§9.1 曲线积分

一、填空

1．设$L: y=-\sqrt{1-x^2}$，则$\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ $\underline{\pi}$ （$=\int_L ds$ 半圆弧长）

2．设L为圆周$x^2+y^2=a^2(a>0)$，则$\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s=$ $\underline{2\pi a^3}$；

$\oint_L y^2\mathrm{d}s=$ $\underline{\pi a^3}$；$\oint_L (2x^2+3y^2)\mathrm{d}s=$ $\underline{5\pi a^3}$．（由对称性）

3．设L为曲线$x^2+y^2=1(y\ge 0)$，则$\int_L e^{x^2+y^2}\arctan\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s=$ $\underline{\int_L e\cdot\frac{\pi}{4}ds=\frac{\pi^2}{4}e}$． 半圆上．

4．设Γ为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\ z=2\end{cases}$，则$\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}s}{x^2+y^2+z^2}=$ $\underline{\int_C \frac{ds}{8}=\frac{2\pi\times 2}{8}=\frac{\pi}{2}}$． 圆：$x^2+y^2=4$

5．设Γ为$x^2+y^2=4$的正向，则$\oint_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=$ $\underline{\int_C \frac{xdy+2ydx}{4}}$．$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(4\cos^2t-8\sin^2t)dt=-4\int_0^{2\pi}\sin^2t\,dt$

$=-\pi$

6．设Γ是从点$(1,1,1)$到点$(2,3,4)$的一段直线，则$\int_\Gamma x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z=$ $\underline{13}$．

$\vec{s}=(1,2,3)$， $x=1+t$，$y=1+2t$，$z=1+3t$．

$\int_0^1[(t+1)+2(1+2t)+3(1+3t)]dt=\int_0^1(6+14t)dt$

$=7t^2+6t\Big|_0^1=13$

二、计算曲线积分$I=\oint_L x\mathrm{d}s$，其中L为由直线$y=x$及抛物线$y=x^2$所围成的区域的整个边界．

$$I=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx+\int_0^1 x\sqrt{1+1^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

三、计算曲线积分 $I=\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中

1．L为圆周 $x^2+y^2=4x$；

$$L:\begin{cases} x=2+2\cos t \\ y=2\sin t. \end{cases} \quad t\in[0,2\pi],$$

$$I=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\overset{2+2\cos t}{x}}\cdot\sqrt{(-2\sin t)^2+(2\cos t)^2}\,dt$$

$$=4\int_0^{2\pi}2\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=16\int_0^{\pi}|\cos u|\,du$$

$$=\underline{32}$$

2．L为 $D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le x\le\sqrt{2-y^2}\right\}$ 的边界.

$\overline{OA}$: $y=0$

$\overset{\frown}{AB}$: $x^2+y^2=2$

$\overline{BO}$: $y=x$

$$I=\left(\int_{\overline{OA}}+\int_{\overset{\frown}{AB}}+\int_{\overline{BO}}\right)\sqrt{x^2+y^2}\,ds$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}}x\,dx+\int_{\overset{\frown}{AB}}\sqrt{2}\,ds+\int_0^1\sqrt{2}\,x\sqrt{2}\,dx$$

$$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{2}}+\sqrt{2}\times\frac{\pi\sqrt{2}}{4}+\frac{2}{2}=\underline{2+\frac{\pi}{2}}$$

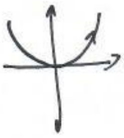
四、计算曲线积分 $I=\int_\Gamma\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}s$，其中$\Gamma$为曲线$\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\cos t \\ y=\mathrm{e}^t\sin t \\ z=\mathrm{e}^t \end{cases}$ 上相应于t从0变到2的一段弧.

$$I=\int_0^2\frac{1}{2e^{2t}}\sqrt{\left[e^t(\cos t-\sin t)\right]^2+\left[e^t(\cos t+\sin t)\right]^2+(e^t)^2}\,dt$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^2 e^{-t}dt=-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-t}\Big|_0^2=\underline{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-e^{-2})}$$

五、计算曲线积分 $I=\int_L\left(x^2-2xy\right)\mathrm{d}x+\left(y^2-2xy\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(-1,1)$ 到点 $(1,1)$ 的一段弧.

$$I = \int_{-1}^{1}\left[(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)\cdot 2x\right]dx$$



$$= \int_{-1}^{1}(x^2-4x^4)\,dx$$

$$= 2\left(\frac{x^3}{3}-\frac{4}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = -\frac{14}{15}$$

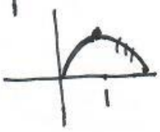
六、计算曲线积分 $I=\int_L\left(x^2-y^2\right)\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}y$，$L$ 从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$

(1) L 的方程为 $y=x^5$；

(2) L 的方程为 $y=\sqrt{2x-x^2}$；

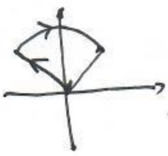
(3) L 是从 O 沿 $y=-x$ 经 $B(-1,1)$ 再沿 $y=\sqrt{2-x^2}$ 到点 A.

(1) $$I = \int_0^1\left[(x^2-x^{10})+x^6\cdot 5x^4\right]dx = \frac{1}{3}+\frac{4}{11} = \frac{23}{33}$$



(2) $$I = \int_0^1\left[x^2-(2x-x^2)+x\sqrt{2x-x^2}\cdot\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right]dx$$

$$= \int_0^1(x^2-x)\,dx = \frac{1}{3}-\frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$



(3) $$I = \int_0^{-1}\left[x^2-(-x)^2+x\cdot(-x)\cdot(-1)\right]dx+\int_{-1}^{1}\left[x^2-(2-x^2)+x\sqrt{2-x^2}\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}\right]$$

$$= \int_0^{-1}x^2dx+\int_{-1}^{1}(x^2-2)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^{-1}+\left(\frac{x^3}{3}-2x\right)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}-4 = \cancel{-2}-\frac{11}{3}$$

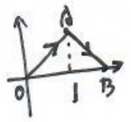
七、计算曲线积分 $I=\int_L\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y$，其中 L 分别为

1．$y=1-|1-x|$ 从 $O(0,0)$ 经 $A(1,1)$ 到点 $B(2,0)$ 的折线；2．沿圆周 $(x-1)^2+y^2=1$ 的上半部分从 $O(0,0)$ 到 $B(2,0)$ 的一段弧.

$\overline{OA}$：$y=x$，$x:0\to1$

$\overline{AB}$：$y=2-x$，$x:1\to2$

1. $I=\left(\int_{\overline{OA}}+\int_{\overline{AB}}\right)(x^2+y^2)dx+2xy\,dy$



$$=\int_0^1(2x^2+2x^2\cdot1)dx+\int_1^2[x^2+(2-x)^2+2x(2-x)\cdot(-1)]dx$$

$$=\int_0^1 4x^2dx+\int_1^2(4x^2-8x+4)dx=\frac{4}{3}+4\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}$$

2. 令 $x=1+\cos t$，$y=\sin t$，$t:\pi\to0$

$$I=\int_\pi^0[2(1+\cos t)(-\sin t)+2(1+\cos t)\sin t\cdot\cos t]dt$$

$$=-\int_0^\pi(-2\sin t+2\sin t\cdot\cos^2 t)dt=4+\frac{2}{3}\cos^3 t\Big|_0^\pi=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$$

八、设 Γ 为曲线 $\begin{cases}x=t\\y=t^2\\z=t^3\end{cases}$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧，把对坐标的曲线积分

$\int_\Gamma xyz\mathrm{d}x+yz\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}z$ 化为对弧长的曲线积分.

$ds=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,dt=\sqrt{1+4t^2+9t^4}\,dt$　$dx=dt$，$dy=2t\,dt$，$dz=3t^2dt$

$$\therefore\int_\Gamma xyzdx+yzdy+xzdz=\int_\Gamma\left[xyz\cdot\frac{1}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}+yz\cdot\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}+xz\cdot\frac{3t^2}{\sqrt{1+4t^2+9t^4}}\right]ds$$

$$=\int_\Gamma\frac{xyz+2xyz+3xyz}{\sqrt{1+4y+9z}}ds=\int_\Gamma\frac{6xyz}{\sqrt{1+4y+9z}}ds$$

§9.1 曲线积分(续：格林公式、曲线积分与路径无关的条件)

一、填空

1．设L是$|x|+|y|=1$逆时针方向一周，则$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{\underbrace{|x|+|y|}_{=1}} =$ $\oint_L x\,dy - y\,dx = 2\iint_D dxdy = 4$

2．设L是圆$x^2+y^2=a^2$逆时针方向一周，则$\oint_L \frac{xy^2\mathrm{d}y - x^2y\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ $\oint_L \frac{xy^2dy - x^2y\,dx}{a} = \frac{1}{a}\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \frac{\pi a^3}{2}$

3．设L是圆$x^2+y^2=9$逆时针方向一周，则$\oint_L x\mathrm{d}y =$ $\iint_D dxdy = 9\pi$；$\oint_L x\mathrm{d}s =$ $\int_0^{2\pi} 3\cos t \cdot 3\,dt = 0$．

4．设L是椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$顺时针方向一周，

则$\oint_L \left(\sqrt{x+1}+2y\right)\mathrm{d}x + \left(y\cos y + 5x\right)\mathrm{d}y =$ $-\iint_D 3\,dxdy = -3\times 2\pi = -6\pi$．

5．$\int_{(1,0)}^{(2,1)} \left(2xy - y^4 + 3\right)\mathrm{d}x + \left(x^2 - 4xy^3\right)\mathrm{d}y =$ $(x^2y - xy^4 + 3x)\Big|_{(1,0)}^{(2,1)} = 5$

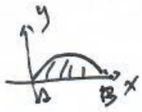
6．若 L 是光滑曲线，曲线积分$\int_L (x^4+4xy^a)\mathrm{d}x + (6x^{a-1}y^2 - 5y^4)\mathrm{d}y$与路径无关，则$a$的值是 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow 4axy^{a-1} = 6(a-1)x^{a-2}y^2 \Rightarrow a=3$

7．$(x+2y)\mathrm{d}x + (2x+y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+2xy+C)$

二、计算曲线积分$I = \oint_L (2x - y + 4)\mathrm{d}x + (5y + 3x - 6)\mathrm{d}y$，其中$L$是以点$(0,0),(3,0)$ 和$(3,2)$为顶点的三角形正向边界.

$I = \iint_D (3+1)\,dxdy = 4\times 3 = 12$

三、计算曲线积分 $I=\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x+y\left(xy+\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}+x\right)\right)\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从点 $A(0,0)$ 到 $B(\pi,0)$ 点的一段.



$$\oint_{\overline{AB}+\widehat{BA}} \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y(xy+\ln(\sqrt{x^2+y^2}+x))\,dy=\iint_D y^2\,dx\,dy$$

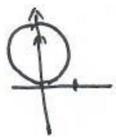
$$=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}y^2\,dy=\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

而 $\int_{\overline{AB}}\sqrt{x^2+y^2}\,dx+y(xy+\ln\sqrt{x^2+y^2}+x)\,dy=\int_0^{\pi}x\,dx+0=\frac{\pi^2}{2}$

$\therefore\ \frac{\pi^2}{2}-I=\frac{4}{9}.\quad I=\frac{\pi^2}{2}-\frac{4}{9}$

四、计算曲线积分 $I=\oint_L \dfrac{y\mathrm{d}x-(x-1)\mathrm{d}y}{(x-1)^2+y^2}$，其中 L 分别为

(1) $x^2+y^2-2y=0$ 的正向;



记 $P=\dfrac{y}{(x-1)^2+y^2}$，$Q=\dfrac{-(x-1)}{(x-1)^2+y^2}$

则 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{(x-1)^2-y^2}{[(x-1)^2+y^2]^2}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$. 在圆 $x^2+(y-1)^2=1$ 内 P. Q 的偏导

故 $I=0$.

(2) $4x^2+y^2-8x=0$ 的正向.

$4(x-1)^2+y^2=4$，即 $(x-1)^2+\frac{y^2}{4}=1$ 在此椭圆内. P. Q 不

作小圆 L_ε: $x-1=\varepsilon\cos\theta$. $y=\varepsilon\sin\theta$, 取逆时针向.

记 L 与 L_ε 所围区域为 $\hat{D}$. 则

$$\oint_{L+L_\varepsilon^-}P\,dx+Q\,dy=0$$

$$\therefore\int_L P\,dx+Q\,dy=\int_{L_\varepsilon}P\,dx+Q\,dy=\int_0^{2\pi}\frac{-\varepsilon^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\varepsilon^2}$$

$$=-2\pi$$

五、验证：$\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{2x}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\ln x-\dfrac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y,(x>0,y>0)$ 是某个二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，

并求 $u(x,y)$ 及 $\int_{(1,1)}^{(2,3)}\left(\dfrac{y}{x}+\dfrac{2x}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\ln x-\dfrac{x^2}{y^2}\right)\mathrm{d}y$.

设 $P=\frac{y}{x}+\frac{2x}{y}$ ， $Q=\ln x-\frac{x^2}{y^2}$ ，则 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{1}{x}-\frac{2x}{y^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ $(x>0,y>0)$

∴ $Pdx+Qdy$ 是一个全微分 du，且 $u(x,y)=y\ln x+\frac{x^2}{y}+C$

$$\int_{(1,1)}^{(2,3)} Pdx+Qdy=\left(y\ln x+\frac{x^2}{y}\right)\Big|_{(1,1)}^{(2,3)}=\left(3\ln 2+\frac{4}{3}\right)-(0+1)$$

$$=3\ln 2+\frac{1}{3}$$

六.利用曲线积分求摆线 $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\le t\le 2\pi$ 与 x 轴所围图形的面积.

$$S=\oint_L x\,dy=\int_{\overline{OA}} x\,dy+\int_{\widehat{AO}} x\,dy$$

$$=0-\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)\cdot a\sin t\,dt$$

$$=-a^2\left[\int_0^{2\pi} t\sin t\,dt-\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,dt\right]$$

$$=-a^2\left[(-t\cos t+\sin t)\Big|_0^{2\pi}-\pi\right]$$

$$=-a^2(-2\pi-\pi)=3\pi a^2$$

七.确定光滑闭曲线C，使曲线积分$\oint_C \left(x+\frac{y^3}{3}\right)dx+\left(y+x-\frac{2}{3}x^3\right)dy$达到最大值.

设D是C所围区域,则

$I \triangleq \oint_C \left(x+\frac{y^3}{3}\right)dx + \left(y+x-\frac{2}{3}x^3\right)dy = \iint_D (1-2x^2-y^2)\,dxdy$

D应包含使 $1-2x^2-y^2$ 大于零的所有区域.

因此，C为曲线 $2x^2+y^2=1$.

八. 设$\widehat{AO}$由点$A(a,0)$到点$O(0,0)$的上半圆周$x^2+y^2=ax$，计算：

（1）$I_1=\int_{\widehat{AO}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy$；

（2）$I_2=\int_{\widehat{AO}}(e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy$；

（3）$I_3=\int_{\widehat{AO}}(e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-mx)dy$.

(1) 设 $\overline{OA}$: $y=0$, $x: 0 \to a$. 则　设 $\overline{OA}$ 与 $\widehat{AO}$ 围成区域为D.

$\int_{\overline{OA}} (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy = 0+0=0$

$\int_{\widehat{AO}+\overline{OA}} (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-m)dy = \iint_D m\,dxdy = m\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi m a^2}{8}$

$\therefore I_1 = \frac{\pi m a^2}{8}$

(2) $\int_{\overline{OA}} (e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy = \int_0^a -m\,dx = -ma$

$\int_{\widehat{AO}+\overline{OA}} (e^x\sin y-m)dx+(e^x\cos y-mx)dy = -\iint_D m\,dxdy = -\frac{\pi m}{8}a^2$

$\therefore I_2 - ma = -\frac{\pi m a^2}{8}$, $I_2 = ma-\frac{\pi m a^2}{8}$

(3) $\frac{\partial}{\partial y}(e^x\sin y-my) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x\cos y-mx) = e^x\cos y-m$.

∴ 曲线积分与路径无关.

$I_3 = \int_{\overline{OA}} (e^x\sin y-my)dx+(e^x\cos y-mx)dy = 0+0=0$.

§9.2 曲面积分

一.填空题（一）

1．设Σ为 $z = xy$ 由圆柱面 $x^2+y^2=a^2\left(a>0\right)$ 所截下的有限曲面，

则 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\sqrt{1+x^2+y^2}}=$ $\underline{\iint\limits_{D} dxdy = \pi a^2}$． $dS = \sqrt{1+y^2+x^2}\,dxdy$

2．设Σ是椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1$，其面积为 A，

则曲面积分 $\oiint\limits_{\Sigma}\left(2xy+6x^2+4y^2+3z^2\right)\mathrm{d}S=$ $\underline{0+\iint\limits_{\Sigma} 12\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)dS} = 12\iint\limits_{\Sigma} dS = 12A$．

3．设Σ是平面 $x+y+z=6$ 被圆柱面 $x^2+y^2=1$ 所截下的部分，则 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=$ $\iint\limits_{D}(6-x-y)\sqrt{3}\,dxdy = 6\sqrt{3}\iint\limits_{D} dxdy$ $= 6\sqrt{3}\pi$．

4．设Σ为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2\left(a>0\right)$，则 $\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}S=$ $\underline{4\pi a^4}$； $= a^2$

$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}S=$ $\underline{\frac{4}{3}\pi a^4}$； $\oiint\limits_{\Sigma}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}S=$ $\underline{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{3}\pi a^4} = \frac{13}{12}\pi a^4$．

二、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+2y+z\right)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是平面 $2x+2y+z-2=0$ 在第一卦限的部分．

$\Downarrow$

$x+y+\frac{z}{2}=1$

$$I = \iint\limits_{D} 2\cdot\sqrt{1+2^2+2^2}\,dxdy = 6\iint\limits_{D} dxdy$$

$$= 6\times\frac{1}{2} = 3$$

三、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(2x+3y+4z)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$.

$$I = 0+0+4\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2+\left(\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)^2}\,dx\,dy$$

$$= 4R\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy = 4R * \pi R^2 = \underline{4\pi R^3}$$

四、计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是

1．锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及平面 $z=1$ 所围成的区域的整个边界;

2．锥面 $z^2=3\left(x^2+y^2\right)$ 被平面 $z=0$ 和 $z=3$ 所截得的部分.

1. $$I = \iint\limits_{\Sigma_{锥}}(x^2+y^2)\,dS + \iint\limits_{\Sigma_{顶}}(x^2+y^2)\,dS$$

$$= \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy + \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= (1+\sqrt{2})\iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= (1+\sqrt{2})\cdot\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2\cdot\rho\,d\rho = \frac{\pi}{2}(1+\sqrt{2})$$

2. $z=3$ 时 $x^2+y^2=3$，$z=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$，

$$dS = \sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,dx\,dy = 2\,dx\,dy$$

$$\therefore I = \iint\limits_{D_{xy}}(x^2+y^2)\cdot 2\,dx\,dy = \cancel{2\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho^2\cdot\rho\,d\rho = \underline{9\pi}$$

五.填空题（二）

1.设Σ为平面$z=3$上$x^2+y^2\le 1$的区域，方向朝下，则

$\iint\limits_{\Sigma}(z+1)\,dxdy=$ $-4\iint dxdy=-4\pi$，$\iint\limits_{\Sigma}(z+1)\,dydz=$ 0 （Σ与yOz面垂直），

$\iint\limits_{\Sigma}(z+1)\,dzdx=$ 0 .

2.设Σ为柱面$x^2+y^2=1$（$x\ge 0$）被平面$z=0$，$z=1$所截得的第一卦限部分的前侧，则

$\iint\limits_{\Sigma}x\,dxdy=$ 0 （Σ与xOy面垂直），$\iint\limits_{\Sigma}x\,dydz=$ $\int_0^1 dz\int_0^1\sqrt{1-y^2}\,dy=\frac{\pi}{4}$ （$\frac14$圆面积），$\iint\limits_{\Sigma}x\,dzdx=$ $\int_0^1 dz\int_0^1 x\,dx=\frac12$.

3．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2(a>0)$的外侧，则$\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dxdy=$ $a^2\iint dxdy$ $=a^2\left(\iint\limits_{D_{xy}}dxdy-\iint\limits_{D_{xy}}dxdy\right)=0$

上半球面
下

$\oint\!\!\oint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\,dS=$ $a^2\cdot 4\pi a^2=4\pi a^4$

六、计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x+2)\,dydz+z\,dxdy$，其中

1．Σ是由$A(1,0,0),B(0,1,0),C(0,0,1)$为顶点的三角形平面的上侧;

2．Σ为半球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧.

1. Σ：$x+y+z=1$．上侧

$$I=\iint\limits_{D_{yz}}(1-y-z+2)\,dydz+\iint\limits_{D_{xy}}(1-x-y)\,dxdy$$

$$\overset{\text{由对称性}}{=\!=}4\iint\limits_{D_{xy}}(1-x)\,dxdy=4\int_0^1(1-x)\,dx\int_0^{1-x}dy=4\int_0^1(1-x)^2dx=\frac43$$

2. $$I=\left[\iint\limits_{D_{yz}}\left(\sqrt{4-y^2-z^2}+2\right)dydz-\iint\limits_{D_{yz}}\left(-\sqrt{4-y^2-z^2}+2\right)dydz\right]+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$$

$$=2\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{4-y^2-z^2}\,dydz+\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$$

（半圆） （圆）

$$\overset{\text{由对称性}}{=\!=}2\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\sqrt{4-\rho^2}\,\rho\,d\rho$$

$$=2\times 2\pi\times\left[-\frac13(4-\rho^2)^{\frac32}\right]\Big|_0^2=\frac{4\pi}{3}\times 8=\frac{32}{3}\pi$$

七、计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

$$\iint_{\Sigma}\frac{1}{z}\,dx\,dy=\iint_{\Sigma_上}\frac{1}{z}\,dx\,dy+\iint_{\Sigma_下}\frac{1}{z}\,dx\,dy$$

$$=\iint_{D_{xy}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}-\iint_{D_{xy}}\frac{dx\,dy}{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$=2\iint_{D_{xy}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{a}\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

$$=2\times2\pi\times\left(-\sqrt{a^2-\rho^2}\right)\Big|_0^{a}=4\pi a$$

八、设 $f(u)$ 是连续函数，Σ 是平面 $2x-2y+z=4$ 上第四卦限部分的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\big(x+(y-z)f(xyz)\big)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\big(y+(x-z)f(xyz)\big)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\big(z+2(x-y)f(xyz)\big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

$\Sigma:\ \frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1\qquad \vec{n}=(2,-2,1),\qquad (\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

$$\therefore I=\iint_{\Sigma}\Big\{[x+(y-z)f(xyz)]\cos\alpha+[y+(x-z)f(xyz)]\cos\beta+[z+2(x-y)f(xyz)]\cos\gamma\Big\}dS$$

$$=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma}(2x-2y+z)\,dS=\frac{4}{3}\iint_{\Sigma}dS$$

$$=\frac{4}{3}\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+2^2+(-2)^2}\,dx\,dy=\frac{4}{3}\times3\times\left(\frac{1}{2}\times2\times2\right)=8$$

§9.2 曲面积分（高斯公式）§10.1 常数项级数（概念和性质）

一、填空题（一）

2．设区域Ω由坐标面与$x+y+z=1$围成，Σ为Ω边界曲面的外侧，

则$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + x\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ $\iiint\limits_{\Omega}(1+1+0)dv = 2\cdot V(\Omega) = 2\times\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$．

3．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=a^2\left(a>0\right)$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ $\iiint\limits_{\Omega} dv = \frac{4}{3}\pi a^3$；

$\oiint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ $\iiint\limits_{\Omega} 2x\,dv = 0$ 奇函数；$\oiint\limits_{\Sigma} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ $\iiint\limits_{\Omega} 3x^2 dv = 3\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv = 3\int_{-a}^{a} z^2 dz \iint\limits_{D_z} dxdy = 3\int_{-a}^{a} z^2\cdot\pi(a^2-z^2)\,dz$

$= \frac{4\pi}{5}a^5$

4．设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧，则$\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ $\oiint\limits_{\Sigma} x\,dydz = \frac{4\pi}{3}$．

5．设是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}\left(0\le z\le 1\right)$的下侧， 加盖 $\Sigma_1: z=1$ 向上．$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\,dydz+2y\,dzdx+3(z-1)\,dxdy$

$= \iiint\limits_{\Omega}(1+2+3)dv = 6\times\frac{\pi}{3} = 2\pi$

则$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3\left(z-1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ $2\pi - 0 = 2\pi$．

$\iint\limits_{\Sigma_1} = 0+0+0=0$

二、计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}\left(2x+z\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是$z=x^2+y^2\left(0\le z\le 1\right)$的上侧.

设 $\Sigma_1: z=1$，$x^2+y^2\le 1$，取上侧，Σ_1与Σ^-围成几何体为Ω，则

$$\oiint\limits_{\Sigma_1+\Sigma^-}(2x+z)\,dydz + z\,dxdy = \iiint\limits_{\Omega}(2+1)\,dv = 3\int_0^1 dz\iint\limits_{D_z} dxdy = 3\int_0^1 \pi z\,dz = \frac{3\pi}{2}$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}(2x+z)\,dydz + z\,dxdy = \iint\limits_{D_{xy}}\cancel{(2x+1)}\,0 + \iint\limits_{D_{xy}} 1\,dxdy = \pi$$

Σ_1面垂直于yOz面

$\therefore\ -I+\pi = \frac{3\pi}{2}$，$I = -\frac{\pi}{2}$

三、计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧.

$$I = \frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma} x\,dydz + y\,dzdx + z\,dxdy = \frac{1}{a^3}\iiint\limits_{\Omega} 3\,dv = \frac{3}{a^3}\cdot\frac{4\pi a^3}{3} = 4\pi$$

四、设Σ是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧，计算曲面积分

1．$I=\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；2．$I=\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

(1). 加盖 Σ_1: $z=0$, $x^2+y^2\le 4$, 向下. 设Σ与Σ_1围成几何体Ω, 则

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} yz\,dz\,dx+2\,dx\,dy=\iiint\limits_{\Omega} z\,dV=\int_0^2 z\,dz\iint\limits_{D_z}dx\,dy=\int_0^2 z\,dz\cdot\pi(4-z^2)$$

$$=\pi\left(2z^2-\frac{z^4}{4}\right)\Big|_0^2=\pi\cdot(8-4)=4\pi.$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} yz\,dz\,dx+2\,dx\,dy=\underset{\substack{\uparrow\\ \Sigma_1\text{与}zOx\text{面垂直}}}{0}+\left(-2\iint\limits_{D_{xy}}dx\,dy\right)=-2\pi\cdot 2^2=-8\pi$$

$$\therefore\ I+(-8\pi)=4\pi,\quad \underline{I=12\pi}$$

(2). $$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy=2\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz=0+0+2\iiint\limits_{\Omega}z\,dx\,dy\,dz=$$

而 $\iint\limits_{\Sigma_1} x^2dy\,dz+y^2dz\,dx+z^2dx\,dy=0+0-0=0$

$\therefore$ ~~$I+(\ 0\ )=$~~

$\therefore\ I+0=8\pi$, $\underline{I=8\pi}$

五、设是球面$x^2+y^2+z^2=a^2$，利用高斯公式计算曲面积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^4+y^4+z^4\right)\mathrm{d}S$．

$$\vec{n}=(2x,2y,2z),\quad \vec{n}^0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\frac{(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\left(\frac{x}{a},\frac{y}{a},\frac{z}{a}\right)$$

$$\therefore I=\oiint\limits_{\Sigma}\left(x^4\cdot\frac{dy\,dz}{\cos\alpha}+y^4\cdot\frac{dz\,dx}{\cos\beta}+z^4\cdot\frac{dx\,dy}{\cos\gamma}\right)$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma} ax^3dy\,dz+ay^3dz\,dx+az^3dx\,dy$$

$$=3a\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

$$=9a\iiint\limits_{\Omega}z^2\,dx\,dy\,dz$$

$$\overset{\text{三-(3)}}{=}9a\cdot\frac{4\pi}{15}a^5=\frac{12\pi}{5}a^6$$

六、填空题（二）

1．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}\left(u_n^{\,2}-2u_n-3\right)=$ $\underline{0-0-3}=-3$

2．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，则 $\lim_{n\to\infty}\left(S_{n+1}+S_{n-1}-2S_n\right)=$ $\underline{0-0=0}$

$= \lim_{n\to\infty} u_{n+1}-u_n$

3．级数 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$ 的和是 $\underline{1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}$．

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

4．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和是3，则级数 $\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ 的和是 $\underline{3-u_1-u_2}$．

5．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ 的和是 2，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{2}$ 的和是 $\underline{\quad 1 \quad}$．

6．设 x 是一个任意给定的数，当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的和是 $\underline{\frac{x}{1-x}}$． $\left(=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)$

7．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ 的和等于 $\underline{1+1=2}$

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)=1$

七、判断下列级数的敛散性

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$．

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

∴ 收敛．

2．$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}_{=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$．

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\therefore S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{i+2}+\sqrt{i+1}}-\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\to-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=-(\sqrt{2}-1)\quad(n\to\infty)$$

∴ 收敛．

八、判断下列级数的敛散性

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$.

$u_n=(-1)^{n-1} \nrightarrow 0$

$\therefore$ 发散

2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

$|q|=\frac{1}{5}<1$

$\therefore$ 收敛

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

$|q|=\frac{3}{2}>1$

$\therefore$ 发散

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{0.01}$.

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{0.01}=1 \neq 0$

$\therefore$ 发散

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^n+e^n}{6^n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\pi}{6}\right)^n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e}{6}\right)^n$ 收敛

$\therefore$ 原级数收敛.

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-1)^n}{2^n}$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$ 收敛

$\therefore$ 原级数发散.

六、填空题（二）

1．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{n\to\infty}\left(u_n^{\ 2}-2u_n-3\right)=$ $\underline{0-0-3}=-3$

2．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，且 $S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，则 $\lim_{n\to\infty}\left(S_{n+1}+S_{n-1}-2S_n\right)=$ $\underline{0-0=0}$

$=\lim_{n\to\infty} u_{n+1}-u_n$

3．级数 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$ 的和是 $\underline{1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}}$．

$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

4．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的和是3，则级数 $\sum_{n=3}^{\infty} u_n$ 的和是 $\underline{3-u_1-u_2}$．

5．若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} t^n$ 的和是 2，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{2}$ 的和是 $\underline{\quad 1 \quad}$．

6．设 x 是一个任意给定的数，当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ 的和是 $\underline{\frac{x}{1-x}}$． $\left(=\lim_{n\to\infty}\frac{x(1-x^n)}{1-x}\right)$

7．级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ 的和等于 $\underline{1+1=2}$

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}\right)=1$

七、判断下列级数的敛散性

1．$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$．

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\to\frac{1}{2}\quad(n\to\infty)$$

$\therefore$ 收敛．

2．$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$．

$$\underbrace{u_n}_{=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\therefore S_n=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{i+2}+\sqrt{i+1}}-\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\to-\frac{1}{\sqrt{2}+1}$$

$$=-(\sqrt{2}-1)\quad(n\to\infty)$$

$\therefore$ 收敛．