Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №4

ТОЧНОСТНЫЕ СВОЙСТВА СИСТЕМ, АСТАТИЗМЫ И РЕГУЛЯТОРЫ

Студент: Заводин Е.Ю.
Лин САУ R23 бак 1.1.1

Преподаватели: Перегудин А.А.
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задача стабилизации с идеальным дифференцирующим звеном

В задании рассматривается система

$$\ddot{y} - \dot{y} + 5y = u,$$

корни её характеристического полинома — $\frac{1 \pm \sqrt{19}i}{2}$.

Зададим начальное условие $\dot{y}(0) = 5$, промоделируем свободное движение разомкнутой системы ($u = 0$):

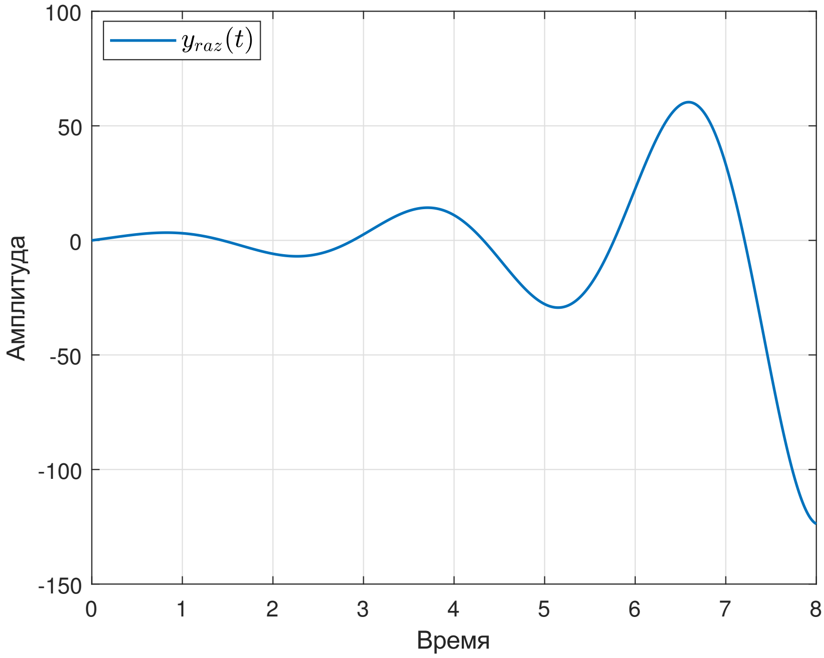

Рисунок 1: Движение разомкнутой системы

Заметно неустойчивое движение системы. Дабы устранить его, воспользуемся регулятором вида

$$u = k_0 y + k_1 \dot{y}.$$

Для моделирования движения системы с воздействием регулятора построим соответствующую структурную схему:

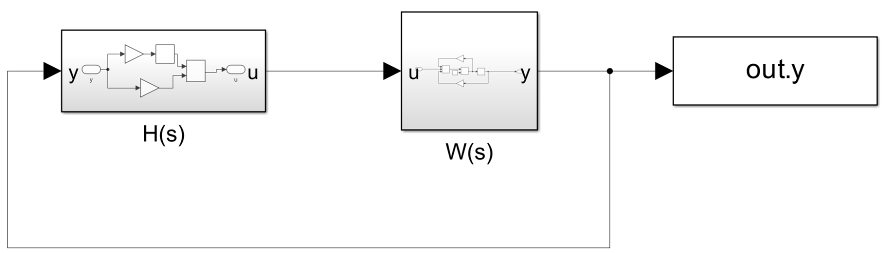

Рисунок 2: Структурная схема системы, замкнутой регулятором

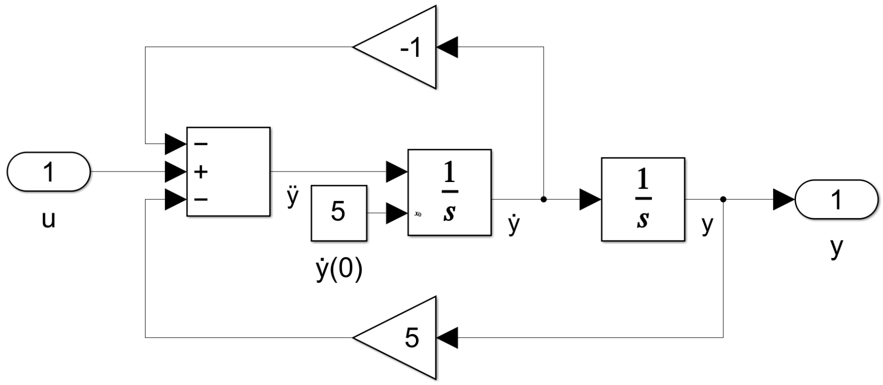

Рисунок 3: Структурная схема объекта управления

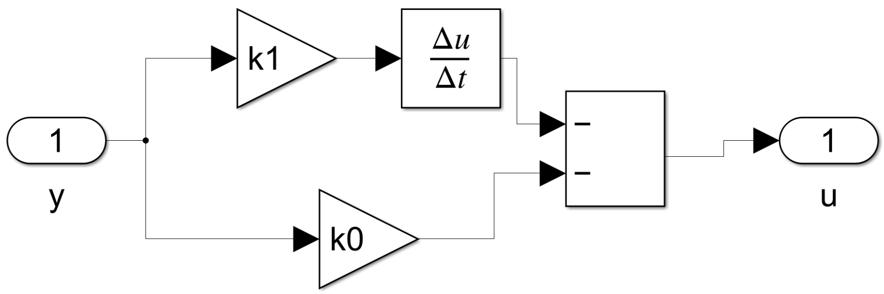

Рисунок 4: Структурная схема регулятора

Чтобы понять, какие значения k_1, k_0 выбрать для стабилизации движения системы, проанализируем передаточную функцию, получающуюся после воздействия регулятора.

Передаточную функцию регулятора $W_{\text{рег}}(s)$ в действии на ПФ объекта управления $W_{\text{об}}(s)$ можно рассматривать как отдельную передаточную функцию замкнутой системы:

$$W(s) = W_{\text{об}}(s)W_{\text{рег}}(s),$$

$$Y(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}.$$

Устойчивость линейной системы определяется расположением её полюсов: система устойчива, если все полюса лежат в левой полуплоскости комплексной плоскости. Полюса замкнутой системы — корни знаменателя этой дроби, то есть решения уравнения

$$1 + W(s) = 0 \Leftrightarrow 1 + W_{\text{об}}(s)W_{\text{рег}}(s) = 0.$$

$$\ddot{y} - \dot{y} + 5y = u \Leftrightarrow s^2 y - sy + 5y = u \Leftrightarrow y = \left(\frac{1}{s^2 - s + 5}\right) u \Rightarrow W_{\text{об}}(s) = \frac{1}{s^2 - s + 5}$$

$$u = k_0 y + k_1 \dot{y} \Leftrightarrow u = k_0 y + k_1 s y \Leftrightarrow u = y(k_0 + k_1 s) \Rightarrow W_{\text{рег}}(s) = k_0 + k_1 s$$

$$1 + W_{\text{об}}(s)W_{\text{рег}}(s) = 1 + \frac{k_0 + k_1 s}{s^2 - s + 5} = 1(s^2 - s + 5) + k_0 + k_1 s = s^2 + (k_1 - 1)s + (k_0 + 5) = 0$$

Система будет асимптотически устойчива, если $k_0 + 5 > 0 \Leftrightarrow k_0 > -5$ и $k_1 - 1 > 0 \Leftrightarrow k_1 > 1$. При $k_0 = -5, k_1 = 1$ система устойчива по Ляпунову.

Примем $k_0 = 1, k_1 = 3$, промоделируем систему при таких значениях параметров:

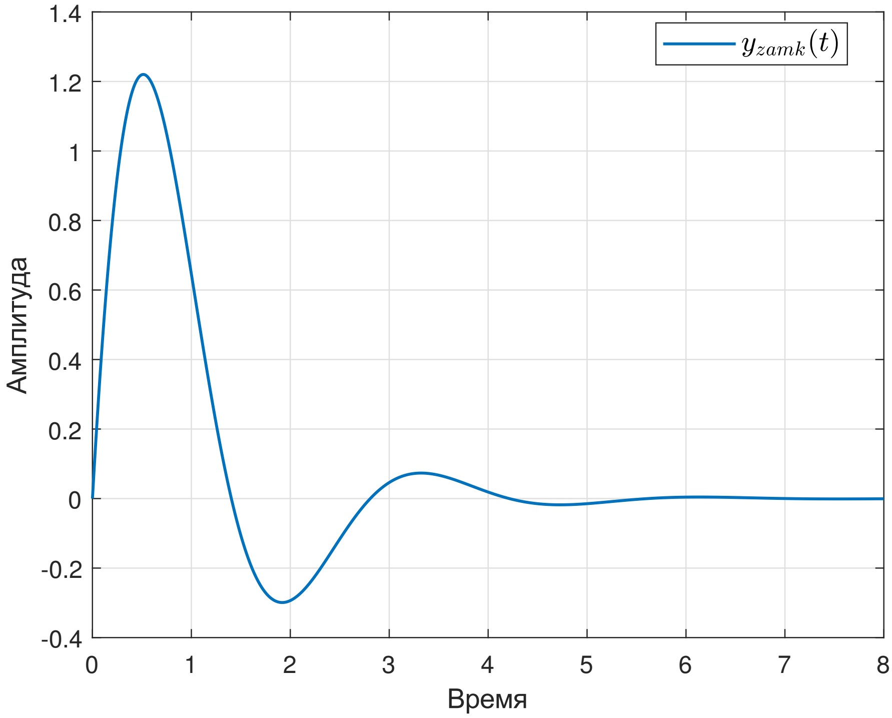

Рисунок 5: Движение системы, замкнутой регулятором

Видим, что теперь система асимптотически устойчива с установившимся значением $y_{\text{уст}} = 0$, таким образом получилось стабилизировать неустойчивую систему.

2 Задача стабилизации с реальным дифференцирующим звеном

В задании аппроксимация производной при помощи блока Derivative заменяется передаточной функцией

$$W_{\text{р.дифф.}}(p) = \frac{p}{Tp+1}.$$

Это значит, что меняется и передаточная функция $W_{\text{per}}(s)$, с учётом введения в него новой передаточной функции он начинает выглядеть следующим образом:

$$W_{\text{per}} = k_0 + k_1 \frac{s}{Ts+1}.$$

Проанализируем, при каких T система будет неустойчива, по аналогии с предыдущим заданием воспользовавшись анализом корней знаменателя передаточной функции замкнутой системы:

$$W(s) = \left(k_0 + k_1 \frac{s}{Ts+1}\right) \cdot \frac{1}{s^2 - s + 5} = \frac{(k_0T + k_1)s + k_0}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s^2 - s + 5} = \frac{(k_0T + k_1)s + k_0}{(Ts+1)(s^2 - s + 5)}.$$

Тогда

$$1 + W(s) = 0 \quad \Rightarrow \quad (Ts+1)(s^2 - s + 5) + (k_0T + k_1)s + k_0 = 0.$$

Раскроем скобки:

$$\begin{aligned}(Ts+1)(s^2 - s + 5) &= Ts(s^2 - s + 5) + 1 \cdot (s^2 - s + 5) = \\ &= Ts^3 - Ts^2 + 5Ts + s^2 - s + 5 = \\ &= Ts^3 + (1-T)s^2 + (5T-1)s + 5.\end{aligned}$$

$$Ts^3 + (1-T)s^2 + (5T - 1 + k_0T + k_1)s + (5 + k_0) = 0.$$

Подставим выбранные $k_0 = 1, k_1 = 3$:

$$Ts^3 + (1-T)s^2 + (5T + T + 2)s + 6 = 0 \Leftrightarrow s^3 + \frac{1-T}{T}s^2 + \left(\frac{2}{T} + 6\right)s + \frac{6}{T} = 0$$

По критерию Гурвица кубический полином устойчив, если $a_2, a_1, a_0 > 0$ и $a_2a_1 > a_0$. В нашем случае система асимптотически устойчива, если выполнены следующие условия:

$$a_0 = \frac{6}{T} > 0 \Leftrightarrow T > 0$$

$$a_1 = \frac{2}{T} + 6 > 0 \Leftrightarrow T > -\frac{2}{6}, T \neq 0$$

$$a_2 = \frac{1-T}{T} > 0 \Leftrightarrow 1 - T > 0, \Leftrightarrow T < 1$$

$$a_2a_1 > a_0 \Leftrightarrow \left(\frac{1-T}{T}\right)\left(\frac{2}{T} + 6\right) > \frac{6}{T}.$$

Из условий выше знаем, что $T > 0$, значит, можем домножить на T:

$$(1-T)\left(\frac{2}{T} + 6\right) > 6.$$

Раскрывая скобки, получим:

$$(1-T) \cdot \frac{2}{T} + (1-T) \cdot 6 > 6 \Leftrightarrow \frac{2(1-T)}{T} + 6(1-T) > 6 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2(1-T)}{T} + 6(1-T) - 6 > 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-T)}{T} + 6(1-T-1) > 0 \Leftrightarrow \frac{2(1-T)}{T} - 6T > 0.$$

Приведём к общему знаменателю $T > 0$:

$$\frac{2(1-T) - 6T^2}{T} > 0.$$

Числитель:

$$2(1-T) - 6T^2 = 2 - 2T - 6T^2.$$

Неравенство:

$$\frac{-6T^2 - 2T + 2}{T} > 0.$$

Рассмотрим числитель:

$$-6T^2 - 2T + 2 = -2(3T^2 + T - 1).$$

Корни уравнения $3T^2 + T - 1 = 0$:

$$T_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}.$$

Ветви соответствующей уравнению параболы направлены вверх, а значит, система неустойчива при $T \geq \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ и при $T \leq \frac{-1-\sqrt{13}}{6}$. Итого, сопоставляя полученные ограничения на T, получаем отрезок, в котором система асимптотически устойчива: $T \in \left(0, \frac{-1+\sqrt{13}}{6}\right)$

Система была промоделирована для нескольких различных значений параметра T, соответствующих устойчивой системе:

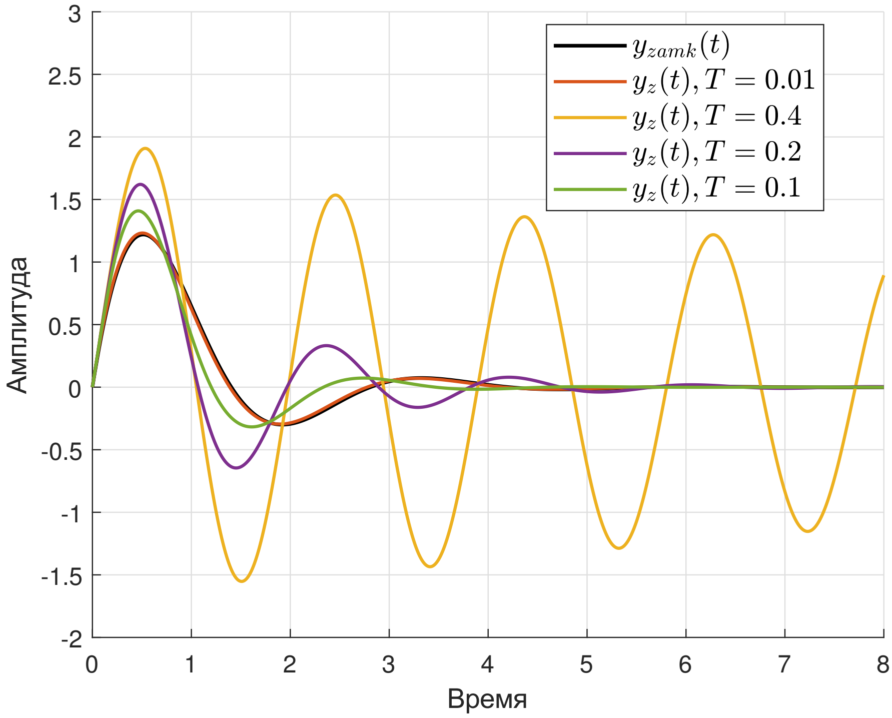

Рисунок 6: Движение системы при разных T, в сравнении с результатом моделирования из задания 1

Заметно, что чем ближе T к 0, тем ближе соответствующая траектория к траектории $y_{zamk}(t)$, полученной в первом задании. Также чем ближе T к своей верхней границе, тем сильнее расходится траектория движения системы. Отдельно промоделирую систему на верхней границе, $T = \frac{-1+\sqrt{13}}{6} \approx 0.434$:

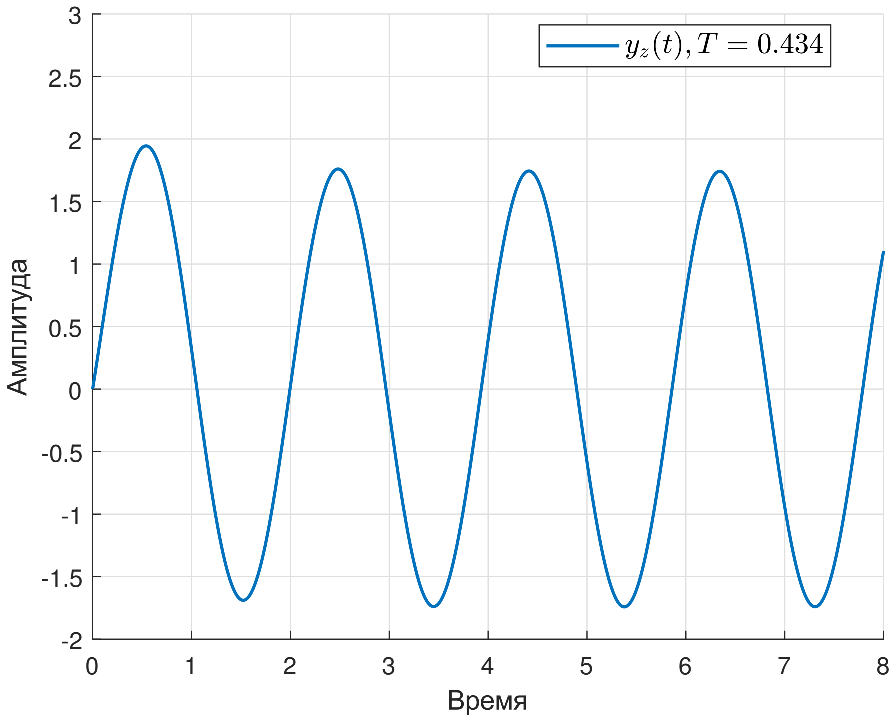

Рисунок 7: Движение системы при граничном значении T

Видно, что траектория движения системы больше походит на устойчивую по Ляпунову, чем на асимптотическую.

2.1 Вывод

Я понял, что добавление в регулятор дифференцирующего звена меняет его передаточную функцию, и понял, как определить устойчивость системы исходя из параметра добавленного звена.

3 Задача слежения для системы с астатизмом нулевого порядка (П-регулятор)

Рассмотрим замкнутую систему, заданную структурной схемой, отображённой на рисунке:

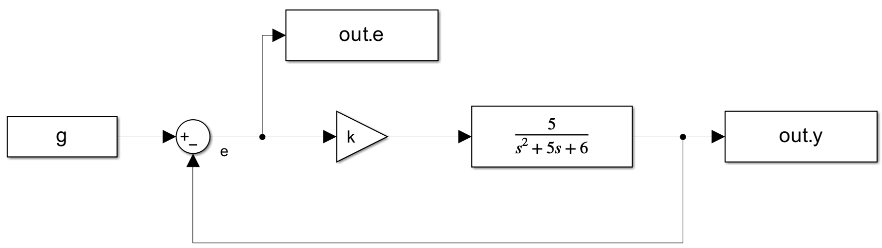

Рисунок 8: Структурная схема с П-регулятором

Передаточная функция системы — $W_s(s) = \frac{5}{s^2+5s+6}$, регулятором выступает $H(s) = k$. Для значения параметра регулятора был выбран набор значений $[1, 3, 7]$.

3.1 Стационарная желаемая функция

Исследование стационарного режима работы проводится с задающим воздействием $g(t) = 1$. Для этого режима при выбранной передаточной функции объекта управления и регулятора можно будет найти установившееся значение ошибки (система обладает нулевым порядком астатизма, а значит, при $t \to \infty$ между траекторией движения системы и задающим воздействием будет фиксированная величина $e_{\text{уст}}$).

Для расчёта установившейся ошибки понадобится вычислить передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(s) = W_s(s)H(s) = \frac{5k}{s^2 + 5s + 6}$$

Зная передаточную функцию разомкнутой системы, можем построить передаточную функцию по ошибке слежения:

$$\underset{g\to e}{W}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + \frac{5k}{s^2+5s+6}} = \frac{s^2 + 5s + 6}{s^2 + 5s + 6 + 5k}$$

Тогда образ Лапласа ошибки слежения будет определяться как

$$E(s) = \underset{g\to e}{W}(s) \cdot G(s),$$

где $G(s) = \frac{1}{s}$ – образ Лапласа от задающего воздействия $g(t) = 1$.

$$E(s) = \frac{s^2 + 5s + 6}{s(s^2 + 5s + 6 + 5k)}.$$

Пользуясь теоремой о конечном значении, можем вычислить непосредственно установившуюся ошибку:

$$e_{\text{уст}} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{\cancel{s}\left(s^2+5s+6\right)}{\cancel{s}\left(s^2+5s+6+5k\right)} = \frac{\cancelto{0}{s^2}+5\cancelto{0}{s}+6}{\cancelto{0}{s^2}+5\cancelto{0}{s}+6+5k} = \frac{6}{6+5k}$$

Тогда для $k=1$ $e_{\text{уст}} = \frac{6}{11}$, для $k=3$: $e_{\text{уст}} = \frac{6}{21}$, для $k=7$: $e_{\text{уст}} = \frac{6}{41}$.
То есть чем больше k, тем ближе он к 0.
Проверим теорию на "практике":

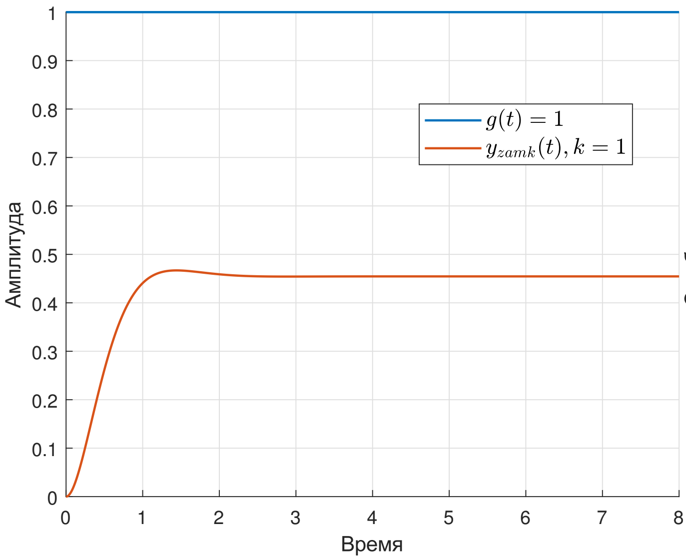

Рисунок 9: Сопоставление графиков выхода и входа для $k=1$, $g=1$

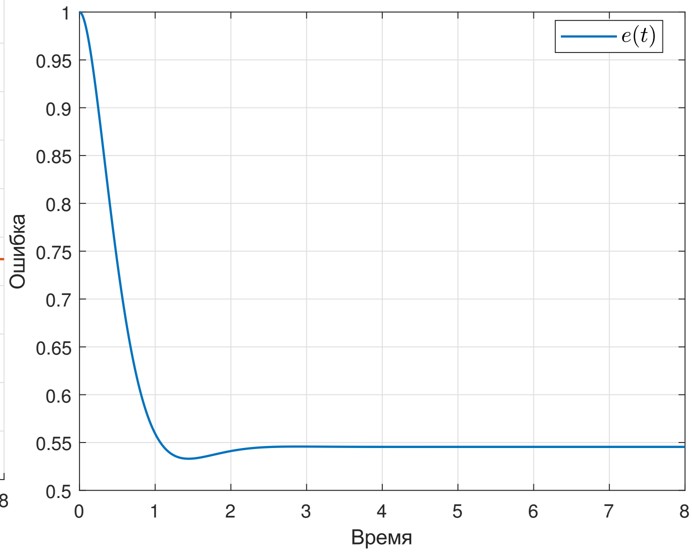

Рисунок 10: График ошибки для $k=1$, $g=1$

В этом случае установившаяся ошибка совпадает с предсказанной $e_{\text{уст}} = \frac{6}{11} \approx 0.55$.

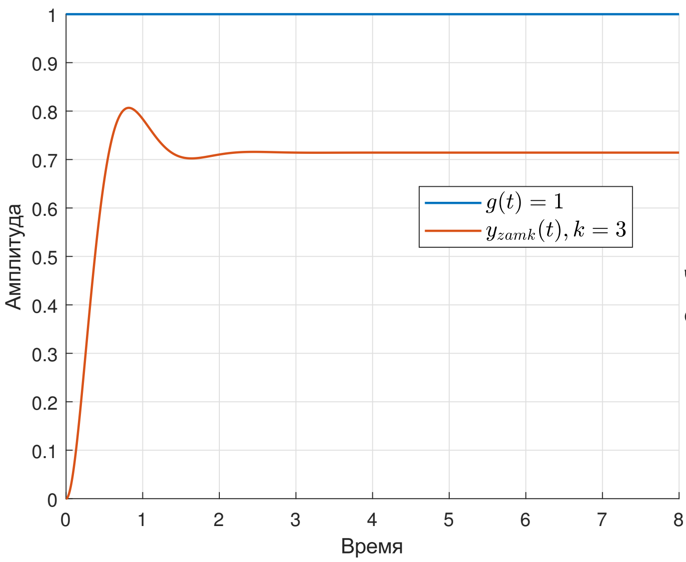

Рисунок 11: Сопоставление графиков выхода и входа для $k=3$, $g=1$

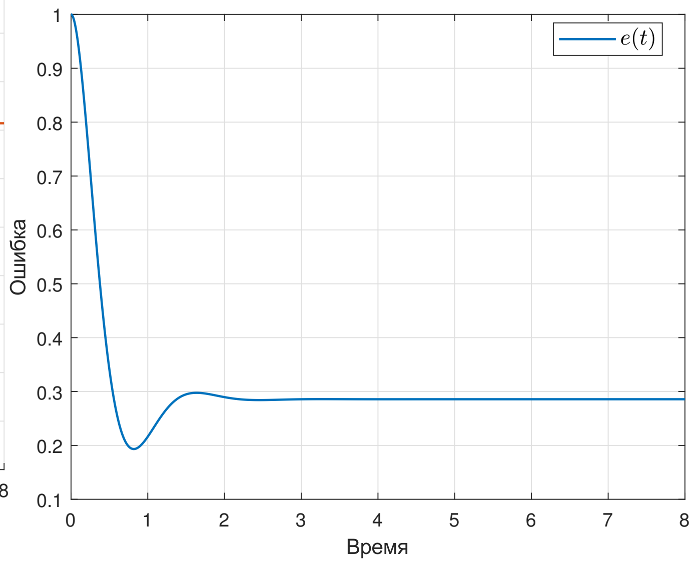

Рисунок 12: График ошибки для $k=3$, $g=1$

В этом случае установившаяся ошибка также совпадает с предсказанной $e_{\text{уст}} = \frac{6}{21} \approx 0.29$.

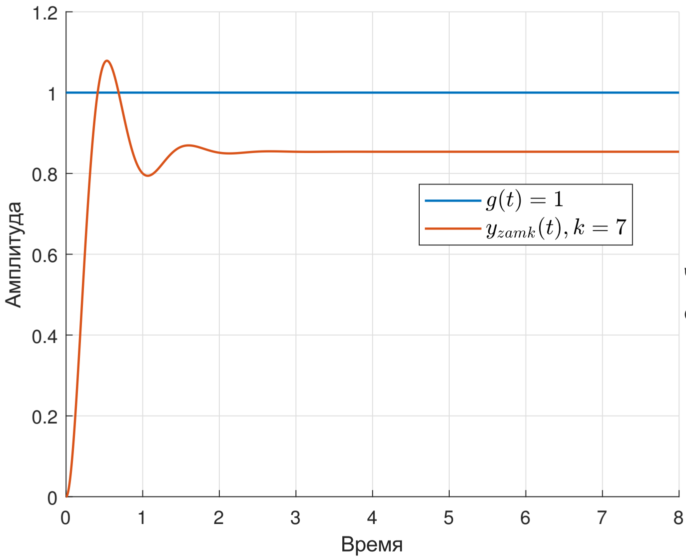

Рисунок 13: Сопоставление графиков выхода и входа для
$k = 7$, $g = 1$

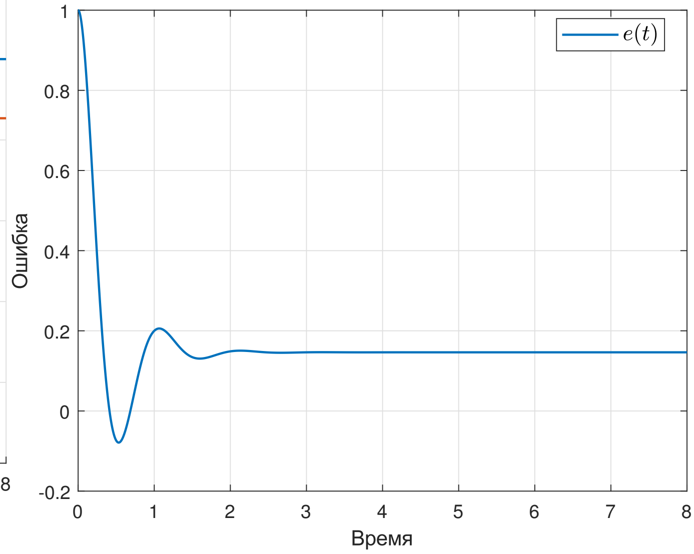

Рисунок 14: График ошибки для $k = 7$, $g = 1$

В этом случае установившаяся ошибка снова совпадала с предсказанной $e_{\text{уст}} = \frac{6}{41} \approx 0.16$.

Во всех трёх случаях ошибка сошлась к константе, как и ожидалось. Заметно, что чем больше k, тем меньше установившаяся ошибка, но в то же время и больше перерегулирование, и тем больше колебательности появляется у конечного сигнала.

3.2 Функция с постоянной скоростью

В этой части задания на вход подаётся линейно растущее воздействие – $g(t) = t$. В этом случае из-за низкого порядка астатизма система не сможет ни свести ошибку слежения к 0, ни прийти к установившемуся значению этой ошибки:

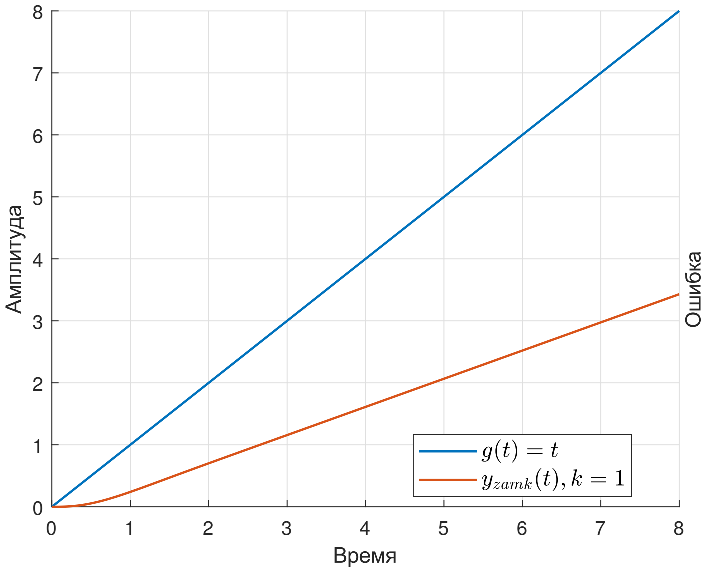

Рисунок 15: Сопоставление графиков выхода и входа для

$k = 1$, $g = t$

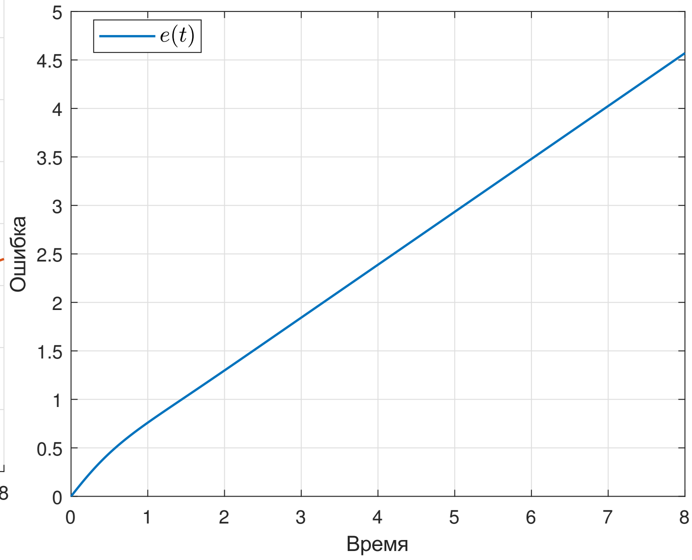

Рисунок 16: График ошибки для $k = 1$, $g = t$

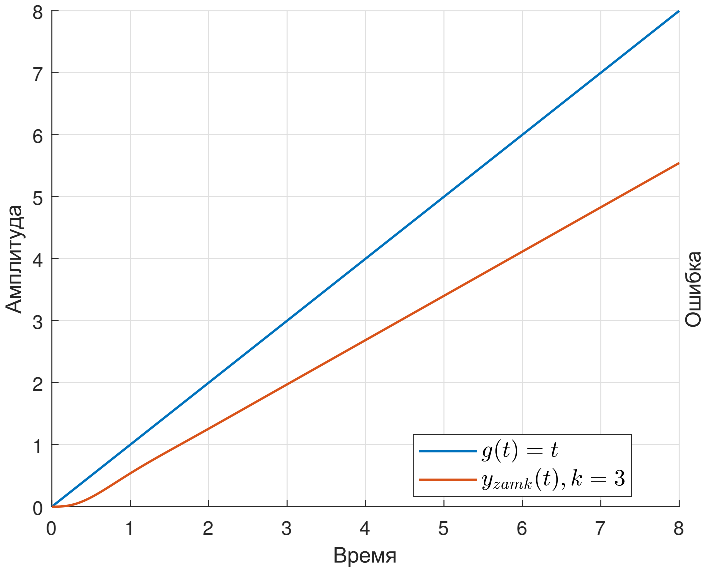

Рисунок 17: Сопоставление графиков выхода и входа для

$k = 3$, $g = t$

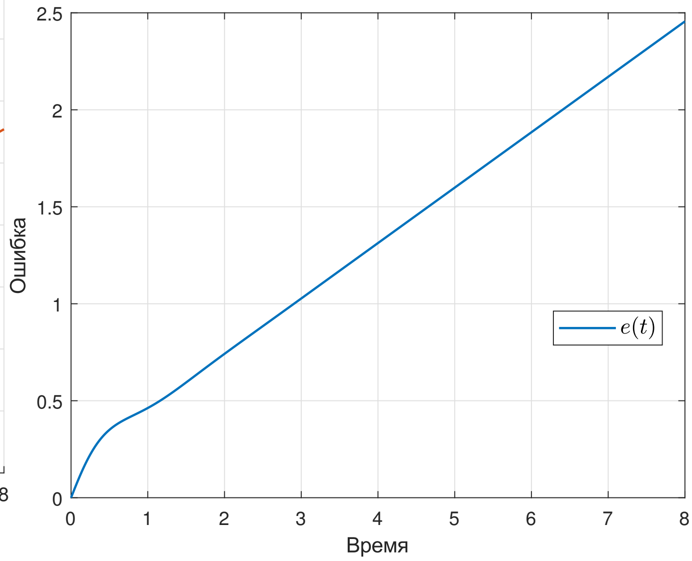

Рисунок 18: График ошибки для $k = 3$, $g = t$

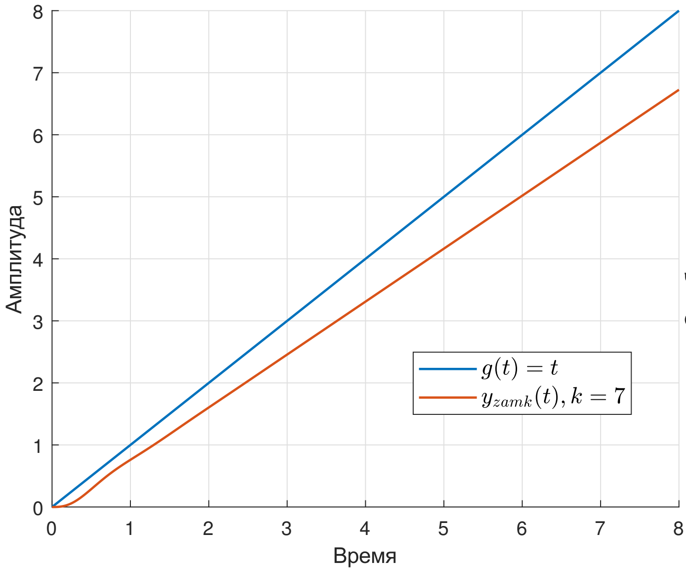

Рисунок 19: Сопоставление графиков выхода и входа для

$k = 7$, $g = t$

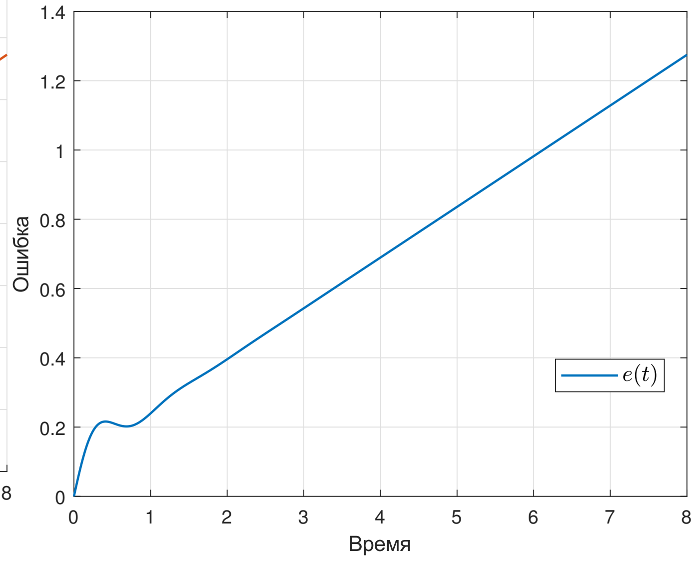

Рисунок 20: График ошибки для $k = 7$, $g = t$

4 Задача слежения для системы с астатизмом первого порядка (И-регулятор)

5 Задача слежения для системы с астатизмом первого порядка (ПИ-регулятор)

6 Задача слежения за гармоническим сигналом (регулятор общего вида)

7 Приложение А. Код для выполнения заданий

Листинг 1. Код для выполнения задания 1

```
% clear all;
close all;

[~, scriptName] = fileparts(mfilename('fullpath'));
if ~isfolder(scriptName)
    mkdir(scriptName);
end

t = (0:0.01:8)';
% u = [t, 1.5*ones(size(t))];
% u = [t, 0.6*t];
u = [t, zeros(size(t))];

fig_svob = figure;
out = sim('ex1/model.slx','StopTime','8');
y_model = out.y;
```

```
plot(y_model.Time, y_model.Data, LineWidth=1.2, DisplayName="$y_{raz}(t)$")
xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
grid on
legend(Interpreter='latex', Location='best', BackgroundAlpha=.1, FontSize=12, FontName='Computer
    Modern')
saveas(fig_svob, string(scriptName) + '\' + 'razomk_fig' + '.eps', 'epsc')

k0 = 1;
k1 = 3; % траектория становится ограниченной при k1 = 1, k1 > 1 - система Ау, k1 < 1 - Ну

fig_regulator = figure;
out = sim('ex1/model_regulator.slx','StopTime','8');
y_model = out.y;
plot(y_model.Time, y_model.Data, LineWidth=1.2, DisplayName="$y_{zamk}(t)$")
xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
grid on
legend(Interpreter='latex', Location='best', BackgroundAlpha=.1, FontSize=12, FontName='Computer
    Modern')
saveas(fig_regulator, string(scriptName) + '\' + 'zamk_fig' + '.eps', 'epsc')


% figure;
% num = [1];
% den = [1 -4 5];
% sys = tf(num, den);
% y = lsim(sys, u(:,2), t);
% plot(t, y)
```

Листинг 1: Код для построения графиков для задания 1

Листинг 1. Код для выполнения задания 1

```
% clear all;
close all;

[~, scriptName] = fileparts(mfilename('fullpath'));
if ~isfolder(scriptName)
    mkdir(scriptName);
end

t = (0:0.01:8)';
% u = [t, 1.5*ones(size(t))];
% u = [t, 0.6*t];
u = [t, zeros(size(t))];

T = 0.01;

k0 = 1;
k1 = 3; % траектория становится ограниченной при k1 = 1, k1 > 1 - система Ау, k1 < 1 - Ну

fig_regulator = figure;
hold on; grid on;

out = sim('ex1/model_regulator.slx','StopTime','8');
y_model = out.y;
plot(y_model.Time, y_model.Data, LineWidth=1.5, DisplayName="$y_{zamk}(t)$", Color='black')

out = sim('ex2/model_regulator2.slx','StopTime','8');
y_model = out.y;
plot(y_model.Time, y_model.Data, LineWidth=1.3, DisplayName="$y_{z}(t), T = " + string(T) + "$")
T = 0.4;

out = sim('ex2/model_regulator2.slx','StopTime','8');
y_model = out.y;
plot(y_model.Time, y_model.Data, LineWidth=1.3, DisplayName="$y_{z}(t), T = " + string(T) + "$")

T = 0.2;
out = sim('ex2/model_regulator2.slx','StopTime','8');
y_model = out.y;
plot(y_model.Time, y_model.Data, LineWidth=1.3, DisplayName="$y_{z}(t), T = " + string(T) + "$")
```

```

T = 0.1;
out = sim('ex2/model_regulator2.slx','StopTime','8');
y_model = out.y;
plot(y_model.Time, y_model.Data, LineWidth=1.3, DisplayName="$y_{z}(t), T = " + string(T) + "$")

xlabel('Время'), ylabel('Амплитуда')
ylim([-2, 3])
legend(Interpreter='latex', Location='best', BackgroundAlpha=.3, FontSize=12, FontName='Computer
    Modern')
saveas(fig_regulator, string(scriptName) + '\' + string(T) + '.eps', 'epsc')
```

Листинг 2: Код для построения графиков для задания 2