第18章 光的衍射

第18章 光的衍射

1、惠更斯—菲涅耳原理　衍射的理论基础

2、单缝夫琅和费衍射　半波带法、振幅矢量法

3、多缝夫琅和费衍射　多缝对缝间干涉的影响

4、衍 射 光 栅　光栅方程、光栅光谱

5、圆孔夫琅和费衍射　光学仪器的分辨本领

6、x射线的衍射　布拉格方程

§18.1 惠更斯—菲涅耳原理

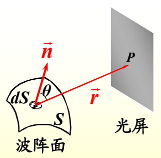
惠更斯：(1) 波阵面上每一点都可看作发射球面子波的波源；

菲涅耳：(2) 同一波阵面上各子波源发出的光波在空间相遇时，会发生干涉；

(3) 点波源dS发出的光在P点引起的振幅为：

$$dA \propto K(\theta)\frac{dS}{r}$$

$K(\theta)$称为倾斜因子

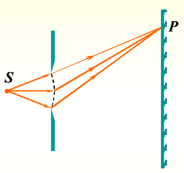


θ增大时，$K(\theta)$减小；

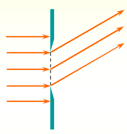
当$\theta \ge \pi/2$时，$K(\theta)=0$。

P点总的光振动为波面S上所有点波源在该点引起的光振动的相干叠加。

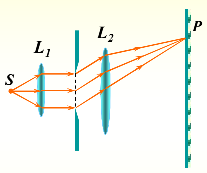
菲涅耳衍射和夫琅和费衍射



菲涅耳衍射



夫琅和费衍射



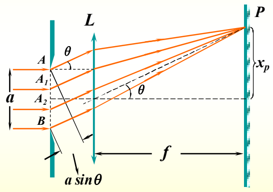
实际的夫琅和费衍射装置

§18.2 单缝的夫琅和费衍射

1、菲涅耳半波带法（代数叠加法）：

设单缝宽为a，透镜L的焦距为f，屏幕置于透镜的焦平面上。平行单色光垂直入射于单缝上。

单缝上所有以衍射角 θ 出射的平行光经透镜聚焦于屏幕上的同一点。但各光线到达P点时相位不同。



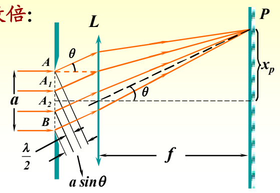
A、B点出射的光光程差最大：

$$\Delta L = a\sin\theta$$

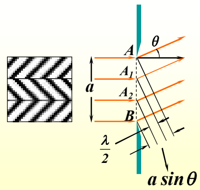
若ΔL恰为入射光半波长的整数倍：

$$\Delta L = a\sin\theta = n\cdot\frac{\lambda}{2}$$

$$(n = 1、2、3、\ldots)$$



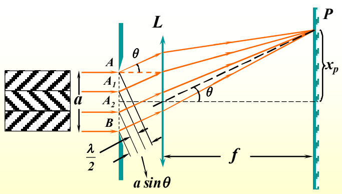
则以 $\lambda/2$ 为间隔将狭缝AB均分为n个半波带——菲涅耳半波带。



$$\Delta L = a\sin\theta = n\cdot\frac{\lambda}{2} \quad (n = 1、2、3、\ldots)$$

- 每一半波带在P点引起的光振动振幅近似相等；
- 相邻半波带上各相应点发出的光到P点时光程差为$\lambda/2$。

所以：相邻两个半波带发出的光在P点因干涉而完全相消！

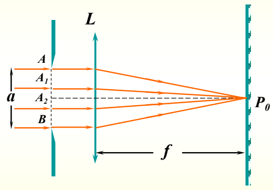


讨论

(1) 中央明条纹

$$\Delta L = a\sin\theta = n\cdot\frac{\lambda}{2}$$

以衍射角 $\theta=0$出射的所有光线聚焦于屏幕中心的P_0点。所有这些光线都是同相位的，所以P_0点处为明条纹的中心，称为单缝衍射的中央明条纹（中央主极大）。



讨论

(2) 暗条纹（极小）

$$\Delta L = a\sin\theta = n\cdot\frac{\lambda}{2}$$

当$n = 2k$时，得到偶数个半波带。P点处为暗条纹中心。

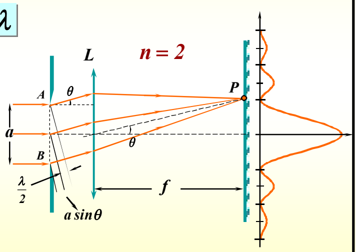
$$\Delta L = a\sin\theta = \pm k\lambda$$

$$(k = 1、2、3、\ldots)$$

暗条纹中心位置：

$$x_p = f\cdot tg\theta$$

其中：$\theta = arcsin(\pm k\frac{\lambda}{a})$



讨论

$$x_p = f\cdot tg\theta \qquad \theta = arcsin(\pm k\frac{\lambda}{a})$$

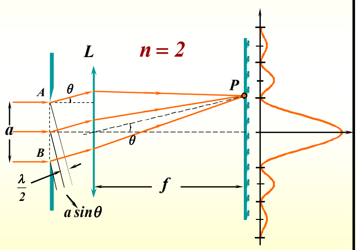
当 $a >> \lambda$时，θ 很小：

$$tg\theta \approx \sin\theta \approx \pm k\frac{\lambda}{a}$$

暗条纹中心位置：

$$x_p \approx \pm k\lambda\frac{f}{a}$$

$$(k = 1、2、3、\ldots)$$



讨论 (3) 其他明条纹（次极大）

$\Delta L = a\sin\theta = n\cdot\frac{\lambda}{2}$

当 $n = 2k+1$ 时，得到奇数个半波带。P点处为明条纹中心。

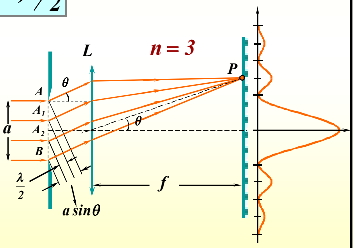
$$\Delta L = a\sin\theta = \pm(2k+1)\lambda/2$$

$(k = 1, 2, 3, \ldots)$

明条纹中心位置:

$$x_p = f\cdot tg\theta$$

$$\theta = \arcsin[\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2a}]$$



讨论 $x_p = f\cdot tg\theta$ $\quad\theta = \arcsin[\pm(2k+1)\frac{\lambda}{2a}]$

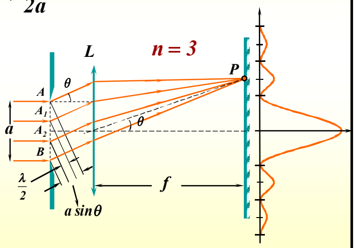
当 $a >> \lambda$ 时，θ 很小:

$$tg\theta \approx \sin\theta \approx \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2a}$$

明条纹中心位置:

$$x_p \approx \pm(2k+1)\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{f}{a}$$

$(k = 1, 2, 3, \ldots)$



讨论 (4) 条纹宽度

$\Delta L = a\sin\theta = n\cdot\frac{\lambda}{2}$

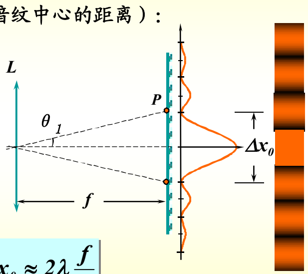
① 中央明条纹宽度（±1级暗纹中心的距离）:

$$\Delta x_0 = 2\cdot f\cdot tg\theta_1$$

其中: $\theta_1 = \arcsin\frac{\lambda}{a}$

称为半角宽度

当 $\theta_1 \sim 0$ 时: $\theta_1 \approx \frac{\lambda}{a}$, $\Delta x_0 \approx 2\lambda\frac{f}{a}$



讨论 (4) 条纹宽度

$\Delta L = a\sin\theta = n\cdot\frac{\lambda}{2}$

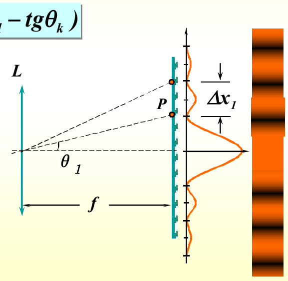
② 其他明条纹宽度（相邻暗纹中心的距离）:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = f(tg\theta_{k+1} - tg\theta_k)$$

当 $\theta_k \sim 0$ 时:

$$\Delta x_k \approx \lambda\frac{f}{a}$$

可见，中央明条纹的宽度约为其他明条纹宽度的两倍。



习题: 18-7 单缝衍射装置中，透镜焦距为 80cm，单色光波长 546nm，如果衍射图样中两个第一极小之间的距离为 5.2mm，计算单缝的宽度。

解: 两个第一极小之间的距离即为单缝衍射中央明条纹的宽度:

$$\Delta x_0 \approx 2\lambda\frac{f}{a}$$

$$\therefore\ a = 2\lambda\frac{f}{\Delta x_0} = 0.168mm$$

例题 18-1: (1) 平行白光垂直照射单缝，得红光（λ=650nm）的第一极小衍射角 θ_1=30°，求缝宽 a =？；(2) 若波长为 λ' 的光的第一极大衍射角 θ=30°，求 λ'=?

解: (1) $a = \frac{\lambda}{\sin\theta_1} = 1300nm$

若用 $\theta_1 = \frac{\lambda}{a} \Rightarrow a = \frac{\lambda}{\theta_1} = 1241nm$，误差为: 4.5%

(2) $a\sin\theta = (2k+1)\frac{\lambda'}{2} = 1.5\lambda' \quad (k = 1)$

得: $\lambda' = a\sin\theta/1.5 = 433.3nm$

若用 $\theta = 1.5\frac{\lambda'}{a} \Rightarrow \lambda' = \frac{a\theta}{1.5} = 454nm$，误差为: 4.8%

例题 18-2： 设 $a=5\lambda$，$f=40\ cm$，求中央明纹和1级明纹在屏上的宽度。

解：1、2级暗纹满足：$a\sin\theta_1=\lambda$，$a\sin\theta_2=2\lambda$

得：$\theta_1=\arcsin\frac{1}{5}=0.201\ rad$　　$\theta_2=\arcsin\frac{2}{5}=0.411\ rad$

∴ 1、2级暗纹在屏上位置：

$x_1=f\,tg\theta_1=8.16cm$　　$x_2=f\,tg\theta_2=17.44cm$

中央明纹宽度：　$\Delta x_0=2x_1=16.32cm$

1级明纹宽度：　$\Delta x_1=x_2-x_1=9.28cm$

若取$\theta_1=\lambda/a=0.2$、$\theta_2=2\lambda/a=0.4$，则$x_1\approx f\theta_1=8cm$、$x_2\approx f\theta_2=16cm$。

此时 $\Delta x_0=2x_1=16\ cm$、$\Delta x_1=x_2-x_1=8\ cm$。（误差较大）

例题： $\lambda=500nm$ 的平行光垂直入射于 $a=1\ mm$ 的单缝。缝后透镜焦距 $f=1\ m$。求在透镜焦平面上中央明纹到下列各点的距离：(1) 第1极小；(2) 第1次极大；(3) 第3极小。

解：(1) 对第1极小，有：

$$a\sin\theta_1=a\frac{x_1}{f}=\lambda \qquad \therefore\ x_1=\lambda\frac{f}{a}=0.5mm$$

(2) 第1次极大位置：　$x_1'=\frac{3}{2}\cdot\lambda\cdot\frac{f}{a}=0.75mm$

(3) 第3极小位置在：　$x_3=3\lambda\cdot\frac{f}{a}=1.5mm$

注 1　几何光学与波动光学的界限

$$\Delta x_0\approx 2\lambda\frac{f}{a} \qquad \Delta x_k\approx\lambda\frac{f}{a}$$

$a\downarrow$ 则 $\Delta x\uparrow$，$a\uparrow$ 则 $\Delta x\downarrow$。当 $a>>\lambda$ 时，全部明纹靠向中央明纹，无法分辨。

所以说：

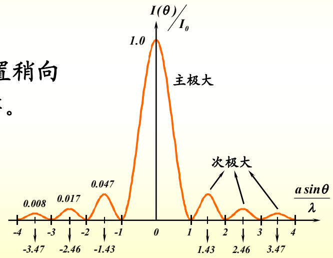
几何光学是波动光学当 $\lambda/a\rightarrow 0$ 时的极限情况。

注 2　菲涅耳半波带法是一个近似的理论。

① 无法计算各次极大的相对光强；

② 无法解释次极大位置稍向主极大方向靠拢的事实。

讨论单缝夫琅和费衍射更精确的方法是振幅矢量法。



2、振幅矢量法（矢量叠加法）：

将单缝处波面分为N个等宽波带。（N很大）

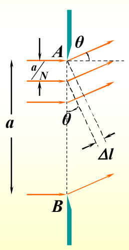
①各波带到达屏上同一点时振幅ΔA_i近似相等（均取ΔA）。

②相邻波带间光程差：

$$\Delta l=\frac{a\sin\theta}{N}$$

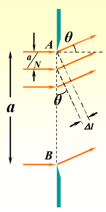
相邻波带间相位差：

$$\delta=\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{a\sin\theta}{N}$$



屏幕上 P点处光的合振动为N个同频率、同振幅、相位依次相差 δ 的振动的合成。

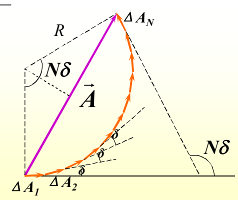
根据矢量的多边形叠加法则，各波带在屏幕上P点引起的光振动的振幅矢量形成一圆弧。



所有波带在屏幕上P点引起的合振幅为：

$$A=2R\cdot\sin\frac{N\delta}{2}=N\Delta A\frac{\sin\frac{N\delta}{2}}{\frac{N\delta}{2}}=N\Delta A\frac{\sin u}{u}$$

式中：　$u=\frac{N\delta}{2}=\frac{\pi\ a\sin\theta}{\lambda}$



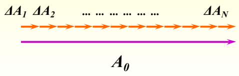
讨论

主极大

（中央明纹中心）

$A = N\Delta A\dfrac{\sin u}{u}$， $u = \dfrac{N\delta}{2} = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$

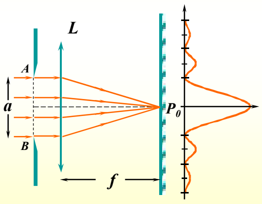
当出射光衍射角 θ 为零时，所有波带发出的光在屏幕上 P_0 点引起的振动都是同相位的，**P_0 点光强最大。**



因为 $\theta = 0$，所以 $\delta = 0$，$u = 0$

$$\Rightarrow \frac{\sin u}{u} = 1$$

$A_\theta = N\Delta A$， $I_\theta = A_\theta^2 = (N\Delta A)^2$



讨论

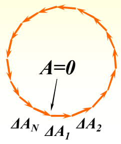
极 小

（暗纹中心）

$A = N\Delta A\dfrac{\sin u}{u}$， $u = \dfrac{N\delta}{2} = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$

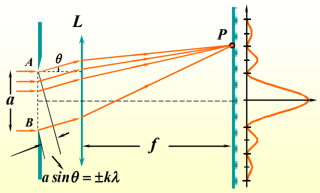
当 $N\delta = \pm 2k\pi$，即 $u = \pm k\pi$ 时，$\sin u = 0$。

$A = 0$， $I = A^2 = 0$



此时： $a\sin\theta = \pm k\lambda$

与半波带法结果一致。



讨论

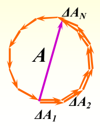
次极大

（其他明纹中心）

$A = N\Delta A\dfrac{\sin u}{u}$， $u = \dfrac{N\delta}{2} = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$

屏上任意点振幅： $A = A_0\dfrac{\sin u}{u}$

光强： $I = I_0\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2$

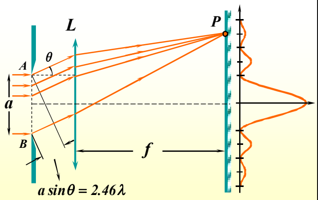


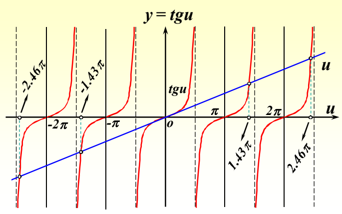
令： $\dfrac{d}{du}\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)$

$= \dfrac{u\cos u - \sin u}{u^2} = 0$

得：当 $\boxed{\mathrm{tg}\, u = u}$ 时，

光强 I 取极大值。





由图解法：

$u = \pm 1.43\pi, \pm 2.46\pi, \pm 3.47\pi, \ldots$

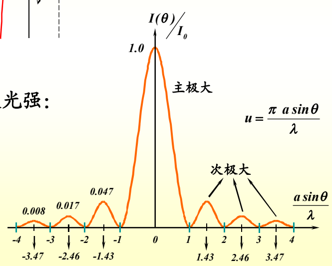
或：

$\dfrac{a\sin\theta}{\lambda} = \pm 1.43, \pm 2.46, \pm 3.47, \ldots$

取 $u = 1.43\pi$，则一级次极大光强：

$I_1 = I_0\left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2 = 0.0472 I_0$

与实验结果相符！



例题： 波长 $\lambda = 546.1nm$ 的单色平行光垂直照射 $a = 0.4mm$ 的单缝。缝后 $f = 120cm$ 处屏幕上形成衍射图样。求屏上离中央明纹 $4.1mm$ 处的相对光强。

解： 单缝衍射光强公式：

$I = I_0 \cdot \left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2$ 其中 $u = \dfrac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$

$\because\ \sin\theta \approx \dfrac{x}{f}$ $\therefore\ u = \dfrac{\pi a}{\lambda}\cdot\dfrac{x}{f} = 7.86\ rad$

相对光强： $\dfrac{I}{I_0} = \left(\dfrac{\sin u}{u}\right)^2 = 1.62\%$

在二级次极大附近。 $\left(\dfrac{I_2}{I_0} = 1.7\%\right)$

§18.3 多缝的夫琅和费衍射

双缝干涉光屏上条纹亮度很小。

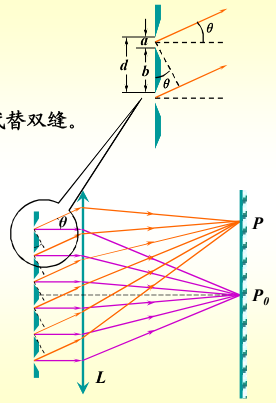
解决办法：多缝干涉

——以平行、等宽、等距的多缝代替双缝。

a：透光缝宽度

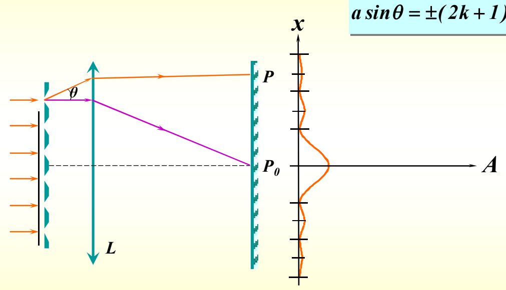
b：挡光部分宽度

$d=a+b$：相邻两缝的间距

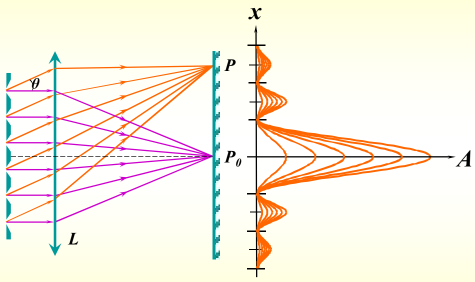


所有单缝衍射条纹在屏上的位置完全重合

$$a\sin\theta=\pm(2k+1)\lambda/2$$



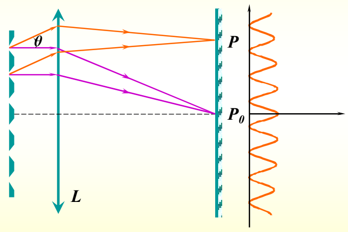
多缝衍射条纹比单缝衍射条纹明亮很多！



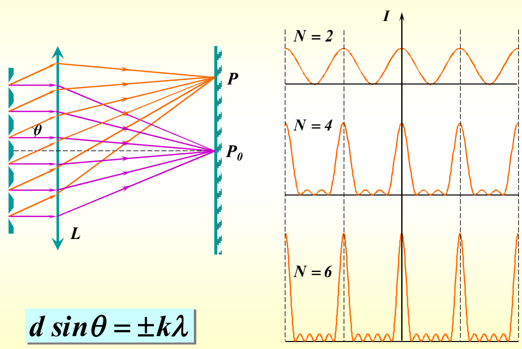
$$a\sin\theta=\pm(2k+1)\lambda/2$$

狭缝间的干涉条纹也完全重合。

$$d\sin\theta=\pm k\lambda$$

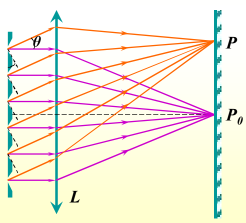


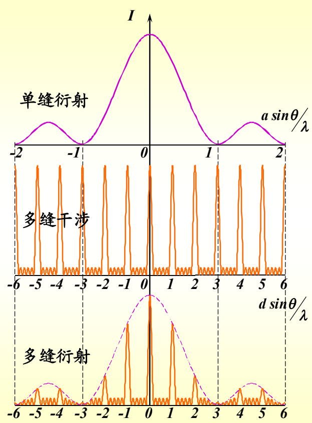
多缝干涉明条纹比双缝干涉细而明亮。



$$d\sin\theta=\pm k\lambda$$

多缝夫琅和费衍射的光强分布为各单缝衍射和多缝干涉的总效果。





所以满足下式：（与双缝干涉公式相同!）

$$d\sin\theta=\pm k\lambda \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

的位置为多缝干涉的主极大，且光强为每条单缝在该处光强的 N^2 倍!

$$I=N^2I_\theta$$

如：$\begin{cases}\text{双缝} & I=4I_\theta\\ \text{6 缝} & I=36I_\theta\end{cases}$

单缝衍射对多缝干涉的影响——缺级。

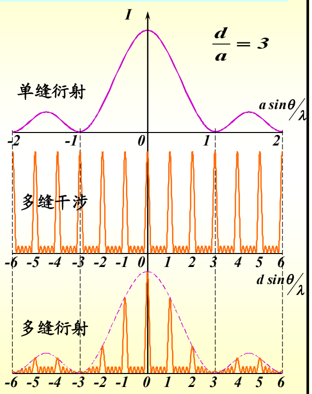
单缝衍射暗纹满足:

$$a\sin\theta=\pm k'\lambda$$

多缝干涉明纹满足:

$$d\sin\theta=\pm k\lambda$$

屏幕上总的光强分布为多缝干涉和各单缝衍射光强的乘积。

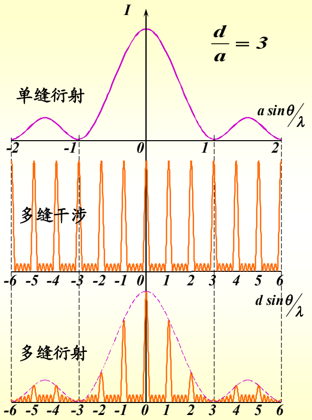


$$a\sin\theta=\pm k'\lambda$$
$$d\sin\theta=\pm k\lambda$$

当相邻两缝的间距为每条单缝宽度的整倍数时，即：

$$\frac{d}{a}=\frac{a+b}{a}=\frac{k}{k'}=m\ (\text{整数})$$

则多缝干涉的 k 级极大处正好是单缝衍射的 k'级极小处，所以级数为 m 整倍数的干涉明条纹将不出现，这种情况称为缺级现象。

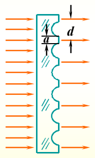


§18.4 衍 射 光 栅

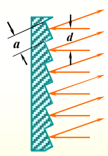
（多缝衍射的应用）

大量平行、等宽、等距狭缝排列起来形成的光学元件称为光栅。

实用光栅每毫米内有几十至上千条刻痕。一块 $100\times100\,mm^2$ 的光栅可有 60000 至 120000 条刻痕。



透射式光栅



反射式光栅

光栅主要用于光谱分析，测量光的波长、光的强度分布等。

1、光栅方程:

光栅衍射即为上节所讨论的多缝衍射。所以光栅衍射明条纹的衍射角满足:

$$d\sin\theta=\pm k\lambda \quad (k=0,1,2,\ldots)$$

称为光栅方程。

式中 d 为透光缝的宽度 a 和挡光部分的宽度 b 之和，称为光栅常数:

$$d=a+b$$

例18-5: He—Ne激光器发出波长 $\lambda=632.8nm$的红光，垂直入射于每厘米有6000条刻线的光栅上。求各级明纹衍射角。

解: 光栅常数 $d=\dfrac{1}{6000}cm=1667nm$

令 $\theta=\pi/2$　得: $k_{max}=d/\lambda=2.63$

即只能看到0、±1、±2级条纹。

一级明纹衍射角: $\theta_1=\arcsin\lambda/d=22.31^\circ$

二级明纹衍射角: $\theta_2=\arcsin 2\lambda/d=49.39^\circ$

2、光栅光谱:

当入射光为单色光时，由于光栅每单位长度上有大量的狭缝，所以光栅衍射明条纹非常细，而明条纹间是大片的暗区。利用光栅可以非常精确地测量单色光的波长。

当入射光为复色光时，由于明条纹衍射角与入射光波长有关。所以除零级条纹外，其余各级条纹都随波长不同而散开，形成光栅衍射光谱。

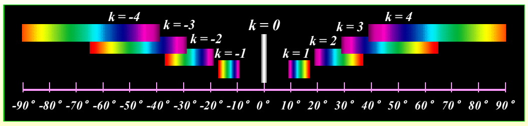
例18-7: 一每厘米有 4000 条刻线的光栅，以白光垂直入射。试描述其衍射光谱。

解: 光栅常数

$$d=\frac{1}{4000}cm=2500nm$$

$$\theta=\arcsin k\lambda/d$$

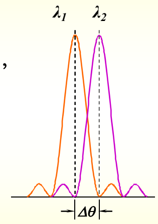
	(紫端)θ_V	(红端)θ_R
中央明纹	0	0
1级光谱	9.2°	17.7°
2级光谱	18.7°	37.4°
3级光谱	28.7°	65.8°
4级光谱	39.8°	> 90°



3、光栅的分辨本领:

波长很接近的两条光谱线（λ_1、λ_2）能否被分辨，还取决于谱线宽度$\Delta\lambda$。

瑞利分辨判据: 当一条谱线的k级主极大与另一谱线同级主极大的相邻极小重合时，两条谱线恰能分辨。



可以证明: 光栅的分辨本领

$$R=\frac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda}=Nk \qquad \begin{cases}\bar{\lambda}=\lambda_1+\lambda_2/2\\ \Delta\lambda=|\lambda_1-\lambda_2|\end{cases}$$

可见: ①k大，则R大（光谱线分得更开）；
②N大，则R大（条纹更细）。

例18-8: 宽为2.54cm 的光栅有10000条刻线。当钠黄光垂直入射时，其λ_1= 589.00 nm 和λ_2= 589.59 nm 钠双线的1级主极大对应的角距离为多大?

解: 光栅常数: $d=\dfrac{2.54\times10^7}{10^4}nm=2540nm$

由: $d\sin\theta=\lambda$

得: $\begin{cases}\theta_1=\arcsin\dfrac{\lambda_1}{d}=0.234020 \quad rad\\ \theta_2=\arcsin\dfrac{\lambda_2}{d}=0.234259 \quad rad\end{cases}$

所以: $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1=2.39\times10^{-4} \quad rad$

习题18-17: 每厘米刻有4000条线的光栅（d=2500nm），计算在第2级光谱中氢原子的α（λ_α= 656nm）和δ（λ_δ= 410nm）两条谱线间的角距离。（设光垂直入射）

解: $\begin{cases}d\sin\theta_\alpha=2\lambda_\alpha\\ d\sin\theta_\delta=2\lambda_\delta\end{cases}$

求得 $\begin{cases}\theta_\alpha=\arcsin 2\lambda_\alpha/d=0.552 \ rad\\ \theta_\delta=\arcsin 2\lambda_\delta/d=0.334 \ rad\end{cases}$

所以2级光谱中，α、δ谱线间的角距离为:

$$\Delta\theta=\theta_\alpha-\theta_\delta=0.218 \ rad$$

习题 18-22： 波长为600nm的单色光垂直入射于光栅。第2、3级明纹分别出现在$sin\theta_2$=0.20和 $sin\theta_3$=0.30处，第4级缺级。求(1)光栅上相邻两缝的间距是多少？(2)光栅上狭缝的宽度为多少？(3)在–90° ~ 90° 范围内实际呈现的全部光谱级数。

解：(1) $d\sin\theta_2 = 2\lambda \quad \Rightarrow \quad d = 2\lambda / \sin\theta_2 = 6.0\mu m$

(2) $a = d/4 = 1.5\mu m$

(3) 当 $\sin\theta = 1$时，$k_{max} = d/\lambda = 10$

而实际呈现的光谱线数为（共15条）：

$0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm7, \pm9$

注：①由惠更斯—菲涅耳原理，$k=\pm10$时$\theta=\pm90°$ 。此方向上无衍射光；
②题中 $sin\theta_2$=0.20 和 $sin\theta_3$=0.30两个条件只需一个即可。

习题 18-29： 若钠双线（λ_1=589.00nm和λ_2=589.59nm）第3级两衍射明纹在衍射角为θ=10° 方向上刚好能被某光栅分辨，求：①光栅常数；②此光栅总宽度。

解：① $d\sin\theta = 3\lambda$

$\therefore\ d = \dfrac{3\lambda}{\sin\theta} = 1.02\times10^{-5}\,m$

② 由 $R = \dfrac{\bar{\lambda}}{\Delta\lambda}$ 和 $R = Nk$

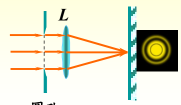
得：$N = \dfrac{\bar{\lambda}}{3\Delta\lambda} = 333$

所以光栅总宽度为： $L = Nd = 3.4mm$

§18.5 圆孔的夫琅和费衍射

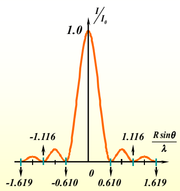
1、圆孔的夫琅和费衍射：

由于光的波动性，平行光经过小圆孔后的夫琅和费衍射图样为一个圆亮斑（爱里斑），周围有一组明暗相间的同心圆环。



爱里斑光强占总光强的84%。而1级暗环角宽度（爱里斑半角宽度）满足：（R、D为小圆孔的半径和直径）

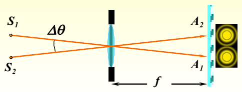
$$\sin\theta_1 = 0.610\frac{\lambda}{R} = 1.22\frac{\lambda}{D}$$



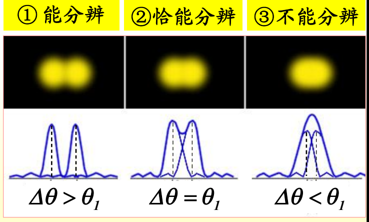
圆孔夫琅和费衍射对光学系统的成像质量有直接影响。

2、光学仪器的分辨本领（分辨率）：

当两个物点S_1、S_2很靠近时，两个爱里斑互相重叠而无法分辨。



瑞利分辨判据：
（设：S_1、S_2光强相等）



恰能分辨时的$\Delta\theta$称为最小分辨角 δθ

$\delta\theta = \theta_1 = \arcsin(1.22\dfrac{\lambda}{D})$

$\theta_1 \sim 0$时：$\delta\theta \approx 1.22\dfrac{\lambda}{D}$

最小分辨角的倒数称为光学系统的分辨本领（分辨率）R

$$R = \frac{1}{\delta\theta} = \frac{D}{1.22\lambda}$$

讨论

(1) 增大透镜的直径可提高镜头的分辨率;

(2) 设r、d为爱里斑的半径和直径，则：

$\delta\theta = 1.22\dfrac{\lambda}{D} = \dfrac{r}{f} = \dfrac{d}{2f}$ 即： $d = 2.44\lambda\dfrac{f}{D}$

$\dfrac{D}{f}$ 称为镜头的相对孔径（越大越好）。

如镜头上标：$1:2/50$ 表示：$f = 50mm$，$D = 25mm$。

(3) 近代物理指出：电子也有波动性。高能电子的波长达10^{-2} ~ 10^{-3}nm 。所以电子显微镜的分辨率远高于光学显微镜。

例18-11： 通常亮度下人眼瞳孔直径约为$3mm$，问人眼的最小分辨角是多少？远处两细丝之间的距离为$2.0\,mm$，问离开多远时恰能分辨？（取$\lambda=550\ nm$）。

解：(1) 人眼最小分辨角：

$$\delta\theta=\arcsin(1.22\frac{\lambda}{D})=1.22\frac{\lambda}{D}=2.24\times10^{-4}\,rad$$

(2) 设两细丝间距为s，细丝与人的距离为l，则恰能分辨时：

$$\delta\theta=\frac{s}{l}$$

$$\therefore\ l=\frac{s}{\delta\theta}=8.9m$$

习题18-35： 遥远天空中两颗星恰好被阿列亨（Orion）天文台的一架折射望远镜所分辨。设物镜直径为 $2.54\times30cm$，波长$\lambda=550nm$。(1)求最小分辨角；(2)若这两颗星距地球10光年，求两星之间的距离。

解：(1) 最小分辨角：

$$\delta\theta=\arcsin(1.22\frac{\lambda}{D})\approx1.22\frac{\lambda}{D}=8.81\times10^{-7}\,rad$$

(2)最小分辨角与两颗星到地球的距离 d 和两星之间的距离 s 之间的关系为：

$$\delta\theta=\frac{s}{d}$$

$$\therefore\ s=d\cdot\delta\theta=8.33\times10^{10}\,m=8.33\times10^{7}\,km$$

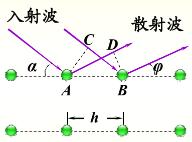
§18.6 x射线的衍射

1、同层晶面各原子散射波的干涉：

考虑以掠射角 α入射并以φ散射的x射线。

光程差：

$$\Delta L=\overline{AD}-\overline{CB}=h\,(\cos\varphi-\cos\alpha)$$



当$\Delta L=k\lambda$（$k=0,1,2,\ldots$）时，散射波干涉加强。但仅当$k=0$时，散射波最强。

所以，每一原子层对入射x光就象平面镜。入射光和反射光符合反射定律：

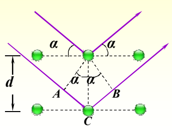
$$\boxed{\alpha=\varphi}$$

2、不同层晶面间的干涉：

相邻晶面层之间的距离 d 称为**晶格常数**。

当：$\Delta L=\overline{AC}+\overline{CB}=2d\sin\alpha=k\lambda\qquad(k=1,2,\ldots)$

不同层之间散射的x射线相互加强。



公式 $\boxed{2d\sin\alpha=k\lambda}$ 称为**布拉格方程**。

注：当 α和d一定时，仅当入射光中有波长为 $\lambda=2d\sin\alpha/k$ 的x射线时，才可观察到衍射图样。

应用： ①分析晶体结构：已知x射线波长，测晶格常数。
②测x射线波长：已知晶格结构，测x射线波长。

习题18-41： 设入射 x射线的波长从 $0.095nm$ 到 $0.130nm$。晶体的晶格常数为 $d=2.75\mathring{A}$，掠射角为 $45°$。问能否产生强反射？求出能产生强反射的那些波长。

解： 由布拉格方程：

$$2d\sin\alpha=k\lambda$$

能产生强反射的波长为：

$$\lambda=\frac{2d\sin\alpha}{k}=\begin{cases}0.130nm & k=3\\ 0.097nm & k=4\end{cases}$$