

# 1

Для поиска предиката вспомним уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Заменяя  $z = x^2 + y^2$ , получаем

$$x^2 + y^2 + Ax + By + D = 0$$

поделим на  $C$  и получим уравнение окружности

$$x^2 + y^2 + \frac{A}{C} + \frac{B}{C} + \frac{D}{C} = 0$$

$$x^2 + y^2 - A'x - B'y + C' = 0$$

где  $A' = -2a$ ,  $B' = -2a$ ,  $C' = a^2 + b^2 - R^2$

И прежде чем, построить уравнение плоскости через три точки, покажем что если уравнение плоскости меньше нуля, то точка принадлежит окружности. Мы это сделаем с помощью следующих преобразований.

$$x^2 + y^2 + Ax + By + D \leq 0$$

$$x^2 + y^2 + \frac{A}{C} + \frac{B}{C} + \frac{D}{C} \leq 0$$

$$x^2 + y^2 - A'x - B'y + C' \leq 0$$

$$(x - A'')^2 + (y - B'')^2 \leq D''$$

А последнее уравнение дает нам условие принадлежности точки окружности. В обратную сторону доказательство аналогично.

Теперь построим уравнение плоскости проходящей через три точки.

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_a^2 + y_a^2 & x_a & y_a & 1 \\ x_b^2 + y_b^2 & x_b & y_b & 1 \\ x_c^2 + y_c^2 & x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

И исповзовав свойство доказанное ранее, получаем предикат

$$P(\Delta, \bullet) = \begin{vmatrix} x_d^2 + y_d^2 & x_d & y_d & 1 \\ x_a^2 + y_a^2 & x_a & y_a & 1 \\ x_b^2 + y_b^2 & x_b & y_b & 1 \\ x_c^2 + y_c^2 & x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} \leq 0$$