苏州大学高等数学下期中模拟试卷

一.单选题（共 5 题，每题 3 分）

1.直线 $L:\dfrac{x+3}{-2}=\dfrac{y+4}{-7}=\dfrac{z}{3}$ 与平面 $\pi:4x-2y-2z=3$ 的关系为（A）

A.平行但不在平面上　　B.直线在平面上　　C.垂直相交　　D.相交但不垂直

这题判断线与面的位置关系.

$\vec{n_1}=(-2,-7,3)$　　有 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=-8+14-6=0$

$\vec{n_2}=(4,-2,-2)$　　又 L上的一点 $(-3,-4,0)$ 代入π中不成立

∴ 选A

2.直线 $\begin{cases}x=b\\ y=\dfrac{b}{c}z\end{cases}(bc\neq 0)$ 绕 z 轴旋转所得旋转面的方程所表示的曲面是（D）

A.椭球面　　B.椭圆抛物面　　C.椭圆柱面　　D.单叶双曲面

这题判断曲面，可以把该曲面方程算出来再判断

设曲面上一点 $P(x,y,z)$，找 x,y,z 的相关方程.

过P作垂直于z轴的平面交z轴于 $P'(0,0,z)$，交给定直线于 $P''(x',y',z)$

而 $x'=b$，$y'=\frac{b}{c}z$. 且 $PP'=P'P''$. ∴ $x^2+y^2=b^2+\frac{b^2}{c^2}z^2$.

3.设 $u(x,y)$ 在平面有界区域 D 上具有二阶连续偏导数，且满足:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\neq 0 \text{ 以及 } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则下列选项正确的是（B

A.最大值点和最小值点必定都在 D 的内部;

B.最大值点和最小值点必定都在 D 的边界上;

C.最大值点在 D 的内部，最小值点在 D 的边界上;

D.最小值点在 D 的内部，最大值点在 D 的边界上;

二元方程的极值问题.　$A=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$B=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，$C=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

显然 $AC-B^2<0$，∴ $u(x,y)$ 在区域D内无极值.

而连续函数在有界闭区域上必有最大.最小，∴ 在D的边界上.

4.设函数 $z=f(x,y)$ 满足条件 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2$，且 $f(x,0)=1$，$f_y(x,0)=x$，则 $f(x,y)=$（B）

A. $1-xy+y^2$　　B. $1+xy+y^2$　　C. $1-x^2y+y^2$　　D. $1+x^2y+y^2$

本题通过一阶、二阶偏导求原函数.

要想到通过积分求逆运算.

由 $f_y(x,0)=x \Rightarrow C(x)=x$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2 \xrightarrow{\text{对y积分}} \frac{\partial f}{\partial y}=2y+C(x) \xrightarrow{\text{再对y积分}} f=y^2+xy+D(x)$$

由 $f(x,0)=1 \Rightarrow D(x)=1$

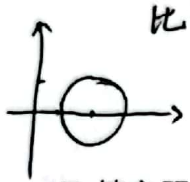
$$f=1+xy+y^2$$

5.设平面区域$D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 1$，若$I_1=\iint\limits_D (x+y)^2 d\sigma$，$I_2=\iint\limits_D (x+y)^3 d\sigma$，则(A)

A. $I_1<I_2$ B. $I_1=I_2$ C. $I_1>I_2$ D. 无法比较

考查二重积分的保序性：

比较 $(x+y)^2$ 与 $(x+y)^3$ 的大小，即比较 1 与 $x+y$ 的大小关系.



注：这个比较的方法很多：① $x+y$ 的几何意义（点到直线距离

可证：$x+y>1$ ② 三角换元：$\begin{cases}x=2+\cos\theta\\ y=1+\sin\theta\end{cases}$.

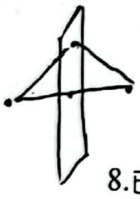
$\therefore\ I_1<I_2$ ...

二.填空题（共 5 题，每题 3 分）

6. 计算$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=$ 1 .

考查重要极限. 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}(1+\frac{1}{x})^{x\cdot\frac{x}{x+y}}=\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}}e^{\frac{x}{x+y}}=e^0=1$

7.设有点$A(1,2,3)$和$B(2,-1,4)$，则线段AB的垂直平分面的方程为 $2x-6y+2z-7=0$.



求面的方程：设面上一点 $P(x,y,z)$.

一定有 $AM=BM$. $\therefore\ (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2$

$\therefore\ 2x-6y+2z-7=0$

8.已知$z=y^x\ln(x+y)$，则$dz=$__________.

求全微分

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$，（不想算了）

9.函数$f(x,y)=xy+\sin(x+2y)$在点$(0,0)$处沿$\vec{l}=(1,2)$的方向导数为 $\sqrt{5}$.

$f_x(x,y)=y+\cos(x+2y)$ $f_x(0,0)=1$

$f_y(x,y)=x+2\cos(x+2y)$ $f_y(0,0)=2$. $\frac{\partial f}{\partial l}=1\times\frac{1}{\sqrt{1+4}}+2\times\frac{2}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5}$

10.设$\vec{a},\vec{b}$为非零向量，且$|\vec{b}|=1$，$(\vec{a},\vec{b})=\frac{\pi}{4}$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

考向量.

$$\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|-|\vec{a}|}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|\vec{a}+x\vec{b}|^2-|\vec{a}|^2}{x[|\vec{a}+x\vec{b}|+|\vec{a}|]}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}+x^2\cdot|\vec{b}|^2}{x\cdot 2|\vec{a}|}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\vec{a}\cdot\vec{b}+x|\vec{b}|^2}{2|\vec{a}|}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=|\vec{b}|\times\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

三.计算题（共 5 题，每题 8 分）

11.设$u(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}f(z)dz$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

求偏导：

$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x+t)-f(x-t)$.

$\frac{\partial u}{\partial y}=f(x+t)+f(x-t)$

扫描全能王 创建

12.求曲线$\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$在$M(1,-1,2)$处的切线和法平面方程.

$F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9$

$F_x'(1,-1,2)=4$

$F_y'(1,-1,2)=-6$

$F_z'(1,-1,2)=4$

$\therefore \vec{n_1}=(2,-3,2)$

同理

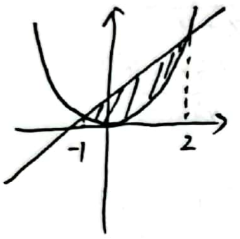
$\vec{n_2}=(3,-1,-2)$

切线的方向向量

$\vec{s}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=(8,10,7)$

$\therefore \begin{cases}\dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+1}{10}=\dfrac{z-2}{7}\\ 8(x-1)+10(y+1)+7(z-2)=0\end{cases}$

13.设D是由曲线$y=x^2$，$y=x+2$所围成，求二重积分$I=\iint\limits_D(1+x^2)dxdy$.



先画出D区域

$\begin{cases}-1<x<2\\ x^2<y<x+2\end{cases}$

$\therefore I=\int_{-1}^{2}dx\cdot\int_{x^2}^{x+2}(1+x^2)dy$

$=\int_{-1}^{2}(y+yx^2)\Big|_{x^2}^{x+2}dx=\int_{-1}^{2}(-x^4+x^3+x^2+x+2)dx$

$=(-\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x)\Big|_{-1}^{2}=\frac{153}{20}$

14.求直线$\begin{cases}2x-4y+z=0\\ 3x-y-2z-9=0\end{cases}$在平面$4x-y+z=1$上的投影直线的方程.

过已直直线作平面束，找出与已知平面垂直的平面. 交线即为所求.

设平面束方程为：$(2x-4y+z)+\lambda(3x-y-2z-9)=0$.

即 $(2+3\lambda)x+(-4-\lambda)y+(1-2\lambda)z-9\lambda=0$

令 $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0.\Rightarrow\lambda=-\frac{13}{11}$

$\Rightarrow\begin{cases}17x+31y-37z-117=0\\ 4x-y+z=1\end{cases}$

15.设$y=f(x,t)$，而t是由方程$F(x,y,t)=0$所确定的x,y的函数，其中f,F都具有一阶连续偏导数，求$\frac{dy}{dx}$.

$F(x,y,t)=0$, $\underset{\text{对}x}{\text{求导}}$：

$F_x'+F_y'\cdot\frac{dy}{dx}+F_t'\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=0$

$\therefore \frac{\partial t}{\partial x}=-\frac{F_x'+F_y'\cdot\frac{dy}{dx}}{F_t'}\cdots①$

$y=f(x,t)$对x求导：

$\frac{dy}{dx}=f_x'+f_t'\cdot\frac{\partial t}{\partial x}\cdots②$

解方程组. 得

$\frac{dy}{dx}=\frac{f_x'F_t'-f_t'F_x'}{F_t'+f_t'F_y'}$

四.计算题（共3题，每题10分）

16.求曲面$xyz=c^3(c>0)$上任意一点处的切平面与三坐标面所围成的立体的体积.

设任意一点为(x_0,y_0,z_0). 则满足 $x_0y_0z_0=c^3$

该点处的法向量为 (y_0z_0,x_0z_0,x_0y_0)

$\therefore$ 切平面方程：$y_0z_0(x-x_0)+x_0z_0(y-y_0)+x_0y_0(z-z_0)=0$

该平面与x,y,z轴交成一个四面体.

把 $x_0=0$，$y_0=0$代入$\Rightarrow z=3z_0$.

同理. $x=3x_0$, $y=3y_0$.

$\therefore$ 四面体

互相垂直的3条棱长为x,y,z.

$\therefore$ 体积 $V=\frac{S\cdot z}{3}=\frac{\frac{1}{2}xyz}{3}=\frac{27}{6}c^3=\frac{9}{2}c^3$

复习一下几个条件： 1. 若 $z=f(x,y)$ 在 (x,y) 可微，则 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 存在. （必要）

2. 若 $z=f(x,y)$ 的偏导 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 在 (x,y) 连续，则 z 在这点可微.（充分）

17.设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^3}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$，求解下列问题.

(1). 讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的可微性；

(2). 求 $f_{xy}(0,0)$.

(1) 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y^3}{x^2+y^2}-\frac{2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时，$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$.

$\therefore \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$

考查 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 在(0,0)处的连续性：$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}=0=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}$

$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}$ 连续.

…类似的方法去判断 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 在(0,0)处也连续

$\therefore$ 可微

(2). 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时.

$f_x(x,y)=\frac{y^3(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$

$f_y(x,y)=\frac{xy^2(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

当 $(x,y)=(0,0)$ 时

$f_x(0,0)=0$，$f_y(0,0)=0$.

$f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}$ → 用定义

$=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{y}=1$

18.求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在由直线 $x+y=6, y=0, x=0$ 所围成的闭区域上的最大值和最小值.

闭区域 $\begin{cases}\text{区域内}\\\text{边界.}\end{cases}$

令 $\begin{cases}f_x'=2xy(4-x-y)-x^2y=0\\f_y'=x^2(4-x-y)-x^2y=0\end{cases}$ 解得区域内可能的极值点为 $(2,1)$

在区域的边界上：当 $x=0$ 时，$f(0,y)=0$

当 $y=0$ 时，$f(x,0)=0$

当 $x+y=6$ 时，$f=-2x^2(6-x)$.

$f'=6x^2-24x=0$. 得驻点 $x=0, x=4$

当 $x=0$ 时，$y=6$

当 $x=4$ 时，$y=2$.

比较边界上的驻点、交点及区域内的驻点.

$f(0,0)=0$，$f(0,6)=0$，$f(6,0)=0$，$f(4,2)=-64$

$f(2,1)=4$.

$\therefore$ 最大值 4

最小值 -64