1.

Утверждение 0.1. *Доказать или опровергнуть, что любое двоичное дерево является двойственным графом триангуляции некоторого полигона.*

Доказательство. Будем доказывать по индукции, что двоичное дерево является двойственным графом триангуляции.

База: Один треугольник соответствует одной вершине.

Индукционное предположение Пусть бинарное дерево с n-1 является двойствнным графом триангуляции полигона

Индукционный переход $n-1 \to n$. (Считаем что мы берем любой соседний треугольник к треугольнику находящимуся в дереве) Так как треугольник в триангулции имеет только трех соседей. Следовательно новый треугольник смежен с любым треугольником(вершиной) у которых степень равна 1, 2. Понятно что добавление этой вершины в бинарное дерево не нарушит его свойств.

Отдельно рассмотрим ситуацию, когда корень имеет двух детей. И к нам приходит треугольник, являющийся соседом "корневому"треугольнику. В таком случае у нас корнем страновится новый пришедший треугольник и мы не нарушаем свойств бинарности. Ну и в конечном итоге такой треугольник у которого степень вершины будет равна единице или двум найдется так как треугольники у которых ребра входят в границу полигона имеют строго меньше трех соседей. □

2. **Непланарность графа K_5**

Утверждение 0.2. *Граф K_5 - полный пятивершинный граф. Доказать, что он не может быть уложен на плоскость прямолинейным способом.*

Доказательство. Воспользуемся формулой Эйлера для графа В - Р + Г = 2, где В-количество вершин, Р - количество ребер, Г - количество граней. Для K_5 - В = 5, Р = 10, тогда граней Г = 7. Понятно что каждая грань имеет хотя бы три ребра, тогда $3 * 7 \leq 2 * 10$ Получаем противоречие, следовательно граф не планарен. □

3. **Извлечение выпуклой оболочки из триангуляции множества точек** Пусть некоторая триангуляция множества точек храниться следующим образом. Для каждой вершины хранится указатель на какой-нибудь инцидентный ей треугольник, а для каждого треугольника хранятся указатели на инцидентные ему вершины в порядке обхода против часовой стрелки и указатели на смежные треугольники. Причем i-й ($i \in 1, 2, 3$) треугольник граничит с данными по ребру противолежащему i-й вершине. Если соседа по i-му ребру нет, указатель равен nil. Придумать алгоритм, перечисляющий вершины выпуклой оболочки в порядке обхода против часовой стрелки

Я сделал вывод, раз для каждой вершины храниться указатель на какой-нибудь инцидентный ей треугольник, то значит есть где-то массив вершин и за O(n) мы можем достать крайную левую вершину. Она точно будет принадлежать ответу.

Алгоритм

(a) $startPoint \leftarrow getMinLeftPoint()$

(b) $currentPoint \leftarrow startPoint$

(c) do {

(d) $triangle \leftarrow getIncidentTriangle()$

(e) $nextCurrentPoint \leftarrow triangle.nextPoint(currentPoint)$

(f) $currentTriangle \leftarrow triangle$

(g) $while(currentTriangle.getNeighbors(Edge(currentPoint, nextCurrentPoint))! = nil)\{$

(h) $currentTriangle \leftarrow currentTriangle.getNeighbors(Edge(currentPoint, nextCurrentPoint))$

(i) $nextCurrentPoint \leftarrow currentTriangle.nextPoint(currentPoint)$

(j) }

(k) $currentPoint \leftarrow currentTriangle.nextPoint(currentPoint)$

(l) $answer \leftarrow currentPoint$

(m) } while(currentPoint != startPoint)

Функция nextPoint(currentPoint) - возвращает следующую точку после currentPoint в обходе против часовой стрелки. Функция getNeighbors(Edge) - возвращает соседа, соответствующие данному ребру. Функция getIncidentTriangle() - возвращает инцидентный треугольник данной точки.

4. **Единственность триангуляции Делоне**

   Утверждение 0.3. *Доказать, что если никакие четыре точки из множества не лежат на одной окружности, то триангуляция Делоне этого множества точек единственна.*

   Доказательство. Пусть это не так, то есть существует несколько триангуляций Делоне, при том что любые четыре точки не лежат на одной окружности. Рассмотрим четыре точки $\{1, 2, 3, 4\}$, в которых отличаются две триангуляций. В первой триангуляции есть ребро 1-3, а во второй 2-4. Понятно, что треугольники проходящие через эти точки в триангуляции получаются после Flip-ов треугольников(в-первом случае треугольники: 1-2-3, 1-3-4, а во-втором сслучае: 1-2-4, 4-3-2). В итоге мы получили, что есть пары треугольников для которых выполняется критерий Делоне и один случай приводиться к другому через операцию Flip. С учетом того что у нас никакие четыре точки не лежат на окружности получаем противоречие с операцией Flip. □

5. **Поиск ближайщей вершины**

   Утверждение 0.4. *Пусть для некоторого множества точек построена триангуляция Делоне. Доказать или опровергнуть, что ближайщей к произвольное точке плоскости будет одна из вершин треугольника, в котором лежит данная точка.*

   Доказательство. □