第23章 狭义相对论基础

力学的研究是建立在时间和空间测量的基础上的。经典力学认为时间间隔和空间间隔的测量是不依赖于参照系的选择的，是绝对的。在此基础上建立的经典力学精确地描述了宏观物体低速运动的情况。如：机器的运转、天体的运动等。

但当物体以与光速可比拟的速度运动时，经典的绝对时空观点与实际情况出现了很大的偏差。此时，要以相对论时空观点来描述高速物体的运动情况。

➤经典时空观

(1) 伽利略变换和经典时空观

➤相对论时空观

(2) 狭义相对论的两个基本原理

(3) 洛仑兹变换和相对论时空观

(4) 同时的相对性、长度收缩、时间延缓

(5) 相对论速度变换

➤狭义相对论动力学

(6) 狭义相对论动力学基础

伽利略变换、经典时空观

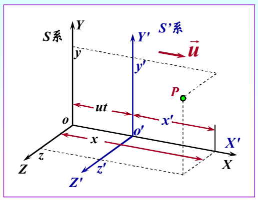
运动的描述是相对的，即在不同的参照系中观察同一物体的运动时，空间位置和运动速度是不同的。其差别由两个参照系的相对运动所决定。但经典力学（牛顿力学）认为：在不同的惯性参照系中，时间间隔和空间间隔的测量不依赖于参照系的选择，而具有绝对的意义。

1、伽利略坐标变换：

设 S、S' 为两个惯性参照系，对应轴相互平行，X、X' 轴重合，S' 相对 S 以匀速 u 沿 X 轴正向运动。

质点 P 在 S、S' 系中的时空坐标为：

$S:(x, y, z, t)$，$S':(x', y', z', t')$



设 $t = t' = 0$ 时，o、o' 重合，则：

正变换：$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$　　逆变换：$\begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$

称为伽利略坐标变换，由此变换可得牛顿的绝对时空观。

2、经典的绝对时空观：

(1) 同时的绝对性：

设某事件在 S 系中发生在 t 时刻，在 S' 系中发生在 t' 时刻。

则：$t = \dfrac{x - x'}{u} = \dfrac{ut'}{u} = t'$

即在 S 系和 S' 系中，同一事件发生在同一时刻。

(2) 时间间隔的绝对性：

设某事件在 S 系中的持续时间为 $\Delta t = t_2 - t_1$，在 S' 系中的持续时间为 $\Delta t' = t_2' - t_1'$。

则由同时的绝对性得：

$$t_2 - t_1 = t_2' - t_1' \quad 或 \quad \Delta t = \Delta t'$$

即：在不同的惯性系中，同一事件持续的时间相同。

或：S 系和 S' 系中的时钟走得一样快。

(3) 空间间隔的绝对性:

设一把尺在 S 系中长为 $\Delta x = x_2 - x_1$，在 S' 系中长为 $\Delta x' = x'_2 - x'_1$。

则由伽利略变换:

$$x_2 - x_1 = (x_2' + ut_2') - (x_1' + ut_1') \xlongequal{t_1'=t_2'} x'_2 - x'_1$$

即：空间间隔的测量不依赖于惯性参照系的选择。

或：S系中的尺在S'系中长度不变。

(4) 伽利略相对性原理:

由伽利略坐标变换式:

正变换: $\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$ 逆变换: $\begin{cases} x = x' + ut' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$

可得速度变换式:

$\begin{cases} v_x' = v_x - u \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases}$ $\begin{cases} v_x = v_x' + u \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}$

由速度变换式: $\begin{cases} v_x' = v_x - u \\ v_y' = v_y \\ v_z' = v_z \end{cases}$ $\begin{cases} v_x = v_x' + u \\ v_y = v_y' \\ v_z = v_z' \end{cases}$

得加速度变换式: $\begin{cases} a_x' = a_x \\ a_y' = a_y \\ a_z' = a_z \end{cases}$

所以: $\begin{cases} f_x' = ma_x' = ma_x = f_x \\ f_y' = ma_y' = ma_y = f_y \\ f_z' = ma_z' = ma_z = f_z \end{cases}$ 或: $\boxed{\vec{F}' = m\vec{a}' = m\vec{a} = \vec{F}}$

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{F}' = m\vec{a}'$$

伽利略相对性原理:

在所有惯性系中，牛顿定律的形式是完全相同的。

或：**力学定律的形式对伽利略变换是不变的。**

3、绝对时空观的困难:

(1) 因果关系中时序颠倒的问题;

(2) 超新星爆炸持续时间的问题;

(3) 经典电磁理论中光速不变问题;

(4) 微观粒子的静止寿命和运动寿命不同的问题。

…… ……

狭义相对论的两个基本原理

*1905*年爱因斯坦在《论动体的电动力学》一文中提出了狭义相对论的两个基本假设，从而建立了相对论理论。而牛顿力学则作为相对论在低速情况下的一个特例。

(1) 狭义相对性原理:

物理定律的形式（力的、光的、电磁的等）在所有惯性系中都是相同的。即所有惯性参照系都是等价的。

狭义相对性原理是对伽利略相对性原理的推广。它指出了不可能借助于任何物理测量来识别一个惯性系究竟是固有的运动还是固有的静止。从而否定了以太的存在以及绝对运动和绝对静止的观念。

(2) 光速不变原理:

在任何惯性系中，光在真空中的速率都相等。

洛仑兹坐标变换、相对论时空观

1、洛仑兹坐标变换:

洛仑兹变换:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

洛仑兹逆变换:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + ut'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \end{cases}$$

注:

(1) 洛仑兹变换把空间测量与时间测量联系了起来。时间作为和空间地位相同的一个坐标而出现，从而导致了统一的四维时空概念。

(2) 若 $u \geq c$，则洛仑兹公式将失去意义。说明两个参照系之间的相对速率不能大于或等于 c。而参照系总是建立在某个物体（或物体组）上的。因此，一物体相对于另一物体的速率不可能大于光速。或:

真空中的光速 c 是一切实物物体运动速率的极限。

(3) 若 $u << c$，洛仑兹变换式转换为伽利略变换式。

同时的相对性、长度收缩、时间延缓

同时的相对性

设 *A*、*B* 两事件的时空坐标为:

$$\begin{cases} S:\ A(x_1, 0, 0, t_1),\ B(x_2, 0, 0, t_2) \\ S':\ A(x_1', 0, 0, t_1'),\ B(x_2', 0, 0, t_2') \end{cases}$$

则: $t_1 = \dfrac{t_1' + \dfrac{u}{c^2}x_1'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$，　$t_2 = \dfrac{t_2' + \dfrac{u}{c^2}x_2'}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$

所以: $$t_2 - t_1 = \frac{(t_2' - t_1') + \dfrac{u}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

讨论: $t_2-t_1=\dfrac{(t_2'-t_1')+\frac{u}{c^2}(x_2'-x_1')}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$

(1) 若 S' 系中，两事件发生于不同地点、同一时刻，即：

$x_2'\neq x_1'$、$t_2'=t_1'$，则 $t_2\neq t_1$。

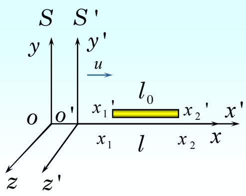
不同地点，同一时刻两事件的同时性是相对的。

(2) 若 S' 系中，两事件发生于同一地点、同一时刻，即：

$x_2'=x_1'$、$t_2'=t_1'$，则 $t_2=t_1$。

同一地点，同一时刻两事件的同时性是绝对的。

长度收缩



假设尺子和 S' 系以 u 向右运动，

S' 系中测量相对静止的尺子长度为

$\Delta x'=x_2'-x_1'=l_0$

在 S 系中同时测量运动的尺子的两端

$t_1=t_2 \qquad \Delta t=0$

$\Delta x=x_2-x_1=l$

$$\Delta x'=\frac{\Delta x-u\cdot\Delta t}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

$$\boxed{l=l_0\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

l_0 — 固有长度

l —相对论长度

结论：

（1）观察运动的物体其长度要收缩，收缩只出现在运动方向。

（2）同一物体速度不同，测量的长度不同。

（3）低速空间相对论效应可忽略。

（4）长度收缩是相对的，S 系看 S' 系中的物体收缩，反之亦然。

例题： 固有长度为 $5m$ 的飞船以 $u=9\times10^3\ m/s$ 的速率相对于地面（假定为惯性系）匀速飞行。从地面上测量，它的长度是多少？

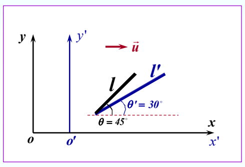
由题意： $u=9\times10^3\,m/s$，$l_0=5m$ （固有长度）

所以： $l=l_0\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}=5\sqrt{1-\dfrac{(9\times10^3)^2}{(3\times10^8)^2}}\approx4.999999998\,(m)$

可见：即使对于 $u=9\times10^3\ m/s$ 这样大的速率来说，长度收缩效应也是很难测量出来的。

若：$u=0.2c$，则 $l=4.899\ m$； $u=0.4c$，则 $l=4.583\ m$；$u=0.9c$，则 $l=2.179\ m$

例题： 在 S' 系中，一米尺与 $o'x'$ 轴成 30° 角，若要使这米尺与 x 轴成 45° 角。则：(1) S' 系应以多大速率相对于 S 系运动？(2) 在 S 系中该米尺有多长？



(1) 固有长度：$l_0=l'\cdot\cos30^\circ$

$l\cdot\sin45^\circ=l'\cdot\sin30^\circ$

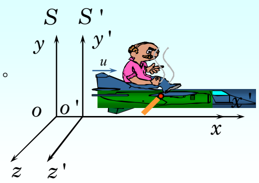
$l\cdot\cos45^\circ=l_0\cdot\sqrt{1-u^2/c^2}$

$l'\cdot\sin30^\circ=l'\cdot\cos30^\circ\cdot\sqrt{1-u^2/c^2}$

$u=0.816\,c$

(2) $l=\sqrt{l_x^2+l_y^2}=0.707\,(m)$

时间延缓



在 S' 系同一地点 x' 处发生两事件。

S' 系记录分别为 t_1' 和 t_2'。

$\Delta x'=0$

$\Delta t'=t_2'-t_1'=\tau_0$

固有时： 相对事件静止的参照系所测量的时间。

在 S 系测得两事件时间间隔

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+u\cdot\Delta x'/c^2}{\sqrt{1-(u/c)^2}}=\boxed{\frac{\tau_0}{\sqrt{1-(u/c)^2}}}$$

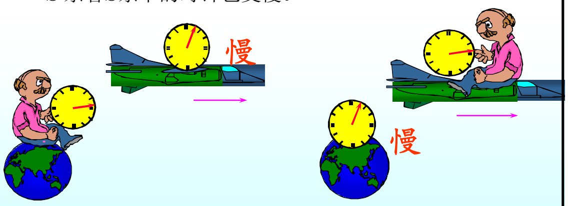
结论：

（1）运动的时钟变慢。不同系下事件经历的时间间隔不同。

（2）静止的时钟走的最快。固有时间最短。

（3）低速空间相对论效应可忽略。

（4）时钟变慢是相对的，S系看S'系中的时钟变慢，反之S'系看S系中的时钟也变慢。



例题：一飞船以$u = 9\times 10^3\ m/s$的速率相对于地面（假定为惯性系）匀速飞行。飞船上的钟走了$5\,s$的时间，用地面上的钟测量经过了多少时间？

由题意： $u = 9\times10^3\,m/s,\ \tau_0 = 5s$

所以： $$\Delta t = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{5}{\sqrt{1-\frac{(9\times10^3)^2}{(3\times10^8)^2}}} \approx 5.000000002\,(s)$$

可见：即使对于$9\times 10^3\ m/s$这样大的速率来说，时间延缓效应也是很难测量出来的。

若：$u = 0.2c$，则$\Delta t = 5.103\ s$； $u = 0.4c$，则$\Delta t = 5.455\ s$； $u= 0.9c$，则$\Delta t = 11.471s$

例题：带正电的π介子是一种不稳定的粒子。静止时的平均寿命为$2.5\times 10^{-8}\,s$，然后衰变为一个μ介子和一个中微子。设有一束π介子经加速器加速获得$u = 0.99\,c$的速率，并测得它在衰变前通过的平均距离为$52m$。这些测量结果是否一致？

若以绝对时间的概念，π介子在衰变前通过的距离为：

$$0.99\times3\times10^8\times2.5\times10^{-8} = 7.4\,m$$ 与实验结果不符。

若考虑相对论时间延缓效应，则$2.5\times 10^{-8}\,s$为固有时。

当π介子以$0.99\,c$的速率运动时，实验室测得的平均寿命为：

$$\Delta t = \tau_0 \Big/ \sqrt{1-u^2/c^2} = 1.8\times10^{-7}\ s$$

即在实验室测得它通过的平均距离为：

$$u\cdot\Delta t = 53\,m$$ 与实验结果相符。

例题：从π介子在其中静止的参照系来考虑π介子的平均寿命。（各数据参照例题2）

从π介子参照系看来，实验室的运动速率为$u = 0.99\,c$，实验室中测得的距离$l_0= 52\ m$为固有长度。在π介子参照系中测量此距离应为：

$$l = l_0\sqrt{1-u^2/c^2} = 52\times\sqrt{1-(0.99)^2} = 7.3\,m$$

而实验室飞过这一段距离所用的时间为：

$$\Delta t = l/u = 7.3/0.99c = 2.5\times10^{-8}\ s$$

这正好是π介子的平均静止寿命。

相对论速度变换

速度在S系和S'系中的定义分别为：

S系： $v_x = \dfrac{dx}{dt},\ v_y = \dfrac{dy}{dt},\ v_z = \dfrac{dz}{dt}$

S'系： $v_x' = \dfrac{dx'}{dt'},\ v_y' = \dfrac{dy'}{dt'},\ v_z' = \dfrac{dz'}{dt'}$

在洛仑兹坐标变换式中，对t'求导，得洛仑兹速度变换式：

$$v_x' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}-u\right)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\left(1-\frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{v_x-u}{1-\frac{u}{c^2}v_x}$$

$$v_y' = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'/dt}{dt'/dt} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\left(1-\frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{u}{c^2}v_x}$$

$$v_z' = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'/dt}{dt'/dt} = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1-\frac{u}{c^2}v_x}$$

洛仑兹速度变换：

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$
$$v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$
$$v_z' = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

洛仑兹速度逆变换：

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{u}{c^2}v_x'}$$
$$v_y = \frac{v_y'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2}v_x'}$$
$$v_z = \frac{v_z'\sqrt{1-\beta^2}}{1 + \frac{u}{c^2}v_x'}$$

$$v_x' = \frac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x},\quad v_y' = \frac{v_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x},\quad v_z' = \frac{v_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - \frac{u}{c^2}v_x}$$

(1) 在垂直于 x 方向 $v_y' \neq v_y$、$v_z' \neq v_z$，是因为 S 系和 S' 系中采用了不同的时间坐标所致；

(2) 当 $u << c$ 时，洛仑兹速度变换将回到伽利略速度变换；

(3) 若 S' 系中一光束沿 x' 方向以 c 传播，则在 S 系中该光束的速度为：

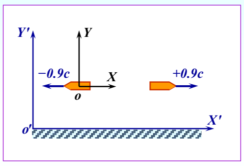
$$v_x = \frac{c+u}{1+\frac{u}{c^2}c} = c$$

可见：洛仑兹速度变换符合光速不变原理。

例题： 地面上空两飞船分别以 $+0.9c$ 和 $-0.9c$ 的速度向相反方向飞行，求其中一艘飞船相对另一艘飞船的速度。

设 S 系固定在速度为 $-0.9c$ 的飞船上，则地面对 S 系的速度为 $u = +0.9c$ 。

以地面为 S' 系，则另一飞船在 S' 系中的速度为 $v_x' = 0.9c$ 。



由洛仑兹速度逆变换式：

$$v_x = \frac{v_x' + u}{1 + \frac{u}{c^2}v_x'} = \frac{0.9c + 0.9c}{1 + 0.9 \times 0.9} = \frac{1.80}{1.81}c = 0.994c$$

- 相对于地面来说，两飞船的“相对速度”的确等于 $1.8\,c$ 。
- 但相对一个物体来说，它对任何其他物体或参照系的速度不可能大于 c，这才是相对论中速度概念的真正含义。

狭义相对论动力学基础

1、相对论质量：

在相对论力学中，动量守恒定律仍然是成立的，且动量仍定义为：

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

在牛顿力学中，质量 m 是与物体运动速度无关的常量。

而在相对论力学中，物体质量与其运动速度有关。

可以证明：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

式中：m_0 是物体相对参照系静止时的质量，称为**静质量**；

m 是物体相对参照系运动时的质量，称为**相对论质量**。

注：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(1) 式中 v 是指物体相对某参照系的运动速率。

(2) 当 $v << c$ 时，$m \approx m_0$ 。此时运动物体的质量近似等于其静质量。这就是牛顿力学的结果。

(3) 若 $v \to c$ ，则 $m \to \infty$ 。这说明，在真空中的光速 c 是一切物体运动速度的极限。

例：当 $v = 10^4$ m/s 时，$m = 1.000\,000\,001\,m_0$

当 $v = 0.98c$ 时（如被加速器加速的电子），$m = 5.03\,m_0$

在相对论中，相对论动量可表示为：

$$\vec{p}=m\vec{v}=\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

质点所受的力，仍然用质点动量的变化率来定义：

$$\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)$$

而用加速度表示的牛顿第二定律公式：

$\vec{F}=m\vec{a}=m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ 在相对论力学中不再成立。

2、相对论动能：

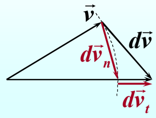
在相对论力学中，静质量为 m_0，速率为 v 的质点的动能仍定义为：将该质点的速率从零加速到 v 的过程中，合外力对该质点所做的功。

设质点在外力 F 作用下产生位移 dr，则：

$$dE_k=\vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{d(m\vec{v})}{dt}\cdot d\vec{r}=\vec{v}\cdot d(m\vec{v})$$

$$=m\vec{v}\cdot d\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{v}\,dm$$

即： $dE_k=mvdv+v^2dm \qquad \cdots\cdots(1)$



$$\vec{v}\cdot d\vec{v}=\vec{v}\cdot(d\vec{v}_n+d\vec{v}_t)=\vec{v}\cdot d\vec{v}_t=vdv$$

$dE_k=mvdv+v^2dm \qquad \cdots(1)$

又由相对论质量公式： $m=m_0\Big/\sqrt{1-v^2/c^2}$

得： $m^2c^2-m^2v^2=m_0^2c^2$

两边取微分： $2mc^2dm-2mv^2dm-2m^2vdv=0$

或： $c^2dm=v^2dm+mvdv \qquad \cdots\cdots(2)$

比较(1)、(2)两式得： $dE_k=c^2dm$

两边积分得： $E_k=\int_{m_0}^{m}c^2dm=mc^2-m_0c^2$ **相对论动能公式**

$E_k=\int_{m_0}^{m}c^2dm=mc^2-m_0c^2$

注：

(1) 当 $v<<c$时： $\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=1+\dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}+\dfrac{3}{8}\dfrac{v^4}{c^4}+\cdots\approx1+\dfrac{1}{2}\dfrac{v^2}{c^2}$

则： $E_k=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-m_0c^2\approx\dfrac{1}{2}m_0v^2$

可见经典动能是相对论动能在低速情况下的特例。

(2) 当 $v\to c$ 时，$E_k\to\infty$（$m_0\neq0$ 时）。可见，静质量不为零的质点的速度不可能大于或等于光速 c。

(3) 有一种粒子（如光子）总是以光速c运动。因此，其静质量必定为零（$m_0=0$）。

3、相对论能量：

在相对论动能公式 $E_k=mc^2-m_0c^2$ 中：

$$E_0=m_0c^2$$

为质点静止时的能量，称为**静止能量**。

$$E=mc^2$$

为质点运动时的能量，称为**相对论能量**。

$$E=E_k+E_0=mc^2$$

称为相对论**质能关系式**。

$E=E_k+E_0=mc^2$

注：

(1) 在相对论中，把粒子的能量 E 和它的质量 m 直接联系在一起，说明一定的质量相应于一定的能量。两者只差一个恒定的因子 c^2。

(2) 在核反应前后，粒子的总质量会变小，称为**质量亏损**。由相对论质能关系，得：

$$\Delta E=\Delta m_0c^2$$

即质量的亏损伴随着能量的释放。

(3) 在几个粒子相互作用的过程中，最一般的能量守恒表达式为： $\sum_i E_i=\sum_i(m_ic^2)=$常量

此时： $\sum_i m_i=$常量

可见能量守恒和质量守恒在相对论中完全统一了起来。

4、相对论动量和能量的关系：

将公式：$E = mc^2$ 和 $p = mv$ 相比，得：

$$v = \frac{c^2}{E} p$$

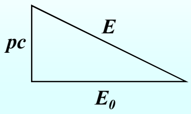
代入能量公式 $E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

$$\boldsymbol{E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 = E_0^2 + (pc)^2}$$

——**相对论动量和能量关系式**。

若以 E_0、pc 为直角边，则 E 正好是该直角三角形的斜边。

由于 $E_0 = m_0 c^2$ 是一个与惯性参照系选择无关的不变量。所以 $E^2 - c^2 p^2$ 也是一个与惯性系选择无关的不变量。



对动能是 E_k 的粒子，用 $E = E_k + m_0 c^2$ 代入下式

$$E^2 = E_0^2 + (pc)^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2$$

$$E_k^2 + 2E_k m_0 c^2 = p^2 c^2$$

当 $v \ll c$ 时，粒子的动能 E_k 比其静能 $m_0 c^2$ 小得多

$$E_k = \frac{p^2}{2m_0} = \frac{1}{2} m_0 v^2$$

——经典力学的动能表达式