§7.1 多元函数的极限与连续 §7.2 偏导数和全微分

一、填空题

1. 函数 $z=\arcsin 2x+\dfrac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$ 的定义域为 $\{(x,y)\mid y^2\le 4x$. $x^2+y^2<0,\ 0<x\le\frac{1}{2}\}$

2. 设三角形区域 D 由直线 $y=1, y=x, y=-x$ 所围，则 D 可用 X 型和 Y 型区域形式分别表示为 $D=$ $\{(x,y)\mid -x\le y\le 1, -1\le x\le 0\}\cup\{(x,y)\mid x\le y\le 1, 0\le x\le 1\}$, $D=$ $\{(x,y)\mid -y\le x\le y,\ 0\le y\le 1\}$.

3. 函数 $z=\dfrac{1}{\sin x\cdot\sin y}$ 在 $x=k_1\pi,\ y=k_2 y,\quad k_1,k_2\in Z$ 处是间断的.

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=$ $\ln 2$;

5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=$ $-\frac{1}{4}$;

6. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{y}=$ 2;

7. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$ 0;

8. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-x+xy}{x^2+y^2}=$ 1;

9. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=$ 0;

10. $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\dfrac{1}{xy})^{\frac{x^2}{x+y}}(a\ne 0)=$ $e^{\frac{1}{a}}$.

$\Big[\underbrace{\big(1+\frac{1}{xy}\big)^{xy}}_{\to e}\Big]^{\frac{x}{y(x+y)}\to\frac{1}{a}}$

二、讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2), & x^2+y^2\ne 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在 $(0,0)$ 点的连续性.

令 $x^2+y^2=t$，则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{t\to 0}t\ln t=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln t}{\frac{1}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}=0=f(0,0)$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点连续.

三、选择题

1. 二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\ 0,\ \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处（ C ）

A. 连续，偏导数存在

B. 连续，偏导数不存在

C. 不连续，偏导数存在

D. 不连续，偏导数不存在

2. 已知函数 $z=x^2e^y+(x-1)\arctan\dfrac{y}{x}$，则 $z_x(1,0)=$(c)

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

$z(x,0)=x^2$

$\therefore z_x=2x$

$z_x(1,0)=2$

四、求下列函数的偏导数：

1. $z=x^2y-xy^3$;

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy-y^3$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-3xy^2$

2. $z=\ln\cos(2x+y)$;

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-2\tan(2x+y)$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\tan(2x+y)$

3. $u=(\dfrac{x}{y})^z$

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=z\cdot(\dfrac{x}{y})^{z-1}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{z\cdot x^{z-1}}{y^z}$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=z\cdot(\dfrac{x}{y})^{z-1}\cdot(-\dfrac{x}{y^2})=-\dfrac{z\cdot x^z}{y^{z+1}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=(\dfrac{x}{y})^z\cdot\ln(\dfrac{x}{y})$

4. $u=\int_{xz}^{yz}e^{t^2}dt$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=-e^{x^2z^2}\cdot z$

$\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^{y^2z^2}\cdot z$

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=ye^{y^2z^2}-xe^{x^2z^2}$

五、求旋转曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}$ 与平面 $x=1$ 的交线在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处的切线与 y 轴正向之间的夹角.

曲线 $\begin{cases} z=\sqrt{1+x^2+y^2} \\ x=1 \end{cases}$ 在点 $(1,1,\sqrt{3})$ 处切线对 y 轴的斜率即为 $\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)}$

即 $\tan\beta = \left.\frac{d}{dy}\sqrt{2+y^2}\right|_{y=1} = \left.\frac{y}{\sqrt{2+y^2}}\right|_{y=1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ， $\therefore \beta = \frac{\pi}{6}$

六、求下列函数的 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$:

1. $z=x^4+y^4-4x^2y^2$;

$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3-8xy^2$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3-8x^2y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2-8y^2$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2-8x^2$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -16xy$

2. $z=x\arcsin\sqrt{y}$;

$\frac{\partial z}{\partial x} = \arcsin\sqrt{y}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{1-y}\cdot 2\sqrt{y}}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{x(1-2y)}{4\sqrt{y^3(1-y)^3}}$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}\cdot\sqrt{1-y}}$

3. $z=e^{xy^2}$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2e^{xy^2}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = 2xye^{xy^2}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^4e^{xy^2}$ ， $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (2x+4x^2y^2)e^{xy^2}$ ，

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = (2y+2xy^3)e^{xy^3}$

七、求函数 $z=5x^2+y^2$ 当 $x=1, y=2, \Delta x=0.005, \Delta y=0.1$ 时的全增量和全微分.

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) = 5(x+\Delta x)^2 + (y+\Delta y)^2 - (5x^2+y^2)$$

$$= 10x\Delta x + 2y\Delta y + 5(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$$

$$dz = 10x\Delta x + 2y\Delta y$$

$$\therefore \Delta z(1,2)\Big|_{\substack{\Delta x=0.005\\ \Delta y=0.1}} = 10\times1\times0.005 + 2\times2\times0.1 + 5\times(0.005)^2 + (0.1)^2 = 0.460125$$

$$dz(1,2)\Big|_{\substack{\Delta x=0.005\\ \Delta y=0.1}} = 10\times1\times0.005 + 2\times2\times0.1 = 0.45$$

八、设二元函数 $z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$, 求 dz 和 $dz|_{(1,0)}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x+y} + xe^{x+y} + \ln(1+y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = xe^{x+y} + \frac{x+1}{1+y}$$

$$\therefore dz = [(x+1)e^{x+y} + \ln(1+y)]dx + (xe^{x+y} + \frac{x+1}{1+y})dy$$

$$dz|_{(1,0)} = 2e\,dx + (e+2)dy$$

九、设二元函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$,

（1）求 $f_x(0,0), f_y(0,0)$;

（2）讨论 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是否可微.

(1) $f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{|x|}}{x} = 0$，同理 $f_y(0,0)=0$

(2) $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{\Delta f - [f_x\Delta x + f_y\Delta y]}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{f(x,y)-0-[0+0]}{\rho} = \lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{(x^2+y^2)\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim\limits_{\rho\to0}\rho\cos\frac{1}{\rho} = 0$

故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点处可微.

§7.3 复合函数和隐函数的偏导数

一、用链法则求下列函数的导数或偏导数：

1. $z=u^v, u=x+2y, v=x-y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$；

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$=v\cdot u^{v-1}\cdot 1+u^v\cdot\ln u\cdot 1=(x-y)(x+2y)^{x-y-1}+(x+2y)^{x-y}\cdot\ln(x+2y)=(x+2y)^{x-y}\left[\frac{x-y}{x+2y}+\ln(x+2y)\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=v\cdot u^{v-1}\cdot 2+u^v\ln u\cdot(-1)=(x+2y)^{x-y}\left[\frac{2(x-y)}{x+2y}-\ln(x+2y)\right]$$

2. $z=\dfrac{y}{x}, x=e^t, y=1-e^{2t}$，求 $\dfrac{dz}{dt}$.

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\left(-\frac{y}{x^2}\right)\cdot e^t+\frac{1}{x}\cdot(-2e^{2t})$$

$$=-\frac{1-e^{2t}}{e^{2t}}\cdot e^t+\frac{1}{e^t}(-2e^{2t})=-e^t-e^{-t}$$

二、求下列复合函数的一阶偏导数：

1. $u=f(x,xy,xyz)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}$；

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+y\cdot f_2'+yzf_3'$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=xf_2'+xzf_3'$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf_3'$$

2. $z=f(xy,\dfrac{x}{y})+\varphi(\dfrac{y}{x})$，其中 f,φ 均可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'+\varphi'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-\frac{x}{y^2}f_2'+\frac{1}{x}\varphi'$$

三、设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且

$$f(1,1)=1,\frac{\partial f}{\partial x}\big|_{(1,1)}=2,\frac{\partial f}{\partial y}\big|_{(1,1)}=3,\varphi(x)=f(x,f(x,x)),\text{求}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\big|_{x=1}.$$

$\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1$

$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)=3\varphi^2(x)\cdot[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))]$

将 $x=1$ 代入得

$\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=3\cdot1\cdot[2+3(2+3)]=51$

四、设 $z=f(x^2+y^2)$，其中 f 具有二阶导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot2x$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot2y$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2f'+2x\cdot f''\cdot2x=2f'+4x^2f''$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2xf''\cdot2y=4xyf''$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2f'+2yf''\cdot2y=2f'+4y^2f''$.

五、设 $z=yf(e^x,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=y[f_1'\cdot e^x+yf_2']=ye^xf_1'+y^2f_2'$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f+xyf_2'$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^xyf_1'+ye^{2x}f_{11}''+2y^2e^xf_{12}''+y^3f_{22}''$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^xf_1'+2yf_2'+xye^xf_{12}''+xy^2f_{22}''$

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2xf_2'+x^2yf_{22}''$

六、求下列方程所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的一阶导数：

（1）$x^2+xy-e^y=0$;　　　　（2）$x^y=y^x$.

法一：两边对 x 求导，

$$2x+y\cdot xy'-e^y\cdot y'=0 \Rightarrow y'=\frac{2x+y}{e^y-x}$$

法二：令 $F(x,y)=x^2+xy-e^y$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{2x+y}{x-e^y}$$

令 $F(x,y)=x^y-y^x$，则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{yx^{y-1}-y^x\ln y}{x^y\ln x-xy^{x-1}}$$

$$=\frac{xy\ln y-y^2}{xy\ln x-x^2}=\frac{y\ln y^x-y^2}{x\ln x^y-x^2}=\frac{y\ln x^y-y^2}{x\ln y^x-x^2}$$

$$=\frac{y^2(\ln x-1)}{x^2(\ln y-1)}$$

七、求方程 $z=e^{2x-3z}+2y$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 的一阶偏导数：

两边对 x 求偏导，$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2x-3z}\left(2-3\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2e^{2x-3z}}{1+3e^{2x-3z}}$$

两边对 y 求偏导，$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{2x-3z}\left(-3\frac{\partial z}{\partial y}\right)+2$

$$\therefore \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2}{1+3e^{2x-3z}}$$

八、已知 $x^2+y^2+z^2=4z$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-4z$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x}{2z-4}=\frac{x}{2-z}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{2y}{2z-4}=\frac{y}{2-z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x^2}=\left(\frac{x}{2-z}\right)'_x=\frac{2-z+x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}}{(2-z)^2}=\frac{2-z+\frac{x^2}{2-z}}{(2-z)^2}=\frac{(2-z)^2+x^2}{(2-z)^3}$$

九、已知 $z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt=0$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

令 $F(x,y,z)=z+\ln z-\int_y^x e^{-t^2}dt$

则 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{e^{-x^2}}{1+\frac{1}{z}}=\frac{z}{z+1}e^{-x^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{e^{-y^2}}{1+\frac{1}{z}}=-\frac{z}{z+1}e^{-y^2}$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{z+1}e^{-x^2}\right)=\frac{(z+1)\frac{\partial z}{\partial y}-z\frac{\partial z}{\partial y}}{(z+1)^2}e^{-x^2}=\frac{-\frac{z}{z+1}e^{-y^2}}{(z+1)^2}e^{-x^2}=\frac{z}{(z+1)^3}e^{-x^2-y^2}$$

十、设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的偏导数，$y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 分别由方程 $e^{xy}-y=0$ 和 $e^z-xz=0$ 所确定，求 $\dfrac{du}{dx}$.

$$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}$$

由 $e^{xy}-y=0$ 得 $e^{xy}(y+x\frac{dy}{dx})-\frac{dy}{dx}=0$，$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{ye^{xy}}{1-xe^{xy}}=\frac{y^2}{1-xy}$

由 $e^z-xz=0$ 得 $e^z\frac{dz}{dx}-z-x\frac{dz}{dx}=0$ $\therefore \frac{dz}{dx}=\frac{z}{e^z-x}=\frac{z}{xz-x}$

于是 $\frac{du}{dx}=f_x+\frac{y^2}{1-xy}\cdot f_y+\frac{z}{xz-x}\cdot f_z$

十一、求由下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数：

1. $\begin{cases}x+y+z=0,\\ xyz=1,\end{cases}$ 求 $\dfrac{dz}{dx},\dfrac{dy}{dx}$.

方程组两边对 x 求导得 $\begin{cases}1+\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=0\\ yz+xz\frac{dy}{dx}+xy\frac{dz}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dy}{dx}+\frac{dz}{dx}=-1\\ xz\frac{dy}{dx}+xy\frac{dz}{dx}=-yz\end{cases}$

解得 $\frac{dy}{dx}=\frac{y(z-x)}{x(y-z)}$. $\frac{dz}{dx}=\frac{z(x-y)}{x(y-z)}$

2. $\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\ v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$ 其中 f,g 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

对 x 求偏导，得

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'\cdot(u+x\frac{\partial u}{\partial x})+f_2'\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\\ \frac{\partial v}{\partial x}=g_1'\cdot(\frac{\partial u}{\partial x}-1)+2g_2'\cdot yv\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

解方程组得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-uf_1'\cdot(2yvg_2'-1)-f_2'\cdot g_1'}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'\cdot g_1'}$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{g_1'\cdot(xf_1'+uf_1'-1)}{(xf_1'-1)(2yvg_2'-1)-f_2'\cdot g_1'}$$

§7.4 可微函数的几何性质

一、填空

1. 曲线 $\begin{cases} z=\frac{1}{4}(x^2+y^2), \\ y=4 \end{cases}$ 在点 $(2,4,5)$ 处的切线与 x 轴的夹角为 $\underline{\quad \frac{\pi}{4} \quad}$. $z_x=\frac{x}{2}=1$

2. 若曲面 $\Sigma: F(x,y,z)=0$ 上 Q 点的法线经过曲面外一点 $p(a,b,c)$, 则 $Q(x,y,z)$ 点必须满足 $\underline{\frac{a-x}{F_x(x,y,z)}=\frac{b-y}{F_y(x,y,z)}=\frac{c-z}{F_z(x,y,z)}}$

二、求曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=\frac{9}{4}, \\ 3x^2+(y-1)^2+z^2=\frac{17}{4} \end{cases}$ 在点 $M(1,\frac{1}{2},1)$ 处的切线与法平面.

解法一：Γ 上 M 点处切向量为 $(2x,2y,2z)\times(6x,2(y-1),2z)\big|_M=4(1,2,-2)$

$\therefore$ 切线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-\frac{1}{2}}{2}=\frac{z-1}{-2}$，法平面：$x-1+2(y-\frac{1}{2})+(-2)(z-1)=0$

即 $x+2y-2z=0$

解法二：方程组两边对 x 求导：$\begin{cases} 2x+2y\cdot y'+2z\cdot z'=0 \\ 3x+(y-1)\cdot y'+z\cdot z'=0 \end{cases}$ $M(1,\frac{1}{2},1)$ 代入得 $\begin{matrix} y'=2 \\ z'=-2 \end{matrix}$

$\therefore$ 切向量为 $(1,2,-2)$.

三、证明：曲线 $\Gamma: \begin{cases} x^2-z=0, \\ 3x+2y+1=0 \end{cases}$ 上点 $(1,-2,1)$ 处的法平面与直线 $\begin{cases} 9x-7y-21z=0, \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 平行.

取 x 为参数，则 $\begin{cases} 2x-\frac{dz}{dx}=0 \\ 3+2\frac{dy}{dx}=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{3}{2}$，$\frac{dz}{dx}=2x$

曲线在 $M(1,-2,1)$ 处的切向量为 $\vec{\tau}=(1,-\frac{3}{2},2x)\Big|_{(1,-2,1)}=(1,-\frac{3}{2},2)$，

而直线方向为 $\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 9 & -7 & -21 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=(-14,-12,-2)$

$\therefore \vec{\tau}\cdot\vec{s}=0$，得证.

四、求曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面和法线方程.

令 $F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3$，则

$F_x|_{(1,2,0)}=2y|_{(1,2,0)}=4$

$F_y|_{(1,2,0)}=2x|_{(1,2,0)}=2$

$F_z|_{(1,2,0)}=(1-e^z)|_{(1,2,0)}=0$

∴切平面方程：$4(x-1)+2(y-2)=0$，即 $2x+y-4=0$

法线：$\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-0}{0}$

五、求曲面 $2x^2+3y^2+z^2=9$ 的切平面，使之平行于平面 $2x-3y+2z=1$.

令 $F=2x^2+3y^2+z^2-9$

则 $F_x=4x$，$F_y=6y$　$F_z=2z$

曲面上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处法向量 $\vec{n}=(4x_0,6y_0,2z_0)$

于是 $\begin{cases}2x_0^2+3y_0^2+z_0^2=9\\ \frac{4x_0}{2}=\frac{6y_0}{-3}=\frac{2z_0}{2}\end{cases}$ $\Rightarrow x_0=\pm1,\ y_0=\mp1,\ z_0=\pm2$

∴切平面为 $2(x-x_0)-3(y-y_0)+2(z-z_0)=0$，即

$2x-3y+2z=\pm9$

六、求由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周所得的旋转曲面在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处的指向外侧的单位法向量.

旋转曲面方程为 $3(x^2+z^2)+2y^2=12$

令 $F=3x^2+2y^2+3z^2-12$，则 $\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)=(6x,4y,6z)$，

在点 $(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$ 处 $\vec{n}=(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})$

由于指向外侧的单位法向量 $\cos\gamma>0$

故取 $e_n=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{1}{\sqrt{0^2+(4\sqrt{3})^2+(6\sqrt{2})^2}}(0,4\sqrt{3},6\sqrt{2})=(0,\frac{\sqrt{10}}{5},\frac{\sqrt{15}}{5})$

七、设直线 $l:\begin{cases} x+y+b=0, \\ x+ay-z-3=0 \end{cases}$ 在平面 π 上，而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b 的值.

方法一. 先求出曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $M_0(1,-2,5)$ 处的切平面，因法向量为 $\vec{n}=(2,-4,-1)$

故切平面为 $2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0$，即 $2x-4y-z-5=0$.

将 l 的方程代入切平面中，即 $\begin{cases} x+y+b=0 \\ x+ay-z-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-x-b \\ z=x-3+a(-x-b) \end{cases}$

$\therefore 2x+4(x+b)-(x-3-ax-ab)-5=0$，此方程有解(无穷) $\Rightarrow \begin{cases} 5+a=0 \\ 4b+ab-2=0 \end{cases} \Rightarrow a=-5,\ b=-2$

方法二. 过 l 的平面束与切平面重合，$(x+y+b)+\lambda(x+ay-z-3)=0 \Rightarrow (1+\lambda)x+(1+a\lambda)y-\lambda z+b-3$

令 $\dfrac{1+\lambda}{2}=\dfrac{1+a\lambda}{-4}=\dfrac{-\lambda}{-1}=\dfrac{b-3\lambda}{-5} \Rightarrow \lambda=1,\ a=-5,\ b=-2$

八、求下列函数在指定点 M_0 处沿指定方向 l 的方向导数：

1. $z=xe^{xy}, M_0(-3,0), l$ 为从点 $(-3,0)$ 到点 $(-1,3)$ 的方向；

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.(e^{xy}+xye^{xy})\right|_{(-3,0)}=1$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.x^2e^{xy}\right|_{(-3,0)}=9$$

$\vec{l}=(2,3)$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$$\therefore \left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}\cos\beta=1\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}+9\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{29}{\sqrt{13}}$$

2. $u=x\arctan\dfrac{y}{z}, M_0(1,2,-2), l=(1,1,-1)$.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\left.\arctan\frac{y}{z}\right|_{(1,2,-2)}=\arctan(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=\left.\frac{xz}{z^2+y^2}\right|_{(1,2,-2)}=-\frac{1}{4}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=\left.\frac{-xy}{z^2+y^2}\right|_{(1,2,-2)}=-\frac{1}{4}$$

$\vec{l}$ 的方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$\cos\gamma=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}\cdot\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}\cdot\cos\beta+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}\cdot\cos\gamma$$

$$=-\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\pi}{4\sqrt{3}}$$

九、求函数 $z=x^2-y^2$ 在点 $M(1,1)$ 沿与 x 轴正向组成角 $\alpha=60^0$ 的方向 l 上的方向导数.

$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)} = 2x\Big|_{(1,1)} = 2$ ， $\frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)} = (-2y)\Big|_{(1,1)} = -2$

$\cos\varphi = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ ， $\sin\varphi = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \frac{\partial z}{\partial l}\Big|_{(1,1)} = \frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{(1,1)}\cdot\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{(1,1)}\sin\varphi = 2\times\frac{1}{2} + (-2)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$= 1-\sqrt{3}$

十、设 n 是曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 在点 $P(1,1,1)$ 处的指向外侧的法向量，求函数

$u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$ 在点 P 处沿方向 n 的方向导数.

令 $F(x,y,z) = 2x^2+3y^2+z^2-6$. $F_x=4x$, $F_y=6y$, $F_z=2z$

$\therefore$ 点 $P(1,1,1)$ 处曲线外侧向量 $\vec{n}=(4,6,2)$

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}$ ， $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}$ ， $\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$

$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P = \frac{6x}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\Big|_P = \frac{6}{\sqrt{14}}$. $\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P = \frac{8y}{z\sqrt{6x^2+8y^2}}\Big|_P = \frac{8}{\sqrt{14}}$ ， $\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_P = -\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z^2}\Big|_P = -\sqrt{14}$

$\therefore \frac{\partial u}{\partial l}\Big|_P = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P\cdot\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P\cdot\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_P\cdot\cos\gamma = \frac{6}{\sqrt{14}}\times\frac{2}{\sqrt{14}} + \frac{8}{\sqrt{14}}\times\frac{3}{\sqrt{14}} - \sqrt{14}\times\frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{11}{7}$

十一、二元函数 $u=x^2-xy+y^2$ 在点 $(-1,1)$ 沿哪个方向变化得最快？沿哪个方向 u 的值不变？

$\operatorname{grad} u(-1,1) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\Big|_{(-1,1)} = (2x-y, 2y-x)\Big|_{(-1,1)} = (-3,3)$.

方向导数取得最大值方向为梯度方向，故变化最快的方向为 $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$. （增加最快的方向为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$，减少最快的方向为 $-\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$）

与梯度方向垂直的方向上变化率为0，即 $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ 方向上，它与 x 轴正向夹角为 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5\pi}{4}$.

§7.5 多元函数的极值

一、选择题

1. 点 (x_0,y_0) 使 $f_x'(x,y)=0$ 且 $f_y'(x,y)=0$ 成立，则（ D ）

A. (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的极值点　　B. (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的最小值点

C. (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 的最大值点　　D. (x_0,y_0) 可能是 $f(x,y)$ 的极值点

2. 函数 $z=xy(1-x-y)$ 的极值点是（ C ）

驻点 $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ $A=-\frac{2}{3}$, $B=-\frac{1}{3}$, $C=-\frac{1}{3}$　$AC-B^2>0$, $A<0$

A. $(\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$　　B. $(-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　C. $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$　　D. $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$

3. 已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（ A ）

(A)点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点　　(B)点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C)点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点　　(D)根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

$f(x,y)-xy=\rho^4+o(\rho^4)$

$f(x,y)=xy+\rho^4+o(\rho^4)$

$f(x,x)=x^2+\cdots>0$

$f(x,-x)=-x^2\cdots$

(x充分小时)

另解：在(0,0)充分小邻域

$\frac{1}{2}<\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}<\frac{3}{2}$

$\Rightarrow xy+\frac{1}{2}\rho^4<f(x,y)<xy+\cdots$

二.求下列函数的极值

1. $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$

$$\begin{cases} z_x=3x^2-6x=0 \\ z_y=3y^2-6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=0,2 \\ y=0,2 \end{matrix}, \Rightarrow \text{驻点 } (0,0),(0,2),(2,0),(2,2)$$

$A=6(x-1)$, $B=0$, $C=6(y-1)$

$AC-B^2=36(x-1)(y-1)$

$\because AC-B^2|_{(0,0)}=36>0$, $A|_{(0,0)}=-6<0$，有极大值 $f(0,0)=0$

$AC-B^2|_{(0,2)}<0$　$AC-B^2|_{(2,0)}=-36<0$，$\therefore (0,2)$ 和 $(2,0)$ 不是极值点

$AC-B^2|_{(2,2)}=36>0$, $A|_{(2,2)}=6>0$，$\therefore$ 有极小值 $f(2,2)=-8$.

2. $f(x,y)=e^{2x}(x+y^2+2y)$

$$\begin{cases} f_x=e^{2x}(2x+2y^2+4y+1)=0 \\ f_y=e^{2x}(2y+2)=0 \end{cases} \Rightarrow \text{驻点 } (\tfrac{1}{2},-1).$$

$A=f_{xx}|_{(\frac{1}{2},-1)}=e^{2x}(4x+4y^2+8y+4)=2e>0$.

$B=f_{xy}|_{(\frac{1}{2},-1)}=e^{2x}(4y+4)|_{(\frac{1}{2},-1)}=0$

$C=f_{yy}|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e^{2x}|_{(\frac{1}{2},-1)}=2e$,　$\therefore AC-B^2=4e^2>0$.

$\therefore$ 极小值 $f(\frac{1}{2},-1)=-\frac{e}{2}$

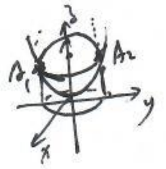
三. 求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在闭域 $x^2+y^2\le 1$ 内的最大值和最小值，并对上述计算结论作出几何解释.

$f(x,y)$ 的驻点为 $(0,0)$，~~边界~~ 闭域的边界为 $x^2+y^2=1$.

在边界上 $f(x,y)=2-x^2$ 或即 $1+y^2$，由于 $0\le x^2\le 1$，$0\le y^2\le 1$，

就有 $1\le f(x,y)\le 2$，与 $f(0,0)$ 作比较得最小值为 $f(0,0)=0$

最大值为 $f(0,\pm1)=2$



几何上，意指：椭圆抛物面被圆柱面 $x^2+y^2\le 1$ 所截得部分的最低点在坐标原点，最高点在边界上的 $A_1(0,1,2)$，$A_2(0,-1,2)$ 两点处.

四. 设 $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^n$ 是不在同一直线上的 n 个点，

（1）求出函数 $f(x,y)=\sum_{i=1}^n\left[b_i-(xa_i+y)\right]^2$ 的驻点；

（2）用二阶导数的方法证明这个驻点是函数的极小值点；

（3）说明这个极小值点也是这个函数的最小值点.

(1) 从 $\begin{cases} f_x=-2\sum_{i=1}^n(b_i-xa_i-y)a_i=0 \\ f_y=-2\sum_{i=1}^n(b_i-xa_i-y)=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases} x\sum_{i=1}^n a_i^2+y\sum_{i=1}^n b_i=\sum_{i=1}^n a_ib_i \\ x\sum_{i=1}^n a_i+ny=\sum_{i=1}^n b_i\end{cases}$

∴驻点为 $x=\dfrac{n\sum_{i=1}^n a_ib_i-n\sum_{i=1}^n a_i\sum_{i=1}^n b_i}{n\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}$，$y=\dfrac{\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i-n\sum_{i=1}^n a_ib_i\sum_{i=1}^n b_i}{n\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2}$

(2) $f_{xx}=2\sum_{i=1}^n a_i^2$，$f_{xy}=2\sum_{i=1}^n a_i$，$f_{yy}=2n$

$f_{xx}\cdot f_{yy}-f_{xy}^2=4\left(n\sum_{i=1}^n a_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2\right)>0$，且 $f_{xx}>0$，∴此驻点取极

(3) 因为 $f(x,y)\ge 0$，∴最小值一定存在，而驻点唯一，（为椭圆抛物面）

故这个点必为最小值点.

五、设有曲线 $L:\begin{cases} z=x^2+3y^2, \\ z=4-3x^2-y^2, \end{cases}$ 求 L 在 xOy 平面上的投影，并求 L 上的 z 坐标的最大值和最小值.

L 方程消去 z 得 $x^2+3y^2=4-3x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2=1$，∴投影为圆周 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

最值的求法一，消去 x 得

$z=1+2y^2 \quad (-1\le y\le 1)$. ∴ $z_{max}=3$, $z_{min}=1$.

求法二. 即求 $z=x^2+3y^2$（或 $z=4-3x^2-y^2$）在条件 $x^2+y^2=1$ 下极值.

令 $L=x^2+3y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$

求法三. 令 $L=z+\lambda(z-x^2-3y^2)+\mu(3x^2+y^2+z-4)$

六、在 $x^2+4y^2=4$ 上求一点，使其到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短.

解法一. 点 $M(x,y)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\dfrac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$

令 $F(x,y,\lambda)=(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$

由 $\begin{cases} F_x=4(2x+3y-6)+2\lambda x=0 & ① \\ F_y=6(2x+3y-6)+8\lambda y=0 & ② \\ x^2+4y^2-4=0 & ③ \end{cases}$

由①.②得 $x=\frac{8}{3}y$ 代入③得 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$, $(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$.

由于 d_{max} 和 d_{min} 一定存在，因 $d(\frac{8}{5},\frac{3}{5})<d(-\frac{8}{5},-\frac{3}{5})$. 故

在点 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ 处距离最短.

解法二. 所求问题为椭圆 $x^2+4y^2=4$ 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最短问题，

只需作椭圆的平行于已知直线的切线，设切点为 (x_0,y_0)，则

切线方程为 $x_0x+4y_0y=4$. ∴ $\begin{cases} \dfrac{x_0}{2}=\dfrac{4y_0}{3} \\ x_0^2+4y_0^2=4 \end{cases} \Rightarrow (x_0,y_0)=\pm(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$

根据直线所在位置知，所求点为 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$.

七、在已给的椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$内一切内接的长方体（各棱分别平行坐标轴）中，求其体积最大者.

设 x, y, z 为长方体在第一卦限中的顶点坐标，则

$V=8xyz$，满足条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

作 $L=8xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$

$$\begin{cases} L_x=8yz+\frac{2x}{a^2}\lambda=0 \\ L_y=8zx+\frac{2y}{b^2}\lambda=0 \\ L_z=8xy+\frac{2z}{c^2}\lambda=0 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}\lambda=-4xyz \\ \frac{y^2}{b^2}\lambda=-4xyz \\ \frac{z^2}{c^2}\lambda=-4xyz \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}=\frac{1}{3} \Rightarrow x=\frac{a}{\sqrt3},\ y=\frac{b}{\sqrt3},\ z=\frac{c}{\sqrt3}$$

这是唯一解，（而最大值一定存在，）故 $V_{max}=8\cdot\frac{a}{\sqrt3}\cdot\frac{b}{\sqrt3}\cdot\frac{c}{\sqrt3}=\frac{8}{3\sqrt3}abc$

八、欲造一无盖的长方体容器，已知底部造价为每平方米 3 元，侧面造价均为每平方米 1 元，现想用 36 元造一个容积最大的容器，求它的尺寸.

设容器的长、宽、高分别为 x, y, z（米）．$(x>0, y>0, z>0)$

问题归结为 $V=xyz$ 在条件 $3xy+2yz+2xz=36$ 时的最大值

令 $L(x,y,z,\lambda)=xyz+\lambda(3xy+2yz+2xz-36)$

则
$$\begin{cases} L_x=yz+3\lambda y+2\lambda z=0 \\ L_y=xz+3\lambda x+2\lambda z=0 \\ L_z=xy+2\lambda y+2\lambda x=0 \\ 3xy+2yz+2xz-36=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xyz+\lambda(3xy+2xz)=0 \\ xyz+\lambda(3xy+2yz)=0 \\ xyz+\lambda(2yz+2xz)=0 \end{cases}$$

前两式 $\Rightarrow x=y$；后两式 $\Rightarrow 3xy=2xz \Rightarrow z=\frac{3}{2}x$

将 $y=x, z=\frac{3}{2}x$ 代入 $3xy+2yz+2xz=36$ 得 $x=y=2$，$z=3$，$(2,2,3)$是唯一驻点，

根据实际问题，（最大值一定存在，）故所求最大容器长2米，宽2米，高3米．