自测题二(多元函数的微分学)

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{3xy}{\sqrt{xy+1}-1}=$(　　).

A. 3　　B. 6

C. 不存在但不是无穷大　　D. ∞

2. 若$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}=0$,$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}=0$,则 $f(x,y)$在(x_0,y_0)处(　　).

A. 连续且可微　　B. 连续但不一定可微

C. 可微但不一定连续　　D. 不一定可微也不一定连续

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+x^2y)}{xy}, & xy\neq 0,\\ 0, & xy=0,\end{cases}$ 则 $f_x(0,1)=$(　　).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 不存在

4. 二元函数 $f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的一个必要条件是(　　).

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

D. $f(x,y)$在点$(0,0)$处偏导数存在且连续

5. 曲线$\begin{cases}y=1-2x,\\ z=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}x^2\end{cases}$ 在点$(1,-1,-2)$处的切线与直线$\begin{cases}5x-3y+3z-9=0,\\ 3x-2y+z-1=0\end{cases}$ 的夹角 φ 为(　　).

A. 0　　B. $\dfrac{\pi}{4}$　　C. $\dfrac{\pi}{3}$　　D. $\dfrac{\pi}{2}$

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}=$__________.

2. 设 $f(x,y)$有一阶连续偏导数,$z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$,则 $\mathrm{d}z=$__________.

3. 设连续函数 $z=f(x,y)$满足$\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{f(x,y)-2x-3y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$,则 $\mathrm{d}z|_{(0,1)}=$__________.

4. 若 $F(x,y)=\int_0^{xy}\dfrac{\sin t}{1+t^2}\mathrm{d}t$,则$\left.\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{(0,2)}=$__________.

5. $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{z}}$在$(1,1,1)$处的梯度为__________.

二、解下列各题(每题 10 分,共 40 分)

1. 设 $z=x^{x^y}$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 设 $x^2+z^2=y\varphi\left(\dfrac{z}{y}\right)$,其中 φ 为可微函数,求$\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

3. 求由方程组$\begin{cases}u+v=x,\\ u^2+v^2=y\end{cases}$所确定的函数$u=u(x,y)$的二阶偏导数$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

4. 求由方程$x^2+y^2+z^2-2x+2y-4z-10=0$所确定的函数$z=z(x,y)$的极值.

三、解下列各题(每题10分,共30分)

1. 试证光滑曲面$F(z-x,y-z)=0$的所有切平面都与一固定的非零向量平行.

2. 已知函数$f(x,y)=x+y+xy$,曲线$C:x^2+y^2+xy=3$,求$f(x,y)$在C上的最大方向导数.

3. 当$x>0,y>0,z>0$时,求函数$\ln x+2\ln y+3\ln z$在球面$x^2+y^2+z^2=6r^2$上的极大值.并证明对任意实数a,b,c,不等式$ab^2c^3\leqslant 108\left(\dfrac{a+b+c}{6}\right)^6$成立.