

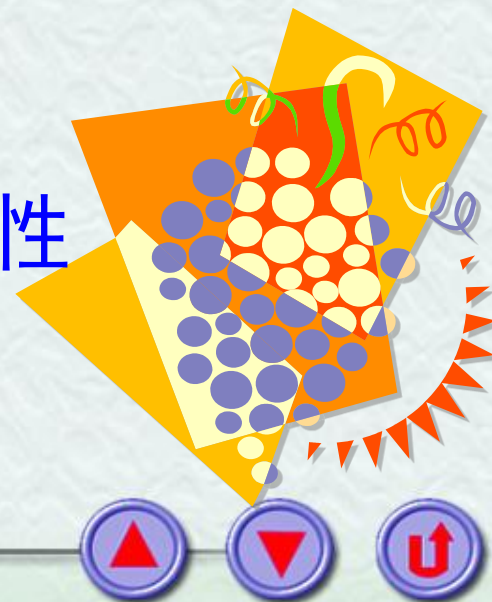
# 第一章 随机事件及其概率

第一节 随机事件

第二节 随机事件的概率

第三节 条件概率

第四节 随机事件的独立性



# 两类现象

## 1.必然现象

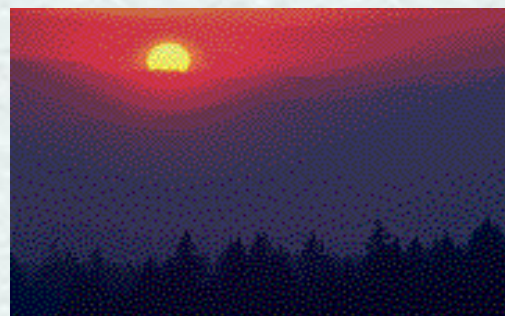
在一定条件下必然发生的现象，也称为确定性现象.

实例：

“太阳不会从西边升起”，

“水从高处流向低处”，

“同性电荷必然互斥”，



## 2. 随机现象

在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，且事先不知道究竟出现哪个结果的现象称为随机现象.

**实例1** “在相同条件下掷一枚均匀的硬币,观察正反两面出现的情况”.



结果有可能**出现正面**也可能**出现反面**.





**实例2** “用同一门炮向同一目标发射同一种炮弹多发，观察弹落点的情况”。

结果：“**弹落点会各不相同**”。



**实例3** “抛掷一枚骰子,观察出现的点数”。

结果有可能为:



“1”, “2”, “3”,  
“4”, “5” 或 “6”。



## 说明

1. 随机现象揭示了条件和结果之间的非确定性联系, 其数量关系无法用函数加以描述.
2. 随机现象在一次观察中出现什么结果具有偶然性, 但在大量重复试验或观察中, 这种结果的出现具有一定的统计规律性, 概率论就是研究随机现象这种本质规律的一门数学学科.

通过随机试验来研究随机现象。



# 第一节 随机事件

## 一、随机试验

**定义** 在概率论中,把具有以下三个特征的试验称为**随机试验** (简称试验, 记作E)

1. **重复性**: 可以在相同的条件下重复地进行;
2. **明确性**: 能事先明确试验的所有可能结果, 结果不止一个;
3. **随机性**: 每次试验之前不能确定哪一个结果会出现。





## 实例

$E_1$ : 抛一枚硬币, 观察正面H、反面T出现的情况。

## 分析

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行;

(2) 试验的所有可能结果:

正面H, 反面T;



(3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现.  
故为随机试验.

见书P1:  $E_1$ —  $E_4$



## 二、样本空间与随机事件

**定义** 随机试验E的所有可能结果构成的集合称为E的**样本空间**，用S（或 $\Omega$ ）表示；S中的元素（E的每一个可能结果）称为**样本点**。用 $e$ 或 $\omega$ 表示。

**说明** 由随机试验E的第二特征可知，E的样本空间是事先明确的。





$E_1$  抛一颗骰子，观察出现的点数

$$S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$



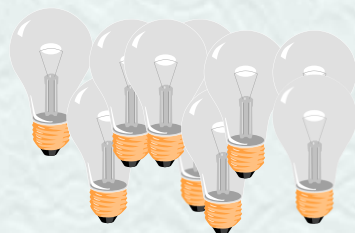
$E_2$  抛一枚硬币，观察正面  $H$ ，反面  $T$  出现的情况

$$S_2 = \{H, T\}$$

$E_3$  某公交站台的候车人数  $S_3 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

$E_4$  在一批灯泡中任意抽取一只，测试它的寿命

$$S_4 = \{t \mid t \geq 0\}$$



$E_5$  将一枚硬币抛掷三次，观察正面H、反面T出现的情况

$$S_5 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

$E_6$  将一枚硬币抛掷三次，观察出现正面的次数

$$S_6 = \{0, 1, 2, 3\}$$

同一试验，若试验目的不同，  
则对应的样本空间也不同。



# 随机事件

在随机试验中，我们常常对满足某种条件的事件感兴趣。

例如

$E_4$  在一批灯泡中任意抽取一只，测试其寿命  
规定灯泡的寿命超过500小时时为合格品

满足这一条件的样本点组成  $S_4$  的一个子集

$$A = \{ t \mid t > 500 \}$$

称  $A$  为随机试验  $E_4$  的一个随机事件





**定义** 随机试验 $E$ 的样本空间 $S$ 的子集称为 $E$ 的随机事件  
简称事件，用 $A, B, C, \dots$ 表示。

**基本事件：** 由一个样本点组成的单点集

随机试验  $E_2$  有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$

随机试验  $E_6$  有四个基本事件 $\{0\}$ 、 $\{1\}$ 、 $\{2\}$ 和 $\{3\}$

**复合事件：** 由多个样本点构成的集合。

在一次试验中，称事件 $A$ 发生，当且仅当 $A$ 中所包含的某一个样本点出现。



## 样本空间的两个特殊子集

- $S$  它包含了试验的所有可能的结果，所以在每次试验中它总是发生，称为**必然事件**。
- $\emptyset$  它不包含任何样本点，因此在每次试验中都不发生，称之为**不可能事件**。



## 三、事件间的关系与运算

- **研究原因：** 希望通过对简单事件的了解掌握较复杂的事件
- **研究规则：** 事件间的关系和运算应该按照集合之间的关系和运算来规定

随机试验的 $E$ 样本空间 $S$

其他事件  $A, B, C, A_k (k = 1, 2, 3, \dots) \subset S$





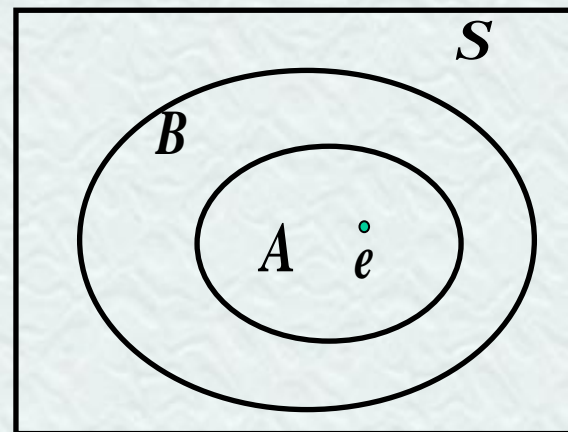
- 子事件（事件的包含）
- 事件的相等
- 和事件
- 积事件
- 互斥（互不相容）
- 差事件
- 对立事件（逆事件）



# 事件的包含 $A \subset B$

$A$ 的样本点都是 $B$ 的样本点

事件 $A$ 发生则事件 $B$ 必发生



例 抛掷一颗骰子，观察出现的点数

$$A = \{\text{出现1点}\} = \{1\}$$

$$A \subset B$$

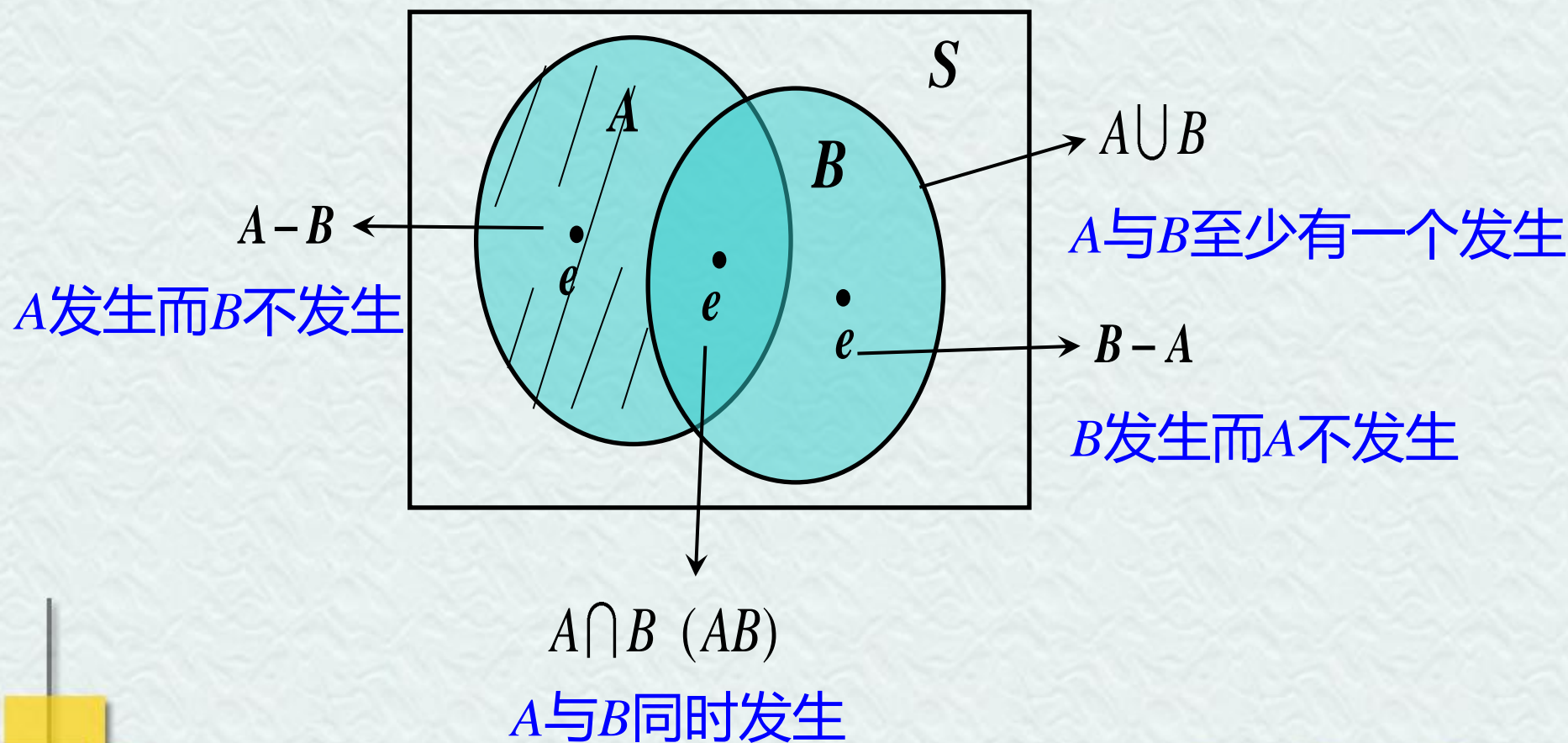
$$B = \{\text{出现奇数点}\} = \{1, 3, 5\}$$

特别地，如果  $A \subset B$  且  $B \subset A$

则称事件 $A$ 与事件 $B$ 相等，记为  $A = B$



# 事件的并(和), 事件的交(积), 事件的差





称  $\bigcup_{k=1}^n A_k$  为  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的和事件;

表示  $A_1, A_2, \dots, A_n$  至少有一个发生

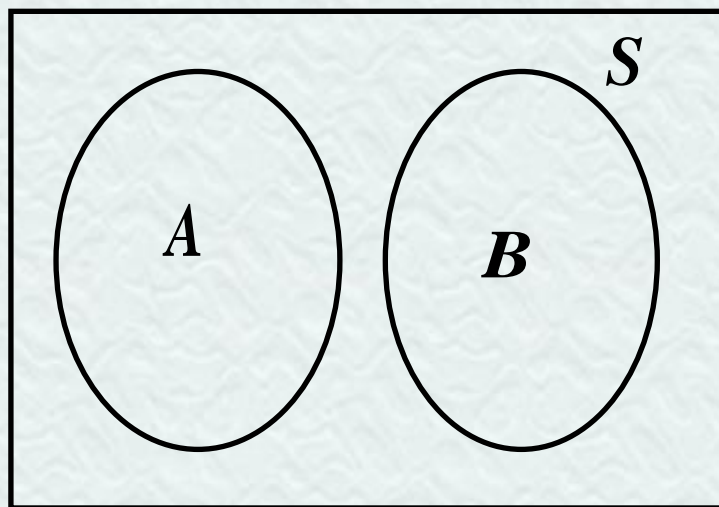
称  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$  为可列个事件  $A_1, A_2, \dots, A_k, \dots$  的和事件

称  $\bigcap_{k=1}^n A_k$  为  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  的积事件;

称  $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$  为可列个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  的积事件



# 互不相容(互斥)



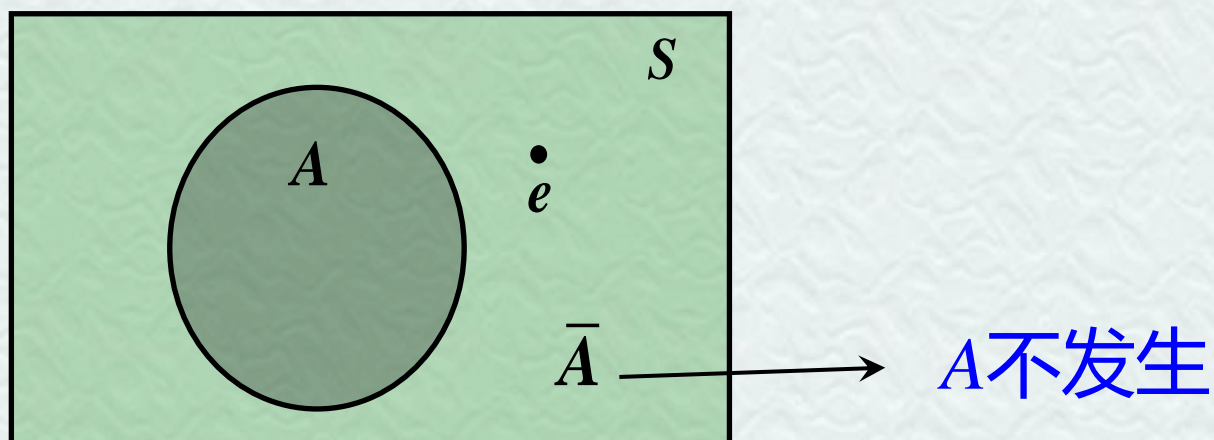
$$A \cap B = \emptyset$$

$A$ 与 $B$ 不能同时发生

任一个随机试验 $E$ 的基本事件都是两两互不相容的



# 对立事件 (逆事件)



$$(1) A \cap \bar{A} = \emptyset$$

(事件发生与不发生互不相容)

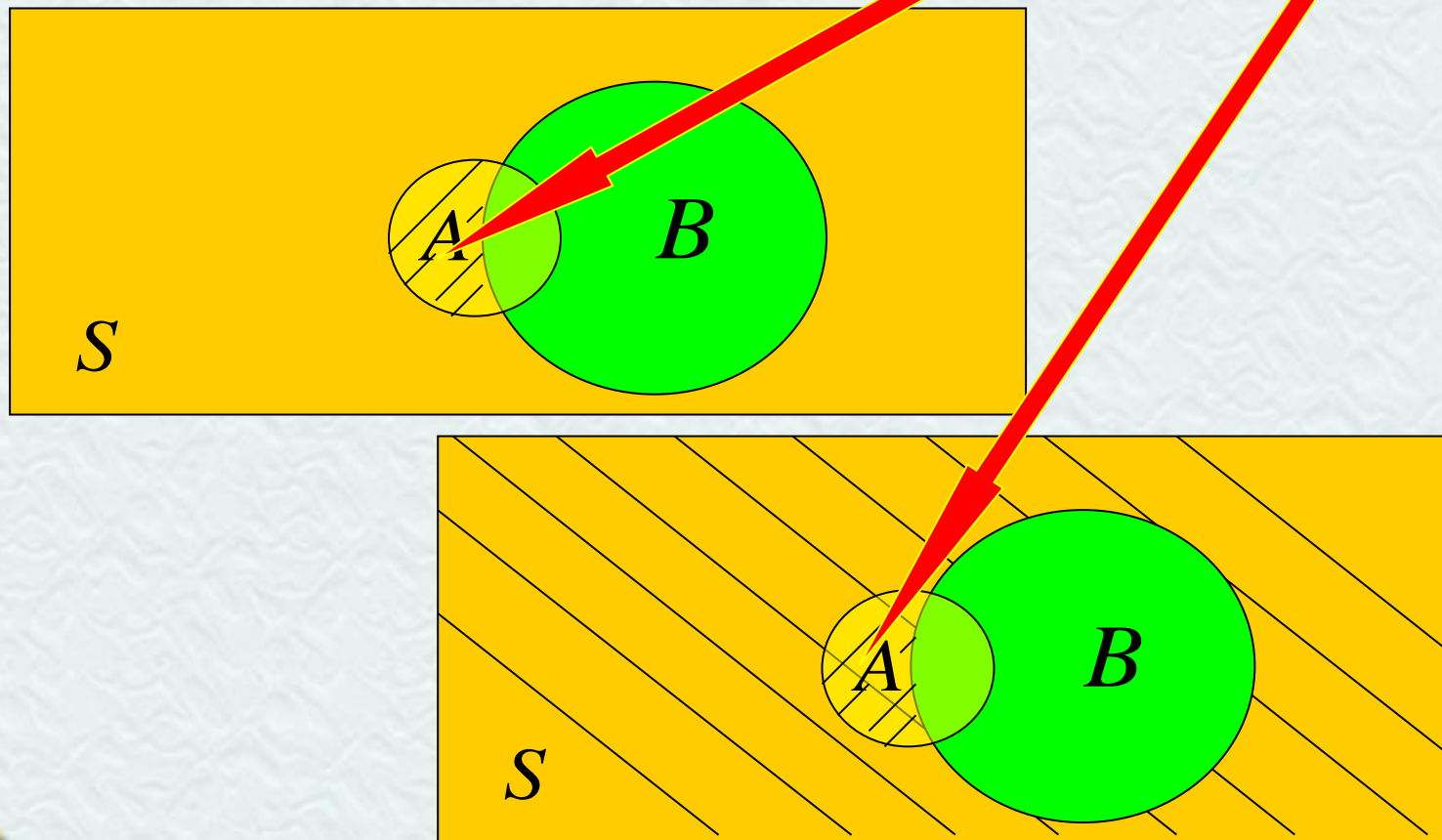
$$(2) A \cup \bar{A} = S \quad S - A = \bar{A}, S - \bar{A} = A$$

(所有结果可一分为二：事件发生与不发生)





按差事件和对立事件的定义，显然有  $A - B = A\bar{B}$



# 运算规律

1. 交换律  $A \cup B = B \cup A$      $A \cap B = B \cap A$

2. 结合律  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

3. 分配律  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

4. 对偶律  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$      $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

注：这些运算规律可以推广到任意多个事件上去



**例1.1.2** 设A, B, C为三个事件, 试用A, B, C的运算关系表示下列事件:

(1) A, B, C至少有一个发生;  $A \cup B \cup C$

(2) A, B, C都不发生;  $\bar{A} \bar{B} \bar{C}$

(3) A, B发生而C不发生;  $A B \bar{C}$

(4) A, B, C中恰有一个发生;  $A \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{A} \bar{B} C$

(5) A, B, C中至多只有一个发生;  $\bar{A} \bar{B} \bar{C} \cup A \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{A} \bar{B} C$

(6) A, B, C中至多有两个发生;  $\overline{ABC} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$

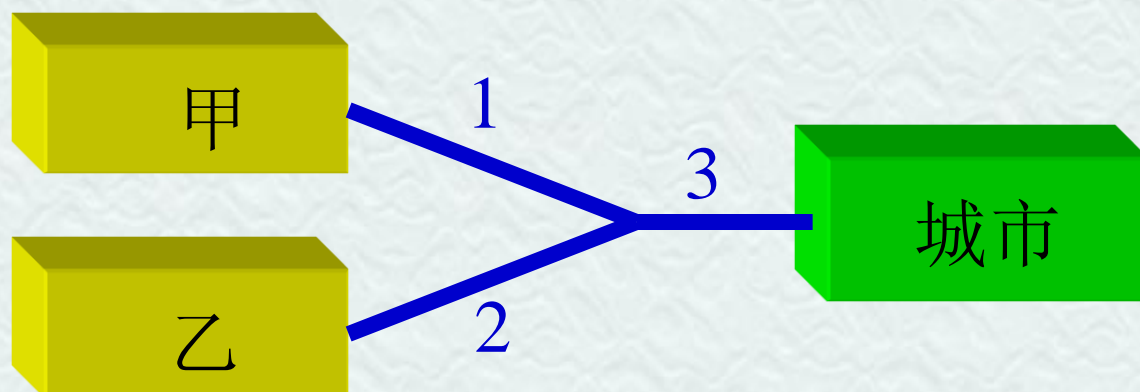
(7) A, B, C恰有两个发生;  $AB \bar{C} \cup A \bar{B} C \cup \bar{A} B C$

(8) A, B, C至少有两个发生;  $AB \bar{C} \cup A \bar{B} C \cup \bar{A} B C \cup ABC$





**补例** 某城市的供水系统由甲、乙两个水源与三部分管道1, 2, 3组成, 每个水源都足以供应城市的用水, 设事件  $A_i = \{ \text{第 } i \text{ 号管道正常工作} \} (i = 1, 2, 3)$



于是

“城市能正常供水”这一事件可表示为  $(A_1 \cup A_2) \cap A_3$

“城市断水”这一事件可表示为

$$\overline{(A_1 \cup A_2) \cap A_3} = \overline{(A_1 \cup A_2)} \cup \overline{A_3} = (\overline{A_1} \cap \overline{A_2}) \cup \overline{A_3}$$

## 第二节 随机事件的概率

**概率** 在一次试验中事件  $A$  发生的可能性大小的量度称为事件  $A$  的概率.

### 一、频率、概率的公理化定义

**定义1** 在相同的条件下, 进行了  $n$  次试验, 如果事件  $A$  在这  $n$  次重复试验中出现了  $n_A$  次, 则称比值  $\frac{n_A}{n}$

为事件  $A$  发生的频率, 记为  $f_n(A)$ , 即  $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$



# 频率具有如下性质

1. 非负性  $f_n(A) \geq 0$

2. 规范性  $f_n(S) = 1$

3. 有限可加性

若  $A_1, A_2, \dots, A_k$  是一组两两互不相容的事件

则 
$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) = \sum_{i=1}^k f_n(A_i)$$





# 抛硬币实验

$A = \{ \text{出现正面} \}$

出现正面的  
频率

出现正面的  
次数

试验者	$n$	 $n_A$	$f_n(A) = \frac{n_A}{n}$
德摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005
罗曼诺夫斯基	80640	39699	0.4923

$$n = 4040$$

$$f_n(A) = 0.5069$$

$$n = 24000$$

$$f_n(A) = 0.5005$$

当  $n$  不同时, 得到的  
 $f_n(A)$  常常会不一样



这表明频率具有一定的随机波动性，与试验有关。

随着试验次数 $n$ 的增大， $f_n(A)$ 总是围绕在0.5上下波动，且逐渐稳定于0.5，这表明频率具有所谓的稳定性。

对于可重复进行的试验，当试验次数 $n$ 逐渐增大时，事件 $A$ 的频率 $f_n(A)$ 都逐渐稳定于某个常数 $p$ ，呈现出“稳定性”。

这种“稳定性”也就是通常所说的统计规律性。

因此，可以用频率来描述概率，定义概率为频率的稳定值。

我们称这一定义为概率的统计定义。



# 概率的公理化定义

设 $E$ 是随机试验， $S$ 是它的样本空间，对 $E$ 的每一个事件 $A$ ，将其对应于一个实数，记为 $P(A)$ ，称为事件 $A$ 的概率，如果集合函数 $P(\bullet)$ 满足下列条件：

1. **非负性** 对任一个事件 $A$ 有  $P(A) \geq 0$
2. **规范性** 必然事件 $S$ , 有  $P(S) = 1$
3. **可列可加性** 若 $A_1, A_2, \dots$ 是两两互不相容的事件

$$\text{则 } P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$





## 二、概率的性质

性质1  $P(\emptyset) = 0$

性质2 (有限可加性)

若事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

性质3 若事件  $A, B$  满足  $A \subset B$ , 则有

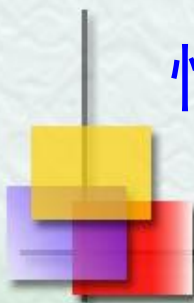
$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad P(B) \geq P(A)$$

性质4 对任一事件  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$

性质5 对任一事件  $A$  有  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

性质6 (加法公式) 对任意两个事件  $A, B$  有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$



性质1  $P(\emptyset) = 0$

证:  $A_1 = S, A_n = \emptyset (n = 2, 3, \dots),$

则  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = S$ , 且  $A_i A_j = \emptyset, i \neq j.$

由概率的可列可加性得

$$\left. \begin{aligned} P(S) &= P(S \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots) \\ &= P(S) + P(\emptyset) + P(\emptyset) + \dots \\ P(S) &= 1, \quad P(\emptyset) \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(\emptyset) = 0.$$



## 性质2 (有限可加性)

若事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$$

证:  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \emptyset \cup \emptyset \cup \dots$

令  $A_{n+1} = A_{n+2} = \dots = \emptyset$ ，由概率的可列可加性得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^n P(A_k) + 0 \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n). \end{aligned}$$

特别地，若  $A, B$  互不相容 (即  $AB = \emptyset$ )，

则  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ 。





**性质3** 若事件  $A, B$  满足  $A \subset B$ , 则有

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \quad P(B) \geq P(A)$$

**证:** 因为  $A \subset B$ ,

所以  $B = A \cup (B - A)$ . 又  $(B - A) \cap A = \emptyset$ ,

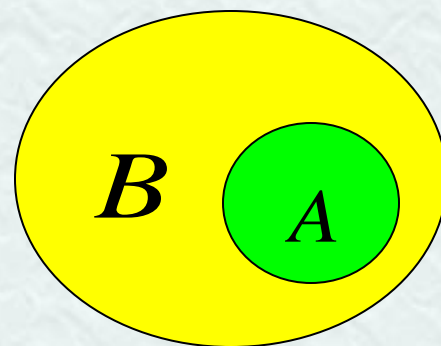
由性质2, 得:

$$P(B) = P(A) + P(B - A)$$

$$\therefore P(B - A) = P(B) - P(A)$$

由非负性, 得  $P(B) - P(A) \geq 0$

$$\therefore P(B) \geq P(A)$$



**性质4** 对任一事件  $A$ ,  $0 \leq P(A) \leq 1$

**证:**  $A \subset S \Rightarrow P(A) \leq P(S) = 1$ ,  
故  $P(A) \leq 1$ .

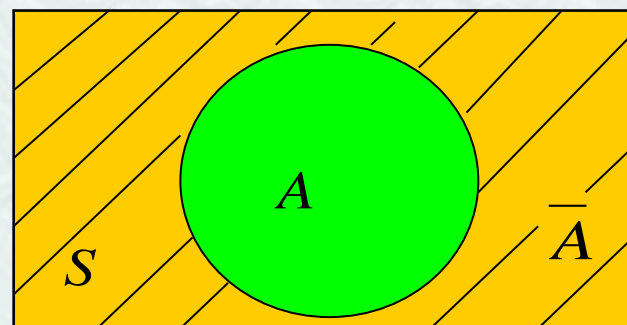
**性质5** 对任一事件  $A$  有  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

**证:**  $\because A \cup \bar{A} = S$  且  $A\bar{A} = \emptyset$

由性质2可得

$$1 = P(S) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



## 性质6 (加法公式)

对任意两个事件  $A$ 、 $B$  有

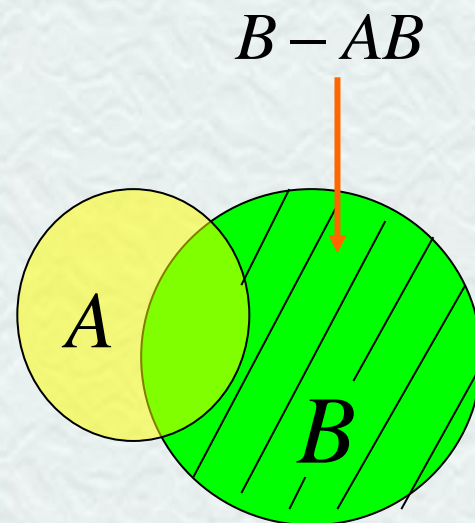
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

**证明：** 因为  $A \cup B = A \cup (B - AB)$

且  $A(B - AB) = \emptyset, AB \subset B$

故由性质2和性质3得：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$





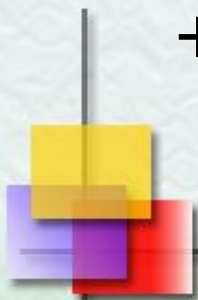
性质6可以推广到多个事件的情形.

例如 设  $A_1, A_2, A_3$  为任意三个事件, 则有

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = & P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) \\ & - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3) \end{aligned}$$

一般地, 对任意  $n$  个事件  $A_1, A_2, \dots, A_n$  可由归纳法证得.

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = & \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_iA_j) \\ & + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_iA_jA_k) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \dots A_n). \end{aligned}$$



**补例1** 设事件 $A$ ,  $B$ 的概率分别为 $1/3$ ,  $1/2$ ,  
求下列情况下  $P(B\bar{A})$  的值。

(1)  $A$ 、 $B$ 互斥；

(2)  $A \subset B$ ；

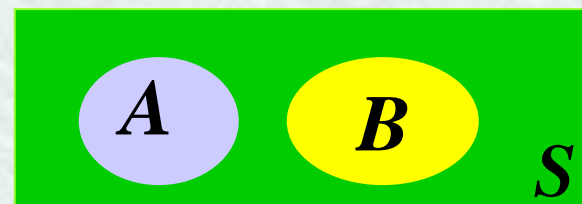
(3)  $P(AB) = \frac{1}{8}$ .



**解** (1) 若  $A$ 、 $B$  互斥,  $AB = \emptyset$ ,

$B\bar{A} = B$  此时  $B \subset \bar{A}$  从而

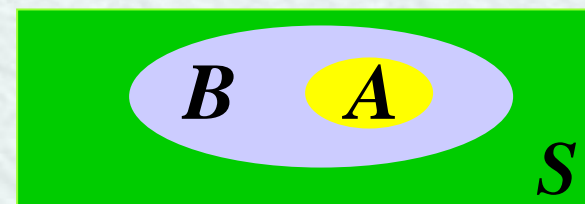
$$P(B\bar{A}) = P(B) = 1/2$$



(2) 若  $A \subset B$ ;

则  $P(B\bar{A}) = P(B - A) = P(B) - P(A)$

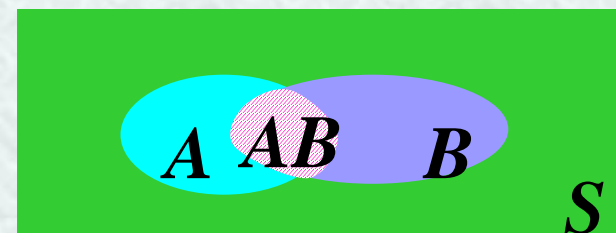
$$= 1/2 - 1/3 = 1/6;$$



(3) 若  $P(AB) = 1/8$ ,

则  $P(B\bar{A}) = P(B - AB) = P(B) - P(AB)$

$$= 1/2 - 1/8 = 3/8;$$





**例1.2.1** 设A, B为两个事件, 且  $P(A) = 0.3$ ,  
 $P(A \cup B) = 0.8$ , 求  $P(B - A)$ .

**例1.2.2** 设A, B为两个事件, 则

$$P(AB) = 1 - P(\bar{A}) - P(\bar{B}) + P(\bar{A} \bar{B}).$$



**补例2** 已知某城市中有50%的用户订日报，65%的用户订晚报，85%用户至少订两种报中的一种，问同时订两种报的用户占百分之几？

**解：** 设“用户订日报”为事件A，“用户订晚报”为事件B

则“至少订两种报中的一种”为  $A \cup B$

由已知，  $P(A) = 50\%$  ,  $P(B) = 65\%$  ,  $P(A \cup B) = 85\%$  ,

则所求概率为

$$\begin{aligned} P(AB) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 50\% + 65\% - 85\% = 30\%. \end{aligned}$$

即同时订两种报的用户占30%.



### 三、古典概型（等可能概型）

#### 定义

(1) 试验的样本空间只含有有限个元素，即

$$S = \{ e_1, e_2, \dots, e_n \} \quad \text{有限性}$$

(2) 试验中每个基本事件发生的可能性相同，即

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\}) = \frac{1}{n} \quad \text{等可能性}$$

具有以上两个特点的随机试验称为**等可能概型**。  
也称之为**古典概型**。





# 古典概型中事件概率的计算公式

设试验  $E$  的样本空间由  $n$  个样本点构成,  $A$  为  $E$  的任意一个事件, 且包含  $k$  个样本点, 则事件  $A$  出现的概率记为:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}. \quad (\text{数数})$$

称此为概率的古典定义.

这样就把求概率问题转化为计数。排列组合是计算古典概率的重要工具。



# 预备知识

## 一、乘法原理 排列及组合

### 1、乘法原理

乘法原理：若完成一件事情要经过两个步骤，其中第一步中有  $n_1$  种不同的方法，第二步骤中有  $n_2$  种不同的方法，则完成这件事情共有  $n_1 \cdot n_2$  种方法。



## 2、排列 (有次序的)

排列：从 $n$ 个不同的元素中按顺序取 $r$ 个排成一行( $0 < r \leq n$ ) 称为一个排列。所有可能的排列记为  $A_n^r$ 。则由乘法原理得

$$A_n^r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

特别，当 $n = r$ 时，称该排列为一个全排列，所有全排列的个数为

$$A_n^n = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$





**例1** 从1, 2, 3, 4, 5, 6这六个数字中任取五个组成五位数, 问共能组成多少个五位数?

**解:** 从六个不同数中任取五个组成五位数, 相当于从六个数中任取五个数生成一个排列, 因此, 所有可能组成五位数共有

$$A_6^5 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 720 (\text{个})$$



### 3、组合（无次序的）

组合：从 $n$ 个不同的元素中任取 $r$ 个元素组成一组 ( $0 < r \leq n$ )，称为一个组合。所有可能的组合数记为  $C_n^r$ 。由乘法原理，从 $n$ 个元素中取 $r$ 个生成的排列可分两步进行，首先从 $n$ 个元素中取 $r$ 个组成一组，共有  $C_n^r$  种方法，然后再在取出的 $r$ 个元素中进行全排列共有  $r!$  种方法，从而  $A_n^r = C_n^r \cdot r!$



所以从 $n$ 个元素中取 $r$ 个元素组成的组合数为

$$\binom{n}{r} \equiv C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

特别, 当 $n=r$ 时,  $C_n^n = 1$ 而且  $C_n^r = C_n^{n-r}$ 。

**例2** 从10名战士中选出3名组成一个突击队, 问共有多少种组队方法?

**解:** 按组合的定义, 组队方法共有

$$C_{10}^3 = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120(\text{种})$$





# 1、摸球问题

例1.2.3 设袋中有4只红球和2只白球，现从袋中  
(a)有放回 (b)不放回地依次摸出2只球。试求

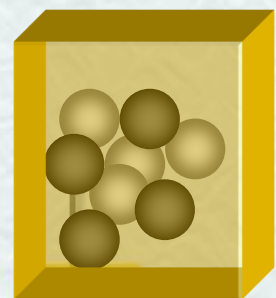
- (1) 取到的两只球都是红球的概率；
- (2) 取到的两只球颜色相同的概率；
- (3) 取到的两只球中至少有一只是白球的概率。

解 记 A表示“取到的两只球都是红球”

B表示“取到的两只球都是白球”

则 {取到的两只球颜色相同} =  $A \cup B$

{取到的两只球中至少有一只是白球} =  $\bar{A}$



编号



(a) 有放回

$$P(A) = \frac{4 \times 4}{6 \times 6} = \frac{4}{9}$$

$$P(B) = \frac{2 \times 2}{6 \times 6} = \frac{1}{9}$$

由于  $AB = \emptyset$ ，故由概率的有限可加性，  
所求概率是：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$



编号



(b) 不放回

号码排列: 
$$P(A) = \frac{A_4^2}{A_6^2} = \frac{4 \times 3}{6 \times 5} = \frac{2}{5}$$

或

号码组合: 
$$P(A) = \frac{C_4^2}{C_6^2} = \frac{\frac{4 \times 3}{2 \times 1}}{\frac{6 \times 5}{2 \times 1}} = \frac{2}{5}$$





类似可求得

$$P(B) = \frac{2 \times 1}{6 \times 5} = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

由于  $AB = \emptyset$ ，故由概率的有限可加性，  
所求概率是：

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{5} + \frac{1}{15} = \frac{7}{15}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

(4) 问取到一只白球一只红球的概率？



**例1.2.4** 设袋中有 $a$ 只白球和 $b$ 只红球,  $a+b$ 个人依次(1)有放回 (2)不放回在袋中取一只球, 试求第 $i$ 个人取到白球的概率 ( $i=1,2,\dots,a+b$ ) .

**解** 记 $A_i=\{\text{第}i\text{个人取到白球}\}$

编号     $\textcircled{1}$     $\textcircled{2}$     $\cdots$     $\textcircled{a}$     $\textcolor{red}{\textcircled{a+1}}$     $\textcolor{red}{\textcircled{a+2}}$     $\cdots$     $\textcolor{red}{\textcircled{a+b}}$

(1)有放回     $P(A_i) = \frac{a}{a+b}$



## (2)不放回

编号     $\textcircled{1}$     $\textcircled{2}$     $\cdots$     $\textcircled{a}$     $\textcircled{a+1}$     $\textcircled{a+2}$     $\cdots$     $\textcircled{a+b}$

基本事件总数:  $(a+b)(a+b-1)\cdots 1 = (a+b)!$

$\overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{i}, \cdots, \overline{a+b}$

可以是①号球,  
亦可以是②号  
球.....是②号  
球

$A_i$ 所包含的基本事件数:  $a(a+b-1)!$

$$\therefore P(A_i) = \frac{(a+b-1)!a}{(a+b)!} = \frac{a}{a+b}$$

抽签的公平性原则





## 2、占位（分房、生日）问题

**例1** 将  $n$  个球随机地放入  $N (N \geq n)$  个盒子中去，盒子的容量不限，试求每个盒子至多有一只球的概率。

**解** 每一个球都可以放入  $N$  个盒子中的任一个盒子，故共有  $N \times N \times \cdots \times N = N^n$  种不同的方法。

每个盒子中至多只有一只球，共有



$$N(N-1) \cdots [N-(n-1)]$$



种不同的方法，因此所求的概率为

$$p = \frac{N(N-1) \cdots [N-(n-1)]}{N^n} = \frac{A_N^n}{N^n}$$



**例2** 假设每人的生日在一年 365 天中的任一天是等可能的，即都等于  $1/365$ ，求 64 个人中至少有2人生日相同的概率。

**解** 64 个人生日各不相同的概率为

$$p_1 = \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - 64 + 1)}{365^{64}}.$$

故64 个人中至少有2人生日相同的概率为

$$p = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \dots \cdot (365 - 64 + 1)}{365^{64}} = 0.997.$$



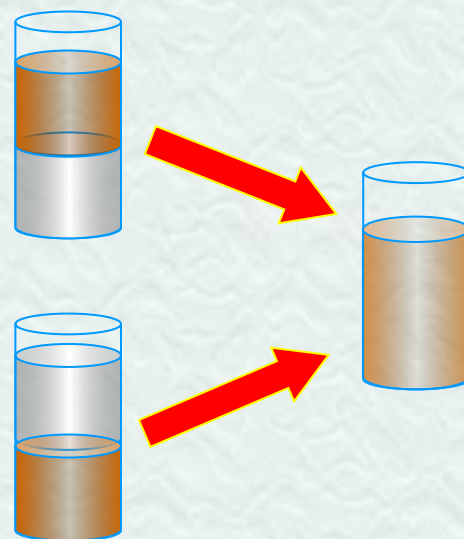
我们利用软件包进行数值计算.

人 数	至 少 有 两 人 生 日 相 同 的 概 率
1 0	0 . 1 1 6 9 4 8 1 7 7 7 1 1 0 7 7 6 5 1 8 7
2 0	0 . 4 1 1 4 3 8 3 8 3 5 8 0 5 7 9 9 8 7 6 2
3 0	0 . 7 0 6 3 1 6 2 4 2 7 1 9 2 6 8 6 5 9 9 6
4 0	0 . 8 9 1 2 3 1 8 0 9 8 1 7 9 4 8 9 8 9 6 5
5 0	0 . 9 7 0 3 7 3 5 7 9 5 7 7 9 8 8 3 9 9 9 2
6 0	0 . 9 9 4 1 2 2 6 6 0 8 6 5 3 4 7 9 4 2 4 7
7 0	0 . 9 9 9 1 5 9 5 7 5 9 6 5 1 5 7 0 9 1 3 5
8 0	0 . 9 9 9 9 1 4 3 3 1 9 4 9 3 1 3 4 9 4 6 9
9 0	0 . 9 9 9 9 9 3 8 4 8 3 5 6 1 2 3 6 0 3 5 5
1 0 0	0 . 9 9 9 9 9 9 6 9 2 7 5 1 0 7 2 1 4 8 4 2
1 1 0	0 . 9 9 9 9 9 9 9 8 9 4 7 1 2 9 4 3 0 6 2 1
1 2 0	0 . 9 9 9 9 9 9 9 9 9 7 5 6 0 8 5 2 1 8 9 5
1 3 0	0 . 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 6 2 4 0 3 2 3 1 7
1 4 0	0 . 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 6 2 1 0 3 9 5
1 5 0	0 . 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 7 5 4 9
1 6 0	0 . 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 9 0 0





**例1.2.7** （女士品茶）一位常饮奶茶的女士称：她能从一杯冲好的奶茶中辨别出该奶茶是先放牛奶还是先放茶冲制而成. 做了10次测试，结果是她都正确地辨别出来了. 问该女士的说法是否可信？



**解** 假设该女士的说法不可信，即纯粹是靠运气猜对的。

在此假设下，每次试验的两个可能结果为：

奶+茶 或 茶+奶

且它们是等可能的，因此是一个古典概型问题。

10次试验一共有  $2^{10}$  个等可能的结果  
若记

$A = \{10\text{次试验中都能正确分辨出放奶和放茶}\}$

则 
$$P(A) = \frac{1}{2^{10}} = 0.0009766$$

### 实际推断原理

概率很小的事件在一次试验中实际上几乎不会发生

由**实际推断原理**，该女士的说法可信。



### 3、随机取数问题

例1.2.8 在1 ~ 100中任取一个整数，求下列事件的概率：

- (1) 该数平方的末位数字是1；
- (2) 该数四次方的末位数字是1；

例1.2.9 在1 ~ 2000的整数中随机地取一个数，问取到的数既不能被6整除，又不能被8整除的概率是多少？





**例1.2.9** 在1 ~ 2000的整数中随机地取一个数，问取到的数既不能被6整除，又不能被8整除的概率是多少？

**解** 设  $A$  为事件“取到的数能被6整除”， $B$ 为事件“取到的数能被8整除”，则所求概率为  $P(\bar{A}\bar{B})$ .

$$\begin{aligned}P(\bar{A}\bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) \\&= 1 - \{P(A) + P(B) - P(AB)\}.\end{aligned}$$

因为  $333 < \frac{2000}{6} < 334$ ，所以  $P(A) = \frac{333}{2000}$ ，



由于  $\frac{2000}{8} = 250$ , 故得  $P(B) = \frac{250}{2000}$ .

由于  $83 < \frac{2000}{24} < 84$ , 得  $P(AB) = \frac{83}{2000}$ .

于是所求概率为

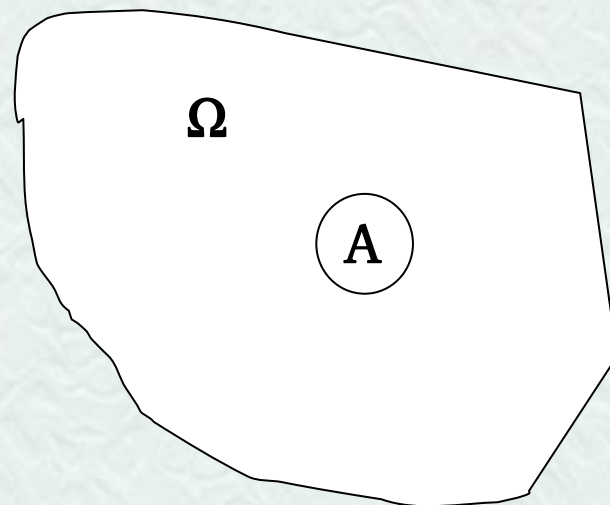
$$P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - \{P(A) + P(B) - P(AB)\}$$

$$= 1 - \left( \frac{333}{2000} + \frac{250}{2000} - \frac{83}{2000} \right) = \frac{3}{4}.$$



# 补充：几何概率

设在一个面积为  $S_{\Omega}$  的区域  $\Omega$  中等可能的任意投点（如图所示）。这里“等可能”的确切含义是：设在区域  $\Omega$  中任意一个小区域  $A$ ，如果它的面积为  $S_A$ ，则点落在  $A$  中的可能性的可能与  $S_A$  成正比，而与  $A$  的形状及位置无关。



记事件  $A$  表示“点落入小区域  $A$  中”，则

$$P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}}$$





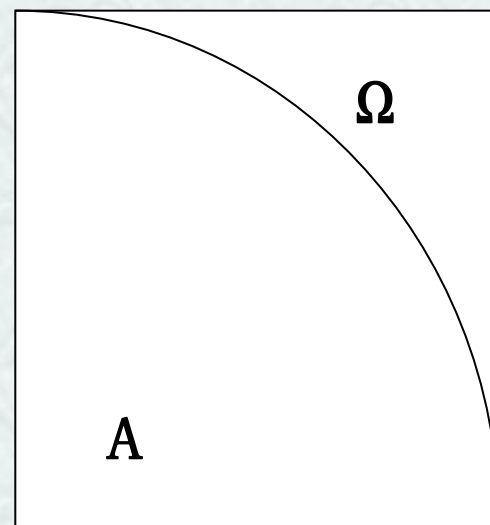
这一类概率通常叫做**几何概率**。和古典概型相比较，几何概率问题中虽然还要求基本事件是等概率的，但是基本事件的数量放宽到无限多个了。

---

**注** 如果在一个线段上投点，那么面积应改为长度，如果在一个立体中投点，则面积应改为体积。



**补例1** 在一个单位正方形中均匀投点，求点落入如右图所示的扇形区域A中的概率。



解：记正方形为 $\Omega$ ，显然  $S_{\Omega}=1$ 。

A是半径为1，圆心角为 $\frac{\pi}{2}$ 的扇形，  
易见

$$S_A = \frac{1}{2} \times 1^2 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore P(A) = \frac{S_A}{S_{\Omega}} = \frac{\pi}{4}$$



# 会面问题

**补例2** 甲、乙两人相约在下午4:00到5:00之间在某处会面；并约定先到的人等候另一个人15分钟，过时离去。求甲、乙两人能会面的概率。

解：设 $x, y$ 分别为甲、乙两人到达约会地点的时间，  
样本点 $(x, y)$

则  $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 60, 0 < y < 60\}$

设 $A$ ——“两人会面”

则  $A = \{(x, y) \mid |x - y| \leq 15\}$



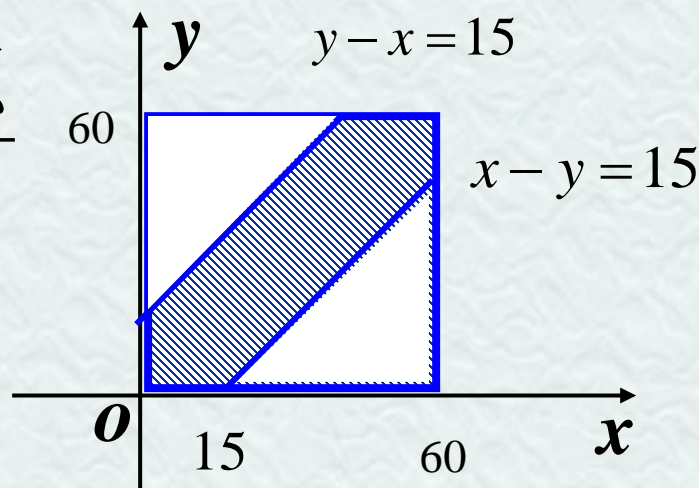


若以  $x, y$  表示平面上点的坐标, 则有

$$P(A) = \frac{\text{阴影部分面积}}{\text{正方形面积}}$$

$$= \frac{60^2 - (60 - 15)^2}{60^2}$$

$$= 1 - \left(\frac{45}{60}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$



## 注意

概率为0的事件不一定是不可能事件

概率为1的事件不一定是必然事件

