P24

五、$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & p & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & t \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & p+6 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & -4 & t \end{array}\right)$

$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & p+8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t+2 \end{array}\right)$

(1) $t \neq -2$ 时无解

(2) $t=-2$ 时有解.

1° $t=-2$ 且 $p=-8$ 时.

$(A|b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\operatorname{rank}(A)=2$

∴ 导出组基础解系有 $4-2=2$ 个向量.

$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{\xi}_2=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$AX=b$ 的特解 $\vec{\eta}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

∴ $AX=b$ 的通解为 $\vec{\eta}+c_1\vec{\xi}_1+c_2\vec{\xi}_2$

2° $t=-2$ 且 $p \neq -8$ 时.

$(A|b) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

∴ 导出组 $AX=0$ 的基础解系为

$\vec{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$AX=b$ 的特解

$\vec{\eta}=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

∴ $AX=b$ 的通解为 $\vec{\eta}+c_1\vec{\xi}_1$

六、将 $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$ 代入第1个方程. $1-p+t-1=0$

$t=p$

$$\begin{cases}x_1+px_2+px_3+x_4=0\\2x_1+x_2+x_3+2x_4=0\\3x_1+(2+p)x_2+(4+t)x_3+4x_4=1\end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&p&p&1&0\\2&1&1&2&0\\3&2+p&4+p&4&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&p&p&1&0\\0&1-2p&1-2p&0&0\\0&2-2p&4-2p&1&1\end{array}\right)$$

1° $1-2p\neq0$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&p&p&1&0\\0&1&1&0&0\\0&1&3&1&1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&1&0&0\\0&0&2&1&1\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1&0\\0&1&0&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

∴ 导出组 $AX=0$ 的基础解系

$\vec{\xi}=\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$

$AX=b$ 的一个特解 $\vec{\eta}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$

∴ $AX=b$ 的通解为 $\vec{\eta}+c\vec{\xi}$

2° 当 $p=\frac{1}{2}$ 时,

$$(A|b)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1&0\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&3&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

∴ 导出组 $AX=0$ 的基础解系

$\vec{\xi_1}=\begin{pmatrix}1\\-3\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{\xi_2}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

$AX=b$ 的特解 $\vec{\eta}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

∴ $AX=b$ 的通解为 $\vec{\eta}+c_1\vec{\xi_1}+c_2\vec{\xi_2}$