Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №3

ВЫНУЖДЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ И ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА

Студент: Заводин Е.Ю.
Лин САУ R23 бак 1.1.1

Преподаватели: Перегудин А.А.
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Вынужденное движение

В задании рассматриваю систему 2-го порядка, заданную уравнением

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = a_0 u$$

Для этой системы составил структурную схему:

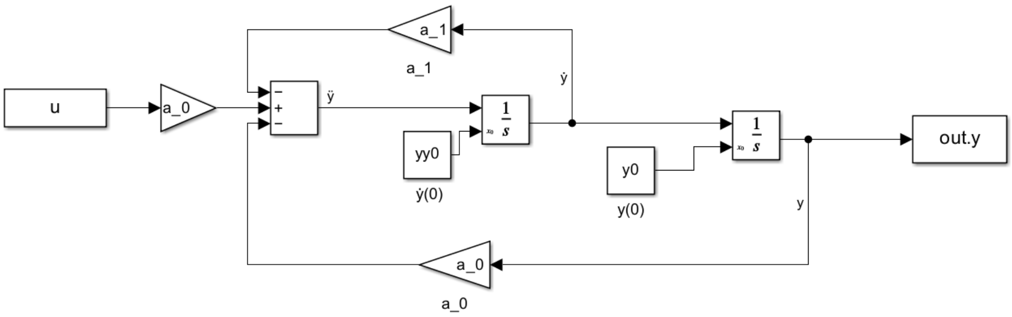

Рисунок 1: Структурная схема системы первого задания

Поочерёдно возьмём варианты входного сигнала из следующего набора параметров: $\{1.5, 0.6t, \sin 6t\}$, а также наборы параметров a_1, a_0, взятые из предыдущей лабораторной работы: $\{[2, 65], [0, 64], [-2, 65]\}$. Для каждого значения из каждого набора параметров построим систему, и промоделируем её при трёх различных случаях начальных условий

- $y(0) = -1, \dot{y}(0) = 0$;
- $y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$;
- $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$.

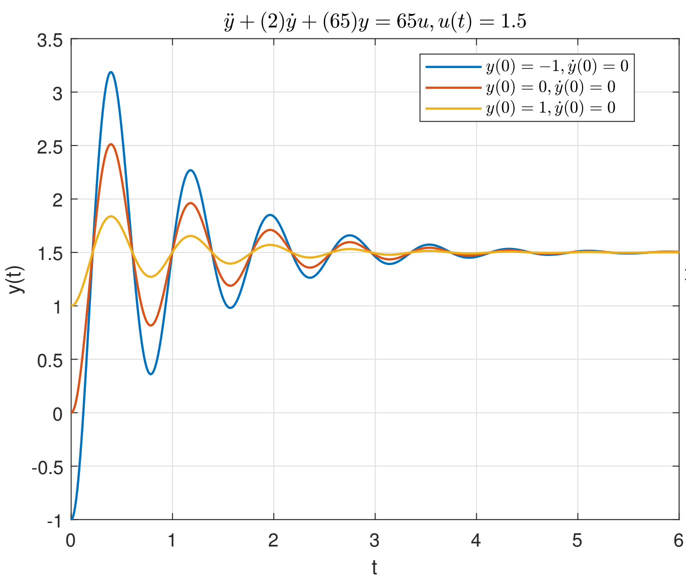

Рисунок 2: $a_1 = 2, a_0 = 65, u(t) = 1.5$

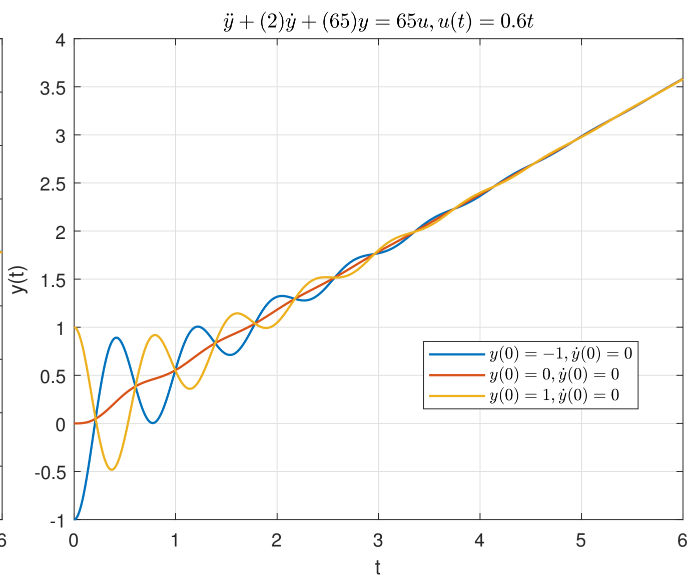

Рисунок 3: $a_1 = 2, a_0 = 65, u(t) = 0.6t$

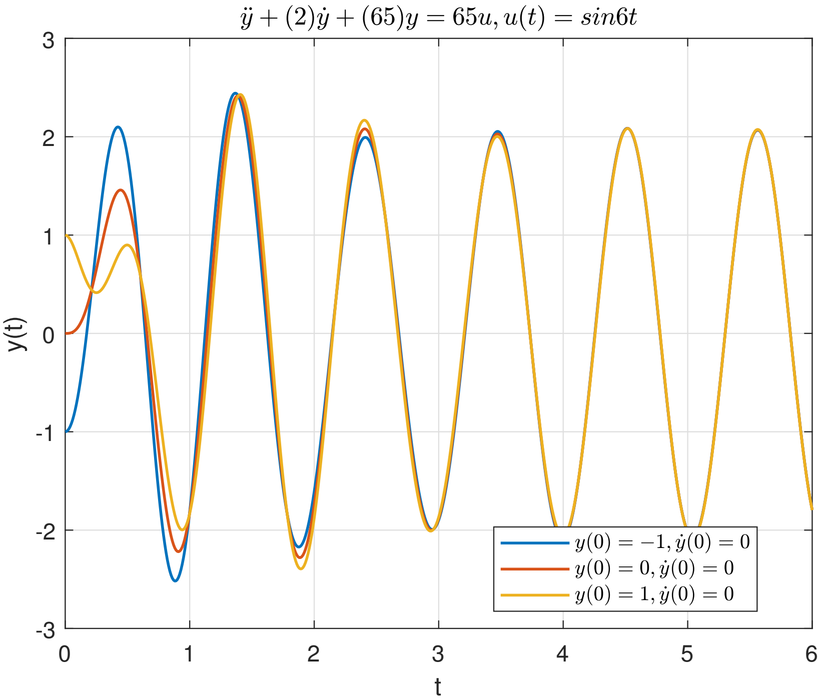

Рисунок 4: $a_1 = 2, a_0 = 65, u(t) = \sin 6t$

Для первого набора параметров система асимптотически устойчива. При всех рассмотренных начальных условиях система демонстрирует схожее поведение. Видно воздействие входного сигнала – $u(t)$ как бы накладывается на график решения системы, смещая её по оси ординат на константную величину входного сигнала (1.5) в случае $u(t) = 1.5$. В случае с $u(t) = 0.6t$ график выхода $y(t)$ начинает стремиться к наклонной прямой, которой и является график $u(t)$. При $u(t) = \sin(6t)$ система теряет свою асимптотическую устойчивость, становится устойчивой по Ляпунову, и сходится уже к некой гармонике.

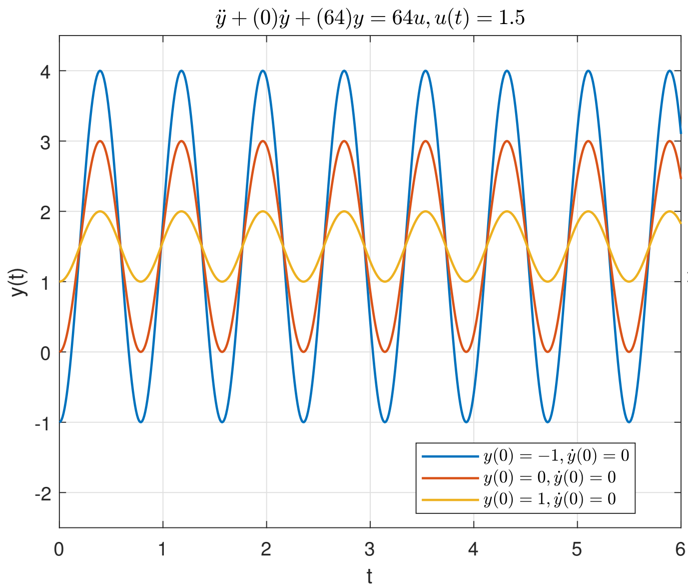

Рисунок 5: $a_1 = 0, a_0 = 64, u(t) = 1.5$

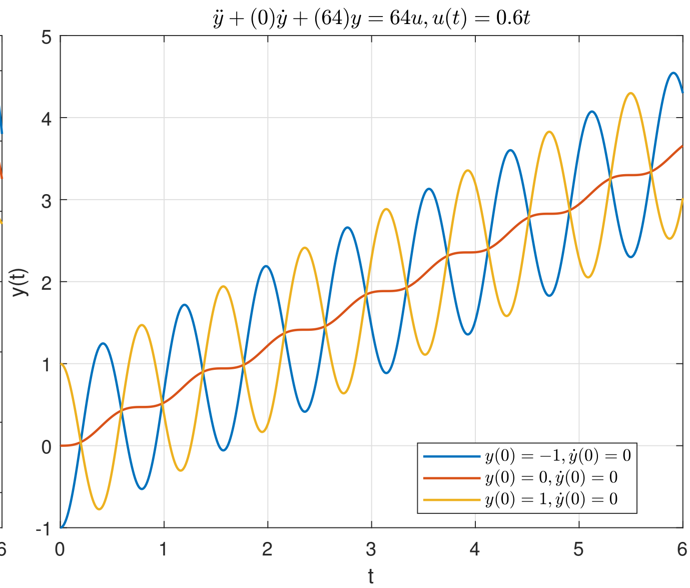

Рисунок 6: $a_1 = 0, a_0 = 64, u(t) = 0.6t$

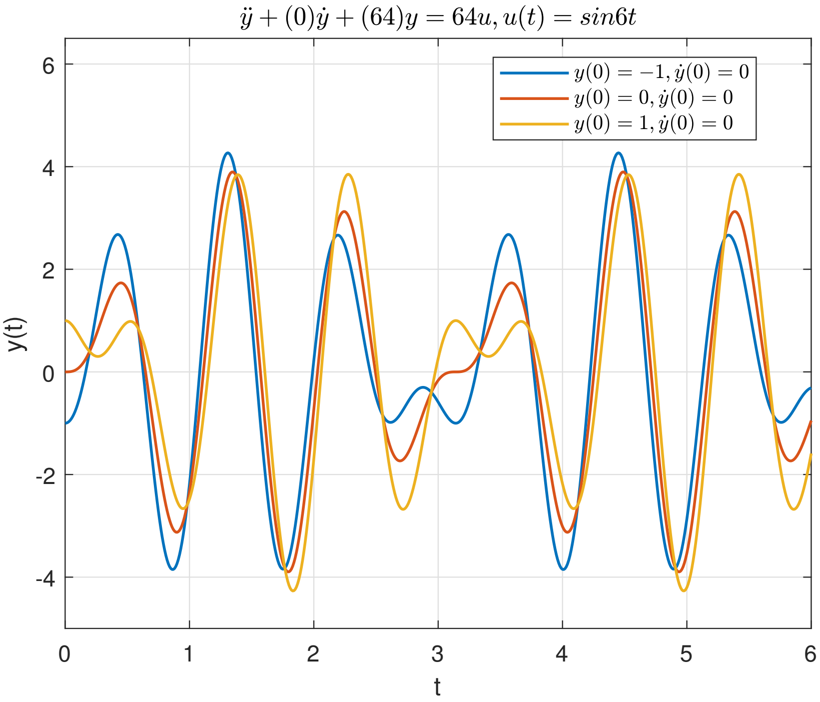

Рисунок 7: $a_1 = 0, a_0 = 64, u(t) = \sin 6t$

В этом случае система в отсутствие начального воздействия является устойчивой по Ляпунову, не имеет асимптотической устойчивости. Входное воздействие вида константной функции, как и в случае с предыдущим набором параметров, смещает график выходного сигнала по оси ординат, воздействие на систему вида наклонной прямой сказывается схожим образом, однако колебания при различных начальных условиях имеют разную амплитуду, в отличие от других видов рассмотренных воздействий. В случае с гармоническим сигналом в виде входного воздействия картина чуть более интересная – гармоники свободной и вынужденной составляющих движения накладываются друг на друга, появляется новая устойчивая гармоника с частотой 6, и период периодической функции выхода меняется.

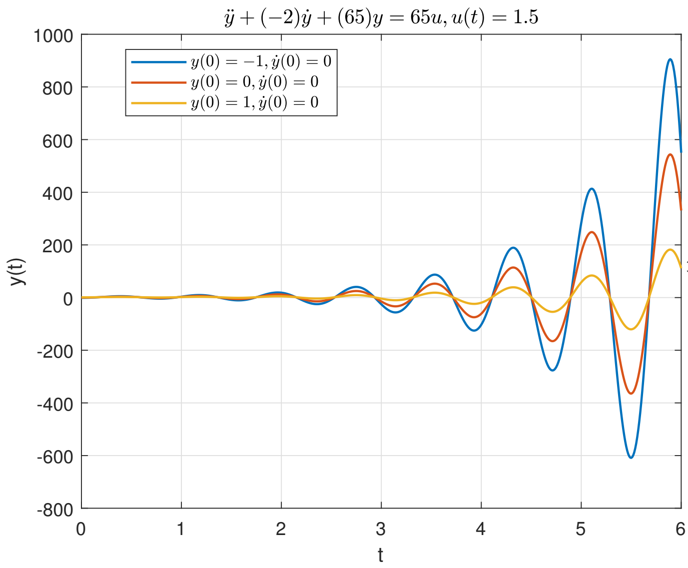

Рисунок 8: $a_1 = -2, a_0 = 65, u(t) = 1.5$

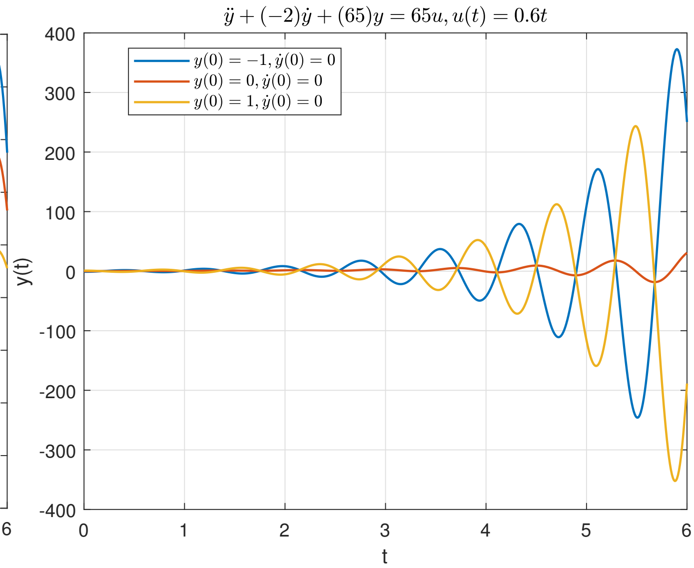

Рисунок 9: $a_1 = -2, a_0 = 65, u(t) = 0.6t$

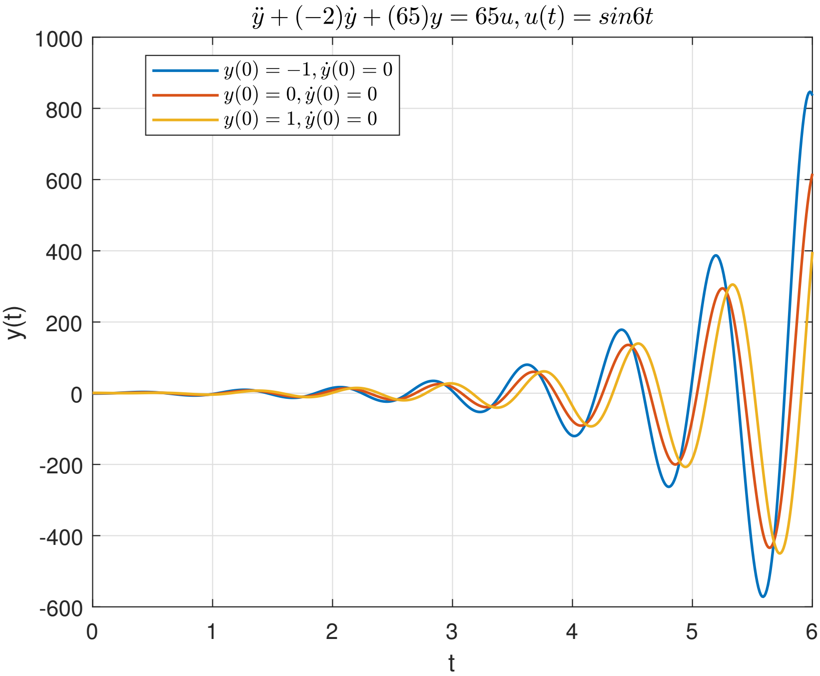

Рисунок 10: $a_1 = -2, a_0 = 65, u(t) = \sin 6t$

При третьем наборе параметров система в отсутствие входного воздействия расходится с течением времени, и воздействие вида $u(t) = 0.6t$ приводит к рассогласованию выходов системы при различных начальных условиях, а также замедляет скорость расхождения системы при нулевых начальных условиях, но в конечном счёте график всё равно уйдёт в бесконечность.

1.1 Выводы

Входное воздействие влияет на выход системы, и разные входные воздействия влияют по-разному, при этом не меняя тип устойчивости системы в сравнении с соответствующими им свободными системами (с нулевым начальным воздействием)

2 Качество переходных процессов

В задании рассматривается передаточная функция следующего вида:

$$W(s) = \frac{|\lambda_1\lambda_2\lambda_3|}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)(s-\lambda_3)}$$

В качестве исследуемых наборов полюсов $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ взяты следующие:

1. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$
2. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -10$
3. $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -20, \lambda_3 = -10$
4. $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = -1$
5. $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = -5$
6. $\lambda_1 = -1 + 3i, \lambda_2 = -1 - 3i, \lambda_3 = -5$
7. $\lambda_1 = -3 + 3i, \lambda_2 = -3 - 3i, \lambda_3 = -5$
8. $\lambda_1 = -3 + 100i, \lambda_2 = -3 - 100i, \lambda_3 = -5$

Для определения времени переходного процесса принял для всех наборов окрестность установившегося значения $\Delta_\Pi = 0.02$ (0.02%), промоделировал получившиеся системы без начальных условий для каждого из наборов полюсов, в качестве входного воздействия применяя функцию Хевисайда:

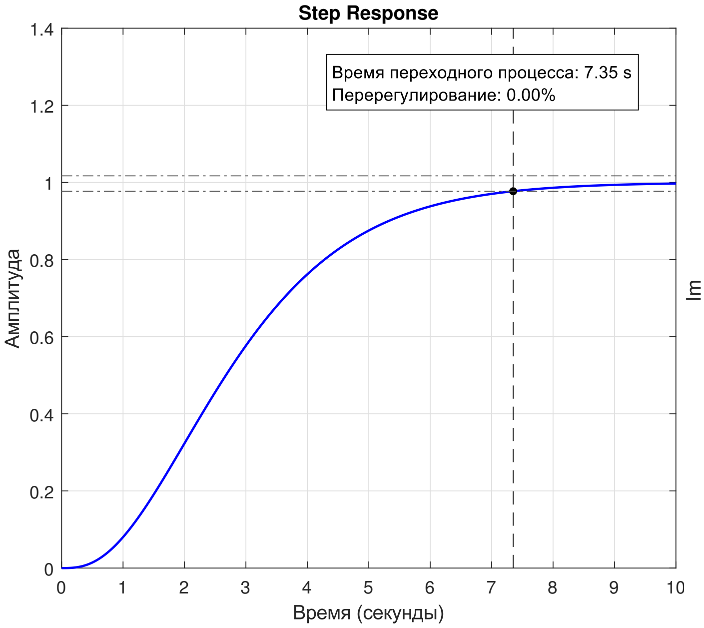

Рисунок 11: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$,
График переходного процесса

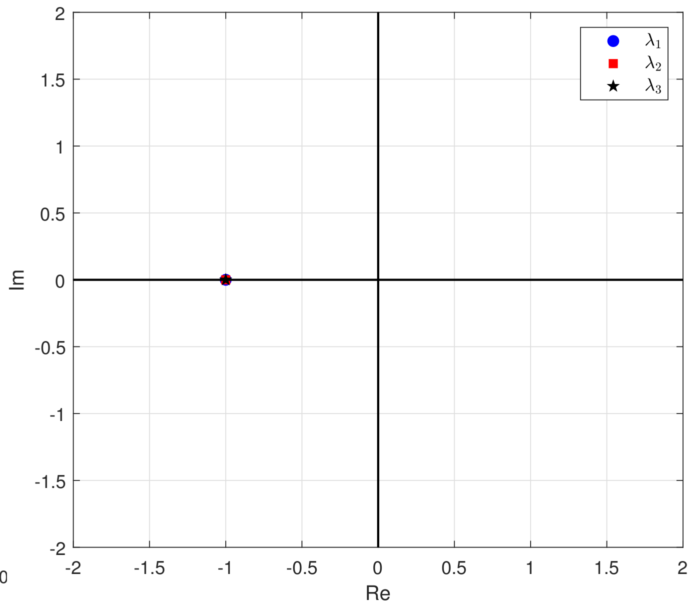

Рисунок 12: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -1$,
Выбранные корни на комплексной плоскости

По графику комплексной плоскости с отмеченными полюсами системы можно заметить, что все полюса расположены в одной точке, тогда они могут быть охвачены сколь угодно малым сектором, а значит их степень колебательности равна нулю, что и отображается на графике переходного процесса — система не колеблется, стремится к установившемуся значению лишь снизу, не пересекая прямую $y = y_{\text{уст}}$. Значит, верхняя граница перерегулирования не подлежит оценке по связи со степенью колебательности ($e^{-\frac{\pi}{0}} \cdot 100\%$ не имеет значения из-за деления на 0). То же будет справедливо и для дальнейших вещественных наборов полюсов.

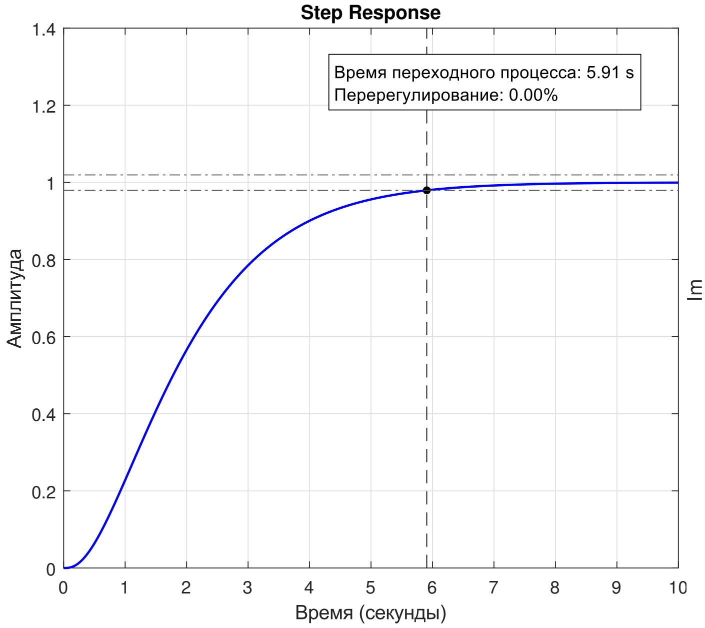

Рисунок 13: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -10$,
График переходного процесса

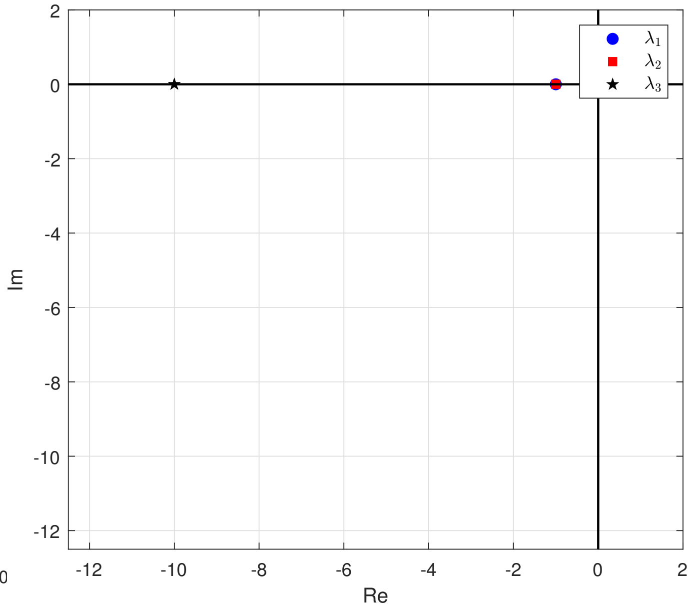

Рисунок 14: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -10$,
Выбранные корни на комплексной плоскости

Один из полюсов теперь располагается дальше по оси Im на карте полюсов. Соответствующая ему мода затухает быстрее чем в первом случае, это и приводит к уменьшению времени переходного процесса. Перерегулирование всё также равно 0, как и степень колебательности.

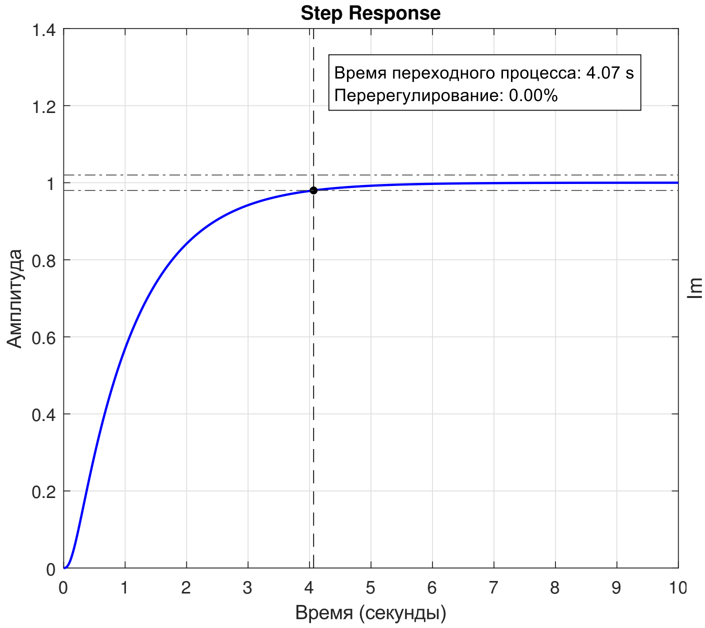

Рисунок 15: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -20, \lambda_3 = -10$,
График переходного процесса

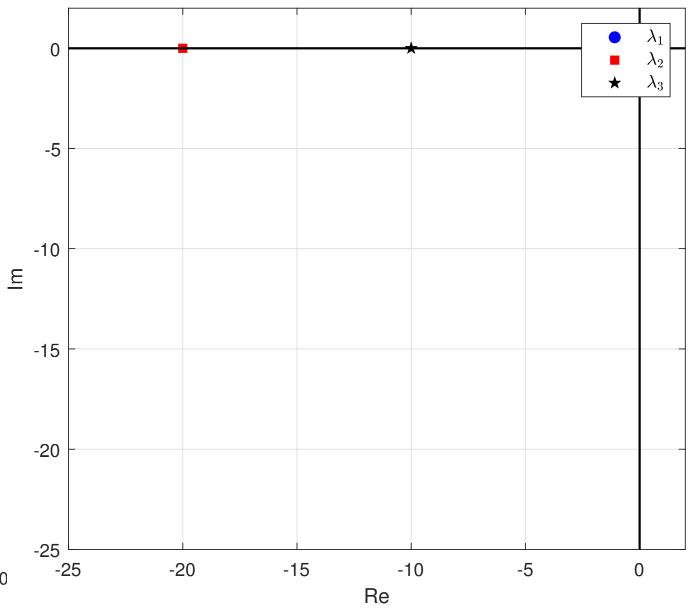

Рисунок 16: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -20, \lambda_3 = -10$,
Выбранные корни на комплексной плоскости

Рассматривая графики для этого набора полюсов, видим, что время переходного процесса снова уменьшилось из-за увеличения значения одного из полюсов по модулю. Мнимой части корней всё также нет, из-за этого не наблюдается и колебательность.

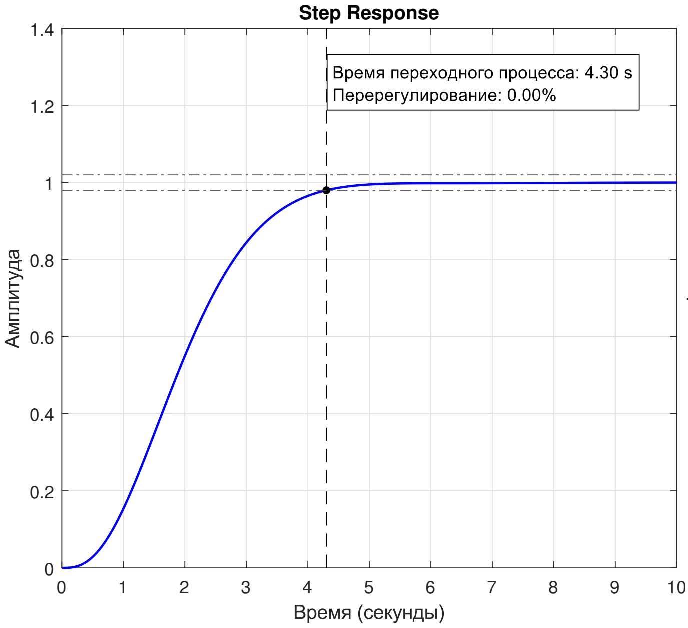

Рисунок 17: $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = -1$, График переходного процесса

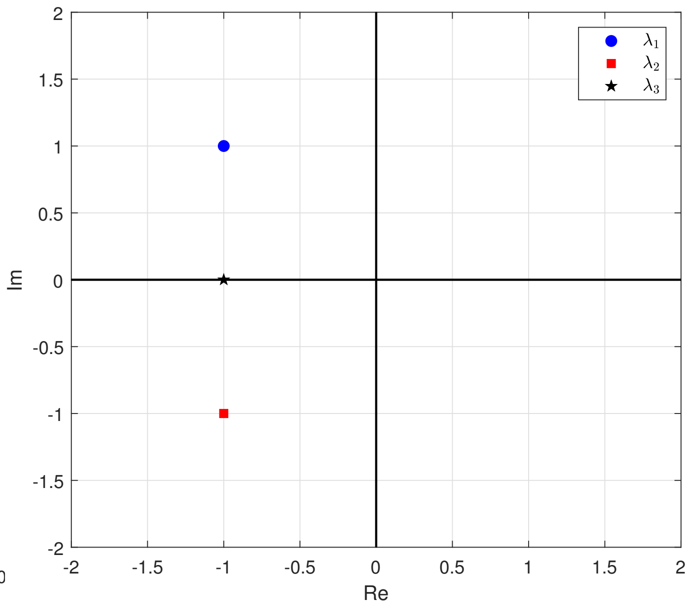

Рисунок 18: $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = -1$, Выбранные корни на комплексной плоскости

В этом случае можно оценить степень колебательности и перерегулирование. По графику на комплексной плоскости можем заметить, что в предполагаемом секторе, в котором расположены полюса устойчивости системы, крайними полюсами являются λ_1 и λ_2. Степень колебательности определяется именно по ним: $\mu = \frac{|Im(\lambda_2)|}{|Re(\lambda_2)|} = \frac{1}{1} = 1$. Тогда на основе полученного значения можно оценить верхнюю границу перерегулирования: $\sigma < e^{-\frac{\pi}{\mu}} \cdot 100\% = e^{-\frac{\pi}{1}} \cdot 100\% \approx 4.32\%$. То есть в системе могут быть колебания вплоть до 4.32% от установившегося значения. По графику переходного процесса можно заметить, что колебания отсутствуют вовсе. Это может быть связано с тем, что доминантный корень отсутствует — все 3 полюса расположены на одинаковом расстоянии от оси Im.

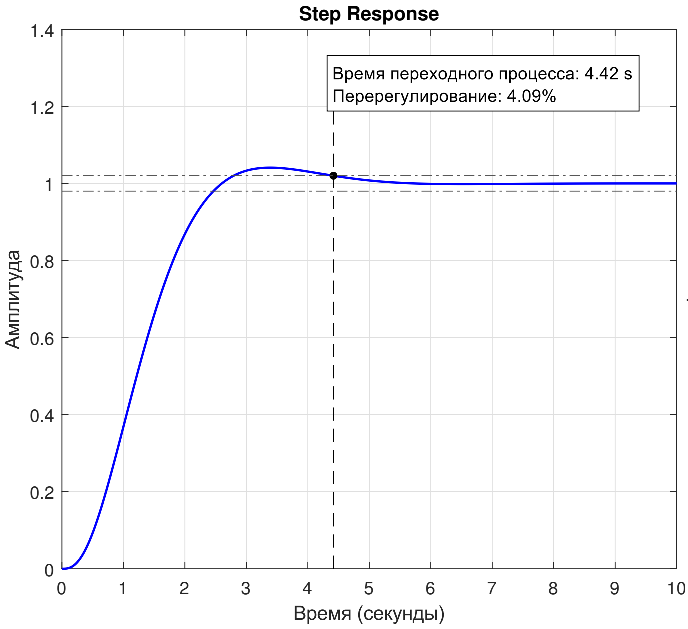

Рисунок 19: $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = -5$, График переходного процесса

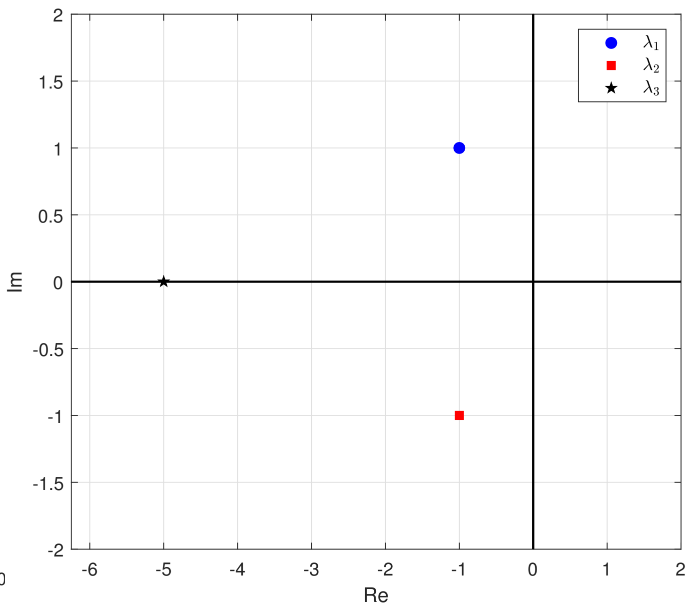

Рисунок 20: $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i, \lambda_3 = -5$, Выбранные корни на комплексной плоскости

Сразу оценим степень колебательности для этого случая. Крайними полюсами сектора являются всё те же λ, что и в прошлом случае, а значит, оценка верхней границы перерегулирования сохраняется — 4.32%. Само же перерегулирование составило 4.09%, что меньше верхней его оценки.

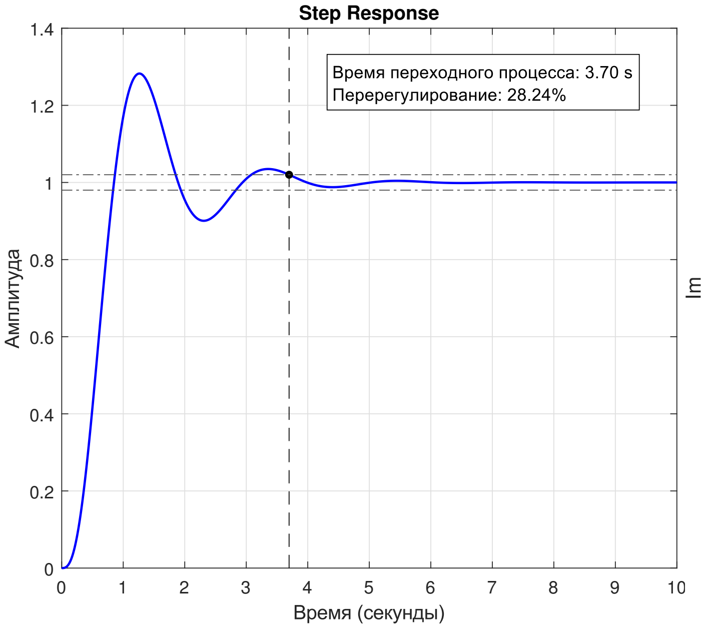

Рисунок 21: $\lambda_1 = -1 + 3i, \lambda_2 = -1 - 3i, \lambda_3 = -5$, График переходного процесса

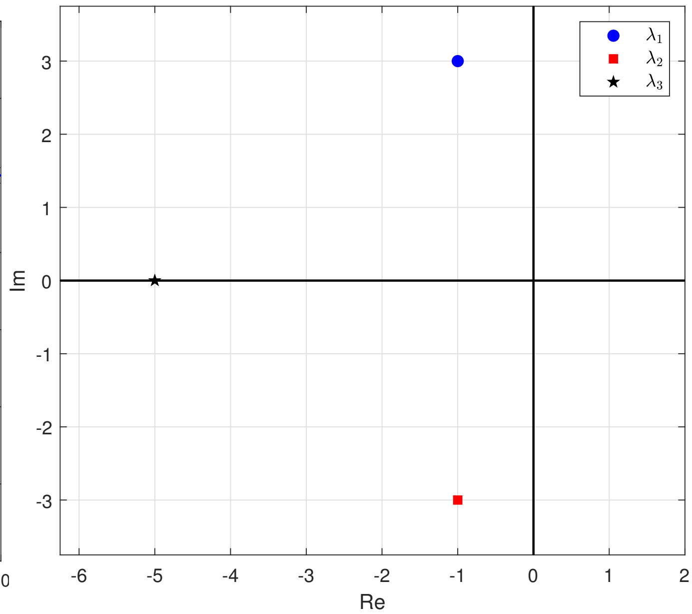

Рисунок 22: $\lambda_1 = -1 + 3i, \lambda_2 = -1 - 3i, \lambda_3 = -5$, Выбранные корни на комплексной плоскости

В этом случае колебания системы гораздо сильнее из-за повышения значений мнимой части комплексных полюсов, однако время переходного процесса также ниже, почти на пятую часть.

Степень колебательности всё также определяется по карте полюсов и равняется 3. Рассчитаем по этому значению верхнюю оценку перерегулирования: $\sigma < e^{-\frac{\pi}{3}} \cdot 100\% \approx 35.092\%$. Верхняя граница довольно высокая в сравнении с предыдущими значениями. Найденное значение перерегулирования, 28.24%, не выходит за найденную верхнюю границу.

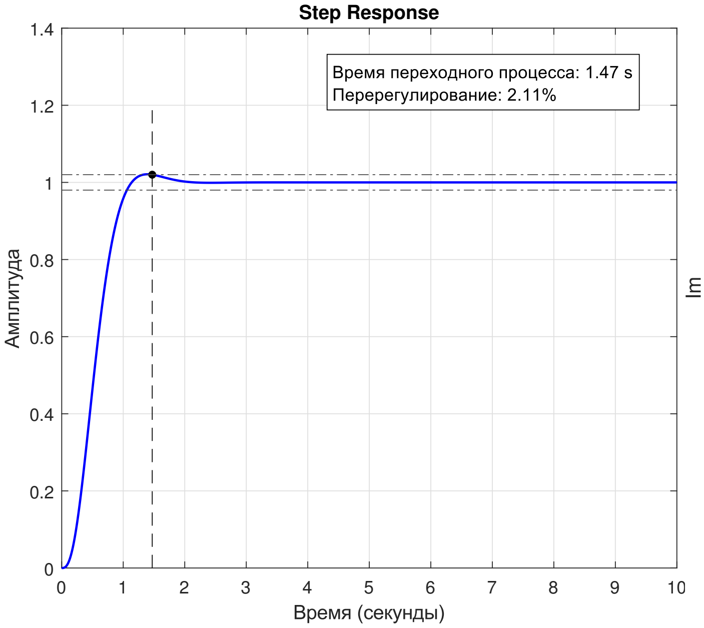

Рисунок 23: $\lambda_1 = -3 + 3i, \lambda_2 = -3 - 3i, \lambda_3 = -5$,
График переходного процесса

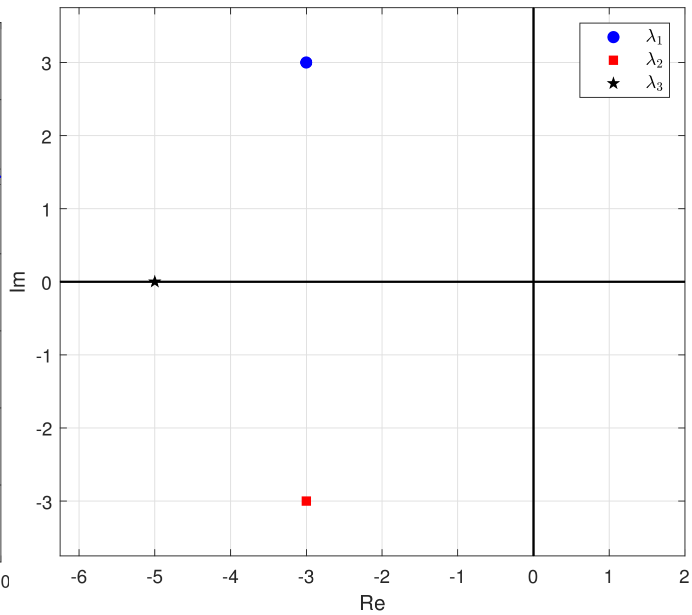

Рисунок 24: $\lambda_1 = -3 + 3i, \lambda_2 = -3 - 3i, \lambda_3 = -5$,
Выбранные корни на комплексной плоскости

И снова $\mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = \mathrm{Im}(\lambda_{1,2})$, что приводит к $\mu = 1$, а $\sigma < 4.32\%$. Найденное значение перерегулирования (2.11%) и в этом случае не больше верхней оценки. Время переходного процесса же сильно уменьшилось при увеличении модуля вещественной части комплексных корней.

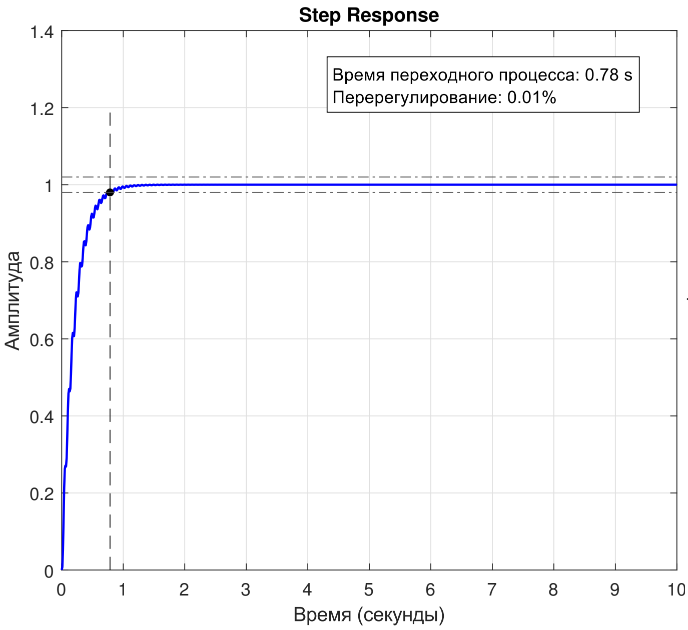

Рисунок 25: $\lambda_1 = -3 + 100i, \lambda_2 = -3 - 100i, \lambda_3 = -5$,
График переходного процесса

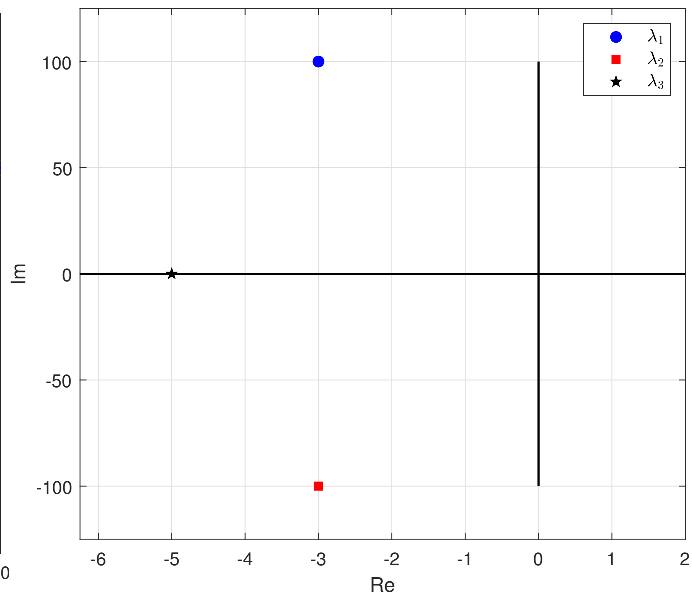

Рисунок 26: $\lambda_1 = -3 + 100i, \lambda_2 = -3 - 100i, \lambda_3 = -5$,
Выбранные корни на комплексной плоскости

Повышение значения мнимой части пары комплексно-сопряжённых полюсов по модулю привело к значительному увеличению числа периодов колебаний на рассматриваемом временном отрезке, и перерегулирование уменьшилось, как и время переходного процесса.

Степень колебательности для этого случая равна 100/3, и тогда верхняя оценка перерегулирования по связи со степенью колебательности: $\sigma < e^{-\frac{3\pi}{100}} \cdot 100\% \approx 91.005\%$.

2.1 Выводы

Чем выше располагаются полюса на карте полюсов, тем больше будет периодов колебаний на графике переходного процесса, обратно пропорционально колебательности при увеличении мнимой части комплексных корней меняется и время переходного процесса — чем больше мнимая часть, тем быстрее система сходится к установившемуся значению. Можно достичь максимальной колебательности, а, соответственно, и максимального уменьшения времени переходного процесса, приблизив крайние комплексно-сопряжённые корни к прямой $\mathrm{Re} = 0$

При выполнении задания удалось "погасить" излишнюю колебательность за счёт увеличения вещественной части комплексно-сопряжённого полюса по модулю, уменьшив при этом время переходного процесса.

3 Вывод по работе

Я познакомился с вынужденным движением, с тем, как именно входное воздействие влияет на выходы систем. Также ознакомился с показателями качества, которыми можно оценить составленную систему, на их основе подобрал наиболее оптимальные параметры для минимизации времени переходного процесса и перерегулирования, понял, в каких условиях вознакает перерегулирование, и как понять, каких значений оно может достичь.

4 Приложение A. Код для выполнения заданий

Листинг 1. Код для выполнения задания 1

```
% clear all;
close all;

[~, scriptName] = fileparts(mfilename('fullpath'));
if ~isfolder(scriptName)
    mkdir(scriptName);
end

t = (0:0.01:6)';
% u = [t, 1.5*ones(size(t))];
u = [t, 0.6*t];
% u = [t, sin(t*6)];
a_1 = -2;
a_0 = 65;
% u_str = '1.5';
u_str = '0.6t';
% u_str = 'sin(6t)';
y0 = 0;
y_t = figure;

for yy0 = [-1 0 1]
    out = sim('ex1/model.slx','StopTime','6');
    y_model = out.y;
    y_model.plot(DisplayName="$\dot{y}(0) = " + string(yy0) + ", y(0) = 0$", LineWidth=1.2)
    hold on;
end

legend(BackgroundAlpha=.99, Interpreter='latex', Location='best')
grid on;
title('$\ddot{y} + (' + string(a_1) + ')\dot{y} + (' + string(a_0) + ')y = ' + string(a_0) + 'u, u(t
    ) = '+ u_str + '$', 'Interpreter', 'latex', FontWeight='normal')
xlabel('t'), ylabel('y(t)')
% ylim([-1.5, 1.5]);
saveas(y_t, string(scriptName) + '\'+u_str+'_' + string(a_1) + '_' + string(a_0) + '.eps', 'epsc')
```

Листинг 1: Код для построения графиков для задания 1

Листинг 2. Код для выполнения задания 2

```
% clear all;
close all;

t = (0:0.01:10)';
u = [t, ones(size(t))]; % входное воздействие -- функция Хевисайда

[~, scriptName] = fileparts(mfilename('fullpath'));
if ~isfolder(scriptName)
    mkdir(scriptName);
end

lambdas_all = [-1, -1, -1;
              -1, -1, -10;
              -1, -20, -10;
              -15, -20, -10;
              -1+1j, -1-1j, -1;
              -1+1j, -1-1j, -5;
              -1+3j, -1-3j, -5;
              -3+3j, -3-3j, -5;
              -1+1j, -1-1j, -15];

for i = 1:size(lambdas_all, 1)
    lambda1 = lambdas_all(i, 1);
    lambda2 = lambdas_all(i, 2);
    lambda3 = lambdas_all(i, 3);

```

```
    fig_complex = figure('Units', 'pixels', 'Position', [100 100 600 500]);
    hold on; grid on; box on;

    plot(real(lambda1), imag(lambda1), 'bo', 'MarkerFaceColor', 'b');
    plot(real(lambda2), imag(lambda2), 'red', 'Marker', 'square', 'MarkerFaceColor', 'red', 'LineStyle', 'none');
    plot(real(lambda3), imag(lambda3), 'black', 'Marker', 'pentagram', 'MarkerFaceColor', 'black', 'LineStyle', 'none');
    xlabel('Re'); ylabel('Im');

    plot([-100 100], [0 0], 'black', LineWidth=1.2)
    plot([0 0], [-100 100], 'black', LineWidth=1.2)
    legend('$\lambda_1$', '$\lambda_2$', '$\lambda_3$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 10);
    if (min(imag(lambdas_all(i, :))) ~= 0)
        ylim([min(-2, min(imag(lambdas_all(i, :)))-abs(min(imag(lambdas_all(i, :))))/4), max(2, max(imag(lambdas_all(i, :)))+abs(max(imag(lambdas_all(i, :))))/4)])
    else
        ylim([min(-2, min(real(lambdas_all(i, :)))-abs(min(real(lambdas_all(i, :)))/4)), max(2, max(real(lambdas_all(i, :)))+abs(max(real(lambdas_all(i, :))))/4)])
    end
    xlim([min(-2, min(real(lambdas_all(i, :)))-abs(min(real(lambdas_all(i, :))))/4), max(2, max(real(lambdas_all(i, :)))+abs(max(real(lambdas_all(i, :))))/4)])

    num = [abs(lambda3*lambda2*lambda1)];
    den = poly([lambda1, lambda2, lambda3]);
    sys = tf(num, den);
    y = lsim(sys, u(:,2), t);
    info = stepinfo(y, t);

    fig_main = figure('Units', 'pixels', 'Position', [100 100 600 500]);
    plot(t, y, LineWidth=1.3, Color='blue')
    grid on;
    title('Step Response')
    xlabel('Время (секунды)'), ylabel('Амплитуда')
    if (max(y) <= 1)
        ylim([0, 1.4])
    end
    hold on;
    y_final = info.SettlingMin + (info.SettlingMax - info.SettlingMin)/2; % среднее значение
    plot([info.SettlingTime info.SettlingTime], ylim, 'k--'); % вертикальная линия

    y_settle = interp1(t, y, info.SettlingTime);
    y_steady = y(end);                % установившееся значение
    y_difference = abs(y_steady - y_settle); % 0.02
    y_max = max(y);                   % максимум отклика
    yline(y_steady-y_difference, 'k-.'); % нижняя граница окрестности
    yline(y_steady+y_difference, 'k-.'); % верхняя граница окрестности
    sigma = abs(y_max - y_steady) / abs(y_steady) * 100;  % в процентах

    text('Units', 'normalized', ...
        'Position', [0.44 0.9], ...
        'String', sprintf('Время переходного процесса: %.2f s\nПеререгулирование: %.2f%%', info.SettlingTime, sigma), ...
        'BackgroundColor', 'w', ...
        'EdgeColor', 'k');

    % Отображаем точку
    plot(info.SettlingTime, y_settle, 'blacko', 'MarkerFaceColor', 'black', 'MarkerSize', 4);

    hold off;
    set(fig_complex, 'PaperUnits', 'inches', 'PaperPosition', [0 0 6 5]);
    saveas(fig_complex, string(scriptName) + '\complex_plan_' + string(lambda1) + '_' + string(lambda2) + '_' + string(lambda3) + '.eps', 'epsc')
    print(fig_main, '-depsc', string(scriptName) + '\' + string(lambda1) + '_' + string(lambda2) + '_' + string(lambda3) + '.eps')

end
```

Листинг 2: Код для построения графиков для задания 2