Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №2

СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ, УСТОЙЧИВОСТЬ

Студент: Заводин Е.Ю.
Лин САУ R23 бак 1.1.1

Преподаватели: Перегудин А.А.
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Свободное движение

В задании рассматриваю систему 2-го порядка, заданную уравнением

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 = a_0 u$$

Для этой системы составил структурную схему:

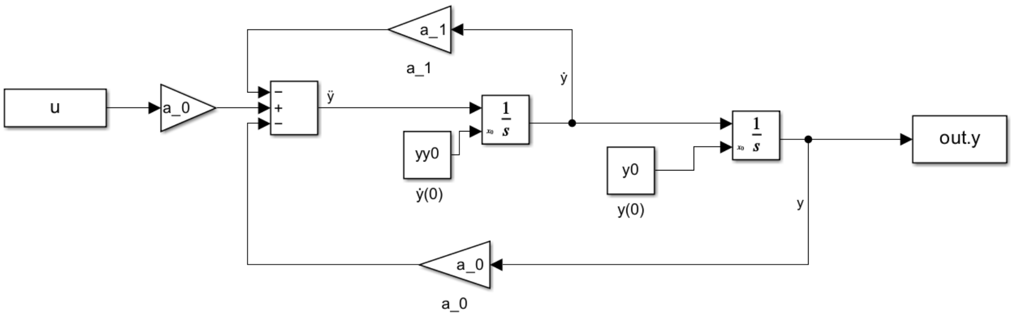

Рисунок 1: Структурная схема системы из первого задания

Для нахождения коэффициентов a_0, a_1 по заданным корням характеристического уравнения рассмотрим однородное дифференциальное уравнение для данной системы и его характеристическое:

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 = 0,$$
$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0.$$

Это уравнение представимо в виде $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$, где λ_1, λ_2 – корни уравнения. Раскрывая произведение, получим $\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$. Тогда

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, получим формулы для a_1 и a_0:

$$a_1 = -(\lambda_1 + \lambda_2), a_0 = \lambda_1\lambda_2.$$

Формулы применимы и для действительных чисел, и для комплексно-сопряжённых, однако в комплексном случае ($\lambda_i = \alpha_i + \beta_i i$) вычислять буду следующим образом:

$$a_1 = -(\alpha + \beta + \alpha - \beta) = -2\alpha, a_0 = (\alpha + \beta i)(\alpha - \beta i) = (\alpha^2 - (\beta i)^2) = \alpha^2 + \beta^2.$$

Для первого набора значений $\lambda_1 = \lambda_2 = -2.5$:

$$a_0 = -2.5 \cdot (-2.5) = 6.25$$
$$a_1 = -(-2.5 + (-2.5)) = 5.$$

Свободная составляющая движения $y_{\text{св}}(t)$ для конкретного эксперимента может быть найдена суммированием мод, соответствующих корням характеристического уравнения, а затем подстановкой начальных условий для нахождения значений постоянных коэффициентов C_i.

Так как корни характеристического уравнения первого эксперимента вещественные и кратные, общее решение полученного однородного дифференциального уравнения $\ddot{y} + 5\dot{y} + 6.25y = 0$ будет выглядеть следующим образом:

$$y(t) = C_1 e^{-2.5t} + C_2 t e^{-2.5t}$$

Продифференцируем получившееся уравнение по t:

$$\dot{y}(t) = (C_1 e^{-2.5t} + C_2 t e^{-2.5t})'_t = -2.5 C_1 e^{-2.5t} + C_2(e^{-2.5t} - 2.5 t e^{-2.5t}) = e^{-2.5t}(-2.5C_1 + C_2 - 2.5C_2 t).$$

Коэффициенты C_1, C_2 найдём из начальных условий $y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$:

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 e^{-2.5\cdot 0} + C_2 \cdot 0 \cdot e^{-2.5\cdot 0} = 1 \Rightarrow C_1 = 1$$
$$\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow e^{-2.5\cdot 0}(-2.5C_1 + C_2 - 2.5C_2 \cdot 0) = -2.5C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 2.5$$

Получившееся аналитическое выражение для свободной составляющей движения системы:

$$y_{\text{св}}(t) = e^{-2.5t} + 2.5 t e^{-2.5t}$$

Расчёты для остальных экспериментов выполнены аналогично и внесены в таблицу.

Входные значения		Результаты вычисления	
λ_1, λ_0	$y(0), \dot{y}(0)$	a_1, a_0	$y_{\text{св}}(t)$
$-2.5, -2.5$	$1, 0$	5, 6.25	$e^{-2.5t} + 2.5te^{-2.5t}$
$-1 \pm 8i$	$1, 0$	2, 65	$0.125 \sin(8\,t)\, e^{-t} + \cos(8\,t)\, e^{-t}$
$\pm 8i$	$1, 0$	0, 64	$\cos(8\,t)$
$1 \pm 8i$	$0.05, 0$	-2, 65	$\frac{1}{20} e^t \cos(8\,t) - \frac{1}{160} e^t \sin(8\,t)$
$2.5, 2.5$	$0.05, 0$	-5, 6.25	$\frac{1}{20} e^{\frac{5\,t}{2}} - \frac{t}{8} e^{\frac{5\,t}{2}}$
$-0.6, 0.6$	$0, 0.1$	0, -0.36	$\frac{1}{12} e^{0.6t} - \frac{1}{12}\, e^{-0.6t}$

Таблица 1: Исходные данные и результаты вычислений для задания 1

Аналитические выражения для каждого из экспериментов найдены, теперь можно проверить вычисления сравнением с моделированием соответствующей структурной схемы без входного воздействия ($u(t) = 0$), подставляя вычисленные коэффициенты дифференциального уравнения и экспериментальные данные для начальных условий:

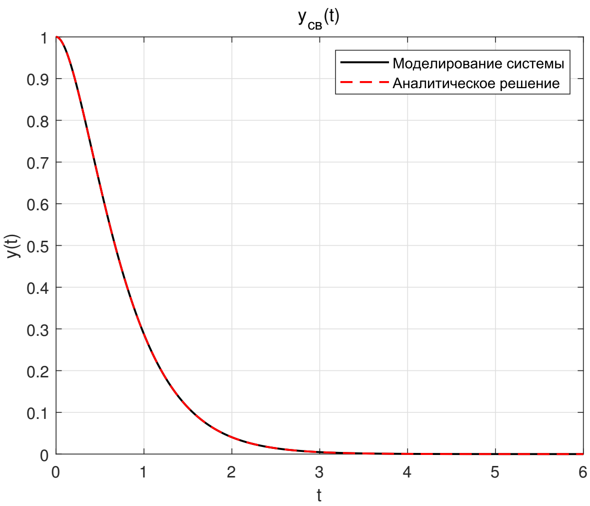

Рисунок 2: Выход $y_{\text{св}}(t)$ для системы 1, $a_0 = 6.25, a_1 = 5, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$

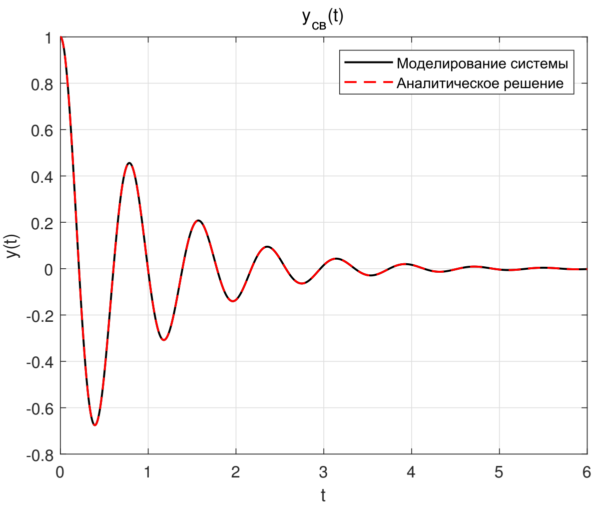

Рисунок 3: Выход $y_{\text{св}}(t)$ для системы 2, $a_0 = 65, a_1 = 2, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$

Судя по графику, первая система асимптотически устойчива, это наблюдение подтверждается корневым критерием. Корни $\lambda_1 = \lambda_2 = -2.5$ действительные, соответствующие им моды стремятся к 0 при $t \to \infty$.

Вторая система также асимптотически устойчива и по графику выхода, и по корневому критерию ($\lambda_{1,2} = -1 \pm 8i \Rightarrow \mathrm{Re}(\lambda_{1,2}) = -1$). Видны затухающие колебания, вызванные наличием гармонических компонент в решении этой системы.

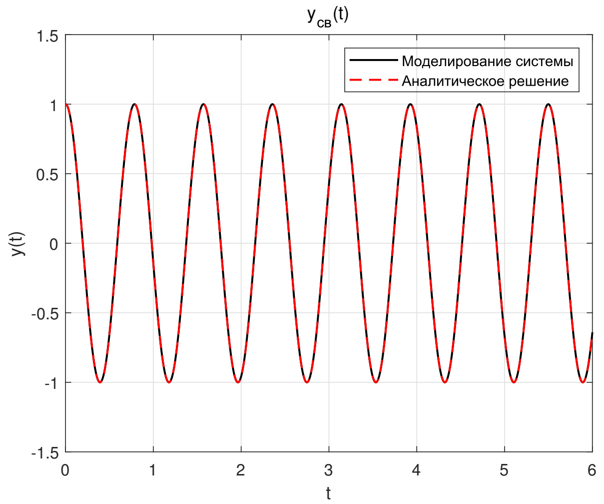

Рисунок 4: Выход $y_{св}(t)$ для системы 3, $a_0 = 64, a_1 = 0, y(0) = 1, \dot{y}(0) = 0$

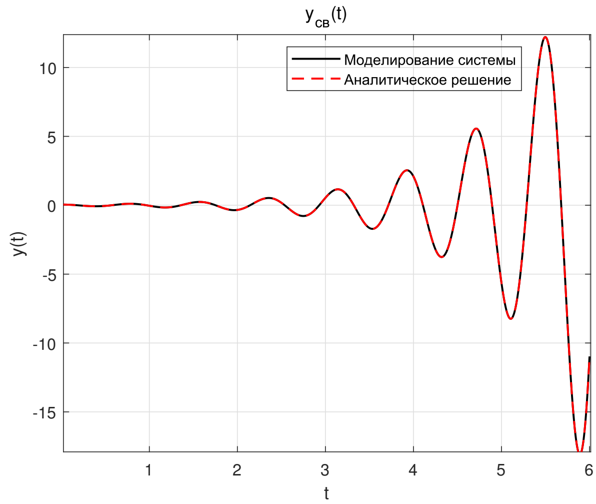

Рисунок 5: Выход $y_{св}(t)$ для системы 4, $a_0 = 65, a_1 = -2, y(0) = 0.05, \dot{y}(0) = 0$

В случае третьей системы появляются колебания, которые не затухают при $t \to \infty$, значит, система устойчива, но не асимптотически – устойчива по Ляпунову. Это же подтверждает и анализ по корневому критерию – действительная часть $\lambda_{1,2} = \pm 8i$ равна 0.

Четвертая система демонстрирует ситуацию, прямо противоположную второму случаю – система со временем расходится, гармонические колебания нарастают, система неустойчива. Это же подтверждает и корневой анализ, $\lambda_{1,2} = 1 \pm 8i$, следовательно, полюса системы на комплексной плоскости находятся справа от оси ординат.

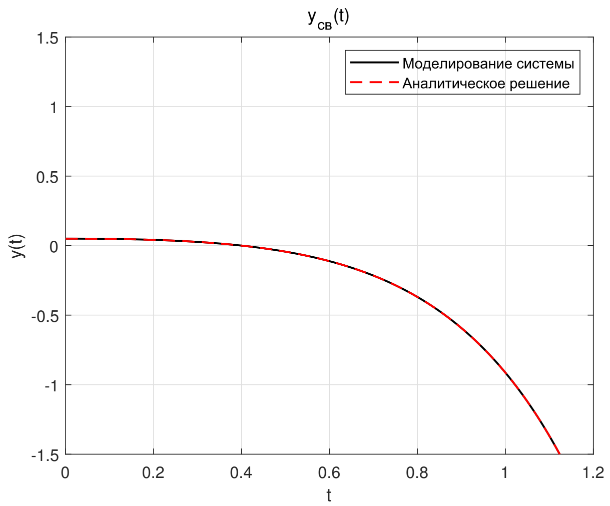

Рисунок 6: Выход $y_{св}(t)$ для системы 5, $a_0 = 6.25, a_1 = -5, y(0) = 0.05, \dot{y}(0) = 0$

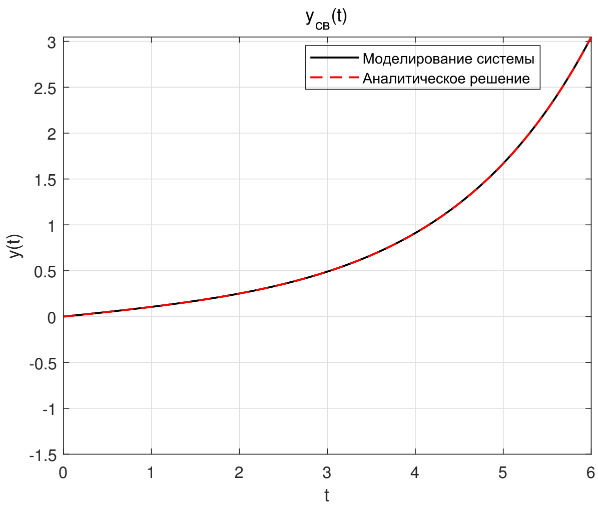

Рисунок 7: Выход $y_{св}(t)$ для системы 6, $a_0 = -0.36, a_1 = 0, y(0) = 0, \dot{y}(0) = 0.1$

Пятая же система также неустойчива, но в этот раз без гармонической составляющей. $\lambda_{1,2} = 2.5$, что также указывает на неустойчивость системы.

По графику выхода свободной составляющей движения шестой системы на лицо неустойчивость, корни системы ($\lambda_1 = 0.6, \lambda_2 = -0.6$) равны по модулю и противоположны по знаку, один из них больше ноля, что и приводит к неустойчивости – соответствующая ему мода является растущей экспонентой.

1.1 Выводы

Моделирование во всех случаях совпало с аналитическими расчётами, что говорит о том, что ошибок при нахождении выражений для свободных составляющих движения допущено не было. Проанализирована устойчивость полученных систем, результаты анализа устойчивости по корневому критерию соответствуют графикам.

2 Область устойчивости

В задании рассматривается следующая структурная схема:

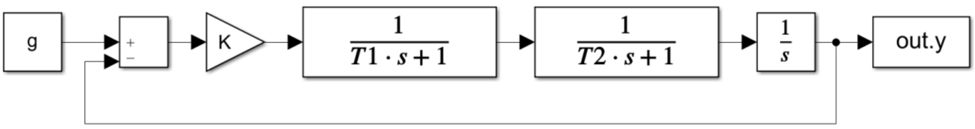

Рисунок 8: Схема моделирования для задания 2

Рассмотрим передаточные функции $\frac{1}{T_1 \cdot s+1}$ и $\frac{1}{T_2 \cdot s+1}$, для которых по заданию предполагается определить такие постоянные времени T_1, T_2, при которых полюса передаточных функций равняются $\lambda_1 = \lambda_2 = -2.5$.

Полюс первой ПФ $\frac{1}{T_1 \cdot s+1}$ находится в точке $T_1 \cdot s = -1$. Подставляя $s = -2.5$, получаем $-2.5 = -\frac{1}{T_1} \Rightarrow T_1 = 0.4$. Так как вторая передаточная функция отличается от первой только постоянной времени, то для неё аналогично $T_2 = T_1 = 0.4$.

Структурная схема, рассматриваемая в задании, является замкнутой схемой с отрицательной обратной связью, а значит, уравнение в операторной форме, соответствующее этой схеме, будет выглядеть следующим образом:

$$Y(s) = W(s)(G(s) - Y(s)),$$

где $W(s) = \frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)s}$.

Сведём это выражение к конкретному дифференциальному уравнению.

$$Y(s) = W(s)(G(s) - Y(s)) \Leftrightarrow [1 + W(s)]Y(s) = W(s)G(s)$$

Подставляя $W(s)$ и домножая на его знаменатель, получаем:

$$[1 + W(s)]Y(s) = W(s)G(s) \Leftrightarrow \left[1 + \frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)s}\right] Y(s) = \frac{K}{(T_1 s+1)(T_2 s+2)s} G(s) \Leftrightarrow$$

$$((T_1 s+1)(T_2 s+1)s + K)\, Y(s) = KG(s).$$

Раскрыв скобки и перейдя от операторной формы, получим:

$$((T_1 s+1)(T_2 s+1)s + K)\, Y(s) = ((T_1 T_2 s^2 + T_1 s + T_2 s + 1)s + K)Y(s) =$$

$$= (T_1 T_2 s^3 + T_1 s^2 + T_2 s^2 + s + K)Y(s) = T_1 T_2 \dddot{y} + (T_1 + T_2)\ddot{y} + \dot{y} + Ky.$$

Рассмотрим однородное уравнение, и для исследования на устойчивость при помощи использования следствия из критерия Гурвица поделим уравнение на коэффициент перед $\dddot{y}$:

$$T_1 T_2 \dddot{y} + (T_1 + T_2)\ddot{y} + \dot{y} + Ky = \dddot{y} + \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}\ddot{y} + \frac{1}{T_1 T_2}\dot{y} + \frac{K}{T_1 T_2}y = 0$$

Следствие из критерия Гурвица для дифференциального уравнения третьего порядка вида $\dddot{y} + a_2\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0$ гласит, что система асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда $a_2, a_1, a_0 > 0$ и $a_2 a_1 >$

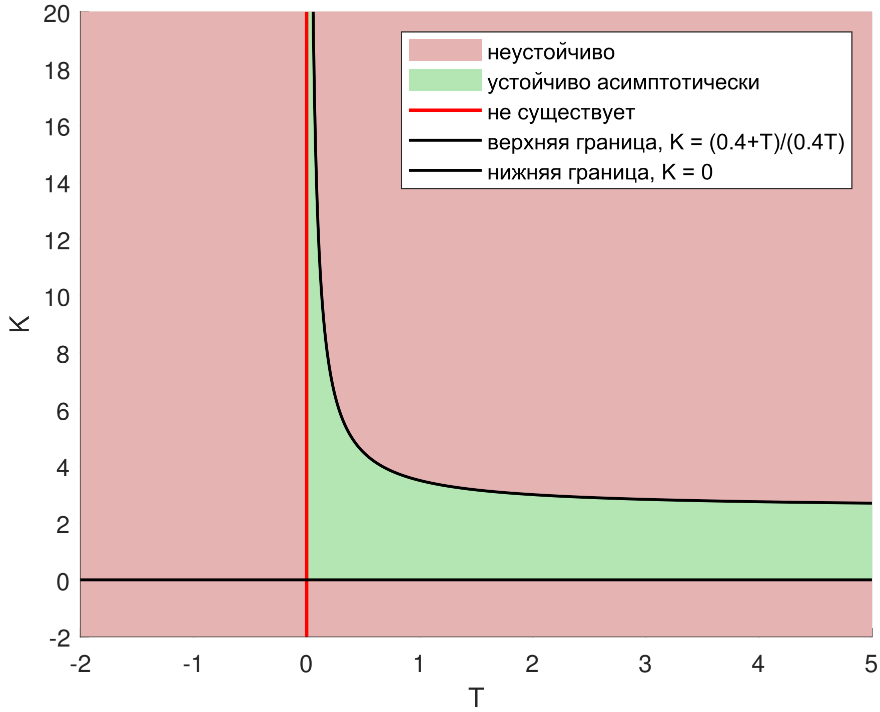

Рисунок 9: Графическое изображение границы устойчивости системы

a_0. Проверим, при каких K, T_2 это выполняется для нашего уравнения при фиксированном найденном ранее значении $T_1 = 0.4$:

$$\dddot{y} + \frac{0.4 + T_2}{0.4T_2}\ddot{y} + \frac{1}{0.4T_2}\dot{y} + \frac{K}{0.4T_2}y = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{0.4 + T_2}{0.4T_2}, a_1 = \frac{1}{0.4T_2}, a_0 = \frac{K}{0.4T_2}.$$

Составим систему из уравнений, которые обеспечат асимптотическую устойчивость:

$$\begin{cases} \frac{0.4+T_2}{0.4T_2} > 0 \\ \frac{1}{0.4T_2} > 0 \\ \frac{K}{0.4T_2} > 0 \\ \frac{0.4+T_2}{0.4T_2} \cdot \frac{1}{0.4T_2} > \frac{K}{0.4T_2} \end{cases}$$

Случай $T_2 < 0$ можем не рассматривать, так как при нём не будет выполняться второе неравенство. Также не берём в расчёт вариант $T_2 = 0$, так как при нём возникает деление на 0. Тогда, при $T_2 > 0$, система сводится к следующей:

$$\begin{cases} T_2 > -0.4 \\ K > 0 \\ \frac{0.4+T_2}{0.4T_2} > K \Leftrightarrow K < \frac{0.4+T_2}{0.4T_2} \end{cases}$$

В итоге получаем, что система находится на границе устойчивости при $K(T_2) = \frac{0.4+T_2}{0.4T_2}$

Так как фиксированное рассчитанное ранее значение T_2 совпадает с T_1, то в пространстве параметров K, T_1 граница устойчивости $K(T_1)$ будет выглядеть так же, как и $K(T_2)$: $K(T_1) = \frac{0.4+T_1}{0.4T_1}$.

При наборе $K = 3.5, T_2 = 1, T_1 = 0.4$ система находится на границе устойчивости, при $K = 10, T_2 = 1, T_1 = 0.4$ система неустойчива, а при $K = 0.5, T_2 = 1, T_1 = 0.4$ – асимптотически устойчива. Промоделируем указанные наборы параметров, чтобы убедиться в этом:

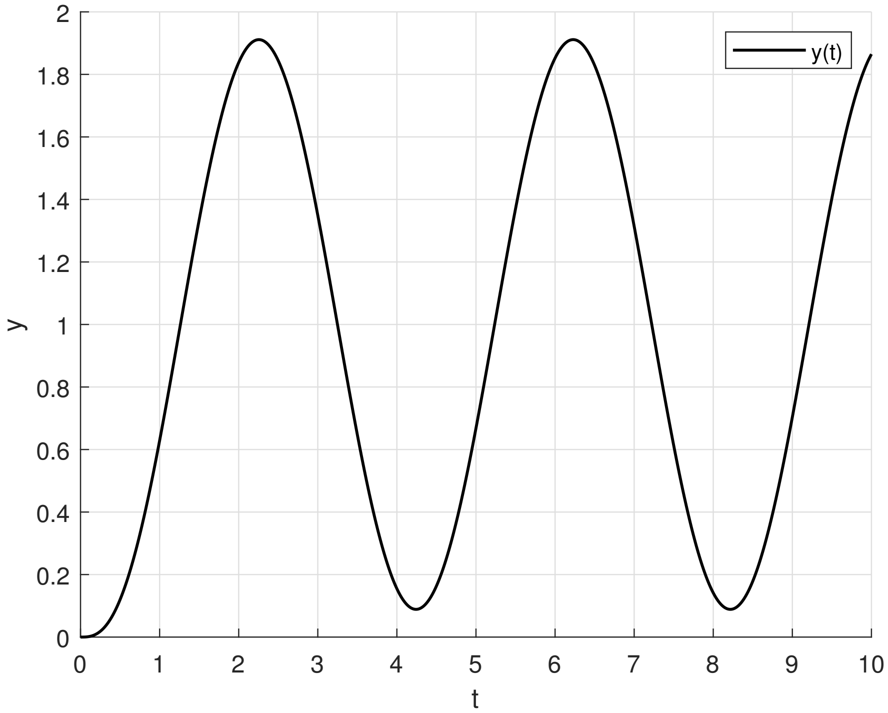

Рисунок 10: $K = 3.5, T_2 = 1, T_1 = 0.4$

На данном графике траектория $y(t)$ ограничена, при $t \to \infty$ она не сойдётся к начальному воздействию, но и не уйдёт в бесконечность. Система устойчива, но не асимптотически – на границе устойчивости.

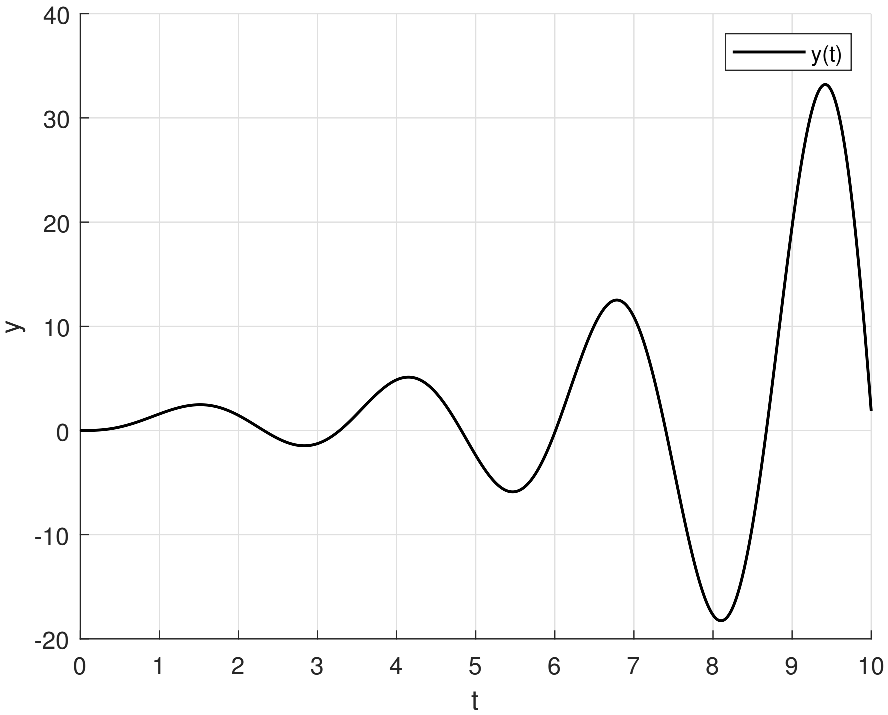

Рисунок 11: $K = 10, T_2 = 1, T_1 = 0.4$

График расходящийся, система неустойчива.

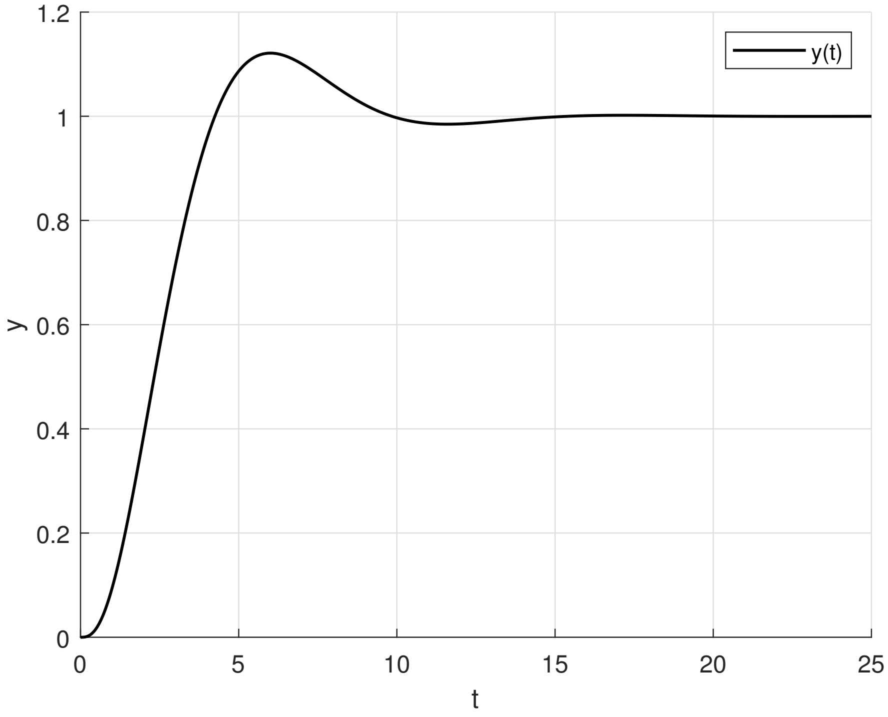

Рисунок 12: $K = 0.5, T_2 = 1, T_1 = 0.4$

Можно заметить, что график сходится к внешнему воздействию $u(t) = 1$, и $y(t) \to 1$ при $t \to \infty$, а значит, система асимптотически устойчива.

2.1 Выводы

Устойчивость системы, представленной в виде линейного дифференциального уравнения, определяется коэффициентами перед зависимыми переменными и их производными, она может быть определена заранее без решения самого уравнения при помощи критерия Гурвица и следствий из него.

3 Автономный генератор

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ g = Cx, \end{cases} \qquad x(0).$$

Найдём такие $A, C, x(0)$, чтобы выход системы совпадал с выходом $g_{ж}(t) = \cos 5t + e^{t} + e^{-5t}$. Для этого вспомним, что свободное движение в этом случае по аналогии с системами в форме В-В (только там моды вместо элементов матричной экспоненты) определяется формулой $y_{св} = Ce^{At}x(0)$.

Сперва рассчитаем элементы матрицы A. Это можно легко осуществить, вспомнив, как устроены жордановы матрицы – они состоят из жордановых клеток, формируемых из собственных чисел матрицы. А собственные числа матрицы, в свою очередь, совпадают с корнями характеристического уравнения, соответствующего системе в матричном виде. То есть, для построения матрицы A из решения системы нужно выделить отдельные моды, затем понять, каким корням они соответствуют, затем принять эти корни за собственные числа матрицы A, и составить матрицу A из жордановых клеток.

Первым делом определим корни характеристического уравнения из выхода $g(t) = \cos 5t + e^t + e^{-5t}$. Моды e^t и e^{-5t} соответствуют корням $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5$, а $\cos 5t$ – корням $\lambda_{1,2} = \pm 5i$. Комплексно-сопряжённые числа не существуют поодиночке в качестве корней характеристического уравнения, поэтому можно считать, что также имеется мода $0 \sin 5t$ в пару к $\cos 5t$. Тогда можем составить A из жордановых клеток:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 5t & \sin 5t \\ 0 & 0 & -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix}$$

$$e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-5t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 5t & \sin 5t \\ 0 & 0 & -\sin 5t & \cos 5t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 e^t \\ a_2 e^{-5t} \\ a_3 \cos 5t + a_4 \sin 5t \\ -a_3 \sin 5t + a_4 \cos 5t \end{bmatrix}$$

$$Ce^{At}x(0) = \begin{bmatrix} a_1 e^t \\ a_2 e^{-5t} \\ a_3 \cos 5t + a_4 \sin 5t \\ -a_3 \sin 5t + a_4 \cos 5t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} =$$

$$= c_1 a_1 e^t + c_2 a_2 e^{-5t} + c_3 a_3 \cos 5t + c_4 a_4 \sin 5t - c_3 a_3 \sin 5t + c_4 a_4 \cos 5t.$$

Сравним получившееся выражение с исходным выходом:

$$c_1 a_1 e^t + c_2 a_2 e^{-5t} + c_3 a_3 \cos 5t + c_4 a_4 \sin 5t - c_3 a_3 \sin 5t + c_4 a_4 \cos 5t = \cos 5t + e^t + e^{-5t}$$

Тогда для нахождения коэффициентов можем составить систему:

$$\begin{cases} c_1 a_1 = 1 \\ c_2 a_2 = 1 \\ c_3 a_3 + c_4 a_4 = 1 \\ c_4 a_4 - c_3 a_3 = 0 \end{cases}$$

У системы нет единого решения, можем взять любой подходящий набор коэффициентов. Пусть $c_1 = c_2 = a_1 = a_2 = 1, c_3 = 2, c_4 = 2, a_3 = 0.25, a_4 = 0.25$. Тогда C и $x(0)$ выглядят так:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}.$$

Проверим правильность выбранных параметров моделированием и сравнением с исходным выражением:

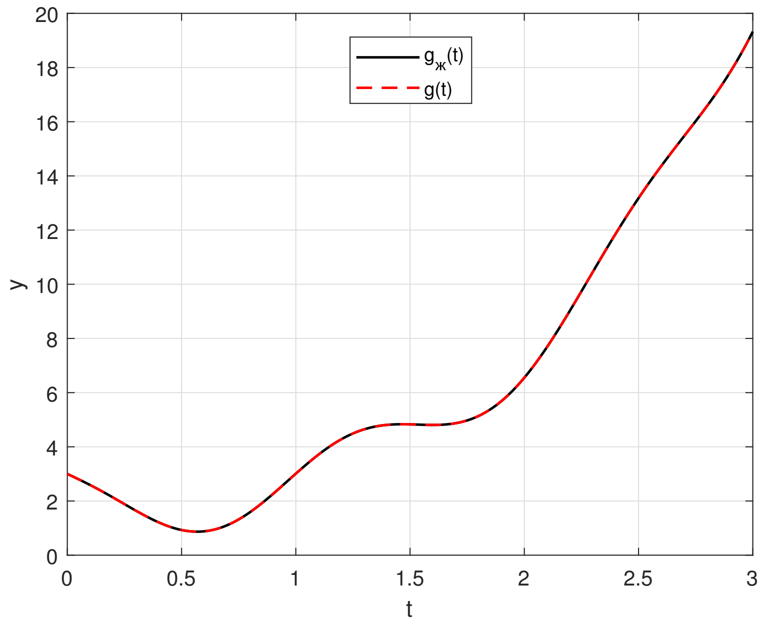

Рисунок 13: Сравнение выхода системы, заданной формулой, и выхода генератора

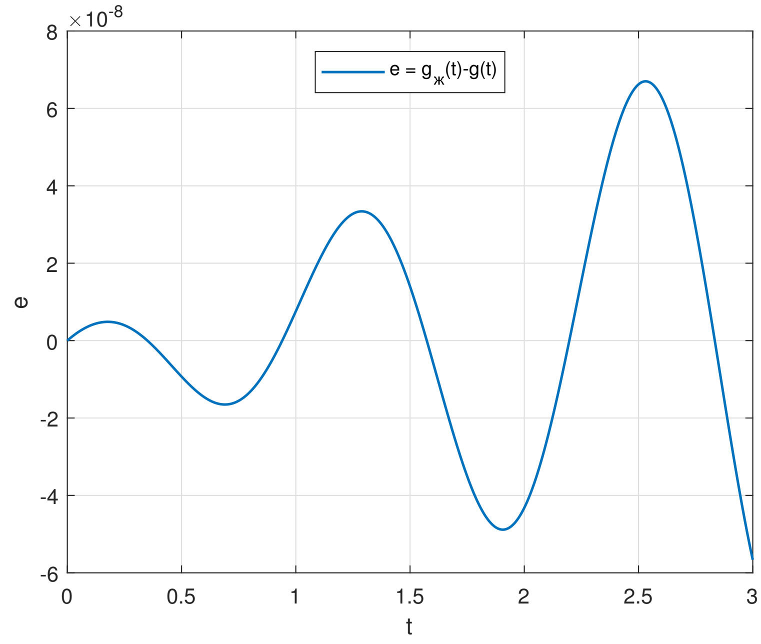

Рисунок 14: График ошибки в виде разницы полученных выходов

По сравнительному графику выходов кажется, что графики идеально совпадают, однако график ошибки ясно даёт понять, что это не так – со временем ошибка накапливается (её график расходится), и при $t \to \infty$ графики будут бесконечно далеки друг от друга, но при малых значениях t ошибка незначительна.

4 Вывод по работе

В ходе выполнения работы я ознакомился со свободным движением – увидел, как системы ведут себя при отсутствии входного сигнала, в каких случаях они устойчивы, явным образом определил границу устойчивости для одной из систем, убедился в том, что по разные стороны этой границы система ведёт себя по-разному, также рассмотрел систему в формате В-С-В без входного воздействия (С-В?), ощутил связь между системой такого вида и системой, заданной дифференциальным уравнением, тот факт, что собственные числа матрицы системы это корни характеристического уравнения соответствующей системы в виде дифференциального уравнения, позволил выполнить третье задание.

5 Приложение А. Код для выполнения заданий

Листинг 1. Код для выполнения задания 1

```
% clear all;
close all;
t = (0:0.001:6)';
a_0 = -0.36;
a_1 = 0;
y0 = 0;
yy0 = 0.1;

out = sim('ex1/model.slx','StopTime','6');
y_model = out.y;
y_t = figure;

y_model.plot('black', LineWidth=1.2)
grid on;
title('y_{св}(t)', 'Interpreter', 'tex', FontWeight='normal')
hold on;

% f = exp(-2.5.*t)+2.5.*t.*exp(-2.5.*t);
% f = 0.125.*sin(8.*t).*exp(-t) + cos(8.*t).*exp(-t);
% f = cos(8.*t);
% f = (1/20).*exp(t).*cos(8.*t)-(1/160).*exp(t).*sin(8.*t);
% f = (1/20 - t./8).*exp((2.5).*t);
f = (1/12).*exp(0.6.*t)-(1/12).*exp(-0.6.*t);
plot(t, f, '--red', LineWidth=1.2);
xlabel('t'), ylabel('y(t)')
ylim([-1.5, 1.5]);
legend('Моделирование системы', 'Аналитическое решение', BackgroundAlpha=.0)
```

Листинг 1: Код для построения графиков для задания 1

Листинг 2. Код для выполнения задания 2

```
% clear all;
close all;
t = (0:0.01:25)';
g = [t, ones(size(t))];
T1 = 0.4;
T2 = 1;
K = 0.5;
out = sim('ex2/model.slx','StopTime','6');

num = [K];
den = [T1*T2 (T1 + T2) 1 K];
sys = tf(num, den);
y = lsim(sys, g(:,2), t);

figure()
% out.y.plot()
hold on;
plot(t, y, 'black')
xlabel('t'); ylabel("y");
legend('y(t)')
grid on;
```

Листинг 2: Код для построения графиков для задания 2

Листинг 3. Код для построения границы устойчивости задания 2

```
close all;
T2 = linspace(0, 5, 500);
Kcrit = (0.4 + T2)./(0.4*T2);

T2min = 0; T2max = 5;
```

```
Kmin = 0; Kmax = 20;

figure; hold on;
fill([T2 fliplr(T2)], ...
     [Kmin*ones(size(T2)) fliplr(min(Kcrit,Kmax))], ...
     [0.7 0.9 0.7], 'EdgeColor','none');
fill([T2 fliplr(T2)], ...
     [min(Kcrit,Kmax) fliplr(Kmax*ones(size(T2)))], ...
     [0.9 0.7 0.7], 'EdgeColor','none');

plot(T2, Kcrit, 'k','LineWidth',1.2);

xlim([T2min T2max]); ylim([Kmin Kmax]);
xlabel('T'); ylabel('K');
legend('устойчиво','неустойчиво','граница, K=(0.4+T)/(0.4T)');
grid on;
```

Листинг 3: Код для построения графиков для задания 2

Листинг 4. Код для построения графиков для задания 3

```
close all;

t = (0:0.001:3)';
y_ref = cos(5*t)+exp(t)+exp(-5*t);

A = [1, 0, 0, 0;
    0, -5, 0, 0;
    0, 0, 0, 5;
    0, 0, -5, 0];
C = [1, 1, 2, 2];
x_0 = [1; 1; 0.25; 0.25];
u = zeros(size(x_0));
out = sim('ex3/generator.slx','StopTime','3');
y_model = out.y;

plot(t, y_ref, 'black', LineWidth=1.2);
hold on;
y_model.plot('r--', LineWidth=1.2);
grid on;
legend('g_{ж}(t)', 'g(t)', Interpreter='tex');
xlabel('t'); ylabel('y');

e = y_ref - y_model.Data;
figure();
plot(y_model.Time, e)
grid on;
legend('e = y_{ref}(t)-y(t)', Interpreter='tex');
xlabel('t'); ylabel('e');
```

Листинг 4: Код для построения графиков для задания 2