2019 苏州大学 高等数学一（上）期末试卷 共6页

考试形式：闭卷

院系________ 年级________ 专业________

学号________ 姓名________ 成绩________

特别提醒：请将答案填写在答题纸上，若填写在试卷纸上无效.

一. 选择题：（每小题3分，共15分）

1. 使 $f(x)=\sqrt[3]{x^2(1-x^2)}$ 不符合罗尔定理条件的区间是(　　)

A. $[-1,1]$　　B. $[0,1]$　　C. $[-1,0]$　　D. $[\frac{3}{5},\frac{4}{5}]$

2. $f''(x_0)=0$ 是点 $(x_0,f(x_0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点的(　　)

A. 充分条件　B. 必要条件　C. 充要条件　D. 既不充分也不必要条件

3. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图形如图1，则导函数 $f'(x)$ 的图形为(　　)

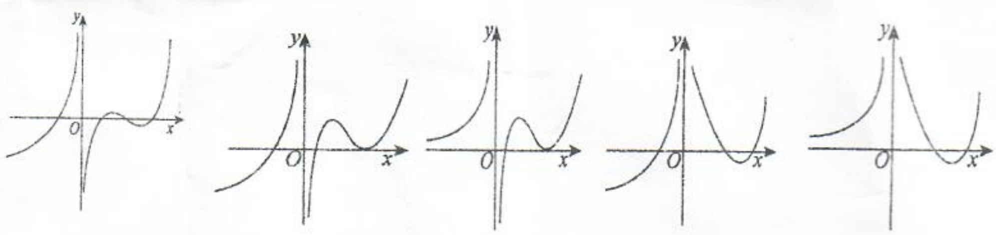


图1　　(a)　　(b)　　(c)　　(d)

A. (a)　　B. (b)　　C. (c)　　D. (d)

4. 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围成图形的面积可表示为(　　)

A. $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$　　B. $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

C. $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$　　D. $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

5. 若广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^k}$ 收敛，则 k (　　)

A. $k>1$　　B. $k\geq 1$　　C. $k<1$　　D. $k\leq 1$

二． 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

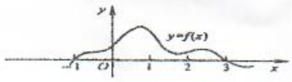
1. 设曲线 $y=\left(\dfrac{x-a}{x}\right)^{x}$ 的水平渐近线为 $y=\mathrm{e}$, 则常数 $a=$____________ .

2. 定积分 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}+1)\mathrm{d}x=$____________ .

3. 已知 $f'(x)=\dfrac{1}{x(1+2\ln x)}$, 且 $f(1)=1$, 则 $f(x)=$____________ .

4. 设 $f(x)$ 具有二阶连续导数， $y=f(x)$ 的图形如右图所示，则定积分 $\int_{-1}^{3}f''(x)\,\mathrm{d}x$

____________ .（选填 " >0 "，" <0 " 或 " $=0$ "）



5. 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$, 且 $f[\varphi(x)]=\ln x$, 则 $\int\varphi(x)\,\mathrm{d}x=$____________ .

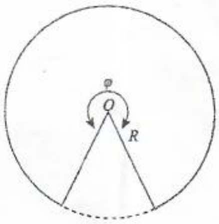
三．解下列各题：（每小题 10 分，共 40 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}t\ln t\,\mathrm{d}t}{\arctan x^4}$.

2. 讨论方程 $\ln x=ax\,(a>0)$ 有几个实根？

3. 计算定积分 $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$.

4. 从一块半径为 R 的圆铁片上挖去一个扇形做成一个漏斗（如图），问留下的扇形的圆心角 φ



取多大时，做成的漏斗的容积最大？

四．解下列各题：（每小题 10 分，共 30 分）

1. 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\ge0$ 时， $f(x)F(x)=x\mathrm{e}^{x}$. 已知 $F(0)=1, F(x)>0$, 试求 $f(x)$.

2. 求摆线 $\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ 的一拱 $(0\le t\le2\pi)$，直线 $y=0$ 所围成图形绕直线 $y=2a$ 旋转一周所成立体的体积.

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b](a>0)$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$. 证明：$\exists\xi,\eta\in(a,b)$, 使得 $\left(\dfrac{\eta}{\xi}\right)^{n-1}=f(\xi)+\dfrac{\xi}{n}f'(\xi)$, 其中 $n\ge1$ 为正整数.

参考答案

一、选择题

1. A　**2.** D　**3.** D　**4.** B　**5.** A

二、填空题

1. -1　**2.** $\frac{\pi}{2}$　**3.** $\frac{1}{2}\ln|1+2\ln x|+1$　**4.** <0　**5.** $x+2\ln|x-1|+C$

三、解答题

1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}t\ln t dt}{\arctan x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x\cdot\ln\cos x\cdot\sin x}{4x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{4x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{4x^2}=-\dfrac{1}{8}$

2. $a>\dfrac{1}{e}$，没有实根；$a=\dfrac{1}{e}$，有一个实根；$0<a<\dfrac{1}{e}$，有两个实根

3. $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx=a^4(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 tdt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 tdt)=a^4(\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{4\cdot2})\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{a^4\pi}{16}$

4. $V=\dfrac{1}{3}\pi(\dfrac{\varphi R}{2\pi})^2\sqrt{R^2-(\dfrac{\varphi R}{2\pi})^2}=\dfrac{R^3}{12\pi}\varphi^2\sqrt{1-\dfrac{\varphi^2}{4\pi^2}}$，当$\varphi^2=\dfrac{8\pi^2}{3}$，即$\varphi=\dfrac{2\sqrt{6}\pi}{3}$时，最大

四、解答题

1. $F'(x)=f(x)\Rightarrow(\dfrac{1}{2}F^2(x))'=F(x)f(x)=xe^x$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}F^2(x)=\int xe^x dx+C=xe^x-e^x+C$$

由$F(0)=1\Rightarrow F^2(x)=2(xe^x-e^x)+3$，即有$f(x)=\dfrac{xe^x}{F(x)}=\dfrac{xe^x}{\sqrt{2(xe^x-e^x)+3}}$

2. $V=\pi(2a)^2(2\pi a)-\int_0^{2\pi a}\pi(y-2a)^2dx=8\pi^2a^3-\int_0^{2\pi}\pi a^3(\cos t+1)^2(1-\cos t)dt$

$$=8\pi^2a^3-\pi a^3\int_0^{2\pi}(\cos t+1)^2(1-\cos t)dt=7\pi^2a^3$$

3. 由拉格朗日中值定理有：存在$\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $(x^n)'|_{x=\eta}=\dfrac{b^n-a^n}{b-a}\Rightarrow n\eta^{n-1}=\dfrac{b^n-a^n}{b-a}$

$$(x^nf(x))'|_{x=\xi}=\frac{b^nf(b)-a^nf(a)}{b-a}=\frac{b^n-a^n}{b-a}\Rightarrow n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^nf'(\xi)=\frac{b^n-a^n}{b-a}$$

即 $n\eta^{n-1}=n\xi^{n-1}f(\xi)+\xi^nf'(\xi)\Rightarrow(\dfrac{\eta}{\xi})^{n-1}=f(\xi)+\dfrac{\xi}{n}f'(\xi)$.