§11.1 微分方程的基本概念　一阶微分方程

一、求以 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-x$(C_1,C_2 为任意常数)为通解的微分方程.

二、求下列微分方程的通解：

1. $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$.

2. $y\mathrm{d}x+(x^2-4x)\mathrm{d}y=0$.

3. $(x+1)y'+1=2e^{-y}$.

4. $\sec^2 x\tan y\mathrm{d}x+\sec^2 y\tan x\mathrm{d}y=0$.

三、求下列微分方程的特解：

1. $(1+x^2)y'=\arctan x$, $y|_{x=0}=0$.

2. $xy'+y=0$, $y(1)=1$.

四、若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\dfrac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$，求 $f(x)$.

五、求下列微分方程的通解：

1. $(3x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x+(x^2-2xy)\mathrm{d}y=0$.

2. $xy'=xe^{\frac{y}{x}}+y$.

3. $(y^2-3x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0$.

六、求微分方程的特解：$xy\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^2+y^2$，$y|_{x=e}=2e$.

七、求下列微分方程的通解：

1. $(y+x^2e^{-x})\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y=0$.

2. $y'+y\tan x=\cos x$.

八、求微分方程的特解：$(y+x^3)\mathrm{d}x-2x\mathrm{d}y=0$，$y|_{x=1}=\dfrac{6}{5}$.

§11.2 二阶微分方程
§10.3 傅里叶级数(机动)

一、填空题(一):

1. 以 $y=(C_1+C_2x)e^{2x}(C_1,C_2$为任意常数)为通解的微分方程是____________.
2. 以 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)(C_1,C_2$为任意常数)为通解的微分方程是________.
3. 微分方程 $y''-4y'+4y=e^{2x}+4x$ 的特解形式为__________.
4. 已知微分方程 $y''-y=f(x)$的一个特解为 y^*,则该方程的通解为_________.
5. 求下列微分方程的通解.

$e^{2x}\cdot y''=1$	$y''=y'+x$	$1+xy''+y'=0$
$y''-12y'+27y=0$	$9y''-30y'+25y=0$	$y''+2y'+5y=0$

二、验证 $y_1=e^{x^2}$ 及 $y_2=xe^{x^2}$ 都是方程 $y''-4xy'+(4x^2-2)y=0$ 的解,并写出该方程的通解.

三、求微分方程 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足条件 $y(0)=1,y'(0)=1$ 的解.

四、求非齐次微分方程的通解:$y''+2y'+2y=e^{-x}\sin x$.

五、已知 $y_1=xe^x+e^{2x},y_2=xe^x+e^{-x},y_3=xe^x+e^{2x}-e^{-x}$是某二阶线性非齐次微分方程的三个解,求此微分方程.

六、填空题(二)：

1. 已知 $f(x)$满足收敛定理的条件，其傅里叶级数的和函数为 $s(x)$，$f(x)$在 $x=0$ 处左连续，且 $f(0)=-1$，$s(0)=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=$________.

2. 设 $f(x)=\begin{cases}1+\dfrac{x}{\pi}, & -\pi\leqslant x<0,\\ 1-\dfrac{x}{\pi}, & 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$ 展开成的以 2π 为周期的傅里叶级数的和函数为 $s(x)$，则 $s(-3)=$________，$s(12)=$________，$s(k\pi)=$________$(k\in\mathbf{Z})$.

3. $f(x)=\mathrm{e}^x\cos x$ 在$[-\pi,\pi]$上的傅里叶系数 $a_0=$________，$b_1=$________.

4. 以 2π 为周期的函数 $f(x)$在一个周期$[-\pi,\pi]$上的表达式为 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\leqslant x\leqslant 0,\\ 1+x^2, & 0<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 则其傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于________.

5. $f(x)=\pi x+x^2\ (-\pi<x<\pi)$的傅里叶展开式中系数 $b_3=$________.

6. 设 $x^2=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\cos nx\ (-\pi\leqslant x\leqslant\pi)$，则 $a_2=$________.

七、把函数 $f(x)=x^3$ 在$[-\pi,\pi]$上展开成傅里叶级数，若已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=\dfrac{\pi}{4}$，试求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ 的和.

八、将函数 $f(x)=x^2$ 在$[-1,1]$上展开成傅里叶级数，并求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

九、将函数 $f(x)=x\sin x$ 在$[-\pi,\pi]$上分别展开成：

(1) 正弦级数； (2) 余弦级数.

自测题六(常微分方程)

一、选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. $y=C-x$(C 为任意常数)是微分方程 $xy''+y'=-1$ 的(　　).

A. 通解　　B. 特解

C. 不是解　　D. 解,既非通解也非特解

2. 微分方程 $y\mathrm{d}x+(y^2x-\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$ 是(　　).

A. 全微分方程　　B. 一阶线性方程

C. 可分离变量方程　　D. 齐次方程

3. 若一曲线上任一点的切线的斜率为$-\dfrac{2x}{y}$,则此曲线是(　　).

A. 直线　　B. 抛物线　　C. 椭圆　　D. 圆

4. 由 $x^2-xy+y^2=C$(C 为任意常数)确定的隐函数的微分方程是(　　).

A. $(x-2y)y'=2x-y$　　B. $(x-2y)y'=2x$

C. $xy'=2x-y$　　D. $-2yy'=2x-y$

5. 满足方程$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=nf(x)$($n$ 为大于 1 的自然数)的可导函数 $f(x)$ 为(　　).

A. $Cx^{\frac{1-n}{n}}$　　B. Cx　　C. $C\sin nx$　　D. $C\cos nx$

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. $xy'''+2y''+x^2y=0$ 是________阶微分方程.

2. 微分方程 $F(x,y^4,y',(y'')^2)=0$ 的通解中所含任意常数的个数是________.

3. 以 $y=C\mathrm{e}^{x^2}$(C 为任意常数)为通解的微分方程是________.

4. 已知函数 $y=y(x)$在任意点 x 处的增量 $\Delta y=\dfrac{y\Delta x}{1+x^2}+\alpha$,且当 $\Delta x\to 0$ 时,α 是 Δx 的高阶无穷小,$y(0)=\pi$,则 $y(1)=$________.

5. 函数 $y=3\sin x-4\cos x$ ________(填“是”或“否”)方程 $y''+y=0$ 的解.

三、解下列各题(每题 10 分,共 40 分)

1. 求微分方程的通解:$(\mathrm{e}^{x+y}-\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y=0$.

2. 求微分方程的通解:$(x^2-1)\mathrm{d}y+(2xy-\cos x)\mathrm{d}x=0$.

3. 求微分方程的特解:$x^2y'+xy=y^2$,$y(1)=1$.

4. 求微分方程的特解：$xy'+y-e^x=0$，$y|_{x=1}=e$.

四、解下列各题(每题10分，共30分)

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，若由曲线 $y=f(x)$，直线 $x=1$，$x=t(t>1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为 $V(t)=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]$. 试求 $y=f(x)$ 所满足的微分方程，并求该微分方程满足条件 $y|_{x=2}=\frac{2}{9}$ 的解.

2. 求微分方程 $x\mathrm{d}y+(x-2y)\mathrm{d}x=0$ 的一个解 $y=y(x)$，使得由曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$，$x=2$ 以及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小.

3. 设函数 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且满足 $f(t)=e^{\pi t^2}+\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant t^2\}$，求 $f(t)$.

期末复习卷一

一、填空题(每小题3分,共30分)

1. 二元函数 $z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$ 的定义域为____________.

2. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$ 共线,并满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=28$,则 $\boldsymbol{a}=$____________.

3. 将 xOz 坐标面上的抛物线 $z^2=5x$ 绕 x 轴旋转一周,所生成的旋转曲面的方程为____________.

4. 设 $x=x(y,z)$ 由方程 $\arctan x\mathrm{e}^z+y\mathrm{e}^z=1$ 确定,则 $\dfrac{\partial x}{\partial z}=$____________.

5. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\mathbf{grad}\, u|_M=$____________.

6. 函数 $z=x^3+y^3+3x^2-3y^2$ 的极小值点是____________.

7. 设 D 是由曲线 $\rho=a(1+\cos\varphi)(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 与极轴围成的区域,则 D 的面积可用极坐标下的累次积分表示为____________.

8. 设函数 $f(u)$ 可微,且 $f'(0)=\dfrac{1}{2}$,$z=f(4x^2-y^2)$,则全微分 $\mathrm{d}z\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=$____________.

9. 函数 $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$ 的麦克劳林级数为____________.

10. 微分方程 $xy'+2y=3x$ 的解为____________.

二、解下列各题(每小题7分,共35分)

1. 求过点 $M_0(2,4,0)$ 且平行于直线 $\begin{cases}x+2z-1=0,\\y-3z-2=0\end{cases}$ 的直线方程.

2. 计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}z^3\,\mathrm{d}v$,其中 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant1,z+1\geqslant\sqrt{x^2+y^2}\}$.

3. 计算 $\int_C y^2\,\mathrm{d}s$,其中 C 为摆线 $x=a(t-\sin t)$,$y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant2\pi)$ 的一拱.

4. 已知连续函数 $f(x)$ 满足条件 $f(x)=\int_0^{3x}f\left(\dfrac{t}{3}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{2x}$,求 $f(x)$.

5. 判定级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln n}{n}$ 是否收敛，如果是收敛的，是绝对收敛还是条件收敛？

三、解下列各题（共 35 分）

1. （10 分）已知 $y=e^{ty}+x$，而 t 是由方程 $y^2+t^2-x^2=1$ 确定的关于 x,y 的函数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

2. （10 分）在曲面 $z^2=2(x-1)^2+(y-1)^2(z>0)$ 上求点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，使点 P_1 到原点 O 的距离最短，并证明该曲面在点 P_1 处的法线与向量 $\overrightarrow{OP_1}$ 平行.

3. （8 分）计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)dydz+8xydzdx-4zxdxdy$，其中 Σ 是由 xOy 平面上的曲线 $x=e^y(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转面，它的法向量与 x 轴正向的夹角大于 $\dfrac{\pi}{2}$.

4. （7 分）已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,|x|\leqslant y,(x^2+y^2)^3\leqslant y^4\}$，计算 $\iint\limits_{D}\dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$.

期末复习卷二

一、填空题(每小题 3 分,共 30 分)

1. 设向量 $\boldsymbol{a}=(2,-1,-5)$,$\boldsymbol{b}=(1,0,-4)$,则 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=$____________.

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,\infty)}\dfrac{\sin xy}{y}=$____________.

3. 设 $z=\mathrm{e}^{xy}$,则 $\mathrm{d}z|_{(2,1)}=$____________.

4. 平面 $x-y+2z-6=0$ 与平面 $2x+y+z-5=0$ 的夹角为____________.

5. 设 $u=2xy-z^2$,则 u 在点$(2,-1,1)$处的方向导数的最大值为____________.

6. 设 D 是由 $x+y=1$ 及两坐标轴围成的闭区域,则$\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

7. 设 L 为 $x^2+y^2=1$ 取逆时针方向,则$\oint_L y\,\mathrm{d}x=$____________.

8. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$,则$\iint\limits_\Sigma(x^2+1)\mathrm{d}S=$____________.

9. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+1)^2$ 收敛,则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=$____________.

10. 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=$____________.

二、解下列各题(每小题 7 分,共 35 分)

1. 设 $z=yf\left(2x,\dfrac{y}{x}\right)$,其中 f 可微,求$\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

2. 求曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $M(2,1,0)$处的切平面及法线方程.

3. 设 $f(x,y)=\begin{cases}2x, & 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 求 $F(t)=\iint\limits_{x+y\leqslant t}f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 的表达式.

4. 计算曲面积分$\oiint\limits_\Sigma(x^2+y^2)\mathrm{d}S$,其中$\Sigma$是锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$及平面$z=1$所围成的区域的整个边界.

5. 求微分方程$(y^2-x^2)\mathrm{d}y+2xy\mathrm{d}x=0$ 的通解.

三、解下列各题(共 35 分)

1. (10 分)将函数 $f(x)=\dfrac{x-1}{4-x}$展开成$(x-1)$的幂级数，并求 $f^{(n)}(1)$.

2. (10 分)计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在 xOy 平面上方部分的上侧.

3. (8 分)求表面积为 a^2 而体积最大的长方体的体积.

4. (7 分)已知 $y(x)$满足微分方程 $y'-xy=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}$，且有 $y(1)=\sqrt{\mathrm{e}}$.

(1) 求 $y(x)$；

(2) 设 $D=\{(x,y)\mid 1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant y(x)\}$，求平面区域 D 绕 x 轴旋转所成旋转体的体积.