Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №5

ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

Студент: Заводин Е.Ю.
Лин САУ R23 бак 1.1.1

Преподаватели: Перегудин А.А.
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Задача исследования типовых динамических звеньев

В работе исследуются реальные объекты — находятся их передаточные функции, сопоставляются с типовыми звеньями, временные и частотные характеристики объектов моделируются и сравниваются с конкретными теоретическими для найденных типовых звеньев.

1.1 ДПТ

Рассмотрим ДПТ независимого возбуждения, задаваемый формулами

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon_i}{R}, \varepsilon_i = -k_e\omega.$$

Считая U входом, ω — выходом, сведу формулы к одному линейному дифференциальному уравнению:

$$J\dot{\omega} = k_m\frac{U - k_e\omega}{R} = \frac{Uk_e}{R} - \frac{k_m k_e\omega}{R}$$

$$J\dot{\omega} + \frac{k_m k_e \omega}{R} = \frac{k_m}{R}U$$

$$\frac{JR}{k_m}\dot{\omega} + k_e\omega = U$$

$$\frac{\omega}{U} = W(s) = \frac{1}{\frac{JR}{k_m}s + k_e} = \frac{1}{k_e}\frac{1}{\frac{JR}{k_e k_m}s + 1}$$

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1}, T = \frac{JR}{k_e k_m}, K = \frac{1}{k_e}$$

Получил передаточную функцию в стандартизированном виде, соответствующую реальному усилительному звену. Выделю действительную и мнимую части этой передаточной функции:

$$W(s) = \frac{k}{Ts+1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{k}{T(j\omega)+1}$$

$$W(j\omega) = \frac{k(T(j\omega)-1)}{(T(j\omega)+1)(T(j\omega)-1)} = \frac{-K}{-1-\omega^2} + i\frac{KT\omega}{-1-\omega^2} = \frac{K}{1+\omega^2} + i\frac{-KT\omega}{1+\omega^2}.$$

Пусть $P(\omega) = \frac{K}{1+\omega^2}$, $Q(\omega) = \frac{-KT\omega}{1+\omega^2}$. Рассчитаю АЧХ такой передаточной функции:

$$A(\omega) = \sqrt{\frac{(KT\omega)^2 + K^2}{(1+\omega^2)^2}}.$$

Фазово-частотная характеристика может быть найдена по следующей формуле:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega)).$$

У двигателя постоянного тока активное сопротивление обмоток ротора R, момент инерции ротора J и конструктивные постоянные k_e, k_m при реальном моделировании являются положительными, также буду считать, что ω принимает только неотрицательные значения (в отрицательной области для вещественной функции результат преобразования Лапласа будет симметричен результату в положительной области). Исходя из этого, коэффициент усиления и постоянная времени

$$T = \frac{JR}{k_e k_m} > 0, K = \frac{1}{k_e} > 0.$$

Тогда числитель действительной части передаточной функции всегда положителен, как и знаменатель, а значит, $P(\omega) > 0$. Числитель мнимой части передаточной функции же всегда отрицателен, а знаменатель всегда положителен, следовательно, $Q(\omega) < 0$. Исходя из этих соображений, комплексное число $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ находится в четвёртом квадранте, а значит, вместо $\operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega))$ можем использовать $\arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$:

$$\arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-KT\omega}{1+\omega^2}}{\frac{K}{1+\omega^2}}\right) = \arctan\left(\frac{-KT\omega}{K}\right) = \arctan -T\omega = -\arctan T\omega$$

1.2 ДПТ 2.0

Рассмотрим уравнения для полной модели ДПТ независимого возбуждения:

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U+\varepsilon}{R}, \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s, \varepsilon_i = -k_e\omega, \varepsilon_s = -L\dot{I}.$$

Считая U входом, ω — выходом, сведём формулы к одному линейному дифференциальному уравнению:

$$J\dot{\omega} = k_m \frac{U - k_e\omega - L\dot{I}}{R} = \frac{k_m}{R}U - \frac{k_m k_e \omega}{R}\omega - \frac{L\dot{I}k_m}{R}\Bigg| \cdot \frac{R}{k_m}$$

$$\frac{JR}{k_m}\dot{\omega} + k_e\omega + L\dot{I} = U$$

$$J\dot{\omega} = k_m I \Rightarrow I = \frac{J\dot{\omega}}{k_m}, \dot{I} = \frac{J\ddot{\omega}}{k_m}$$

$$\frac{JL}{k_m}\ddot{\omega} + \frac{JR}{k_m}\dot{\omega} + k_e\omega = U \Leftrightarrow \ddot{\omega} + \frac{R}{L}\dot{\omega} + \frac{k_e k_m}{J}\omega = \frac{k_m}{J}U$$

Переведу получившееся уравнение в пространство изображений Лаплпаса:

$$s^2\Omega(s) + \frac{R}{L}s\Omega(s) + \frac{k_e k_m}{J}\Omega(s) = \frac{k_m}{J}U(s)$$

$$W(s) = \frac{U(s)}{\Omega(s)} = \frac{\frac{k_m}{J}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k_e k_m}{J}} = \frac{\frac{1}{k_e}}{\frac{J}{k_e k_m}s^2 + \frac{RJ}{k_e k_m L}s + 1}$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2T\xi s + 1}, K = \frac{1}{k_e}, T = \sqrt{\frac{J}{k_e k_m}}, \xi = \frac{TR}{2L}$$

Получена передаточная функция в стандартизированном виде, соответствующая колебательному звену. Для выделения действительной и мнимой части сперва перейду к частотной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2T\xi s + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{K(T^2(j\omega)^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(T^2(j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1)(T^2(j\omega)^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))} = \frac{K(-T^2\omega^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(-T^2\omega^2 + 1 + j2T\xi\omega)(-T^2\omega^2 + 1 - j2T\xi\omega)} =$$

$$= \frac{K(-T^2\omega^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} = \frac{K - KT^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} + j\frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}.$$

Пусть $P(\omega) = \frac{K - KT^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}, Q(\omega) = \frac{-2KT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}$. Рассчитаю амплитудно-частотную характеристику:

$$A(\omega) = \sqrt{\left(\frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)^2 + \left(\frac{K - KT^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4K^2T^2\xi^2\omega^2 + K^2 - 2K^2T^2\omega^2 + K^2T^4\omega^4}{\left((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2\right)^2}} =$$

$$= K\sqrt{\frac{4T^2\xi^2\omega^2 - 2T^2\omega^2 + T^4\omega^4 + 1}{\left((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2\right)^2}} = K\sqrt{\frac{T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1}{\left((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2\right)^2}}.$$

Фазо-частотная характеристика будет определяться следующим образом:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \mathrm{atan2}\left(\frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}, \frac{K - KT^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)$$

Расположение $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ на комплексной плоскости, а значит, и оценка фазовой частотной характеристики определяется в зависимости от того, положительные ли значения принимают $P(\omega)$ и $Q(\omega)$.

Знаменатели $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ всегда положительны. Тогда знаки вещественной и мнимой части $W(j\omega)$ определяются их числителями — $Q(\omega) < 0$ (т.к. $K, T, \xi > 0$), знак $P(\omega)$ меняется в зависимости от значения ω.

Рассмотрим $P(\omega) > 0$:

$$\frac{1 - T^2\omega^2}{\left((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2\right)^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - T^2\omega^2 > 0 \Leftrightarrow \omega < \frac{1}{T}$$

Тогда $P(\omega) > 0$ при $\omega > \frac{1}{T}$, $P(\omega) = 0$ при $\omega = \frac{1}{T}$. следовательно:

При $0 \le \omega < \frac{1}{T}$ $W(j\omega)$ находится в четвертом квадранте, значит,

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right).$$

При $\omega = \frac{1}{T}$ $W(j\omega)$ $P(\omega) = Q(\omega) = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$.

При $\omega > \frac{1}{T}$ $W(j\omega)$ в третьем квадранте, а значит,

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) + \pi = -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right) + \pi.$$

Итого:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2}\right), & \omega \in [0, \frac{1}{T}) \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T} \\ -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2}\right) + \pi, & \omega \in (\frac{1}{T}, +\infty) \end{cases}$$

1.3 Конденсируй-умножай

В задании рассматривается уравнение конденсатора

$$I = C\frac{dU}{dt}$$

с $I(t)$ в качестве входа и $U(t)$ в качестве выхода.

Для вывода передаточной функции представлю уравнение в виде

$$C\dot{U} = I$$

Тогда передаточная функция выглядит следующим образом:

$$W(s) = \frac{1}{Cs}$$

Она представима в стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{K}{s}, K = \frac{1}{C}$$

Функция сопоставима с идеальным интегрирующим звеном. Ёмкость конденсатора — величина неотрицательная, соответственно и $K > 0$. Для определения АЧХ и ФЧХ перейду к частотной передаточной функции и разобью её на вещественную и мнимую составляющие:

$$W(s) = \frac{K}{s} \Leftrightarrow W(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

$$W(j\omega) = \frac{-jK\omega}{(j\omega)(-j\omega)} = \frac{-jK\omega}{\omega^2} = \frac{-jK}{\omega}.$$

В этом случае действительная составляющая $P(\omega)$ равна 0, значит, $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ — чисто мнимое число, при этом $Q(\omega) < 0$. Найду АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{W(j\omega)^2} = \sqrt{\left(\frac{-jK}{\omega}\right)^2} = \frac{K}{\omega}.$$

ФЧХ же в этом случае будет определяться так:

$$\varphi(\omega) = \mathrm{atan2}\left(\frac{-K}{\omega}, 0\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

1.4 Пружинка

В задании рассматривается пружинный маятник, представленный на рисунке:

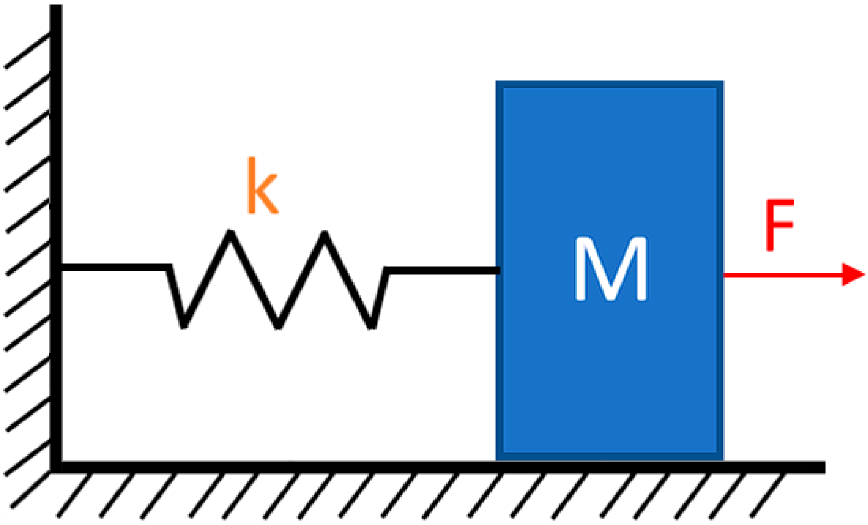

Рисунок 1: Пружинный маятник

Его движение задаётся следующими уравнениями:

$$F_{\text{упр}} = -kx, F = ma.$$

Входом этой системы считается некая внешняя сила F_{ext}, направленная соосно движению маятника, а выходом — траектория движения $x(t)$. Так как $a = \ddot{x}$:

$$F_{ext}(t) = m\ddot{x} + kx$$

Переходим к пространству изображений Лапласа:

$$ms^2X(s) + kX(s) = F_{\text{ext}}(s)$$

$$X(s)\left(ms^2 + k\right) = F_{\text{ext}}(s)$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{F_{\text{ext}}(s)} = \frac{1}{ms^2 + k} = \frac{1}{k}\frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + 1}$$

В стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 1}, K = \frac{1}{k}, T^2 = \frac{m}{k}$$

Получаем консервативное звено. Найдём АЧХ и ФЧХ, перейдя к частотной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 1} = \frac{K}{-T^2\omega^2 + 1}$$

В этом случае в качестве $W(j\omega)$ получается вещественное число. Тогда АЧХ — просто его модуль:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \left|\frac{K}{-T^2\omega^2 + 1}\right|.$$

Заметно, что АЧХ имеет разрыв в точке $\omega_0 = \frac{1}{T}$, и ФЧХ также не определена на этой частоте из-за наличия резонанса (знаменатель становится равен нулю). При этом частотная передаточная функция положительна, если $0 < \omega \leq \omega_0$, и отрицательна при $\omega > \omega_0$. Имея $Q(\omega) = 0, P(\omega) = \frac{K}{-T^2\omega^2+1}$, получаем:

$$\text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{0}{P(\omega)}\right) = 0.$$

$$\begin{cases} 0, & 0 < \omega \leq \frac{1}{T} \\ \pi, & \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

1.5 Что ты такое?

В задании рассматривается схема регулятора на операционном усилителе, представленная на рисунке:

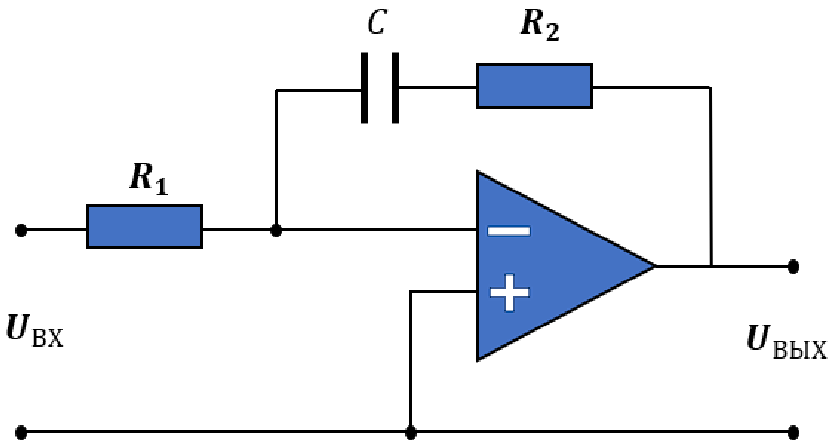

Рисунок 2: Принципиальная схема регулятора на операционном усилителе

Считая входом системы $U_{\text{ВХ}}(t)$, а выходом — $U_{\text{ВЫХ}}(t)$, можем рассмотреть преобразования, выполняемые над входным сигналом более подробно:

На входном резисторе сопротивлением R_1 при подаче напряжения появляется ток $I(t) = \frac{U_{\text{ВХ}}(t)}{R_1}$. Далее этот ток попадает на конденсатор с отрицательной обратной связью ёмкостью C, и, зная что ток, проходящий через конденсатор такой ёмкости, равен $I(t) = C\frac{du(t)}{dt}$, можем рассчитать напряжение на нём:

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C}\int\limits_0^t I(x)dx.$$

Воспользуемся полученным ранее значением $I(t) = \frac{U_{\text{ВХ}}(t)}{R_1}$ и примем начальное условие $u(0) = 0$, тогда $u(t) = \frac{1}{C}\int\limits_0^t \frac{U_{\text{ВХ}}(x)}{R_1}dx = \frac{1}{R_1 C}\int\limits_0^t U_{\text{ВХ}}(x)dx$

2 Вывод по работе

Выполнив лабораторную работу, я познакомился с задачами стабилизации и слежения, а также с их решениями, посмотрел на простейшие виды регуляторов, выявил связь между “подвижностью” системы и порядком астатизма, научился понимать, какой вид сигнала система может отследить с нулевой установившейся ошибкой, научился аналитически выводить статическую ошибку от внешнего воздействия по передаточным функциям, осознал как синтезировать регуляторы

3 Приложение А. Код для выполнения заданий

Листинг 1. Код для выполнения задания 1

```
% clear all;
close all;
% plot(t, y)
```

Листинг 1: Код для построения графиков для задания 1