第 7 章 多元函数微分法及其应用

我们在上册讨论了含有一个自变量的函数（即一元函数）的微积分．在实际问题或理论问题中，许多变量往往由多个自变量决定，它们称为多元函数，这种函数在很多方面与一元函数有着本质的区别，所以研究多元函数的微积分是十分必要的．同时，二元函数与三元或更多自变量的函数在函数的微分学方面没有本质的差别，因此本章以讨论二元函数为主，即讨论二元函数的极限和连续性，偏导数和全微分及其应用．

§7.1 多元函数的极限与连续

7.1.1 多元函数的概念

一、平面点集的基本概念

正如实轴上的点的邻域、开区间、闭区间，区间端点等概念一样，关于坐标平面 $\mathbf{R}^2$ 上的点集也有类似的基本概念．

1.邻域

如图 7.1.1，设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ 是某一正数，与点 $P_0(x_0,y_0)$ 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为**点 P_0 的 δ 邻域**，简称**邻域**，记为 $U(P_0;\delta)$，即

$$U(P_0;\delta)=\left\{P\,\middle|\,|PP_0|<\delta\right\}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

点 P_0 称为邻域的**中心**，数 δ 称为邻域的**半径**．在不需要考虑邻域半径时，也可以将邻域记为 $U(P_0)$．邻域中去除中心后的那个点集称为 P_0 的**去心邻域**，记作 $U^{\circ}(P_0;\delta)$ 或 $U^{\circ}(P_0)$．

注 欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的定义已在 6.1.1 节中给出，欧氏空间中与线性运算有关的性质称为**线性性质**，与距离概念有关的性质称为**拓扑性质**．此处讨论的是坐标平

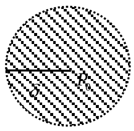


图 7.1.1

2.内点、外点和边界点，聚点和孤立点

设 E 是平面上的一个点集，P 是平面上的一个点．如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)\subset E$，则称 P 为 E 的**内点**．E 的内点总属于 E．

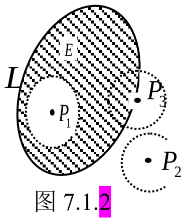


图 7.1.2

如果存在 P 的某一邻域 $U(P)$，使得 $U(P)\cap E=\varnothing$．则称 P 为 E 的**外点**．

如果 P 的任何邻域中既存在属于 E 的点，又存在不属于 E 的点，则称 P 是 E 的**边界点**．E 的一切

边界点的全体称为 E 的**边界**，记作 ∂E .

如图 7.1.2，设 E 是由平面光滑曲线 L 所围的点集，P_1 和 P_2 分别在 L 内侧和外侧，则 P_1 是 E 的内点，P_2 是 E 的外点，L 上的点 P_3 是 E 的边界点.

设 E 是一个点集，P 是平面上的一个点，如果点 P 的任何一个邻域内总有无限多个点属于点集 E，则称 P 为 E 的**聚点**. E 的聚点的全体称为 E 的**导集**，记为 E^d .

若 E 中的点 P 不是 E 的聚点，则称 P 为 E 的**孤立点**；边界点可能是聚点，也可能是 E 的孤立点.

3.开集和闭集

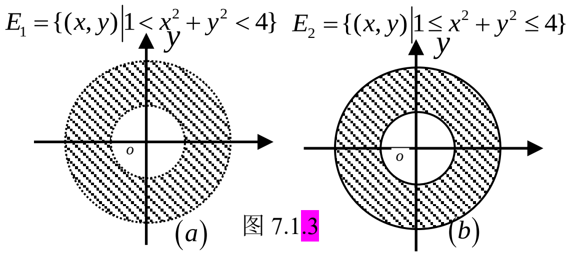


图 7.1.3

E 的一切内点的全体称为 E 的**内部**，记作 E^o .

如果点集 E 的点都是内点，则称 E 为**开集**. 换言之，E 是开集当且仅当 $E^o=E$.

如果 E 包含它的边界，即 $\partial E\subset E$，则称 E 是**闭集**.

如图 7.1.3，集合

$E_1=\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$ 为开集，$E_2=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$ 为闭集. 这两个集合有相同的边界、相同的内部和相同的导集. 其中边界为 $\partial E_1=\partial E_2=\{(x,y)|x^2+y^2=1或4\}$.

4.连通集和区域、有界集和无界集

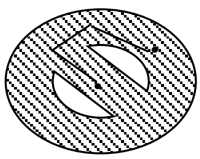


图 7.1.4

注“连通的闭集”未必是闭区域. 集合 $E=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}\cup\{(x,y)|xy=0\}$ 是连通闭集，

设 D 是平面区域，如果对于 D 内任何两点，都可用折线连结起来且该折线上的点都属于 D，则称 D 是**连通**的.

连通的开集称为**开区域**，如果一个集合是一个开区域加上它的全部边界，则称之为**闭区域**. 开区域、闭区域或开区域连同其部分边界点的集合统称为**区域**.

图 7.1.4 的阴影部分的集合是一个连通集，从而是一个区域. 图 7.1.3 中的 $E_2=\{(x,y)|1\le x^2+y^2\le 4\}$ 是一个闭区域. 易见，开区域、闭区域和区间的概念分别是数轴上开区间、闭区间和区间概念的推广.

对于点集 E，如果存在正数 K，使 E 中一切点 P 与原点 O 之间的距离 $|OP|$ 不超过 K，即

$$|OP|\le K,\quad \forall P\in E,$$

则称 E 为**有界点集**，否则称为**无界点集**.

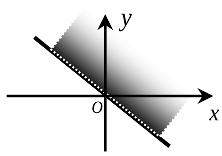


图 7.1.5

例如，图 7.1.3 中的集合 $E_2=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$ 是有界闭区域；集合 $\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$ 是无界开区域（如图 7.1.5）.

二、平面区域的表示

定义在区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $y=f(x)$ 的曲线 $y=f(x)$ 将平面上的一条带形区域 $a\le x\le b$ 分为上、下两侧，在曲线上方 $y>f(x)$，曲线下方是 $y<f(x)$．所以有些平面区域就可以用这种一元连续函数来表示.

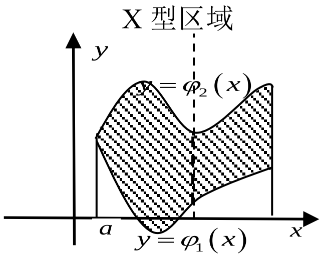


图 7.1.6

如图 7.1.6，当 $\varphi_1(x)\le\varphi_2(x)$，$\forall x\in[a,b]$ 时，曲线 $y=\varphi_1(x)$ 和 $y=\varphi_2(x)$ 在 $x\in[a,b]$ 所围的闭区域就可以表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x),\ a\le x\le b\}. \qquad (7.1.1)$$

这种表示，称为 D 的 X **型区域**表示．我们可以看作在 x 轴上作了一条移动的垂线，它与区域 D 的内部有两个交点 $(x,\varphi_1(x))$ 和 $(x,\varphi_2(x))$，则此两交点之间的线段上的点 (x,y) 满足不等式 $\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)$；让这条竖线从最小值 a 平行移动到最大值 b，就表示出了区域 D 的全部点.

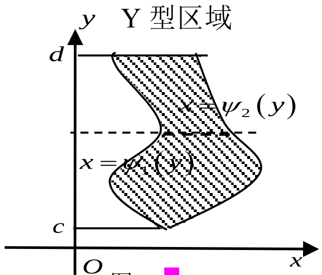


图 7.1.7

有些平面区域不宜表示成为 X 型区域，如图 7.1.7，如果有两个连续函数 $x=\psi_1(y)$，$x=\psi_2(y)$，$\psi_1(y)\le\psi_2(y)$，$\forall y\in[c,d]$，那么，这两个函数的曲线在 $c\le y\le d$ 时所围的闭区域就可以表示为

$$D=\{(x,y)\,|\,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),\ c\le y\le d\}. \qquad (7.1.2)$$

当 D 用这种方法表示时，也就称为 Y **型区域**．区域 D 是 Y 区域当且仅当穿过 D 的内部的任何一条水平直线与 D 的边界恰有两个交点.

更复杂的区域总可以分解成为若干个 X 型或 Y 型区域之和．三维空间中的区域也可以用相似的方法表示.

例 7.1.1 试将图 7.1.8 中的区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ x\ge y,\ y\ge 0\}$ 分别表示成为 X 型区域和 Y 型区域.

解 从方程组 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ x-y=0\end{cases}$ 和 $\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ y=0\end{cases}$ 解出边界线上的三个特殊点 $O(0,0)$，$A(\sqrt2,\sqrt2)$ 和 $B(2,0)$．虚线 AC 的两侧的区域的连界的方程不同，所以将 D 按 X 型表示区域为

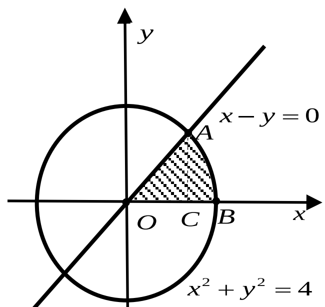


图 7.1.8

$$D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x,0\le x\le\sqrt{2}\right\}\bigcup\left\{(x,y)\middle|0\le y\le\sqrt{4-x^2},\sqrt{2}\le x\le 2\right\};$$

D 按 Y 型区域表示为

$$D=\left\{(x,y)\middle|y\le x\le\sqrt{4-y^2},0\le y\le\sqrt{2}\right\}.$$

三、多元函数的定义

定义 7.1.1. 设在某个变化过程中存在三个变量 x,y,z，如果按照某个对应法则 f，使得对于 x,y 在其变化范围 D（$\subset\mathbf{R}^2$）内的每一组值，都有唯一的 z 的值与之对应，则称对应法则 f 是变量 x,y 的**二元函数**，记为

$$z=f(x,y).\tag{7.1.3}$$

其中 D 称为二元函数 $f(x,y)$ 的**定义域**． x,y 称为**自变量**， z 称为**因变量**． $f(x,y)$ 全体函数值的集合 $f(D)$ 称为函数 f 的**值域．**

类似地可以定义三元以及一般的 n 元函数．

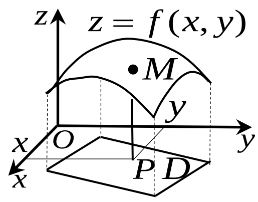


图 7.1.9

二元函数的例子很多，例如：

匀速运动的物体运动的路程 s 是时间 t 和速度 v 的二元函数： $s=vt$；

两个数的算术平均值是两个数的一个二元函数： $\bar{x}=\dfrac{a+b}{2}$， $a,b\in\mathbf{R}$；

当 $(x,y)\ne(0,0)$ 时， $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是一个二元函数，它表示原点 $O(0,0)$ 到点 $P(x,y)$ 的连线与 x 轴夹角 θ 的正弦 $\sin\theta$；

当 $x>0$ 时，$\theta=\arctan\dfrac{y}{x}$ 是一个二元函数，它表示右半平面上的点 $P(x,y)$ 与原点 $O(0,0)$ 的连线与 x 轴夹角．

点集

$$G=\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),\ (x,y)\in D\}$$

称为二元函数的**图形**（或**图像**）．当二元函数定义中的 D 是平面上的点集时， $z=f(x,y)$ 成为三维空间中的三元方程，所以集合 G 称为这个二元函数的**曲面**．

如图 7.1.9，在三维空间中，函数的定义表明，当 xOy 坐标平面上的点 $P(x,y)$ 在定义域 D 上变化时，在曲面 $z=f(x,y)$ 上总存在一个对应点 $M(x,y,z)$．

例 7.1.2 求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

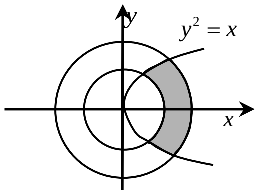


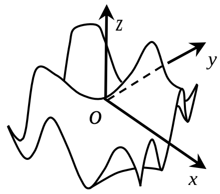
图 7.1.10

解 根据基本初等函数的定义域，如图 7.1.10， $f(x,y)$ 中的自变量须满足：

$$\begin{cases}\left|3-x^2-y^2\right|\le 1,\\ x-y^2>0,\end{cases} \text{稍作整理后得} \begin{cases}2\le x^2+y^2\le 4,\\ x>y^2.\end{cases}$$

故 $f(x,y)$ 定义域为

$$D=\{(x,y)\,|\,2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}\,.$$



图

二元函数的图形通常都很复杂．函数 $z=\sin xy$ 的图形如图 7.1.11．通常用截痕法从截面上的一元函数来研究二元函数.

练习 7.1.1

1.求下列集合的内部和边界:

（**1**） $E_1=\left\{(x,y)\middle|x\ne 0,y\ne 0\right\}$ ；（**2**） $E_2=\left\{(x,y)\middle|1<x^2+y^2\le 4\right\}$ ；（**3**） $E_3=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4\right\}$.

上述三个集合中，________是开集，_________是闭集.

注 集合 D 聚点的任何邻域内都含有 D 的无穷多个点，因此极限定义中要用到聚点的概念，就是

2.已知函数 $f\left(x,y\right)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，则 $f\left(tx,ty\right)=$____________ .

3.函数 $y=\ln\left(y^2-2x+1\right)$ 的定义域是__________.

4.将 xOy 平面上的区域 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le 1\right\}$ 分别表示成为 X 型区域和 Y 型区域.

7.1.2 二元函数的极限与连续

这里所讨论的有关二元函数的极限理论都可以推广到三元以及三元以上的函数上去.

思考题 7.1.1 根据二元函数极限定义，如何叙述 n 元函数极限的

一．二元函数的极限

设 D（$\subset\mathbf{R}^2$）是函数 $z=f(x,y)$ 的定义域，点 $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点，我们来研究当点无限靠近于 P_0 时， $f(x,y)$ 的变化趋势.

定义 7.1.2 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D， $P_0(x_0,y_0)$ 是其聚点，如果存在实数 A，对于任意给

定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点 $P(x,y)$，都成立

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$， $y\to y_0$ 时的极限，记为

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$，或 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$（或 $f(x,y)\to A\ (\rho\to 0)$，这里 $\rho=|PP_0|$）.

二元函数的极限运算法则与一元函数类似. 需要掌握的是这种极限过程中 $P\to P_0$ 的方式是任意的，与路径无关.

用相似的方法可以定义在 $x\to x_0, y\to\infty$ 或 $x\to\infty, y\to\infty$ 等过程中 $z=f(x,y)$ 的极限.

例 7.1.3 求证

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

证 函数的定义域为 $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. 因为

$$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|=\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le x^2+y^2.$$

所以任给 $\varepsilon>0$，可取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$ 时，$\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$. 故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

证毕.

注 将二元函数的极限通过变量代换化作一元函数的极限，这是一种十分有效的方法

与一元函数极限类似，关于二元函数极限也有四则运算、复合运算的法则和无穷小乘有界量法则，也有局部有界性及极限的保序性和保号性等性质.

例 7.1.4 求极限：

（1）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$；（2）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2}$；（3）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$.

解 （1）令 $u=x^2+y^2$，则当 $x\to 0, y\to 0$ 时 $u\to 0$. 因此

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{u^2}=\frac{1}{2}.$$

（2）当 $x\to 0, y\to 2$ 时 $xy\to 0$，因此

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot y=1\times 2=2\,.$$

（3）由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\frac{x^2y}{x^2+y^2},$$

其中

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}=1,\quad \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}|x|\xrightarrow{x\to 0}0\,,$$

故 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=1\times 0=0\,.$

☆**例 7.1.5** 证明极限 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$ 不存在.

证法一 取 $y=kx$，得

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot kx}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

其值随 k 的不同而变化，故极限不存在.

证法二 先取路径 $y=x$，则

$$\lim_{\substack{y=kx\\ x\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2+x^2}=\frac{1}{2};$$

再取路径 $y=0$，则

$$\lim_{\substack{y=0\\ x\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2+0^2}=0\,.$$

两种路径上所得的极限值不同，所以原极限不存在．证毕.

这个例题展现了证明极限不存在的两种方法：

（1）令 $P(x,y)$ 沿 $y=y(k,x)$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$，若极限值与 k 有关，则可断言极限不存在；

（2）找两种不同路径 $C_i\,(i=1,2)$，使 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\in C_i\\ x\to x_0,\,y\to y_0}}f(x,y)$ 出现不同的结果，此时也可断言 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处极限不存在.

本题的结果也说明：极限 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}$ 是不存在的，因为只要令 $x=ky^2$ 就能证明.

二元函数的极限也叫做**二重极限**．在讨论二元函数的极限时，有时还会遇到**二次极限**（或**累次极限**）的问题．若对任意固定的x，存在极限$\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)=A(x)$，又有极限$\lim\limits_{x\to x_0} A(x)=a$，则称$a$为**二次极限**$\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$，这个极限过程可以简单地写为

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right).$$

同样地可以定义$\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$，即先固定变量$y$而对$x\to x_0$求极限，再求$y\to y_0$．

必须指出的是，这两种二次极限的存在性与二重极限$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$的存在性没有蕴含关系．不过，可以证明，如果它们都存在，那么必定是相等的．

二、二元连续函数

思考题 7.1.3 如何证明$\rho\to 0$ $\Leftrightarrow$ $x\to x_0, y\to y_0$？这里$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

1．二元函数的连续性和连续函数

定义 7.1.3 设函数$f(x,y)$在区域D上定义，$P_0(x_0,y_0)\in D$，如果$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$，则称$f(x,y)$在点$P_0$处**连续**．

和一元函数一样，函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处连续，是指同时满足三个条件：

（1）极限$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$存在；

（2）函数值$f(P_0)$存在；

（3）上述二者相等：$\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$．

思考题 7.1.2 如何说明二重极限的存在性与二次极限的存在性没

或者说，多元函数的连续性是意指$\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta f=0$（$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$）．

设P_0是函数$f(x,y)$的定义域的聚点，如果$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处不连续，则称P_0是函数$f(P)$的间断点．易知，函数$f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2-1}$的间断点是集合$\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$，即平面上的一个圆．

如果函数$f(x,y)$在某区域D的任何点上连续，则称$f(x,y)$是D上的**连续函数**．

例 7.1.6 设$f(x,y)=\sin x$，证明$f(x,y)$是$\mathbf{R}^2$上的连续函数．

证 任意取定点$P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，由一元函数$\sin x$在点$x_0$的连续性知，任给正数$\varepsilon$，可取$\delta=\varepsilon$，则当$|x-x_0|<\delta$时，

$$|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon.$$

所以，当$P(x,y)\in U(P_0;\delta)$时，由于

$$|x-x_0|\le\rho(P,P_0)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta,$$

就有

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|=|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon.$$

即$\sin x$作为x,y的二元函数在$\mathbf{R}^2$上连续.

二元初等函数指自由变量为x,y的一元基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数．可以证明，一切二元初等函数在定义区域（指包含在定义域内的区域）上连续.

例 7.1.7 求极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}=\dfrac{1}{2}$.

最后的等式用到了初等函数的连续性.

例 7.1.8 讨论下列函数$f(x,y)$在点$O(0,0)$处的连续性，设

（1）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\ne0,\\ 0, & x^2+y^2=0;\end{cases}$ （2）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\ne(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

解 （1）根据例 7.1.5，极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$不存在，所以$f(x,y)$在点$O(0,0)$处不连续.

（2）化为极坐标：$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$，则

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\left|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\right|<2\rho\to0\left(\rho\to0\right).$$

故$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$．从而$f(x,y)$在点$O(0,0)$处连续.

2．有界闭区域上连续函数的性质

与闭区间上的一元连续函数一样，有界闭区域上的多元连续函数有以下性质：

（1）**最大值和最小值定理** 有界闭区域D上的多元连续函数$f(P)$，在D上至少取得它的最大值和最小值各一次．即存在两个实数m和M，使得存在$P_1\in D$和$P_2\in D$，取值$f(P_1)=m$和$f(P_2)=M$，且对任何点$P\in D$，

$$m\le f(P)\le M.$$

（2）**有界性定理** 有界闭区域D上的多元连续函数$f(P)$必在D上有界．即存在正数M，使对任何点$P\in D$有

$$|f(P)|\le M .$$

（3）**介值定理** 有界闭区域D上的多元连续函数$f(P)$，如果在D上取得两个不同的函数值，则它在D上取得介于这两值之间的任何值至少一次．

上述介值定理还有以下两种等价形式：

1）**零点定理** 有界闭区域D上的多元连续函数$f(P)$，如果在D上既有正值又有负值，则至少存在一点$P_0\in D$，使得$f(P_0)=0$．

2）若m和M分别是$f(P)$在D上的最小值和最大值，$m<\mu<M$，则存在$P_0\in D$，满足

$$f(P_0)=\mu .$$

练习 7.1.2

1．$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}$（　　）．

（A）∞　　（B）1　　（C）0　　（D）既非有限数又非无穷大

2.下列函数在何处是间断的：

（1） $z=\dfrac{x}{x^2+y^2}$；　　**（2）** $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$．

习题 7.1

1.求平面点集的导集和边界．

（1）集合$E=\left\{(x,y)\middle|y>x^2\right\}$的导集是___________，边界是___________；

（2）集合$E=\left\{(x,y)\middle|x=\dfrac{1}{n},y=\dfrac{1}{m},n,m\in\mathbf{N}^*\right\}$的导集是___________，边界是___________．

2.求函数的解析式：

（1）设$f(x,y)=x+y+g(x-y)$,若$f(x,0)=x^2$，则$f(x,y)=$___________；

(2)设$f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，则$f(x,y)=$___________；

(3) 设$f(x,y)=\ln\left(x-\sqrt{x^2-y^2}\right)$，其中$x>0,y>0$，则$f(x+y,x-y)=$___________．

3．求下列函数的定义域：

（1）$z=\sqrt{1-\ln(xy)}$；（2）$z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；（3）$z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；（4）$u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

（5）$u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\quad (0<r<R)$.

4.求极限：

（1）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；（2）$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；（3）$\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\tan(xy)}{y}$；（4）$\lim\limits_{\substack{x\to1\\ y\to\infty}}\left(1-\dfrac{1}{y}\right)^{\frac{y^2}{x-y}}$.

5.写出下列函数的间断点集：

（1）$f(x,y)=\dfrac{1}{\sin x\cdot\cos y}$；　　（2）$f(x,y)=\dfrac{x}{\tan\left(x^2+y^2\right)}$.

6.讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\ln\left(x^2+y^2\right), & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性.

7.能否在下列函数的间断点处补充定义函数值，使得 $f(x,y)$ 在该点变得连续？为什么？

（1） $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$；　　**（2）** $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

8.设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，点 $(x_i,y_i)\in D$，$i=1,2,\cdots,n$，证明至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$，使得

$$f(\xi,\eta)=\frac{f(x_1,y_1)+f(x_2,y_2)+\cdots+f(x_n,y_n)}{n}.$$

9.设 D 是 xOy 平面上的一个有界闭区域，P_0 是 D 的外点，证明：在 D 内存在一个与 P_0 距离最长的点，也存在一个与 P_0 距离最短的点.

10.把下列区域 D 分别表示成为 X 型和 Y 型区域：

（1）D 为直线 $y=x$，$x=1$ 和 x 轴所围成；

（2）D 为直线 $y=x$ 和抛物线 $y=x^2$ 所围成；

（3）D 为圆盘 $x^2+y^2\le 2x$.

11.把下列空间几何体用 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\right\}$ 的形式表达：

（1）Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\le R^2$；

（2）Ω 为平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成的区域.

****

12.讨论集合 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}\cup\{(x,y)\mid y=0,1\le x\le 2\}$ 的有内点、边界、聚点、开闭性、区域性.

13.求极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

14*.讨论极限$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$的存在性：

（1） $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；　（2） $f\left(x,y\right)=\dfrac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$；　（3） $f\left(x,y\right)=\dfrac{x^3+xy^2}{x^2-xy+y^2}$.

§7.2　偏导数和全微分

7.2.1 偏导数和高阶偏导数

一、偏导数的基本概念

定义 7.2.1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0 而 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地函数有增量 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$，如果极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$ 存在，则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 处对 x 的**偏导数**，记为 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.z_x\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $f_x(x_0,y_0)$． 即

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}. \qquad (7.2.1)$$

类似地定义 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处对 y 的偏导数：

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y},$$

也被记作 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$ 或 $\left.z_y\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$．

注 （1）偏导数记号 z_x, f_x 也可记成 z'_x, f'_x，下面高阶导数的记号也有类似的情形.

（2）导数 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$ 可以看作微分之商，但偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 是一个整体记

若 $z=f(x,y)$ 在某区域 D 上任一点 $P(x,y)$ 都存在偏导数（称为在点 P **可偏导**），我们得到了两个**偏导函数** $f_x(x,y)$ 和 $f_y(x,y)$，简称为偏导数.

从偏导数的定义可见，$f(x,y)$ 对 x 的偏导数就是把 y 暂时看作常数，而对变量 x 在一元函数的意义下求导数；同理，对 y 的偏导数就是把 x 暂时看作常数，而对变量 y 求导数.

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数．如 $u=f(x,y,z)$，在任意给定点 $M(x,y,z)\in\Omega$ 处有：

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x},$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y},$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

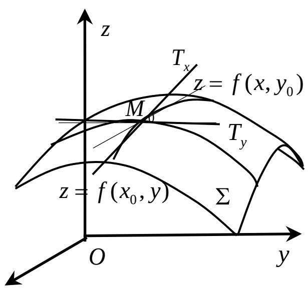


图 7.2.1

设点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 是曲面 $z=f(x,y)$ 上一点，如图 7.2.1，偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 就是曲面被平面 $y=y_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_x 对 x 轴

的斜率．偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 就是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0T_y 对 y 轴的斜率．

例 7.2.1 设 $f(x,y)=\arctan\dfrac{y-2}{x}$，求 $f_x(1,2)$， $f_y(1,2)$．

解法一 把变量 y 看作常数，对 x 求导数，得到偏导函数

$$f_x(x,y)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y-2}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y-2}{x^2}\right)=\frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2},$$

将 $x=1,y=2$ 代入得， $f_x(1,2)=\dfrac{0}{1^2+0^2}=0$；同理，先求出偏导函数

$$f_y(x,y)=\frac{1}{1+\left(\dfrac{y-2}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+(y-2)^2},$$

将 $x=1,y=2$ 代入得， $f_y(1,2)=1$．

解法二 由于对 x 求偏导数时 y 是常数，所以可以先把 $y=2$ 代入，使 $f(x,y)$ 成为一元函数 $f(x,2)$，然后求导，得到

$$f_x(x,2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,2)=\frac{\mathrm{d}0}{\mathrm{d}x}=0,$$

将 $x=1$ 代入到偏导函数 $f_x(x,2)$，得 $f_x(1,2)=0$；

思考题 7.1.3 $f_y(1,2)=1$ 表示曲面 $f(x,y)=\arctan\dfrac{y-2}{x}$ 上的哪条曲线在哪个点上的切线的指

同理，先求出偏导函数

$$f_y(1,y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}f(1,y)=\frac{\mathrm{d}\arctan(y-2)}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{1+(y-2)^2},$$

将 $y=2$ 代入得 $f_y(1,2)=1$．

例 7.2.2 设 $z=x^y\ (x>0,x\neq1)$，求证 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$．

证 易知 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$，所以，

$$\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}yx^{y-1}+\frac{1}{\ln x}x^y\ln x=x^y+x^y=2z.$$

从而 $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z$．证毕．

例 7.2.3．函数 $z=f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上有定义，且有 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$， $f(x,x^2)=1$．求 $f(x,y)$．

解 由于对任意$(x,y)\in \mathbf{R}^2$有$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+2y$，故

$$z=\int\left(x^2+2y\right)\mathrm{d}y+C\left(x\right),$$

这里$C\left(x\right)$是一个包含变量x的函数，即

$$z=x^2y+y^2+C\left(x\right).$$

令$y=x^2$得到等式$1=x^2\cdot x^2+\left(y^2\right)^2+C\left(x\right)$，故$C\left(x\right)=1-2x^4$，所以

$$f\left(x,y\right)=1+x^2y+y^2-2x^4.$$

注 这种通过对偏导数的积分求函数的方法称为**偏积分法**.

下面的例子指出，$f_x(x_0,y_0)$和$f_y(x_0,y_0)$的存在性不蕴含f在P_0处连续，这是与一元导数的不同之处.

☆**例 7.2.4** 证明：在点$(0,0)$处

（1）函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$不连续，但偏导数存在.

（2）函数$g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$连续，但不可偏导.

注 $z=\sqrt{x^2+y^2}$是一个开口向上的圆锥，类似地，$z=|x|+|y|$

证（1）例 7.1.7 已经告诉我们，$f(x,y)$在不连续. 但$f(x,y)$在点$(0,0)$偏导数是存在的，因为

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0,$$

同理$f_y(0,0)=0$.

（2）对于任意的$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，则当$\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，

$$\left|g(x,y)-g(0,0)\right|=\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon,$$

从而$g(x,y)$在$(0,0)$处连续性.

但极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x,0)-g(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-0}{x}$不存在，因而$g_x(0,0)$不存在，同理$g_y(0,0)$也不存在.

证毕.

二、高阶偏导数

1. 高阶偏导数的定义

二元函数 $z=f(x,y)$ 的两个偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 仍然是 x,y 的二元函数. 如果它们可以关于 x,y 继续求偏导数，即存在

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

则称之为二元函数 $z=f(x,y)$ 的**二阶偏导数**，通常记

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \text{或} f_{xx}(x,y)，\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{或} f_{yy}(x,y)；$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} \text{或} f_{xy}(x,y)，\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x} \text{或} f_{yx}(x,y).$$

这里 $f_{xx}(x,y)$、 $f_{yy}(x,y)$ 称为**二阶纯偏导数**， $f_{xy}(x,y)$、 $f_{yx}(x,y)$ 称为**二阶混合偏导数**. 二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**. 对于二元以上的函数，可以类似地定义高阶偏导数.

例 7.2.5 验证函数 $u(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 满足拉普拉斯方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$.

证 由于 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$，所以有一阶偏导数，

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2}，\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2}，$$

再求偏导，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(x^2+y^2)-x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}，\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x^2+y^2)-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}，$$

从而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

所以等式成立.

例 7.2.6 设 $z=x^3y^2-3xy^3-xy+1$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$.

解 先求出一阶偏导数，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2y^2-3y^3-y，\ \frac{\partial z}{\partial y}=2x^3y-9xy^2-x；$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y-9xy^2-x\right)=6x^2y-9y^2-1；\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2-3y^3-y\right)=6x^2y-9y^2-1；$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6xy^2，从而\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=6y^2 .$$

2. 混合偏导数相等定理

我们发现，上面例题中的两个混合偏导数是相等的，注意混合偏导数并不是在任何情况下都相等的，例如设 $f(x,y)=\begin{cases} xy\cdot\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$ 则 $f_{yx}(0,0)\neq f_{xy}(0,0)$．事实上，先算得

$$f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases} 和\ f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

再按定义可以求得

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f_x(0,y)-f_x(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-0}{y}=-1\ 和\ f_{yx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f_y(x,0)-f_y(0,0)}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{x-0}{x}=1 .$$

不过，我们有

定理 7.2.1（混合偏导数相等定理） 如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 在区域 D 内连续，那末在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

阅读材料 7.2.1 混合偏导数相等定理的证明

证明见阅读材料 7. 2. 1. 这个定理的更一般的形式是：如果 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内存在存在直到 m 阶的连续偏导数，则 $f(x,y)$ 在 D 内 n （ $n\le m$ ）阶混合偏导数与求导的顺序无关．例如， $m\ge 3$ 时

$$\frac{\partial^3 z}{\partial y^2\partial x}=\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x\partial y}=\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} .$$

练习 7.2.1

1． $u=y^{\frac{z}{x}}$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=$（　　　）.

（A） $\dfrac{z}{x^2}y^{\frac{z}{x}-1}$　　（B） $-\dfrac{1}{x^2}y^{\frac{z}{x}-1}$　　（C） $-\dfrac{z}{x^2}y^{\frac{z}{x}}\ln y$　　（D） $-\dfrac{1}{x^2}y^{\frac{z}{x}}\ln y$

2．设 $z=x^2y-y^2x$，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ________， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

3. 设 $z=x^2y-y^2x$，则 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=$ ________，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ________，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$ ________.

7.2.2 全微分

一、全微分的概念

1．全微分定义

一元函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微是指增量 Δy 可以表示成如下形式：

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x).$$

如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，并设 $P'(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 为这邻域内的任意一点，则点 $(x_0+\Delta x,y_0)$ 和点 $(x_0,y_0+\Delta y)$ 必然也在这个邻域内，称 $f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)$ 和 $f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 分别对应于自变量增量 $\Delta x,\Delta y$ 的**偏增量**，记为 $\Delta_x z$ 与 $\Delta_y z$．称 $f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 为函数在点 P_0 对应于自变量增量 $\Delta x,\Delta y$ 的**全增量**，记为 Δz，即

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0).\tag{7.2.2}$$

定义 7.2.2 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的全增量 Δz 可以表示为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho).\tag{7.2.3}$$

其中 A,B 不依赖于 $\Delta x,\Delta y$ 而仅与 x_0,y_0 有关，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，则称函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ **可微分**（**或可微**），$A\Delta x+B\Delta y$ 称为函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的**全微分**（**或微分**），记为 dz，即

$$\mathrm{dz}=A\Delta x+B\Delta y.\tag{7.2.4}$$

由 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, 立即得到 $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z=0$．这说明，如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则在该点连续.

2．可微的条件

现在来给出可微的必要条件.

定理 7.2.2（可微的必要条件）如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则偏导数 $f_x(x_0,y_0)$，$f_y(x_0,y_0)$ 必存在，且函数 $z=f(x,y)$ 在点 P_0 的全微分为

$$\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y. \tag{7.2.5}$$

思考题 7.2.2 函数 $u=\arctan\dfrac{y}{x}$ 的两个偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ 在点 $(0,1)$ 处连续，但是 $u(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$ 在点 $(0,1)$ 处不连续，从而也不可微，这与定理 7.2.3 的结论矛盾了

证 已知 $\Delta z=A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+o(\rho)$, 令 $\Delta y=0$，此时 $\rho=|\Delta x|$，得

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\Delta x+o(\Delta x),$$

从而

$$A(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}-\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=f_x(x_0,y_0);$$

同理 $B(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)$. 证毕.

由于自变量的增量等于自变量的微分，即 $\Delta x=\mathrm{d}x$，$\Delta y=\mathrm{d}y$，全微分也可写为

$$\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\mathrm{d}x+f_y(x_0,y_0)\mathrm{d}y; \tag{7.2.6}$$

函数若在某区域 D 内各点 $P(x,y)$ 处处可微分，则称这函数**在 D 内可微**. f 在 D 内的全微分可写为

$$\mathrm{d}z=f_x(x,y)\mathrm{d}x+f_y(x,y)\mathrm{d}y,\ (x,y)\in D. \tag{7.2.7}$$

定理 7.2.3（可微的充分条件）如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可偏导，且偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 在点 P_0 连续，则该函数在点 P_0 可微.

证 由一元函数微分学中增量与微分的关系，当偏导数在点 P_0 连续时

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

注 区域 D 内的全微分有四个互相独立的自变量：$x,y,\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$

$=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y$（由拉格朗日中值定理，$\theta_1,\theta_2\in(0,1)$）

$$=\left(f_x(x_0,y_0)+\varepsilon_1\right)\Delta x+\left(f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_2\right)\Delta y$$

$$=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\left(\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y\right).$$

其中 $\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_1=0$，$\lim\limits_{\rho\to 0}\varepsilon_2=0$，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. 由于

$$\left|\frac{\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y}{\rho}\right|\le|\varepsilon_1|\frac{|\Delta x|}{\rho}+|\varepsilon_2|\frac{|\Delta y|}{\rho}\le|\varepsilon_1|+|\varepsilon_2|\to 0\,(\rho\to 0),$$

我们得到

$$\Delta z = f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\rho) . \tag{7.2.8}$$

证毕.

从可微的定义立即得到:

命题 7.2.1 设 $f_x'(x_0,y_0)$， $f_y'(x_0,y_0)$ 存在，则函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微的充分必要条件是：

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)-f_x'(x_0,y_0)\Delta x-f_y'(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0 ,$$

这是证明可微或不可微的一个十分重要的方法.

例 7.2.7 解下列全微分问题：

（1）求 $f(x,y,z)=xyz+\mathrm{e}^{yz}$ 的全微分 $\mathrm{d}f(x,y,z)$；

（2）求 $z=x^2y-xy^2$ 在点 $P(1,1)$ 处的全微分 $\mathrm{d}f\big|_{(1,1)}$；

（3）设连续函数 $f(x,y)$ 满足 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\dfrac{f(x,y)-2x-y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$， 求 $\mathrm{d}f\big|_{(0,1)}$.

解（1）因三个偏导数均在 $\mathbf{R}^3$ 上连续，故 $f(x,y,z)$ 必可微，从而

$$\mathrm{d}f = yz\mathrm{d}x+(xz+z\mathrm{e}^{yz})\mathrm{d}y+(xy+y\mathrm{e}^{yz})\mathrm{d}z .$$

（2）因 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xy-y^2$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2-2xy$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续，故 $z=f(x,y)$ 必可微，从而

$$\mathbf{d}z=(2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y ,$$

所以在点 $P(1,1)$ 处，

$$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=\mathrm{d}x-\mathrm{d}y .$$

（3）由于分母极限为零，故分子的极限也需为零，从而 $f(0,1)=3$，故 $f(x,y)$ 满足

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\frac{\left[f(x,y)-f(0,1)\right]-2x-(y-1)}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0 ,$$

这说明 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，这里， $\Delta y=y-1$， $\rho=\sqrt{x^2+(y-1)^2}$ ， $A=2$， $B=1$，所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,1)$ 处可微且

$$\mathrm{d}f\big|_{(0,1)}=2\mathrm{d}x+\mathrm{d}y\,.$$

注 可从已知极限式中直接求出 $f_x(0,1)=2, f_y(0,1)=1$，例如在 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f(x,y)-2x-y-2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$ 中令 $y=1,x\to0$，得到 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,1)-2x-3}{|x|}=0,$ 即 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,1)-f(0,1)-2x}{x}=0$，从

例 7.2.8 证明：在 $O(0,0)$ 点处

（1）函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 连续，各偏导数存在但不可微.

（2）函数 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ 可微，但偏导数不连续.

证 （1）由于

$$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\rho}{2}\to0\,(\rho\to0),$$

故 $f(x,y)$ 在原点处连续.

显然，

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{0-0}{x}=0，\text{故 } f_x(0,0)=0，$$

同理 $f_y(0,0)=0$.

然而，假若 $f(x,y)$ 在原点处可微，则

$$\Delta z=f(x,y)-f(0,0)=f_x(0,0)x+f_y(0,0)y+o(\sqrt{x^2+y^2})，\text{即}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=0,$$

但是，根据例 7.1.5，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}\text{不存在}$$

矛盾.

（2）易知（仿上） $f_x(0,0)=0$， $f_y(0,0)=0$， 从而

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-f_x(0,0)x-f_y(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0,$$

故

$$\Delta z = f(x,y) - f(0,0) = f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + o(\sqrt{x^2+y^2})，$$

即 $f(x,y)$ 在 $O(0,0)$ 处可微．然而，

$$f_x(x,y)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y=0}} f_x(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}\right)$ 不存在，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)\neq f_x(0,0)$，故 $f_x(x,y)$（同理 $f_y(x,y)$）在 $(0,0)$ 点不连续．证毕．

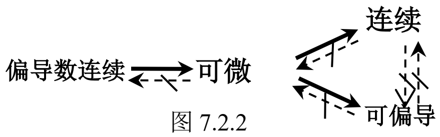


图 7.2.2

根据以上讨论，多元函数连续、可偏导、可微和偏导数的连续性的关系可由图 7.2.2 给出．

（7.2.7）式中的 $f_x(x,y)\mathrm{d}x$ 和 $f_y(x,y)\mathrm{d}y$ 分别称为 z 对变量 x,y 的**偏微分**．通常我们把二元函数的全微分等于它的两个偏微分之和这件事称为二元函数的微分符合**叠加原理**．微分的叠加原理可以推广到三元及三元以上函数，即若函数 $u=f(x,y,z)$ 可微，则

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\,.$$

二、全微分在近似计算中的应用

注　$1.03^{3.98}$ 的精确值为 $1.12484\cdots$

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微，则有两类常见的应用．

（1）误差估计：

$$|\Delta z|\approx|\mathrm{d}z|=\left|f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y\right|；\qquad（7.2.9）$$

（2）近似计算：

由 $\Delta z\approx f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$ 立得：

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y\,.\qquad（7.2.10）$$

例 7.2.9　求 $1.03^{3.98}$ 的近似值．

解　记 $f(x,y)=x^y$，取 $x_0=1, y_0=4, \Delta x=0.03, \Delta y=-0.02$，则

$$1.03^{3.98}=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\approx x_0^{y_0}+y x_0^{y_0-1}\Delta x+x_0^{y_0}\ln x_0\Delta y=1+4\times0.03+0=1.12\,.$$

练习 7.2.2

1.设$u=x^{y^2}$，则$\mathrm{d}u=$______________ .

2．设$z=\ln\left(x^2+y^2\right)$，则$\mathrm{d}z\big|_{(1,1)}=$（　　）.

（A）$\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$　　（B）$\dfrac{1}{2}(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$　　（C）$\dfrac{\mathrm{d}x+\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$　　（D）0

习题 7.2

1．计算偏导数的值：

（1）若$f(x,y)=x+(y^2-1)\arcsin\dfrac{x}{y}$，求$f_x(2,1)$；

（2）设$f(x,y)=\dfrac{2x+3y}{1+xy\sqrt{x^2+y^2}}$，求$f_x(0,0)$和$f_y(0,0)$.

2.求下列函数的偏导数：

（**1**）$z=\mathrm{e}^{xy}\tan\dfrac{y}{x}$；　　（**2**）$z=\sqrt{\ln(xy)}$；

（3）$z=\arcsin\left(y\sqrt{x}\right)$；　　（4）$u=\arctan(x-y)^z$.

3.设$T=2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$，化简$l\dfrac{\partial T}{\partial l}+g\dfrac{\partial T}{\partial g}$.

4.曲线$\begin{cases} z=\dfrac{x^2+y^2}{4}, \\ y=4 \end{cases}$在点$(2,4,5)$处的切线对于$x$轴的倾斜角是多少？

5.求函数$z=y^x$的高阶导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6．设$f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求$f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$及$f_{zzx}(2,0,1)$.

7.求下列函数的全微分：

（1）$z=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$；　　（2）$z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

8.求函数$z=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$当$x=1$，$y=2$时的全微分.

9.求函数$z=\dfrac{y}{x}$当$x=2,y=1$，$\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$时的全增量和全微分.

****

10.已知二元函数$z=z(x,y)$在区域$D=\left\{(x,y)\middle|x>0\right\}$内有定义，且满足$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{x^2+y}{x}$，$z(1,y)=\cos y$，试求$z(x,y)$.

11.用全微分计算$\sqrt{1.02^3+1.97^3}$的近似值.

12*.设连续函数$z=f\left(x,y\right)$满足$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\dfrac{f\left(x,y\right)-2x+y-2}{\sqrt{x^2+\left(y-1\right)^2}}=0$，求$\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}$.

13*.证明：如果函数$f\left(x,y\right)$在区域D内的偏导数$f_x\left(x,y\right)$和$f_y\left(x,y\right)$有界，则函数$f\left(x,y\right)$在D内连续.

14*.证明下列函数在点$(0,\ 0)$处的性质：

（1）$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0\quad, & x^2+y^2=0\end{cases}$不连续但偏导数存在；

（2）$f\left(x,y\right)=\sqrt{\left|xy\right|}$连续，偏导数存在，但不可微；

（3）$f\left(x,y\right)=\begin{cases}xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right),\\ 0, & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$可微但偏导数不连续；

（4）$f\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+2y^2}, & \left(x,y\right)\neq\left(0,0\right),\\ 0, & \left(x,y\right)=\left(0,0\right)\end{cases}$的混合偏导数不等，即$f_{xy}\left(0,0\right)\neq f_{yx}\left(0,0\right)$.

§7.3 复合函数和隐函数的偏导数

7.3.1 多元复合函数的求导法则——链法则

在一元函数的微分学中，设函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 可微，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

现在，二元函数 $z=f(u,v)$ 和 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 的复合而成为 x,y 的函数

$$z=f(u(x,y),v(x,y)).$$

这几个变量的关系可以在图 7.3.1 中看出.我们来研究这种复合函数偏导的计算公式.

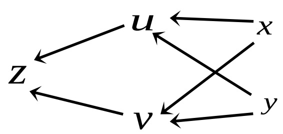


图 7.3.1

一、链法则

定理 7.3.1（链法则） 如果 $u=\phi(x,y)$ 及 $v=\psi(x,y)$ 都在点 $P(x,y)$ 具有对 x 和 y 的偏导数，且函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 $Q(u,v)$ 可微，则复合函数 $z=f[\phi(x,y),\psi(x,y)]$ 在点 $P(x,y)$ 的两个偏导数存在，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\tag{7.3.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}.\tag{7.3.2}$$

证 固定 y，设 x 有增量 Δx，则函数 u,v 有偏增量

$$\Delta_x u=\phi(x+\Delta x,y)-\phi(x,y),\quad \Delta_x v=\psi(x+\Delta x,y)-\psi(x,y)$$

从而函数 $z=f(u,v)$ 相应获得偏增量

$$\Delta_x z=f(u+\Delta_x u,v+\Delta_x v)-f(u,v),$$

于是由 $z=f(u,v)$ 的可微性有

$$\Delta_x z=\frac{\partial z}{\partial u}\Delta_x u+\frac{\partial z}{\partial v}\Delta_x v+o\left(\sqrt{(\Delta_x u)^2+(\Delta_x v)^2}\right),$$

记 $\rho=\sqrt{(\Delta_x u)^2+(\Delta_x v)^2}$，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\rho=0$，故

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\Delta_x u}{\Delta x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\Delta_x v}{\Delta x}+\frac{o(\rho)}{\Delta x}.\tag{7.3.3}$$

令 $\alpha=\begin{cases}\dfrac{o(\rho)}{\rho}, & \rho\neq 0,\\ 0, & \rho=0,\end{cases}$ 则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\frac{o(\rho)}{\Delta x}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\alpha\cdot\frac{\rho}{\Delta x}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}|\alpha|\sqrt{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2+\left(\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)^2}=0 .$$

注 表面上看，$\lim_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{o(\rho)}{\Delta x}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}\left|\dfrac{o(\rho)}{\rho}\right|\cdot\left|\dfrac{\rho}{\Delta x}\right|=\lim_{\Delta x\to 0}0\cdot\sqrt{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2}=0$，但这个做法有个漏洞：即中间变量 u,v 在 $\Delta x\to 0$ 的过程中可能有无穷多次使 $\rho=0$，这导致 $\dfrac{o(\rho)}{\rho}$ 没有意义．故应引入

在(7.3.3)式两边令 $\Delta x\to 0$,就有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}.$$

同理可证（7.3.2）式．证毕．

定理 7.3.1 称为**链法则**，是计算多元函数函数的偏导数的基本方法．多元复合函数的复合方式无穷无尽，错综复杂，但若掌握了链法则的思想方法，就可以获得对应公式．例如，设 f 可微，ϕ，ψ，w 可（偏）导，则

（1）（多变一）由 $z=f(u,v)$，$u=\phi(t)$，$v=\psi(t)$ 复合成的函数 $z=f(\phi(t),\psi(t))$ 是一元函数，并有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

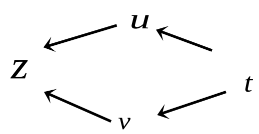


图 7.3.2

其变量关系如图 7.3.2．

类似地，若 $z=f(u,v,w)$，$u=u(t)$，$v=v(t)$，$w=w(t)$，就有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}.$$

为了区别于偏导数，以上公式中的单变量函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ 称为**全导数**.

（2）（多变多）由 $z=f(u,v,w)$ 和 $u=\phi(x,y)$，$v=\psi(x,y)$，$w=w(x,y)$ 复合而成的 $z=f[\phi(x,y),\psi(x,y),w(x,y)]$ 的两个偏导数为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

（3）（一变多）对于 $z=f(u)$ 与 $u=\phi(x,y)$ 复合而成的 $z=f(\phi(x,y))$，就有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\cdot\phi_x,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\cdot\phi_y .$$

（4）（杂型一）对于 $z=f(u,v)$ 与 $u=\phi(x,y)$ 和 $v=\psi(y)$ 的复合函数

思考题 7.3.1 如果将外层函数 f 的条件“可微”放宽为“可偏导”，定理 7.3.1 的结论是否仍然成

$z=f\left(\phi(x,y),\psi(y)\right)$有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

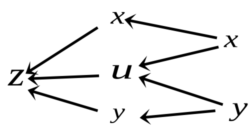


图 7.3.3

（5）（杂型二）对于 $z=f(u,x,y)$，其中 $u=\phi(x,y)$，即 $z=f[\phi(x,y),x,y]$，只需看作存在函数

$x=\psi_1\left(x,y\right)=x$， $y=\psi_2\left(x,y\right)=y$，变量关系如图 7.3.3，那么

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y}=0;\quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial \psi_2}{\partial y}=1.$$

注 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 这两种记号分别用于何种意义并不重要，有时可以调换，重要的是不要用同一种记

就有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}.$$

注意等式右边的（称为**部分偏导数**）$\frac{\partial f}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$ 与等式左边的（称为**全偏导数**）$\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$ 的区别：前者是把 $z=f(u,x,y)$ 中的 u 及 y 看作不变而对 x 的偏导数，即中间变量代入前求偏导，后者是把复合函数 $z=f[\phi(x,y),x,y]$ 中的 y 看作不变而对 x 的偏导数，即中间变量代入后的偏导.

例 7.3.1 用链法则计算下列各题：

（1） $z=\mathrm{e}^u\cos v, u=xy^2, v=x^2+y$， 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$；

（2） $z=uv+\sin t, u=\mathrm{e}^t, v=\cos t$， 求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$；

（3） $u=x^2+y^2+z^2, z=x\sin y$， 求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$.

解 用链法则公式计算如下：

（1） $$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^u\cos v\cdot y^2+\mathrm{e}^u(-\sin v)\cdot 2x=\mathrm{e}^u(y^2\cos v-2x\sin v)$$

$$=\mathrm{e}^{xy^2}\left(y^2\cos\left(x^2+y\right)-2x\sin\left(x^2+y\right)\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^u\cos v\cdot 2xy+\mathrm{e}^u(-\sin v)\cdot 1=\mathrm{e}^u(2xy\cos v-\sin v)$$

$$=\mathrm{e}^{xy^2}\left(2xy\cos\left(x^2+y\right)-\sin\left(x^2+y\right)\right).$$

（2） $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial t}=v\mathrm{e}^t+u(-\sin t)+\cos t=\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)+\cos t.$$

（3）$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=2x+2z\sin y$；

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot 0+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=2y+2zx\cos y.$$

例 7.3.2 设$u=y\varphi(x^2-y^2)$，且φ可微，求证：

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{xu}{y}.$$

证 注意φ是一个一元函数，设$\xi=x^2-y^2$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}=y\varphi'(x^2-y^2)\cdot 2x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=y'\cdot\varphi+y\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)=y\varphi(x^2-y^2)+y\varphi'(x^2-y^2)\cdot(-2y),$$

故

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=x\varphi(x^2-y^2)=\frac{xu}{y}.$$

证毕.

例 7.3.3 求解下列抽象函数的偏导问题：

（1）设 f,φ,ψ 可微，若$u=f(x,y,z)$，而$y=\varphi(x),z=\psi(x)$，求全导数$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$；

（2）设 f,φ,ψ 可微，若$u=f(x,y,t)$，$x=\varphi(s,t)$，$y=\psi(s,t)$，求$u=f(\varphi(s,t),\psi(s,t),t)$的全偏导数$\frac{\partial u}{\partial t}$；

（3）设$u=f\left(x^2y,\frac{x}{y}\right)$，$f(\xi,\eta)$有一阶连续偏导数，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 由链法则得到

（1）$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\cdot\varphi'(x)+f_z\cdot\psi'(x)$.

（2）$\frac{\partial u}{\partial s}=f_x\cdot\varphi_s+f_y\cdot\psi_s$；$\frac{\partial u}{\partial t}=f_x\cdot\varphi_t+f_y\cdot\psi_t+f_t$.

（3）$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot 2xy+f_2'\cdot\frac{1}{y}=2xyf_1'+\frac{1}{y}f_2'$；

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot x^2+f_2'\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=x^2f_1'-\frac{x}{y^2}f_2'.$$

在抽象的复合函数中，正如用φ'表示一元函数φ的导数一样；习惯上用 f_1'， f_2'分别表示对多元函数 f 的第一个变量和第二个变量求偏导数，而不必注意这个变量是用什么字母表示的．在求二阶导数时， f_{12}''表示先对第一个变量，再对第二个变量求偏导，以此类推．

例 7.3.4 设 $w=f\left(x+y+2z,xyz^2\right)$， f 具有二阶连续偏导数，求$\dfrac{\partial w}{\partial x}$和$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}$．

解 先用链法则得到：

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=f_1'+yz^2f_2'\text{；}$$

再用求导的加法和乘法法则求导：

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(f_1'+yz^2f_2'\right)=\frac{\partial f_1'}{\partial z}+2yzf_2'+yz^2\frac{\partial f_2'}{\partial z}\text{；}$$

但

$$f_1'=f_1'\left(x+y+2z,xyz^2\right)，\quad f_2'=f_2'\left(x+y+2z,xyz^2\right)，$$

所以，如果记$u=x+y+2z,v=xyz^2$，就有

$$\frac{\partial f_1'}{\partial z}=\frac{\partial f_1'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f_1'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=2f_{11}''+2xyzf_{12}''\text{；}$$
$$\frac{\partial f_2'}{\partial z}=\frac{\partial f_2'}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial f_2'}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=2f_{21}''+2xyz^2f_{22}''.$$

于是

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=\left(2f_{11}''+2xyzf_{12}''\right)+yz^2(2f_{21}''+2xyzf_{22}'')+2yzf_2'，$$

由于已知二阶偏导数连续，故混合偏导数 f_{12}''与 f_{21}''相等，从而，整理后得

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}=2f_{11}''+2yz(x+z)f_{12}''+2xy^2z^3f_{22}''+2yzf_2'.$$

例 7.3.5 设 $z=f\left(xy^2,x^2y,\varphi(y)\right)$．其中 f 具有二阶连续偏导数，φ可导．求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

解 先用链法则求一阶偏导数：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y^2+f_2'\cdot 2xy，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=f_1'\cdot 2xy+f_2'\cdot x^2+f_3'\cdot\varphi'(y).$$

注意二阶连续混合偏导数是可以合并的，因此，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial f_1'}{\partial x}+2yf_2'+2xy\frac{\partial f_2'}{\partial x}=y^2(y^2f_{11}''+2xyf_{12}'')+2yf_2'+2xy(y^2f_{21}''+2xyf_{22}'')$$

$$=y^4f_{11}''+4xy^3f_{12}''+4x^2y^2f_{22}''+2yf_2'.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2xy\frac{\partial f_1'}{\partial x}+2yf_1'+2xf_2'+x^2\frac{\partial f_2'}{\partial x}+\frac{\partial f_3'}{\partial x}\cdot\varphi'(y)$$

$$=2xy\left(y^2f_{11}''+2xyf_{12}''\right)+2yf_1'+2xf_2'+x^2\left(y^2f_{21}''+2xyf_{22}''\right)+\varphi'(y)\left(y^2f_{31}''+2xyf_{32}''\right)$$

$$=2xy^3f_{11}''+5x^2y^2f_{12}''+2x^3yf_{22}''+y^2\varphi'(y)f_{31}''+2xy\varphi'(y)f_{32}''+2yf_1'+2xf_2'.$$

二、全微分形式不变性

设函数 $z=f(u,v)$. 具有连续偏导数，则有全微分 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v$；当 u,v 是 x,y 的可微函数时，设 $u=\phi(x,y)$， $v=\psi(x,y)$，则有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

这个结果表明：无论 z 是自变量 u,v 的函数或中间变量 u,v 的函数，它的全微分形式是一样的．这个现象称为**全微分形式的不变性**.

利用全微分形式的不变性，容易证明多元函数的全微分运算法则．设 u,v 是多元可微函数，则

（1） $\mathrm{d}(u+v)=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v$；

（2） $\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$， $\mathrm{d}(ku)=k\mathrm{d}u$（$k$ 是常数）； $\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$；

（3）设 f 为一元可微函数，则 $\mathrm{d}f(u)=f'(u)\mathrm{d}u$.

我们已经学会通过计算偏导数来计算函数的微分了，而现在可以做到通过计算全微分来计算偏导数了．因此，全微分形式的不变性为计算多元函数的全微分和偏导数和全微分提供了新的方法.

例 7.3.6 设 $z=\mathrm{e}^{xy^2}\cos\left(x^2+y\right)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}$.

解 现在来用微分法解例 7.3.1.

令 $u=xy^2,v=x^2+y$， 则 $z=\mathrm{e}^u\cos v$.

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial z}{\partial v}\mathrm{d}v=\left(\mathrm{e}^{u}\cos v\right)\mathrm{d}u+\left(-\mathrm{e}^{u}\sin v\right)\mathrm{d}v$$

$$=\left(\mathrm{e}^{xy^2}\cos(x^2+y)\right)(y^2\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y)+\left(-\mathrm{e}^{xy^2}\sin(x^2+y)\right)(2x\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$$

$$=\mathrm{e}^{x^2y}\left[y^2\cos(x^2+y)-2x\sin(x^2+y)\right]\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{x^2y}\left[2xy\cos(x^2+y)-\sin(x^2+y)\right]\mathrm{d}y,$$

对比 $\mathrm{d}x,\mathrm{d}y$ 前的函数，得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{xy^2}\left(y^2\cos\left(x^2+y\right)-2x\sin\left(x^2+y\right)\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{xy^2}\left(2xy\cos\left(x^2+y\right)-\sin\left(x^2+y\right)\right).$$

由于 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\cos 1$，$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}=-\sin 1$．所以

$$\left.\mathrm{d}z\right|_{(0,1)}=\left(\cos 1\right)\mathrm{d}x-\left(\sin 1\right)\mathrm{d}y.$$

练习 7.3.1

1.设 $z=u^2+v^2$，而 $u=x+y$， $v=x-y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

2．设 $z=\mathrm{e}^{3x+2y}$，而 $x=\cos t$， $y=t^2$,则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=$________.

3．设 $z=f(u)$， $u=xy+\frac{y}{x}$， $f(u)$ 可导，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$______________.

4．设 $z=y^x$，而 $y=\phi(x)$ 是可导的正值函数，则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=$ ________.

7.3.2 隐函数的求导

在上册第 2.2 节中我们讨论过显函数和隐函数的概念．并研究过“如果 $F(x,y)=0$ 确定了一个隐函数 $y=f(x)$，如何计算导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$”的问题．但是还有很多关键性的理论问题没有解决，例如：

在什么条件下 $F(x,y)=0$ 确定了一个隐函数 $y=f(x)$？所确定的 $y=f(x)$ 在什么条件下可导？能否用一个公式表达这个导数？上述问题如何推广到多元隐函数问题？等等.

一、 $F(x,y)=0$ 型方程的情形

我们介绍隐函数定理之前，先来通过几个例子了解一下问题的复杂性.

（1）方程 $F(x,y)=xy+y-1=0$．对任何 $x\neq-1$ 能确定显函数 $y\left(x\right)=\frac{1}{1+x}$，它满足 $F(x,y(x))\equiv 0$，即

$$x\cdot\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1+x}-1=0;$$

（2）圆的方程 $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$．对区间 $(-1,1)$ 上的任意点 x，由此方程对应着两个 y_1 与 y_2．因此，若限定 $y\ge 0$，则唯一确定一个函数 $y_1=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$；若限定 $y\le 0$，则确定另一个函数 $y_2=-\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$，它们都满足 $F(x,y(x))\equiv 0$；

（3）方程 $F(x,y)=x^2+y^2+4=0$．不能确定任何隐函数 $y=f(x)$，即不存在任何实值函数 $y=f(x)$，使得 $F(x,f(x))\equiv 0$；

开普勒（Kepler,J. 1571-1630），德国天文学家　数学家

（4）开普勒方程 $F(x,y)=y-x-\varepsilon\sin y=0\ (0<\varepsilon<1)$．由于函数 $x=y-\varepsilon\sin y$ 连续且单调递增，它存在 R 上连续的反函数 $y=f(x)$，但这个 $f(x)$ 的表达式无法写出．

注　$F(x,y)=y-x-\varepsilon\sin y=0$ 确定 x 是 y 的函数 $x=\varphi(y)=y-\varepsilon\sin y$，因 $x'=1-\varepsilon\cos y>0$，故 $x=\varphi(y)$ 是单调递增函数，从而，它有反函数 $y=f(x)$ 存在且单调递增

从上述诸例可以看出：从方程 $F(x,y)=0$ 有时可能确定隐函数，有时则不能；有时可能确定不止一个隐函数．即使唯一确定一个隐函数 $y=f(x)$，这个函数的关系式也不一定能用显式表示．隐函数定理将阐明：函数 $F(x,y)$ 满足什么条件才能使方程 $F(x,y)=0$ 确定唯一的一个隐函数 $y=f(x)$？它具有什么性质？

定理7.3.2（隐函数存在定理1）．设函数 $F(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域内

（I）具有连续的偏导数；

（II）$F(x_0,y_0)=0$；

（III）$F_y(x_0,y_0)\ne 0$．

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 $x=x_0$ 的某一邻域 $U(P_0)$ 内能唯一确定一个函数 $y=f(x)$，它满足条件：

（1）$y_0=f(x_0)$；

（2）$F(x,f(x))\equiv 0$；

（3）函数 $y=f(x)$ 在 $U(P_0)$ 内具有连续的导数，且 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}$．

阅读材料 7.3.1 隐函数定理的证明

这个定理的严格证明是十分复杂的（见阅读材料 7.3.1），其几何解释是：考虑空间曲面 $z=F(x,y)$，

它过 xOy 平面上点 $P_0(x_0, y_0)$，并且在 P_0 点足够小邻域内从水平面 xOy 面看曲面是倾斜的（一部分在 xOy 平面上方，而另一部分在下方），则曲面必与 xOy 相交出一条光滑的截线 $y=f(x)$.

我们需要掌握的只是结论（3）中的导数公式，这只需把恒等式 $F(x, f(x))=0$ 左端看做是 x 的一个复合函数，求这个函数的全导数，即得 $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，因为 F_y 连续且在 $P(x_0, y_0)$ 的某个邻域内 $F_y \neq 0$，于是得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}. \tag{7.3.4}$$

例 7.3.7 已知行星运动方程（开普勒方程）$y=x+\varepsilon\sin y$，其中 $0<\varepsilon<1$ 为常数.

（1）用隐函数定理验证此方程在点 $O(0,0)$ 的某个邻域内确定隐函数 $y=f(x)$；

（2）求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 （1）记 $F(x,y)=y-x-\varepsilon\sin y$，则

I） $F(x,y)$ 和 $F_y(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 连续.

II） $F(0,0)=0$；

III） $F_y(x,y)=1-\varepsilon\cos y>0$，故 $F_y(0,0)\neq 0$.

所以在点 $O(0,0)$ 的某个邻域内存在隐函数 $y=f(x)$.

（2）由（7.3.4）式，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{-1}{1-\varepsilon\cos y}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y},$$

注 习惯上，只要“已知 $F(x,y)$ 确定隐函数 $y=f(x)$”，我们都可以认为 $F(x,y)$ 已经满足了隐函数定理的全部条件，从而导数 $f'(x)$ 存在且连续，无需像本例那样验证隐函数的存在性.

在此基础上，

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}\right)=\frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-\varepsilon\cos y)}{(1-\varepsilon\cos y)^2}=\frac{\varepsilon\sin y\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{(1-\varepsilon\cos y)^2}=-\frac{\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}$$

.

一般地，如果 $F(x,y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，其中 $F(x,y)$ 的二阶偏导也都连续，且 $F_y\neq 0$，那么，其二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 有下列二种求法：

方法一 把$-\dfrac{F_x}{F_y}$看作二元函数$h(x,y)$与$y=y(x)$的复合．因为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}$，所以

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_{xx}F_y-F_{yx}F_x}{F_y^2}-\frac{F_{xy}F_y-F_{yy}F_x}{F_y^2}\cdot\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)$$

$$=-\frac{F_{xx}F_y^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}F_x^2}{F_y^3},$$

方法二 直接把$-\dfrac{F_x}{F_y}$看作x的一元函数，即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)=-\frac{\left(F_{xx}+F_{xy}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)F_y-\left(F_{yx}+F_{yy}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)F_x}{F_y^2},$$

将$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{F_x}{F_y}$代入即得．

二、 $F(x,y,z)=0$型方程的情形

三元方程$F(x,y,z)=0$确定二元函数$z=f(x,y)$的条件与二元方程的情形是相似的．

定理 **7.3.3**（隐函数存在定理 2） 设函数$F(x,y,z)$在点$P_0(x_0, y_0,z_0)$的某一邻域内

（I）有连续的偏导数；

（II） $F(x_0,y_0,z_0)=0$；

（III） $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$．

则方程$F(x,y,z)=0$在点$G_0(x_0,y_0)$的某一邻域$U(G_0)$内能唯一确定一个单值连续函数$z=f(x,y)$，它满足条件

（1） $z_0=f(x_0,y_0)$；

（2） $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$；

（3）函数$z=f(x,y)$在$U(G)$内具有连续的偏导数，且有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}. \tag{7.3.5}$$

定理中的求导公式可由$F(x,y,z)=0$两边对x， y分别求偏导得到

$$F_x+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad F_y+F_z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0 .$$

例 7.3.8 已知由 $z^3-3xyz=a^3\ (a\neq 0)$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

解 设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3$，应用公式（7.3.5）得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-3yz}{3z^2-3xy}=\frac{yz}{z^2-xy},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-3xz}{3z^2-3xy}=\frac{xz}{z^2-xy} .$$

注 两边对 x 求偏导得 $3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$，也能得到相同的结果. 注意公式法是将 z 看作 $F(x,y,z)$ 中的独立变量的，如果把 F_x 写成 $3z^2\frac{\partial z}{\partial x}-3yz-3xy\frac{\partial z}{\partial x}$

在 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 上再对 x 求偏导得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{z^2-xy}\right)=\frac{yz_x(z^2-xy)-(2zz_x-y)yz}{(z^2-xy)^2}=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3} .$$

例 7.3.9 设 $F(\xi,\eta)$ 具有二阶连续偏导数，由 $F(x+z,y+z)=0$ 确定隐函数 $z=z(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

我们来用三种方法计算一阶偏导数.

解法一（公式法） 记 $\Phi(x,y,z)=F(x+z,y+z)=0$，则由公式得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\Phi_x}{\Phi_z}=-\frac{F_1'}{F_1'+F_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\Phi_y}{\Phi_z}=-\frac{F_2'}{F_1'+F_2'} .$$

注 $\Phi_x(x,y,z)\neq\frac{\partial}{\partial x}F(x+z,y+z)$. 因为左边视 y,z 都是常数，而右边 z 不是常数，右边 $=F_1'\cdot(1+z_x)+F_2'z_x$，这就是令 $\Phi(x,y,z)=F(x+z,y+z)$ 的用

解法二（两边求导法） 两边求偏导得

$$F_1'\cdot(1+z_x)+F_2'\cdot z_x=0,\quad F_1'\cdot z_y+F_2'\cdot(1+z_y)=0,$$

分别解出 z_x 和 z_y .

解法三（微分法） 两边微分得，

$$F_1'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}z)+F_2'\cdot(\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)=0,$$

注 微分法在计算偏导数时不需区分自变量还是因变量，因而是

从而

$$\mathrm{d}z=-\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}\mathrm{d}x-\frac{F_2'}{F_1'+F_2'}\mathrm{d}y,$$

比较后得到 $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_2'}{F_1'+F_2'}$.

下面求二阶导数：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_1'}{F_1'+F_2'}\right)$$

$$=-\frac{\left(F_{11}''z_y'+F_{12}''(1+z_y')\right)(F_1'+F_2')-F_1'\left(F_{11}''z_y'+F_{12}''(1+z_y')+F_{21}''z_y'+F_{22}''(1+z_y')\right)}{(F_1'+F_2')^2}$$

$$=\frac{1}{(F_1'+F_2')^3}\left[(F_2')^2F_{11}''-2F_1'F_2'F_{12}''+(F_1')^2F_{22}''\right].$$

例 7.3.10 设 $z=f(x+y+z,\ xyz)$，其中 f 有连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial x}{\partial y}$，$\frac{\partial y}{\partial z}$.

解 方程两边求微分，得

$$\mathrm{d}z=f_1'\cdot(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+f_2'\cdot(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z),$$

整理后得，

$$(f_1'+yz\ f_2')\mathrm{d}x+(f_1'+xz\ f_2')\mathrm{d}y+(f_1'+xy\ f_2'-1)\mathrm{d}z=0,$$

将此式变形为

$$\mathrm{d}z=-\frac{f_1'+yz\ f_2'}{f_1'+xy\ f_2'-1}\mathrm{d}x-\frac{f_1'+xz\ f_2'}{f_1'+xy\ f_2'-1}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}y=-\frac{f_1'+yz\ f_2'}{f_1'+xz\ f_2'}\mathrm{d}x-\frac{f_1'+xy\ f_2'-1}{f_1'+xz\ f_2'}\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}x=-\frac{f_1'+xz\ f_2'}{f_1'+yz\ f_2'}\mathrm{d}y-\frac{f_1'+xy\ f_2'-1}{f_1'+yz\ f_2'}\mathrm{d}z,$$

这说明

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1'+yz\ f_2'}{xyf_2'+f_1'-1},\quad \frac{\partial x}{\partial y}=-\frac{f_1'+xzf_2'}{f_1'+yzf_2'},\quad \frac{\partial y}{\partial z}=-\frac{xyf_2'+f_1'-1}{f_1'+xzf_2'}.$$

思考题 7.3.2 若方程 $F(x,y,z)=0$ 可以分别确定以 x,y,z 为因变量的隐函数，是否成立 $\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial z}=-1$？对于二元函数 $F(x,y)=0$，有什么相似

三、方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 的情形

在介绍关于方程组的隐函数存在定理时，必须了解一下雅可比行列式的概念． 设方程组

雅可比（Jacobi C.，1804-1851），德国数学家．

$\begin{cases}F(x_1,x_2,x_3,x_4)=0,\\G(x_1,x_2,x_3,x_4)=0,\end{cases}$ 称行列式 $\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial x_i} & \frac{\partial F}{\partial x_j}\\ \frac{\partial G}{\partial x_i} & \frac{\partial G}{\partial x_j}\end{vmatrix}$（$i,j=1,2,3,4$）为方程 $F=0,G=0$ 对

注 类似地可以定义 n 个方程对 n 个变量的雅可比行列式；当 $n=1$ 时，雅可比行列式就退化为

变量 x_i, x_j 的**雅可比行列式**，记为 $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x_i,x_j)}$.

定理 7.3.4（隐函数存在定理 3）设 $F(x,y,u,v)$、$G(x,y,u,v)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的某一邻域内

（I）有对各个变量的连续偏导数，

（II）$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，$G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$，

（III）$\left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0}=\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{P_0}\neq 0$.

则方程组 $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0,\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$ 在点 $G_0\left(x_0,y_0\right)$ 的某一邻域 $U\left(G_0\right)$ 内能唯一确定一组单值连续函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，它们满足条件：

（1）$u_0=u(x_0,y_0)$，$v_0=v\ (x_0,y_0)$；

（2）$\begin{cases}F\left(x,y,u\left(x,u\right),v\left(x,u\right)\right)\equiv 0,\\ G\left(x,y,u\left(x,u\right),v\left(x,u\right)\right)\equiv 0;\end{cases}$

（3）函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ 在 $U\left(G_0\right)$ 内具有连续的偏导数，记 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_x\\ G_u & G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y & F_v\\ G_y & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}. \qquad (7.3.6)$$

这四个公式只要从方程组的两个式子各对 x,y 求偏导，再解方程组即可得到：

$$\begin{cases}F_x+F_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\\ G_x+G_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0,\end{cases}\quad \begin{cases}F_y+F_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+F_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ G_y+G_u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}+G_v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=0.\end{cases}$$

注　正如存在像二元方程的隐函数定理那样的三元方程的隐函数定理一样，也存在像定理 7.3.4 那样的其他多种形式的隐函数组定理，例如由三元方程组 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在一定条件下可以确定隐函数如 $y=y(x)$ 和

注　由连续函数的保号性，在 P_0 的某邻域上函数 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\neq 0$

平面上建立直角坐标系与极坐标系后，就存在关系式T：$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$这个关系式称为**坐标变换**，我们有：

阅读材料 7.3.2反函数组定理、柱面与球面坐标变换

命题 7.3.1 变换T：$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta, \end{cases}$ $\rho\in(0,+\infty)$，$\theta\in[0,2\pi)$存在逆变换.

证 在不含原点的平面区域上，考察方程组$\begin{cases} F(\rho,\theta,x,y)=\rho\cos\theta-x=0, \\ G(\rho,\theta,x,y)=\rho\sin\theta-y=0. \end{cases}$由于

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho\neq 0, \qquad (7.3.7)$$

根据定理 7.3.4，存在函数组（称为T**的反函数组**，或即T**的逆变换**）T^{-1}：$\begin{cases} \rho=\rho(x,y), \\ \theta=\theta(x,y). \end{cases}$证毕.

逆变换的存在性是重积分中换元法的重要条件. 一般函数的的反函数定理和更多的可逆变换的讨论见阅读材料 7.3.2.

例 7.3.11 已知$4uv+1\neq 0$，且方程$\begin{cases} u^2-v=-x, \\ u+v^2=y \end{cases}$确定隐函数组$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y). \end{cases}$求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$及$\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

注 当隐函数组由具体解析式表示时，不必套用公式计算偏导数，

解法一（公式法） 套用公式（7.3.6）（略）.

解法二（两边求偏导法） 在方程组$\begin{cases} u^2-v=-x, \\ u+v^2=y \end{cases}$的两个方程中对$x$两边求偏导得

$$\begin{cases} 2u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x}=-1, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}+2v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases}$$

解得$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-2v}{4uv+1}$，$\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{4uv+1}$；

同理在方程组$\begin{cases} u^2-v=-x, \\ u+v^2=y \end{cases}$对$y$求偏导得

思考题 7.3.3 设函数组$\begin{cases} x=x(u,v), \\ y=y(u,v) \end{cases}$在点$(u,v)$的某一邻域内连续且有连续偏导数，又$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$，设它的反函数组为$\begin{cases} u=u(x,y), \\ v=v(x,y) \end{cases}$，那么是否成立关系$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\cdot\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=1$？

$$\begin{cases}2u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y}=0,\\ \dfrac{\partial u}{\partial y}+2v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=1,\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{4uv+1}$，$\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{2u}{4uv+1}$.

解法三（*微分法*）在方程组的各个方程两边求微分得

$$\begin{cases}2u\mathrm{d}u-\mathrm{d}v=-\mathrm{d}x,\\ \mathrm{d}u+2v\mathrm{d}v=\mathrm{d}y,\end{cases}\text{从而}\begin{cases}\mathrm{d}u=\dfrac{-2v}{4uv+1}\mathrm{d}x+\dfrac{1}{4uv+1}\mathrm{d}y,\\ \mathrm{d}v=\dfrac{1}{4uv+1}\mathrm{d}x+\dfrac{2u}{4uv+1}\mathrm{d}y.\end{cases}$$

得到

注 建议读者用微分法练习此题.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-2v}{4uv+1},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{4uv+1},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{4uv+1},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2u}{4uv+1}.$$

例 7.3.12 设 $z=f(x,y)$，而函数 $y=y(x,z)$ 由方程 $\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$ 给出，其中 f,φ 具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解法一 设 $\Phi(x,y,z)=\varphi(x^2,\mathrm{e}^y,z)=0$，则 $\Phi_x=2x\varphi_1'$，$\Phi_y=\mathrm{e}^y\varphi_2'$，$\Phi_z=\varphi_3'$.

当 $\varphi_2'\neq0$ 时，$\dfrac{\partial y}{\partial x}=-\dfrac{2x\varphi_1'}{\mathrm{e}^y\varphi_2'}$，$\dfrac{\partial y}{\partial z}=-\dfrac{\varphi_3'}{\mathrm{e}^y\varphi_2'}$.

方程 $z=f(x,y(x,z))$ 两边关于 x 求导得 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\cdot\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)$，再将 $\dfrac{\partial y}{\partial x}$，$\dfrac{\partial y}{\partial z}$ 的表达式代入，并整理得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{e}^y f_x\varphi_2'-2xf_y{}'\varphi_1'}{\mathrm{e}^y\varphi_2'+f_y\varphi_3'}，\quad\text{其中 } \mathrm{e}^y\varphi_2'+f_y\varphi_3'\neq0.$$

解法二 此题涉及三个变量 x,y,z，它们受两个方程的约束，因此在一定条件下可以确定两个一元函数 $y=y(x)$，$z=z(x)$. 记 $\begin{cases}F=f(x,y)-z=0,\\ G=\varphi\left(x^2,\mathrm{e}^y,z\right)=0,\end{cases}$ 应用公式(7.3.6)得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{\begin{vmatrix}F_y&F_x\\G_y&G_x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_y&F_z\\G_y&G_z\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}f_y&f_x\\ \mathrm{e}^y\varphi_2&2x\varphi_1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}f_y&-1\\ \mathrm{e}^y\varphi_2&\varphi_3\end{vmatrix}}=\frac{\mathrm{e}^y f_x\varphi_2-2xf_y\varphi_1}{\mathrm{e}^y\varphi_2+f_y'\varphi_3}\quad(\text{其中}\mathrm{e}^y\varphi_2+f_y\varphi_3\neq0).$$

解法三 在方程组 $\begin{cases} z = f(x,y), \\ \varphi(x^2, e^y, z) = 0 \end{cases}$ 两边对 x 求全导数，得

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = f_1' + f_2' \dfrac{dy}{dx}, \\ \varphi_1' \cdot 2x + \varphi_2' \cdot e^y \dfrac{dy}{dx} + \varphi_3' \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

消去 $\dfrac{dy}{dx}$，即得 $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{e^y f_x \varphi_2' - 2x f_y' \varphi_1'}{e^y \varphi_2' + f_y \varphi_3'}$.

例7.3.13 设 $u = f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，将下列表达式转换为极坐标系 $x = \rho\cos\theta$，$y = \rho\sin\theta$ 下的形式：

（1）$\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2$； （2）$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

解 （1）由于当 $\rho \neq 0$ 时 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ 的反函数组存在（命题 7.3.1），从

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\cos\theta - \rho\sin\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial x}, \\ 0 = \dfrac{\partial \rho}{\partial x}\sin\theta + \rho\cos\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial x} \end{cases} \text{和} \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\cos\theta - \rho\sin\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial y}, \\ 1 = \dfrac{\partial \rho}{\partial y}\sin\theta + \rho\cos\theta \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{cases}$$

得到

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \cos\theta, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = \sin\theta, \qquad (7.3.8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{\rho}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos\theta}{\rho}. \qquad (7.3.9)$$

注 用极坐标变换的逆变换

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$，

$$\theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & x > 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0, \\ \dfrac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0, \end{cases}$$

也能推出（7.3.8）和（7.3.9），这

将 $u = f(x,y)$ 看成 $u = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = F(\rho, \theta)$ 与 $\begin{cases} \rho = \rho(x,y), \\ \theta = \theta(x,y) \end{cases}$ 的复合，所以

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}, \qquad (7.3.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{\rho}. \qquad (7.3.11)$$

两边平方后相加，即得

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

（2）反复应用（7.3.10）和（7.3.11）式得，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdot\cos\theta-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\sin\theta}{\rho}$$

$$=\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right)\cdot\cos\theta-\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\cos\theta-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{\rho}\right)\cdot\frac{\sin\theta}{\rho}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\cos^2\theta-\frac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\sin^2\theta}{\rho}.$$

同理可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}\sin^2\theta+2\frac{\partial^2 u}{\partial \rho\partial \theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}-\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}+\frac{\partial u}{\partial \rho}\frac{\cos^2\theta}{\rho}.$$

两式相加得到结果：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

练习 7.3.2

1.设 $\sin y+\mathrm{e}^x-xy^2=0$，用公式计算 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

2．若 $\mathrm{e}^z=xy-z$，则 $\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

3.已知 $z=z(x,y)$ 是由 $x+y+z+\mathrm{e}^z=0$ 所确定，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$________.

习题 7.3

1.用链法则计算下列复合函数的偏导数：

（1）$z=u^2\ln v$，而 $u=\frac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$；

（2）$u=(x+y)^z$，而 $z=x^2-y^2$，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$；

（3）$z=(2x+y)^{2x+y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$.

2.用链法则计算下列复合函数的全导数：

（1）$z=\mathrm{e}^{x-2y}$，而 $x=\sin t, y=t^3$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$；

（2）$z=\int_{2u}^{u+v^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，$u=\sin x$，$v=\mathrm{e}^x$，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

3.求下列函数的偏导数，其中 f,g,h 均为可微函数：

（1）$z=f\left(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy}\right)$；（2）$u=f\left(\dfrac{x}{y},\dfrac{y}{z}\right)$；（3）$z=\dfrac{1}{f\left(x+\dfrac{x}{y}\right)}$.

4.设 $z=xy+xF\left(u\right)$，而 $u=\dfrac{y}{x}$， F 为可导函数，证明 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z+xy$.

5.设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处可微，且 $f(1,1)=1$， $f_x(1,1)=2$， $f_y(1,1)=-3$，又 $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

6.求下列函数的高阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，其中 f 具有二阶连续（偏）导数：

（1）$z=f\left(xy+\dfrac{y}{x}\right)$；（2）$z=f(x^2-y^2,xy)$.

7.计算下列各题：

（1）设 $u=yf\left(\dfrac{x}{y}\right)+xg\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f,g 二阶可导，求 $x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；

（2）φ,ψ 有连续二阶导数，$z=\dfrac{1}{2}\left[\varphi\left(y+ax\right)+\varphi\left(y-ax\right)\right]+\dfrac{1}{2}\int_{y-ax}^{y+ax}\psi\left(t\right)dt$,求: $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

8.计算隐函数的导数或偏导数：

（1）设 $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（2）设 $z+\ln z-\int_y^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（3）$\arctan(x\mathrm{e}^z)+y\mathrm{e}^z=1$，求 $\dfrac{\partial x}{\partial z}$.

9.解下列各题：

（1）设 $f(u,v)$ 可微， $f(x+2y-3z,xyz)=0$ 确定了 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（2）设方程 $F\left(\dfrac{x}{z},\dfrac{z}{y}\right)=0$ 可以确定隐函数 $z=z(x,y)$，其中 F 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（3）设方程 $F(xy,y+z,xz)=0$ 确定 $z=z(x,y)$，其中 F 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（4）设 $z=z\left(x,y\right)$ 是由 $x^2+y^2+z^2=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 确定的隐函数， f 可微，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

10. 设$\Phi(u,v)$具有连续偏导数，证明方程$\Phi(cx-az,cy-bz)=0$所确定的函数$z=z(x,y)$满足$a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}=c$．

11.求解下列问题：

（**1**） 若$e^z=xy-z$确定函数$z=f\left(x,y\right)$，求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

（**2**）设由$xyz-\ln\left(yz\right)=-2$确定函数$z=f\left(x,y\right)$，求$z_y\left(0,1\right)$，$z_{yx}\left(0,1\right)$；

（**3**）设$u=f(x,y,z)$，其中$z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，求$\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，其中$f$有二阶连续偏导数；

（**4**）设$z=x\varphi(x+y)+y\psi(x+y)$，$\varphi,\psi$二阶可导，证明$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

12.求方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$确定的隐函数$z=z(x,y)$的全微分$dz\big|_{(1,0,-1)}$.

13. 设$z=z(x,y)$由$z=g\left(\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{z}\right)$确定，$g(u,v)$具有连续偏导数，求$dz$．

14.求由方程组所确定的函数的导数：

（**1**）$\begin{cases} z=x^2+y^2, \\ x^2+2y^2+3z^2=20, \end{cases}$ 求$\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}$；

（**2**）$\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2+z^2=1, \end{cases}$ 求$\dfrac{dx}{dz},\dfrac{dy}{dz}$.

****

15.设$u=e^{3x}(2y+z)$, 求$u_x\big|_{(1,1,0)}$，其中

（**1**） $z=z\left(x,y\right)$是由方程$2x+y-3e^z+xyz=0$所确定的隐函数；

（**2**） $y=y\left(z,x\right)$是由方程$2x+y-3e^z+xyz=0$所确定的隐函数.

16. 函数$u(x)$由方程组$\begin{cases} u=f(x,y), \\ g(x,y,z)=0, \\ h(x,z)=0 \end{cases}$确定，$\dfrac{\partial g}{\partial y}\neq 0,\dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0$．求$\dfrac{du}{dx}$.

17*.若函数$f(x,y)$对任意正实数t满足$f(tx,ty)=t^n f(x,y)$，则称$f(x,y)$为n次齐次函数．设$f(x,y)$是可微函数，证明$f(x,y)$为n次齐次函数的充分必要条件为$x\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=nf(x,y)$．

§7.4 可微函数的几何性质

本节主要介绍曲线的切线、曲面的切平面以及可微函数的梯度及其几何意义.

7.4.1 微分法在几何上的应用

一、空间曲线的切线与法平面

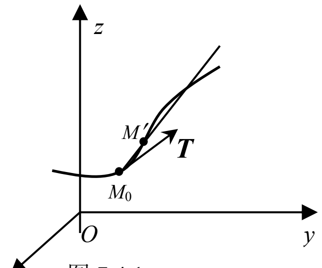


图 7.4.1

1. 用参数方程表示的曲线

设空间曲线Γ的方程为：$\begin{cases} x=\phi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t), \end{cases}$ 并假定式中的三个函数均可导且不同时为零.

如图 7.4.1，设曲线Γ上的点$M_0(x_0,y_0,z_0)$对应于$t=t_0$，$M'(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y,z_0+\Delta z)$对应于$t=t_0+\Delta t$．则割线 M_0M'的方程为

$$\frac{x-x_0}{\Delta x}=\frac{y-y_0}{\Delta y}=\frac{z-z_0}{\Delta z}.$$

对于空间曲线，其切线仍定义为割线的极限位置．上式分母同除以Δt，得到

$$\frac{x-x_0}{\frac{\Delta x}{\Delta t}}=\frac{y-y_0}{\frac{\Delta y}{\Delta t}}=\frac{z-z_0}{\frac{\Delta z}{\Delta t}},$$

当$M'\to M_0$即$\Delta t\to 0$ 时，就得到曲线Γ在点M_0处的切线方程

$$\frac{x-x_0}{\phi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}. \qquad (7.4.1)$$

切线的方向向量称为曲线的**切向量**，即$\boldsymbol{T}=\left(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)\right)$．过点$M_0$且与切线垂直的平面称为**法平面**，这时法平面的法向量恰为$\boldsymbol{T}$：即

$$\phi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0. \qquad (7.4.2)$$

特别地，若空间曲线方程为$\begin{cases} y=\phi(x), \\ z=\psi(x), \end{cases}$ 则可以看作参数方程$\begin{cases} x=x, \\ y=\phi(x), \\ z=\psi(x), \end{cases}$ 因而它在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{\phi'(x_0)}=\frac{z-z_0}{\psi'(x_0)}, \qquad (7.4.3)$$

法平面方程为

$$(x-x_0)+\phi'(x_0)(y-y_0)+\psi'(x_0)(z-z_0)=0. \tag{7.4.4}$$

例 7.4.1 求曲线 $\Gamma: x=\int_0^t \mathrm{e}^u \cos u \mathrm{d}u$，$y=2\sin t+\cos t$，$z=1+\mathrm{e}^{3t}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

解 当 $t=0$ 时，$x=0, y=1, z=2$.

求导数得 $x'=\mathrm{e}^t\cos t$，$y'=2\cos t-\sin t$，$z'=3\mathrm{e}^{3t}$，从而 $x'(0)=1$，$y'(0)=2$，$z'(0)=3$. 所以切线方程为

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3};$$

法平面方程为

$$x+2(y-1)+3(z-2)=0，即 x+2y+3z-8=0.$$

2.用一般式方程表示的曲线

若空间曲线 Γ 的方程为 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0,\end{cases}$ $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 是曲线上的一点，F,G 的各种偏导数都存在且连续. 在 $\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}_{M_0}\neq 0$ 的条件下，就存在隐函数组 $\begin{cases}y=\phi(x),\\z=\psi(x),\end{cases}$ 求导数（参考式（7.3.6））得

$$\phi'(x_0)=\frac{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}_{M_0}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}},\quad \psi'(x_0)=\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}_{M_0}}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}}.$$

代入式（7.4.3），就得切线方程

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}_{M_0}} \tag{7.4.5}$$

以及法平面方程

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}_{M_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}_{M_0}(z-z_0)=0. \tag{7.4.6}$$

公式（7.4.5）可以用下列简单的方法记住：令 $\boldsymbol{n}_1=\left(F_x,F_y,F_z\right)_{M_0}$，$\boldsymbol{n}_2=\left(G_x,G_y,G_z\right)_{M_0}$，则向量 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\F_x & F_y & F_z\\G_x & G_y & G_z\end{vmatrix}_{M_0}$ 的三个坐标就是切

注 后续的切平面理论将给出公式（7.4.5）的几何意义：$\boldsymbol{n}_1$ 和 $\boldsymbol{n}_2$ 分别是两个曲面 $F(x,y,z)=0$ 和 $G(x,y,z)=0$ 的法向量，则切线应与它们垂直，故方向向量为

线的方向向量.

例 7.4.2 求曲线$C:\begin{cases}2x^2+3y^2+z^2=9,\\ z^2=3x^2+y^2\end{cases}$在点$M_0(1,-1,2)$处的切线方程.

解法一 设$F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-9$，$G(x,y,z)=z^2-3x^2-y^2$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=4x,\ \frac{\partial F}{\partial y}=6y,\ \frac{\partial F}{\partial z}=2z;\ \frac{\partial G}{\partial x}=-6x,\ \frac{\partial G}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial G}{\partial z}=2z,$$

在点M_0处法线方向向量

$$\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\F_x&F_y&F_z\\G_x&G_y&G_z\end{vmatrix}_{M_0}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&-6&4\\-6&2&4\end{vmatrix}=-4(8,10,7),$$

从而即得切线方程

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}.$$

解法二 把曲线方程中的x看作参变量，两边对x求导，得

$$\begin{cases}4x+6y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ 2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=6x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.\end{cases}.$$

在点$M_0(1,-1,2)$处$\begin{cases}4-6\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+4\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=0,\\ 4\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=6-2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\end{cases}$ 解得$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{5}{4},\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\dfrac{7}{8}$，故切线方程为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{\frac{10}{8}}=\frac{z-2}{\frac{7}{8}}，即\frac{x-1}{8}=\frac{y+1}{10}=\frac{z-2}{7}.$$

二、曲面的切平面与法线

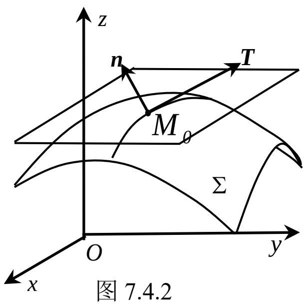


图 7.4.2

1．用$F(x,y,z)=0$表示的曲面

设曲面方程为$F(x,y,z)=0$，其中F是可微函数．如图 7.4.2，在曲面上任取一条通过点M_0的曲线Γ：$\begin{cases}x=\phi(t),\\ y=\psi(t),\\ z=\omega(t),\end{cases}$曲线在点$M_0$处的切向量

$\boldsymbol{T}=(\phi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))$.

令 $\boldsymbol{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)_{M_0}$，由于 $F\left(\phi(t),\psi(t),\omega(t)\right)=0$，对 t 求导得到

$$F_x\left(\phi(t),\psi(t),\omega(t)\right)\phi'(t)+F_y\left(\phi(t),\psi(t),\omega(t)\right)\psi'(t)+F_z\left(\phi(t),\psi(t),\omega(t)\right)\omega'(t)=0,$$

在点 M_0 处有

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\phi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0.$$

这表明：

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{T}=0，即\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{T}.$$

由于曲线 Γ 是曲面上通过 M_0 的任意一条曲线，它在 M_0 的切线都与同一向量 $\boldsymbol{n}$ 垂直，故曲面上通过点 M_0 的一切曲线在点 M_0 的切线都在同一平面上，这个平面称为曲面在点 M_0 的**切平面**．这时，曲面在点 M_0 处的切平面方程就为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0. \qquad (7.4.7)$$

注　平面曲线 $F(x,y)=0$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的法线为 $\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0)}$，切线为 $F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$.因为曲线的切线斜率是 $-\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$.它们分别对

通过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 而垂直于切平面的直线称为曲面在该点的**法线**．法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}. \qquad (7.4.8)$$

垂直于曲面上切平面的向量称为曲面的**法向量**．曲面在点 M_0 处的法向量即为

$$\boldsymbol{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)_{M_0}.$$

2.用 $z=f(x,y)$ 表示的曲面　全微分的几何意义

若空间曲面 Σ 的方程形为 $z=f(x,y)$，$f(x,y)$ 在区域 D 内有定义，在点 $P_0(x_0,y_0)\in D$ 处可微，$z_0=f(x_0,y_0)$．令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，曲面在点 $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 处的切平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(f_x,f_y,-1\right)_{M_0}$，从而存在不平行于 z 轴的切平面方程 Π

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0). \qquad (7.4.9)$$

曲面在点 M_0 处的法线方程为：

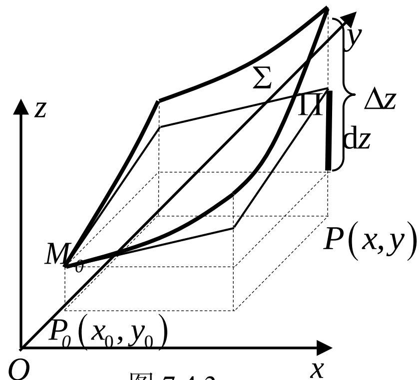


图 7.4.3

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \qquad (7.4.10)$$

如图 7.4.3，在 $P_0(x_0,y_0)$ 点的“充分小”的邻域上（指正数 δ 确保 $U(P_0;\delta)\subset D$），设 $\Delta x,\Delta y$ 给定，点 P_0 的邻域上对应一点 $P(x,y)=P\left(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y\right)\in D$，因为

$$\mathrm{d}z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

则全微分 dz 表示从 P_0 点到 P 点对应在切平面上的竖坐标的增量.

顺便指出，可微性还是切平面的存在性的充要条件．因为，可以证明（见阅读材料 7.4.1）：如果 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 点处的切平面存在，则 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)\in D$ 一定可微.

阅读材料 7.4.1 可微性与切平面的存在性之等价性的证明

3.法向量的定向

对于曲面 $z=f(x,y)$，曲面的法线是一条直线，为了进一步确定方向（偏向上或偏向下），我们发现，如果取法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(f_x,f_y,-1\right)_{M_0}$，那么，由于

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\frac{f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\frac{-1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right), \qquad (7.4.11)$$

（其中 α,β,γ、表示曲面的法向量的方向角），$\cos\gamma=\dfrac{-1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}<0$，这表明 $\boldsymbol{n}$ 的方向与 z 轴交角为一个钝角，故此时法向量 $\boldsymbol{n}$ 的方向是“**偏向下**”的．同理，表示“**偏向上**”的法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(-f_x,-f_y,1\right)_M$，此时

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{-f_x}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\frac{-f_y}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}},\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\right). \qquad (7.4.12)$$

同理，对于用 $F(x,y,z)=0$ 表示的曲面，从向量 $\left(F_x,F_y,F_z\right)_{M_0}$ 各个分量的符号可以确定它的指向，$\left(-F_x,-F_y,-F_z\right)_{M_0}$ 是同一直线上指向相反的那个法向量.

我们已经知道（见上册 2.2.2 节），光滑曲线是指各点处具有连续切线的曲线，对于曲线 Γ：$\begin{cases}x=\phi(t),\\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta],\\ z=\omega(t),\end{cases}$ 由于切线方程（7.4.1），Γ 为光滑曲线当且仅当 $\phi'(t)$，$\psi'(t)$，$\omega'(t)$ 连续且不同

时为零．同样地，**光滑曲面**是指各点处具有连续切平面的曲面，对于曲面Σ：$F(x,y,z)=0$，这相当于各点法向量不为零而且连续变化，因此，Γ为光滑曲面当且仅当F_x,F_y,F_z均连续且不同时为零．

曲线和曲面的光滑性是多元函数的一种整体性质．

例 7.4.3 求下列曲面的切平面方程：

（1）曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 在点 $M_0(1,\ 2,\ 0)$ 处的切平面；

（2）平面曲线$\begin{cases} z=y^2, \\ x=0 \end{cases}$绕 z 轴旋转所得旋转面在 $x=1, y=2$ 对应的曲面上的 M_1 点处的切平面．

解 （1）设$F(x,y,z)=z-\mathrm{e}^z+2xy-3$，则在$M_0(1,\ 2,\ 0)$处$F_x=4$，$F_y=2$，$F_z=0$，所以切平面方程为

$$4(x-1)+2(y-2)+0(z-0)=0\text{，即 }2x+y-4=0.$$

（2）所得旋转面的方程为$z=x^2+y^2$，当$x=1,y=2$时，$z=5$．

因为$z_x=2x$，$z_y=2y$，在点M_1处，$z_x=2$，$z_y=4$，所以切平面方程为

$$z-5=2(x-1)+4(y-2)\text{，即 }2x+4y-z-5=0.$$

例 7.4.4 求曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$的平行于平面$x+4y+6z=0$的切平面方程．

解 设$M_0(x_0,y_0,z_0)$为曲面上的切点，则切平面方程为

$$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+6z_0(z-z_0)=0.$$

依题意，切平面方程平行于已知平面，得

$$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{4}=\frac{6z_0}{6},$$

所以 $2x_0=y_0=z_0$ ．因为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$是曲面上的切点，满足方程，解得$x_0=\pm1$，故所求切点为$M_0(\pm1,\pm2,\pm2)$．得到切平面方程

$$1(x\pm1)+4(y\pm2)+6(z\pm2)=0\text{，}\quad x+4y+6z\pm21=0.$$

例 7.4.5 设有单叶双曲面Σ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$，

（1）求在Σ上的点$M_0(x_0,y_0,z_0)$处的切平面；

（2）求经过Σ与平面$x=2y$的交线的母线平行于x轴的投影柱面上一点$M_1(x_1,y_1,z_1)$处的法线方

程；

（3）当问题（2）中的 M_1 点在第一卦限时，求与 z 轴的夹角为锐角的那个法向量.

解 （1）曲面 Σ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量为 $\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},-\frac{2z_0}{c^2}\right)$，所以切平面为

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)-\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

化简后得

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}-\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

（2）Σ 与平面 $x=2y$ 的交线为 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=2y,\end{cases}$ 消去变量 x 得柱面

$$\frac{4y^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1，即\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)y^2-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

这正是母线平行于 x 轴的一个投影柱面.

设 $G(x,y,z)=\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)y^2-\frac{z^2}{c^2}-1$，则 $G_x=0$，$G_y=2\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)y$，$G_z=-\frac{2z}{c^2}$. 从而在点 M_1 处的一个法向量为 $\left(0,\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)y_1,-\frac{z_1}{c^2}\right)$，所以，法线方程为

$$\frac{x-x_1}{0}=\frac{y-y_1}{\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)y_1}=\frac{z-z_1}{-\frac{z_1}{c^2}}.$$

（3）为使法向量与 z 轴的夹角为锐角，只需 $\cos\gamma>0$，从而法向量为

$$\boldsymbol{n}=\left(0,-\left(\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)y_1,\frac{z_1}{c^2}\right).$$

思考题 7.4.2 平面二次曲线 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的切线方程为

$$Ax_0x+B\frac{x_0y+y_0x}{2}+Cy_0y+D\frac{x+x_0}{2}+E\frac{y+y_0}{2}+F=0,$$

对于二次曲面上求切平面方程，

练习 7.4.1

1. 曲线 $x=2t, y=\sin t, z=\cos 3t$ 在点 $(0,0,1)$ 处切线的方程为_________.

2. 求曲线 $x=\sin t$，$y=\cos^2 t$，$z=\sin t\cos t$ 在对应于 $t=\pi$ 那点处的切线与 xOy 平面的夹角.

3. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=12$ 在点 $(1,2,1)$ 处的切平面方程为____________.

4. 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,2,5)$ 处的切平面方程为____________.

7.4.2 方向导数与梯度

注 习惯上 $\rho\to 0$ 被默认为 $\rho\to 0^+$ 之意

若山顶上空突然倾泻暴雨，一定是在最陡峭的地方流水最湍急的，如何刻画这种“陡峭”呢？

一块水平放置的金属板上有个火焰使金属板受热，离火焰不远处有一只蚂蚁．假定板上任意一点处的温度与该点到火源的距离成反比，那么这只蚂蚁应该沿着以火源为起点的射线方向爬行才能最快到达较凉快的地方，如何用数学的运算来证实这个感觉呢？

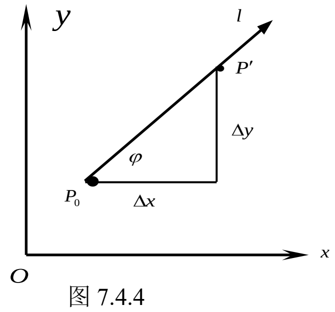


图 7.4.4

我们知道，函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的两个偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 分别刻画了函数 $z=f(x,y)$ 在 P 点处沿 x 轴和 y 轴方向的变化率．但在许多实际问题中，需要讨论函数沿某个特定方向的变化率．例如，设 $z=f(x,y)$ 表示山的高度，水平坐标面上的每一点 $P(x,y)$ 都对应一个高度，经过点 $P(x,y)$ 给定一个方向 $\boldsymbol{l}$，问沿 $\boldsymbol{l}$ 方向 z 的变化率是多少？由于有的方向陡峭，有的方向平坦，沿不同方向的变化率通常就不一样了，当然我们也会对最陡峭的那个方向感兴趣．

一、方向导数

定义 7.4.1 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某一邻域 $U(P_0)$ 内有定义，$\boldsymbol{l}$ 是过点 P_0 的某个确定的方向，设 $P'(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 为 $\boldsymbol{l}$ 上的另一点，且 $P'\in U(P_0)$．考虑函数的全增量 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$ 与 P_0,P' 两点间的距离 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ 之比值，当 P' 沿着 $\boldsymbol{l}$ 趋于 P_0 时，如果此比值的极限存在，则称这极限为函数在点 P_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**，记为 $\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$，即

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\rho} \tag{7.4.13}$$

方向导数的几何意义见图 7.4.4.

定理 7.4.1（方向导数计算公式）如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 是可微分的，那末函数在该点沿任意方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta\,, \tag{7.4.14}$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦.

思考题 7.4.2 “存在方向导数”与“存在偏导数”之间存在蕴含关系吗？如果两者都存在，它们

证 由于函数 $z=f(x,y)$ 可微，则函数的全增量可表示为

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+o(\rho),$$

两边同除以 ρ，得到

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\Delta x}{\rho}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho},$$

故有方向导数

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta .$$

证毕.

设 φ 为 x 轴正向到方向 $\boldsymbol{l}$ 的转角（$-\pi\le\varphi\le\pi$），则 $\cos\alpha=\cos\varphi$，$\cos\beta=\sin\varphi$，从而（7.4.14）可以写为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi . \qquad (7.4.15)$$

不难得知，类似地，对于三元函数 $u=f(x,y,z)$，它在空间一点 $P(x,y,z)$ 沿着方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数，可定义为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho},$$

（其中 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$）. 若 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 可微，则 $u=f(P)$ 在点 P 沿任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在，且

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}=f_l(P)=f_x(x,y,z)\cos\alpha+f_y(x,y,z)\cos\beta+f_z(x,y,z)\cos\gamma, \qquad (7.4.16)$$

其中单位向量 $\boldsymbol{l}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$.

思考题 7.4.3 已知 φ 为 x 轴正向到方向 $\boldsymbol{l}$ 的转角，α,β 分别为 $\boldsymbol{l}$ 相对于 x 轴和 y 轴的方向角，等式 $\cos\alpha=\cos\varphi$，$\cos\beta=\sin\varphi$

$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$

例 7.4.6 设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，

（1）求 f 在点 $P(1,1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(2,-2,1)$ 的方向导数；

（2）求 f 沿曲面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 上点 $P(1,1,1)$ 处的外法线方向的方向导数.

解 先求出 f 在点 $P(1,1,1)$ 处的各个偏导数 $f_x(1,1,1)=1$，$f_x(1,1,1)=2$，$f_x(1,1,1)=3$.

（1）求出 $\boldsymbol{l}$ 的单位向量 $\boldsymbol{l}^0=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$，所以，

$$f_l(P)=f_x(1,1,1)\cos\alpha+f_y(1,1,1)\cos\beta+f_z(1,1,1)\cos\gamma$$

$$=1\cdot\frac{2}{3}+2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)+3\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

（2）令 $F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$，则 $F_x=4x$， $F_y=6y$， $F_z=2z$． 故点 $P(1,1,1)$ 处的外法向量 $\boldsymbol{n}=\left(F_x,F_y,F_z\right)_P=\left(4,6,2\right)$， $|\boldsymbol{n}|=\sqrt{4^2+6^2+2^2}=2\sqrt{14}$， 从而 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{14}},\quad \cos\beta=\frac{3}{\sqrt{14}},\quad \cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{14}}.$$

所以，

$$f_{\boldsymbol{n}}(P)=1\cdot\frac{2}{\sqrt{14}}+2\cdot\frac{3}{\sqrt{14}}+3\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}=\frac{11}{\sqrt{14}}.$$

例 7.4.7 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点 $P(1,1)$ 沿与 x 轴方向转角为 φ 的方向射线 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数．并问在怎样的方向上此方向导数

（1）有最大值；（2）有最小值；（3）等于零？

解 由方向导数的计算公式知，

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)}=f_x(1,1)\cos\varphi+f_y(1,1)\sin\varphi=(2x-y)\big|_{(1,1)}\cos\varphi+(2y-x)\big|_{(1,1)}\sin\varphi$$

$$=\cos\varphi+\sin\varphi=\sqrt{2}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{4}\right).$$

故（1）当 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 时，方向导数达到最大值 $\sqrt{2}$；

（2）当 $\varphi=-\dfrac{3\pi}{4}$ 时，方向导数达到最小值 $-\sqrt{2}$；

（3）当 $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$ 和 $-\dfrac{\pi}{4}$ 时，方向导数等于 0.

二、梯度

1. 二元函数梯度的概念

现在可以解决“函数 $z=f(x,y)$ 在点 P 沿哪一方向增加速度最快？”的问题了.

定义 7.4.2 设函数 $z=f(x,y)$ 在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P(x,y)\in D$，都

注 梯度的记号 **grad** 源自英文 gradient，有“倾斜度”“变化率”之意. 对于一元函数来说，梯度就

可获得一个向量$\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}$，这个向量称为函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的**梯度**，记为$\mathbf{grad}f(x,y)$，即

$$\mathbf{grad}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}\,. \tag{7.4.17}$$

设$\boldsymbol{l}^0=\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j}$是方向$\boldsymbol{l}$上的单位向量，$\theta$是梯度方向与$\boldsymbol{l}$方向的夹角．由方向导数公式知

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\varphi,\sin\varphi)=\mathbf{grad}f(x,y)\cdot\boldsymbol{l}^0\,.$$

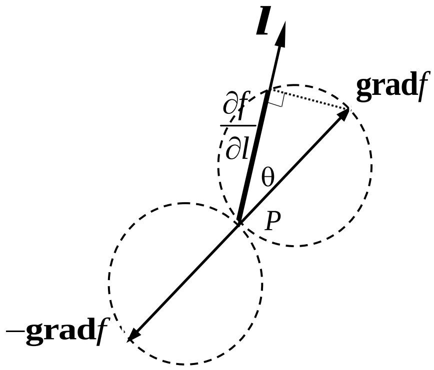


图 7.4.5

即

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}=|\mathbf{grad}f(x,y)|\cos\theta\,. \tag{7.4.18}$$

显然，当$\cos\theta=1$时，$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}$有最大值．

图 7.4.5 表示了方向导数与梯度的关系式(7.4.18)的几何意义：梯度是每一点P对应的一个确定的向量，方向导数是由点P和方向$\boldsymbol{l}$两个条件所确定的一个数量，当$\boldsymbol{l}$与梯度同向时，方向导数取得最大值，且为梯度的模$|\mathbf{grad}f(x,y)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$；当$\boldsymbol{l}$与梯度反向时，方向导数取得最小值，且为梯度的模的相反数．于是我们有：

命题 7.4.1 函数在某点的梯度是这样一个向量，它的方向是这点处变化率最快的方向，而它的模为这个方向的变化率（即方向导数的最大值）.

根据这个命题，例 7.4.7 的梯度的两个分量都是 1，所以最大方向导数就是$\sqrt{2}$．

2. 梯度的几何意义

在几何上，如图 7.4.6，$z=f(x,y)$表示一个曲面，曲面被水平的平面$z=c$所截得截线L：$\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$，截线$L$在$xOy$面上投影$L^*$称为**等值线**（或**等量线，等高线**等）如图 7.4.7.

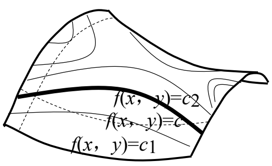


图 7.4.6

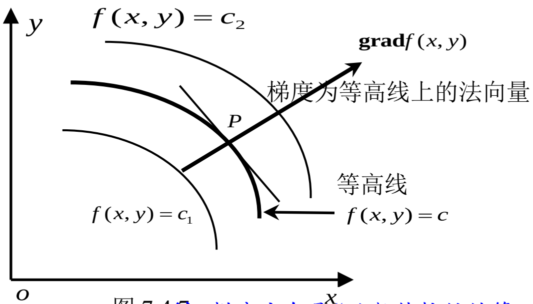


图 7.4.7

注 梯度方向是"从数值较低的等高线指向数值较高的等高线"，而不是相反方向，这是因为，当函数值增加时，方向导数为正，而梯度方向是最大方向导数的方

由于平面曲线$f(x,y)=c$的法线方向是(f_x,f_y)（参见式（7.4.8）的旁注），我们得到梯度与等值线的关系：

命题7.4.2 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的梯度的方向与点 P 的等值线 $f(x,y)=c$ 在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等值线指向数值较高的等值线，而梯度的模等于函数 $f(x,y)$ 在这点的法线方向的方向导数.

3. 三元函数的梯度

梯度的概念可以推广到三元函数．三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在空间区域 G 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点 $P(x,y,z)\in G$，都可定义一个向量(梯度)

$$\mathbf{grad}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\ .$$

类似于二元的情况，这个梯度也是一个向量，其方向与取得最大方向导数的方向一致，其模为方向导数的最大值．定义曲面 $f(x,y,z)=c$ 为函数 $u=f(x,y,z)$ 的一个**等值面**，则函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 的梯度的方向与过点 P 的等值面 $f(x,y,z)=c$ 在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等值面指向数值较高的等值面，而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数.

例 7.4.8 已知函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y$.

（1）求函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $P(1,1,2)$ 处的梯度；

（2）函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $P(1,1,2)$ 处什么方向的方向导数最大？最大值是多少？

解 由梯度计算公式得

$$\mathbf{grad}u(x,y,z)=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}=(2x+3)\boldsymbol{i}+(4y-2)\boldsymbol{j}+6z\boldsymbol{k}\ .$$

从而：

（1）$\mathbf{grad}u(1,1,2)=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$.

（2）在梯度 $\mathbf{grad}u(1,1,2)=5\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$ 方向上 $u=f(x,y,z)$ 的方向导数最大，最大值是

$$|\mathbf{grad}u(1,1,2)|=\sqrt{5^2+2^2+12^2}=\sqrt{173}\ .$$

梯度的概念实际上是导数概念向高维的又一种推广．设 u,v 和 f 都是可微函数，不难证明梯度有以下运算法则：

（1）$\mathbf{grad}(u\pm v)=\mathbf{grad}u\pm\mathbf{grad}v$;

（2）$\mathbf{grad}(uv)=v\mathbf{grad}u+u\mathbf{grad}v$;

注 梯度 $\mathbf{grad}f$ 有时也记作 ∇f，这里 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$ 称为二维向量微分算子或 Nabla 算子，.算子（operator）是函数概念的高度抽象，其自变量和因变量都不必是数，而可以是函数、矩阵、向量

（3）$\mathbf{grad}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathbf{grad}u-u\mathbf{grad}v}{v^2}$；

（4）$\mathbf{grad}f(u)=f'(u)\cdot\mathbf{grad}u$（其中 f 可微）.

4. 数量场和向量场的概念

下面我们简单介绍一下数量场和向量场的概念.

设G是一个空间区域，如果对于G内任一点M，都有一个确定的数量$f(M)$与之对应，则称在G内确定了一个**数量场**（例如温度场，密度场等），一个数量场总可以用一个函数$f(M)$来确定. 如果与点M对应的是一个向量$\boldsymbol{F}(M)$，则称在G内确定了一个**向量场**（例如引力场，速度场等），一个向量场可以用一个向量值函数$\boldsymbol{F}(M)$来确定：

$$\boldsymbol{F}(M)=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k},$$

其中$P(M),Q(M),R(M)$是点M的数量函数.

根据这个概念，向量值函数$\mathbf{grad}f(M)$是由数量场$f(M)$确定的向量场，称为**梯度场**. 如果

$$\mathbf{grad}f(M)=\boldsymbol{F}(x),$$

则称$f(M)$是向量场$\boldsymbol{F}(M)$的一个势函数，并称向量场$\boldsymbol{F}(M)$是一个**势场**. 但需注意，任意一个向量场并不一定都是势场，因为它不一定是某个数量函数的梯度.

最后，让我们来看一看本节最先提出的两个情景.

将山坡近似地看作光滑曲面$z=f(x,y)$，由于地心的引力，雨水会沿着函数值减少的速度最快的方向，即$-\mathbf{grad}z$的方向运动.

设蚂蚁所在的金属板温度场上温度函数是$u=\dfrac{k}{\rho}$，其中k是常数，$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，向径$\boldsymbol{r}=(x,y)$. 则

$$\mathbf{grad}u=\left(-\frac{kx}{r^3},-\frac{ky}{r^3}\right)=-\frac{k\boldsymbol{r}}{r^3},$$

这说明温度下降最剧烈的方向与向径方向相同，所以蚂蚁应该沿着与向径相反的射线方向逃离.

练习 7.4.2

1. 函数$u=3x^2y^2-2y+4x+6z$在原点沿$\overrightarrow{OA}=(2,3,1)$的方向导数为（　　）.

（A）$-\dfrac{8}{\sqrt{14}}$　　（B）$\dfrac{8}{\sqrt{14}}$　　（C）$-\dfrac{8}{\sqrt{6}}$　　（D）$\dfrac{8}{\sqrt{6}}$

2.设$u=3x^2y^2-2y+4x+6z$，则$\mathbf{grad}u=$__________ ,$\mathbf{grad}u\big|_{(0,0,0)}=$___________.

3.根据上题结果，函数$u=3x^2y^2-2y+4x+6z$在原点处沿什么方向增值的速率最快？最快速率是多少？

习题 7.4

1.求解下列问题：

（1）求曲线$x=\mathrm{e}^t\cos t$， $y=\mathrm{e}^t\sin t$， $z=2\mathrm{e}^t$ 在相应于点 t＝0 处的切线方程；

（2）求曲线$\begin{cases}x=y^2,\\ z=x^2\end{cases}$上点$(1,-1,1)$处的法平面方程；

（3）设曲线$\begin{cases}y=y(x),\\ z=z(x)\end{cases}$由方程组$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=6,\\ x^2+y^2-z^2=4\end{cases}$所确定，求此曲线在点$(2,1,1)$处的切线方程；

（4）求曲线$\begin{cases}x=2t,\\ y=\sin t,\\ z=\cos t\end{cases}$ $(0\le t\le 2\pi)$平行于平面$y+z=1$的切线方程.

2. 曲线$x=\sin^2 t, y=\sin t, z=\cos t$在相应于$t=\dfrac{\pi}{4}$的点处一个切线向量与$z$轴正向交角为锐角，求此向量与$y$轴正向的夹角余弦.

3.解下列切平面问题：

（1）求曲面$x^2+2y^2+3z^2=21$，在点$(1,-2,2)$处的切平面方程.

（2）求曲面$z=\arctan\dfrac{y}{x}$在点$P\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$处的切平面方程.

（3）设方程$xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$确定了$z=z(x,y)$，求曲面$z=z(x,y)$在点$(1,0,-1)$处的法线方程.

（4）设$(1,-1,2)$是曲面$z=f(x,y)$上一点，若$f_x(1,-1)=3$，在任一点(x,y)有$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=f(x,y)$，求曲面在这一点的切平面方程.

4.平面$Ax+By-z=\lambda$是曲面$z=2x^2+3y^2$在点$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{5}{4}\right)$处的切平面，求$\lambda$.

5.证明曲面的几何性质：

（1）曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}$ （$a>0$）上任何一点处的切平面在各坐标轴上的截距之和为常数；

（2）曲面$xyz=1$上任一点处的切平面与三个坐标面所形成的四面体体积为常数；

（3）锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}+3$的所有切平面都通过锥面的顶点.

6.求解下列方向导数问题：

（1）求函数$z=x^2+y^2$在点$A(1,2)$处指向点$B(2,2+\sqrt{3})$的方向的方向导数；

（2）求函数$u=xyz$在点$A(5,1,2)$处指向点$B(9,4,14)$的方向导数；

（3）求函数$u=z\arctan\dfrac{y}{x}$在点$A(1,0,1)$处沿点A指向点$B(3,-2,2)$方向的方向导数.

7.求函数$z=\ln(x+y)$在抛物线$y^2=4x$上点$A(1,2)$处，沿着这抛物线在该点处偏x轴正向的切线方向的方向导数.

8.求解下列梯度问题：

（1）设$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，求$\mathbf{grad}f(0,0,0)$和$\mathbf{grad}f(1,1,1)$；

（2）设$u=f(r),r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，其中$f$可微，求$\mathbf{grad}u$.

9. 设$u=2xy-z^2$，求u在点$(2,-1,1)$处的方向导数的最大值.

10.求函数$u=xy^2z$在点$P_0(1,-1,2)$处变化最快的方向，并求沿这个方向的方向导数.

****

11. 设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$附近有定义，且$f_x(0,0)=3$，$f_y(0,0)=1$，则（　　）.

（A）$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$

（B）曲面$z=f(x,y)$在点$(0,0,\ f(0,0))$的法向量为$(3,\ 1,\ 1)$

（C）曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,\ f(0,0))$的切向量为$(1,\ 0,\ 3)$

（D）曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,\ f(0,0))$的切向量为$(3,\ 0,\ 1)$

12. 证明曲面的几何性质：

（1）设$M(x_0,y_0,z_0)$是曲面$z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)$上任一点，则在这点处曲面的法线垂直于向径$\overrightarrow{OM}$，其中$f$是可导函数；

（2）设曲面方程为$z=ax+f(by+cz)(a\neq 0$、b、c都是常数)，$f(u)$可微．那么该曲面的任一切平面都与一常向量$\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{b}{a},-c,b\right)$平行；

(3)曲面$f\left(\dfrac{x-a}{z-c},\dfrac{y-b}{z-c}\right)=0$的切平面总通过一定点(其中$f(u,v)$可微分,$a,b,c$均为常数).

13.过直线$\begin{cases}10x+2y-2z=27,\\ x+y-z=0\end{cases}$作曲面$3x^2+y^2-z^2=27$的切平面，求此切平面的方程.

14*. 在第一卦限内求曲面$z=xy$上一点，使过该点的切平面垂直于平面$2x+y+3z=0$，且与三个坐标面所围立体的体积为$\dfrac{1}{6}$.

15*.在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点，使函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$在该点沿方向$\boldsymbol{l}=(1,-1,0)$的方向导数

最大，并求出最大值.

§7.5　多元函数的极值

7.5.1 多元函数的无条件极值和最值

一、无条件极值

无条件极值是指，对自变量除了限制在定义域内这个基本要求以外，并无其他条件．我们在第三章所讨论的一元函数的极值问题都是无条件极值问题．

设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域内有定义，对于该邻域内异于 P_0 的点 (x,y)：若恒满足不等式 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则称函数在点 P_0 有**极大值**；若恒满足不等式 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则称函数在 P_0 有**极小值**；极大值、极小值统称为**极值**．使函数取得极值的点称为**极值点**．

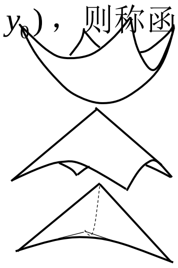


图 7.5.1

例如，如图7.5.1，

（1）函数 $z=3x^2+4y^2$ 在 $(0,0)$ 点有极小值；

（2）函数 $z=-\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点有极大值；

（3）函数 $z=xy$ 在点 $(0,0)$ 无极值．

多元函数取得极值的条件如下：

定理 7.5.1（极值的必要条件）．设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 具有偏导数，且在点 (x_0,y_0) 处有极值，则它在该点的偏导数必然为零：

$$f_x(x_0,y_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0)=0. \tag{7.5.1}$$

证　不妨设 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处有极大值，则对于 P_0 的某邻域内任意 $(x,y)\neq(x_0,y_0)$ 都有 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，故当 $y=y_0$，$x\neq x_0$ 时，有 $f(x,y_0)<f(x_0,y_0)$，这说明一元函数 $f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 处有极大值，故必有 $f_x(x_0,y_0)=0$；类似地可证 $f_y(x_0,y_0)=0$．证毕．

将这个定理推广到三元函数，就是：如果三元函数 $u=f(x,y,z)$ 在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 具有偏导数，则它在 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 有极值的必要条件为

$$f_x(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_y(x_0,y_0,z_0)=0,\quad f_z(x_0,y_0,z_0)=0.$$

仿照一元函数的情形，凡能使一阶偏导数同时为零的点，均称为函数的**驻点**．

在一般情况下，驻点与极值点是既不充分又不必要的关系，反例如下：

（1）点 $(0,0)$ 是函数 $z=xy$ 的驻点，但不是极值点.

（2）点 $(0,0)$ 是函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的极值点，但不是驻点，因为在这点的两个偏导数均不存在.

下列定理给出了判定一个驻点是否为极值点的方法.

定理 7.5.2（极值的充分条件） 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0\,(x_0,y_0)$ 的某邻域内且有直到二阶的连续偏导数，$f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$．令 $f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，则 $f(x,y)$ 在点 $P_0\,(x_0,y_0)$ 处是否取得极值的条件如下：

（1）$AC-B^2>0$ 时具有极值，当 $A<0$ 时有极大值， 当 $A>0$ 时有极小值；

（2）$AC-B^2<0$ 时没有极值；

（3）$AC-B^2=0$ 时可能有极值，也可能没有极值.

注 椭圆抛物面 $z=x^2+y^2$ 和双曲抛物面 $z=x^2-y^2$，在原点 $O(0,0)$ 处，都满足 $f_x=f_y=0$，但是前者的 $AC-B^2>0$，有极小值；后者 $AC-B^2<0$，没有

这里，$AC-B^2$ 是行列式 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ 的值，称为极值的**判别式**.

这个定理的证明见阅读材料 7.5.1，这里介绍一下主要思路：

阅读材料 7.5.1 二元函数的泰勒公式以及二元函数极值判别定理的证明

令 $\Delta x=x-x_0,\Delta y=y-y_0$，$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$，当 $f_x(x_0,y_0)=0$，$f_y(x_0,y_0)=0$ 时，可将 $f(x,y)$ 表达为：

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(A\Delta x^2+2B\Delta x\Delta y+C\Delta y^2\right)+o\left(\rho^2\right),$$

$$\xlongequal{\text{令}t=\frac{\Delta x}{\Delta y}} f\left(x_0,y_0\right)+\frac{1}{2}\Delta y^2\left(At^2+2Bt+C\right)+o\left(\rho^2\right).$$

若 $AC-B^2>0$ 且 $A<0$，则函数 $At^2+2Bt+C$ 恒小于零，这导致在点 P_0 的充分小的邻域内 $f(x,y)<f(x_0,y_0)$，故 $f(x,y)$ 在点 P_0 有极大值．用相似的方法得到 $AC-B^2>0$ 且 $A>0$ 时取极小值以及 $AC-B^2<0$ 时没有极值的结论.

当 $AC-B^2=0$ 时的两种可能性可用函数 $z=x^3+y^3$ 和 $z=x^4+y^4$ 说明，它们在原点处 A,B,C 均为零，从而 $AC-B^2=0$，但在原点处 $z=x^3+y^3$ 不取极值而 $z=x^4+y^4$ 取极值.

求函数 $z=f(x,y)$ 极值的一般步骤：

第一步．解方程组$\begin{cases} f_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)=0, \end{cases}$求出实数解，得驻点；

第二步．对于每一个驻点$P_0\ (x_0,y_0)$，求出二阶偏导数的值A,B,C；

第三步．确定判别式$AC-B^2$的符号，再判定是否是极值．

例 7.5.1 求函数$z=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的极值．

解 由$\begin{cases} z_x=3x^2+6x-9=0, \\ z_y=-3y^2+6y=0 \end{cases}$解得$x=1$，$-3$；$y=0$，$2$，所以函数有驻点$P_1(1,0)$、$P_2\ (1,2)$、$P_3(-3,0)$、$P_4(-3,2)$．又因为$f_{xx}(x,y)=6(x+1)$，$f_{xy}(x,y)=0$，$f_{yy}(x,y)=-6(y-1)$，故$AC-B^2=-36(x+1)(y-1)$．

由$AC-B^2\big|_{(1,0)}=72>0$，$A\big|_{(1,0)}=12>0$知$P_1(1,0)$为极小值点，$f(1,0)=-5$为极小值；

由$AC-B^2\big|_{(-3,2)}=72>0$，$A\big|_{(-3,2)}=-12<0$知$P_4(-3,2)$为极大值点，$f(-3,2)=31$为极大值．

由$AC-B^2\big|_{(1,2)}<0$，$AC-B^2\big|_{(-3,0)}<0$知$P_2(1,2),P_3(-3,0)$都不是极值点．

例 7.5.2 设$f\left(x\right)$具有二阶连续导数，且$f\left(x\right)>0$，$f'\left(0\right)=0$，则下列哪个条件能使函数$z=f\left(x\right)\ln f\left(y\right)$在点$O\left(0,0\right)$处取得极小值（　　）

（A）$f\left(0\right)>1, f''\left(0\right)>0$　　　（B）$f\left(0\right)>1, f''\left(0\right)<0$

（C）$f\left(0\right)<1, f''\left(0\right)>0$　　　（D）$f\left(0\right)<1, f''\left(0\right)<0$

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'\left(x\right)\ln f\left(y\right)$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f\left(x\right)\dfrac{f'\left(y\right)}{f\left(y\right)}$，因为$\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(0,0)}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(0,0)}=0$，所以$\left(0,0\right)$是函数的驻点．

从$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''\left(x\right)\ln f\left(y\right)$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f'\left(x\right)\dfrac{f'\left(y\right)}{f\left(y\right)}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f\left(x\right)\dfrac{f''\left(y\right)f\left(y\right)-\left[f'\left(y\right)\right]^2}{f^2\left(y\right)}$得到

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\bigg|_{(0,0)}=f''\left(0\right)\ln f\left(0\right)，B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\bigg|_{(0,0)}=0，C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\bigg|_{(0,0)}=f''\left(0\right).$$

$AC-B^2=\left[f''\left(0\right)\right]^2\ln f\left(0\right)$．故当$f\left(0\right)>1$且$f''\left(0\right)\neq 0$时$AC-B^2>0$，函数有极值，而只有当$f''\left(0\right)>0$且$f\left(0\right)>1$时才有$A>0$，函数有极小值，所以（A）对．

二、多元函数的最大值和最小值

与一元函数相类似，我们可以利用函数的极值来求函数的最大值和最小值．

由于闭区域上的连续函数必有最大最小值，此类函数求最值的一般方法是：将函数在D内的所有

驻点处和偏导数不存在的函数值及在 D 的边界上的最大值和最小值相互比较，其中最大者即为最大值，最小者即为最小值.

思考题 7.5.1 对于区间 I 上的一元函数 $f(x)$，如果在 I 的内点处只取一个极值点，并且它是极大（小）值点，那么这个点也是 $f(x)$ 在 I 上取最大（最小）值

例 7.5.3 求二元函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$，x 轴和 y 轴所围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

解 如图 7.5.2，先讨论函数在 D 内部的驻点及其取值.

解方程组

$$\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0, \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$$

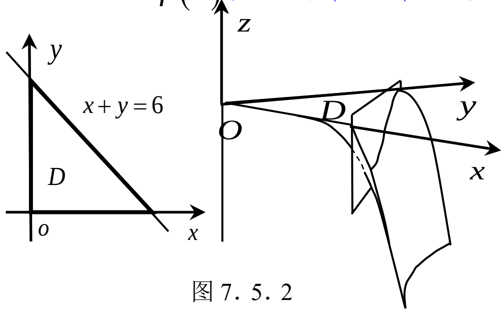


图 7. 5. 2

得到区域 D 内唯一驻点 $P(2,1)$，且 $f(2,1)=4$.

再讨论 $f(x,y)$ 在 D 的边界上的值.

在边界 $x=0$ 和 $y=0$ 上 $f(x,y)=0$；

在边界 $x+y=6\ (0<x<6)$ 上，$y=6-x$. 于是

$f(x,6-x)=2(x^3-6x^2)$,

由 $f_x'=2(3x^2-12x)=0$，得 $x=4$，此时 $f(4,2)=-64$.

比较驻点和边界值后可知：$f(2,1)=4$ 为最大值，$f(4,2)=-64$ 为最小值.

例 7.5.4 求函数 $z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2+1}$ 的最大值和最小值.

解 由

$$z_x=\frac{(x^2+y^2+1)-2x(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,\quad z_y=\frac{(x^2+y^2+1)-2y(x+y)}{(x^2+y^2+1)^2}=0,$$

得驻点 $P_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 和 $P_2\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，且

$$z(P_1)=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad z(P_2)=-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

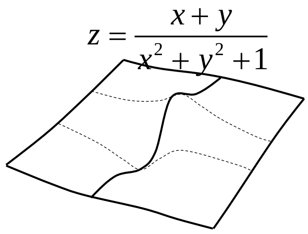


图 7.5.3

又因为函数的定义域为 $\mathbf{R}^2$（如图 7.5.3），而

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\frac{x+y}{x^2+y^2+1}=\lim_{\rho\to\infty}\frac{\rho(\cos\theta+\sin\theta)}{\rho^2+1}=0\ \text{（无穷小乘有界量）}.$$

注 在无界区域上讨论最大最小

因为极限 0 介于 $z(P_1)$ 与 $z(P_2)$ 之间，所以函数的最大值为 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ，最小值为 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

例 7.5.5 做一个体积为 $2\,\mathrm{m}^3$ 的有盖长方体水箱，问当长、宽、高各取怎样的尺寸时，才能使用料最省?

解 设水箱长，宽分别为 x,y，则高为 $\dfrac{2}{xy}$，水箱所用材料的面积为

$$A=2\left(xy+y\cdot\frac{2}{xy}+x\cdot\frac{2}{xy}\right)=2\left(xy+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}\right),$$

令 $\begin{cases} A_x=2\left(y-\dfrac{2}{x^2}\right)=0, \\ A_y=2\left(x-\dfrac{2}{y^2}\right)=0. \end{cases}$ 解得驻点 $P\left(\sqrt[3]{2},\sqrt[3]{2}\right)$. **根据实际问题**可知最小值在定义域内必**存在**， 因此断定此**唯一**驻点就是最小值点．即当长、宽均为 $\sqrt[3]{2}$ m，高为 $\dfrac{2}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}}=\sqrt[3]{2}$ m 时，水箱所用材料最省.

在通常遇到的实际问题中，如果根据问题的性质，知道函数 $f(x,y)$ 的最大值（最小值）一定在 D 的内部取得，而函数在 D 内只有一个驻点，那么可以肯定该驻点处的函数值就是函数 $f(x,y)$ 在 D 上的最大值（最小值）.

注 我们在解题中，如果遇到这种现实情境，只要写出关键词“根据实际问题……存在……唯一”，就

例 7.5.6*（最小二乘问题）在研究某种单分子化学反应速度时，得到下列数据：

i	1	2	3	4	5	6	7	8
t_i	3	6	9	12	15	18	21	24
y_i	57.6	41.9	31.0	22.7	16.6	12.2	8.9	6.9

其中 i 表示时间顺序，t_i 表示从实验开始算起的时间，y_i 表示时刻 t_i 反应物的量，已知这些数据 $\{(t_i,y_i)\}_{i=1}^{8}$ 大体分布在一条指数曲线 $y=f(t)=k\mathrm{e}^{mt}$ 上，如何确定系数 m,k，使得这些数据与曲线 $y=f(t)$ 上点的偏差最小？

解 我们先来讨论一个解题模式（称为最小二乘法）：求 a,b 两数，使 n 个点 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{n}$ 与直线 $y=ax+b$ 的点的偏差的平方和最小．为此，讨论二元函数

$$M(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2.$$

注 这个最小的平方和称为**最小二乘方**，这个表达式 $y=f(t)$ 称为**经验公式**，当 $f(t)$ 为线性函数时，称 y 与 t 具有**线性关系**．这种根据偏差的平方和为最小的条件来选择线性关系中的常数 a,b 的方法叫做最小二乘法．

利用极值的必要条件$\begin{cases} M_a(a,b)=0, \\ M_b(a,b)=0 \end{cases}$可知，驻点$(a,b)$满足

$$\begin{cases} M_a(a,b)=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)x_i=0 \\ M_b(a,b)=-2\sum_{i=1}^{n}(y_i-ax_i-b)=0 \end{cases}，\text{即}\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}y_ix_i \\ a\sum_{i=1}^{n}x_i+nb=\sum_{i=1}^{n}y_i \end{cases}.$$

解得：

$$a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\sum_{i=1}^{n}y_i\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2},\quad b=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\cdot\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}. \qquad (7.5.2)$$

现在，将本题的经验公式两边取对数，就成为线性关系$\ln y=mt+(\ln k)$，计算$\ln y_i\ (i=1,2,\cdots,8)$，由公式（7.5.2）可以求得$m=-0.1036$，$\ln k=4.3665$，从而$k=78.78$．因此所求的经验公式为

$$y=78.78\mathrm{e}^{-0.1036t}.$$

练习 7.5.1

1.求函数$f(x,y)=4(x-y)-x^2-y^2$的极值.

2.求函数$f(x,y)=x^2+2y^2$在闭域$x^2+y^2\le 1$内的最大值和最小值.

3.试对上题的结论作出几何解释.

7.5.2 条件极值 拉格朗日乘数法

如何在平面曲线Γ：$\varphi(x,y)=0$上求一点$P_0(x_0,y_0)$，使它到原点的距离最小？

在这个问题中，距离函数$z=f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$称为**目标函数**，方程$\varphi(x,y)=0$称为**约束条件**．由于f的定义域不再是一个平面区域，故不能用无条件极值的方法去计算．**条件极值**问题就是这种求目标函数在自变量有约束条件时的极值问题.

注 函数$W=\sqrt{x^2+y^2}$的在点$O(0,0)$取最小值零，但点$O(0,0)$ Γ

条件极值问题的一般形式是：

求目标函数$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$在约束条件组

$$\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0,\quad k=1,2,\cdots,m(m<n)\text{的限制下的极值}.$$

作为隐函数的存在定理的应用．我们来介绍求解条件极值的**拉格朗日数乘法**.

1. 目标函数 $z=f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的条件极值问题

设 C 是曲线 $\varphi(x,y)=0$，点 $P_0(x_0,y_0)\in C$ 且 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0\left(x_0,y_0\right)$ 处取极值（条件极值）；又设 φ 在点 P_0 的某邻域内满足隐函数存在定理的条件，包括：

$$\varphi(x_0,y_0)=0，\ \varphi_x(x,y) \text{ 和 } \varphi_y(x,y) \text{ 存在且连续，} \varphi_y(x_0,y_0)\neq 0，$$

于是方程 $\varphi(x,y)=0$ 在点 x_0 的某邻域内唯一确定一个具有连续导函数的隐函数 $y=y(x)$ 且 $y'(x)=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$. 显然，记 $h(x)=f(x,y(x))$，则 $h(x)$ 在点 x_0 处取极值，因而由一元函数取极值的必要条件知：

$$h'(x_0)=0，\text{ 即 } f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)y'(x_0)=0，$$

亦即

$$f_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)\varphi_x(x_0,y_0)，$$

记 $\dfrac{f_y(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)}=-\lambda_0$，则 $f_y(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y(x_0,y_0)=0$，

从而

$$f_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x(x_0,y_0)=0；$$

注 由 $f_x(x_0,y_0)\varphi_y(x_0,y_0)$
$=f_y(x_0,y_0)\varphi_x(x_0,y_0)$ 可知
$\left(f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)\right)$

总之，存在常数 λ_0 使得

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x(x_0,y_0)=0, \\ f_y(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_y(x_0,y_0)=0, \\ \varphi(x_0,y_0)=0. \end{cases},$$

因此，x_0，y_0，λ_0 是下列方程的解：

$$\begin{cases} f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0. \end{cases}. \qquad (7.5.2)$$

为便于记忆，构作函数 $L=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$（称为**拉格朗日函数**），则上述方程组成为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial x}=0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial y}=0, \\
\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=0.
\end{cases}
\tag{7.5.3}
$$

注意这是函数 $L=L(x,y,\lambda)$ 取非条件极值的必要条件，其中 λ 称为**拉格朗日乘数**.

综上所述，用拉格朗日乘数法计算函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值点的基本步骤是：

（1）先构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$，其中 λ 为某一常数；

（2）由方程组 $\begin{cases} L_x \equiv f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0, \\ L_y \equiv f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0, \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$ 解出根 x_0,y_0,λ_0，其中 (x_0,y_0) 就是可能的极值点的坐标.

（3）将 (x_0,y_0) 代回 $z=f(x,y)$ 中求值并检验.

2.目标函数 $w=f(x,y,z)$ 在约束条件 C：$\varphi(x,y,z)=0$，$\psi(x,y,z)=0$ 下的条件极值问题

类似于前面的讨论（见阅读材料 7.5.2），设 φ,ψ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ P_0 的某邻域内满足隐函数存在定理的条件，包括：

阅读材料 7.5.2 双重条件下的拉格朗日乘数法

（1）$\varphi(x_0,y_0,z_0)=0$，$\psi(x_0,y_0,z_0)=0$；

（2）φ,ψ 连续且有连续偏导数；

（3）φ,ψ 对变量 x,y,z 在点 P_0 的至少一个雅可比式不为零；

（4）$w=f(x,y,z)$ 在点 P_0 取得条件极值.

则可以构作拉格朗日函数

$$L=f(x,y,z)+\lambda\varphi(x,y,z)+\mu\psi(x,y,z),$$

使得 x_0，y_0，z_0 是下列方程组的解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}\equiv f_x(x,y,z)+\lambda\varphi_x(x,y,z)+\mu\psi_x(x,y,z)=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}\equiv f_y(x,y,z)+\lambda\varphi_y(x,y,z)+\mu\psi_y(x,y,z)=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}\equiv f_z(x,y,z)+\lambda\varphi_z(x,y,z)+\mu\psi_z(x,y,z)=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}\equiv \varphi(x,y,z)=0,\\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu}\equiv \psi(x,y,z)=0.\end{cases}\tag{7.5.4}$$

3.条件极值的杂例

作为比较，我们来用拉格朗日乘数法计算例 7.5.5. 设长方体水箱的长、宽和高分别为 x,y,z，为求面积目标函数 $A=2(xy+yz+zx)$ 在条件 $xyz=2$ 下的最小值，作拉格朗日函数

$L(x,y,\lambda)=2(xy+yz+zx)+\lambda(xyz-2)$，得到方程组

$$\begin{cases}L_x=2z+2y+\lambda yz=0,\\ L_y=2x+2z+\lambda xy=0,\\ L_z=2y+2x+\lambda yz=0,\\ xyz=2.\end{cases}$$

利用方程组关于字母的对称性立即可以得到 $x=y=z=\sqrt[3]{2}$.

例 7.5.7 已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

解 因为 $f(x,y)$ 沿着梯度方向的方向导数最大，且最大值为梯度的模.而 $\mathbf{grad}f(x,y)=(1+y,1+x)$，故 $|\mathbf{grad}f(x,y)|=\sqrt{(1+x)^2+(1+y)^2}$.令 $h=(1+x)^2+(1+y)^2$，构造拉格朗日函数

$$L(x,y,\lambda)=(1+x)^2+(1+y)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)\text{，}$$

由 $\begin{cases}L_x=2(1+x)+\lambda(2x+y)=0,\\ L_y=2(1+y)+\lambda(2y+x)=0,\\ x^2+y^2+xy=3,\end{cases}$ 得到 4 个驻点 $P_1(1,1)$， $P_2(-1,-1)$， $P_3(2,-1)$， $P_4(-1,2)$，

因 $h(P_1)=8$， $h(P_2)=0$， $h(P_3)=9$， $h(P_4)=9$.故在点 P_1,P_2 处 $f(x,y)$ 有最大方向导数 3.

例 7.5.8 抛物面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $x+y+z=3$ 相截为一椭圆，求此椭圆到原点的最短距离和最长距离.

解：曲线上的点到原点的距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ，故问题可转化为：求 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在

约束条件 $x^2+y^2-2z=0$ 和 $x+y+z-3=0$ 下的最小值和最大值.

令 $L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-2z)+\mu(x+y+z-3)$． 先解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+2x\lambda+\mu=0, & (1^*)\\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+2y\lambda+\mu=0, & (2^*)\\ \dfrac{\partial L}{\partial z}=2z-2\lambda+\mu=0, & (3^*)\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2-2z=0, & (4^*)\\ \dfrac{\partial L}{\partial \mu}=x+y+z-3=0. & (5^*)\end{cases}$$

由前二式得 $2(1+\lambda)(y-x)=0$，但 $\lambda\neq-1$，否则由（1^*）得 $\mu=0$，再由（3^*）知 $z=-1$，这与（4^*）矛盾，从而 $y=x$.

从（4^*）（5^*）得 $x_1=1,\quad x_2=-3$，故进一步得到驻点 $P_1(1,1,1)$ 和 $P_2(-3,-3,9)$.

由于椭圆上的点到原点距离的最大最小值必定存在，所以

$$f_{\max}=f(-3,-3,9)=99，\quad f_{\min}=f(1,1,1)=3，$$

从而

最小距离 $r_{\min}=\sqrt{f_{\min}}=\sqrt{3}$，最大距离 $r_{\max}=\sqrt{f_{\max}}=3\sqrt{11}$.

思考题 7.5.2 "求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在条件 $z^2=xy-9$ 下的极值"的如下解法错在哪里：将 $z^2=xy-9$ 代入 $u=x^2+y^2+z^2$ 得 $u=x^2+y^2+xy-9$，由 $\begin{cases}u_x=2x+y=0,\\ u_y=2y+x=0,\end{cases}$ 得

例 7.5.9 设正数 x,y,z 之和为常数 20，要使 $u=x^2yz$ 最大，求这三个数.

解法一 令 $L(x,y,z,\lambda)=x^2yz+\lambda(x+y+z-20)$，由

$$\begin{cases}L_x\equiv 2xyz+\lambda=0,\\ L_y\equiv x^2z+\lambda=0,\\ L_z\equiv x^2y+\lambda=0,\\ x+y+z=20\end{cases}$$

解得 $x=2y=2z$，从而 $x=10,y=z=5$． 由实际问题知 $u=x^2yz$ 在 $x>0,y>0,z>0$ 及约束条件 $x+y+z=20$ 下确实有最大值，所以 $u_{\max}=x^2yz\big|_{(10,5,5)}=2500$.

解法二 由 $x+y+z=20$ 得 $u=x^2y(20-x-y)$，成为二元函数的无条件极值问题，解方程组

$$\begin{cases} u_x = 40xy - 3x^2y - 2xy^2 = 0, \\ u_y = 20x^2 - x^3 - 2x^2y = 0, \end{cases}$$

得住驻点$(x，y) = (10,5)$，由于驻点的唯一性，当$x = 10, y=5$时u取最大值，此时$z = 5$.

解法三 由于$x, y, z > 0$，

$$u = x^2yz = 4\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot y\cdot z，$$

而$\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+y+z = 20$，根据平均值不等式，当$\frac{x}{2} = y = z = \frac{20}{4} = 5$时，即$x = 10, y = z = 5$时$u$取最大值.

4^*.二元函数取条件极值的一个充分条件

对于目标函数$z = f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y) = 0$下的条件极值问题，从拉格朗日函数$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$中解出**拉格朗日稳定点**$(x_0, y_0, \lambda_0)$，从而得到**$L$的驻点**$P_0(x_0, y_0)$，所求得的驻点$P_0(x_0, y_0)$只是$z = f(x,y)$ “可能的极值点”，是否确实为极值点？是极大值点还是极小值点？这些问题一般都是根据具体问题进行具体分析的．这里给出一个相对简易的充分条件，供读者参考．

设(x_0, y_0, λ_0)是（7.5.2）式的根，作函数

$$F(x,y) = L(x,y,\lambda_0) = f(x,y) + \lambda_0\varphi(x,y) \qquad （7.5.5）$$

则有

命题 7.5.1 若$F(x,y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处取得极小（大）值，则$z = f(x,y)$在条件$\varphi(x,y) = 0$下也在P_0处取极小（大）值.

证 事实上，若在$P_0(x_0, y_0)$的某去心邻域上$F(x,y) > F\left(x_0, y_0\right)$，则

$f(x,y) + \lambda_0\varphi(x,y) > f(x_0, y_0) + \lambda_0\varphi(x,y)$，而在条件$\varphi(x,y) = 0$下也有$\varphi(x_0, y_0) = 0$，因此

$f(x,y) > f(x_0, y_0)$，故$z = f(x,y)$在$P_0(x_0, y_0)$处的曲线$\varphi(x,y) = 0$上取极小值．证毕.

定理 7.5.3（条件极值的充分条件） 设函数$z = f(x,y)$和函数$\varphi(x,y)$在点$P_0\,(x_0, y_0)$的某邻域内且有直到二阶的连续偏导数，$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$，$(x_0, y_0, \lambda_0)$是方程组$L_x = 0, L_y = 0, \varphi(x,y) = 0$的根，记$F(x,y) = f(x,y) + \lambda_0\varphi(x,y)$．并 $F_{xx}(x_0, y_0) = A$，$F_{xy}(x_0, y_0) = B$，$F_{yy}(x_0, y_0) = C$，若$AC - B^2 > 0$，则：

（1）若$A > 0$，则$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y) = 0$下在点P_0处取极小值；

（2）若$A < 0$，则$f(x,y)$在约束条件$\varphi(x,y) = 0$下在点P_0处取极大值.

证 注意到

$$F_x(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)+\lambda_0\varphi_x(x_0,y_0)=L_x(x_0,y_0)=0\text{，同理，}F_y(x_0,y_0)=0\text{，}$$

又因为 $AC-B^2>0$，则由二元函数极值的充分条件 7.5.2 知，$A>0$（<0）时 $F(x,y)$ 在点 P_0 处取极小（大）值，再由命题 7.5.1 知，$f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下也在 P_0 处取极小（大）值．证毕．

练习 7.5.2

1.为求平面 $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{5}=1$ 和柱面 $x^2+y^2=1$ 交线上到原点距离最短的点，应该如何建立拉格朗日函数？

2.求函数 $z=xy$ 在 $x^2+y^2=1$ 下的条件极值．

习题 7.5

1.求下列函数的极值：

（**1**）$z=x^2-xy+y^2-2x+y$；（**2**）$f(x,y)=\mathrm{e}^{2x}(x+y^2+2y)$；（**3**）$f(x,y)=x\mathrm{e}^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$．

2．若函数 $f(x,y)=2x^2+ax+xy^2+2y$ 在点 $(1,-1)$ 取得极值，求常数 a 的值．

3.函数 $z=\left(1+\mathrm{e}^y\right)\cos x-y\mathrm{e}^y$ 有多少个极大值和多少个极小值？

4.求 a,b 的值，使积分 $I=\int_0^1(a+bx-x^2)^2\mathrm{d}x$ 的值最小．

5．分解已知正数 a 为 n 个正数之和，使它们的平方和最小．

6.从斜边长为 l 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形．

7.要做一个体积等于定数 k 的长方形无盖水池，应如何选择水池的尺寸，方可使它的表面积最小．

8.将周长为 $2p$ 的矩形绕它的一边旋转而构成一个圆柱体，问矩形的边长各为多少时，才可使圆柱体的体积最大？

****

9.已知函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续,且 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^2}=1$，则（　　）

(A)点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点　　(B)点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点

(C)点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点　　(D)根据所给条件无法判断点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

10.求解下列距离问题：

(1) 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z-2=0$ 之间的最短距离；

(2)抛物面 $z=x^2+y^2$ 被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆，求这椭圆上的点到原点的距离的最大值与最小值．

11．在平面 $z=4x+2y+10$ 与曲面 $x^2+y^2=125$ 的交线上，求竖坐标取最大值和最小值的点．

12．设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2},\cos\dfrac{y}{2}\right)=(1+\cos x)(1-\cos y)$，求 $f(x,y)$ 在单位圆内的最大值和最小值．

13.求函数 $z=x^2-2y^2-3$ 在闭区域 $x^2+y^2\le2$ 上的最大最小值．

14．求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 的一张切平面，使其在三个坐标轴上的截距之积为最大，并写出切平面方程．

15*. 已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$， $f'_x(x,0)=(x+1)\mathrm{e}^x$， $f(0,y)=y^2+2y$，求 $f(x,y)$ 的极值.

16*.用微分学方法证明：

（1）对任意正数 a,b,c，有 $abc^3\le\dfrac{27}{5^5}(a+b+c)^5$；

(2) 求 $x>0$，$y>0$，$z>0$ 时，函数 $\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的最大值，并证明对任意实数 a,b,c，

不等式 $ab^2c^3\le108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$ 成立.

7.6 本章回顾

多元函数的微分学包括极限与连续、偏导数与全微分、几何应用和极值问题的应用等部分. 由于多元函数的自变量、中间变量和因变量都可能不止一个，要集中解决链法则、隐函数求偏导和全微分方面的基本问题.

阅读材料 7.6.1 第七章知识要点

例 7.6.1 设 $u=f(x,y,z)=x^2y^2z^2$，其中 $z=z(x,y)$ 由 $x^3+y^2+z=3xy^2z$ 所确定，求 $\mathrm{d}u|_{(1,1,1)}$.

解 对函数 $u=f(x,y,z)$ 求全微分（并及时地把 $P(1,1,1)$ 代入），得到：

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}z=2xy^2z^2\mathrm{d}x+2x^2yz^2\mathrm{d}y+2x^2y^2z\mathrm{d}z\,,$$

在点 $P(1,1,1)$ 处 $\mathrm{d}u|_{(1,1,1)}=2\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+2\mathrm{d}z$，而从第二个方程知

$$3x^2\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=3y^2z\mathrm{d}x+6xyz\mathrm{d}y+3xy^2\mathrm{d}z\,,$$

在点 $P(1,1,1)$ 处 $3\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=3\mathrm{d}x+6\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z$，故 $\mathrm{d}z=-2\mathrm{d}y$，最终得到

$$\mathrm{d}u|_{(1,1,1)}=2\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y\,.$$

注　由于一阶微分形式的不变性，在微分时不必区分变量是自变量还是因变量，所以用微分法求微分就显得十分便捷. 如果通过偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 计算 $\mathrm{d}u$，可能会与 $u=x^2y^2z^2$ 的部分偏导数发生混乱，所以微分法是既快捷又“安全”的方法.

例 7.6.2 设函数 $u(x,y)$ 存在连续二阶偏导数且满足 $u_{xx}-u_{yy}=0$ 与 $u(x,2x)=x$，$u_x(x,2x)=x^2$，求 $u_{xx}(x,2x)$，$u_{xy}(x,2x)$.

解：等式 $u(x,2x)=x$ 两边求导得 $u_x(x,2x)+2u_y(x,2x)=1$，再求导得

$$u_{xx}(x,2x)+4u_{xy}(x,2x)+4u_{yy}(x,2x)=0\,,$$

由于 $u_{xx}-u_{yy}=0$，有

$$5u_{xx}(x,2x)+4u_{xy}(x,2x)=0\,.$$

再由 $u_x(x,2x)=x^2$ 求导得

$$u_{xx}(x,2x)+2u_{xy}(x,2x)=2x\,.$$

于是解出

$$u_{xx}(x,2x)=-\frac{4}{3}x\,,\quad u_{xy}(x,2x)=\frac{5}{3}x\,.$$

注　本题的关键是掌握 $u_x(x,2x)$ 与 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x,2x)$ 的差异. 还要清楚：$u(x,2x)$ 是 $2x$ 代换了 $u(x,y)$ 中的 y；$u_x(x,2x)$ 是 $2x$ 代了 $u_x(x,y)$ 中的 y，$u_y(x,2x)$ 是 $2x$ 代了 $u_y(x,y)$ 中的 y. 而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x,2x)=u_x(x,2x)+u_y(x,2x)\cdot(2x)'$. 在此基础上同样去理解 $u_{xx}(x,2x),u_{xy}(x,2x)$.

例 7.6.3 证明：锥面 $z=1+\sqrt{x^2+y^2}$ 上任一点的切平面（如果存在）都经过一个定点，并与 z 轴的交角为定值.

证 设 $P(x_0,y_0,z_0)$ 是锥面上任一点，则当 $(x_0,y_0)\neq(0,0)$ 时，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}，$$

过 P 点的切平面为

$$z-z_0=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(x-x_0)+\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}(y-y_0)，$$

化简成为

$$z-1=\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}x+\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}y，$$

令 $x=0,y=0$ 得 $z=1$，所以平面过点 $(0,0,1)$，此为锥面的顶点．

又因为

$$\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

故切平面与 z 轴的交角为定值 $\frac{\pi}{4}$.证毕.

注 几何应用问题中，应当尽量利用曲面的图形判断出几何性质，将证明转化为“验证”．本题中可以根据空间想象，得知定点 $(0,0,1)$ 和定角 $\frac{\pi}{4}$．

例 7.6.4 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 确定的函数，求 $z=z(x,y)$ 的极值点与极值．

解法一（绝对极值法）由隐函数的求导法，在方程的两边分别对变量 x,y 求偏导得：

$$\begin{cases} 2x-6y-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2z\dfrac{\partial z}{\partial x}=0, \\ -6x+20y-2z-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial z}{\partial y}=0. \end{cases}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=0$，上述方程组就成为 $\begin{cases} 2x-6y=0, \\ -6x+20y-2z=0. \end{cases}$ 解得 $x=3y,z=y$ 代入原方程解得曲面上的点 $M_1(9,3,3)$ 和 $M_2(-9,-3,-3)$.又因为

$$\begin{cases} 2-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \\ 20-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \\ -6-2\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}-2z\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \end{cases}$$

在点 M_1, M_2 处，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{\pm 1}{6}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{10}{y+z}=\dfrac{\pm 10}{6}$，$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\dfrac{-3}{y+z}=\dfrac{\mp 1}{2}$.

于是

$$AC-B^2=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2=\frac{10}{36}-\frac{1}{4}=\frac{1}{36}>0,$$

所以，

在 $(x,y)=(9,3)$ 时 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{1}{6}>0$，函数 $z=z(x,y)$ 取极小值 3；

在 $(x,y)=(-9,-3)$ 时 $A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{1}{6}<0$，函数 $z=z(x,y)$ 取极大值 -3.

解法二（条件极值法）作拉格朗日函数

$L=z+\lambda(x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18)$，则由

$$\begin{cases} F_x \equiv \lambda(2x-6y)=0, \\ F_y \equiv \lambda(-6x+20y-2z)=0, \\ F_z \equiv 1+\lambda(-2y-2z)=0, \\ F_\lambda \equiv x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0. \end{cases}$$

解得 $x=3y, z=y$ 和驻点 $M_1(9,3,3)$，$M_2(-9,-3,-3)$.

由于 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，就有

$$(x-3y)^2+(y-z)^2+18=2z^2,$$

即

$$z^2=9+\frac{1}{2}(x-3y)^2+\frac{1}{2}(y-z)^2\geq 9,$$

所以函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(9,3)$ 的某去心邻域内 $z>3$；而在点 $(-9,-3)$ 的某邻域内 $z<-3$. 从而函数 $z=z(x,y)$ 在点 $(9,3)$ 处取极小值 3，在点 $(-9,-3)$ 处取极大值 -3.

注 本题的变量代换过程为：函数 $z=f(x,y)$ 看作 $z=F(u,v)$ 与 $\begin{cases} u=x-2y \\ v=x+ay \end{cases}$ 复合运算而得到，现在要从关于 $z=f(x,y)$ 的方程推出关于 $z=F(u,v)$ 的方程. 这种含有偏导数的关系式称为偏微分方程.

注 拉格朗日乘数法只是给出极值点的可能性，要根据具体背景才能确定下来. 如果只有唯一驻点就容易下结论，但像本题那样有两个驻点，往往非常困难. 在本题中，确定 3 和 -3 是极小还是极大值的主要方法可以来自对本题曲面是双叶双曲面的判断，再借助于重要关系式 $x=3y, z=y$ 得以配方和证实.

例 7.6.5 设变换 $\begin{cases} u=x-2y, \\ v=x+ay \end{cases}$ 可把方程 $6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ 化简为 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}=0$ (其中 z 有二阶连续偏导数)，求常数 a.

解 由变换得 $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot 1+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot 1, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\cdot(-2)+\dfrac{\partial z}{\partial v}\cdot a, \end{cases}$ 再偏导得到：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\cdot(-2)+\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\cdot a+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\cdot(-2)+\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\cdot a, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2a\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}-2a\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \end{cases}$$

代入$6\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，并化简得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6-a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

上式化简为$\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=0$，当且仅当$10+5a\neq 0,\ \ 6+a-a^2=0$，

从而$a=3$.

第 7 章复习题

1. 设$f_x'(0,0)=1, f_y'(0,0)=2$，则（　　）

（A）　$f(x,y)$在点$(0,0)$连续

（B）　$\mathrm{d}f(x,y)|_{(0,0)}=\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$

（C）　$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(0,0)}=\cos\alpha+2\cos\beta$，其中$\cos\alpha,\cos\beta$为任一方向$\boldsymbol{l}$的方向余弦

（D）　$f(x,y)$在点$(0,0)$沿x负方向的方向导数为-1

2.设$f(x,y)$可微，又$f(0,0)=0, f_x'(0,0)=a, f_y'(0,0)=b$，且$g(t)=f[t,f(t,t^2)]$，则$g'(0)=$________.

3.设平面$3x+2y-\lambda z=1$与曲面$x^2+y^2+z^2-xz=1$在点$\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$处的切平面垂直，则$\lambda=$_________.

4. 求球面$x^2+y^2+z^2=9$与平面$x+z=1$的交线在 xOy 坐标平面上的投影曲线在 P(2, –2, 0)处的切线方程.

5. 设常数$a>0$，讨论函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a+x^2y^2}-1}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$在（0，0）点的连续性.

6. 设$F(x,y,x-z,y^2-w)=0$，其中 F 具有二阶连续偏导数，且$F_4'\neq 0$，求$\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

7. 设曲面 $z=f(x,y)$ 二次可微，且 $\dfrac{\partial f}{\partial y}\neq 0$，证明：对任给的常数 C， $f(x,y)=C$ 为 xOy 平面上一条直线的充要条件是 $f_{xx}\left(f_y\right)^2-2f_x f_y f_{xy}+f_{yy}\left(f_x\right)^2=0$.

8. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续导数，$g(x,y)=f(\mathrm{e}^{xy},x^2+y^2)$，且 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)+x+y-1}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}=0$，证明 $g(x,y)$ 在 $(0,0)$ 取得极值，判断此极值是极大值还是极小值，并求出其极值.

9. 求中心在坐标原点的椭圆 $x^2-4xy+5y^2=1$ 的长半轴与短半轴.

10. 利用新的自变量 $\xi=x-at,\eta=x+at$，解方程 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$.