Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №5

ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

Студент: Заводин Е.Ю.
Лин САУ R23 бак 1.1.1

Преподаватели: Перегудин А.А.
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задача исследования типовых динамических звеньев

В работе исследуются реальные объекты — находятся их передаточные функции, сопоставляются с типовыми звеньями, временные и частотные характеристики объектов моделируются и сравниваются с конкретными теоретическими для найденных типовых звеньев.

Временными характеристиками системы являются её весовая и переходная функции, то есть ответ системы соответственно на дельта-функцию в качестве входного воздействия и ответ на единичный скачок, тогда весовая функция может быть определена по следующей формуле:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\cdot\mathcal{L}\{\delta(t)\}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\cdot 1\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\right\},$$

где $W(s)$ — передаточная функция системы.

Тогда переходная функция, являющаяся ответом системы на единичный скачок, определяется следующей формулой:

$$y_{s.r.} = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\cdot\mathcal{L}\{1\}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\cdot\frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}.$$

В качестве частотных характеристик рассматриваются АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ. Формулы для расчета АЧХ $A(\omega)$ и ФЧХ $\varphi(\omega)$ следующие:

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2},\ \ \varphi(\omega) = \operatorname{atan2}\left(Q(\omega), P(\omega)\right),$$

где $P(\omega), Q(\omega)$ — соответственно действительная и мнимая части частотной передаточной функции $W(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$.

Выражение для ЛФЧХ ничем не будет отличаться от такового для ФЧХ, но ЛАЧХ отлична от АЧХ:

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{A(\omega)}{A_б}\right), A_б = 1.$$

1.1 ДПТ

Рассмотрим ДПТ независимого возбуждения, задаваемый формулами

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon_i}{R}, \varepsilon_i = -k_e\omega.$$

Считая U входом, ω — выходом, сведу формулы к одному линейному дифференциальному уравнению:

$$J\dot{\omega} = k_m\frac{U - k_e\omega}{R} = \frac{Uk_e}{R} - \frac{k_m k_e\omega}{R}$$

$$J\dot{\omega} + \frac{k_m k_e\omega}{R} = \frac{k_m}{R}U$$

$$\frac{JR}{k_m}\dot{\omega} + k_e\omega = U$$

$$\frac{\omega}{U} = W(s) = \frac{1}{\frac{JR}{k_m}s + k_e} = \frac{1}{k_e}\frac{1}{\frac{JR}{k_e k_m}s + 1}$$

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1}, T = \frac{JR}{k_e k_m}, K = \frac{1}{k_e}$$

Получил передаточную функцию в стандартизированном виде, соответствующую реальному усилительному звену.

1.1.1 Частотные характеристики

Выделю действительную и мнимую части полученной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T(j\omega)+1}$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1+jT\omega} \cdot \frac{1-jT\omega}{1-jT\omega} = \frac{K(1-jT\omega)}{1+(T\omega)^2} = \frac{K}{1+(T\omega)^2} + j\frac{-KT\omega}{1+(T\omega)^2}$$

Пусть $P(\omega) = \frac{K}{1+(T\omega)^2}$, $Q(\omega) = \frac{-KT\omega}{1+(T\omega)^2}$. Рассчитаю АЧХ такой передаточной функции:

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \sqrt{\frac{K^2 + (KT\omega)^2}{\left(1+(T\omega)^2\right)^2}} = \frac{K\sqrt{1+(T\omega)^2}}{1+(T\omega)^2} = \frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$$

Тогда ЛАЧХ будет выглядеть так:

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}\right)$$

Разложим логарифм:

$$L(\omega) = 20\lg(K) - 10\lg\left(1+(T\omega)^2\right).$$

Фазовая частотная характеристика может быть найдена по следующей формуле:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega)).$$

У двигателя постоянного тока активное сопротивление обмоток ротора R, момент инерции ротора J и конструктивные постоянные k_e, k_m при реальном моделировании являются положительными, также буду считать, что ω принимает только неотрицательные значения (в отрицательной области для вещественной функции результат преобразования Лапласа будет симметричен результату в положительной области). Исходя из этого, коэффициент усиления и постоянная времени

$$T = \frac{JR}{k_e k_m} > 0, K = \frac{1}{k_e} > 0.$$

Тогда числитель действительной части передаточной функции всегда положителен, как и знаменатель, а значит, $P(\omega) > 0$. Числитель мнимой части передаточной функции же всегда отрицателен, а знаменатель всегда положителен, следовательно, $Q(\omega) < 0$. Исходя из этих соображений, комплексное число $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ находится в четвёртом квадранте, а значит, вместо $\operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega))$ можем использовать $\arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$:

$$\arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-KT\omega}{1+(T\omega)^2}}{\frac{K}{1+(T\omega)^2}}\right) = \arctan\left(\frac{-KT\omega}{K}\right) = \arctan -T\omega = -\arctan T\omega$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{k_e} = \frac{1}{0.3612} \approx 2.7685, T = \frac{JR}{k_e k_m} = \frac{0.0031 \cdot 4.7231}{0.3612 \cdot 0.3612} \approx 0.1122 \Rightarrow W(s) = \frac{2.7685}{0.1122s+1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}} = \frac{2.7685}{\sqrt{1+(0.1122\omega)^2}}$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{2.7685}{\sqrt{1+(0.1122\omega)^2}}\right)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(0.1122\omega).$$

Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

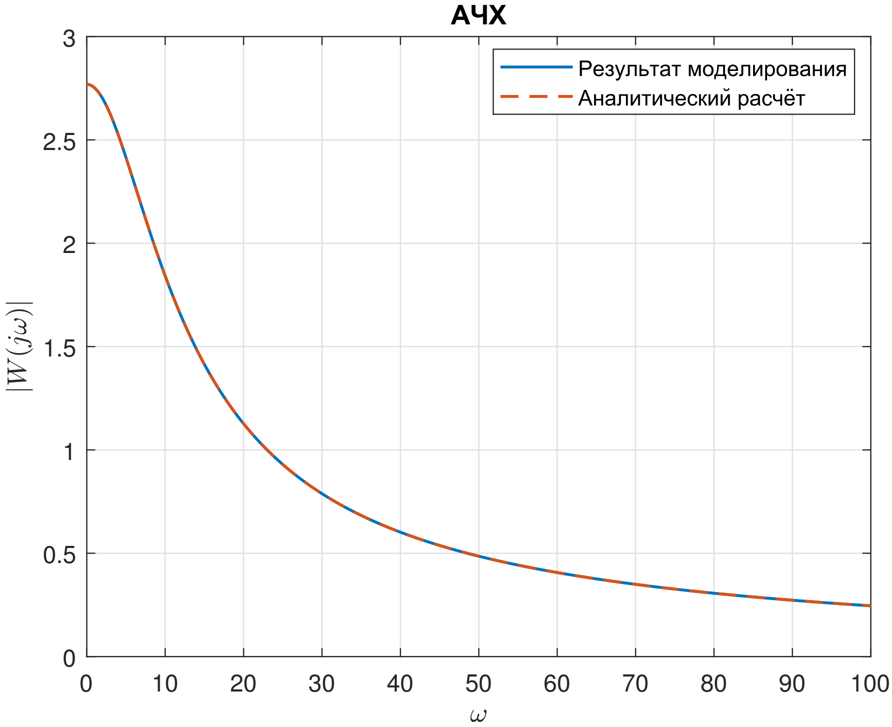

Рисунок 1: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

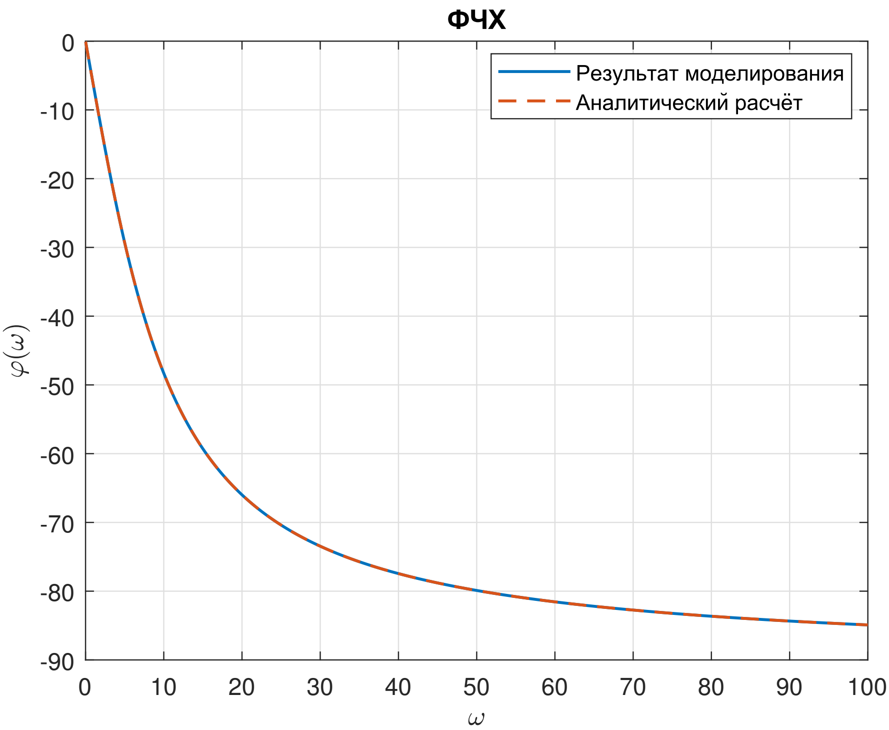

Рисунок 2: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

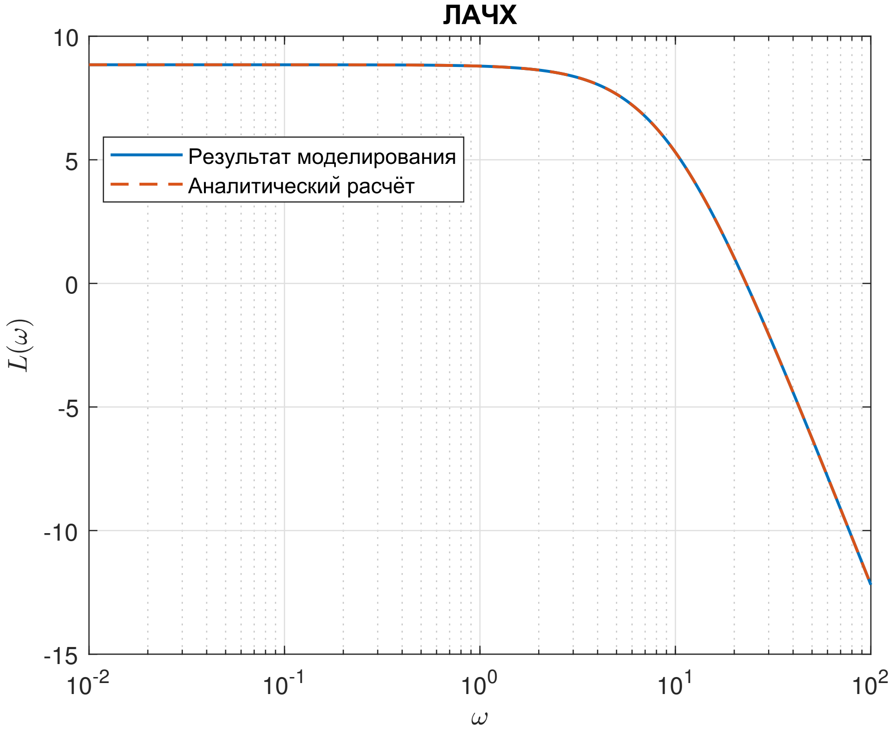

Рисунок 3: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

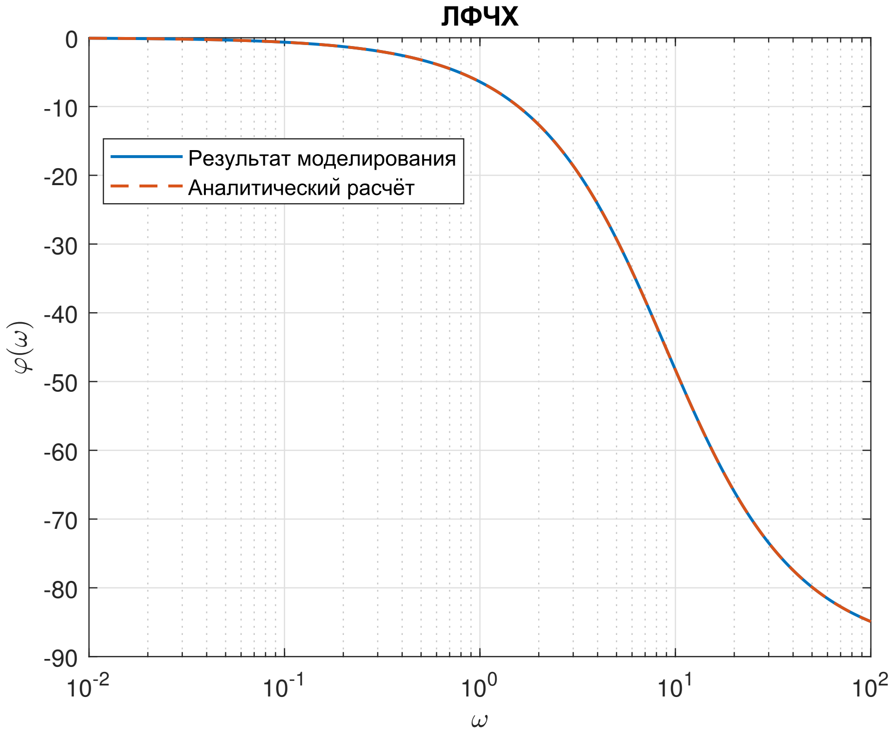

Рисунок 4: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного реального усилительного звена.

1.1.2 Временные характеристики

Весовая функция объекта:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{Ts+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K/T}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\}$$

Воспользуемся табличным преобразованием:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\} = e^{\alpha t}$$

Тогда, при $\alpha = -\frac{1}{T}$:

$$w(t) = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T}e^{-\frac{1}{T}t}.$$

Переходная функция:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{W(s)}{s} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s(Ts+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K/T}{s^2+s/T}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s/T}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s+1/T}\right\}.$$

По свойству интегрирования:

$$\frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T}\int\limits_{0^-}^{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\}.$$

Воспользуемся уже вычисленным при нахождении весовой функции значением:

$$\frac{K}{T}\int\limits_{0^-}^{t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T}\int\limits_{0^-}^{t}e^{-\frac{1}{T}x}dx.$$

Рассмотрим неопределенный интеграл $\int e^{-\frac{1}{T}x}dx$:

$$F(x) = \int e^{-\frac{1}{T}x}dx = -Te^{-\frac{x}{T}} + C.$$

Первообразная найдена, можем посчитать определенный интеграл:

$$y_{s.r}(t) = \frac{K}{T}\int\limits_{0^-}^{t}e^{-\frac{1}{T}x}dx = \frac{K}{T}\left(F(t) - F(0^-)\right) = \frac{K}{T}\left(-Te^{-\frac{t}{T}} + Te^0\right) = K(1-e^{\frac{-t}{T}}).$$

Подставлю исходные данные для своего варианта в полученные характеристики:

$$K = 2.7685, T = 0.1122 \Rightarrow w(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{1}{T}t} = \frac{2.7685}{0.1122}e^{-\frac{1}{0.1122}t} = 24.6747e^{-8.9127t}$$

$$y_{\text{s.r.}} = K(1-e^{\frac{-t}{T}}) = 2.7685(1-e^{-8.9127t}).$$

Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

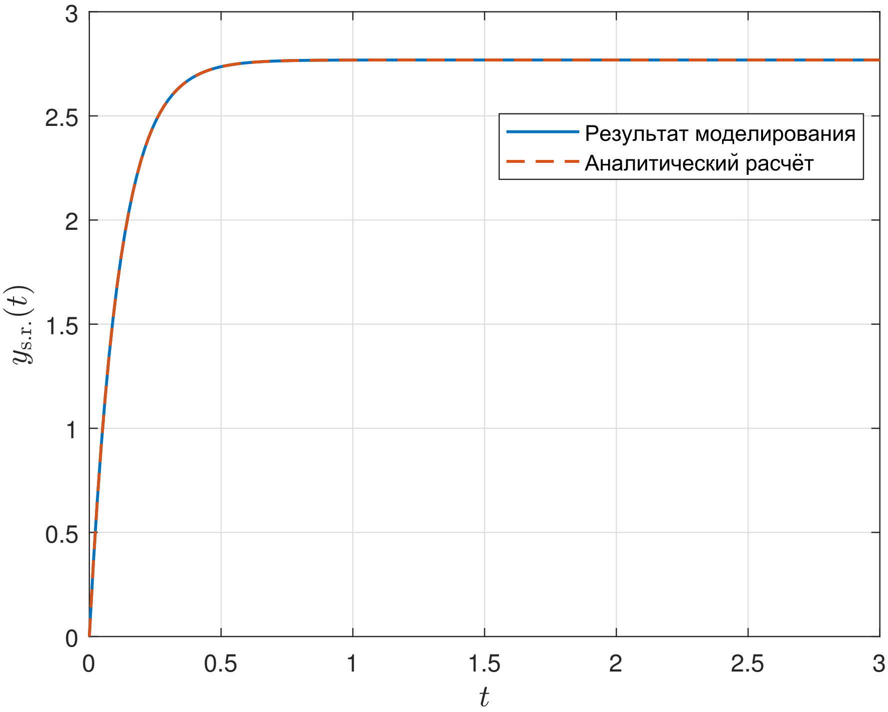

Рисунок 5: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

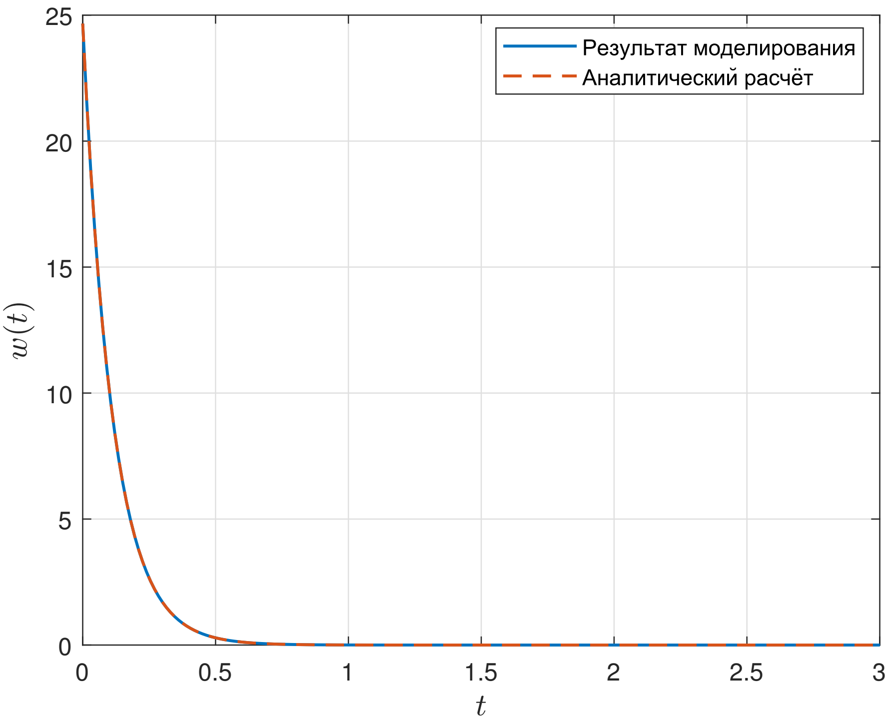

Рисунок 6: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного реального усилительного звена.

1.2 ДПТ 2.0

Рассмотрим уравнения для полной модели ДПТ независимого возбуждения:

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U+\varepsilon}{R}, \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s, \varepsilon_i = -k_e\omega, \varepsilon_s = -L\dot{I}.$$

Считая U входом, ω — выходом, сведём формулы к одному линейному дифференциальному уравнению:

$$J\dot{\omega} = k_m \frac{U - k_e\omega - L\dot{I}}{R} = \frac{k_m}{R}U - \frac{k_m k_e \omega}{R}\omega - \frac{L\dot{I}k_m}{R}\Bigg| \cdot \frac{R}{k_m}$$

$$\frac{JR}{k_m}\dot{\omega} + k_e\omega + L\dot{I} = U$$

$$J\dot{\omega} = k_m I \Rightarrow I = \frac{J\dot{\omega}}{k_m}, \dot{I} = \frac{J\ddot{\omega}}{k_m}$$

$$\frac{JL}{k_m}\ddot{\omega} + \frac{JR}{k_m}\dot{\omega} + k_e\omega = U \Leftrightarrow \ddot{\omega} + \frac{R}{L}\dot{\omega} + \frac{k_e k_m}{J}\omega = \frac{k_m}{J}U$$

Переведу получившееся уравнение в пространство изображений Лаплпаса:

$$s^2\Omega(s) + \frac{R}{L}s\Omega(s) + \frac{k_e k_m}{J}\Omega(s) = \frac{k_m}{J}U(s)$$

$$W(s) = \frac{U(s)}{\Omega(s)} = \frac{\frac{k_m}{J}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k_e k_m}{J}} = \frac{\frac{1}{k_e}}{\frac{J}{k_e k_m}s^2 + \frac{RJ}{k_e k_m L}s + 1}$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2T\xi s + 1}, K = \frac{1}{k_e}, T = \sqrt{\frac{J}{k_e k_m}}, \xi = \frac{TR}{2L}$$

Получена передаточная функция в стандартизированном виде. Для определения конкретного типа звена объекта найду дискриминант знаменателя передаточной функции объекта, подставив параметры T, ξ в соответствии со своим вариантом:

$$T = \sqrt{\frac{J}{k_e k_m}} = \sqrt{\frac{0.0031}{0.3612 \cdot 0.3612}} \approx 0.1541,$$

$$\xi = \frac{TR}{2L} = \frac{0.154 \cdot 4.7237}{2 \cdot 1.0567} \approx 0.3445.$$

Тогда,

$$D = (2T\xi)^2 - 4(T^2) = (2 \cdot 0.1541 \cdot 0.3445)^2 - 4 \cdot 0.1541^2 = (0.0858)^2 - 4 \cdot 0.0237 \approx -0.009$$

Получается что корни знаменателя комплексно-сопряженные, а значит, функция соответствует колебательному звену. Для выделения действительной и мнимой части сперва перейду к частотной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2T\xi s + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{K(T^2(j\omega)^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(T^2(j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1)(T^2(j\omega)^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))} = \frac{K(-T^2\omega^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(-T^2\omega^2 + 1 + j2T\xi\omega)(-T^2\omega^2 + 1 - j2T\xi\omega)} =$$

$$= \frac{K(-T^2\omega^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} = \frac{K - KT^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} + j\frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}.$$

Пусть $P(\omega) = \frac{K - KT^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}, Q(\omega) = \frac{-2KT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}$.

1.2.1 Частотные характеристики

Рассчитаю амплитудно-частотную характеристику:

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{-2KT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2}\right)^2 + \left(\frac{K-KT^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4K^2T^2\xi^2\omega^2+K^2-2K^2T^2\omega^2+K^2T^4\omega^4}{\left((1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2\right)^2}} =$$

$$= K\sqrt{\frac{4T^2\xi^2\omega^2-2T^2\omega^2+T^4\omega^4+1}{\left((1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2\right)^2}} = K\sqrt{\frac{T^2\omega^2(4\xi^2-2+T^2\omega^2)+1}{\left((1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2\right)^2}}.$$

Тогда ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20\lg K\sqrt{\frac{T^2\omega^2(4\xi^2-2+T^2\omega^2)+1}{\left((1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2\right)^2}} = 20\lg K + 20\cdot\frac{1}{2}\lg\left(\frac{T^2\omega^2(4\xi^2-2+T^2\omega^2)+1}{\left((1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2\right)^2}\right) =$$

$$= 20\lg K + 10\lg\left(T^2\omega^2(4\xi^2-2+T^2\omega^2)+1\right) - 10\lg\left(\left((1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2\right)^2\right) =$$

$$= 20\lg K + 10\lg\left(T^2\omega^2(4\xi^2-2+T^2\omega^2)+1\right) - 20\lg\left((1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2\right).$$

Фазовая частотная характеристика будет определяться следующим образом:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \operatorname{atan2}\left(\frac{-2KT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2}, \frac{K-KT^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2}\right)$$

Расположение $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ на комплексной плоскости, а значит, и оценка фазовой частотной характеристики, определяется в зависимости от того, положительные ли значения принимают $P(\omega)$ и $Q(\omega)$.

Знаменатели $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ всегда положительны. Тогда знаки вещественной и мнимой части $W(j\omega)$ определяются их числителями — $Q(\omega) < 0$ (т.к. $K, T, \xi > 0$), знак $P(\omega)$ меняется в зависимости от значения ω.

Рассмотрим $P(\omega) > 0$:

$$\frac{1-T^2\omega^2}{\left((1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2\right)^2} > 0 \Leftrightarrow 1-T^2\omega^2 > 0 \Leftrightarrow \omega < \frac{1}{T}$$

Тогда $P(\omega) > 0$ при $\omega > \frac{1}{T}$, $P(\omega) = 0$ при $\omega = \frac{1}{T}$. следовательно:

При $0 \le \omega < \frac{1}{T}$ $W(j\omega)$ находится в четвертом квадранте, значит,

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2}\right).$$

При $\omega = \frac{1}{T}$ $W(j\omega)$ $P(\omega) = Q(\omega) = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$.

При $\omega > \frac{1}{T}$ $W(j\omega)$ в третьем квадранте, а значит,

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) - \pi = -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2}\right) - \pi.$$

Итого:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2}\right), & \omega \in [0, \frac{1}{T}) \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T} \\ -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2}\right) - \pi, & \omega \in (\frac{1}{T}, +\infty) \end{cases}$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{k_e} = \frac{1}{0.3612} \approx 2.7685, T =\approx 0.1541, \xi \approx 0.3445 \Rightarrow W(s) = \frac{2.7685}{0.1541^2s^2 + 2\cdot 0.3445\cdot 0.1122s + 1} =$$

$$= \frac{2.7685}{0.0238 + 0.0773s + 1}.$$

$$A(\omega) = K\sqrt{\frac{T^2\omega^2(4\xi^2-2+T^2\omega^2)+1}{\left((1-T^2\omega^2)^2+(2T\xi\omega)^2\right)^2}} = 2.7685\sqrt{\frac{0.0238\omega^2(-1.5253+0.0238\omega^2)+1}{\left((1-0.0238\omega^2)^2+(0.0773\omega)^2\right)^2}}.$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(2.7685\sqrt{\frac{0.0238\omega^2(-1.5253+0.0238\omega^2)+1}{\left((1-0.0238\omega^2)^2+(0.0773\omega)^2\right)^2}}\right)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{0.0773\omega}{1-0.1541\omega^2}\right), & \omega \in [0, \frac{1}{T}) \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T} \\ -\arctan\left(\frac{0.0773\omega}{1-0.1541\omega^2}\right) - \pi, & \omega \in (\frac{1}{T}, +\infty). \end{cases}$$

Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

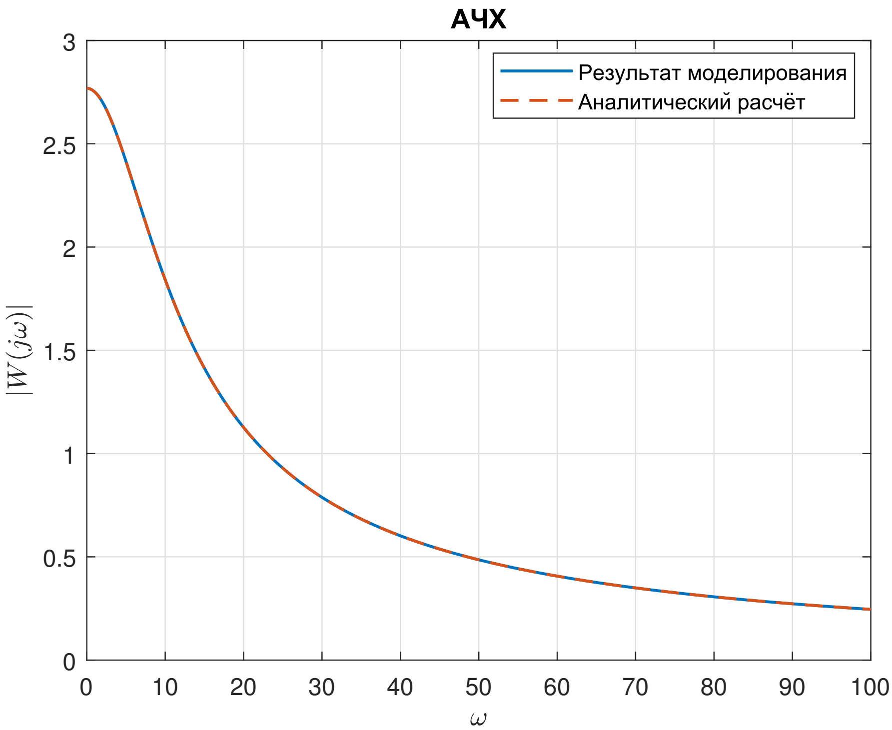

Рисунок 7: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

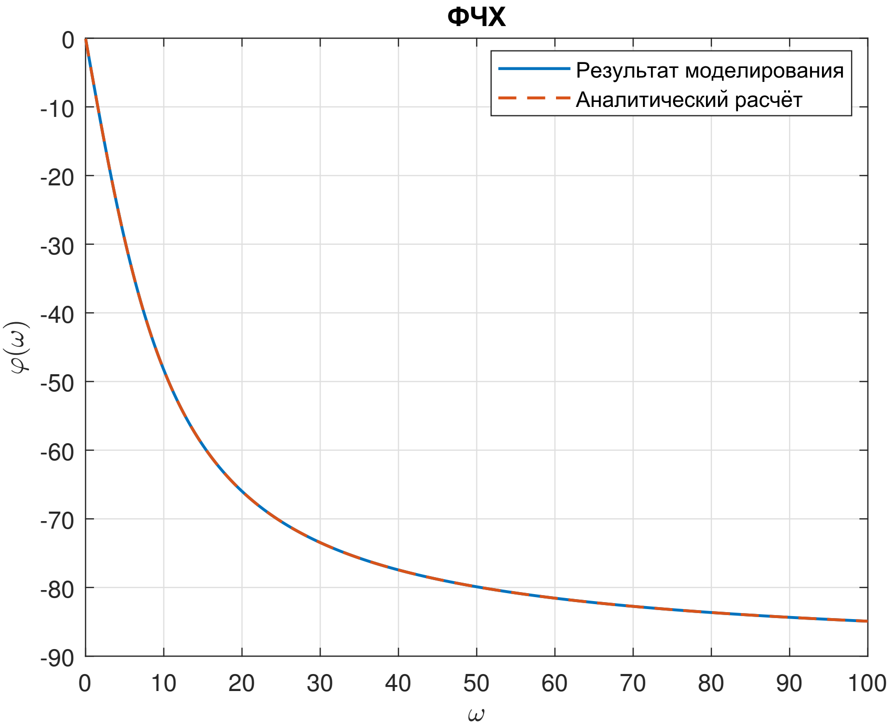

Рисунок 8: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

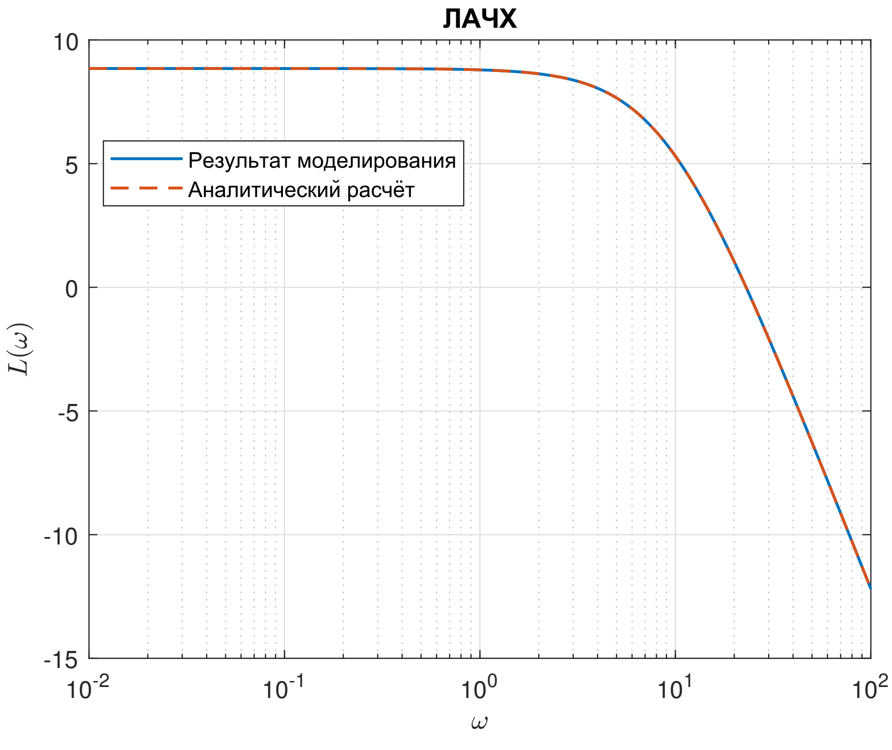

Рисунок 9: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

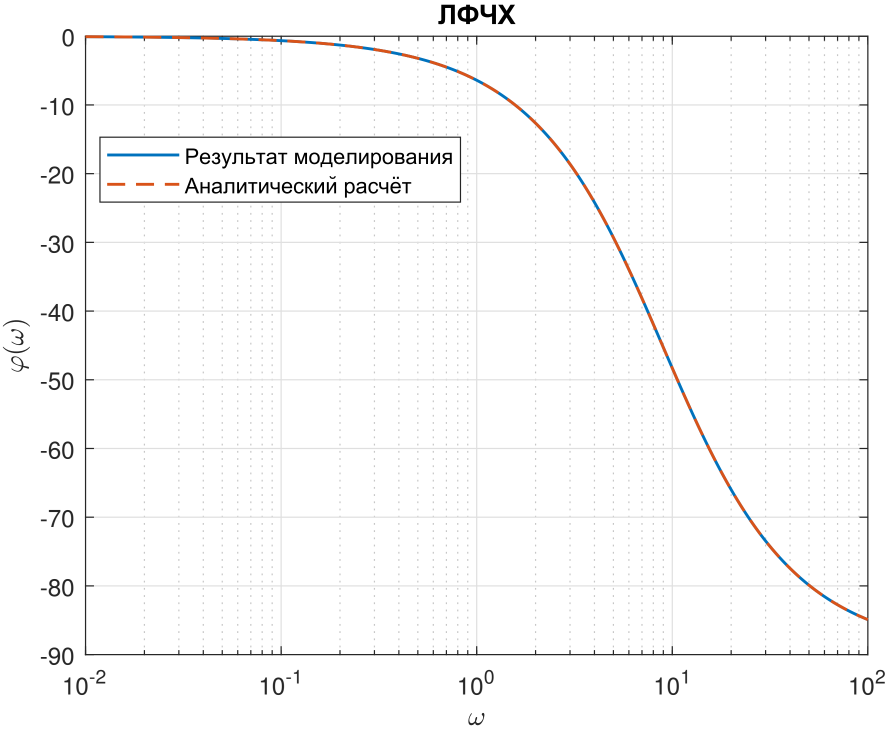

Рисунок 10: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного колебательного звена.

1.2.2 Временные характеристики

Весовая функция:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{T^2s^2 + 2T\xi s + 1}\right\}.$$

Для сверки с таблицей готовых преобразований Лапласа приведу к стандартному виду с единицей в качестве коэффициента перед старшей степенью s:

$$\frac{K}{T^2s^2 + 2T\xi s + 1} = \frac{K}{T^2(s^2 + \frac{2\xi}{T}s + \frac{1}{T^2})}$$

В знаменателе можно вывести полный квадрат:

$$T^2\left(s^2 + \frac{2\xi}{T}s + \frac{1}{T^2}\right) = T^2\left((s + \frac{\xi}{T})^2 + \frac{1-\xi^2}{T^2}\right)$$

Для моего случая $\xi \approx 0.3445 > 0$ можно безболезненно внести замену $\frac{\xi}{T} = a$, $\frac{1-\xi^2}{T^2} = \omega^2$:

$$W(s) = \frac{K}{T^2}\frac{1}{((s+a)^2 + \omega^2)}$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Известно табличное преобразование Лапласа, похожее на получившееся выражение:

$$\mathcal{L}\{\mathrm{e}^{-at}\sin{(\omega t)}\} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Так как $\frac{1}{\omega}$, $\frac{K}{T^2}$ — константы, то, по свойству линейности:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{K}{T^2}\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t)\right\} = \frac{K}{T^2}\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2} = W(s).$$

Значит,

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{T^2}\frac{1}{\omega}\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\right\} = \frac{K}{T^2}\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t).$$

Подставил введённые замены $\frac{\xi}{T} = a$, $\frac{1-\xi^2}{T^2} = \omega^2$:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s)\right\} = \frac{K}{T}\frac{1}{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{T}t}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right) = \frac{K}{T\sqrt{1-\xi^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{T}t}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right).$$

Переходная функция:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}.$$

Используя полученные при вычислении весовой функции преобразования, получаю при $a = \frac{\xi}{T}, \omega = \sqrt{\frac{1-\xi^2}{T^2}}$:

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{1}{s}\frac{K}{T^2}\frac{1}{((s+a)^2+\omega^2)}.$$

Тогда, по свойству интегрирования:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{K}{T^2}\frac{1}{((s+a)^2+\omega^2)}\right\} = \int\limits_{0^-}^{t}\frac{K}{T^2}\frac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-ax}\sin(\omega x)dx = \frac{K}{T^2\omega}\int\limits_{0^-}^{t}\mathrm{e}^{-ax}\sin(\omega x)dx$$

Рассмотрю неопределенный интеграл $\int \mathrm{e}^{-ax}\sin(\omega x)dx$:

$$\int \mathrm{e}^{-ax}\sin(\omega x)dx = \left[\int \mathrm{fg}' = \mathrm{fg} - \int \mathrm{f}'\mathrm{g},\ f = \sin(\omega x), g' = \mathrm{e}^{-ax}\right] = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}\sin(\omega x)}{a} - \int -\frac{\omega\mathrm{e}^{-ax}\cos(\omega x)}{a}dx.$$

Проинтегрирую по частям ещё раз:

$$-\frac{\mathrm{e}^{-ax}\sin(\omega x)}{a} - \int -\frac{\omega\mathrm{e}^{-ax}\cos(\omega x)}{a}dx = \left[\mathrm{f} = \omega\cos(\omega x),\ \mathrm{g}' = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}}{a}\right] =$$
$$= -\frac{\mathrm{e}^{-ax}\sin(\omega x)}{a} - \left(-\frac{\omega\mathrm{e}^{-ax}\cos\omega x}{a^2} - \int -\frac{\omega^2\mathrm{e}^{-ax}\sin(\omega x)}{a^2}dx\right)$$

Исходный рассматриваемый интеграл снова появляется в правой части выражения, таким образом решаем уравнение по $\int \mathrm{e}^{-ax}\sin(\omega x)dx$:

$$F(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-ax}\left(a\sin(\omega x) + \omega\cos(\omega x)\right)}{\omega^2+a^2} + C$$

Первообразная найдена, можно посчитать определенный интеграл:

$$y_{s.r.}(t) = \frac{K}{T^2\omega}\int\limits_{0^-}^{t}\mathrm{e}^{-ax}\sin(\omega x)dx = F(t) - F(0^-) = \frac{K}{T^2\omega}\left(\frac{\omega}{\omega^2+a^2} - \frac{a\sin(t\omega)+\omega\cos(t\omega)}{\mathrm{e}^{at}\omega^2+a^2\mathrm{e}^{at}}\right) =$$
$$= \frac{K}{T^2\omega(\omega^2+a^2)}\left(\omega - \mathrm{e}^{-at}(a\sin(t\omega)+\omega\cos(t\omega))\right)$$

Произведу обратную замену $a = \frac{\xi}{T}, \omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$:

$$y_{s.r.}(t) = \frac{K}{T^2\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\left(\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)^2+\left(\frac{\xi}{T}\right)^2\right)}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} - \mathrm{e}^{-\frac{\xi t}{t}}\left(\frac{\xi}{T}\sin\left(t\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)+\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\cos\left(t\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{K}{\cancel{T}\cancel{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\frac{1-\xi^2+\xi^2}{\cancel{T^2}}\right)}\frac{\cancel{\sqrt{1-\xi^2}}}{\cancel{T}}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\xi t}{T}}\left(\frac{\xi}{\cancel{T}}\frac{\cancel{T}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(t\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)+\cos\left(t\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)\right)\right) =$$

$$= K\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\xi t}{T}}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(t\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)+\cos\left(t\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)\right)\right).$$

Подставлю исходные данные в полученные функции:

$$w(t) = \frac{K}{T\sqrt{1-\xi^2}}\mathrm{e}^{-\frac{\xi}{T}t}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}t\right) = 19.1327\mathrm{e}^{-2.2356t}\sin\left(6.0921t\right)$$

$$y_{\text{s.r.}}(t) = K\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\xi t}{T}}\left(\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(t\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)+\cos\left(t\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\right)\right)\right) =$$

$$= 2.7685\Big(1-e^{-2.2356t}\big(0.3669\sin\left(6.0921t\right)+\cos\left(6.0921t\right)\big)\Big).$$

Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

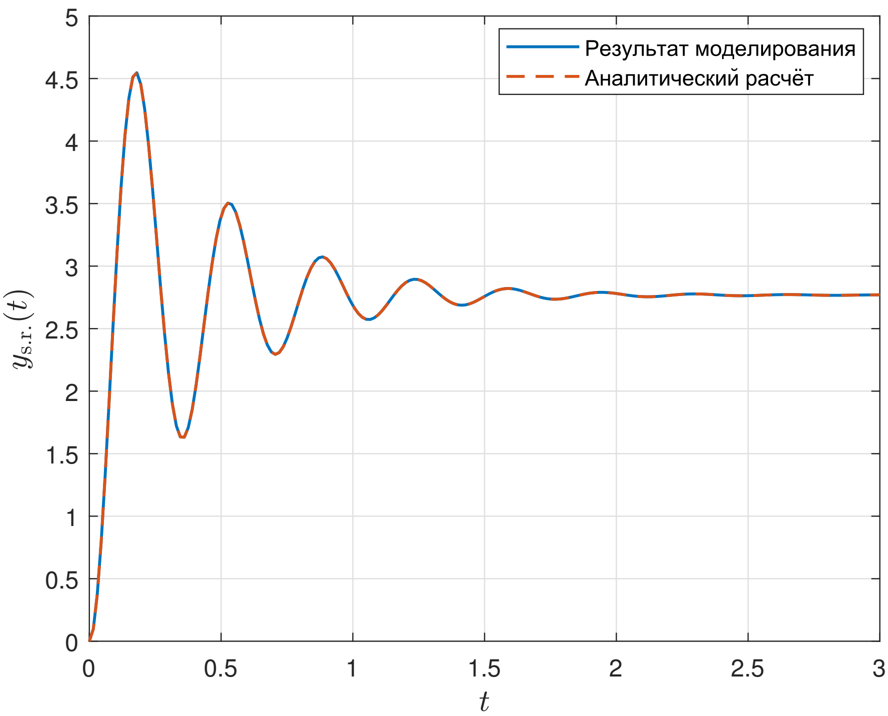

Рисунок 11: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

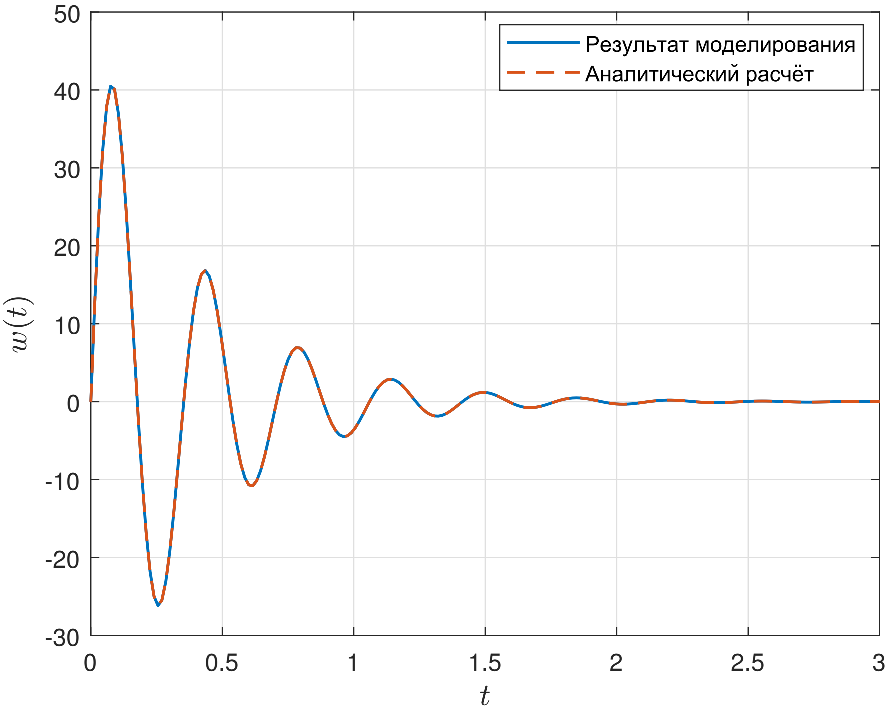

Рисунок 12: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного колебательного звена.

1.3 Конденсируй-умножай

В задании рассматривается уравнение конденсатора

$$I = C\frac{dU}{dt}$$

с $I(t)$ в качестве входа и $U(t)$ в качестве выхода.

Для вывода передаточной функции представлю уравнение в виде

$$C\dot{U} = I$$

Тогда передаточная функция выглядит следующим образом:

$$W(s) = \frac{1}{Cs}$$

Она представима в стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{K}{s}, K = \frac{1}{C}$$

Функция сопоставима с идеальным интегрирующим звеном. Ёмкость конденсатора — величина неотрицательная, соответственно и $K > 0$.

1.3.1 Частотные характеристики

Для определения АЧХ и ФЧХ перейду к частотной передаточной функции и разобью её на вещественную и мнимую составляющие:

$$W(s) = \frac{K}{s} \Leftrightarrow W(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

$$W(j\omega) = \frac{-jK\omega}{(j\omega)(-j\omega)} = \frac{-jK\omega}{\omega^2} = \frac{-jK}{\omega}.$$

В этом случае действительная составляющая $P(\omega)$ равна 0, значит, $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ — чисто мнимое число, при этом $Q(\omega) < 0$. Найду АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{W(j\omega)^2} = \sqrt{\left(\frac{-jK}{\omega}\right)^2} = \frac{K}{\omega}.$$

Тогда ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg\left(\frac{K}{\omega}\right)$$

Разложим логарифм:

$$L(\omega) = 20\lg K - 20\lg\omega.$$

ФЧХ же в этом случае будет определяться так:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\left(\frac{-K}{\omega}, 0\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{C} = \frac{1}{314} \approx 0.0032 \Rightarrow W(s) = \frac{0.0032}{s}.$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega} = \frac{0.0032}{\omega}.$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{0.0032}{\omega}\right).$$

Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

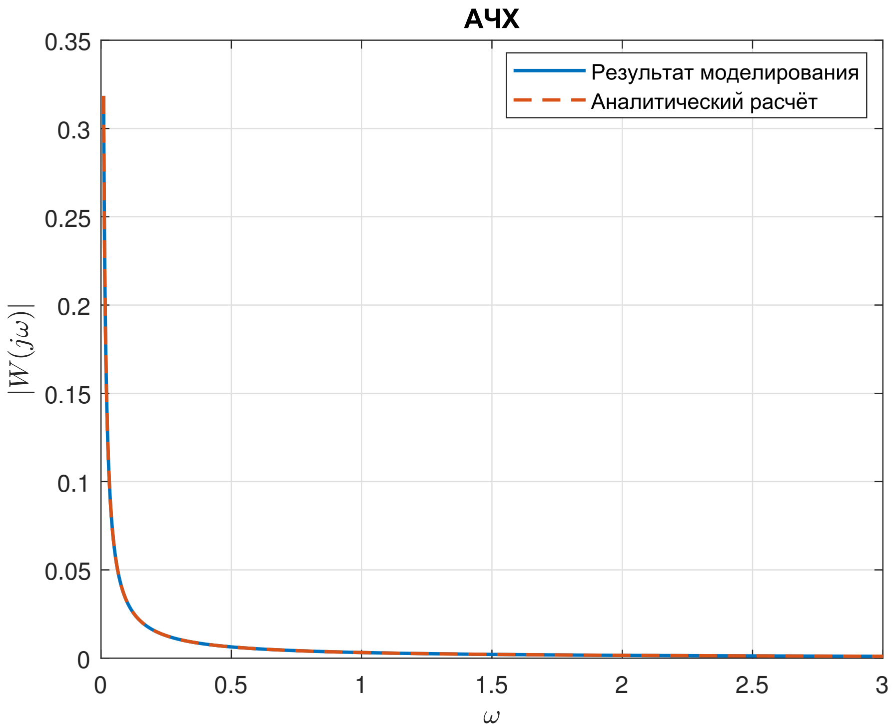

Рисунок 13: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

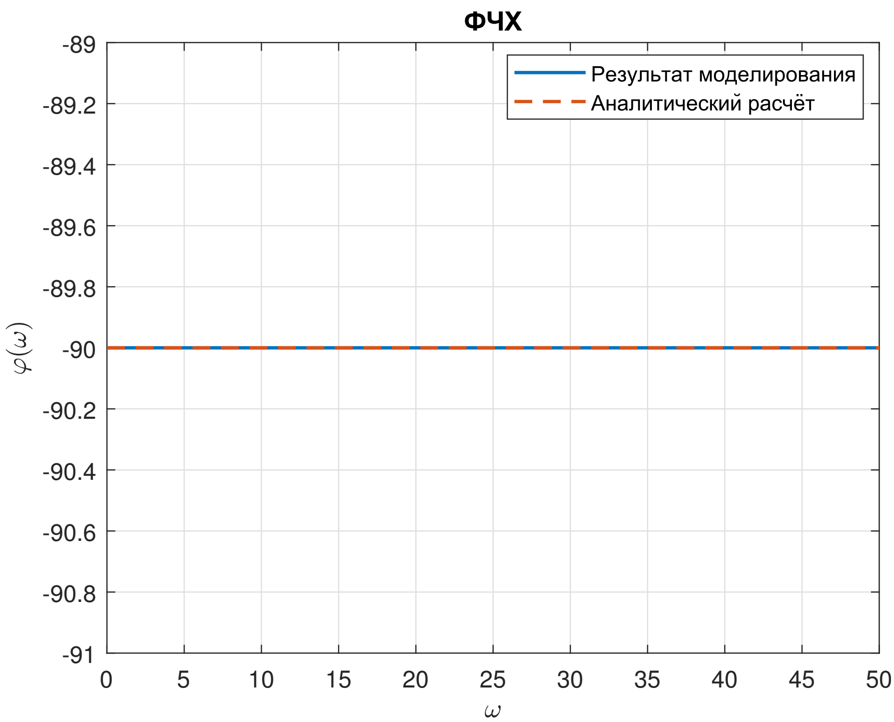

Рисунок 14: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

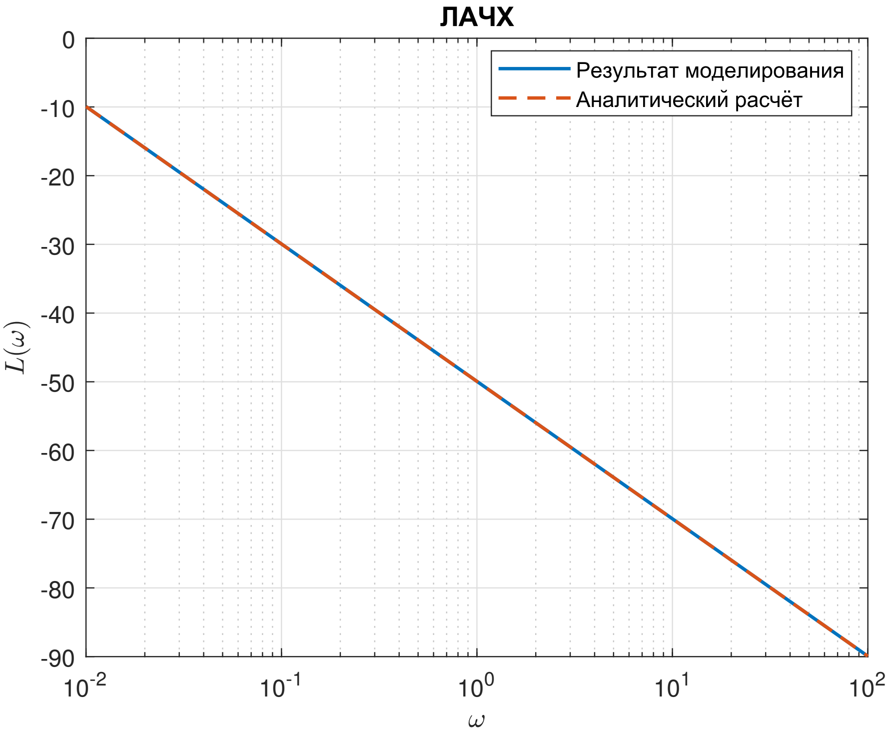

Рисунок 15: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

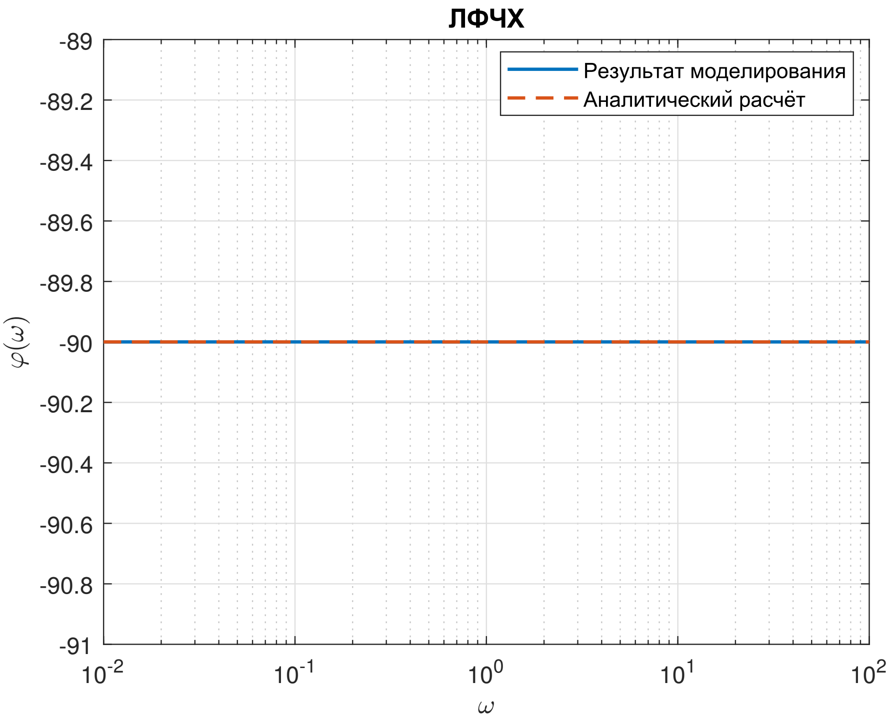

Рисунок 16: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного идельного интегрирующего звена.

1.3.2 Временные характеристики

Весовая функция для уравнения конденсатора:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s}\right\} = K \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = K$$

Переходная функция:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s^2}\right\} = K \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = Kt$$

Подставляя исходные данные для этого объекта, получаю:

$$w(t) = K = 0.0032,$$

$$y_{\text{s.r.}}(t) = Kt = 0.0032t.$$

Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

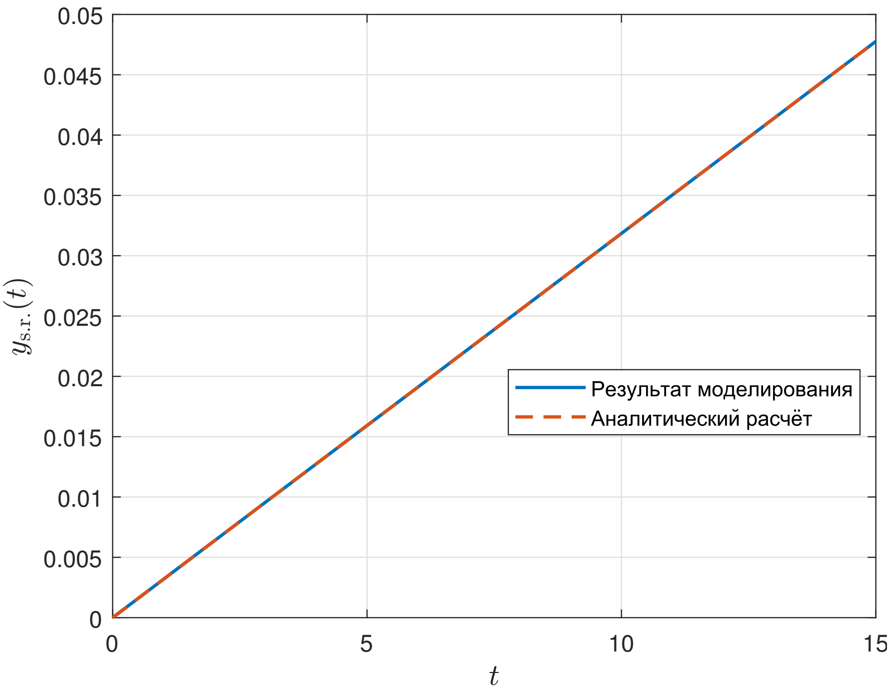

Рисунок 17: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

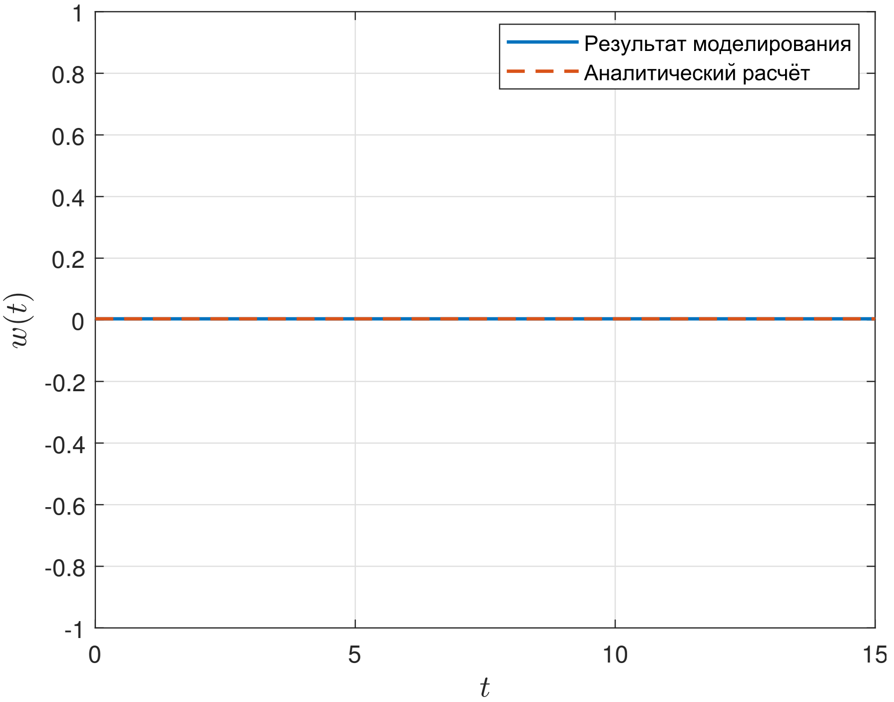

Рисунок 18: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного идеального интегрирующего звена.

1.4 Пружинка

В задании рассматривается пружинный маятник, представленный на рисунке:

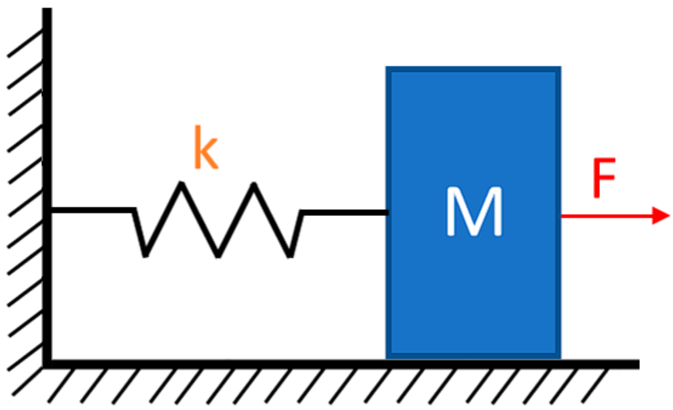

Рисунок 19: Пружинный маятник

Его движение задаётся следующими уравнениями:

$$F_{\text{упр}} = -kx, F = ma.$$

Входом этой системы считается некая внешняя сила F_{ext}, направленная соосно движению маятника, а выходом — траектория движения $x(t)$. Так как $a = \ddot{x}$:

$$F_{ext}(t) = m\ddot{x} + kx$$

Переходим к пространству изображений Лапласа:

$$ms^2X(s) + kX(s) = F_{\text{ext}}(s)$$

$$X(s)\left(ms^2 + k\right) = F_{\text{ext}}(s)$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{F_{\text{ext}}(s)} = \frac{1}{ms^2 + k} = \frac{1}{k}\frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + 1}$$

В стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 1}, K = \frac{1}{k}, T^2 = \frac{m}{k}$$

Получаем консервативное звено.

1.4.1 Частотные характеристики

Найдём АЧХ и ФЧХ, перейдя к частотной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 1} = \frac{K}{-T^2\omega^2 + 1}$$

В этом случае в качестве $W(j\omega)$ получается вещественное число. Тогда АЧХ — просто его модуль:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \left|\frac{K}{-T^2\omega^2 + 1}\right|.$$

ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg\left|\frac{K}{1 - T^2\omega^2}\right| = 20\lg K - 20\lg\left|1 - T^2\omega^2\right|.$$

Заметно, что АЧХ имеет разрыв в точке $\omega_0 = \frac{1}{T}$, и ФЧХ также не определена на этой частоте из-за наличия резонанса (знаменатель становится равен нулю). При этом частотная передаточная функция положительна, если $0 < \omega \le \omega_0$, и отрицательна при $\omega > \omega_0$. Имея $Q(\omega) = 0, P(\omega) = \frac{K}{-T^2\omega^2+1}$, получаем:

$$\text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{0}{P(\omega)}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} 0, & 0 < \omega \le \frac{1}{T} \\ -\pi, & \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{k} = \frac{1}{324} \approx 0.0031, T = \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{35}{324}} \approx 0.3287 \Rightarrow W(s) = \frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1}$$

$$A(\omega) = \left|\frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1}\right| = \frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1}.$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(\frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1}\right)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega \le 3.0423, \\ -\pi, & \omega > 3.0423. \end{cases}$$

Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

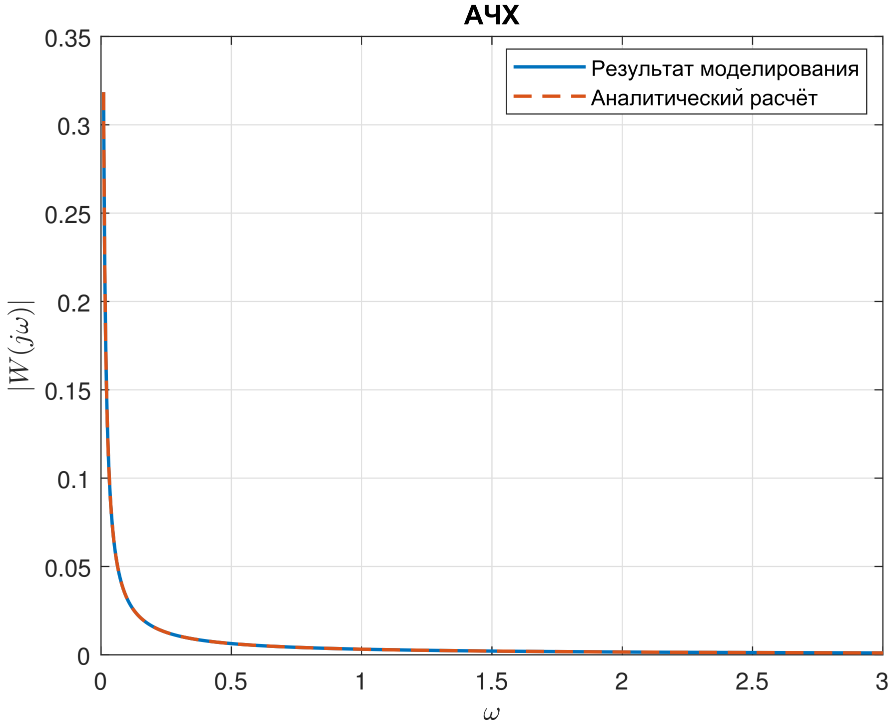

Рисунок 20: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

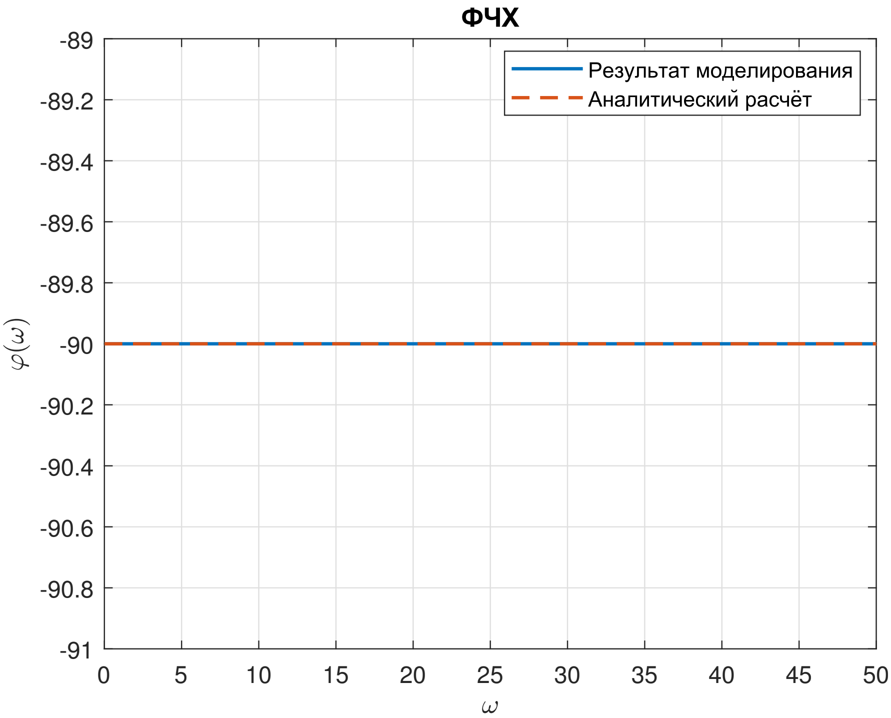

Рисунок 21: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

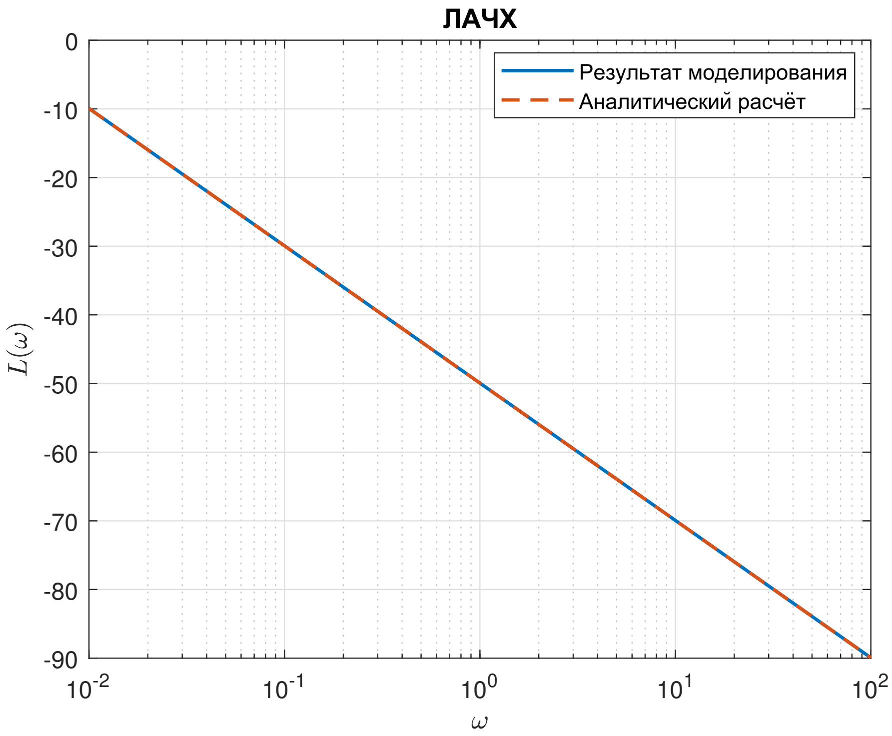

Рисунок 22: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

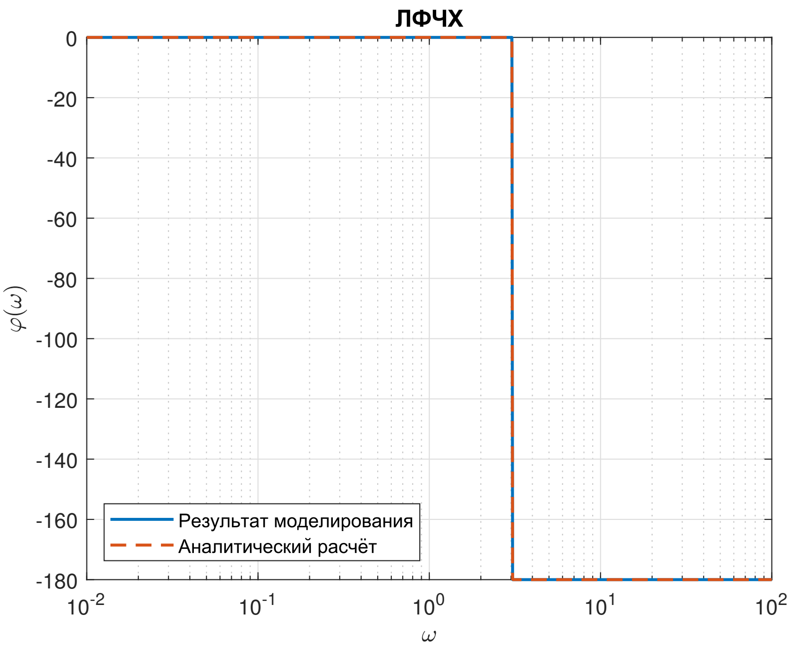

Рисунок 23: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного консервативного звена.

1.4.2 Временные характеристики

Для поиска весовой функции сведу передаточную функцию до табличного значения:

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2+1} = \frac{K}{T^2}\cdot\frac{1}{s^2+\frac{1}{T^2}} = \frac{K}{T}\cdot\frac{1/T}{s^2+(1/T)^2}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right\} = \sin(\omega t) \Rightarrow w(t) = \frac{K}{T}\sin\!\left(\frac{t}{T}\right)$$

Переходная функция:

$$w_{s.r}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s(T^2s^2+1)}\right\}$$

Разложу на элементарные дроби:

$$\frac{K}{s(T^2s^2+1)} = K\left(\frac{1}{s} - s\frac{T^2}{T^2s+1}\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{s\frac{1}{s+(1/T)^2}\right\} = \cos\left(\frac{t}{T}\right)$, тогда:

$$w_{s.r}(t) = K\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{T^2s}{T^2s^2+1}\right\} = K\left(1-\cos\!\left(\frac{t}{T}\right)\right).$$

Подставлю исходные данные:

$$w(t) = \frac{K}{T}\sin\left(\frac{t}{T}\right) = 0.0094\sin\left(\frac{t}{0.3287}\right).$$

$$y_{\text{s.r.}}(t) = K\left(1-\cos\left(\frac{t}{T}\right)\right) = 0.0031\left(1-\cos\left(\frac{t}{0.3287}\right)\right)$$

Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

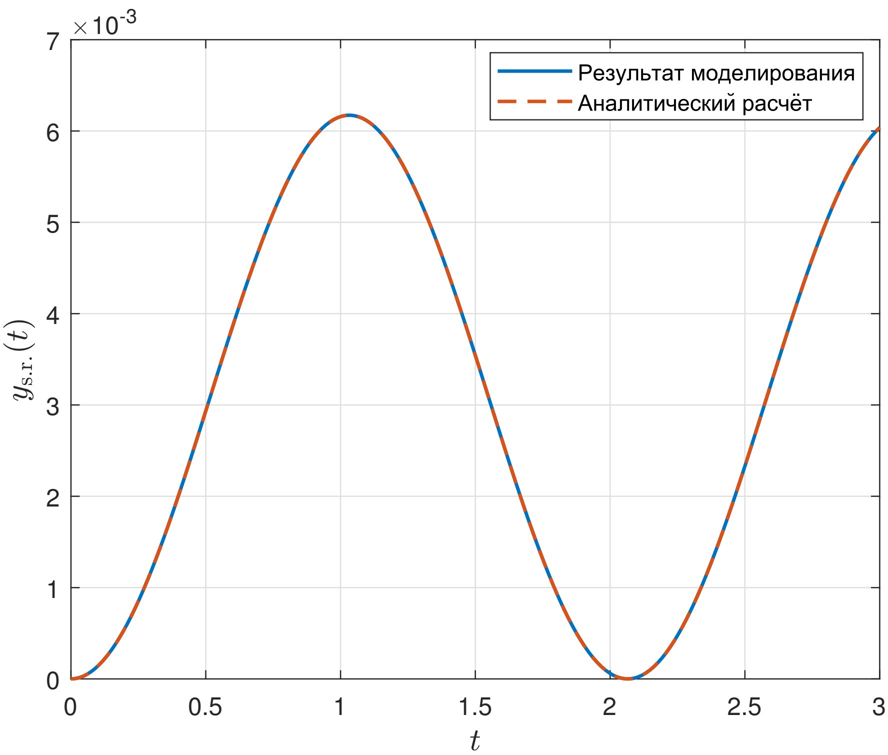

Рисунок 24: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

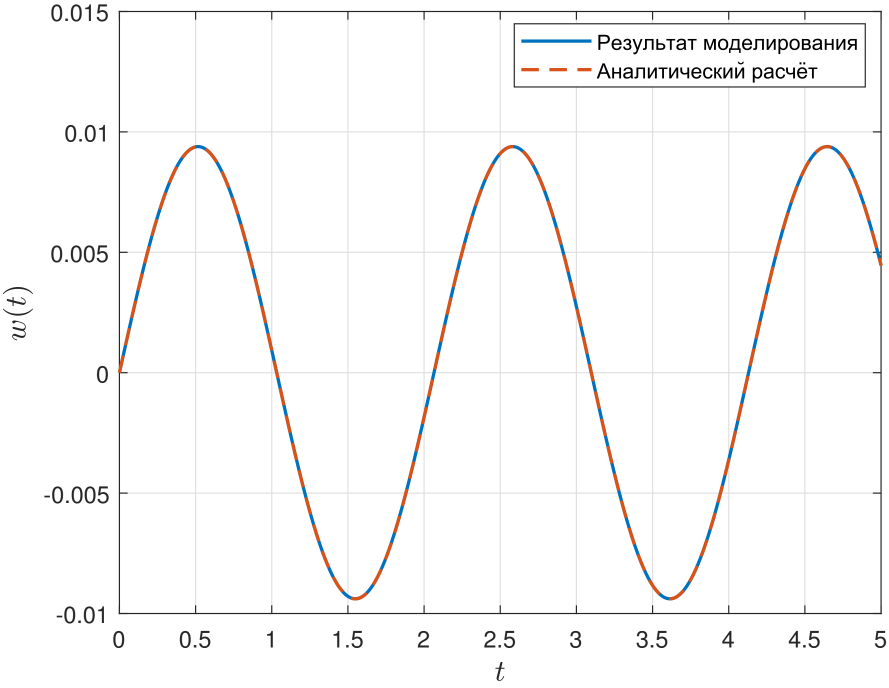

Рисунок 25: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного консервативного звена.

1.5 Что ты такое?

В задании рассматривается схема регулятора на операционном усилителе, представленная на рисунке:

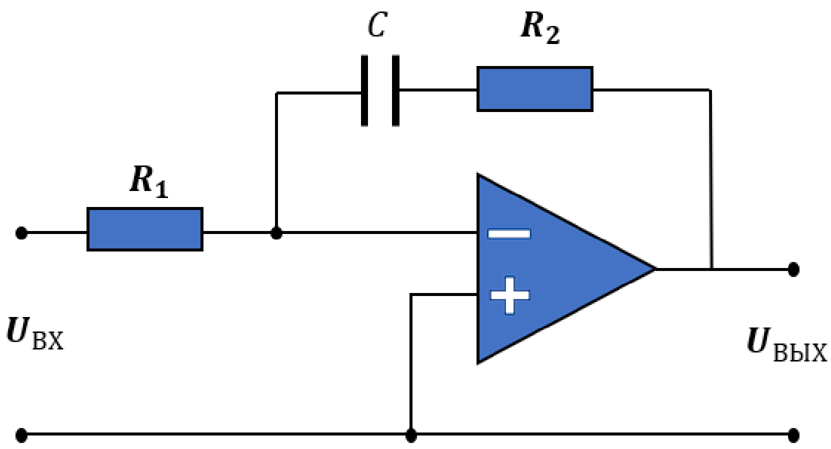

Рисунок 26: Принципиальная схема регулятора на операционном усилителе

Считая входом системы $U_{\text{ВХ}}(t)$, а выходом — $U_{\text{ВЫХ}}(t)$, можем рассмотреть преобразования, выполняемые над входным сигналом более подробно:

На входном резисторе сопротивлением R_1 при подаче напряжения появляется ток $I(t) = \frac{U_{\text{ВХ}}(t)}{R_1}$. Далее этот ток попадает на конденсатор с отрицательной обратной связью ёмкостью C, и, зная что ток, проходящий через конденсатор такой ёмкости, равен $I(t) = C\frac{du(t)}{dt}$, можем рассчитать напряжение на нём:

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int\limits_0^t I(x)dx.$$

Воспользуемся полученным ранее значением $I(t) = \frac{U_{\text{BX}}(t)}{R_1}$ и примем начальное условие $u(0) = 0$, тогда $u(t) = \frac{1}{C}\int\limits_0^t \frac{U_{\text{BX}}(x)}{R_1}dx = \frac{1}{R_1C}\int\limits_0^t U_{\text{BX}}(x)dx$. В пространстве изображений Лапласа по свойству интегрирования после прохождения конденсатора выходом будет являться $Z(s) = \frac{1}{R_1Cs}$ Далее сигнал идёт на последовательно подключенный резистор R_2, и выходом по обратной связи будет являться $W(s) = \frac{1}{R_1Cs} + R_2 \cdot I(s) = \frac{1}{R_1Cs} + \frac{R_2}{R_1} = \frac{1+R_2Cs}{R_1Cs}$.

Получается изодромное звено. Так как передаточная функция этого регулятора состоит из двух слагаемых, интегрирующего $\frac{1}{R_1Cs}$ и пропорционального $\frac{R_2}{R_1}$, то регулятор пропорционально-интегральный (ПИ).

Передаточная функция объекта найдена, можно привести её к стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{1 + R_2Cs}{R_1Cs} = \frac{1}{R_1C}\frac{R_2Cs + 1}{s} = \frac{K(Ts + 1)}{s}, K = \frac{1}{R_1C}, T = R_2C.$$

1.5.1 Частотные характеристики

Для нахождения АЧХ и ФЧХ переведу уравнение в частотную область:

$$W(s) = \frac{K(Ts + 1)}{s} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K(T(j\omega) + 1)}{(j\omega)}$$

Домножу числитель и знаменатель на сопряженное:

$$W(j\omega) = \frac{K(-T(j\omega)^2 - (j\omega))}{-(j\omega)(j\omega)} = \frac{KT\omega^2 - jK\omega}{\omega^2} = \frac{KT\omega^2}{\omega^2} + j\frac{-K\omega}{\omega^2} = KT + j\frac{-K}{\omega}$$

Пусть $P(\omega) = KT$, $Q(\omega) = -\frac{K}{\omega}$. Тогда АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \sqrt{K^2T^2 + \frac{K^2}{\omega^2}} = K\sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}}$$

ЛАЧХ определяется как:

$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg\left(K\sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}}\right)$$

$$= 20\lg K + 20\lg\left(\sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}}\right) = 20\lg K + 10\lg\left(T^2 + \frac{1}{\omega^2}\right).$$

Также вычислю и ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega) = \operatorname{atan2}\left(-\frac{K}{\omega}, KT\right))$$

$K = \frac{1}{R_1C} > 0$, так как сопротивление резистора и ёмкость конденсатора — величины положительные. $T = R_2C > 0$ по той же причине, а значит, $Q(\omega) = -\frac{K}{\omega} < 0 \ \forall \ \omega > 0$, и $P(\omega) = KT > 0$. Следовательно, $W(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ всегда расположено во втором квадранте. В этом случае $\operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \pi + \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$. Тогда:

$$\varphi(\omega) = \pi + \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{-\frac{K}{\omega}}{KT}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{-1}{T\omega}\right) = \pi + \arctan\left(\frac{-1}{T\omega}\right) = \pi - \arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right).$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{R_1C} = \frac{1}{6427 \cdot 314} \approx 4.955 \cdot 10^{-7}, T = R_2C = 19282 \cdot 314 = 6054548 \Rightarrow W(s) = \frac{4.955 \cdot 10^{-7}(6054548s + 1)}{s}.$$

$$A(\omega) = K\sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}} = 4.955 \cdot 10^{-7}\sqrt{6054548^2 + \frac{1}{\omega^2}}.$$

$$L(\omega) = 20\lg\left(4.955 \cdot 10^{-7}\sqrt{6054548^2 + \frac{1}{\omega^2}}\right)$$

$$\varphi(\omega) = \pi - \arctan\left(\frac{1}{6054548\omega}\right).$$

Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

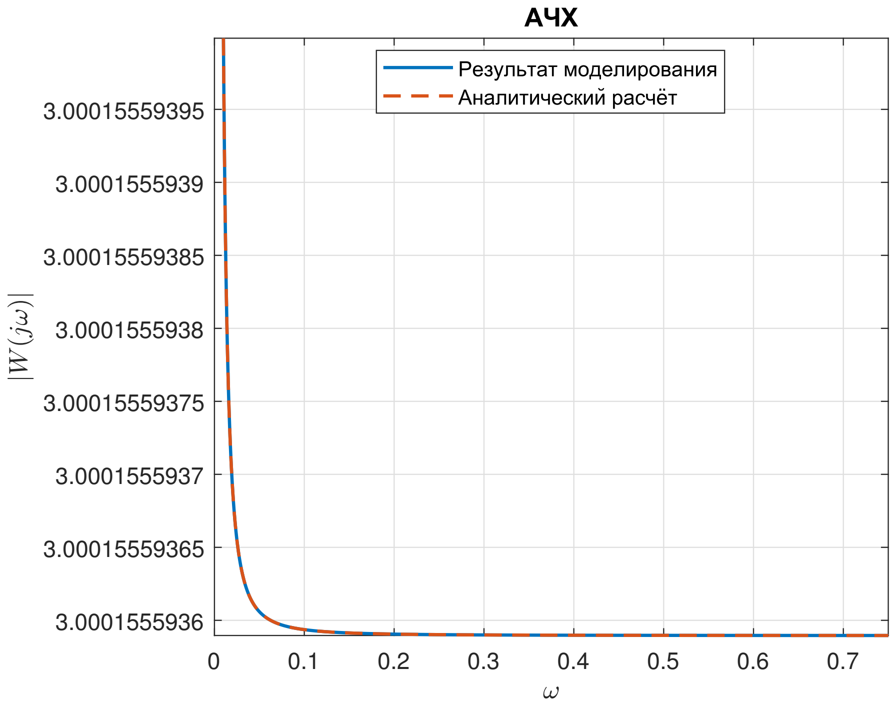

Рисунок 27: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

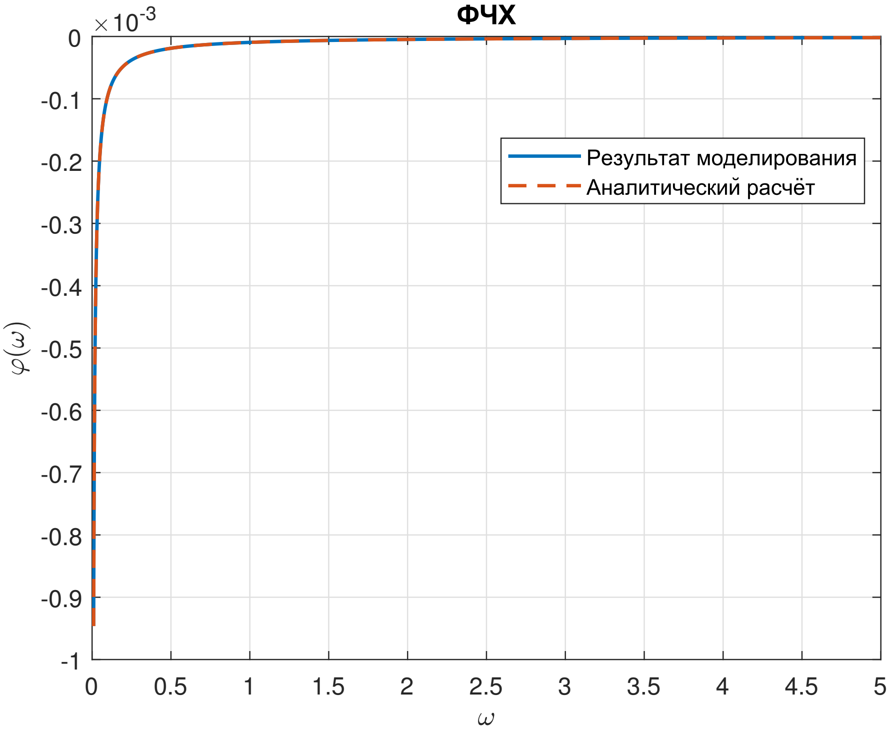

Рисунок 28: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

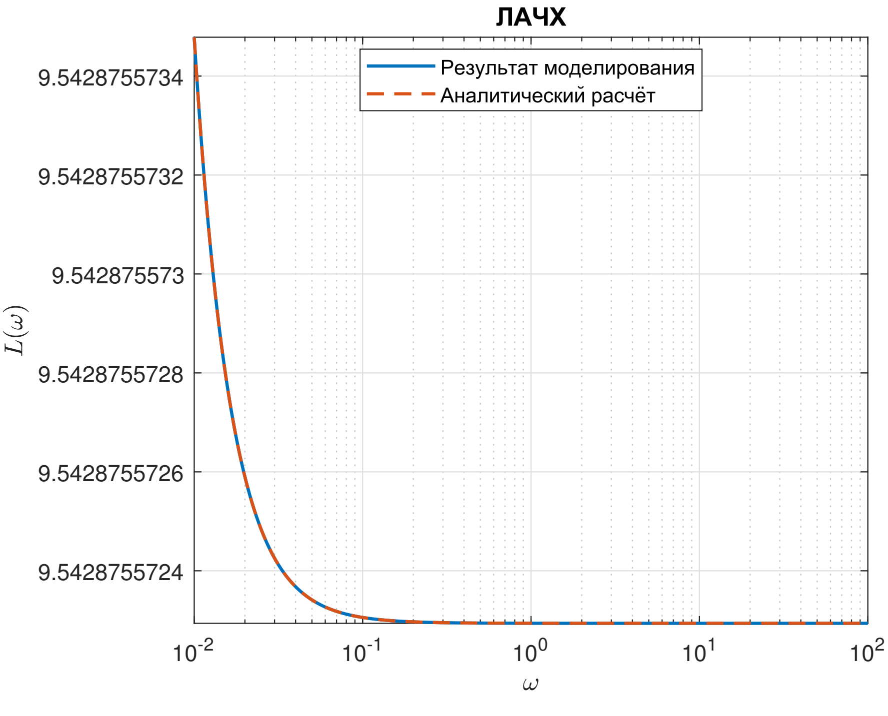

Рисунок 29: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

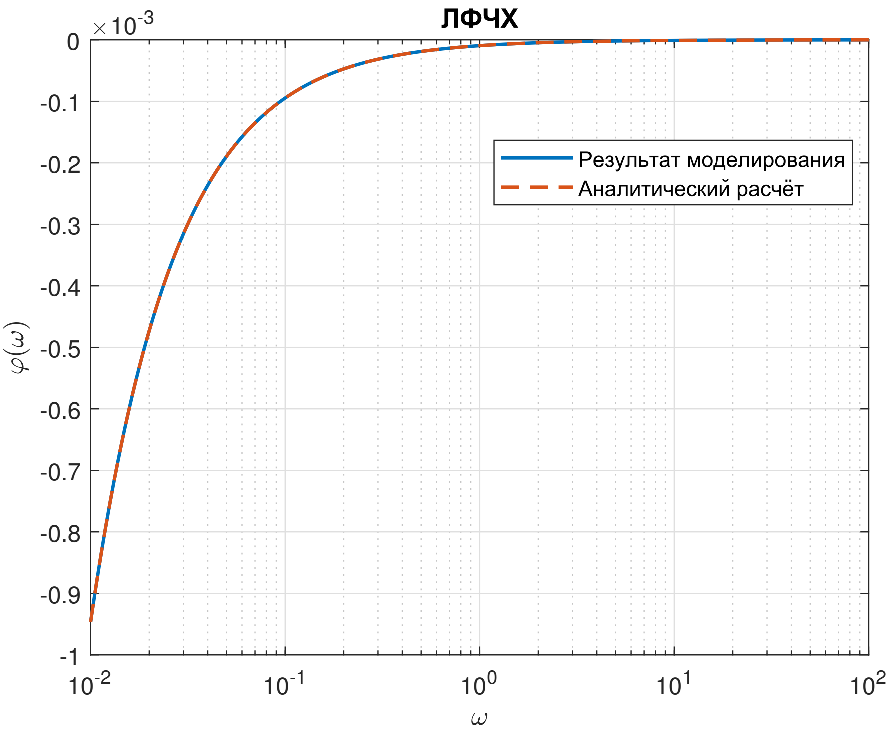

Рисунок 30: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного изодромного звена.

1.5.2 Временные характеристики

Разложу передаточную функцию для удобного нахождения весовой функции:

$$W(s) = \frac{K(Ts+1)}{s} = KT + \frac{K}{s}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = KT\,\delta(t) + K$$

Передаточная функция $y_{s.r.}(t)$ всё также является реакцией системы на единичный скачок, образ Лапласа которого — $\frac{1}{s}$:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$$

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{K(Ts+1)}{s^2} = K\left(\frac{T}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$, $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = t$, следовательно:

$$y_{s.r.}(t) = K\big(T + t\big)$$

В очередной раз подставлю исходные данные и найду характеристики для объекта с ними:

$$w(t) = KT\,\delta(t) + K = 3.001\delta(t) + 4.955 \cdot 10^{-7},$$

$$y_{\text{s.r.}}(t) = 3.001 + 4.955 \cdot 10^{-7} t.$$

Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

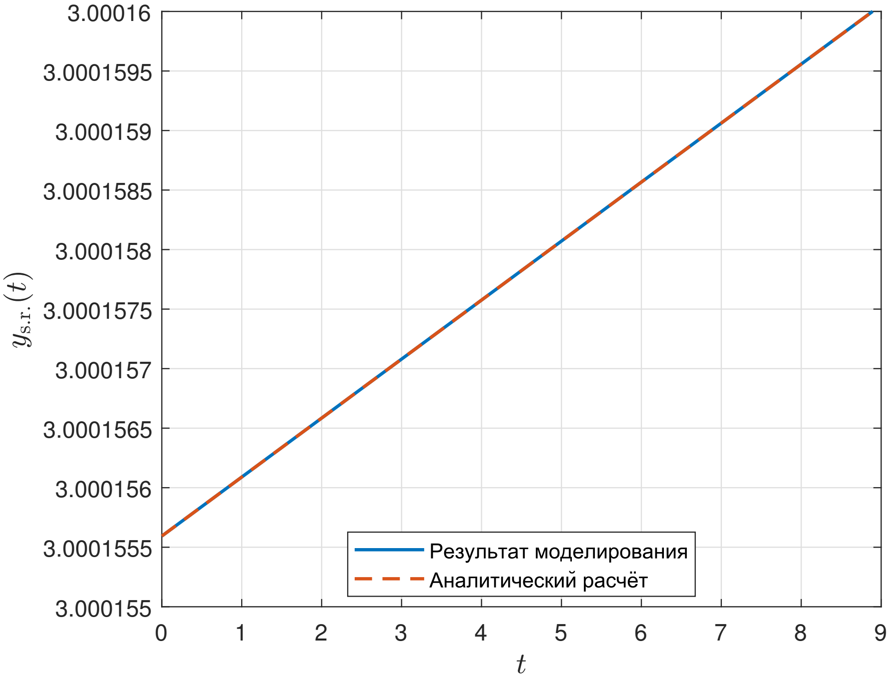

Рисунок 31: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

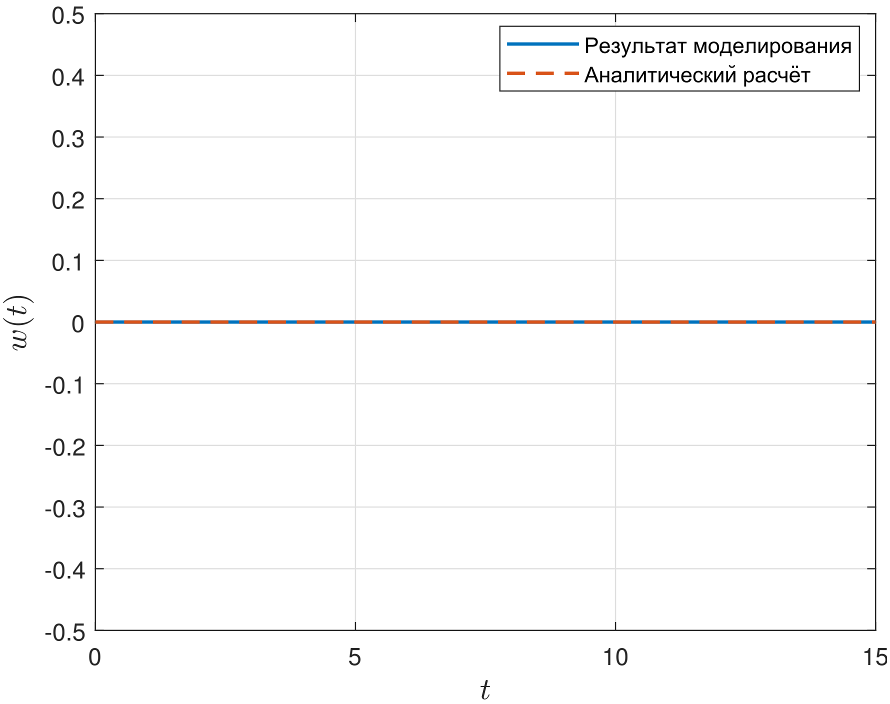

Рисунок 32: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного изодромного звена.

2 Вывод по работе

В ходе работы я ознакомился с основными типовыми звеньями, их частотными и временными характеристиками, научился вычислять их аналитически, проверил полученные результаты программным моделированием.

3 Приложение А. Код для выполнения заданий

Листинг 1. Код для выполнения заданий

```
clear all;
close all;

[~, scriptName] = fileparts(mfilename('fullpath'));
if ~isfolder(scriptName)
    mkdir(scriptName);
end

km = 0.3612;
ke = 0.3612;
J = 0.0031;
R = 4.7237;
L = 1.0567;

N = 1000;
w = logspace(-2, 2, N);  % от 0.01 до 100 рад/с
s = 1j * w;

t_final = 15; % время моделирования
t = linspace(0, t_final, 1000);

% K = 1 / ke;
% T = (J * R) / (ke * km);
% A = K ./ sqrt((1 + (T.*w).^2));
% L = 20*log10(K) - 10*log10(1 + (T.*w).^2);
% phi = atan2(((-K * T) .* w)./(1 + (T.*w).^2), (K)./(1 + (T.*w).^2));
% phi = rad2deg(phi);
% num = K;
% den = [T, 1];
% sys = tf(num, den)                    % дпт
% [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
% mag = squeeze(mag);
% phase = squeeze(phase);
% y_imp_native = (K / T) .* exp((-1/T) .* t);
% y_step_native = K * (1 - exp(-t .* (1/T)));
% [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
% [y_step, t_step] = step(sys, t);


% K = 1 / ke;
% T = sqrt((J) / ke * km);
% xi = (T * R) / 2 * L;
% A = K * sqrt( (T^2 * w.^2 .* (4*xi^2 - 2 + T^2 * w.^2) + 1) ./ ((1 - T^2 * w.^2).^2 + (2*T*xi*w)
    .^2).^2);
% L = 20*log10(A);
% phi = zeros(size(w));
% idx1 = w < 1/T;
% idx2 = w > 1/T;
% idx_eq = abs(w - 1/T) < 1e-12;
% phi(idx1) = -atan( (2*T*xi*w(idx1)) ./ (1 - T^2 * w(idx1).^2) );
% phi(idx_eq) = -pi/2;
% phi(idx2) = -atan( (2*T*xi*w(idx2)) ./ (1 - T^2 * w(idx2).^2) ) - pi;
% phi = rad2deg(phi);
%
% num = K;
% den = [T^2, 2*T*xi, 1];
% sys = tf(num, den)                    % DPT 2.0
% [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
% mag = squeeze(mag);
% phase = squeeze(phase);
```

```
% % W = K ./ (T^2 * s.^2 + 2*T*xi*s + 1); % DPT 2.0
% y_imp_native = (K / (T*sqrt(1-xi^2))) .* exp((-xi/T) .* t) .* sin(((sqrt(1-xi^2))/T).*t);
% y_step_native = K * (1 - exp(-(xi .* t)/T) .* ( (xi ./ sqrt(1 - xi^2)) .* sin(t .* (sqrt(1 - xi^2)
    / T)) + cos(t .* (sqrt(1 - xi^2) / T)) ));
% [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
% [y_step, t_step] = step(sys, t);



% K = 1 / 314;
% A = K ./ w;
% L = 20 * log10(K) - 20 .* log10(w);
% phi = (-pi / 2) .* ones(size(w));
% phi = rad2deg(phi);
%
% num = K;
% den = [1, 0];
% sys = tf(num, den)                    % конденсируй-умножай
% [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
% mag = squeeze(mag);
% phase = squeeze(phase);
%
% % W = K ./ (s);                         % конденсируй-умножай
% y_imp_native = K .* ones(size(t));
% y_step_native = K .* t;
% [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
% [y_step, t_step] = step(sys, t);


% M = 35;
% k = 324;
% K = 1 / k;
% T = sqrt(M / k);
% A = abs(K ./ (-T^2 .* w.^2 + 1));
% L = 20 * log10(K) - 20 * log10(abs(1 - (T^2).*(w.^2)));
% phi = zeros(size(w));
% idx1 = w <= 1/T;
% idx2 = w > 1/T;
% phi(idx1) = 0;
% phi(idx2) = -pi;
% phi = rad2deg(phi);
%
% num = K;
% den = [T^2, 0, 1];
% sys = tf(num, den)                    % пружинка
% [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
% mag = squeeze(mag);
% phase = squeeze(phase);
%
% % W = K ./ T^2 * s.^2 + 1;              % пружинка
% y_imp_native = (K / T) .* sin(t ./ T);
% y_step_native = K .* (1 - cos(t ./ T));
% [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
% [y_step, t_step] = step(sys, t);



R1 = 6427;
R2 = 19282;
C = 314;
K = 1 / (R1 * C);
T = R2 * C;
A = K .* sqrt(T^2 + 1./w.^2);
L = 20 * log10(K) + 10 * log10(T^2 + 1./w.^2);
phi =  - atan(1./(T .* w));
phi = rad2deg(phi);

num = [K * T, K];
den = [1, 0];
sys = tf(num, den)                    % что ты такое
[mag, phase, wout] = bode(sys, w);
```

```
mag = squeeze(mag);
phase = squeeze(phase);

% W = K * (T * s + 1) ./ s;              % что ты такое
u = zeros(size(t));
% u(1) = N;
y_imp_native = K * ones(size(t));
y_step_native = K*T + K .* t;
[y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
[y_step, t_step] = step(sys, t);



impulse = figure;
plot(t, y_imp, LineWidth=1.4);
hold on;
plot(t, y_imp_native, '--', LineWidth=1.4);
legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
xlabel('$t$', Interpreter='latex', FontSize=13);
ylabel('$w(t)$', Interpreter='latex', FontSize=13);
grid on;
xlim([0, 5])
ylim([-0.01, 0.015])
saveas(impulse, string(scriptName) + '\impulse.eps', 'epsc')

step = figure;
plot(t, y_step, LineWidth=1.4);
hold on;
plot(t, y_step_native, '--', LineWidth=1.4);
legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
xlabel('$t$', Interpreter='latex', FontSize=13);
ylabel('$y_{\mathrm{s.r.}}(t)$', Interpreter='latex', FontSize=13);
% title('АЧХ');
grid on;
% xlim([0, 5])
% ylim([0, 3])
saveas(step, string(scriptName) + '\step.eps', 'epsc')

% АЧХ
achh = figure;
plot(w, mag, LineWidth=1.4);
hold on;
plot(w, A, '--', LineWidth=1.4);
legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');
ylabel('$|W(j\omega)|$', Interpreter='latex');
title('АЧХ');
grid on;
xlim([0, 0.75])
saveas(achh, string(scriptName) + '\achh.eps', 'epsc')

% ФЧХ
fchh = figure;
plot(w, phase, LineWidth=1.4);
hold on;
plot(w, phi, '--', LineWidth=1.4);
legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');
ylabel('$\varphi(\omega)$', Interpreter='latex');
title('ФЧХ');
%xlim([0, 5])
grid on;
saveas(fchh, string(scriptName) + '\fchh.eps', 'epsc')

%ЛАЧХ
lachh = figure;
semilogx(w, 20*log10(mag), LineWidth=1.4);
hold on;
semilogx(w, L, '--', LineWidth=1.4);
legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');
```

```
ylabel('$L(\omega)$', Interpreter='latex');
title('ЛАЧХ');
grid on;
%ylim([9.5, 10])
saveas(lachh, string(scriptName) + '\lachh.eps', 'epsc')

% ЛФЧХ
lfchh = figure;
semilogx(w, phase, LineWidth=1.4);
hold on;
semilogx(w, phi, '--', LineWidth=1.4);
legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');
ylabel('$\varphi(\omega)$', Interpreter='latex');
title('ЛФЧХ');
grid on;
saveas(lfchh, string(scriptName) + '\lfchh.eps', 'epsc')
```

Листинг 1: Код для построения графиков характеристик для всех рассмотренных объектов