1 способ

Для поиска центра описанной окружности давайте определим его барицентрические координаты, то есть решим систему вида

$$\begin{cases} O = \alpha A + \beta B + \gamma C, \\ \alpha + \beta + \gamma = 1, \\ 0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1. \end{cases}$$

где O - центр окружности.
Обозначим A', B', C' - точки пересечения серединных перпендикулров со сторонами треугольника.
Из картинки видно что

$$O = C' + (O - C') = C' + \frac{dist(OC')}{h_c}(C - H_c).$$

Ясно, что существуют скаляры $\alpha', \beta', \alpha'', \beta''$, такие что

$$C' = \alpha' A + \beta' B,\ H_c = \alpha'' A + \beta'' B.$$

Таким образом,

$$O = C' + \frac{r}{h_c}(C - H_c) = \alpha''' A + \beta''' B + \frac{dist(OC')}{h_c}C,$$

где α''', β''' нам совершенно не интересны.
Из последней формулы видно, что $\gamma = \frac{dist(OC')}{h_c} = \frac{dist(OC')*c}{2S(\triangle ABC)}$, а значит $\gamma = \frac{dist(OC')*c}{2S}$.
Для того что бы найти dist(OC') воспользуемся формулой $R = \frac{abc}{4S}$ и теоремой Пифагора для $\triangle AOC'$

$$dist(OC') = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c}{4S}\sqrt{a^2b^2 - 4S^2}$$

тогда

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a^2}{8S^2}\sqrt{b^2c^2 - 4S^2} \\ \beta = \frac{b^2}{8S^2}\sqrt{a^2c^2 - 4S^2} \\ \gamma = \frac{c^2}{8S^2}\sqrt{a^2b^2 - 4S^2} \end{cases}$$

где $S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}$ - площадь Герона

Получаем формулу

$$O = \frac{a^2}{8S^2}\sqrt{b^2c^2 - 4S^2} * A + \frac{b^2}{8S^2}\sqrt{a^2c^2 - 4S^2} * B + \frac{c^2}{8S^2}\sqrt{a^2b^2 - 4S^2} * C$$

2 способ

1) Построить уравенния прямых для двух середнных перпендикуляров
2) Найти пересечения двух серединных перпендикуляров, как пересечение лвух прямых. Полученная точка будет являться ответом.
Вычисление не привожу, так как они достаточно тяжелы.

3 способ

1) С помощью формулы $R = \frac{abc}{4S}$ из любых двух вершин треугольника получаем формулы двух окружностей.
2) Ищем точки пересечения окружностей (показанно на лекции)
3) Определяем с помощью ориентации треугольников ту точку, которая лежит внутри треугольника. Она и будет являться центром.