2018苏州大学 高等数学一（上）期末试卷　　共 2 页

考试形式：闭卷

院系＿＿＿＿＿ 年级＿＿＿＿＿ 专业＿＿＿＿＿

学号＿＿＿＿＿ 姓名＿＿＿＿＿ 成绩＿＿＿＿＿

特别提醒：请将答案填写在答题纸上，若填写在试卷纸上无效.

一. 选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 若当 $x \to 0$ 时，$x - \arctan x$ 与 ax^n 是等价无穷小，则 $a =$ （　　）

A. 3　　B. $\frac{1}{3}$　　C. -3　　D. $-\frac{1}{3}$

2. 下列函数在 $[-1,1]$ 上满足罗尔定理条件的是（　　）

A. $f(x)=|x|$　　B. $f(x)=x^3$

C. $f(x)=e^x+e^{-x}$　　D. $f(x)=\begin{cases}1,-1\le x\le 0\\ 0,0<x\le 1\end{cases}$

3. 如果 $f(x)=e^{-x}$，则 $\int \frac{f'(\ln x)}{x}dx =$ （　　）

A. $-\frac{1}{x}+C$　　B. $\frac{1}{x}+C$　　C. $-\ln x + C$　　D. $\ln x + C$

4. 曲线 $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ 渐近线的条数是(　　)

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

5. 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[-a,a]$ 上均具有二阶连续导数，且 $f(x)$ 为奇函数，$g(x)$ 为偶函数，则

$\int_{-a}^{a}[f''(x)+g''(x)]dx =$ (　　)

A. $f'(a)+g'(a)$　　B. $f'(a)-g'(a)$　　C. $2f'(a)$　　D. $2g'(a)$

二. 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 要使函数 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ 在点 $x=2$ 连续，则应补充定义 $f(2)=$__________ .

2. 曲线 $y=\mathrm{e}^{-x^2}$ 在区间__________上是凸的.

3. 设函数 $y=x(x^3+2x+1)^2+\mathrm{e}^{2x}$, 则 $y^{(7)}(0)=$__________.

4. 曲线 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=t^3 \end{cases}$ 在 $t=2$ 点处的切线方程是__________.

5. 定积分 $\int_{-1}^{1}(x\cos x+\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x=$__________.

三. 解下列各题：（每小题 10 分，共 40 分）

1. 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x^2)}-\dfrac{1}{x^2}\right]$..　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x t\mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

2. 求曲线 $y=\int_0^x \tan t\,\mathrm{d}t\left(0\le x\le \dfrac{\pi}{4}\right)$ 的弧长.

3. 设 $f(x)$ 满足 $\int \mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C$, 求 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

4. 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+c}{x-c}\right)^x=\int_{-\infty}^{c} x\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$, 求常数 c.

四. 解下列各题：（每小题 10 分，共 30 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$, 且 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b \dfrac{1}{f(t)}\mathrm{d}t$, 求证：

（1）$\forall x\in[a,b], F'(x)\ge 2$;　　（2）$F(x)$ 在 (a,b) 内恰有一个零点.

2. 设直线 $y=ax(0<a<1)$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1, 它们与直线 $x=1$ 围成图形的面积为 S_2.

（1）确定 a 的值，使 $S=S_1+S_2$ 取得最小值，并求此最小值；

（2）求该平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积.

3. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二次可微，且 $f(0)=f(1)=0$, 证明：存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$.

参考答案

一、选择

1. B　2. C　3. B　4. C　5. D

二、填空

1. $\frac{1}{4}$　2. $(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$　3. $7!+2^7=5168$　4. $y=3x-7$　5. $\frac{\pi}{2}$

三、解答题

1. （1）$\frac{1}{2}$　（2）2

2. $s=\int_0^{\pi/4}\sqrt{1+\tan^2 x}dx=\ln(\sqrt{2}+1)$

3. $f(x)=-\frac{1}{1+e^x}$，$\int f(x)dx=-x+\ln(1+e^x)+C$

4. $e^{2c}=(\frac{1}{2}c-\frac{1}{4})e^{2c}\Rightarrow c=\frac{5}{2}$

四、解答题

1. (1) $F'(x)=[\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt]'=f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2$

(2) $F(a)=\int_b^a\frac{1}{f(t)}dt=-\int_a^b\frac{1}{f(t)}dt<0$，$F(b)=\int_a^b f(t)dt>0$以及$F'(x)>0$有

$F(x)$在(a,b)有且只有一个零点.

2. （1）$S_1=\frac{a^3}{6},S_2=\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+\frac{a^3}{6}$，当$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$S_{\min}=\frac{2-\sqrt{2}}{6}$.

（2）$V_1=\int_0^a\pi(a^2x^2-x^4)dx=\frac{2\pi}{15}a^5$，$V_2=\int_a^1\pi(x^4-a^2x^2)dx=\frac{2\pi}{15}a^5+\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{3}a^2$.

3. 存在$\eta\in(0,1)$使得$f'(\eta)=0$；$F(x)=xf'(x)$，且$F(0)=F(\eta)=0$；存在$\xi\in(0,\eta)$使得$F'(\xi)=0$.