\sigma/\sqrt{n}}$ 的大小,

于是可以选定一个适当的正数k, 使得

$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq k\right\}=\alpha(\text{给定, 很小}),$$

由标准正态分布分位点的定义得 $k=u_{\alpha/2}$,

$\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq u_{\alpha/2}\right\}$是一个小概率事件，若根据样本观测值

得到$\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq u_{\alpha/2}$,则认为该小概率事件在一次试验中发生了,

从而拒绝H_0；若$\dfrac{\left|\overline{x}-\mu_0\right|}{\sigma/\sqrt{n}}<u_{\alpha/2}$时，则接受$H_0$.

假设检验过程如下:

在实例中若取定 $\alpha = 0.05$, 则 $k = u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96$,

又已知 $n = 9$, $\sigma = 0.015$, 由样本算得 $\bar{x} = 0.510$,

即有 $\left|\dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}\right| = \left|\dfrac{0.510\text{-}0.5}{0.015/\sqrt{9}}\right| = 2 > 1.96$,

于是拒绝假设H_0, 认为包装机工作不正常.

三、假设检验的一般步骤

1、提出原假设H_0，必要时写出备择假设H_1；

2、建立检验统计量（用来作检验的统计量）；同时在H_0成立的条件下确定检验统计量的分布。

3、确定检验的拒绝域；构造小概率事件，依事先给定的概率 α（又称为显著性水平，或检验水平，常取 0.05，0.01，0.1 等值），及检验统计量的分布，查表确定临界值，从而得到拒绝域。

4、根据样本数据计算检验统计量的值，若值落入拒绝域，则拒绝H_0；否则接受H_0。

四、两类错误

假设检验的依据是: 小概率事件在一次试验中很难发生, 但很难发生不等于不发生, 因而假设检验所作出的结论有可能是错误的. 这种错误有两类:

(1) 当原假设H_0为真, 观察值却落入拒绝域, 而作出了拒绝H_0的判断, 称做**第一类错误**, 又叫**弃真错误**, 犯第一类错误的概率是显著性水平α.

$$P\{\text{拒绝}H_0 \mid H_0\text{为真}\} = P\{\text{小概率事件}A \mid H_0\text{为真}\} = \alpha$$

(2) 当原假设 H_0 不真, 而观察值却落入接受域, 而作出了接受 H_0 的判断, 称做**第二类错误**, 又叫**取伪错误**,

犯第二类错误的概率记为

$$P\{\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 不真}\} = \beta$$

当样本容量 n 一定时, 若减少犯第一类错误的概率, 则犯第二类错误的概率往往增大.

若要使犯两类错误的概率都减小, 除非增加样本容量.

假设检验的两类错误

真实情况 (未知)	所作决策	
	接受 H_0	拒绝 H_0
H_0 为真	正确	犯第I类错误
H_0 不真	犯第II类错误	正确

只对犯第一类错误的概率加以控制, 而不考虑犯第二类错误的概率的检验, 称为**显著性检验**.

五. 双边假设检验和单边假设检验

形如$H_0:\mu=\mu_0$, $H_1:\mu\neq\mu_0$ 的假设检验称为**双边检验**.

形如 $H_0:\mu=\mu_0$ (或$\mu\le\mu_0$), $H_1:\mu>\mu_0$ 的假设检验称为右边检验.

形如 $H_0:\mu=\mu_0$ (或$\mu\ge\mu_0$) , $H_1:\mu<\mu_0$ 的假设检验称为左边检验.

右边检验与左边检验统称为**单边检验**.

第二节 单正态总体的参数检验

一、单个正态总体$N(\mu,\sigma^2)$均值μ的双边检验

$H_0:\mu=\mu_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\mu\neq\mu_0$ （μ_0为已知常数）

（一）σ^2已知：$\sigma^2=\sigma_0^2$（σ_0^2为已知常数）

（二）σ^2未知

(一). σ^2 已知

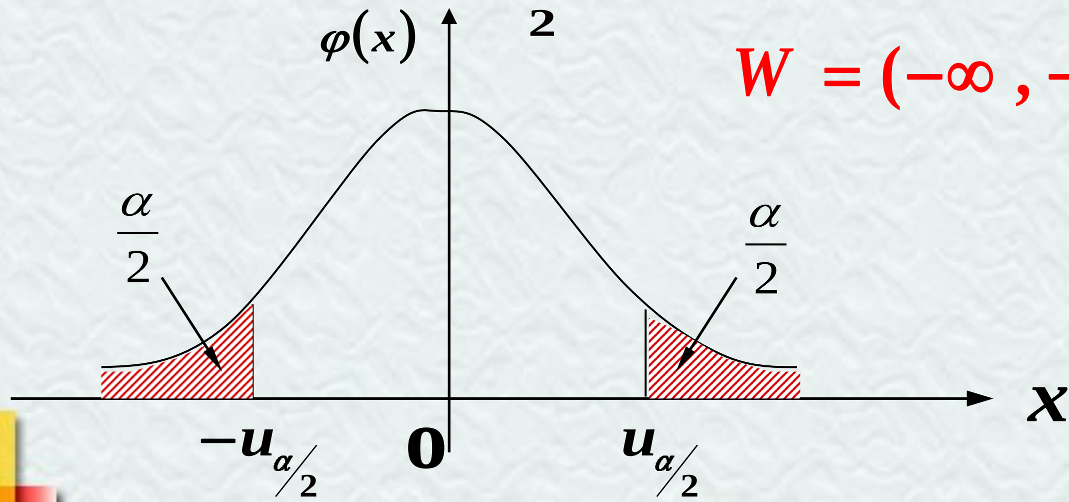
步骤：1、提出假设 $H_0: \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$

2、H$_0$成立时，选用检验统计量 $U = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

3、对于给定的显著性水平 α，由 $P\{|U| \geq u_{\frac{\alpha}{2}}\} = \alpha$

查表确定临界值 $u_{\frac{\alpha}{2}}$，由此得到拒绝域W：

$$W = (-\infty, -u_{\frac{\alpha}{2}}] \cup [u_{\frac{\alpha}{2}}, +\infty)$$



4、根据样本数据$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$计算出 U 的值 u。

若 $u \in W$ ，则拒绝 H_0，即认为总体的均值 μ 与 μ_0 之间有显著差异；

若 $u \overline{\in} W$ ，则接受 H_0，即认为总体的均值 μ 与 μ_0 之间无显著差异；

上述检验方法称为 **U检验法或Z检验法**。

补例1 某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的平均长度为10.5cm, 标准差是0.15cm, 今从一批产品中随机的抽取15段进行测量, 其结果如下:

10.4	10.6	10.1	10.4	10.5	10.3	10.3	10.2
10.9	10.6	10.8	10.5	10.7	10.2	10.7	

假定切割的长度服从正态分布, 且标准差没有变化, 试问该机工作是否正常? $(\alpha = 0.05)$

解 因为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma = 0.15$,

要检验假设

$H_0 : \mu = 10.5$, $H_1 : \mu \neq 10.5$,

选取$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \overset{H_0\text{成立}}{\sim} N(0,1)$

由$P\{|U|\geq u_{\frac{\alpha}{2}}\}=\alpha=0.05$　　查表得　$u_{0.025}=1.96,$

$n=15,\quad \overline{x}=10.48,\quad \alpha=0.05,$

$$u=\frac{\overline{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}=\frac{10.48-10.5}{0.15/\sqrt{15}}\approx-0.516\in(-1.96\ ,\ 1.96)$$

故接受H_0,认为该机工作正常.

(二). σ^2未知

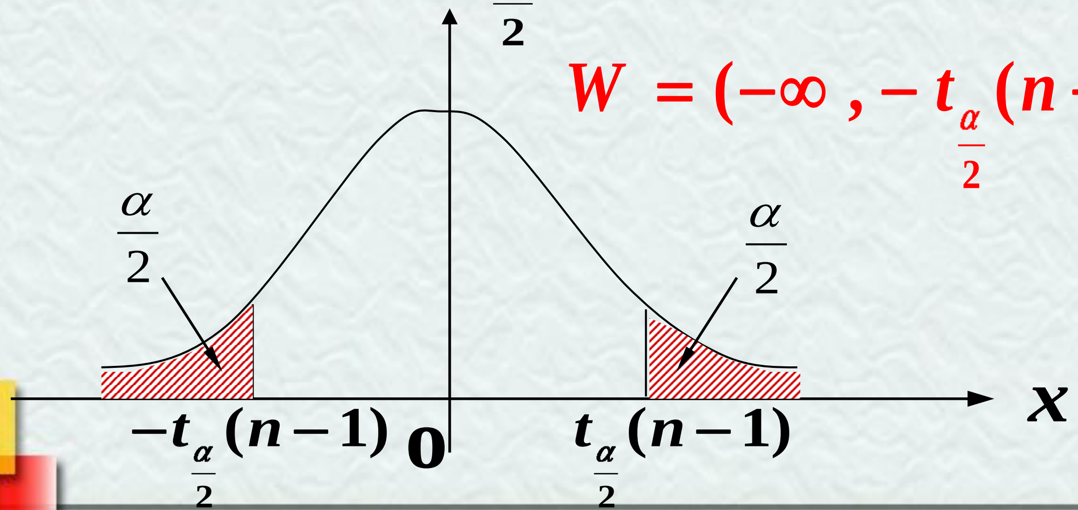
步骤：1、提出假设 $H_0: \mu = \mu_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1: \mu \neq \mu_0$

2、H_0成立时，选用检验统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

3、给定的显著性水平α，由 $P\{|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\} = \alpha$

查表确定临界值$t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$，由此得到拒绝域W：

$$W = (-\infty, -t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)] \cup [t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), +\infty)$$



4、根据样本数据$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$计算出 T 的值 t。

若 $t \in W$ ，则拒绝H_0，即认为总体的均值 μ 与μ_0 之间有显著差异；

若 $t \,\overline{\in}\, W$ ，则接受H_0，即认为总体的均值μ 与 μ_0 之间无显著差异；

上述检验方法称为**T检验法。**

补例2 如果在补例1中只假定切割的长度服从正态分布, 问该机切割的金属棒的平均长度有无显著变化? $(\alpha = 0.05)$

解 要检验假设 $H_0 : \mu = 10.5, \quad H_1 : \mu \neq 10.5,$

选取 $\mathrm{T} = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \overset{\mathrm{H_0}\text{成立}}{\sim} \mathrm{t}(n-1)$

$n = 15, \quad \bar{x} = 10.48, \quad \alpha = 0.05, \quad s = 0.237,$

查表得 $t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(14) = 2.1448$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{10.48 - 10.5}{0.237/\sqrt{15}} \approx -0.327 \in (-2.1448\ ,\ 2.1448)$$

故接受 H_0, 认为金属棒的平均长度无显著变化.

二、单正态总体对方差σ^2的双边检验（μ未知）

步骤：1、提出假设 $H_0:\sigma^2=\sigma_0^2 \quad \leftrightarrow \quad H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$

2、H$_0$成立时，选用检验统计量 $\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$,

3、对于给定的显著性水平α，由

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\leq k_1\right\}=\frac{\alpha}{2},\quad P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\geq k_2\right\}=\frac{\alpha}{2},$$

查表确定临界值 $k_1=\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1),\ k_2=\chi^2_{\alpha/2}(n-1).$，

由此得到拒绝域 $W=(-\infty,k_1]\cup[k_2,+\infty)$；

4、根据样本数据$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$计算出 χ^2的值 。

若$\chi^2 \in W$，则拒绝H_0，即认为总体的方差σ^2与 σ_0^2之间有显著差异；

若$\chi^2 \overline{\in} W$，则接受H_0，即认为总体的方差σ^2与 σ_0^2之间无显著差异；

上述检验方法称为χ^2检验法。

补例3 某厂生产的某种型号的电池, 其寿命长期以来服从方差σ^2 =5000 (小时^2) 的正态分布, 现随机的取26只电池, 测出其样本方差 s^2=9200(小时^2). 问根据这一数据能否推断这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化? $(\alpha = 0.02)$

解 要检验假设 $H_0 : \sigma^2 = 5000, \quad H_1 : \sigma^2 \neq 5000,$

$$\text{选取}\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0\text{成立}}{\sim} \chi^2(n-1)$$

$$n = 26, \quad \alpha = 0.02, \quad \sigma_0{}^2 = 5000,$$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1) = \chi^2_{0.01}(25) = 44.314, \quad \chi^2_{0.99}(25) = 11.524,$$

$$\chi^2_{\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.01}(25)=44.314,$$

$$\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)=\chi^2_{0.99}(25)=11.524,$$

拒绝域为: $(-\infty, 11.524] \cup [44.314, +\infty)$

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0{}^2}=\dfrac{25\times 9200}{5000}=46>44.314$,

所以拒绝 H_0,

认为这批电池的寿命的波动性较以往的有显著的变化.

补例4 某厂生产的铜丝的折断力服从正态分布, 现随机抽取9根, 测得其折断力数据如下(单位:千克): 289, 268, 285, 284, 286, 285, 286, 298, 292. 问是否可相信该厂生产的铜丝的折断力的方差为20? $(\alpha = 0.05)$

解 按题意要检验 $H_0: \sigma^2 = 20$, $H_1: \sigma^2 \neq 20$,

选取 $\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \overset{H_0\text{成立}}{\sim} \chi^2(n-1)$ $n = 9$, $\sigma_0^2 = 20$,

查表得 $\chi^2_{0.975}(8) = 2.18$, $\chi^2_{0.025}(8) = 17.5$, $\bar{x} = 287.89$, $s^2 = 20.36$,

于是 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{8 \times 20.36}{20} = 8.14$, $2.18 < 8.14 < 17.5$,

故接受 H_0,认为该厂生产铜丝的折断力的方差为20.

三、正态总体均值和方差的单边检验

设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本,给定显著性水平 α,

1. σ^2 已知，关于均值 μ 的单边检验

(1)右边检验 $H_0: \mu = \mu_0$ (或 $\mu \le \mu_0$) $\leftrightarrow$ $H_1: \mu > \mu_0$,

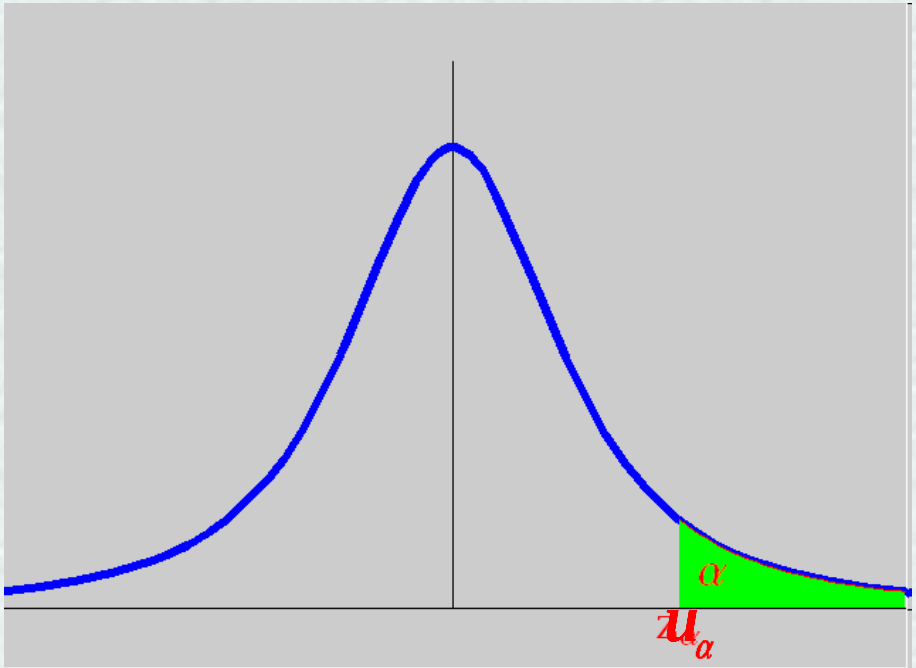
H_0 成立时，取检验统计量 $U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$,

拒绝域的形式为 $u = \dfrac{\overline{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > k$, k 待定,

$H_0: \mu = \mu_0$ 或 $(\mu \le \mu_0)$, $H_1: \mu \boxed{>} \mu_0$

因为 $\dfrac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$$P\left(\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > u_\alpha\right) = \alpha,$$



故右边检验的拒绝域为

$$u = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \boxed{>} u_\alpha$$

即拒绝域为 $(u_\alpha, +\infty)$

(2)左边检验 $H_0: \mu = \mu_0$ 或$(\mu \geq \mu_0)$, $H_1: \mu < \mu_0$,

拒绝域的形式为 $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < k$, k 待定,

$$P\left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -u_\alpha\right) = \alpha,$$ 得 $k = -u_\alpha$,

故左边检验的拒绝域为 $(-\infty, -u_\alpha)$

即$u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} < -u_\alpha$时，拒绝$H_0$

补例5 某工厂生产的固体燃料推进器的燃烧率服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 40\text{cm/s}$, $\sigma = 2\text{cm/s}$. 现用新方法生产了一批推进器, 随机取 $n = 25$只, 测得燃烧率的样本均值为 $\bar{x} = 41.25\text{cm/s}$. 设在新方法下总体均方差仍为 2cm/s, 问用新方法生产的推进器的燃烧率是否较以往生产的推进器的燃烧率有显著的提高? 取显著水平 $\alpha = 0.05$.

解 根据题意需要检验假设

$H_0: \mu = \mu_0 = 40$ (即假设新方法没有提高燃烧率),

$H_1: \mu > \mu_0$ (即假设新方法提高了燃烧率),

这是右边检验问题, 拒绝域为 $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} > u_{0.05} = 1.645$.

因为 $u = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} = \dfrac{41.25 - 40}{2 / \sqrt{25}} = 3.125 > 1.645$, u值落在拒绝域中,

故在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下拒绝 H_0.

即认为这批推进器的燃烧率较以往有显著提高.

2. σ^2未知，关于均值μ的单边检验

(1)右边检验 $H_0: \mu = \mu_0$ (或$\mu \le \mu_0$) $\leftrightarrow$ $H_1: \mu > \mu_0$,

H_0成立时，取检验统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

拒绝域为 $(t_\alpha(n-1), +\infty)$

即$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} > t_\alpha(n-1)$时，拒绝$H_0$

(2)左边检验 $H_0: \mu = \mu_0$ 或$(\mu \geq \mu_0)$, $H_1: \mu < \mu_0$,

拒绝域为 $(-\infty, -t_\alpha(n-1))$

即$t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \boxed{<} -t_\alpha(n-1)$时，拒绝$H_0$

例7.2.1

用某种仪器间接测量某物体的硬度，重复测量了5次，所得数据为: 175，173，178，174，176. 而用别的精确方法测量得该物体的硬度为179(真值可作为硬度的真值).设仪器测量值服从正态分布，问此仪器测量的硬度是否显著低于真值？取 $\alpha = 0.05$.

解 依题意需检验假设

$$H_0 : \mu = \mu_0 = 179 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \mu < 179,$$

取 $\alpha = 0.05$, $n = 5$, $\bar{x} = 175.2$, $s = 1.924$,

$$H_0: \mu = \mu_0 = 179 \quad \leftrightarrow \quad H_1: \mu < 179,$$

取 $\alpha = 0.05, \quad n = 5, \quad \overline{x} = 175.2, \quad s = 1.924,$

查表得 $t_{0.05}(4) = 2.1318$

拒绝域为 $(-\infty, -2.1318]$

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{175.2 - 179}{1.924/\sqrt{5}} \approx -4.416 < -2.1318$$

故拒绝 H_0, 认为此种仪器测量的硬度显著低于179.

补例6 某种电子元件的寿命X(以小时计)服从正态分布，μ,σ^2均为未知. 现测得16只元件的寿命如下:

159	280	101	212	224	379	179	264
222	362	168	250	149	260	485	170

问是否有理由认为元件的平均寿命大于225(小时)? 取 $\alpha = 0.05$.

解 依题意需检验假设

$$H_0 : \mu \le \mu_0 = 225 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \mu > 225,$$

取 $\alpha = 0.05$, $n = 16$, $\bar{x} = 241.5$, $s = 98.7259$,

查表得 $t_{0.05}(15) = 1.7531$

拒绝域为 $(1.7531, +\infty)$

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{241.5 - 225}{98.7259/\sqrt{16}} = 0.6685 < 1.7531$$

故接受 H_0, 认为元件的平均寿命不大于225小时.

3. μ未知，关于σ^2的单边检验

(1)右边检验:

$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$（或$\sigma^2 \le \sigma_0^2$） $\leftrightarrow$ $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$，

因为H_0中的全部σ^2都比H_1中的σ^2要小,

当H_1为真时,S^2的观察值s^2往往偏大,

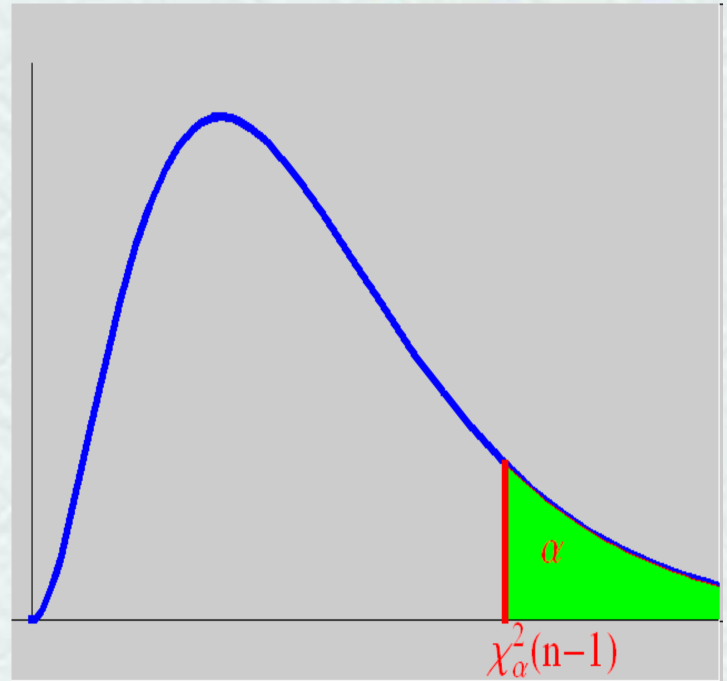
拒绝域的形式为: $s^2 > k$.

因为H_0成立时,$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-1)$,

根据$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1)\right\} = \alpha,$

右边检验问题的拒绝域为

$$\boxed{\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1).}$$



(2)左边检验: $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$(或$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$) $\leftrightarrow$ $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$,

拒绝域为 $$\boxed{\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} < \chi_{1-\alpha}^2(n-1).}$$

补例7 某自动车床生产的产品尺寸服从正态分布, 按规定产品尺寸的方差 σ^2不得超过0.1, 为检验该自动车床的工作精度, 随机的取25件产品, 测得样本方差 $s^2=0.1975$, $\bar{x}=3.86$. 问该车床生产的产品是否达到所要求的精度? $(\alpha=0.05)$

解 要检验假设 $H_0:\sigma^2\le 0.1,\quad H_1:\sigma^2>0.1,$

$n=25,\qquad \chi^2_{0.05}(24)=36.415,$

因为 $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\dfrac{24\times 0.1975}{0.1}=47.4>36.415,$

所以拒绝 H_0,

认为该车床生产的产品没有达到所要求的精度.

参数假设检验与区间估计的关系

参数假设检验的关键是要找一个确定性的区域(**拒绝域**)

$D \subset \mathrm{R}^n$，使得当H_0成立时，事件

$\{(X_1,\cdots,X_n)\in D\}$ 是一个小概率事件

一旦抽样结果使小概率事件发生，就拒绝原假设H_0.

参数的区间估计则是找一个随机区间I，使I包含待估参数 θ是个大概率事件.

对此两类问题，都是利用样本对参数作判断：一个是由小概率事件否定参数 θ属于某范围，另一个则是依大概率事件确信某区域包含参数 θ的真值.

如设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，σ已知，给定容量n的样本样本均值为$\bar{x}$,则参数μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right)$$

假设检验问题$H_0: \mu = \mu_0, H_1: \mu \neq \mu_0$的拒绝域为

$$|\bar{x} - \mu_0| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}$$ 接受域为$|\bar{x} - \mu_0| < \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}$

也就是说，当$\mu_0 \in \left(\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right)$时，接受$H_0: \mu = \mu_0$

此区间正是μ的置信度为$1-\alpha$的置信区间.

第七章　　假设检验
习　题　课

一、重点与难点

二、典型例题

一、重点与难点

一个正态总体的均值和方差的假设检验

(单边检验和双边检验)

书P205表7-1，表7-2

		枢轴量	临界值	置信区间
μ	σ^2已知	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$P\left\{\|U\|<u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right)$.
	σ^2未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$P\left\{\|T\|<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$	$\left(\overline{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.
σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\}$ $=1-\alpha$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$.
	μ已知			

	原假设H_0	检验统计量	备择假设H_1	拒绝域
1	$\mu=\mu_0$ (σ^2已知)	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	$\mu\neq\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	$\lvert u\rvert\geq u_{\alpha/2}$ $u\geq u_\alpha$ $u\leq -u_\alpha$
2	$\mu=\mu_0$ (σ^2未知)	$T=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$	$\mu\neq\mu_0$ $\mu>\mu_0$ $\mu<\mu_0$	$\lvert t\rvert\geq t_{\alpha/2}(n-1)$ $t\geq t_\alpha(n-1)$ $t\leq -t_\alpha(n-1)$
3	$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ未知)	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$ $\sigma^2>\sigma_0^2$ $\sigma^2<\sigma_0^2$	$\chi^2\geq\chi^2_{\alpha/2}(n-1)$或 $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)$ $\chi^2\geq\chi^2_{\alpha}(n-1)$ $\chi^2\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$
4	$\sigma^2=\sigma_0^2$ (μ已知)			

二、典型例题

例1 设某次考试的考生成绩服从正态分布, 从中随机地抽取36位考生的成绩, 算得平均成绩为66.5分, 标准差为15分, 问在显著性水平0.05下, 是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为70分? 并给出检验过程.

解 设该次考试的学生成绩为 X, $\alpha = 0.05$,

则 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本均值为 $\overline{X}$, 样本标准差为 S,

需检验假设: $H_0 : \mu = 70$, $H_1 : \mu \neq 70$.

因为σ^2未知，故采用t检验法，当H_0为真时，

统计量 $T = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} = \dfrac{\bar{X} - 70}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

拒绝域为 $|t| = \dfrac{|\bar{x} - 70|}{s/\sqrt{n}} \geq t_{\alpha/2}(n-1)$,

由 $n = 36$, $\bar{x} = 66.5$, $s = 15$, $t_{0.025}(35) = 2.0301$,

得 $t = \dfrac{\bar{x} - 70}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{66.5 - 70}{15/\sqrt{36}} = -1.4 \in (-2.0301, 2.0301)$

所以接受H_0，认为全体考生的平均成绩是70分.

例2 根据长期的经验，某工厂生产的特种金属丝的折断力 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$(单位：kg).已知 $\sigma = 8$ kg，现从该厂生产的一大批特种金属丝中随机抽取10个样品，测得样本均值 $\bar{x} = 575.2$kg.问这批特种金属丝的平均折断力可否认为是570kg？（ $\alpha = 5\%$ ）

例3 某炼铁厂的铁水含碳量 X 在正常情况下服从正态分布。现对操作工艺进行了某些改进，从中抽取 5 炉铁水测得其含碳量如下：

4.420, 4.052, 4.357, 4.287, 4.683.

据此是否可以认为新工艺炼出来的铁水含碳量的方差为 $0.108^2 \left(\alpha = 0.05\right)$?