第三节 条件概率

一、条件概率

对A, B两个事件，$P(A) > 0$

在事件A发生的条件下事件B发生的概率称为

条件概率　记作$P(B|A)$

若$P(B) > 0$，则

在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率，

记作$P(A|B)$

例1 将一枚硬币抛掷两次，观察其出现正反两面的情况，设事件 A 为“至少有一次为正面”，事件 B 为“两次掷出同一面”. 求 $P(B|A)$.

解：设 H 为正面，T 为反面.

$$S=\{HH, HT, TH, TT\}.$$

$$A=\{HH, HT, TH\},\quad B=\{HH, TT\},\quad P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

由于事件A已经发生，所以这时试验的所有可能结果只有三种，而事件B包含的基本事件只占其中的一种，所以有

$$P(B|A)=\frac{1}{3} \qquad (1)$$

在这个例子中，若不知道事件A已经发生的信息，那么事件B发生的概率为

$$P(B)=\frac{1}{2} \qquad \text{这里} \qquad P(B)\neq P(B|A)$$

其原因在于事件A的发生改变了样本空间，使它由原来的S缩减为$S_A=A$，而$P(B|A)$是在新的样本空间S_A中由古典概率的计算公式而得到的.

$$P(B|A)=\frac{AB\text{中的样本点数}}{A\text{中的样本点数}}$$

上例中计算 $P(B|A)$的方法并不普遍适用．如果回到原来的样本空间S中考虑，显然有

$$P(A)=\frac{3}{4} \qquad P(AB)=\frac{1}{4}$$

从而

$$\boldsymbol{P(B|A)=\frac{1}{3}=\frac{1/4}{3/4}}$$

即

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \qquad (2)$$

关系式（2）不仅对上述特例成立，对一般的古典概型问题，也可以证明它是成立的．

1. 定义 设A, B是两个事件，且$P(A)>0$，称

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.3.1}$$

为事件A发生的条件下事件B发生的**条件概率**

类似地，设$P(B)>0$，称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为事件B发生的条件下事件A发生的**条件概率**

2. 性质

(1) 非负性： $P(B|A) \geq 0;$

(2) 规范性： $P(S|B) = 1, \ P(\varnothing|B) = 0;$

(3) $P(A_1 \cup A_2|B) = P(A_1|B) + P(A_2|B) - P(A_1A_2|B);$

(4) $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B).$

(5) 可列可加性：设 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两不相容的事件，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \middle| A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A).$$

计算条件概率的两种方法：

（1）在缩减后的样本空间中根据古典概率计算；

（2）直接根据定义计算。

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \qquad P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

例2 一盒装有4 只产品，其中3 只一等品、1只二等品。从中不放回地取产品两次, 每次任取一只，已知第一次取出的是一等品，求第二次取出的仍是一等品的概率。

解 设事件A为“第一次取到的是一等品”

事件B 为“第二次取到的是一等品”

即求条件概率 $P(B|A)=?$

因为A已经发生，即已知第一次取得的是一等品，则第二次取产品时，盒中剩下3个产品，其中一等品只剩下2个．所以

$$P(B|A)=\frac{2}{3}$$

（类似古典概率计算）

例3 掷两颗均匀骰子, 已知第一颗掷出6点, 问“掷出点数之和不小于10”的概率是多少?

解: 设A={第一颗掷出6点}

B={掷出点数之和不小于10}

$$P(B \mid A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}.$$

(6,1)
(6,2)
(6,3)
(6,4)
(6,5)
(6,6)

S_A

另解:

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3/36}{6/36}=\frac{1}{2}.$$

课堂练习 在一个有三个孩子的家庭中,已知有一女孩的条件下,求至少有一男孩的概率?

解: (男,男,男),(男,男,女),(男,女,男),(女,男,男),
(男,女,女),(女,男,女),(女,女,男),~~(女,女,女)~~

$\frac{6}{7}$

例1.3.1 人寿保险公司常常需要知道存活到某一个年龄段的人在下一年仍然存活的概率. 根据统计资料可知，某城市的人由出生活到50岁的概率为0.90718，存活到51岁的概率为0.90135。问现在已经50岁的人，能够活到51岁的概率是多少？

解 记 $A=\{活到50岁\}$ $B=\{活到51岁\}$ 显然 $B\subset A$

因此 $AB=B$ 求 $P(B|A)$

由题意知 $P(A)=0.90718$ $P(B)=0.90135$

$$P(AB)=P(B)=0.90135$$

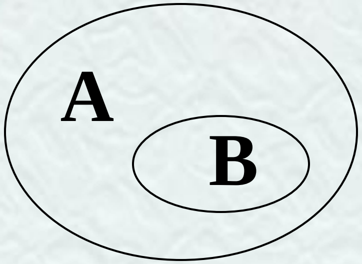
（按定义计算）

从而 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.90135}{0.90718}\approx 0.99357$

补例 某种动物活到5岁的概率为0.7，活到8岁的概率为0.56，求现年为5岁的该种动物能活到8岁的概率?

解：设 A 表示“活到 5 岁（以上）”

B 表示“活到 8 岁（以上）”



则 $P(A)=0.7$, $P(B)=0.56$, $B\subset A$

$$\therefore P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.56}{0.7}=0.8$$

根据定义计算

二、乘法公式

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

定理1.3.1 （乘法定理）

设 $P(A)>0$，则有 $\boxed{P(AB)=P(A)P(B|A)}$

设 $P(B)>0$，则有 $\boxed{P(AB)=P(B)P(A|B)}$

设 A,B,C 为事件，且 $P(AB)>0$，则有

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

一般地，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，且 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$

则由归纳法可得：

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$

补例 在100件产品中有5件是次品，从中连续无放回地抽取3次，问第三次才取得次品的概率。

解 设A_i表示“第i次取得次品（i=1,2,3）

B表示“第三次才取到次品”，

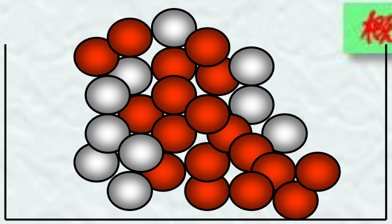
则 $$B=\bar{A}_1\bar{A}_2A_3$$

$$P(B)=P\left(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3\right)$$

$$=P\left(\bar{A}_1\right)\cdot P\left(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1\right)\cdot P\left(A_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\right)$$

$$=\frac{95}{100}\times\frac{94}{99}\times\frac{5}{98}\approx 0.046$$

例1.3.3 波利亚(Polya)罐子模型



设袋中装有 r 只红球、t 只白球.每次自袋中任取一只球,观察其颜色然后放回,并再放入 a 只与所取出的那只球同色的球,若在袋中连续取球四次,试求第一、二次取到红球且第三、四次取到白球的概率.

解 设 $A_i\ (i=1,2,3,4)$ 为事件"第 i 次取到红球"

则 $\overline{A_3}, \overline{A_4}$ 为事件第三、四次取到白球.

因此所求概率为

$$P(A_1A_2\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

$$= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(\overline{A_3} \mid A_1A_2)P(\overline{A_4} \mid A_1A_2\overline{A_3})$$

$$= \frac{r}{r+t}\cdot\frac{r+a}{r+t+a}\cdot\frac{t}{r+t+2a}\cdot\frac{t+a}{r+t+3a}.$$

书P20习题1.3（1）

已知$P(\overline{A})=0.3$, $P(B)=0.4$, $P(A\overline{B})=0.5$,

求$P(B\mid A\cup\overline{B})$.

解：

$$P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{P(A)-P(A\overline{B})}{P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})}$$

$$=\frac{0.7-0.5}{0.7+0.6-0.5}=\frac{0.2}{0.8}=\frac{1}{4}$$

三、全概率公式与贝叶斯公式

引例 某工厂的两个车间生产同型号的家用电器。据以往经验，第1车间的次品率为0.15，第2车间的次品率为0.12．两个车间生产的成品混合堆放在一个仓库里且无区分标志，假设第1、2车间生产的成品比例为2:3．现在仓库中随机地取一件成品,求它是次品的概率？

解 记 $A=\{$从仓库中随机地取出的一台是次品$\}$

$B_i=\{$取出的一台是第i车间生产的$\}$ $(i=1,2)$

则 $S=B_1\cup B_2 \quad B_1B_2=\varnothing$

$AB_i=\{$取出的一台是第i车间生产的次品$\}$ $(i=1,2)$

从而 $A=AB_1\cup AB_2 \quad (AB_1)(AB_2)=\varnothing$

于是
$$P(A)=P(AB_1\cup AB_2)=P(AB_1)+P(AB_2)$$
$$=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$
$$=\frac{2}{5}\times 0.15+\frac{3}{5}\times 0.12$$
$$=0.132$$

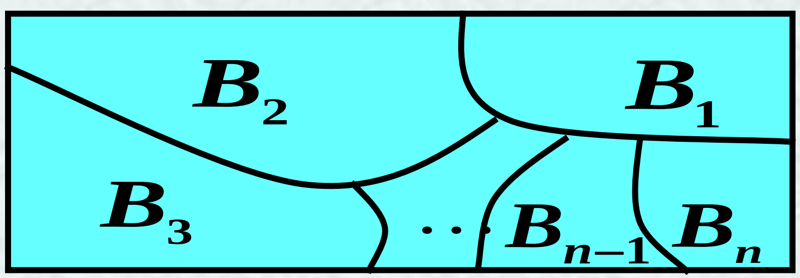
定义 设S为试验E的样本空间, $B_1, B_2, \cdots, B_n$为E的一组事件，若

(i) $B_i B_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots n,$ 两两互不相容

(ii) $B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$

则称 $B_1, B_2, \cdots B_n$ 为样本空间S的一个划分；

也称$B_1, B_2, \cdots B_n$ 构成一个完备事件组。



定理1.3.2（全概率公式）

设试验E的样本空间为 S

$B_1, B_2, \cdots B_n$ 为样本空间S的一个划分；

且$P(B_i) > 0$，（$i = 1,2,\cdots,n$）。

则对任意的事件A，有

$$P(A) = P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2) + \cdots + P(B_n)P(A|B_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

证明 $A = AS = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)$

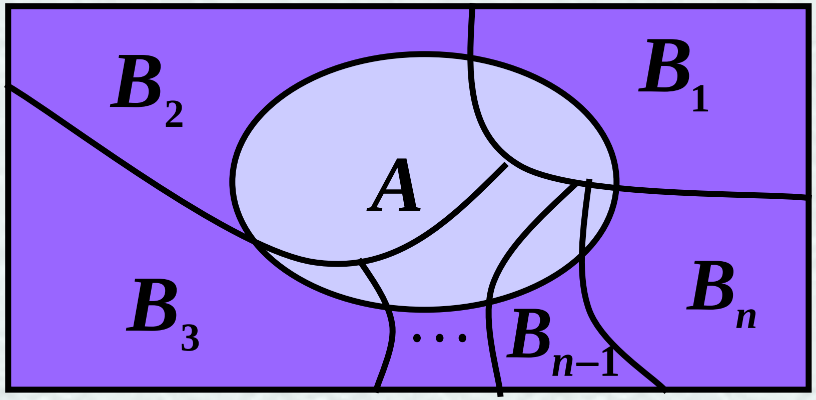
$$= AB_1 \cup AB_2 \cup \cdots \cup AB_n.$$

由 $B_iB_j = \varnothing \Rightarrow (AB_i)(AB_j) = \varnothing$

$$\Rightarrow P(A) = P(AB_1) + P(AB_2) + \cdots + P(AB_n)$$

$$= P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_n)P(B_n).$$

图示



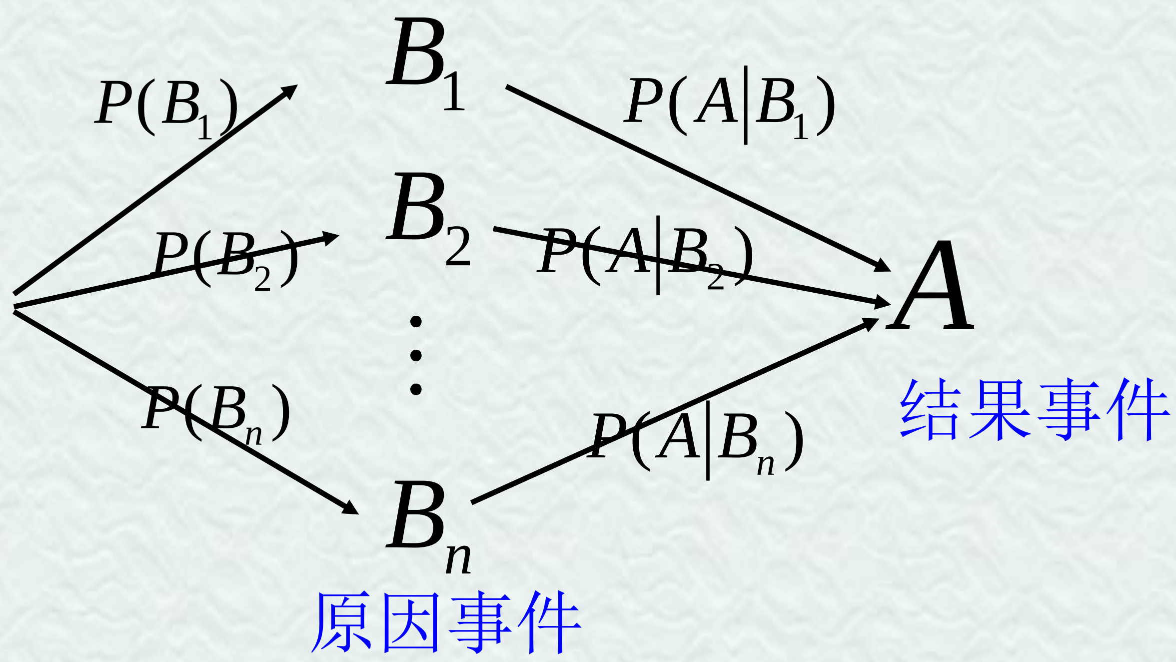
说明

※全概率公式主要用于计算比较复杂事件的概率，它实质上是加法公式和乘法公式的综合运用.

※全概率公式是通过分析一个事件发生的各种不同的原因、情况或途径及其可能性求得该事件发生的概率。往往应用在具有先后次序的两个随机问题中。

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)$$ （由因求果）

视$B_1,B_2,\ldots,B_n$为引起A发生的所有不同的“原因”



每个原因都有可能导致事件A发生，故A发生的概率是所有不同原因导致A发生的概率的总和。“全概率公式”之“全”取为此意.

定理（**贝叶斯（Bayes）公式或逆概率公式**）

设试验E的样本空间为S，$B_1, B_2, \cdots B_n$ 为样本空间S的一个划分；且$P(B_i)>0$，（$i=1,2,\cdots,n$）

则对任意事件A，若$P(A)>0$，有

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_iA)}{P(A)}=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)} \qquad (i=1,2,\cdots,n)$$

与**全概率公式**刚好相反，**贝叶斯公式**主要用于当观察到一个事件已经发生时，去求导致所观察到的事件发生的各种原因、情况或途径的可能性大小．

引例 某工厂的两个车间生产同型号的家用电器。据以往经验，第1车间的次品率为0.15，第2车间的次品率为0.12．两个车间生产的成品混合堆放在一个仓库里且无区分标志，假设第1、2车间生产的成品比例为2:3.

(1)在仓库中随机地取一件成品,求它是次品的概率；

(2)在仓库中随机地取一只成品，若已知取到的是次品,问该此次品分别是由第1,2车间生产的概率为多少？

解 记 $A=\{$从仓库中随机地取出的一台是次品$\}$

$B_i=\{$取出的一台是第i车间生产的$\}$ $(i=1,2)$

（1）$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)=\frac{2}{5}\times 0.15+\frac{3}{5}\times 0.12=0.132$

（2）问题归结为计算$P(B_1|A)$ 和$P(B_2|A)$

由条件概率的定义及乘法公式，有

$$P(B_1|A)=\frac{P(AB_1)}{P(A)}=\frac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{5}\times 0.15}{0.132}\approx 0.4545$$

$$P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\times 0.12}{0.132}\approx 0.5455$$

补例 对以往数据分析结果表明,当机器调整得良好时,产品的合格率为98%,而当机器发生某种故障时,其合格率为55%.每天早上机器开动时,机器调整良好的概率为95%.试求已知某日早上第一件产品是合格品时,机器调整得良好的概率是多少?

解 设 A 为事件"产品合格",

B 为事件"机器调整良好".

则有 $P(A|B)=0.98,\quad P(A|\overline{B})=0.55,$

$$P(B)=0.95,\quad P(\overline{B})=0.05,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}$$

$$=\frac{0.98\times 0.95}{0.98\times 0.95+0.55\times 0.05}=0.97.$$

即当生产出第一件产品是合格品时,此时机器调整良好的概率为 0.97.

先验概率与后验概率

上题中概率 0.95 是由以往的数据分析得到的, 叫做先验概率.

而在得到信息之后再重新加以修正的概率 0.97 叫做后验概率.

例1.3.6 根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下的效果：若以 A 表示事件“试验反应为阳性”，以 C 表示事件“被诊断者患有癌症”，则有 $P(A|C)=0.95$, $P(\overline{A}|\overline{C})=0.95$. 现在对自然人群进行普查，设被试验的人患有癌症的概率为0.005，即 $P(C)=0.005$, 试求 $P(C|A)$.

解 因为 $P(A|C)=0.95$,

$$P(A|\overline{C})=1-P(\overline{A}|\overline{C})=0.05,$$

$$P(C)=0.005, \quad P(\overline{C})=0.995,$$

由贝叶斯公式得所求概率为

$$P(C|A)=\frac{P(A|C)P(C)}{P(A|C)P(C)+P(A|\overline{C})P(\overline{C})}$$

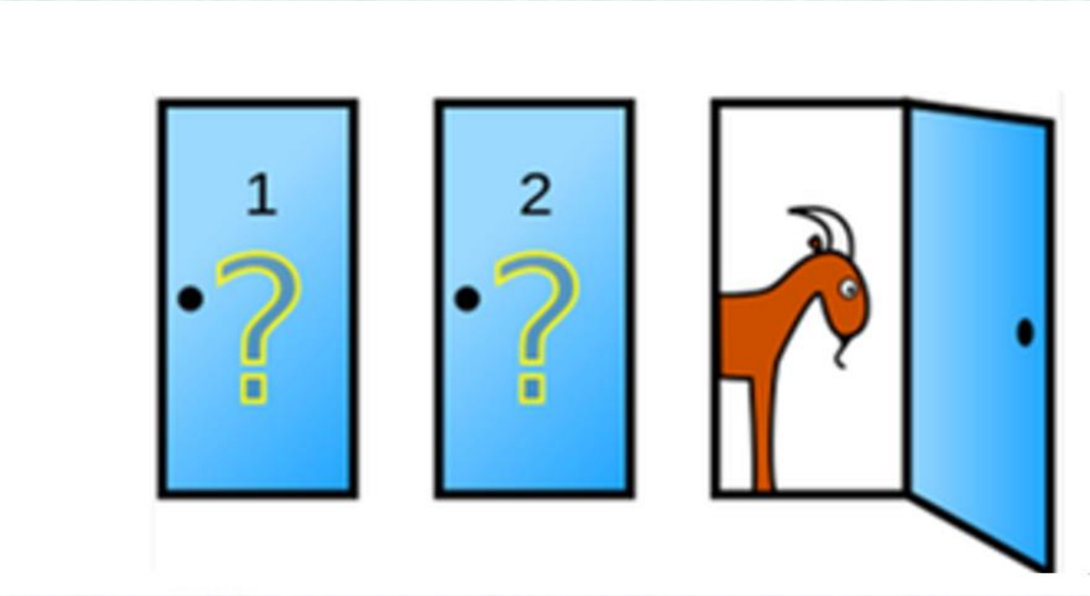
$$=\frac{0.95\times0.005}{0.95\times0.005+0.05\times0.995}=0.087.$$

即平均1000个具有阳性反应的人中大约只有87人患有癌症.

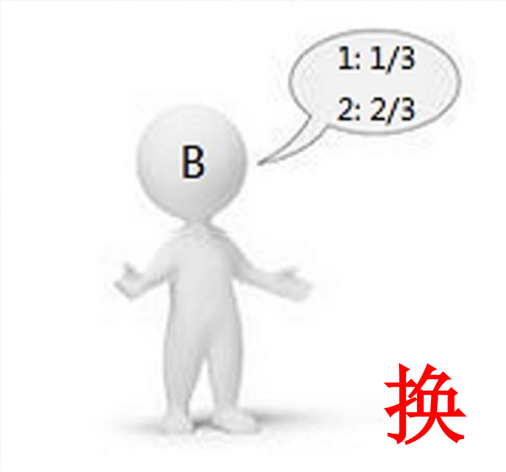
三门问题（蒙提霍尔问题）

三门问题：

参赛者面前有三扇关闭着的门，其中一扇的后面是一辆汽车，选中后面有车的那扇门就可以赢得该汽车，而另外两扇门后面则各藏有一只山羊。当参赛者选定了一扇门，但未去开启它的时候，主持人会开启剩下两扇门中的一扇，露出其中一只山羊。主持人其后会问参赛者要不要更换选择，选另一扇仍然关着的门。


1
2


1:1/2
2:1/2
A
不换


1: 1/3
2: 2/3
B
换

记 $A=$ 赢得汽车， $B=$ 第一次选的门后有汽车

➤不换 $P(A)=P(B)=\dfrac{1}{3}$

全概率公式

➤ 换 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$

$$=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})$$

$$=\frac{1}{3}\times 0+\frac{2}{3}\times 1=\frac{2}{3}$$

敏感性问题的调查

- 要调查“敏感性”问题中某种比例 p
- 两个问题： I：硬币是正面朝上吗?

  II：期末考试中是否作弊?
- 抛硬币: 回答 I 或 II.
- 答题纸上只有：“是”、“否”.
- 可用全概率公式分析“敏感性”问题.

第四节 随机事件的独立性

一、 两个事件的独立性

设A, B是试验E的二事件，$P(A) > 0$，一般说来，条件概率$P(B \mid A) \neq P(B)$，即A的发生对B发生的概率是有影响的。

实际问题中也有可能出现$P(B \mid A) = P(B)$的情形。

例1 袋中有6个白球，2个黑球，从中有放回地抽取两次，每次取一球，记A={第一次取到白球}，B={第二次取到白球}，则有

$$P(A)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \qquad P(B)=\frac{6}{8}=\frac{3}{4} \qquad P(AB)=\frac{6^2}{8^2}=\frac{9}{16}$$

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{3}{4}=P(B)$$

类似地 $P(B\mid\overline{A})=\frac{3}{4}=P(B)$

这表明不论A发生与否，对B发生的概率都没有影响，此时可以认为事件B与事件A没有“关系”，或称事件B对事件A是独立的。

定义1 设A、B是试验E的两个事件，且$P(A)>0$，

若$P(B|A)=P(B)$，则称事件B对事件A是独立的。

此时有 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(A)P(B)$ (1)

当$P(A)=0$时，虽然$P(B|A)$没有定义，但由

$$0\le P(AB)\le P(A)=0$$

可知$P(AB)=0$，这时(1)式自然成立。

另外，设$P(B)>0$，则 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}=\dfrac{P(A)P(B)}{P(B)}=P(A)$

称事件A对事件B也是独立的，故称**事件A、B相互独立**

定义2

设A, B是二事件，如果满足等式$P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A, B相互独立，简称A, B独立.

事件A与事件B相互独立的充要条件是

- $P(B \mid A)=P(B)$, $P(A)>0$
- $P(AB)=P(A)P(B)$

若 $P(A)=0$

则事件$\boldsymbol{A}$与任一事件$\boldsymbol{B}$相互独立.

请同学们思考

两事件相互独立与两事件互不相容的关系.

两事件相互独立 $P(AB)=P(A)P(B)$

两事件互不相容 $AB=\varnothing$

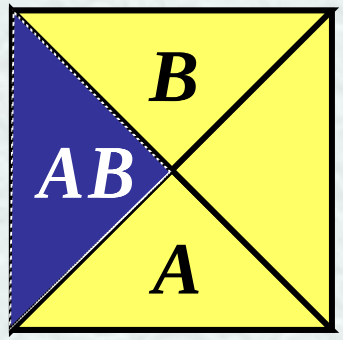
二者之间没有必然联系

说明

事件 A 与 事件 B 相互独立，是指事件 A 发生与事件 B 发生互不影响.

事件 A 与 事件 B 互不相容，是指事件 A 与事件 B 不能同时发生.

例如



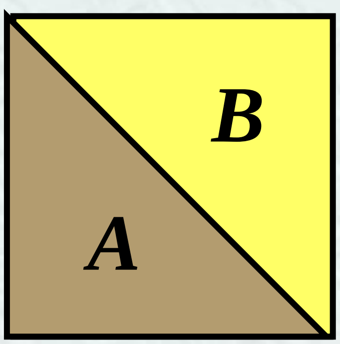
若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$,

则 $P(AB)=P(A)P(B)$.

由此可见两事件相互独立，但两事件不互斥.

若 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B)=\frac{1}{2}$ 则 $P(AB)=0$,

$P(A)P(B)=\frac{1}{4}$, 故 $P(AB)\neq P(A)P(B)$.



由此可见两事件互斥但不独立.

补例 甲乙二人独立地对目标各射击一次，设甲射中目标的概率为0.5，乙射中目标的概率为0.6，求目标被击中的概率.

解 设A, B分别表示甲,乙击中目标，

则$A\cup B$表示目标被击中，由于A, B独立

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$$

$$=0.5+0.6-0.5\times 0.6$$

$$=0.8$$

定理二 若事件A与事件B相互独立，则A与$\overline{B}$，$\overline{A}$与B，$\overline{A}$与$\overline{B}$也分别相互独立

证 因为$P(AB)=P(A)P(B)$，所以

$$P(A\overline{B})=P(A-AB)$$
$$=P(A)-P(AB)$$
$$=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)[1-P(B)]$$
$$=P(A)P(\overline{B})$$

由对称性知

$\overline{A}$与B相互独立

由上面结果知

$\overline{A}$与$\overline{B}$也相互独立

故A与$\overline{B}$相互独立

二、多个事件的独立性

定义3 设 A_1, A_2, A_3 是三个事件，如果满足等式

$$\left.\begin{aligned} P(A_1A_2) &= P(A_1)P(A_2) \\ P(A_2A_3) &= P(A_2)P(A_3) \\ P(A_1A_3) &= P(A_1)P(A_3) \end{aligned}\right\} \text{两两独立}$$

$$P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

则称事件 A_1, A_2, A_3 相互独立.

注意

三个事件相互独立 $\overset{\longrightarrow}{\not\longleftarrow}$ 三个事件两两相互独立

书P22注1.4.1

反例　袋子中有编号1，2，3，4的四个同样的球，随机从袋子中取一个球，设A表示“取到1或2号球”，B表示“取到1或3号球”，C表示“取到1或4号球”.

则 $$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2},$$

又由题意知 $$P(AB)=P(BC)=P(AC)=\frac{1}{4},$$

故有

$$\begin{cases} P(AB) = P(A)P(B) = \dfrac{1}{4}, \\ P(BC) = P(B)P(C) = \dfrac{1}{4}, \\ P(AC) = P(A)P(C) = \dfrac{1}{4}, \end{cases}$$

则三事件 A, B, C 两两独立.

由于 $$P(ABC) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C),$$

因此 A，B，C 不相互独立.

推广 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意 $k\,(1 < k \le n)$，任意 $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$，具有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为相互独立的事件.

n 个事件相互独立 $\underset{\nLeftarrow}{\Rightarrow}$ n个事件两两相互独立

两个结论

1. 若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n\ (n \geq 2)$ 相互独立，则其中任意 $k\ (2 \leq k \leq n)$个事件也是相互独立.

2. 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n (n \geq 2)$相互独立，则将 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意多个事件换成它们的对立事件，所得的 n 个事件仍相互独立.

例如 设5个事件 $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$ 相互独立

则 $A_1\ \overline{A_2}\ A_3\ \overline{A_4}\ A_5$ 也相互独立

利用独立性的概念简化计算

(1) 计算n个相互独立的事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的积事件的概率可简化为

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

(2) 计算n个相互独立的事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$的和事件的概率可简化为

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\overline{A_i})$$

若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是n个相互独立的事件，

则这n个事件中至少有一个发生的概率为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - P\left(A_i\right)\right]$$

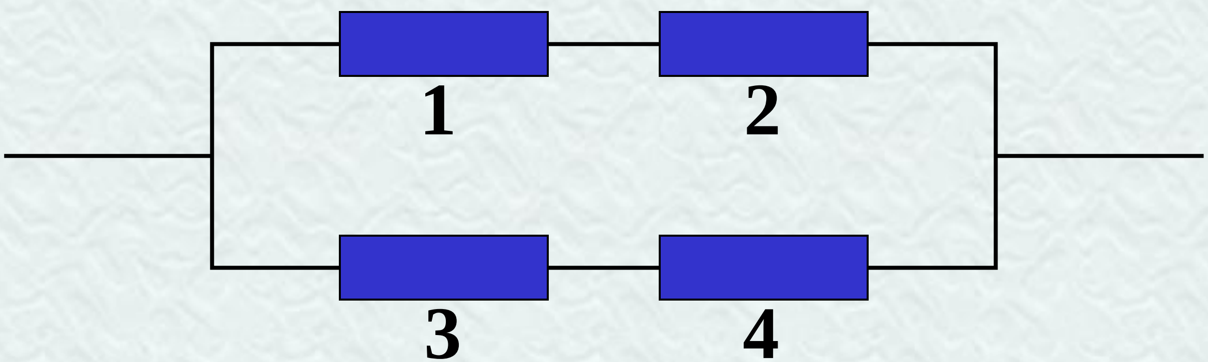
证

$$P\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = 1 - P\left(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n}\right)$$

$$= 1 - P\left(\overline{A_1}\,\overline{A_2} \cdots \overline{A_n}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right)$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n}\left[1 - P\left(A_i\right)\right]$$

补例 一个元件(或系统)能正常工作的概率称为元件(或系统)的可靠性.如图所示,设有 4 个独立工作的元件 1,2,3,4 按先串联再并联的方式联结(称为串并联系统),设第 i 个元件的可靠性为 p_i $(i=1,2,3,4)$. 试求系统的可靠性 .



解

以 A_i $(i=1,2,3,4)$ 表示事件第 i 个元件正常工作,

以 A 表示系统正常工作 .则有 $A = A_1A_2 \cup A_3A_4$.

由事件的独立性,得系统的可靠性：

$$P(A)=P(A_1A_2)+P(A_3A_4)-P(A_1A_2A_3A_4)$$

$$=P(A_1)P(A_2)+P(A_3)P(A_4)-P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)$$

$$=p_1p_2+p_3p_4-p_1p_2p_3p_4.$$

补例（保险赔付）设有n个人向保险公司购买人身意外保险（保险期为1年），假定投保人在一年内发生意外的概率为0.01。求保险公司赔付的概率？

解　记 $A_i = \{$第 i 个投保人出现意外$\}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$

$$A = \{\text{保险公司赔付}\}$$

则由实际问题可知$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立且$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

因此$P(A) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}\right) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\left(\overline{A_i}\right) = 1 - (0.99)^n$

第一章　随机事件及其概率

习　题　课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

随机事件的概念

古典概型的概率计算方法

概率的加法公式

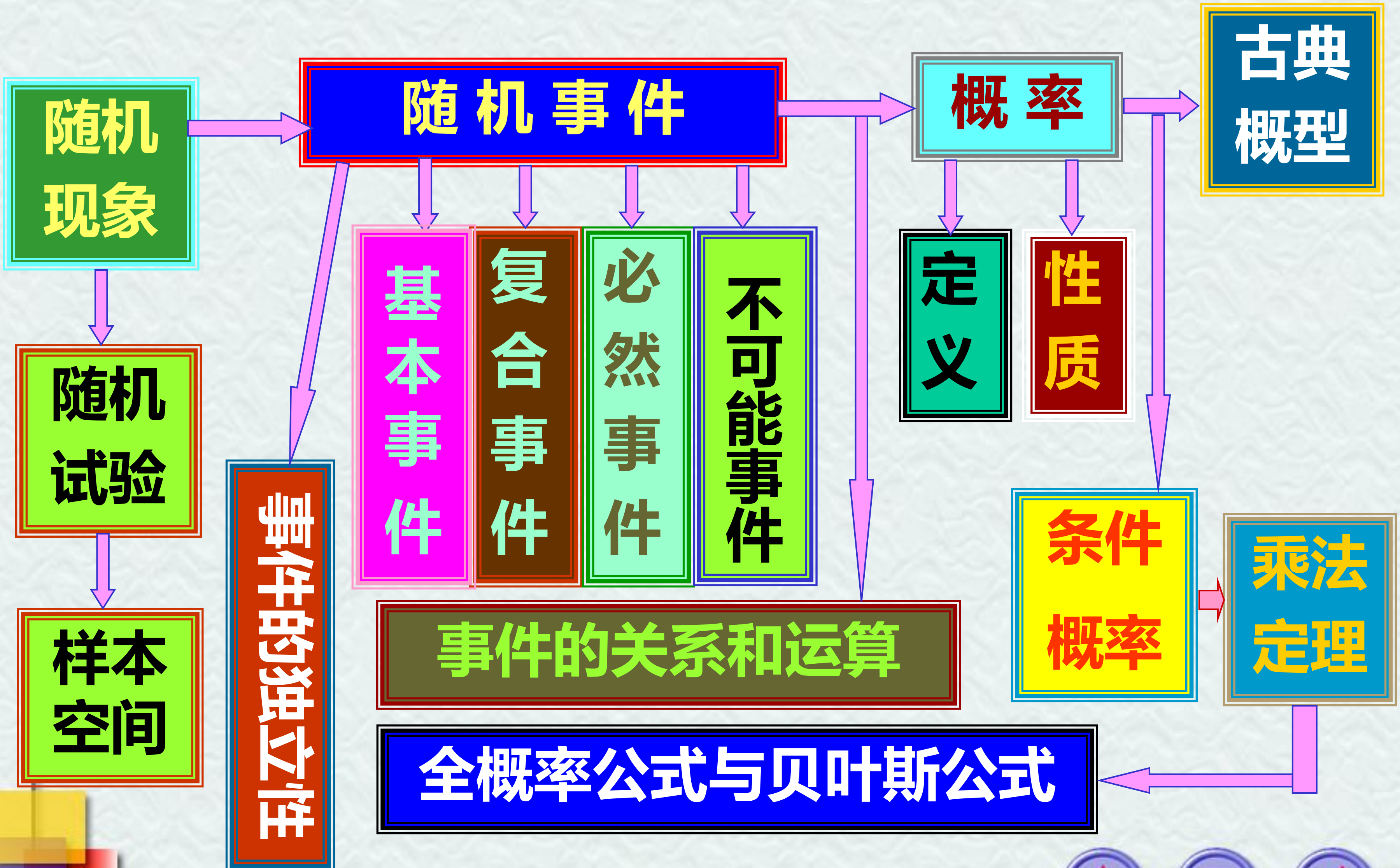
条件概率和乘法公式的应用

全概率公式和贝叶斯公式的应用

2.难点

古典概型的概率计算　全概率公式的应用

二、主要内容


随机现象
随机试验
样本空间
随机事件
事件的独立性
基本事件
复合事件
必然事件
不可能事件
事件的关系和运算
概率
定义
性质
古典概型
条件概率
乘法定理
全概率公式与贝叶斯公式

三、典型例题

例1 一个工人生产了3个零件,以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品 $(i=1,2,3)$,试用 A_i $(i=1,2,3)$ 表示下列事件:

(1) 只有第一个零件是合格品 (B_1);

(2) 三个零件中只有一个零件是合格品 (B_2);

(3) 第一个是合格品,但后两个零件中至少有一个次品 (B_3);

(4) 三个零件中最多只有两个合格品 (B_4);

(5) 三个零件都是次品 (B_5).

解 (1) $B_1 = A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

(2) $B_2 = A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3$;

(3) $B_3 = A_1(\overline{A_2} \cup \overline{A_3})$;

(4) $B_4 = \overline{A_1 A_2 A_3}$, 或 $B_4 = \overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \overline{A_3}$;

(5) $B_5 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, 或 $B_5 = \overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}$.

说明 一个事件往往有多个等价的表达方式.

例2 已知 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.7$，$P(A\cup B)=0.8$

求 $P(A-B)$ 。

例3 设A，B是两事件，且 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.7$ ，问分别在什么条件下，$P(AB)$ 取得最大值和最小值？最大值和最小值各为多少？

例4 设10件产品中有4件不合格品，从中任取2件，已知所取2件产品中有1件是不合格品，则另1件也是不合格品的概率为多少？

例5 有朋友自远方来访，他乘火车，轮船，汽车，飞机来的概率分别是0.3，0.2，0.1，0.4。如果他乘火车，轮船，汽车来的话，迟到的概率分别是1/4，1/3，1/12，而乘飞机不会迟到。

(1)试求他迟到的概率。

(2)若已知他迟到了，试问他是乘火车来的概率是多少？

例6 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的.根据以往的记录有以下的数据：

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的产品在仓库中是均匀混合的,且无区别的标志.

(1) 在仓库中随机地取一只元件,求它是次品的概率;

(2) 在仓库中随机地取一只元件, 若已知取到的是次品, 为分析此次品出自何厂, 需求出此次品由三家工厂生产的概率分别是多少. 试求这些概率.

解 设 A 表示"取到的是一只次品", $B_i\ (i=1,2,3)$ 表示"所取到的产品是由第 i 家工厂提供的".

则 B_1, B_2, B_3 是样本空间 S 的一个划分,

且 $P(B_1)=0.15,\quad P(B_2)=0.80,\quad P(B_3)=0.05,$

$P(A|B_1)=0.02,\quad P(A|B_2)=0.01,\quad P(A|B_3)=0.03.$

(1) 由全概率公式得

$$P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)$$

$$= 0.0125.$$

(2) 由贝叶斯公式得

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)} = \frac{0.02 \times 0.15}{0.0125} = 0.24.$$

$$P(B_2|A) = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = 0.64,$$

$$P(B_3|A) = \frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)} = 0.12.$$

故这只次品来自第2家工厂的可能性最大。

例7 甲乙两个箱子，甲箱装有2个白球，1个黑球；乙箱装有1个白球，2个黑球。现由甲箱中任取一球放入乙箱，再从乙箱中任取一球，求取到白球的概率？

解: 设A表示"从乙箱取出一白球"，

B_1表示"从甲箱取出一白球"，

B_2表示"从甲箱取出一黑球"，

$$\begin{tikzcd} B_1 \arrow[dr] & \\ & A \\ B_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

$$P(B_1)=\frac{2}{3} \qquad P(B_2)=\frac{1}{3}$$

$$P(A|B_1)=\frac{2}{4} \qquad P(A|B_2)=\frac{1}{4}$$

$$P(A)=P(B_1)P(A|B_1)+P(B_2)P(A|B_2)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

例8 已知男性中有5%是色盲患者,女性中有0.25%是色盲患者,现从男女人群相等的人群中随即挑选一人,恰好是色盲患者,问此人是男性的概率.

解: 设$A=\{$任选一人为色盲$\}$,

$B=\{$任选一人为男性$\}$ $\bar{B}=\{$任选一人为女性$\}$,

$$P(B)=P(\bar{B})=0.5,\quad P(A|B)=0.05,\quad P(A|\bar{B})=0.0025,$$

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)\,P(A|B)}{P(B)\,P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}$$

$$=\frac{0.5\times 0.05}{0.5\times 0.05+0.5\times 0.0025}=\frac{20}{21}.$$

例9 玻璃杯成箱出售,每箱20只,各箱含0,1,2只次品率为0.8,0.1,0.1,某顾客欲购买一箱玻璃杯,售货员任取一箱,顾客从中任取4只查看,若无次品则买下,否则退回,(1)求顾客买下该箱玻璃杯的概率.
(2)在顾客买下的该箱玻璃杯中确实没有次品的概率.

A_0, A_1, A_2 –取到的一箱含0,1,2只次品, B–买下这箱杯子,

$$P(B) = \boxed{P(A_0)P(B\,|\,A_0)} + P(A_1)P(B\,|\,A_1) + P(A_2)P(B\,|\,A_2)$$

$$= 0.8\times 1 + 0.1\times\frac{C_{19}^4}{C_{20}^4} + 0.1\times\frac{C_{18}^4}{C_{20}^4}$$

$$P(A_0\,|\,B) = \frac{P(A_0B)}{P(B)} = \frac{P(A_0)P(B\,|\,A_0)}{P(B)} = \frac{0.8\times 1}{P(B)}$$

例10 有两门高射炮，每一门击中飞机的概率都是0.6，求同时发射一发炮弹而击中飞机的概率是多少？又若有一架敌机入侵领空，欲以99%以上的概率击中它，问至少需要多少门高射炮?（假设各门高射炮是否击中飞机相互独立）