2017级

苏州大学 高等数学一（上）期末试卷 A 共 2 页

考试形式：闭卷

院系__________ 年级__________ 专业__________

学号__________ 姓名__________ 成绩__________

特别提醒：请将答案填写在答题纸上，若填写在试卷纸上无效.

一． 选择题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 求下列极限，能直接使用洛必达法则的是(　　)

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$　　B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$　　C. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 5x}{\sin 3x}$　　D. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$

2. 设函数 $f(x)=x\sin x+\cos x$, 下列命题正确的是（　　）

A. $f(0)$是极大值，$f(\dfrac{\pi}{2})$也是极大值　B. $f(0)$是极小值，$f(\dfrac{\pi}{2})$也是极小值

C. $f(0)$是极大值，$f(\dfrac{\pi}{2})$是极小值　D. $f(0)$是极小值，$f(\dfrac{\pi}{2})$是极大值

3. 下列等式正确的是(　　)

A. $\int f'(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$　　B. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)+C$

C. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(x)$　　D. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=0$

4. 函数 $f(x)=x-\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{3}}$ 在下列区间上<u>不满足</u>拉格朗日中值定理条件的是(　　)

A. $[0,1]$　　B. $[-1,1]$　　C. $[0,\dfrac{27}{8}]$　　D. $[-1,0]$

5. 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\mathrm{d}x, N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3 x+\cos^4 x)\mathrm{d}x,$

$P=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^2\sin^3 x-\cos^4 x)\mathrm{d}x$, 则有(　　)

A. $P<M<N$　　B. $N<P<M$　　C. $M<P<N$　　D. $N<M<P$

二． 填空题：（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $f(x)=\ln(4-x^2)$ 在区间____________ 上是连续的.

2. 已知 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，则当 n 为大于 2 的正整数时，

$f^{(n)}(x)=$____________.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y-xe^y=1$ 所确定，则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=$____________.

4. 设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+C$，则 $\int\dfrac{1}{f(x)}dx=$__________.

5. 设 $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{1+x}{x})^{ax}=\int_{-\infty}^{a}te^t dt$，则常数 $a=$____________.

三. 解下列各题：（每小题 10 分，共 40 分）

1. 求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x})$. （2）$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\int_0^{x^2}\ln(1+t)dt}{\tan^5 x}$.

2. 求摆线 $\begin{cases}x=1-\cos t,\\ y=t-\sin t\end{cases}$ 一拱 $(0\le t\le 2\pi)$ 的弧长.

3. 设函数 $f(x)=x-\int_0^{\pi}f(x)\cos x dx$，求 $f(x)$.

4. 求函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+2\sqrt{2}$ 的单调区间、最值及零点的个数.

四. 解下列各题：（共 30 分）

1. （12 分）已知曲线 $y=e^x, y=\sin x, x=0, x=1$ 围成平面图形，

（1）求该平面图形的面积 S；

（2）求该平面图形分别绕 x 轴和 y 轴旋转一周所得的旋转体的体积 V_x, V_y.

2. （12 分）设 $f(x)$ 在 $[-a,a](a>0)$ 上连续，

（1）证明：$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$；

（2）利用上述结论计算定积分 $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos^2 x}{1+e^{-x}}dx$.

3. （6 分）已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有连续导数，试证明：

$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|+\int_0^1|f'(x)|dx\ge\max\limits_{0\le x\le1}\{f(x)\}$.

2017级高数上期末答案

一、选择

1. B　2. D　3.D　4. B　5. A

二、填空

1. $(-2,2)$　2. $n![f(x)]^{n+1}$　3. $2e^2$　4. $-\dfrac{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$　5. 2

三、解答

1. (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{1}{2}$　2. $s=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=8$　3. $f(x)=x+2$

4. $(0,e)$ 单调增；$(e,+\infty)$ 单调减；最大值 $2\sqrt{2}$；无最小值；零点个数 2

四、解答

1. (1) $S=\int_0^1(e^x-\sin x)dx=e-2+\cos 1$

(2) $V_x=\pi\int_0^1 e^{2x}-\sin^2 x dx=\dfrac{e^2}{2}+\dfrac{\sin 2}{4}-\dfrac{1}{2}$

$$\begin{aligned}V_y&=\pi\int_0^{\sin 1}\arcsin^2 y dy+(1-\sin 1)\pi+\pi\int_1^e(1-\ln^2 y)dy\\&=\pi\int_0^1 x^2\cos x dx+(e-\sin 1)\pi-\pi\int_0^1 x^2e^x dx\\&=\pi(2-2\sin 1+2\cos 1)\end{aligned}$$

2. (1) 略　(2) $I=\int_0^{\pi/4}\cos^2 x dx=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{1}{4}$

3. 由连续函数最值存在定理有，存在 $x_1,x_2\in[0,1]$ 有

$$f(x_1)=M=\max_{[0,1]}f(x)\ \text{及}\ f(x_2)=m=\min_{[0,1]}f(x).$$

不妨设 $x_1\le x_2$，则有

$$\int_0^1|f'(x)|dx\ge\int_{x_1}^{x_2}|f'(x)|dx\ge\left|\int_{x_1}^{x_2}f'(x)dx\right|=M-m,$$

及

$$\int_0^1|f(x)|dx\ge\int_0^1 f(x)dx\ge\int_0^1 mdx=m,$$

故 $$\int_0^1|f(x)|dx+\int_0^1|f'(x)|dx\ge M=\max_{[0,1]}f(x).$$