序号

一. 选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 求下列极限，能直接使用洛必达法则的是(　　)B

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$　　C. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

2. 设函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$, 下列命题正确的是 (　　)D

A. $f(0)$ 是极大值，$f(\dfrac{\pi}{2})$ 也是极大值

B. $f(0)$ 是极小值，$f(\dfrac{\pi}{2})$ 也是极小值

C. $f(0)$ 是极大值，$f(\dfrac{\pi}{2})$ 是极小值

D. $f(0)$ 是极小值，$f(\dfrac{\pi}{2})$ 是极大值

3. 下列等式正确的是(　　)D

A. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$　　B. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C$

C. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$　　D. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$

4. 函数 $f(x)=x-\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$ 在下列区间上<u>不满足</u>拉格朗日中值定理条件的是(　　)B

A. $[0,1]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[0,\dfrac{27}{8}]$　　D. $[-1,0]$

5. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x,$

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x,$ 则有(　　)A

A. $P<M<N$　　B. $N<P<M$　　C. $M<P<N$　　D. $N<M<P$

二． 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1．函数 $f(x)=\ln(4-x^2)$ 在区间__________ 上是连续的．$(-2,2)$

2. 已知 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$,则当 n 为大于 2 的正整数时，

$f^{(n)}(x)=$__________．$n![f(x)]^{n+1}$

3．设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 所确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$__________. $2e^2$

4. 设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$,则 $\int\dfrac{1}{f(x)}dx=$__________．$-\dfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}+C$

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t dt$,则常数 $a=$__________.2

三．解下列各题：（每小题 10 分，共 40 分）

1．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^2\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x-1}{3x^2}$ …………..3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{3x^2}=\dfrac{1}{3}.$ …………..2 分

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{\tan^5 x}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{x^4}$ ………….3 分

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\ln(1+x^2)}{4x^3}=\dfrac{1}{2}.$ …………..2 分

2. 求摆线$\begin{cases} x=1-\cos t, \\ y=t-\sin t \end{cases}$一拱$(0\le t\le 2\pi)$的弧长.

解：$ds=\sqrt{\sin^2 t+(1-\cos t)^2}dt=2\sin\frac{t}{2}dt,$ …………..5 分

$s=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt=8.$ …………..5 分

3. 设函数 $f(x)=x-\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx,$ 求 $f(x).$

解：令 $A=\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx,\ f(x)\cos x=x\cos x-A\cos x,$ …………..4 分

$A=\int_0^{\pi}x\cos x dx-A\int_0^{\pi}\cos x dx=-2,\therefore\ f(x)=x+2.$ …………..6 分

4. 求函数 $f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+2\sqrt{2}$ 的单调区间、最值及零点的个数.

解：$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+2\sqrt{2}$ 则 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{ex}$

令 $f'(x)=0\Rightarrow$ 驻点 $x=e$ …… 4 分

在$(0,e)$内，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加. 在$(e,+\infty)$内 $f'(x)<0$，$f(x)$单调减少

$f(e)=2\sqrt{2}>0$为函数的最大值，没有最小值, …… 4 分

又 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln x-\frac{x}{e})=-\infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-\frac{x}{e})=-\infty$

$\therefore\ f(x)$在$(0,e)$内有且仅有一个零点，在$(e,+\infty)$内有且仅有一个零点, 所以函数恰有两个零点. ……2 分

四．解下列各题：（共 30 分）

1. （12 分）已知曲线 $y=e^x, y=\sin x, x=0, x=1$ 围成平面图形，

（1）求该平面图形的面积 S;

（2）求该平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V_x, V_y.

解：$S=\int_0^1(e^x-\sin x)dx=e+\cos 1-2,$ ……..4 分

$V_x=\pi\int_0^1(e^{2x}-\sin^2 x)dx=\pi[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x]_0^1=\pi[\frac{1}{2}(e^2+\frac{1}{2}\sin 2)-1].$

……..4 分

$$V_y = 2\pi\int_0^1 x(e^x - \sin x)dx = 2\pi[1-\sin 1+\cos 1].$$ ……..4 分

2. （12 分）设 $f(x)$ 在 $[-a,a](a>0)$ 上连续，

（1）证明：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]dx;$

（2）利用上述结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx.$

证明：（1）$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(x)dx$$ ……..4 分

（2）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x}{1+e^{x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ ……..4 分

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}.$$ ……..4 分

3. （6 分）已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数，试证明：$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| + \int_0^1 |f'(x)|dx \ge \max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\}.$

证明：由连续函数的最大值定理，存在 $x_0 \in [0,1], s.t. f(x_0) = \max\limits_{0\le x\le 1}\{f(x)\},$

……..2 分

由积分中值定理，存在 $\xi \in [0,1], s.t. \int_0^1 f(x)dx = f(\xi),$ ……..2 分

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| + \int_0^1 |f'(x)|dx = |f(\xi)| + \int_0^1 |f'(x)|dx$$

$$\ge |f(\xi)| + \left|\int_\xi^{x_0} f'(x)dx\right| = |f(\xi)| + |f(x_0)-f(\xi)| \ge |f(x_0)| = \max_{0\le x\le 1}\{f(x)\}.$$ ..2 分