期中试题

命题者：第四组全体成员　　满分：100 分

一、选择题 (3*5=15 分)

1. 以曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 为母线，z 为旋转轴的旋转曲面方程是（　　）.

A. $f(\pm\sqrt{y^2+z^2},z)=0$　　B. $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$

C. $f(y,\pm\sqrt{x^2+y^2})=0$　　D. $f(y,\pm\sqrt{x^2+z^2})=0$

2. 设直线 L 的方程为 $\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$ 则 L 的参数方程为（　　）.

A. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$　　B. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-1+t \\ z=1+3t \end{cases}$

C. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1-t \\ z=1+3t \end{cases}$　　D. $\begin{cases} x=1-2t \\ y=-1-t \\ z=1+3t \end{cases}$

3. 设 $y=f(x,t)$，t 是方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数。设 f,F 都有连续的偏导数，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$（　　）.

A. $\dfrac{f_x\cdot F_t+f_t\cdot F_x}{F_t}$　　B. $\dfrac{f_x\cdot F_t-f_t\cdot F_x}{F_t}$

C. $\dfrac{f_x\cdot F_t+f_t\cdot F_x}{f_t\cdot F_y+F_t}$　　D. $\dfrac{f_x\cdot F_t-f_t\cdot F_x}{f_t\cdot F_y+F_t}$

4. 如果函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是（　　）.

A. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

B. 若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

C. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

D. 若 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

5. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某邻域内有定义，且 $f_x(0,0)=3, f_y(0,0)=-1$，则有（　）.

A. $\mathrm{d}z|_{(0,0)} = 3\mathrm{d}x - \mathrm{d}y$.

B. 曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个法向量为 $(3,-1,1)$.

C. 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(1,0,3)$.

D. 曲线 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0,f(0,0))$ 的一个切向量为 $(3,0,1)$.

二、填空题 (3*5=15 分)

6. 点 $P(3,-1,2)$ 到直线 $\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x-y+z-4=0 \end{cases}$ 的距离为____________.

7. 已知 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} =$____________.

8. 函数 $u = xy^2 + z^3 - xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 处沿方向角 $\alpha = \frac{\pi}{3}, \beta = \frac{\pi}{4}, \gamma = \frac{\pi}{3}$ 方向的方向导数为____________.

9. 设 D 是由 $x+y=1$ 及两坐标轴围成的区域，则二重积分 $\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 可以表示为定积分 $\iint\limits_D f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$，那么 $g(x) =$____________.

10. 计算 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^2}^1 \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}\mathrm{d}y =$____________.

三、计算题 (8*5=40 分)

11. 设一向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴，y 轴，z 轴的夹角分别为 α, β, γ，且 $\alpha = 2\beta = 2\gamma, \alpha \in (0,\pi)$.
(1) 求出 $\boldsymbol{a}$ 的单位向量;
(2) 若以 $\boldsymbol{a}$ 为法向量的某一平面经过点 $(1,1,1)$，求该平面与曲面 $x^2+y^2+z^2=16$ 的交线在 xOy 平面的投影.

12. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2) & ,x^2+y^2\neq 0\\ 0 & ,x^2+y^2=0\end{cases}$. 讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性.

13. 设函数 $F(x,y,z)=x^2+2y^2-z$ 在 P 点沿 $(2,-4,-1)$ 方向函数值增加最快. 记曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$ 为 $F(x,y,z)$ 的一个等值面，并且 Σ 过点 P. 试求：

(1) P 点坐标及曲面在 P 点的切平面 Π;

(2) 设 Π 与 xOy 平面相交于直线 L，记过直线 L 并且与 Π 垂直的平面与 Σ 相交得到的曲线为 Γ. 请求出 Γ 上的 z 坐标的最大值和最小值.

14. 利用二重积分的性质估计下列积分的值:

(1) $\iint\limits_D \sin^2 x \sin^2 y \mathrm{d}\sigma$，其中 $D = \{(x, y) | 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant \pi\}$;

(2) $\iint\limits_D (x^2 + 4y^2 + 9) \mathrm{d}\sigma$，其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

15. 已知 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续. 试用二重积分证明:

(1) 设 $f(x) > 0$，则 $\int_a^b f(x) \mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)} \mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2$;

(2) $\left[\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x\right]^2 \leqslant \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x) \mathrm{d}x$（施瓦茨不等式）.

四、解答题（10*3=30 分）

16. 已知球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0$ 与一通过球心且与直线 $\begin{cases} x=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ 垂直的平面相交，试求它们的交线在 xOy 平面上的投影.

17. 设变换 $\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$，可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$（其中 z 有二阶连续偏导数），求常数 a.

18. 求下列曲面所围成的立体体积:

$z = 2x + y,\ z = xy,\ x + y = 2,\ x = 0,\ y = 0.$