1 Вычисление площади полигона

1.1 Площадь треугольника

Для поиска площади треугольника возьмем четвертую точку P(см. рис 1).

a

Рис. 1: Случаи расположения точки относительно треугольника

Будем обозначать ориентированную площадь - A. Тогда исходя из рисунков очевидна такая формула:

$$2 * A_{ABC} = A_{PAB} + A_{PBC} + A_{PCA}$$

Поясним что в ситуации на рис 1.а A_{PAB} будет отрицательна. А в ситуации на рис 2.б A_{PAB} будет положительна. Распишем одно из слагаемых в виде векторного произведения:

$$A_{PAB} = [(P - A) \times (P - B)] = [A \times B] + [P \times (A - B)]$$

Тогда, расписав каждое слагаемое подобным образом, получаем:

$$2A_{ABC} = [A \times B] + [B \times C] + [C \times A] = \begin{vmatrix} a_x & a_y & 1 \\ b_x & b_y & 1 \\ c_x & c_y & 1 \end{vmatrix}$$

1.2 Площадь четырехугольника

Площадь произвольного четырехугольника будем считать с помощью разбиения на треугольники. Рассмотрим несколько ситуаций:

a b

Рис. 2: Четырехугольники

Если посчитать площадь четырехугольника как сумму площадей треугольников $A_{ABC} + A_{ACD}$ то, расписав эти слагаемые через векторные произведения, получим что:

$$2A_{ABCD} = [A \times B] + [B \times C] + [C \times D] + [D \times A]$$

Слагаемые $[A \times C] + [C \times A]$ сократились.

Очевидно, что если мы будем считать площадь четырехугольника, приведенного на рис.2б, через сумму $A_{ACD} + A_{ACB}$, получим такую же формулу, изложенную выше. Заметим, что если разложить площадь четырехугольника через $A_{CDB} + A_{ADB}$, слагаемые относительно DB уйдут и получим тоже формулу.

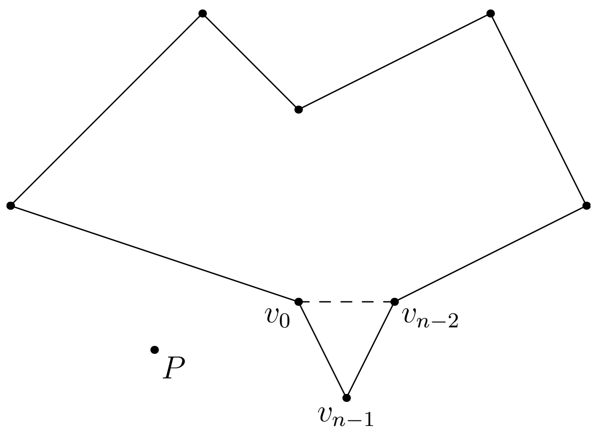

Рис. 3: Выпуклый четырехугольник

1.3 Площадь полигона

Теорема 1.1. *Пусть дан полигон* $[v_0, v_1, \dots, v_{n-1}]$, *тогда площадь можно найти:*

$$2A_{Poly} = [v_0 \times v_1] + [v_1 \times v_2] + \dots + [v_{n-1} \times v_0]$$

Доказательство. <u>База:</u> Для треугольника доказали выше.
<u>Индукционный переход:</u> У любого полигона есть ухо(см. рис 3). Тогда площадь:

$$2A_{Poly_{n-1}} = A_{Poly_{n-2}} + A_{Pv_{n-2}v_{n-1}} + A_{Pv_{n-1}v_0} + A_{Pv_0v_{n-2}}$$

По индукционному предположению

$$2A_{Poly_{n-2}} = A_{Pv_0v_1} + A_{Pv_1v_2} + \dots + A_{Pv_{n-2}v_0}$$

Заметим что $A_{Pv_0v_{n-2}} + A_{Pv_{n-2}v_0} = 0$, тогда в результате получаем

$$2A_{Poly_{n-1}} = A_{Pv_0v_1} + A_{Pv_1v_2} + \dots + A_{Pv_{n-1}v_0}$$

□

Следствие 1.1.1. *Уравнение площади через координаты:*

$$2A_{Poly} = \sum_{i=0}^{n-1} x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i = \sum_{i=0}^{n-1} (x_i - x_{i+1})(y_i + y_{i+1})$$

1.4 Метод Монте-Карло

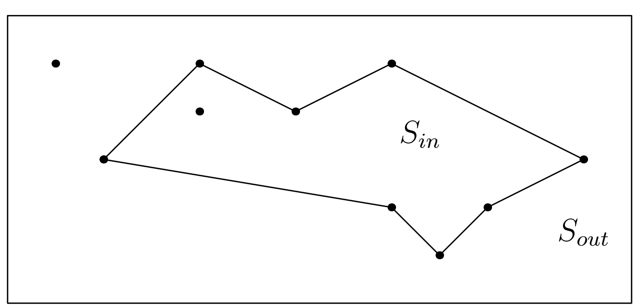

Рис. 4: фигура, вписанная в простую фигуру

Суть метода заключается в том, что исходную фигуру вписываем в простую фигуру, площадь которой можем посчитать. В рис.4 S_{out} - площадь прямоугольника. А дальше бросаем в простую фигуру N точек($N \to \inf$), определяя, куда попала каждая точка. В итоге получаем соотношение:

$$\frac{k}{N} = \frac{S_{in}}{S_{out}}$$

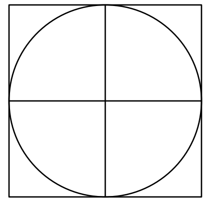

Рис. 5: Окружность, вписанная в квадрат

где k - количество точек, которые попали в нашу исходную фигуру, S_{in} - искомая площадь.

Так же с помощью метода Монте-Карло можно посчитать приближенное значение π. Опишем возле окружности квадрат(см. рис.5) и будем бросать в него точки. Воспользовавшись соотношением, изложенным ранее, получаем:

$$\frac{k}{N} = \frac{S_{in}}{S_{out}} = \frac{\pi r^2}{(2r)^2} = \frac{\pi}{4}$$

2 Триангуляция полигона

2.1 Метод отрывания ушей

2.2 Триангуляция монотонного полигона