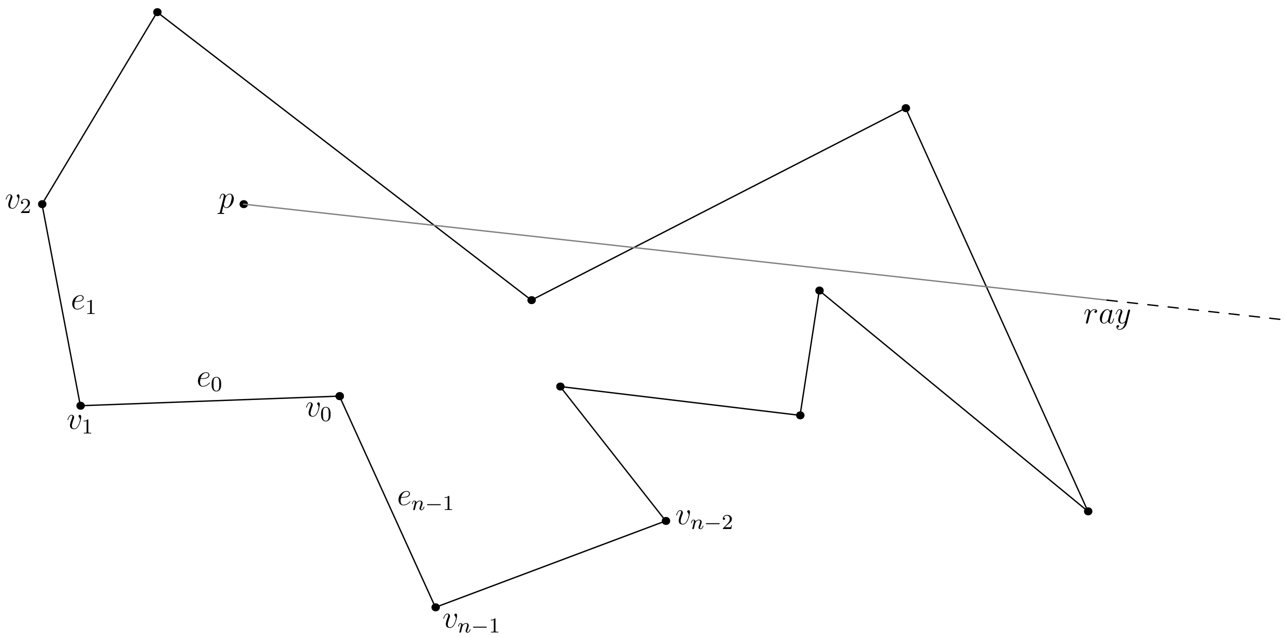
1 Определение полигона

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ — замкнутая ломаная без самопересечений. $\Gamma = e_0 \cup e_1 \cup ... \cup e_{n-1}, e_i = [v_i, v_{i+1}], v_i = v_{n+i}$. Определим функцию $isects(p, ray) \to \{0, 1\}$, $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ возвращающую четность числа пересечений луча ray



с началом в точке p с Γ. При подсчете числа пересечений необходимо учитывать два особых случая:

- $ray \cup \{v_{i-1}v_iv_{i+1}\} = v_i$,
- $ray \cup \{v_{i-1}v_i...v_jv_{j+1}\} = e_i \cup ... \cup e_{j-1}$.

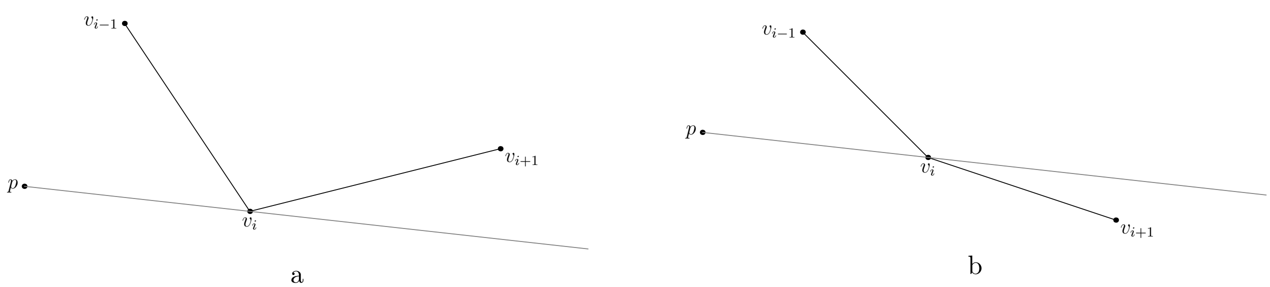


Рис. 1: особый случай пересечения первого типа

В случае (1) будем считать, что если вершины v_{i-1}, v_{i+1} лежат по одну сторону от луча ray (a), то пересечение в точке v_i не засчитывается, а если по разные (b), то засчитывается ровно одно.

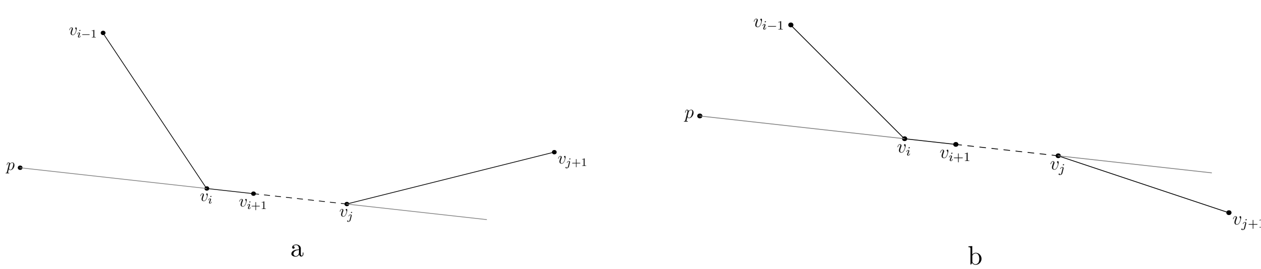


Рис. 2: особый случай пересечения второго типа

Случай (2) на самом деле не сильно отличается от случая (1), если представить себе, что цепь $\{v_i v_{i+1} ... v_j\}$ схлопывается в одну точку. Соответственно, если вершины v_{i-1}, v_{j+1} лежат по одну сторону от луча ray (a), то пересечение по цепи $\{v_i v_{i+1} ... v_j\}$ не засчитывается, а если по разные (b), то засчитывается ровно одно.

Утверждение 1.1. *Функция $isect(p, ray)$ зависит только от p.*

Доказательство. Функция $isect(p, ray)$ непрерывна по аргументу ray и принимает дискретные значения, значит она постоянна. □

Определение 1.1. Задавшись замкнутой ломаной Γ, определим полигон P следующим образом.

$$int(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{p \mid isect(p) = 1\},$$

$$ext(P) \stackrel{\text{def}}{=} \{p \mid isect(p) = 0\},$$

$$P \stackrel{\text{def}}{=} int(P) \cup \Gamma.$$

Интуитивно понятные термины границы, внутренности, связности полигона совпадают с тем, как они определяются в топологии.

Утверждение 1.2. Γ *— граница* P.

Доказательство. Напомним, что граница это множество точек, в каждой окрестности которых есть точки как принадлежащие P, так и нет.

Точка p лежащая строго внутри e_i — граничная. Рассмотрим окрестность p с радиусом $r = \min_{j \neq i} dist(e_j, p)$, внутри которой выберем две точки $p_1, p_2 \notin e_i$ так, чтобы p_1, p, p_2 лежали на одной прямой, причем точка p находилась между p_1 и p_2. Ясно, что луч пущенный из p_1 в сторону p_2 имеет на одно пересечение с Γ больше, чем его подлуч с началом в p_2, а значит, либо $p_1 \in P, p_2 \notin P$, либо наоборот.

Точка p совпадающая с вершиной v_i — граничная. Этот случай отличается от предыдущего тем, что $r = \min_{j \neq i-1, i} dist(e_j, p)$ и $p_1, p_2 \notin e_{i-1}, e_i$.

Точка p не принадлежащая Γ не принадлежит границе. Рассмотрим окрестность p с радиусом $r = \min dist(p, \Gamma) = \min_{i=1..n} dist(p, e_i)$ (из последнего равенства видно, что $r > 0$). Луч пущенный из всех точек этой окрестности, так чтобы он проходил через p пересекается с Γ такое же число раз, как и луч пущенный из p, а значит, все точки этой окрестности принадлежат P, если $p \in P$, и не принадлежат иначе.

□

Утверждение 1.3. $int(P)$ *— внутренность* P.

Доказательство. Напомним, что внутренность это максимальное по включению открытое подмножество.

$int(P)$ **— открыто.** Следует из последнего пункта доказательства предыдущего утверждения.

$int(P)$ **— максимальное из открытых.** Так как точки Γ — граничные, они не могут входить во внутренность.

□

Утверждение 1.4. *$int(P)$, $ext(P)$ — связны. $int(P) \cup ext(P) = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ — несвязно.*

Доказательство. Напомним, что необходимым и достаточным условием связности множества в $\mathbb{R}^2$, является то, что любые две точки множества можно соединить непрерывнм путем, принадлежащим множеству.

Существует путь между произвольными точками $p_1, p_2 \in int(P)\,(ext(P))$.

Не существует пути между $p_1 \in int(P)$, $p_2 \in ext(P)$.

□

Зачем нужно столь формализованное опеределение полигона? Одно из применений — алгоритм определения принадлежности точки полигону, для которого обоснование корректности тривиально. Соответсвует ли полигон, определенный таким образом, тем свойствам, которые ожидаются? Давайте покажем парочку.

Утверждение 1.5. *Выпуклый полигон (в смысле пересечение конечного числа полуплоскостей) — полигон в определенном выше смысле.*

Доказательство. Как и все почти, доказывается по индукции. □

Утверждение 1.6. *Если вершины границы полигона конечны, то полигон ограничен.*

2 Триангуляция полигона

Art Gallery Problem (точная формулировка в Wikipedia). Дана картинная галерея в форме полигона, необходимо расставить в ней минимальное возможное число охранников так, чтобы каждая точка галереи была под наблюдением.

Идея решения. Понятно, что для любого выпуклого полигона (в частности, треугольника) хватит одного охранника, расположенного в любой точке, к примеру, в вершине. Поэтому, мы бы решили задачу, если бы нам удалось разбить исходный полигон на треугольники, и расставить охранников в некоторые из вершин получившихся треугольников так, чтобы каждому треугольнику была инцидентна хотя бы одна вершина с охранником. Скажем, если бы вершины треугольников были покрашены в три цвета так, чтобы вершины каждого трегольника были разных цветов, то ответом могли бы стать все вершины одного из цветов. Если множество вершин треугольника совпадает с множеством вершин полигона (путь его мощность n), то по принципу Дирихле мощность ответа не превосходит $\lfloor n/3 \rfloor$.

С другой стороны существует примеры полигонов со сколько угодно большим числом вершин n, для которых $\lfloor n/3 \rfloor$ — нижняя граница ответа.

Для формализации разбиения на полигона на треугольники и алгоритма покраски вершин введем понятие *триангуляции полигона.* □

Определение 2.1. Диагональ полигона — отрезок, концы которого — вершины полигона, а внутрении точки принадлежат внутренности полигона.

Будем говорить, что две диагонали не пересекаются, если не пересекаются множества их внутренних точек.

Определение 2.2. Триангуляция полигона — максимальное по включению множество попарно непересекающихся диагоналей.

Утверждение 2.1. *Если число вершин полигона больше трех, он имеет диагональ.*

Утверждение 2.2. *Диагональ разбивает полигон. А именно, путь полигон P имеет границу $\Gamma = \{v_0 v_1 v_2 ... v_{n-1} v_n\}$, и $v_i v_j$ его диагональ, обозначим как P_1 полигон с границей $\Gamma_1 = \{v_i v_{i+1} ... v_j v_i\}$, как P_2 полигон с границей $\Gamma_2 = \{v_j v_{j+1} ... v_i v_j\}$. Тогда $P_1 \cup P_2 = P$, $P_1 \cap P_2 = v_i v_j$.*

Утверждение 2.3. *То что мы определили как "триангуляция" названо так неслучайно, а именно, триангуляция разбивает полигон на треугольники.*

Последнее утверждение кажется очевидным, и действительно, с помощью утверждений (2.1) и (2.2) его несложно доказать индукцией по числу вершин: база — треугольник, переход осуществляется разбиением полигона на два с помощью какой-нибудь диагонали. Но оно нетривиально и, не определяя полигон формально, доказать его без рукомахательства непросто. Чтобы продемонстрировать это, попробуйте доказать что любой политоп триангулируем, то есть разбивается на тетраэдры (**подсказка:** это неправда).