§6.3 区间估计

置信区间（Confidence Interval）定义

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 含有一个未知参数 θ，对于给定值 α $(0<\alpha<1)$，若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的两个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 和 $\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间，$\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$ 分别称为置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限，$1-\alpha$ 为置信度.

关于定义的说明

被估计的参数θ虽然未知, 但它是一个常数, 没有随机性, 而区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$是随机的.

因此定义中下表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

的本质是:

随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 以 $1-\alpha$的概率包含着参数θ的真值, 而不能说参数θ以 $1-\alpha$的概率落入随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$.

另外定义中的表达式

$$P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1 - \alpha$$

还可以描述为:

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等,都是n)

每个样本值确定一个区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$,

每个这样的区间或包含 θ 的真值或不包含 θ 的真值,

按**伯努利大数定理**, 在这样多的区间中,

包含 θ真值的约占$100(1-\alpha)\%$,不包含的约占$100\alpha\%$.

例如　若$\alpha = 0.01$, 反复抽样 1000 次,

则得到的 1000 个区间中不包含 θ 真值的约为10个.

§6.4　单正态总体均值与方差的区间估计

一、均值的双侧置信区间

二、方差的双侧置信区间

三、小结

设给定置信水平为$1-\alpha$, 并设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本, $\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差.

一、均值 μ 的置信区间

1. σ^2为已知　　因为$\overline{X}$是μ的无偏估计,

(1) 选取枢轴量 $U = \dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$,

$\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$是不依赖于任何未知参数的,

考虑 $P\left\{a < \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < b\right\} = 1-\alpha,$

例如 $P\left\{-u_{0.025} < \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{0.025}\right\} = 0.95,$

即 $P\{\bar{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025} < \mu < \bar{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}\} = 0.95,$

其置信区间的长度为 $2\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025}$.

或 $P\left\{-u_{0.04} < \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < u_{0.01}\right\} = 0.95,$

其置信区间的长度为 $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}(u_{0.04}+u_{0.01})$.

比较两个置信区间的长度

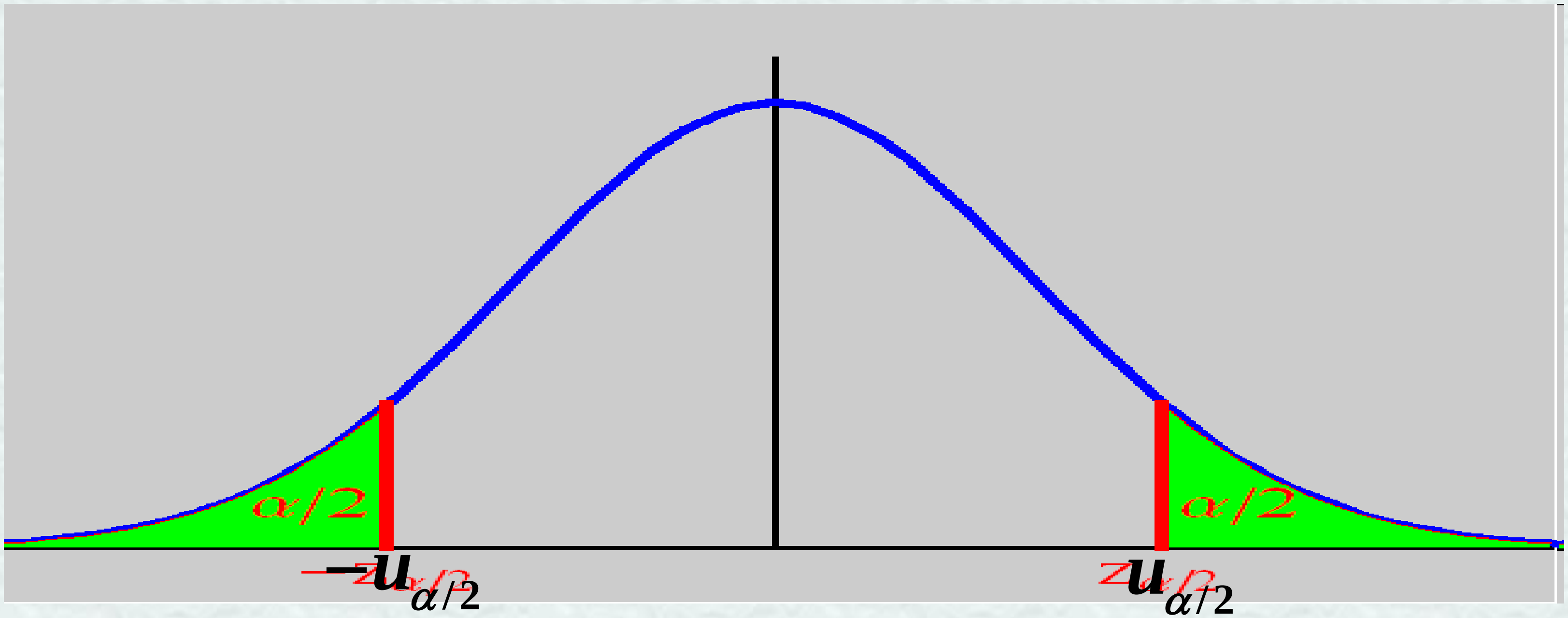
$$L_1 = 2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{0.025} = 2\times1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3.92\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(u_{0.04}+u_{0.01}) = (1.75+2.33)\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4.08\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

显然 $L_1 < L_2$. 置信区间短表示估计的精度高.

说明: 对于概率密度的图形是单峰且关于纵坐标轴对称的情况, 取a和b关于原点对称时,能使置信区间长度最小.

由标准正态分布的上α分位点的定义知



（2） 由 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$ 确定临界值 $u_{\alpha/2}$；

即 $P\left\{\overline{X}-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$

（3）μ的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成 $\left(\bar{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right).$

置信区间的长度为 $2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}$.

置信区间的中点为 $\bar{X}$

补例 包糖机某日开工包了12包糖，称得质量(单位:克)分别为506, 500, 495, 488, 504, 486, 505, 513, 521, 520, 512, 485. 假设重量服从正态分布，且标准差为$\sigma = 10$，试求糖包的平均质量μ的$1-\alpha$置信区间(分别取$\alpha = 0.10$和$\alpha = 0.05$).

解 $\sigma = 10$, $n = 12$, 计算得 $\bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \approx 502.92$,

(1) 当$\alpha = 0.10$时， $1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.95$,

查表得 $u_{\alpha/2} = u_{0.05} = 1.645$,

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}=502.92-\frac{10}{\sqrt{12}}\times 1.645=498.17,$$

$$\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}=502.92+\frac{10}{\sqrt{12}}\times 1.645=507.67,$$

即μ的置信度为90%的置信区间为

(498.17, 507.67).

(2) 当$\alpha=0.05$时，$1-\frac{\alpha}{2}=0.975,$

查表得

$$u_{\alpha/2} = u_{0.025} = 1.96,$$

同理可得 μ 的置信度为 95% 的置信区间为

$$(497.26,\ 508.58).$$

从此例可以看出,

当置信度 $1-\alpha$ 较大时, 置信区间也较大;

当置信度 $1-\alpha$ 较小时, 置信区间也较小.

求置信区间的一般步骤(共3步)

(1) 寻求一个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数：

$$Z = Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$$ 枢轴量

其中仅包含待估参数 θ, 并且 Z 的分布已知且不依赖于任何未知参数 (包括 θ).

通常枢轴量可由未知参数的点估计量经过变换获得.

(2) 对于给定的置信度 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b, 使 $P\{a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$.

(3) 若能从 $a < Z(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$, 其中 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是统计量, 那么 $(\underline{\theta}, \overline{\theta})$ 就是 θ 的一个置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间.

要求：（1）可信度高：提高置信度

（2）估计精度高：缩小区间长度

置信水平 $1-\alpha$ 固定, 样本容量 n 增大, 置信区间长度减小, 可信程度不变, 区间估计精度提高.

2. σ^2为未知

推导过程如下:

由于区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right)$中含有未知参数$\sigma$, 不能直接使用此区间,

但因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计, 可用 $S = \sqrt{S^2}$ 替换 σ,

步骤:

（1） 选取枢轴量 $T = \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

（2）由 $P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$, 确定 $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$；

即 $P\left\{\overline{X}-\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X}+\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

（3） μ 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

例6.4.2 有一大批糖果,现从中随机地取16袋, 称得重量(克)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量服从正态分布, 试求总体均值 μ 的置信度为0.95的置信区间.

解 $\alpha = 0.05,\quad n = 16,\quad n-1 = 15,$

查 $t(n-1)$ 分布表可知： $t_{0.025}(15) = 2.1314,$

计算得 $\bar{x} = 503.75,\quad s = 6.2022,$

得μ的置信度为95%的置信区间

$$\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right).$$

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1314\right) \quad \text{即} \quad (500.45, \quad 507.05).$$

练习册P24 § 6.3-6.4

一 选择填空题

1. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，样本均值$\bar{x} = 9.5$，总体均值μ的置信度为 0.95 的双侧置信区间上限为 10.8，则μ的置信度为 0.95 的双侧置信区间是____________________.

练习 设某工件的长度 X 服从正态分布 $N(\mu,16)$, 今抽9件测量其长度, 得平均长度为 $\bar{x}=147.33mm$, 试求参数 μ 的置信水平为95%的置信区间.

解 μ的置信度为 $1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right),$$

由 $n=9,\sigma=4,\alpha=0.05,u_{0.025}=1.96,\bar{x}=147.33$知,

μ的置信度为0.95的置信区间为

$$147.33\pm\frac{4}{\sqrt{9}}1.96\approx(144.72,\ 149.94).$$

练习 设某电子元件的寿命服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，随机抽查了9个元件，测得样本均值 $\bar{x}=1500h$，样本标准差 $s=14$，求 μ 的置信度为 99% 的置信区间.

解 μ的置信度为 $1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1),\ \bar{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right),$$

由 $n=9,\alpha=0.01,t_{0.005}(8)=3.3354,\bar{x}=1500,s=14$,知,

μ的置信度为99%的置信区间为

$$1500\pm\frac{14}{\sqrt{9}}3.3554\approx(1484.34,\ 1515.66).$$

注: 置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间不是唯一的.

$$P\{|U|<\lambda\}=0.95 \longrightarrow P\{\lambda_1<U<\lambda_2\}=0.95$$

$$(-\lambda,\lambda) \qquad\qquad (\lambda_1,\lambda_2)$$

当密度函数为单峰对称时 (如 $N(0,1)$, $t(n)$ 分布), 在置信度一定时，取等尾所构造的置信区间最短.

在密度函数不对称时, 如 χ^2 分布和 F分布, 习惯上仍取对称的分位点来确定置信区间.

二、方差 σ^2 的置信区间

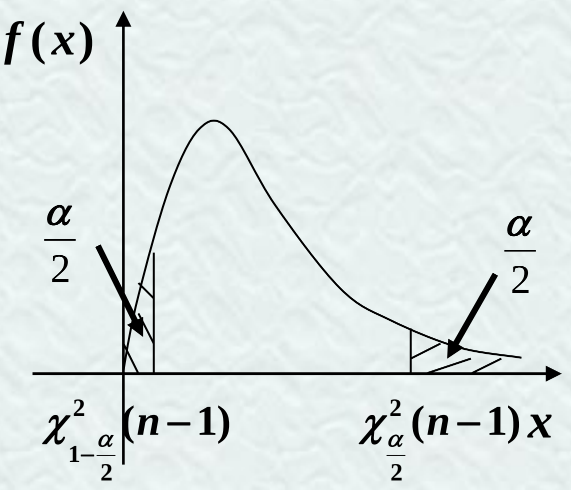
根据实际需要，只介绍 μ 未知的情况.

推导过程如下：　因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计，

（1）选取枢轴量　$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1),$

考虑

$$P\left\{\lambda_1 < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \lambda_2\right\} = 1-\alpha$$



（2）由 $P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$

确定临界值 $\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1), \chi^2_{\alpha/2}(n-1)$；

即 $P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$

（3）方差 σ^2 的置信度为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

进一步可得:

标准差σ的一个置信度为$1-\alpha$的置信区间

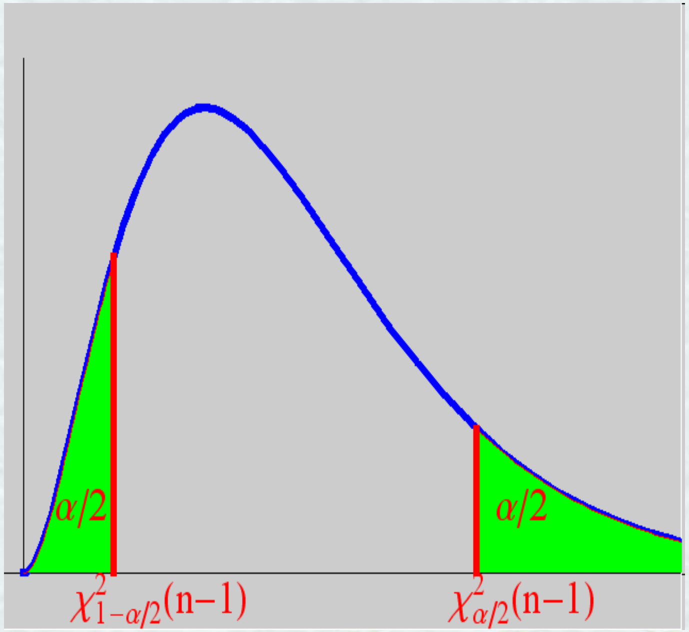
$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

注意: 在密度函数不对称时,

如 χ^2 分布和 F分布,

习惯上仍取对称的分位点来

确定置信区间(如图).



补例 （续例6.4.2）有一大批糖果,现从中随机地取16袋, 称得重量(克)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量服从正态分布, 试求总体方差 σ^2 和标准差 σ 的置信度为0.95的置信区间.

解 $\dfrac{\alpha}{2} = 0.025, \qquad 1 - \dfrac{\alpha}{2} = 0.975, \qquad n-1 = 15,$

查 $\chi^2(n-1)$ 分布表可知:

$$\chi^2_{0.025}(15) = 27.488, \qquad \chi^2_{0.975}(15) = 6.262,$$

计算得 $s = 6.2022,$

方差σ^2的置信度为$1-\alpha=95\%$的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

$$\left(\frac{15\times 6.2022^2}{27.488},\ \frac{15\times 6.2022^2}{6.262}\right)$$ 即 $(20.99\ ,92.14)$

标准差的置信区间 $\left(\sqrt{20.99}\ ,\sqrt{92.14}\right) = (4.58,\ 9.60).$

练习 设某异常区磁场强度服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，现对该区进行磁测，今抽测 16 个点，算得 $\bar{x}=12.7$，$s^2=0.0025$，求 σ^2 的置信度为95%的置信区间。

解 $n=16, \alpha=0.05$, $\chi^2_{0.025}(15)=27.488$, $\chi^2_{0.975}(15)=6.262$,

σ^2 的置信度为95%的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right)$$

$$\left(\frac{15\times 0.0025}{27.488}, \frac{15\times 0.0025}{6.262}\right)=(0.00136,\ 0.00599).$$

三、小结

1. 单个总体均值 μ 的置信区间

(1) σ^2为已知, $\left(\bar{X} \pm \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2}\right)$.

(2) σ^2为未知, $\left(\bar{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.

2. 单个总体方差 σ^2 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

第六章　　参数估计
习　题　课

一、重点与难点

二、主要内容

三、典型例题

一、重点与难点

1.重点

矩估计和最大似然估计；

估计量的评选标准；

单正态总体均值和方差的区间估计.

2.难点

最大似然估计

显著性水平 α 与置信区间.

二、主要内容

- 点估计
  - 矩估计量
  - 似然函数
    - 最大似然估计量
- 估计量的评选
  - 无偏性
  - 有效性
  - 相合性
- 置信区间和上下限
  - 求置信区间的步骤
    - 正态总体均值和方差的置信区间

		枢轴量	临界值	置信区间
μ	σ^2已知	$U=\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$	$P\{\lvert U\rvert<u_{\alpha/2}\}=1-\alpha$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}u_{\alpha/2}\right).$
	σ^2未知	$t=\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}$	$P\{\lvert T\rvert<t_{\alpha/2}(n-1)\}=1-\alpha$	$\left(\bar{X}\pm\dfrac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)\right).$
σ^2	μ未知	$\chi^2=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$	$P\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)<\chi^2<\chi^2_{\alpha/2}(n-1)\}$ $=1-\alpha$	$\left(\dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)},\ \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$
	μ已知			

三、典型例题

例1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自参数为 p 的 $(0-1)$ 分布的一个样本，求参数 p 的矩估计量及最大似然估计量并验证它们是 p 的无偏估计量.

解 $f(x;p)=p^x(1-p)^{1-x}, \quad x=0,1,$

$$L(p)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;p)=p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n} x_i},$$

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot \ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\cdot \ln(1-p),$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p},$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=0$, 得 $(1-p)\sum_{i=1}^{n}x_i=p\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$,

故参数 p 的最大似然估计值为 $\hat{p}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$,

参数 p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$,

$$E(X) = p = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

故参数p的矩估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \overline{X},$

$$E(\hat{p}) = E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = p,$$

所以 $\hat{p}$ 是 p 的无偏估计量.

例2　设总体的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, 0<x<1\\ 0, 其它\end{cases}$

其中$\theta>0$是未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$一组样本，试求 θ 矩估计量及最大似然估计量.

例3　设总体服从二项分布 $b(l\,,p)$ ，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为一简单随机样本，求未知参数 p 的矩估计量及最大似然估计量。

例4 设 $\hat{\theta}$ 是参数 θ 的无偏估计，且有 $D(\hat{\theta})>0$ ，试证 $\tilde{\theta}=(\hat{\theta})^2$ 不是 θ^2 的无偏估计.

例5 设总体服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,\cdots X_n$ 是一简单随机样本，$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i, S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X}\right)^2$ 。试证：$\frac{1}{2}\left(\overline{X}+S^2\right)$ 是 λ 的无偏估计.

例6 从正态总体 $N(\mu, \frac{1}{4})$ 中取出容量 $n = 100$ 的样本，算出样本均值为 $\bar{x} = 13.2$ ，求 μ 的置信水平为95%的置信区间。

例7 测得14个零件的长度（毫米）如下：12.12，12.01，12.08，12.09，12.16，12.03，12.01，12.06，12.13，12.07，12.08，12.01，12.03，12.06。如果零件长度服从正态分布，求零件长度的数学期望及方差的置信度为0.95的置信区间。