1 Определение выпуклой облочки

Определение 1.1. *Выпуклая оболочка множества точек S ($CH(S)$) это минимальное по включению выпуклое множество, содержащее все точки из S.*

Утверждение 1.1. *Если $|S| < \infty$, то $CH(S)$ есть выпуклый полигон, причем вершины $CH(S)$ принадлежат S.*

Доказательство. Достаточно доказать следующие два утверждения.

- Если найдется выпуклый полигон с вершинами из S, содержащий все точки из S, он будет выпуклой оболочкой S (доказывается сначала для треугольника, а потом для произвольного выпуклого полигона, триангуляцией).
- Найдется выпуклый полигон, содержащий все точки из S (доказывается индукцией по мощности S).

□

Утверждение 1.2. *Самая левая точка S принадлежит $CH(S)$.*

Утверждение 1.3. *Выпуклая оболочка может быть найдена за время $\Theta(n \log h)$, где $n = |S|$, $h = |CH(S)|$.*

Доказательство. Оценка $O(n \log h)$ доказывается сведением к сортировке, $\Omega(n \log h)$ доказывается конструктивно (алгоритм Чена). □

2 Алгоритмы поиска выпуклой оболочки

2.1 Алгоритм Джарвиса (заворачивание подарка)[1]

Самый естественный алгоритм, просто ищет последовательные вершины выпуклой оболочки, выполняя $h-1$ шаг, на каждом из которых, по текущей вершине выпуклой оболочки выбирается подходящий кандидат на звание следующей вершины перебором множества S. На первом шаге в качестве текущей вершины используется самая левая точка S, которая по утверждению (1.2) принадлежит $CH(S)$.

Время работы — $O(nh)$.

2.2 Метод сканирования Грэхэма[2]

Утверждение 2.1. *Для вершин замкнутой n-звенной ломаной без самопересечений выпуклая оболочка может быть найдена за $O(n)$.*

Существует несколько способов генерации по множеству S входа для метода сканирования Грэхэма.

- Сортировка точек из S по полярному углу относительно некоторой точки гарантированно лежащий внутри $CH(S)$. Этот способ используется в одном из вариантов *MergeHull*.

- Сортировка точек из S по полярному углу (в данном случае можно по повороту!) относительно некоторой вершины $CH(S)$. Это классический алгоритм Грэхэма.

- Склейка двух цепей, каждую из который можно получить сортировкой по полярному углу относительно бесконечно удаленной точки. Скажем, для генерации первой цепи используем (0, 1, 0), для второй — (0, -1, 0). Это алгоритм Эндрюса.

2.3 MergeHull[3]

Применение стандартной идеи "разделяй и властвуй", а именно, разбиение S на подмножества S_1, S_2, $S_1 \cup S_2 = S$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $||S_1| - |S_2|| \leq 1$; построение $CH(S_1), CH(S_2)$; и слияние выпуклых оболочек. Различают варианты когда S_1, S_2 выбираются произвольным образом, и когда S_1, S_2 разделены в пространстве ($CH(S_1), CH(S_2)$ соотвественно тоже). Время работы обоих вариантов $O(n \log n)$.

2.4 QuickHull[4]

В среднем самый быстрый, хотя в худшем случае время работы может достигать $O(n^2)$. Также использует идею "разделяй и властвуй".

2.5 Алгоритм Чена

Ассимптотическое время работы достигает нижней границы — $O(n \log h)$, но на практике этот алгоритм не применим.

2.6 Инкрементальный алгоритм[5]

[1] Описан даже в Кормене
[2] Есть где угодно (Wikipedia)
[3] Можно почитать у О'Рурка
[4] Есть в Wikipedia
[5] Можно почитать у Препараты, Шеймоса