

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №5

**ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ**

Студент: Заводин Е.Ю.  
Лин САУ R23 бак 1.1.1

Преподаватели: Перегудин А.А.  
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1 Задача исследования типовых динамических звеньев</b>	<b>3</b>
1.1 ДПТ . . . . .	3
1.2 ДПТ 2.0 . . . . .	4
1.3 Конденсуй-умножай . . . . .	5
1.4 Пружинка . . . . .	6
1.5 Что ты такое? . . . . .	7
<b>2 Вывод по работе</b>	<b>7</b>
<b>3 Приложение А. Код для выполнения заданий</b>	<b>8</b>

# 1 Задача исследования типовых динамических звеньев

В работе исследуются реальные объекты — находятся их передаточные функции, сопоставляются с типовыми звеньями, временные и частотные характеристики объектов моделируются и сравниваются с конкретными теоретическими для найденных типовых звеньев.

## 1.1 ДПТ

Рассмотрим ДПТ независимого возбуждения, задаваемый формулами

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon_i}{R}, \varepsilon_i = -k_e \omega.$$

Считая  $U$  входом,  $\omega$  — выходом, сведу формулы к одному линейному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= k_m \frac{U - k_e \omega}{R} = \frac{U k_e}{R} - \frac{k_m k_e \omega}{R} \\ J\dot{\omega} + \frac{k_m k_e \omega}{R} &= \frac{k_m}{R} U \\ \frac{JR}{k_m} \dot{\omega} + k_e \omega &= U \\ \frac{\omega}{U} &= W(s) = \frac{1}{\frac{JR}{k_m} s + k_e} = \frac{1}{k_e} \frac{1}{\frac{JR}{k_e k_m} s + 1} \\ W(s) &= \frac{k}{Ts + 1}, T = \frac{JR}{k_e k_m}, K = \frac{1}{k_e} \end{aligned}$$

Получил передаточную функцию в стандартизированном виде, соответствующую реальному усилительному звену. Выделю действительную и мнимую части этой передаточной функции:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{k}{Ts + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{k}{T(j\omega) + 1} \\ W(j\omega) &= \frac{k(T(j\omega) - 1)}{(T(j\omega) + 1)(T(j\omega) - 1)} = \frac{-K}{-1 - \omega^2} + i \frac{KT\omega}{-1 - \omega^2} = \frac{K}{1 + \omega^2} + i \frac{-KT\omega}{1 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Пусть  $P(\omega) = \frac{K}{1 + \omega^2}$ ,  $Q(\omega) = \frac{-KT\omega}{1 + \omega^2}$ . Рассчитаю АЧХ такой передаточной функции:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(KT\omega)^2 + K^2}{(1 + \omega^2)^2}}.$$

Фазово-частотная характеристика может быть найдена по следующей формуле:

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)).$$

У двигателя постоянного тока активное сопротивление обмоток ротора  $R$ , момент инерции ротора  $J$  и конструктивные постоянные  $k_e, k_m$  при реальном моделировании являются положительными, также буду считать, что  $\omega$  принимает только неотрицательные значения (в отрицательной области для вещественной функции результат преобразования Лапласа будет симметричен результату в положительной области). Исходя из этого, коэффициент усиления и постоянная времени

$$T = \frac{JR}{k_e k_m} > 0, K = \frac{1}{k_e} > 0.$$

Тогда числитель действительной части передаточной функции всегда положителен, как и знаменатель, а значит,  $P(\omega) > 0$ . Числитель мнимой части передаточной функции же всегда отрицателен, а знаменатель всегда положителен, следовательно,  $Q(\omega) < 0$ . Исходя из этих соображений, комплексное число  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  находится в четвёртом квадранте, а значит, вместо  $\text{atan2}(Q(\omega), P(\omega))$  можем использовать  $\arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$ :

$$\arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-KT\omega}{1 + \omega^2}}{\frac{K}{1 + \omega^2}}\right) = \arctan\left(\frac{-KT\omega}{K}\right) = \arctan -T\omega = -\arctan T\omega$$

## 1.2 ДПТ 2.0

Рассмотрим уравнения для полной модели ДПТ независимого возбуждения:

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon}{R}, \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s, \varepsilon_i = -k_e \omega, \varepsilon_s = -L\dot{I}.$$

Считая  $U$  входом,  $\omega$  — выходом, сведём формулы к одному линейному дифференциальному уравнению:

$$\begin{aligned} J\dot{\omega} &= k_m \frac{U - k_e \omega - L\dot{I}}{R} = \frac{k_m}{R} U - \frac{k_m k_e \omega}{R} - \frac{L\dot{I} k_m}{R} \cdot \frac{R}{k_m} \\ &\quad \frac{JR}{k_m} \dot{\omega} + k_e \omega + L\dot{I} = U \\ J\dot{\omega} &= k_m I \Rightarrow I = \frac{J\dot{\omega}}{k_m}, \dot{I} = \frac{J\ddot{\omega}}{k_m} \\ \frac{JL}{k_m} \ddot{\omega} + \frac{JR}{k_m} \dot{\omega} + k_e \omega &= U \Leftrightarrow \ddot{\omega} + \frac{R}{L} \dot{\omega} + \frac{k_e k_m}{J} \omega = \frac{k_m}{J} U \end{aligned}$$

Переведу получившееся уравнение в пространство изображений Лапласа:

$$\begin{aligned} s^2 \Omega(s) + \frac{R}{L} s \Omega(s) + \frac{k_e k_m}{J} \Omega(s) &= \frac{k_m}{J} U(s) \\ W(s) &= \frac{U(s)}{\Omega(s)} = \frac{\frac{k_m}{J}}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{k_e k_m}{J}} = \frac{\frac{1}{k_e}}{\frac{J}{k_e k_m} s^2 + \frac{RJ}{k_e k_m L} s + 1} \\ W(s) &= \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}, K = \frac{1}{k_e}, T = \sqrt{\frac{J}{k_e k_m}}, \xi = \frac{TR}{2L} \end{aligned}$$

Получена передаточная функция в стандартизированном виде, соответствующая колебательному звену. Для выделения действительной и мнимой части сперва перейду к частотной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1}$$

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{K(T^2(j\omega)^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(T^2(j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1)(T^2(j\omega)^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))} = \frac{K(-T^2\omega^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(-T^2\omega^2 + 1 + j2T\xi\omega)(-T^2\omega^2 + 1 - j2T\xi\omega)} = \\ &= \frac{K(-T^2\omega^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} = \frac{K - KT^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} + j \frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}. \end{aligned}$$

Пусть  $P(\omega) = \frac{K - KT^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}$ ,  $Q(\omega) = \frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}$ . Рассчитаю амплитудно-частотную характеристику:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\left(\frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)^2 + \left(\frac{K - KT^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4K^2T^2\xi^2\omega^2 + K^2 - 2K^2T^2\omega^2 + K^2T^4\omega^4}{((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}} = \\ &= K \sqrt{\frac{4T^2\xi^2\omega^2 - 2T^2\omega^2 + T^4\omega^4 + 1}{((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}} = K \sqrt{\frac{T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1}{((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}}. \end{aligned}$$

Фазо-частотная характеристика будет определяться следующим образом:

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \text{atan2}\left(\frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}, \frac{K - KT^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)$$

Расположение  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  на комплексной плоскости, а значит, и оценка фазовой частотной характеристики определяется в зависимости от того, положительные ли значения принимают  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ .

Знаменатели  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  всегда положительны. Тогда знаки вещественной и мнимой части  $W(j\omega)$  определяются их числителями —  $Q(\omega) < 0$  (т.к.  $K, T, \xi > 0$ ), знак  $P(\omega)$  меняется в зависимости от значения  $\omega$ .

Рассмотрим  $P(\omega) > 0$ :

$$\frac{1 - T^2\omega^2}{((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - T^2\omega^2 > 0 \Leftrightarrow \omega < \frac{1}{T}$$

Тогда  $P(\omega) > 0$  при  $\omega > \frac{1}{T}$ ,  $P(\omega) = 0$  при  $\omega = \frac{1}{T}$ . следовательно:

При  $0 \leq \omega < \frac{1}{T}$   $W(j\omega)$  находится в четвертом квадранте, значит,

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right).$$

При  $\omega = \frac{1}{T}$   $W(j\omega)$   $P(\omega) = Q(\omega) = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

При  $\omega > \frac{1}{T}$   $W(j\omega)$  в третьем квадранте, а значит,

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) + \pi = -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right) + \pi.$$

Итого:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right), & \omega \in [0, \frac{1}{T}) \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T} \\ -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right) + \pi, & \omega \in (\frac{1}{T}, +\infty) \end{cases}$$

### 1.3 Конденсируй-умножай

В задании рассматривается уравнение конденсатора

$$I = C \frac{dU}{dt}$$

с  $I(t)$  в качестве входа и  $U(t)$  в качестве выхода.

Для вывода передаточной функции представлю уравнение в виде

$$C\dot{U} = I$$

Тогда передаточная функция выглядит следующим образом:

$$W(s) = \frac{1}{Cs}$$

Она представима в стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{K}{s}, K = \frac{1}{C}$$

Функция сопоставима с идеальным интегрирующим звеном. Ёмкость конденсатора — величина неотрицательная, соответственно и  $K > 0$ . Для определения АЧХ и ФЧХ перейду к частотной передаточной функции и разобью её на вещественную и мнимую составляющие:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{K}{s} \Leftrightarrow W(j\omega) = \frac{K}{j\omega} \\ W(j\omega) &= \frac{-jK\omega}{(j\omega)(-j\omega)} = \frac{-jK\omega}{\omega^2} = \frac{-jK}{\omega}. \end{aligned}$$

В этом случае действительная составляющая  $P(\omega)$  равна 0, значит,  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  — чисто мнимое число, при этом  $Q(\omega) < 0$ . Найду АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{W(j\omega)^2} = \sqrt{\left(\frac{-jK}{\omega}\right)^2} = \frac{K}{\omega}.$$

ФЧХ же в этом случае будет определяться так:

$$\varphi(\omega) = \text{atan}2\left(\frac{-K}{\omega}, 0\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

## 1.4 Пружинка

В задании рассматривается пружинный маятник, представленный на рисунке:

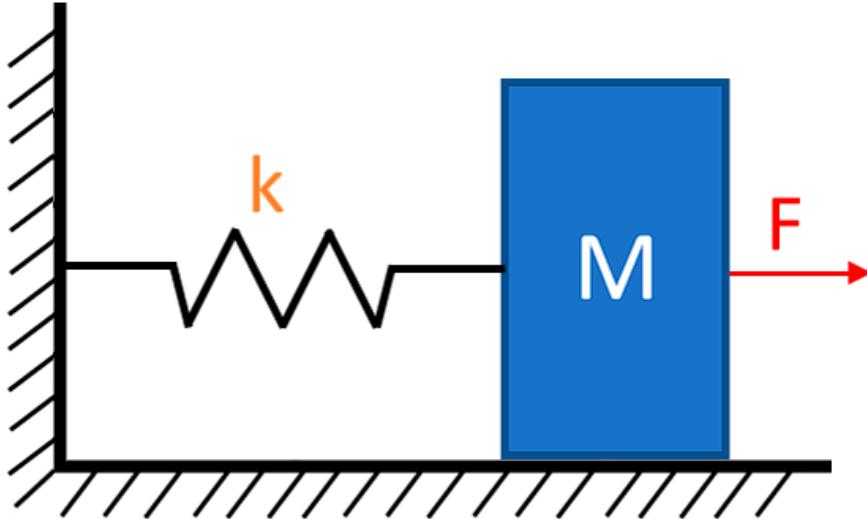


Рисунок 1: Пружинный маятник

Его движение задаётся следующими уравнениями:

$$F_{\text{упр}} = -kx, F = ma.$$

Входом этой системы считается некая внешняя сила  $F_{\text{ext}}$ , направленная соосно движению маятника, а выходом — траектория движения  $x(t)$ . Так как  $a = \ddot{x}$ :

$$F_{\text{ext}}(t) = m\ddot{x} + kx$$

Переходим к пространству изображений Лапласа:

$$ms^2 X(s) + kX(s) = F_{\text{ext}}(s)$$

$$X(s)(ms^2 + k) = F_{\text{ext}}(s)$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{F_{\text{ext}}(s)} = \frac{1}{ms^2 + k} = \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + 1}$$

В стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1}, K = \frac{1}{k}, T^2 = \frac{m}{k}$$

Получаем консервативное звено. Найдём АЧХ и ФЧХ, перейдя к частотной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 1} = \frac{K}{-T^2 \omega^2 + 1}$$

В этом случае в качестве  $W(j\omega)$  получается вещественное число. Тогда АЧХ — просто его модуль:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \left| \frac{K}{-T^2\omega^2 + 1} \right|.$$

Заметно, что АЧХ имеет разрыв в точке  $\omega_0 = \frac{1}{T}$ , и ФЧХ также не определена на этой частоте из-за наличия резонанса (знаменатель становится равен нулю). При этом частотная передаточная функция положительна, если  $0 < \omega \leq \omega_0$ , и отрицательна при  $\omega > \omega_0$ . Имея  $Q(\omega) = 0$ ,  $P(\omega) = \frac{K}{-T^2\omega^2 + 1}$ , получаем:

$$\text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{0}{P(\omega)}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} 0, & 0 < \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi, & \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

## 1.5 Что ты такое?

В задании рассматривается схема регулятора на операционном усилителе, представленная на рисунке:

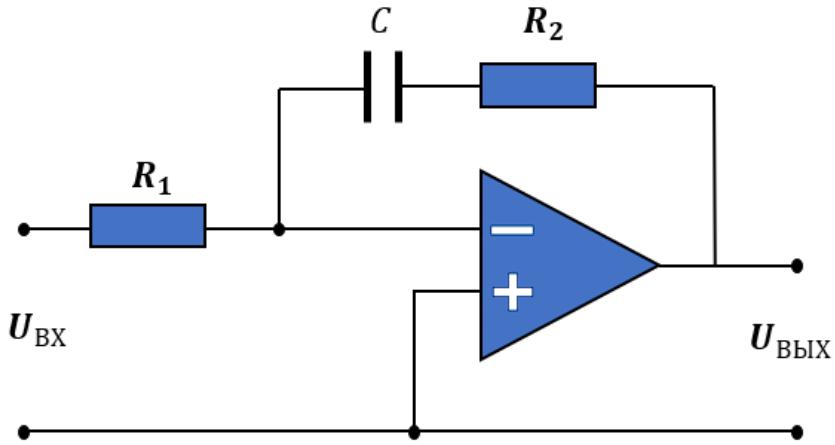


Рисунок 2: Принципиальная схема регулятора на операционном усилителе

Считая входом системы  $U_{\text{BX}}(t)$ , а выходом —  $U_{\text{VYIX}}(t)$ , можем рассмотреть преобразования, выполняемые над входным сигналом более подробно:

На входном резисторе сопротивлением  $R_1$  при подаче напряжения появляется ток  $I(t) = \frac{U_{\text{BX}}(t)}{R_1}$ . Далее этот ток попадает на конденсатор с отрицательной обратной связью ёмкостью  $C$ , и, зная что ток, проходящий через конденсатор такой ёмкости, равен  $I(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ , можем рассчитать напряжение на нём:

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I(x) dx.$$

Воспользуемся полученным ранее значением  $I(t) = \frac{U_{\text{BX}}(t)}{R_1}$  и примем начальное условие  $u(0) = 0$ , тогда  $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{U_{\text{BX}}(x)}{R_1} dx = \frac{1}{R_1 C} \int_0^t U_{\text{BX}}(x) dx$ . В пространстве изображений Лапласа по свойству интегрирования после прохождения конденсатора выходом будет являться  $Z(s) = \frac{1}{R_1 C s}$ . Далее сигнал идёт на последовательно подключенный резистор  $R_2$ , и выходом по обратной связи будет являться  $W(s) = \frac{1}{R_1 C s} + R_2 \cdot I(s) = \frac{1}{R_1 C s} + \frac{R_2}{R_1} = \frac{1+R_2 C s}{R_1 C s}$ .

Передаточная функция объекта найдена, можно привести её к стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{1 + R_2 C s}{R_1 C s} =$$

## 2 Вывод по работе

Выполнив лабораторную работу, я познакомился с задачами стабилизации и слежения, а также с их решениями, посмотрел на простейшие виды регуляторов, выявил связь между “подвижностью” системы и порядком астатизма, научился понимать, какой вид сигнала система может отследить с нулевой установившейся ошибкой, научился аналитически выводить статическую ошибку от внешнего воздействия по передаточным функциям, осознал как синтезировать регуляторы

## 3 Приложение А. Код для выполнения заданий

### Листинг 1. Код для выполнения задания 1

```
1 % clear all;
2 close all;
3 % plot(t, y)
```

Листинг 1: Код для построения графиков для задания 1