1 Применение выпуклых оболочек

1.1 Поиск наиболее удаленных точек

Утверждение 1.1. *Наиболее удаленные точки лежат на границе выпуклой оболочки.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда, исходя из определения выпуклой оболочки, точки лежат в выпуклом полигоне. Проведем прямую через эти две точки. Очевидно, что прямая пересечет границу полигона в двух местах, так как фактически мы пустили из двух точек по лучу. Получается, что расстояние между точками, в которых пересеклась прямая с границей, больше, чем между данными по условию точками. Получили противоречие. □

Определение 1.1. Опорная прямая - это прямая, проходящая через точку выпуклой оболочки и обладающая тем свойством, что выпуклая оболочка лежит по одну сторону от нее.

Утверждение 1.2. *Через две наиболее удаленные точки можно провести две параллельные опорные прямые. (to do здесь нужен рисунок. У меня почему-то не вставляет eps файлы. Гуглил не помогло. Если додумаюсь то нарисую сразу же)*

Доказательство. Рассмотрим, для одной из наиболее удаленной точек все опорные прямые.
Для каждой такой прямой рассмотрим параллельную ей прямую, прохожящую через другую удаленную точку
В итоге мы найдем параллельную опорную прямую и во второй точке. □

Исходя из утверждений, доказанных выше, предъявим метод поиска наиболее удаленных точек.

1.1.1 Алгоритм вращающихся крепер

(to do нужен рисунок)

1. Выберем на выпуклой оболочки две точки A и B и построим две парралельные опорные прямые.
2. Будем вращать эти прямые по часовой стрелке с одинаковой угловой скоростью.
3. Когда прямая начнет пересекать целый отрезок, возьмем его крайнюю точку.
4. Из этой крайней точки строим опорную прямую и переходим на шаг 2.
5. Так перебираем все пары, пока не получим пару (B, A).

(to do а расстояние мы ищем между точками на шаге 4, так ведь?)

Утверждение 1.3. *Работа данного алгоритма - $O(M \log n)$, где M - это количество точек на выпуклой оболочке, что такое n - ? я не вспомнил.*

Доказательство. Исходя из алгоритма, мы пройдем все точки выпуклой оболочки $\longrightarrow$ O(M). Скорее всего $\log n$завязано на вращении □

1.2 Поиск наибольшего диаметра

Тут мне многое не понятно.

Утверждение 1.4. *Сложность $\omega(n \log n)$*

Доказательство. Сведем доказательство к поиску элементов из двух множеств. □

И еще тут окружность диаметром p = 2. Там мы ищем диаметр, но не понятно для чего это. Поясните кратко, пожалуйста.

2 Триангуляция Делоне

2.1 Цель триангуляции

(нужен рисунок, какой-либо триангуляции)
Дано множество точек $v = \{v\}_{i=1}^{n}$ и функция $f : V \to \Re$. Хотим интерполировать эту функцию.

Напомним, что такое интерполяция.

Определение 2.1. Интерполяция - это способ нахождения промежуточных значений величины по имеющемуся дискретному набору известных значений.

Для решения этой проблемы разобьем ω на треугольники, так что бы ω стала триангулированной выпуклой оболчкой. Дальше сопоставляем вершинам значения функции f в точке, а если не попадает будем брать центроид треугольника (что не попадает? похоже на ересь не хватает каких-то слов). Этим занимается метод конечных элементов.

(Можете еще раз рассказать те вводные слова)

2.2 Определение триангуляции

Определение 2.2. Триангуляция множества точек - это максимальный планарный граф.

Определение 2.3. Максимальный планарный граф - это такой граф, в который нельзя добавить ни одного ребра, не нарушив планарность.

Утверждение 2.1. *Все грани триангуляции множества точек, кроме внешней, являются треугольниками.*

Доказательство. Пусть у нас в триангуляции нашелся не треугольник, тогда по доказанному ранее утверждению(в теме про триангулцию полигона) существует диагональ. Проведя ее, получаем либо треугольник, либо еще пару не треугольников и ищем диагональ для них. В итоге все грани, кроме внешней - треугольники. □

Ясно, что триангуляций на заданном множестве может быть несколько. Как же тогда выяснить, какая триангуляция лучше?
Для этого надо ввести критерии, по которым будем сравнивать триангуляции. Скорее всего, первое что приходит на ум, это идея: **"Чем меньше треугольников в триангуляции, тем лучше".** Чтобы показать, что это не правда, докажем следующее утверждение.

Утверждение 2.2. *Количество треугольников в триангуляции на заданном множестве точек фиксировано.*

Доказательство. Для доказательства нам потребуется формула Эйлера для графов:

$$F + P - 2 = E$$

где $|V| = n$ - множество точек, F - грани из трех ребер, а E - количество ребер, которые можем посчитать.
А так же такой факт для графов, что

$$\sum_{i=1}^{n} v_i = 2E$$

Где v_i - степень вершины i, а E - как и ранее, количество ребер.
Посчитаем сумму степеней вершин:
to do еще подумаю как доказать, тупо надо формулу написать и посчитать. на паре же мы это смогли как-то сделать
Кстати формула выведенная на паре$(f - 1)3 + h = 2E$ - не работает для четырехугольника $3 * 3 + 4! = 2 * 8$, нужна такая $3f + h = 2E$ □

Предъявим критерии, которые будут давать ответ на вопрос, какая из триангуляций лучше.

1. $E_d = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla f|^2 d\Omega$ - энергия Дирихле.
   Необходимо минимизировать энергию Дирихле. $E_d \to min$
   Плохой случай: (to do рисунок) - линейная интерполяция по отрезку. Надо с этим разобраться.

2. Максимизация минимального угла треугольника.

3. $\sum_{t \in T} \frac{a^2+b^2+c^2}{S}$, где T - множество треугольников из триангуляции. Мы должны минимизировать этот ряд.

2.3 Триангуляция Делоне

2.3.1 Определения

Определение 2.4. Триангуляция Делоне - никакие точки из триангуляции не содержатся в окружности, описанной возле любого треугольнкиа из триангуляции.

to do рисунок для двух смежных треугольников, когда удолетворяет триангуляции и когда нет.

Утверждение 2.3. *Если критерий Делоне выполняется для каждой пары смежных треугольников, то он выполняется для любого треугольника из триангуляции.*

2.3.2 Доказательство существования

Для доказательства существования, такой триангуляции предъявим конструктивный алгоритм.

Алгоритм 2.1. Построение любой триангуляции.

1. Сортируем координаты по x.
2. Берем две точки в порядке возрастания x. Строим прямую.
3. Берем точку, если она лежит на прямой, повторяем этот шаг.
4. Если точка не лежит на прямой, соединяем её с точками, полученными ранее на прямой. Эта точка становится "началом"прямой, переходим к шагу 3.

Ведь мы выходим из алгоритма когда обработали каждую точку?

Определение 2.5. Операция Flip - это смена общей стороны у двух смежных треугольников (поворот диагонали в четырехугольнике).

to do нужен рисунок иллюстрирующий это.

Утверждение 2.4. *Если для пары смежных треугольников не был выполнен критерий Делоне, то после Flip-а он будет выполняться.*

Доказательство. Это надо доказывать же? (Если да, то тут вроде необходима школьная геомтерия) □

После определения операции Flip алгоритм дальнейших действий очевиден. Нужно для каждой пары смежных треугольников, у которых не выполняется критерий Делоне, произвести операцию Flip. Чтобы понять, что данные действия конечны, докажем следующее утверждение.

Утверждение 2.5. *Нужно сделать конечное число Flip.*

Доказательство. надо читать, то что кинули. С минимизацией объема и то что $(x, y) \to (x, y, x^2 + y^2)$ □

2.3.3 Доказательство выполнимости критериев