2020

苏州大学 高等数学一（上）期中试卷　　共6页

考试形式：闭卷

院系________ 年级 ________ 专业 ________

学号________ 姓名________

特别提醒：请将答案填写在答题纸上，若填写在试卷纸上无效.

一． 选择题：（每小题3分，共15分）

1. 下列极限存在的是（　　）

A. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x-1}}}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^2+1}{x^4+5x^3+2}(2\cos x-1)$

C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{|x|}$　　D. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

2. 当$x\to 0$时，用"$o(x)$"表示比x高阶的无穷小，则下列式子中错误的是（　　）

A. $x\cdot o(x^2)=o(x^3)$　　B. $o(x)\cdot o(x^2)=o(x^3)$

C. $o(x^2)+o(x^2)=o(x^2)$　　D. $o(x)+o(x^2)=o(x^2)$

3. 设函数$f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$,其中$n$为正整数，则$f'(0)=$（　　）

A. $(-1)^{n-1}(n-1)!$　　B. $(-1)^n(n-1)!$　　C. $(-1)^{n-1}n!$　　D. $(-1)^n n!$

4. 设$f(x)=\begin{cases}(1+x)\arctan\dfrac{1}{x^2-1}, & |x|\neq 1\\ -1, & |x|=1\end{cases}$,则$x=-1$为$f(x)$的(　　)

A. 可去间断点　　B. 跳跃间断点　　C. 无穷间断点　　D. 连续点

5. 已知$f(x)$在$x=0$处可导，且$f(0)=0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2f(x)-2f(x^3)}{x^3}=$（　　）

A. 0　　B. $f'(0)$　　C. $-2f'(0)$　　D. $-f'(0)$

二． 填空题：（每小题3分，共15分）

1. 函数$f(x)=\dfrac{1}{x-|x|}$的连续区间是__________.

2. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos\sqrt{x}-1}{a\cdot\arctan x}, & x>0,\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 $ab=$__________.

3. 设 $y=f(x^2-y^3)$, 其中 f 可微，则 $\mathrm{d}y=$_____.

4. 曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程是__________.

5. 设 $f(t)$ 具有二阶导数，$f(\frac{1}{2}x)=x^2$, 则 $(f(f(x)))''=$__________.

三. 解下列各题：（每小题 8 分，共 40 分）

1. 求下列函数的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\ln\left(1+\dfrac{4}{x}\right)-\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$; （2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}$.

2. 设当 $x\to 0$ 时，$(1-\cos x)\ln\left(1+x^2\right)$ 是比 $x\sin x^n$ 高阶的无穷小，而 $x\sin x^n$ 是比 $\left(\mathrm{e}^{x^2}-1\right)$ 高阶的无穷小，求正整数 n.

3. 设 $\begin{cases}x=\sin t,\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$ (t 为参数), 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}$.

4. 已知 $y=\dfrac{x}{x^2-3x+2}$, 求 $y^{(n)}(x)$.

5. 设函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{x^2\mathrm{e}^{t(x-2)}+ax-1}{\mathrm{e}^{t(x-2)}+1}$, 若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，求常数 a.

四. 解下列各题：（每小题 10 分，共 30 分）

1. 已知函数 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3x+2}{x-2}=2$, 证明：$f(x)$ 在 $x=2$ 处可导，并求 $f'(2)$.

2. 设 $0<x_1<3, x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,2,\cdots)$,

（1）利用极限存在准则证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在； （2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)$, 证明一定存在长度为 $\dfrac{b-a}{2}$ 的区间 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$, 使 $f(\alpha)=f(\beta)$, 即在区间 $[a,\dfrac{a+b}{2}]$ 上一定存在 α，使得 $f(\alpha)=f(\alpha+\dfrac{b-a}{2})$.

参考答案

一、选择

(1) B　　(2)D　　(3) A　　(4) A　　(5) D

二、填空

1. $(-\infty,0)$　　2. $-\dfrac{1}{2}$

3. $\dfrac{2xf'(x^2-y^3)}{1+3y^2f'(x^2-y^3)}dx$　　4. $y=x+1$

5. $768x^2$

三、解答题

1. (1) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(1+\dfrac{4}{x})-\ln(1-\dfrac{1}{x})]=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\ln(1+4t)-\ln(1-t)}{t}=5$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e-e^{\cos x}}{\sqrt[3]{1+x^2}-1}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e(1-e^{\cos x-1})}{x^2/3}=3e\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{3}{2}e$

2. $(1-\cos x)\ln(1+x^2)=O(x^4)$，$e^{x^2}-1=O(x^2)$，$x\sin x^n=O(x^{n+1})$ $\Rightarrow n=2$

3. $\dfrac{dy}{dx}=t$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{1}{\cos t}$，$\dfrac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}$

4. $y^{(n)}=(\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{1}{1-x})^{(n)}=2(-1)^n n!(x-2)^{-(n+1)}+n!(1-x)^{-(n+1)}$

5. $f(x)=\begin{cases}x^2,x>2\\ \dfrac{2a+3}{2},x=2\\ ax-1.x<2\end{cases}$　　$\Rightarrow a=\dfrac{5}{2}$

四、解答题

1. $\lim\limits_{x \to 2}(f(x)-3x+2)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to 2} f(x)=4$，故而 $f(2)=4$

由 $2=\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{f(x)-3x+2}{x-2}=\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{f(x)-4-3(x-2)}{x-2}=\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{f(x)-4}{x-2}-3$ 有

$$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-4}{x-2}=5,$$

故 $f'(2)$ 存在且 $f'(2)=5$.

2.（1） $x_{n+1}=\sqrt{-(x_n-\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}} \le \frac{3}{2}$，故对任意的 $n \ge 2$ 有 $x_n \in [0,\frac{3}{2}]$　　（4）

（2） $(x_{n+1})^2-(x_n)^2=3x_n-2x_n^2=3x_n(1-\frac{2}{3}x_n) \ge 0$，故任意的 $n \ge 2$ 有 x_n 单增（4）

（3）设 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n=a \quad \Rightarrow a=\sqrt{3a-a^2} \Rightarrow a=\frac{3}{2}$.　（2）

3. 令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{2})$，　（3）

若 $f(\frac{b+a}{2})=f(a)$，取 $\alpha=0$ 即可；（2）

若 $f(\frac{b+a}{2}) \ne f(a) \quad \Rightarrow F(\frac{b+a}{2})F(a)<0 \Rightarrow \exists \alpha \in (0,\frac{b+a}{2})$ 使得 $F(\alpha)=0$.（5）