

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №5

**ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ**

Студент: Заводин Е.Ю.  
Лин САУ R23 бак 1.1.1

Преподаватели: Перегудин А.А.  
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург  
2025

## Содержание

<b>1 Задача исследования типовых динамических звеньев</b>	<b>3</b>
1.1 ДПТ . . . . .	3
1.1.1 Частотные характеристики . . . . .	4
1.1.2 Временные характеристики . . . . .	7
1.2 ДПТ 2.0 . . . . .	8
1.2.1 Частотные характеристики . . . . .	10
1.2.2 Временные характеристики . . . . .	13
1.3 Конденсатор-умножай . . . . .	16
1.3.1 Частотные характеристики . . . . .	16
1.3.2 Временные характеристики . . . . .	19
1.4 Пружинка . . . . .	21
1.4.1 Частотные характеристики . . . . .	22
1.4.2 Временные характеристики . . . . .	24
1.5 Что ты такое? . . . . .	26
1.5.1 Частотные характеристики . . . . .	27
1.5.2 Временные характеристики . . . . .	30
<b>2 Вывод по работе</b>	<b>32</b>
<b>3 Приложение А. Код для выполнения заданий</b>	<b>32</b>

# 1 Задача исследования типовых динамических звеньев

В работе исследуются реальные объекты — находятся их передаточные функции, сопоставляются с типовыми звеньями, временные и частотные характеристики объектов моделируются и сравниваются с конкретными теоретическими для найденных типовых звеньев.

Временными характеристиками системы являются её весовая и переходная функции, то есть ответ системы соответственно на делта-функцию в качестве входного воздействия и ответ на единичный скачок, тогда весовая функция может быть определена по следующей формуле:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t)\}\} = \mathcal{L}^{-1}\{W(s) \cdot 1\} = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\},$$

где  $W(s)$  — передаточная функция системы.

Тогда переходная функция, являющаяся ответом системы на единичный скачок, определяется следующей формулой:

$$y_{s.r.} = \mathcal{L}^{-1}\{W(s) \cdot \mathcal{L}\{1\}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{W(s) \cdot \frac{1}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}.$$

В качестве частотных характеристик рассматриваются АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ. Формулы для расчета АЧХ  $A(\omega)$  и ФЧХ  $\varphi(\omega)$  следующие:

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}, \quad \varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)),$$

где  $P(\omega), Q(\omega)$  — соответственно действительная и мнимая части частотной передаточной функции  $W(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ .

Выражение для ЛФЧХ ничем не будет отличаться от такового для ФЧХ, но ЛАЧХ отлична от АЧХ:

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{A(\omega)}{A_6} \right), \quad A_6 = 1.$$

## 1.1 ДПТ

Рассмотрим ДПТ независимого возбуждения, задаваемый формулами

$$J\dot{\omega} = M, \quad M = k_m I, \quad I = \frac{U + \varepsilon_i}{R}, \quad \varepsilon_i = -k_e \omega.$$

Считая  $U$  входом,  $\omega$  — выходом, сведу формулы к одному линейному дифференциальному уравнению:

$$J\dot{\omega} = k_m \frac{U - k_e \omega}{R} = \frac{U k_e}{R} - \frac{k_m k_e \omega}{R}$$

$$J\dot{\omega} + \frac{k_m k_e \omega}{R} = \frac{k_m}{R} U$$

$$\frac{JR}{k_m} \dot{\omega} + k_e \omega = U$$

$$\frac{\omega}{U} = W(s) = \frac{1}{\frac{JR}{k_m} s + k_e} = \frac{1}{k_e} \frac{1}{\frac{JR}{k_e k_m} s + 1}$$

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}, \quad T = \frac{JR}{k_e k_m}, \quad K = \frac{1}{k_e}$$

Получил передаточную функцию в стандартизированном виде, соответствующую реальному усилительному звену.

### 1.1.1 Частотные характеристики

Выделию действительную и мнимую части полученной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T(j\omega) + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega} \cdot \frac{1 - jT\omega}{1 - jT\omega} = \frac{K(1 - jT\omega)}{1 + (T\omega)^2} = \frac{K}{1 + (T\omega)^2} + j \frac{-KT\omega}{1 + (T\omega)^2}$$

Пусть  $P(\omega) = \frac{K}{1 + (T\omega)^2}$ ,  $Q(\omega) = \frac{-KT\omega}{1 + (T\omega)^2}$ . Рассчитаю АЧХ такой передаточной функции:

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \sqrt{\frac{K^2 + (KT\omega)^2}{(1 + (T\omega)^2)^2}} = \frac{K\sqrt{1 + (T\omega)^2}}{1 + (T\omega)^2} = \frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}$$

Тогда ЛАЧХ будет выглядеть так:

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} \right)$$

Разложим логарифм:

$$L(\omega) = 20 \lg(K) - 10 \lg(1 + (T\omega)^2).$$

Фазовая частотная характеристика может быть найдена по следующей формуле:

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)).$$

У двигателя постоянного тока активное сопротивление обмоток ротора  $R$ , момент инерции ротора  $J$  и конструктивные постоянные  $k_e, k_m$  при реальном моделировании являются положительными, также буду считать, что  $\omega$  принимает только неотрицательные значения (в отрицательной области для вещественной функции результат преобразования Лапласа будет симметричен результату в положительной области). Исходя из этого, коэффициент усиления и постоянная времени

$$T = \frac{JR}{k_e k_m} > 0, K = \frac{1}{k_e} > 0.$$

Тогда числитель действительной части передаточной функции всегда положителен, как и знаменатель, а значит,  $P(\omega) > 0$ . Числитель мнимой части передаточной функции же всегда отрицателен, а знаменатель всегда положителен, следовательно,  $Q(\omega) < 0$ . Исходя из этих соображений, комплексное число  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  находится в четвёртом квадранте, а значит, вместо  $\text{atan2}(Q(\omega), P(\omega))$  можем использовать  $\arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$ :

$$\arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-KT\omega}{1+(T\omega)^2}}{\frac{K}{1+(T\omega)^2}}\right) = \arctan\left(\frac{-KT\omega}{K}\right) = \arctan -T\omega = -\arctan T\omega$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{k_e} = \frac{1}{0.3612} \approx 2.7685, T = \frac{JR}{k_e k_m} = \frac{0.0031 \cdot 4.7231}{0.3612 \cdot 0.3612} \approx 0.1122 \Rightarrow W(s) = \frac{2.7685}{0.1122s + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} = \frac{2.7685}{\sqrt{1 + (0.1122\omega)^2}}$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{2.7685}{\sqrt{1 + (0.1122\omega)^2}} \right)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(0.1122\omega).$$

## Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

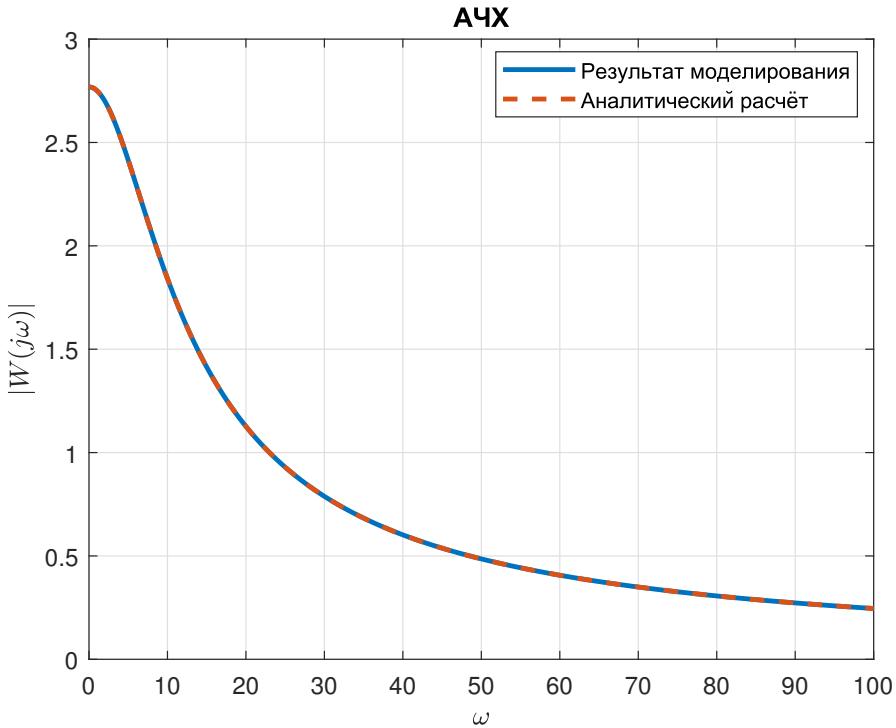


Рисунок 1: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

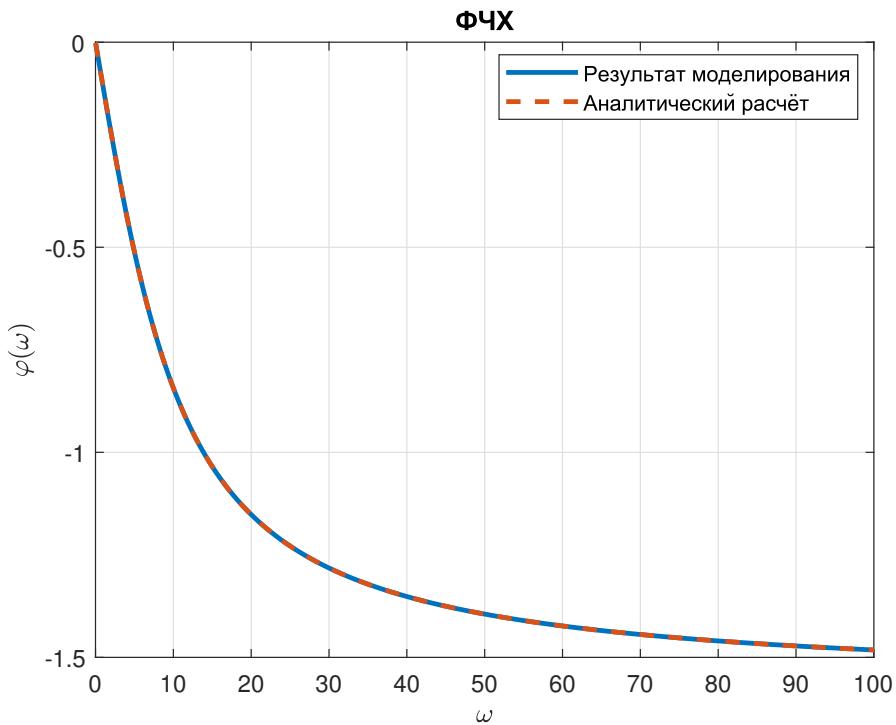


Рисунок 2: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

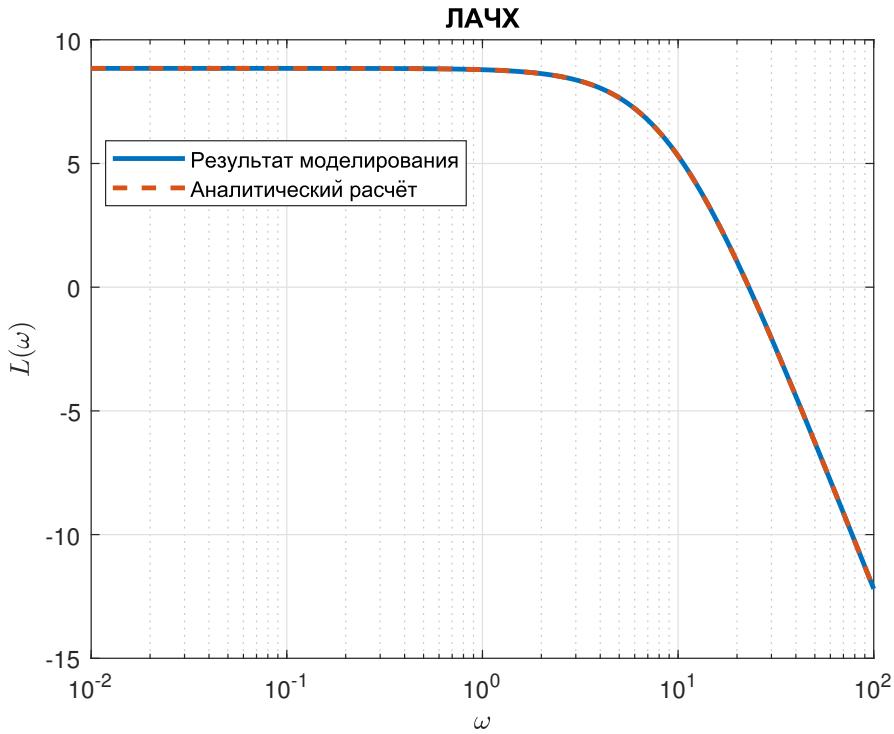


Рисунок 3: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

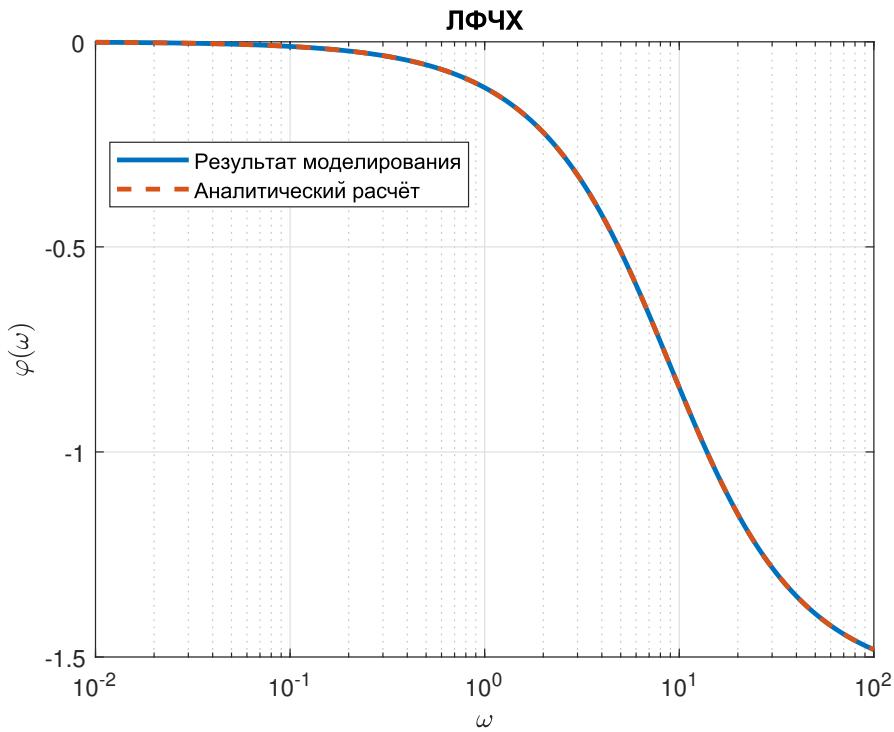


Рисунок 4: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного реального усилительного звена.

### 1.1.2 Временные характеристики

Весовая функция объекта:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{Ts+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K/T}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\}$$

Воспользуемся табличным преобразованием:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\} = e^{\alpha t}$$

Тогда, при  $\alpha = -\frac{1}{T}$ :

$$w(t) = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T}e^{-\frac{1}{T}t}.$$

Переходная функция:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{W(s)}{s} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s(Ts+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K/T}{s^2+s/T}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s/T}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s+1/T}\right\}.$$

По свойству интегрирования:

$$\frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T} \int_{0^-}^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\} dt.$$

Воспользуемся уже вычисленным при нахождении весовой функции значением:

$$\frac{K}{T} \int_{0^-}^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\} dt = \frac{K}{T} \int_{0^-}^t e^{-\frac{1}{T}x} dx.$$

Рассмотрим неопределенный интеграл  $\int e^{-\frac{1}{T}x} dx$ :

$$F(x) = \int e^{-\frac{1}{T}x} dx = -Te^{-\frac{x}{T}} + C.$$

Первообразная найдена, можем посчитать определенный интеграл:

$$y_{s.r.}(t) = \frac{K}{T} \int_{0^-}^t e^{-\frac{1}{T}x} dx = \frac{K}{T} (F(t) - F(0^-)) = \frac{K}{T} \left(-Te^{-\frac{t}{T}} + Te^0\right) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Подставлю исходные данные для своего варианта в полученные характеристики:

$$K = 2.7685, T = 0.1122 \Rightarrow w(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{1}{T}t} = \frac{2.7685}{0.1122}e^{-\frac{1}{0.1122}t} = 24.6747e^{-8.9127t}$$

$$y_{s.r.} = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = 2.7685(1 - e^{-8.9127t}).$$

### Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

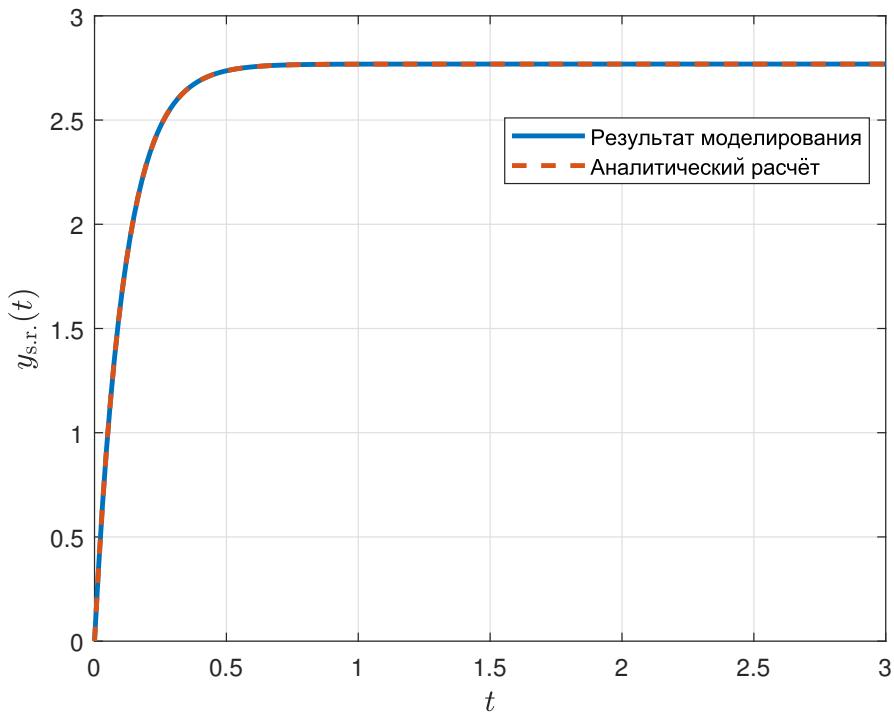


Рисунок 5: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

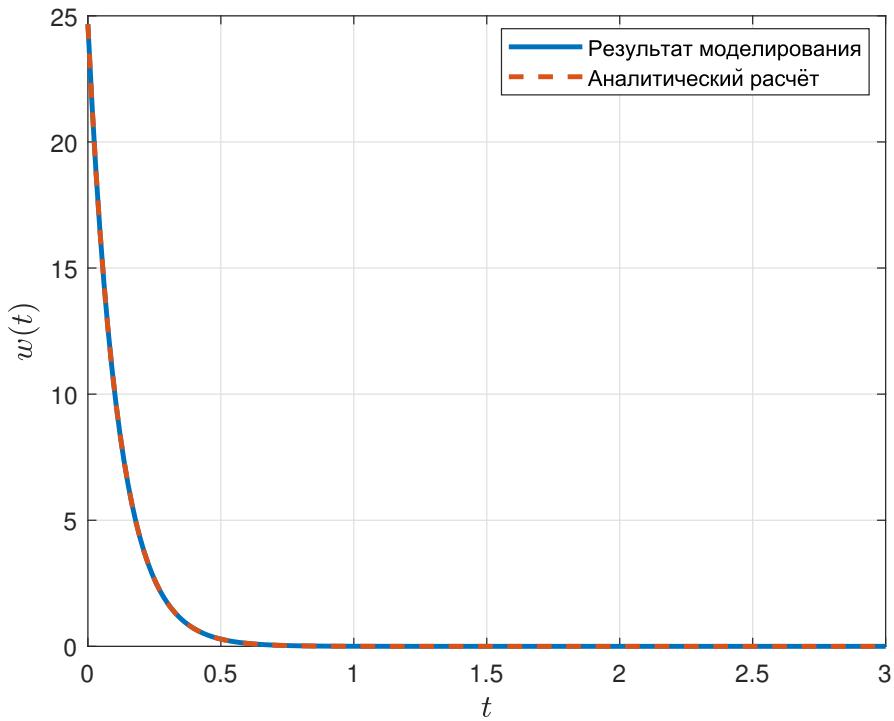


Рисунок 6: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного реального усилительного звена.

## 1.2 ДПТ 2.0

Рассмотрим уравнения для полной модели ДПТ независимого возбуждения:

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon}{R}, \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s, \varepsilon_i = -k_e \omega, \varepsilon_s = -L\dot{I}.$$

Считая  $U$  входом,  $\omega$  — выходом, сведём формулы к одному линейному дифференциальному уравнению:

$$J\dot{\omega} = k_m \frac{U - k_e \omega - L\dot{I}}{R} = \frac{k_m}{R} U - \frac{k_m k_e \omega}{R} - \frac{L\dot{I} k_m}{R} \cdot \frac{R}{k_m}$$

$$\frac{JR}{k_m} \dot{\omega} + k_e \omega + L\dot{I} = U$$

$$J\dot{\omega} = k_m I \Rightarrow I = \frac{J\dot{\omega}}{k_m}, \dot{I} = \frac{J\ddot{\omega}}{k_m}$$

$$\frac{JL}{k_m} \ddot{\omega} + \frac{JR}{k_m} \dot{\omega} + k_e \omega = U \Leftrightarrow \ddot{\omega} + \frac{R}{L} \dot{\omega} + \frac{k_e k_m}{J} \omega = \frac{k_m}{J} U$$

Переведу получившееся уравнение в пространство изображений Лаплласа:

$$s^2 \Omega(s) + \frac{R}{L} s \Omega(s) + \frac{k_e k_m}{J} \Omega(s) = \frac{k_m}{J} U(s)$$

$$W(s) = \frac{U(s)}{\Omega(s)} = \frac{\frac{k_m}{J}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{k_e k_m}{J}} = \frac{\frac{1}{k_e}}{\frac{J}{k_e k_m} s^2 + \frac{RJ}{k_e k_m L} s + 1}$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}, K = \frac{1}{k_e}, T = \sqrt{\frac{J}{k_e k_m}}, \xi = \frac{TR}{2L}$$

Получена передаточная функция в стандартизированном виде. Для определения конкретного типа звена объекта найду дискриминант знаменателя передаточной функции объекта, подставив параметры  $T, \xi$  в соответствии со своим вариантом:

$$T = \sqrt{\frac{J}{k_e k_m}} = \sqrt{\frac{0.0031}{0.3612 \cdot 0.3612}} \approx 0.1541,$$

$$\xi = \frac{TR}{2L} = \frac{0.154 \cdot 4.7237}{2 \cdot 1.0567} \approx 0.3445.$$

Тогда,

$$D = (2T\xi)^2 - 4(T^2) = (2 \cdot 0.1541 \cdot 0.3445)^2 - 4 \cdot 0.1541^2 = (0.0858)^2 - 4 \cdot 0.0237 \approx -0.009$$

Получается что корни знаменателя комплексно-сопряженные, а значит, функция соответствует колебательному звену. Для выделения действительной и мнимой части сперва перейду к частотной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{K(T^2(j\omega)^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(T^2(j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1)(T^2(j\omega)^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))} = \frac{K(-T^2\omega^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(-T^2\omega^2 + 1 + j2T\xi\omega)(-T^2\omega^2 + 1 - j2T\xi\omega)} =$$

$$= \frac{K(-T^2\omega^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} = \frac{K - KT^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} + j \frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}.$$

Пусть  $P(\omega) = \frac{K - KT^2\omega^2}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}$ ,  $Q(\omega) = \frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}$ .

### 1.2.1 Частотные характеристики

Рассчитаю амплитудно-частотную характеристику:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\left(\frac{-2KT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)^2 + \left(\frac{K - KT^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4K^2T^2\xi^2\omega^2 + K^2 - 2K^2T^2\omega^2 + K^2T^4\omega^4}{((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}} = \\ &= K\sqrt{\frac{4T^2\xi^2\omega^2 - 2T^2\omega^2 + T^4\omega^4 + 1}{((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}} = K\sqrt{\frac{T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1}{((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}}. \end{aligned}$$

Тогда ЛАЧХ:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg K \sqrt{\frac{T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1}{((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}} = 20 \lg K + 20 \cdot \frac{1}{2} \lg \left( \frac{T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1}{((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2} \right) = \\ &= 20 \lg K + 10 \lg (T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1) - 10 \lg ((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2) = \\ &= 20 \lg K + 10 \lg (T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1) - 20 \lg ((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2). \end{aligned}$$

Фазовая частотная характеристика будет определяться следующим образом:

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \text{atan2}\left(\frac{-2KT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}, \frac{K - KT^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)$$

Расположение  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  на комплексной плоскости, а значит, и оценка фазовой частотной характеристики, определяется в зависимости от того, положительные ли значения принимают  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ .

Знаменатели  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  всегда положительны. Тогда знаки вещественной и мнимой части  $W(j\omega)$  определяются их числителями —  $Q(\omega) < 0$  (т.к.  $K, T, \xi > 0$ ), знак  $P(\omega)$  меняется в зависимости от значения  $\omega$ .

Рассмотрим  $P(\omega) > 0$ :

$$\frac{1 - T^2\omega^2}{((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - T^2\omega^2 > 0 \Leftrightarrow \omega < \frac{1}{T}$$

Тогда  $P(\omega) > 0$  при  $\omega > \frac{1}{T}$ ,  $P(\omega) = 0$  при  $\omega = \frac{1}{T}$ . следовательно:

При  $0 \leq \omega < \frac{1}{T}$   $W(j\omega)$  находится в четвертом квадранте, значит,

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right).$$

При  $\omega = \frac{1}{T}$   $W(j\omega)$   $P(\omega) = Q(\omega) = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

При  $\omega > \frac{1}{T}$   $W(j\omega)$  в третьем квадранте, а значит,

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) - \pi = -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right) - \pi.$$

Итого:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right), & \omega \in [0, \frac{1}{T}) \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T} \\ -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right) - \pi, & \omega \in (\frac{1}{T}, +\infty) \end{cases}$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{k_e} = \frac{1}{0.3612} \approx 2.7685, T \approx 0.1541, \xi \approx 0.3445 \Rightarrow W(s) = \frac{2.7685}{0.1541^2 s^2 + 2 \cdot 0.3445 \cdot 0.1122 s + 1} = \\ &= \frac{2.7685}{0.0238 + 0.0773s + 1}. \end{aligned}$$

$$A(\omega) = K \sqrt{\frac{T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1}{((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}} = 2.7685 \sqrt{\frac{0.0238\omega^2(-1.5253 + 0.0238\omega^2) + 1}{((1 - 0.0238\omega^2)^2 + (0.0773\omega)^2)^2}}.$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left( 2.7685 \sqrt{\frac{0.0238\omega^2(-1.5253 + 0.0238\omega^2) + 1}{((1 - 0.0238\omega^2)^2 + (0.0773\omega)^2)^2}} \right)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{0.0773\omega}{1-0.1541\omega^2}\right), & \omega \in [0, \frac{1}{T}) \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T} \\ -\arctan\left(\frac{0.0773\omega}{1-0.1541\omega^2}\right) - \pi, & \omega \in (\frac{1}{T}, +\infty). \end{cases}$$

### Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

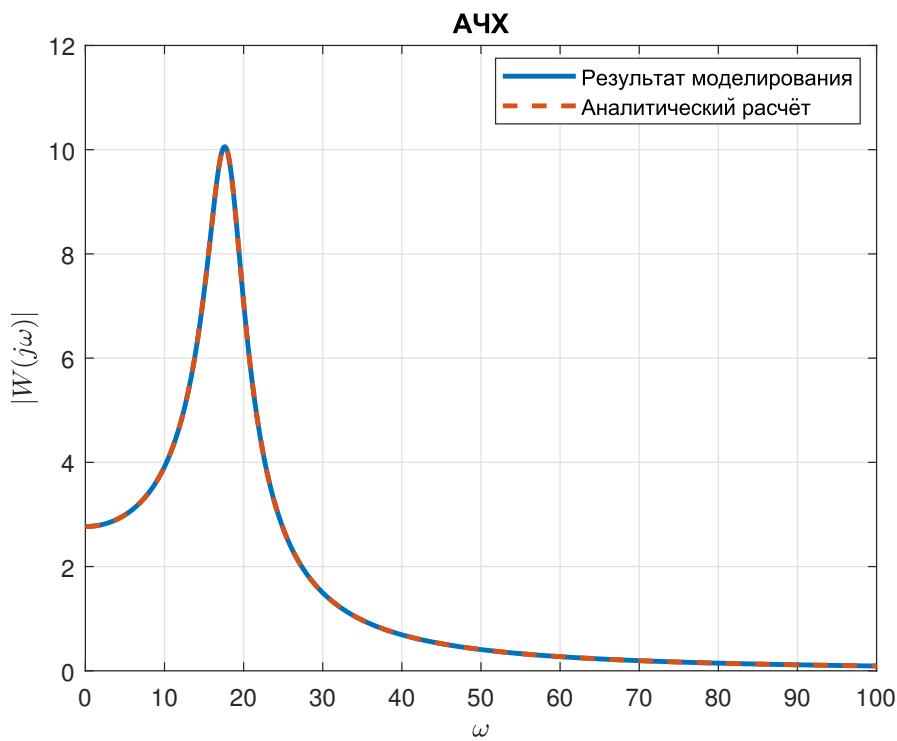


Рисунок 7: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

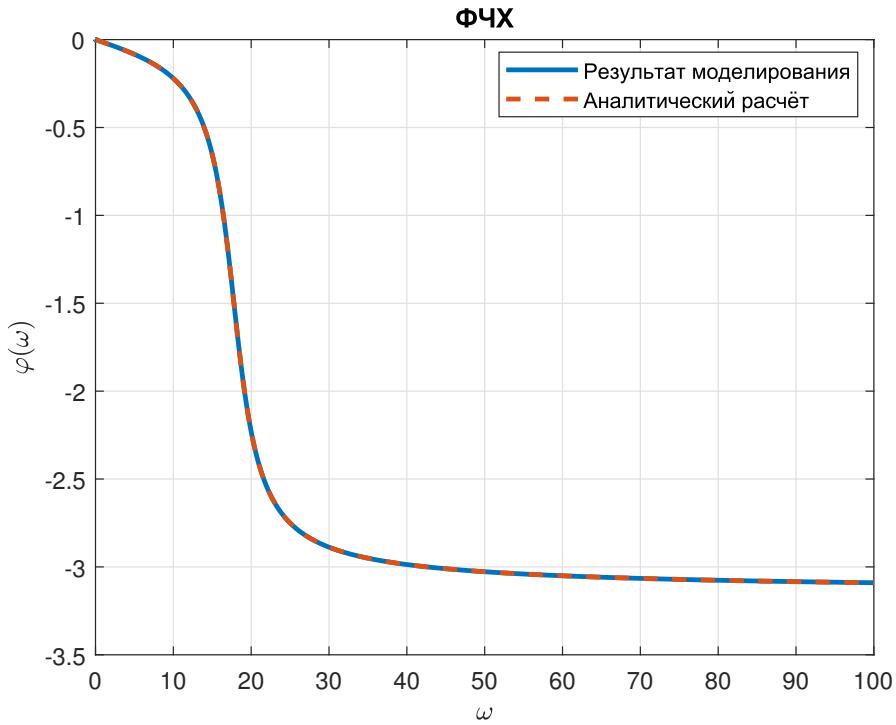


Рисунок 8: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

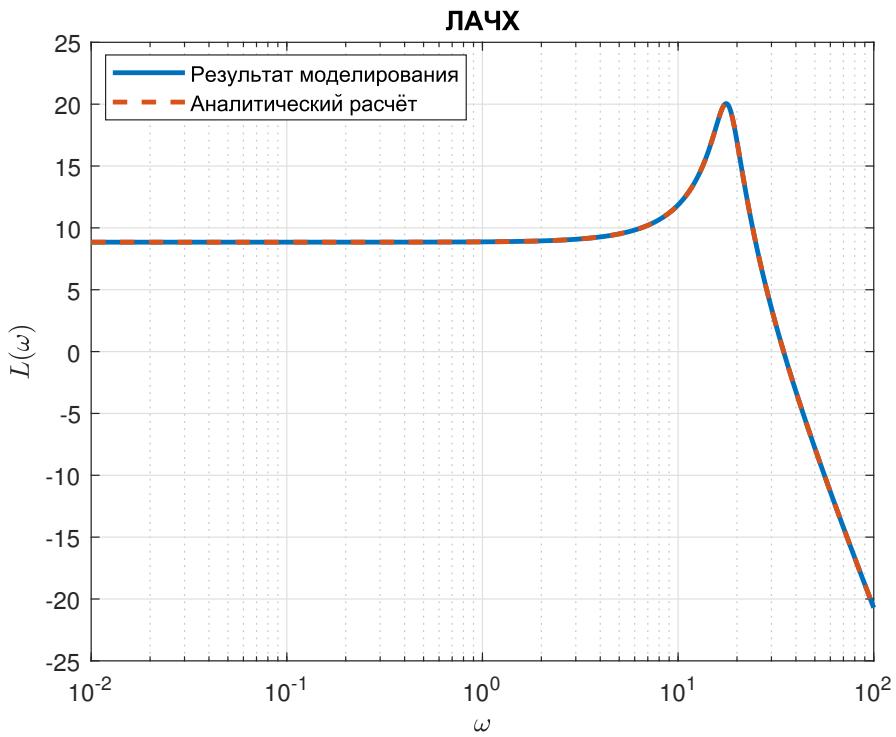


Рисунок 9: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

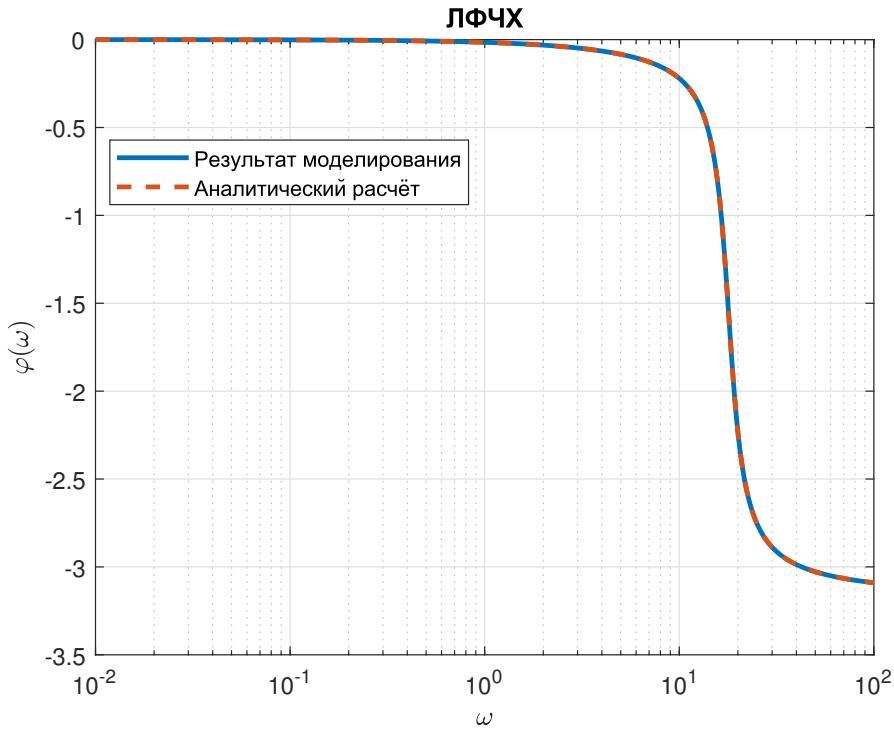


Рисунок 10: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного колебательного звена.

### 1.2.2 Временные характеристики

Весовая функция:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{T^2s^2 + 2T\xi s + 1}\right\}.$$

Для сверки с таблицей готовых преобразований Лапласа приведу к стандартному виду с единицей в качестве коэффициента перед старшей степенью  $s$ :

$$\frac{K}{T^2s^2 + 2T\xi s + 1} = \frac{K}{T^2(s^2 + \frac{2\xi}{T}s + \frac{1}{T^2})}$$

В знаменателе можно вывести полный квадрат:

$$T^2\left(s^2 + \frac{2\xi}{T}s + \frac{1}{T^2}\right) = T^2\left((s + \frac{\xi}{T})^2 + \frac{1-\xi^2}{T^2}\right)$$

Для моего случая  $\xi \approx 0.3445 > 0$  можно безболезненно внести замену  $\frac{\xi}{T} = a$ ,  $\frac{1-\xi^2}{T^2} = \omega^2$ :

$$W(s) = \frac{K}{T^2} \frac{1}{((s+a)^2 + \omega^2)}$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{(s+a)^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Известно табличное преобразование Лапласа, похожее на получившееся выражение:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Так как  $\frac{1}{\omega}, \frac{K}{T^2}$  — константы, то, по свойству линейности:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{K}{T^2} \frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t) \right\} = \frac{K}{T^2} \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} = W(s).$$

Значит,

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{T^2} \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \right\} = \frac{K}{T^2} \frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t).$$

Подставил введённые замены  $\frac{\xi}{T} = a, \frac{1-\xi^2}{T^2} = \omega^2$ :

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W(s)\} = \frac{K}{T} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) = \frac{K}{T \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right).$$

Переходная функция:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}.$$

Используя полученные при вычислении весовой функции преобразования, получаю при  $a = \frac{\xi}{T}, \omega = \sqrt{\frac{1-\xi^2}{T^2}}$ :

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{1}{s} \frac{K}{T^2} \frac{1}{((s+a)^2 + \omega^2)}.$$

Тогда, по свойству интегрирования:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{K}{T^2} \frac{1}{((s+a)^2 + \omega^2)} \right\} = \int_{0^-}^t \frac{K}{T^2} \frac{1}{\omega} e^{-ax} \sin(\omega x) dx = \frac{K}{T^2 \omega} \int_{0^-}^t e^{-ax} \sin(\omega x) dx$$

Рассмотрю неопределенный интеграл  $\int e^{-ax} \sin(\omega x) dx$ :

$$\int e^{-ax} \sin(\omega x) dx = \left[ \int fg' = fg - \int f'g, \quad f = \sin(\omega x), g' = e^{-ax} \right] = -\frac{e^{-ax} \sin(\omega x)}{a} - \int -\frac{\omega e^{-ax} \cos(\omega x)}{a} dx.$$

Проинтегрирую по частям ещё раз:

$$\begin{aligned} -\frac{e^{-ax} \sin(\omega x)}{a} - \int -\frac{\omega e^{-ax} \cos(\omega x)}{a} dx &= \left[ f = \omega \cos(\omega x), \quad g' = -\frac{e^{-ax}}{a} \right] = \\ &= -\frac{e^{-ax} \sin(\omega x)}{a} - \left( -\frac{\omega e^{-ax} \cos(\omega x)}{a^2} - \int -\frac{\omega^2 e^{-ax} \sin(\omega x)}{a^2} dx \right) \end{aligned}$$

Исходный рассматриваемый интеграл снова появляется в правой части выражения, таким образом решаем уравнение по  $\int e^{-ax} \sin(\omega x) dx$ :

$$F(x) = -\frac{e^{-ax} (a \sin(\omega x) + \omega \cos(\omega x))}{\omega^2 + a^2} + C$$

Первообразная найдена, можно посчитать определенный интеграл:

$$\begin{aligned} y_{s.r.}(t) &= \frac{K}{T^2 \omega} \int_{0^-}^t e^{-ax} \sin(\omega x) dx = F(t) - F(0^-) = \frac{K}{T^2 \omega} \left( \frac{\omega}{\omega^2 + a^2} - \frac{a \sin(t\omega) + \omega \cos(t\omega)}{e^{at} \omega^2 + a^2 e^{at}} \right) = \\ &= \frac{K}{T^2 \omega (\omega^2 + a^2)} (\omega - e^{-at} (a \sin(t\omega) + \omega \cos(t\omega))) \end{aligned}$$

Произведу обратную замену  $a = \frac{\xi}{T}, \omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ :

$$\begin{aligned}
y_{s.r.}(t) &= \frac{K}{T^2 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \left( \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right)^2 + \left( \frac{\xi}{T} \right)^2 \right)} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} - e^{-\frac{\xi t}{T}} \left( \frac{\xi}{T} \sin \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cos \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) \right) \right) = \\
&= \frac{K}{\chi' \sqrt{1-\xi^2} \left( \frac{1-\xi^2+\xi^2}{\chi'^2} \right)} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\chi'} \left( 1 - e^{-\frac{\xi t}{T}} \left( \frac{\xi}{\chi'} \frac{\chi'}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) + \cos \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) \right) \right) = \\
&= K \left( 1 - e^{-\frac{\xi t}{T}} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) + \cos \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Подставлю исходные данные в полученные функции:

$$\begin{aligned}
w(t) &= \frac{K}{T \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi t}{T}} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) = 19.1327 e^{-2.2356 t} \sin(6.0921 t) \\
y_{s.r.}(t) &= K \left( 1 - e^{-\frac{\xi t}{T}} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) + \cos \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) \right) \right) = \\
&= 2.7685 \left( 1 - e^{-2.2356 t} (0.3669 \sin(6.0921 t) + \cos(6.0921 t)) \right).
\end{aligned}$$

## Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

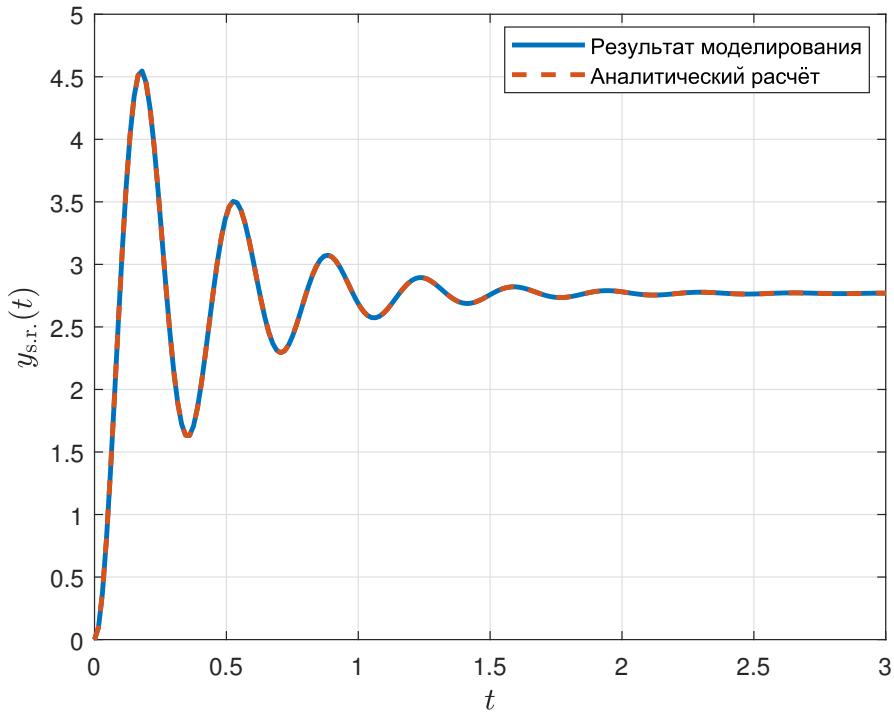


Рисунок 11: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

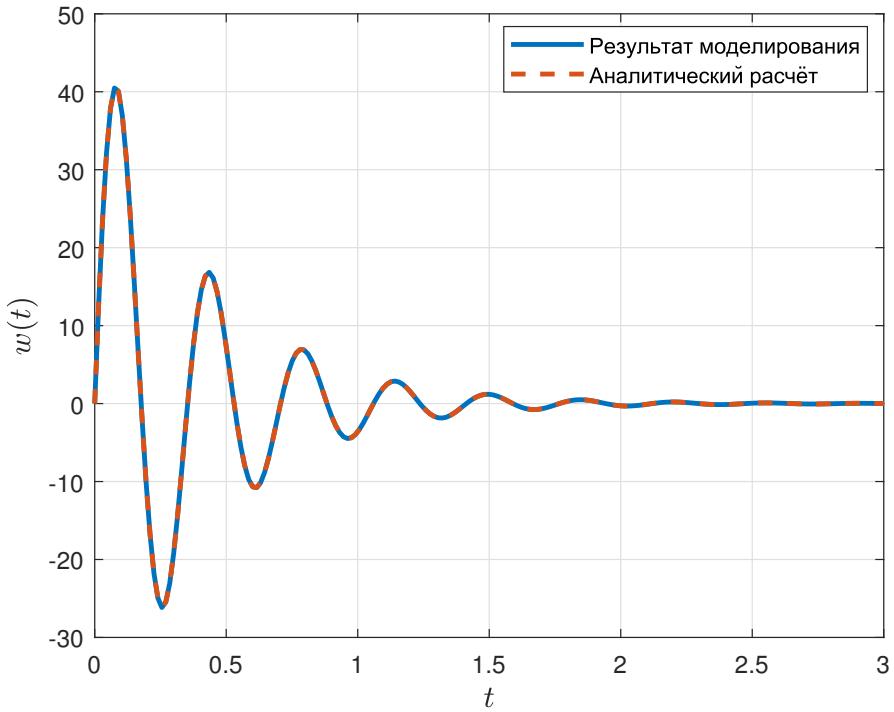


Рисунок 12: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного колебательного звена.

### 1.3 Конденсируй-умножай

В задании рассматривается уравнение конденсатора

$$I = C \frac{dU}{dt}$$

с  $I(t)$  в качестве входа и  $U(t)$  в качестве выхода.

Для вывода передаточной функции представлю уравнение в виде

$$C\dot{U} = I$$

Тогда передаточная функция выглядит следующим образом:

$$W(s) = \frac{1}{Cs}$$

Она представима в стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{K}{s}, K = \frac{1}{C}$$

Функция сопоставима с идеальным интегрирующим звеном. Ёмкость конденсатора — величина неотрицательная, соответственно и  $K > 0$ .

#### 1.3.1 Частотные характеристики

Для определения АЧХ и ФЧХ перейду к частотной передаточной функции и разобью её на вещественную и мнимую составляющие:

$$W(s) = \frac{K}{s} \Leftrightarrow W(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

$$W(j\omega) = \frac{-jK\omega}{(j\omega)(-j\omega)} = \frac{-jK\omega}{\omega^2} = \frac{-jK}{\omega}.$$

В этом случае действительная составляющая  $P(\omega)$  равна 0, значит,  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  — чисто мнимое число, при этом  $Q(\omega) < 0$ . Найду АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{W(j\omega)^2} = \sqrt{\left(\frac{-jK}{\omega}\right)^2} = \frac{|K|}{\omega}.$$

Тогда ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \left(\frac{|K|}{\omega}\right)$$

Разложим логарифм:

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega.$$

ФЧХ же в этом случае будет определяться так:

$$\varphi(\omega) = \text{atan}2\left(\frac{-K}{\omega}, 0\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{C} = \frac{1}{314} \approx 0.0032 \Rightarrow W(s) = \frac{0.0032}{s}.$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega} = \frac{0.0032}{\omega}.$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left(\frac{0.0032}{\omega}\right).$$

## Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

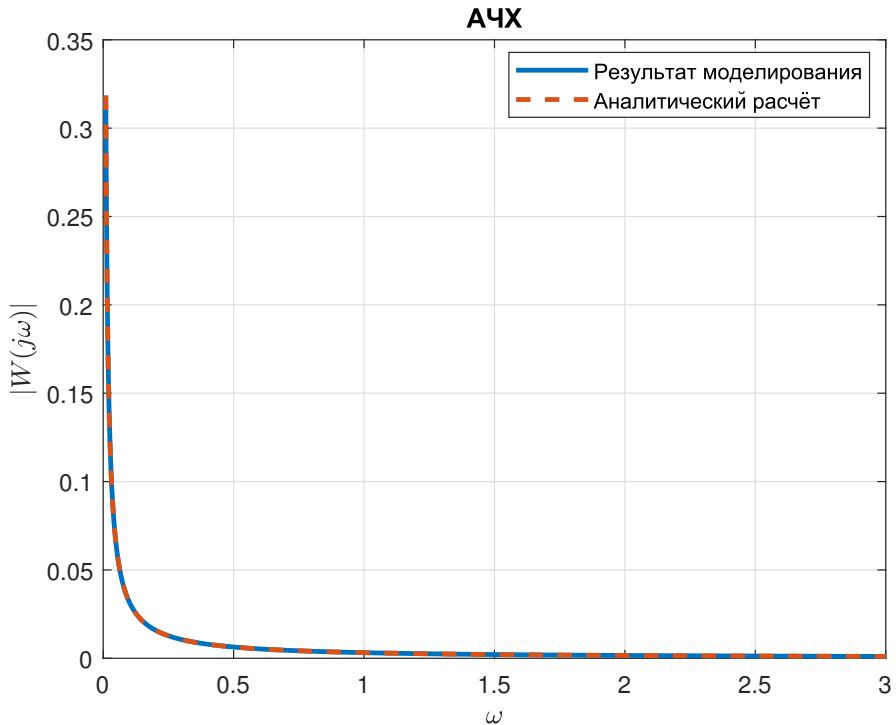


Рисунок 13: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

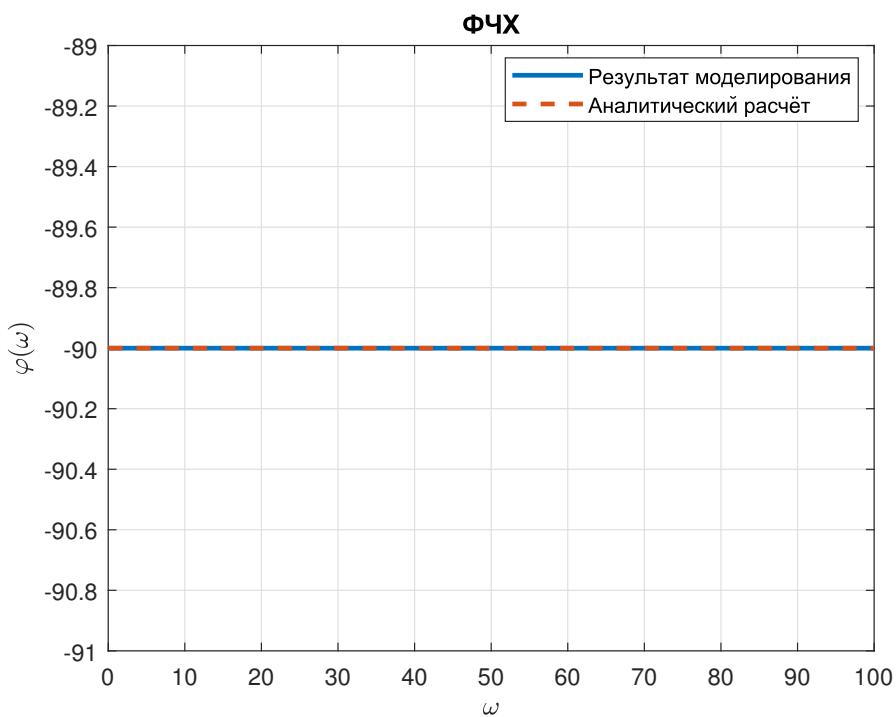


Рисунок 14: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

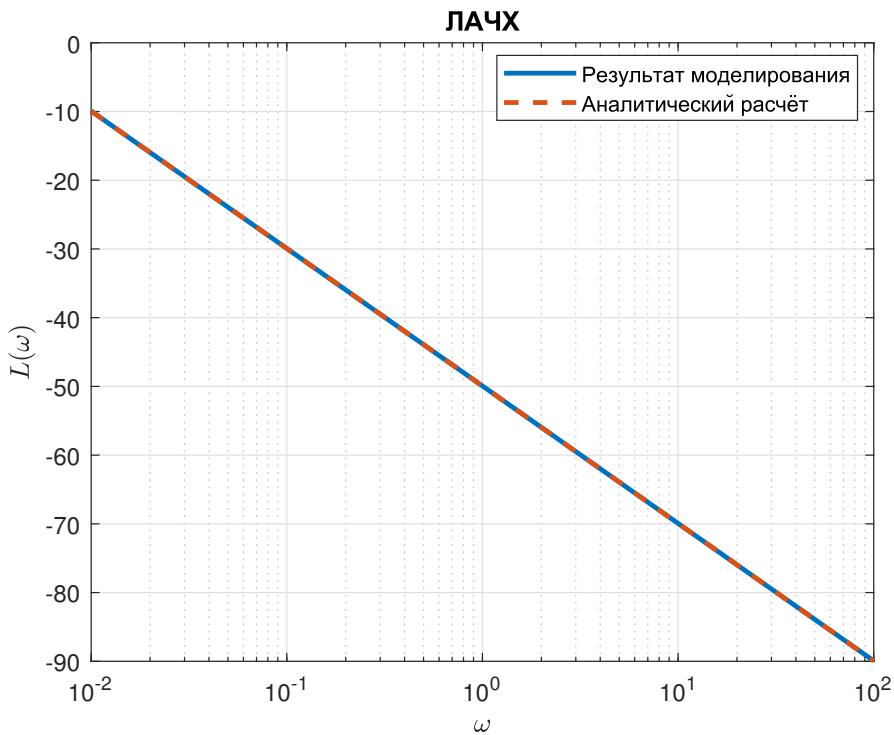


Рисунок 15: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

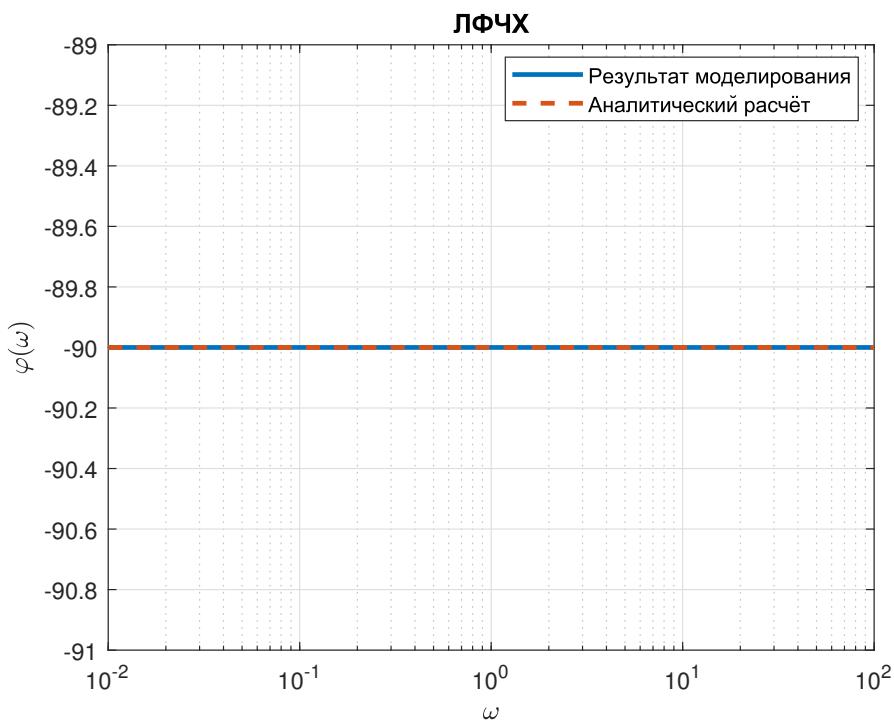


Рисунок 16: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного идеального интегрирующего звена.

### 1.3.2 Временные характеристики

Весовая функция для уравнения конденсатора:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s}\right\} = K \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = K$$

Переходная функция:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s^2}\right\} = K \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = Kt$$

Подставляя исходные данные для этого объекта, получаю:

$$w(t) = K = 0.0032,$$

$$y_{s.r.}(t) = Kt = 0.0032t.$$

### Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

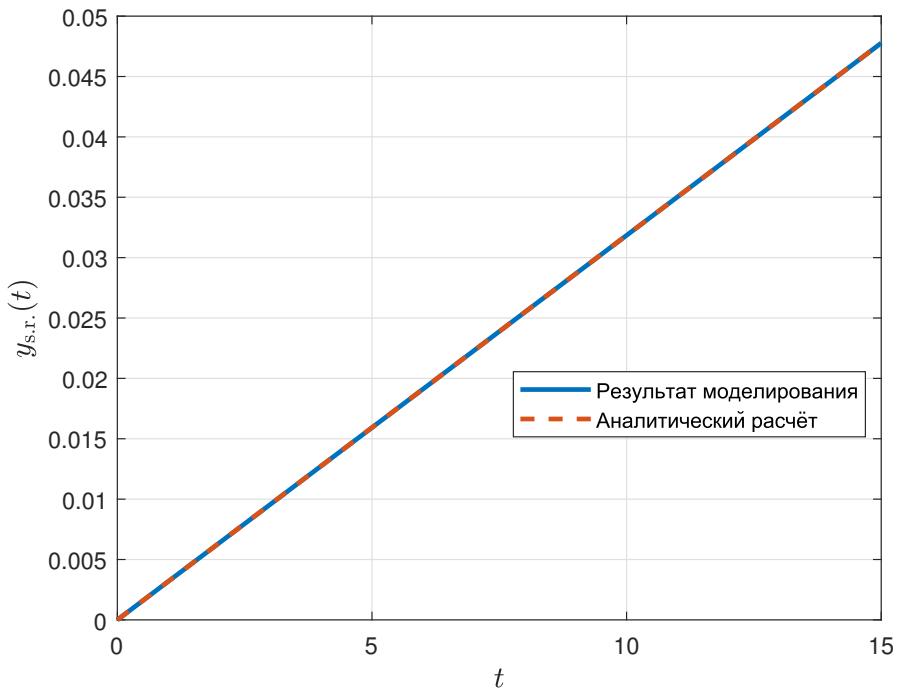


Рисунок 17: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

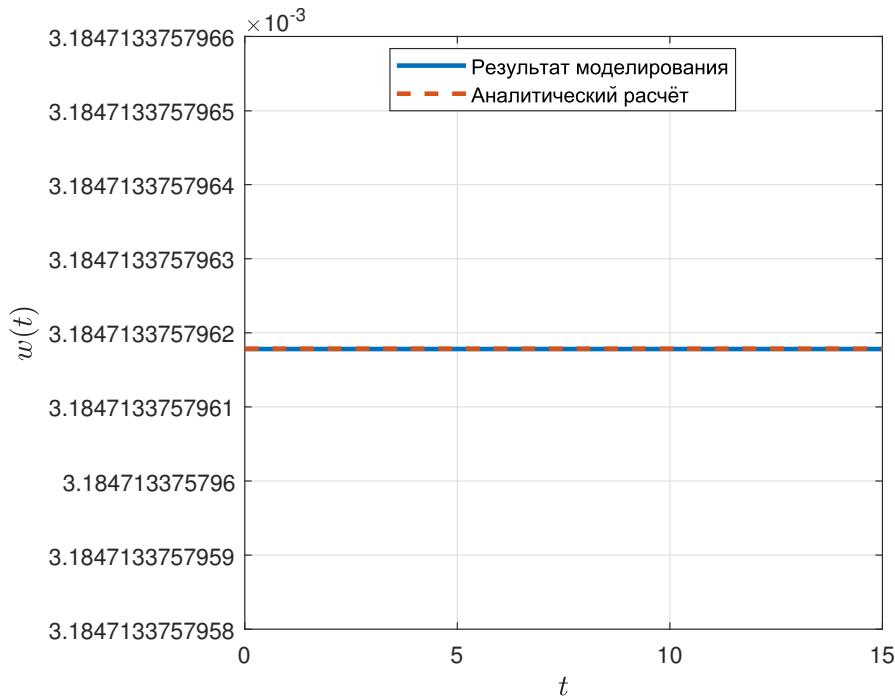


Рисунок 18: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного идеального интегрирующего звена.

#### 1.4 Пружинка

В задании рассматривается пружинный маятник, представленный на рисунке:

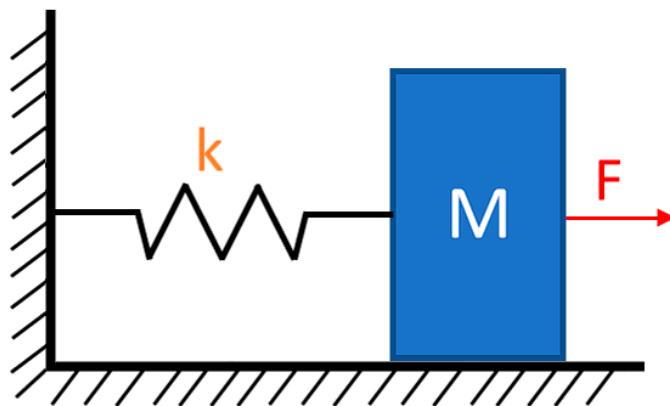


Рисунок 19: Пружинный маятник

Его движение задаётся следующими уравнениями:

$$F_{\text{упр}} = -kx, F = ma.$$

Входом этой системы считается некая внешняя сила  $F_{\text{ext}}$ , направленная соосно движению маятника, а выходом — траектория движения  $x(t)$ . Так как  $a = \ddot{x}$ :

$$F_{\text{ext}}(t) = m\ddot{x} + kx$$

Переходим к пространству изображений Лапласа:

$$ms^2 X(s) + kX(s) = F_{\text{ext}}(s)$$

$$X(s)(ms^2 + k) = F_{\text{ext}}(s)$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{F_{\text{ext}}(s)} = \frac{1}{ms^2 + k} = \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + 1}$$

В стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1}, K = \frac{1}{k}, T^2 = \frac{m}{k}$$

Получаем консервативное звено.

#### 1.4.1 Частотные характеристики

Найдём АЧХ и ФЧХ, перейдя к частотной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T^2(j\omega)^2 + 1} = \frac{K}{-T^2\omega^2 + 1}$$

В этом случае в качестве  $W(j\omega)$  получается вещественное число. Тогда АЧХ — просто его модуль:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \left| \frac{K}{-T^2\omega^2 + 1} \right|.$$

ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \left| \frac{K}{1 - T^2\omega^2} \right| = 20 \lg K - 20 \lg |1 - T^2\omega^2|.$$

Заметно, что АЧХ имеет разрыв в точке  $\omega_0 = \frac{1}{T}$ , и ФЧХ также не определена на этой частоте из-за наличия резонанса (знаменатель становится равен нулю). При этом частотная передаточная функция положительна, если  $0 < \omega \leq \omega_0$ , и отрицательна при  $\omega > \omega_0$ . Имея  $Q(\omega) = 0, P(\omega) = \frac{K}{-T^2\omega^2 + 1}$ , получаем:

$$\text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan \left( \frac{0}{P(\omega)} \right) = 0.$$

$$\begin{cases} 0, & 0 < \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\pi, & \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{k} = \frac{1}{324} \approx 0.0031, T = \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{35}{324}} \approx 0.3287 \Rightarrow W(s) = \frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1}$$

$$A(\omega) = \left| \frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1} \right| = \frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1}.$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1} \right)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega \leq 3.0423, \\ -\pi, & \omega > 3.0423. \end{cases}$$

## Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

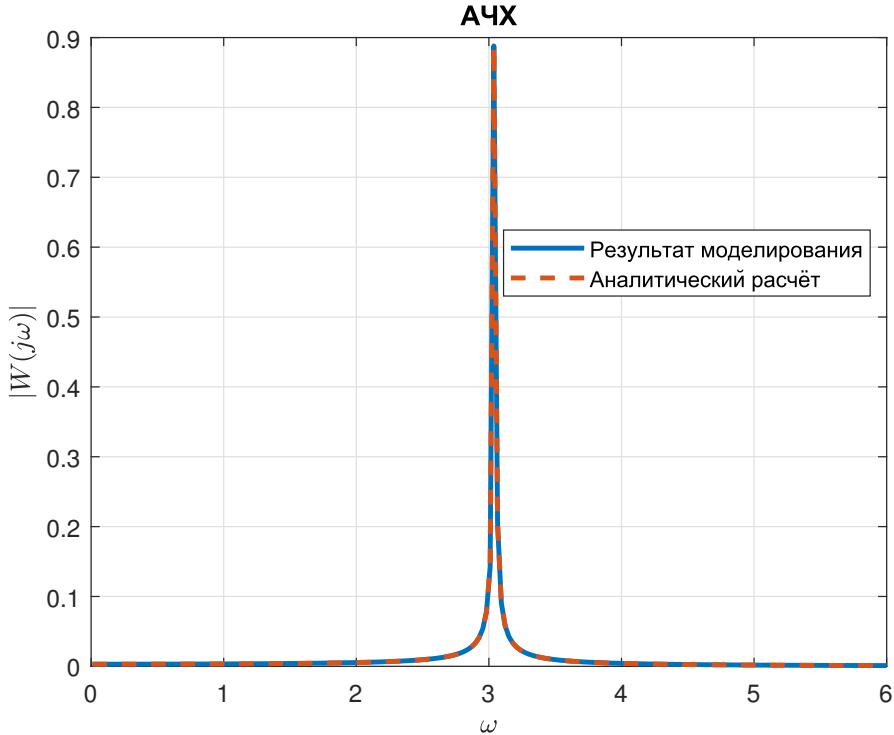


Рисунок 20: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

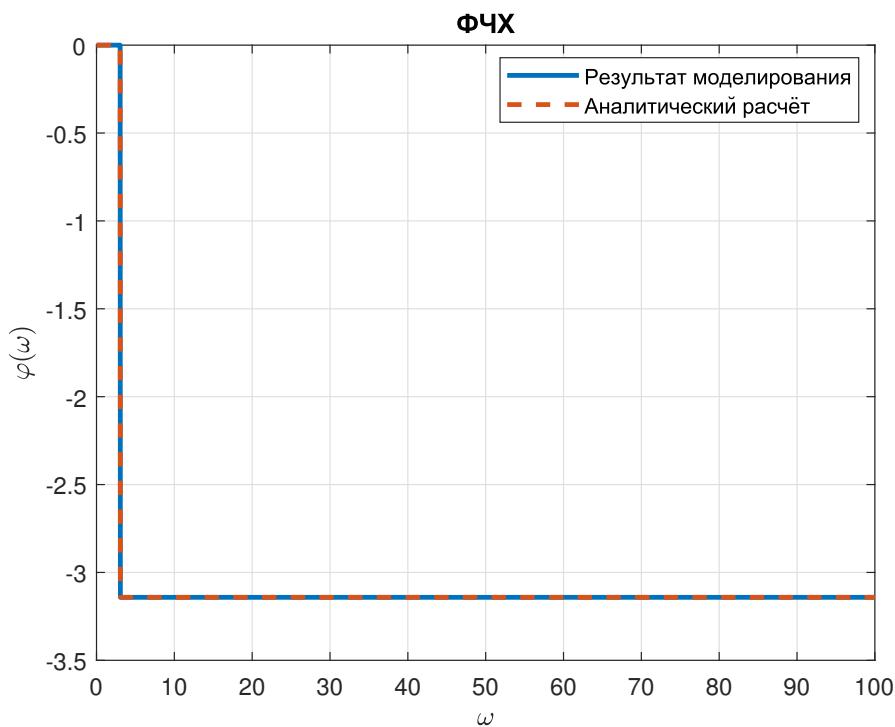


Рисунок 21: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

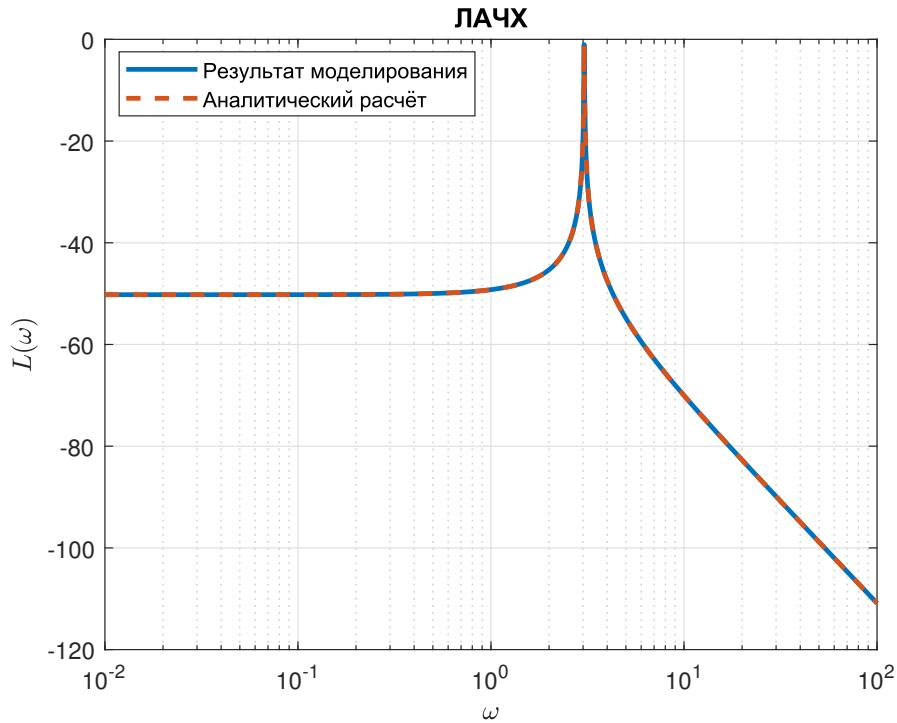


Рисунок 22: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

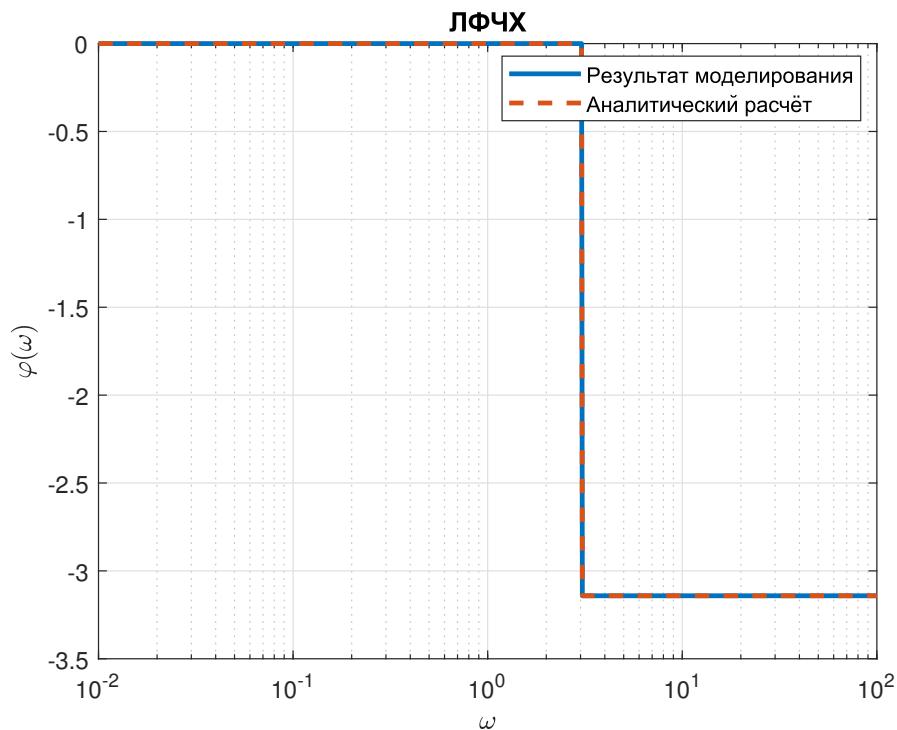


Рисунок 23: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного консервативного звена.

#### 1.4.2 Временные характеристики

Для поиска весовой функции сведу передаточную функцию до табличного значения:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1} = \frac{K}{T^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{1}{T^2}} = \frac{K}{T} \cdot \frac{1/T}{s^2 + (1/T)^2}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} = \sin(\omega t) \Rightarrow w(t) = \frac{K}{T} \sin\left(\frac{t}{T}\right)$$

Переходная функция:

$$w_{s.r}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(T^2 s^2 + 1)} \right\}$$

Разложу на элементарные дроби:

$$\frac{K}{s(T^2 s^2 + 1)} = K \left( \frac{1}{s} - s \frac{T^2}{T^2 s^2 + 1} \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1, \mathcal{L}^{-1} \left\{ s \frac{1}{s + (1/T)^2} \right\} = \cos\left(\frac{t}{T}\right), \text{ тогда:}$$

$$w_{s.r}(t) = K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{T^2 s}{T^2 s^2 + 1} \right\} = K \left( 1 - \cos\left(\frac{t}{T}\right) \right).$$

Подставлю исходные данные:

$$w(t) = \frac{K}{T} \sin\left(\frac{t}{T}\right) = 0.0094 \sin\left(\frac{t}{0.3287}\right).$$

$$y_{s.r.}(t) = K \left( 1 - \cos\left(\frac{t}{T}\right) \right) = 0.0031 \left( 1 - \cos\left(\frac{t}{0.3287}\right) \right)$$

## Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

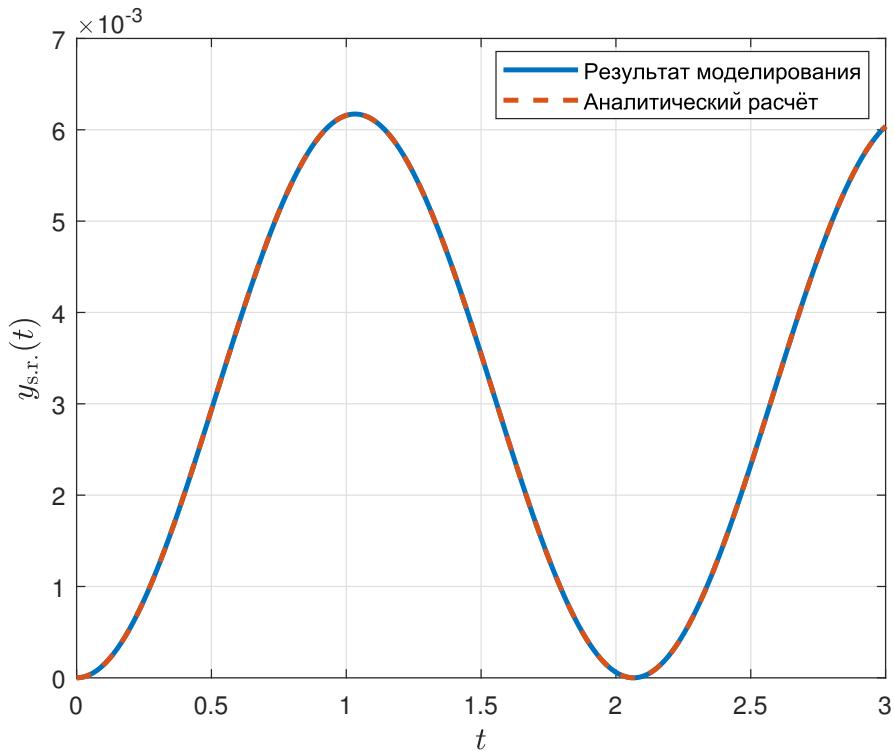


Рисунок 24: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

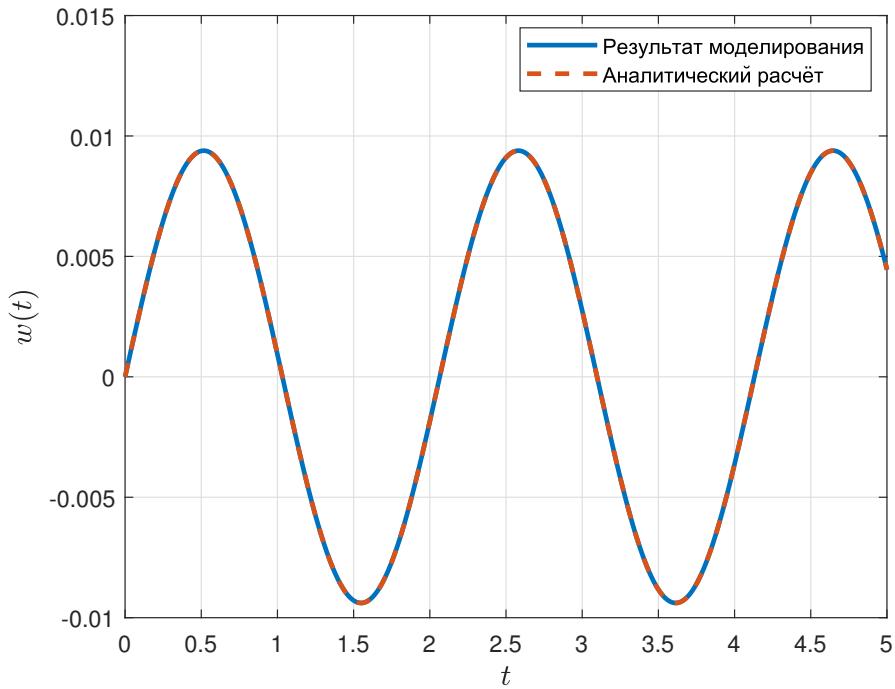


Рисунок 25: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного консервативного звена.

## 1.5 Что ты такое?

В задании рассматривается схема регулятора на операционном усилителе, представленная на рисунке:

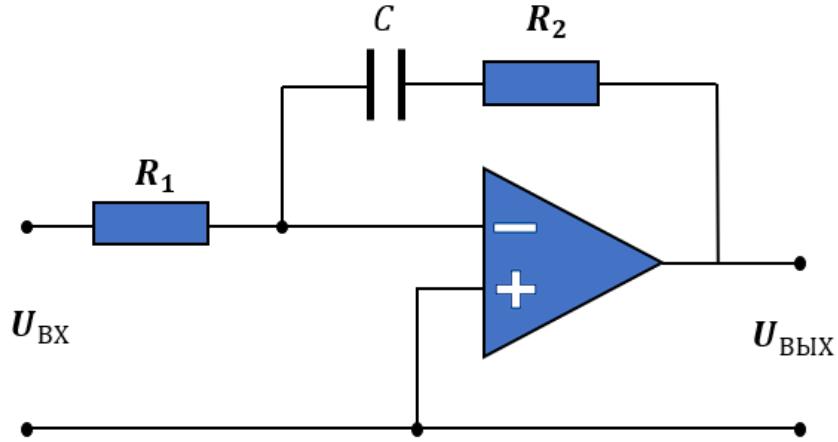


Рисунок 26: Принципиальная схема регулятора на операционном усилителе

Считая входом системы  $U_{\text{ВХ}}(t)$ , а выходом —  $U_{\text{ВЫХ}}(t)$ , можем рассмотреть преобразования, выполняемые над входным сигналом более подробно:

На входном резисторе сопротивлением  $R_1$  при подаче напряжения появляется ток  $I(t) = \frac{U_{\text{ВХ}}(t)}{R_1}$ . Далее этот ток попадает на конденсатор с отрицательной обратной связью ёмкостью  $C$ , и, зная что ток, проходящий через конденсатор такой ёмкости, равен  $I(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ , можем рассчитать напряжение на нём:

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I(x) dx.$$

Воспользуемся полученным ранее значением  $I(t) = \frac{U_{\text{BX}}(t)}{R_1}$  и примем начальное условие  $u(0) = 0$ , тогда  $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{U_{\text{BX}}(x)}{R_1} dx = \frac{1}{R_1 C} \int_0^t U_{\text{BX}}(x) dx$ . В пространстве изображений Лапласа по свойству интегрирования после прохождения конденсатора выходом будет являться  $Z(s) = \frac{1}{R_1 C s}$ . Далее сигнал идет на последовательно подключенный резистор  $R_2$ , и выходом по обратной связи будет являться  $W(s) = \frac{1}{R_1 C s} + R_2 \cdot I(s) = \frac{1}{R_1 C s} + \frac{R_2}{R_1} = \frac{1+R_2 C s}{R_1 C s}$ .

Получается изодромное звено. Так как передаточная функция этого регулятора состоит из двух слагаемых, интегрирующего  $\frac{1}{R_1 C s}$  и пропорционального  $\frac{R_2}{R_1}$ , то регулятор пропорционально-интегральный (ПИ).

Передаточная функция объекта найдена, можно привести её к стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{1+R_2 C s}{R_1 C s} = \frac{1}{R_1 C} \frac{R_2 C s + 1}{s} = \frac{K(T s + 1)}{s}, K = \frac{1}{R_1 C}, T = R_2 C.$$

### 1.5.1 Частотные характеристики

Для нахождения АЧХ и ФЧХ переведу уравнение в частотную область:

$$W(s) = \frac{K(T s + 1)}{s} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K(T(j\omega) + 1)}{(j\omega)}$$

Домножу числитель и знаменатель на сопряженное:

$$W(j\omega) = \frac{K(-T(j\omega)^2 - (j\omega))}{-(j\omega)(j\omega)} = \frac{KT\omega^2 - jK\omega}{\omega^2} = \frac{KT\omega^2}{\omega^2} + j \frac{-K\omega}{\omega^2} = KT + j \frac{-K}{\omega}$$

Пусть  $P(\omega) = KT$ ,  $Q(\omega) = -\frac{K}{\omega}$ . Тогда АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \sqrt{K^2 T^2 + \frac{K^2}{\omega^2}} = K \sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}}$$

ЛАЧХ определяется как:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \left( K \sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}} \right) \\ &= 20 \lg K + 20 \lg \left( \sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}} \right) = 20 \lg K + 10 \lg \left( T^2 + \frac{1}{\omega^2} \right). \end{aligned}$$

Также вычислю и ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \text{atan2}\left(-\frac{K}{\omega}, KT\right)$$

$K = \frac{1}{R_1 C} > 0$ , так как сопротивление резистора и ёмкость конденсатора — величины положительные.  $T = R_2 C > 0$  по той же причине, а значит,  $Q(\omega) = -\frac{K}{\omega} < 0 \forall \omega > 0$ , и  $P(\omega) = KT > 0$ . Следовательно,  $W(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  всегда расположено во втором квадранте. В этом случае  $\text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$ . Тогда:

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \arctan\left(\frac{-\frac{K}{\omega}}{KT}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{T\omega}\right) = \arctan\left(\frac{-1}{T\omega}\right) = \arctan\left(\frac{1}{T\omega}\right).$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{R_1 C} = \frac{1}{6427 \cdot 314} \approx 4.955 \cdot 10^{-7}, T = R_2 C = 19282 \cdot 314 = 6054548 \Rightarrow W(s) = \frac{4.955 \cdot 10^{-7} (6054548 s + 1)}{s}.$$

$$A(\omega) = K \sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}} = 4.955 \cdot 10^{-7} \sqrt{6054548^2 + \frac{1}{\omega^2}}.$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left( 4.955 \cdot 10^{-7} \sqrt{6054548^2 + \frac{1}{\omega^2}} \right)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \left( \frac{1}{6054548\omega} \right).$$

### Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

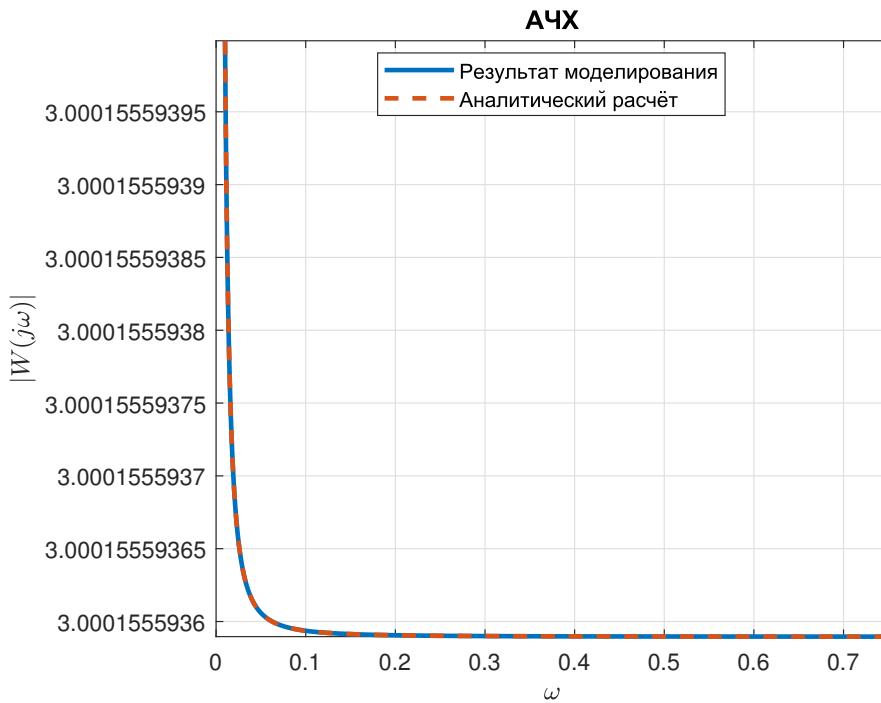


Рисунок 27: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

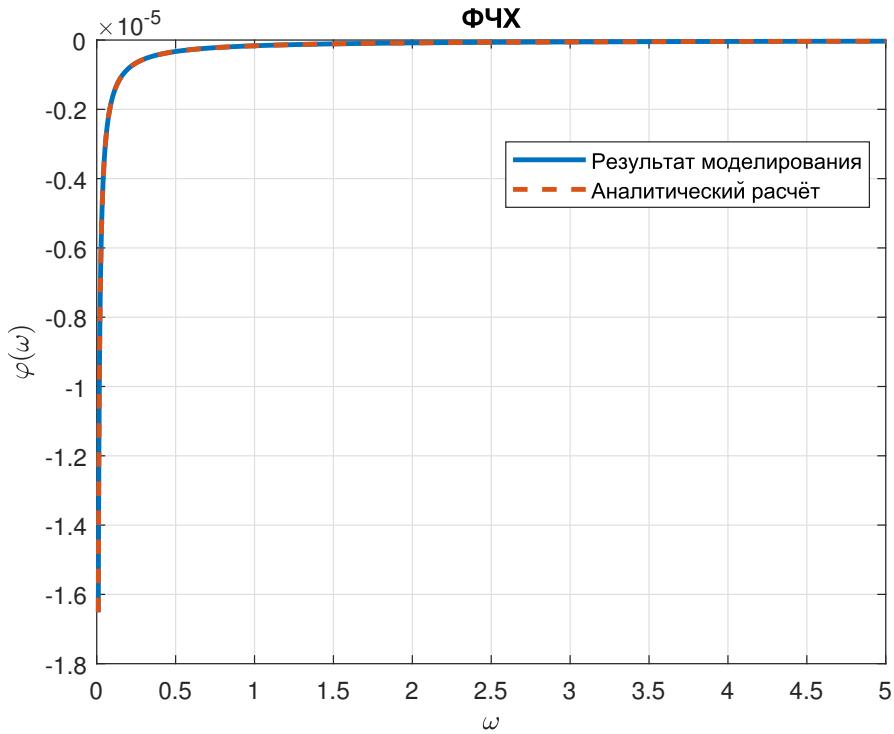


Рисунок 28: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

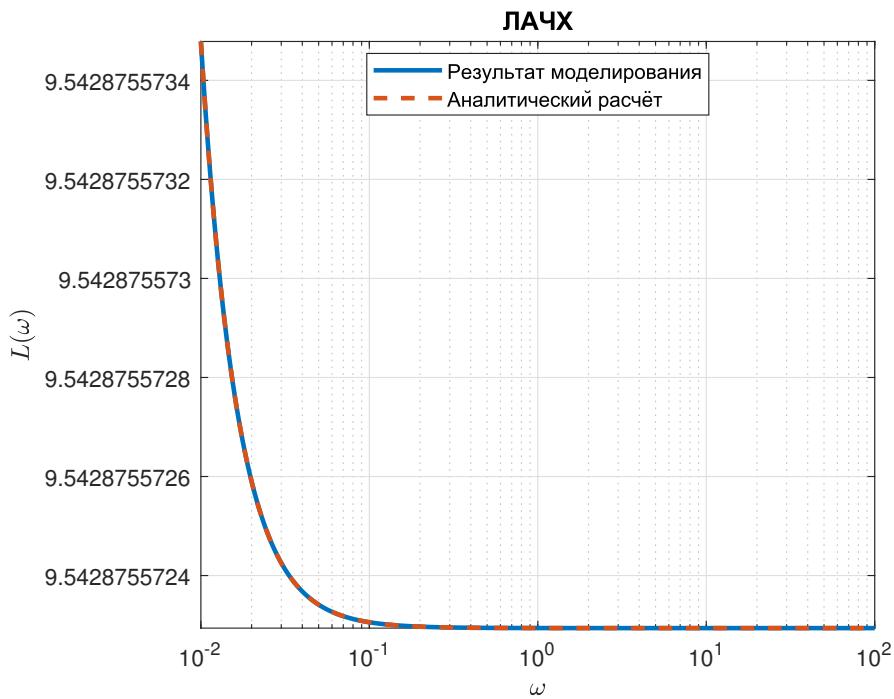


Рисунок 29: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

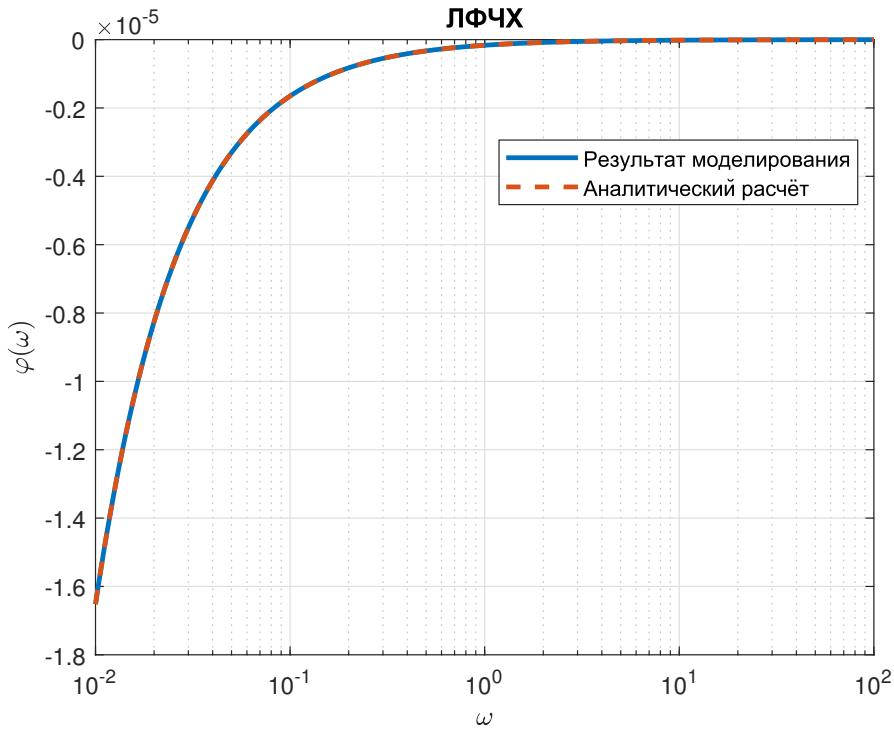


Рисунок 30: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного изодромного звена.

### 1.5.2 Временные характеристики

Разложу передаточную функцию для удобного нахождения весовой функции:

$$W(s) = \frac{K(Ts + 1)}{s} = KT + \frac{K}{s}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = KT\delta(t) + K$$

Передаточная функция  $y_{s.r.}(t)$  всё также является реакцией системы на единичный скачок, образ Лапласа которого —  $\frac{1}{s}$ :

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$$

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{K(Ts + 1)}{s^2} = K\left(\frac{T}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$ ,  $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = t$ , следовательно:

$$y_{s.r.}(t) = K(T + t)$$

В очередной раз подставлю исходные данные и найду характеристики для объекта с ними:

$$w(t) = KT\delta(t) + K = 3.001\delta(t) + 4.955 \cdot 10^{-7},$$

$$y_{s.r.}(t) = 3.001 + 4.955 \cdot 10^{-7}t.$$

## Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

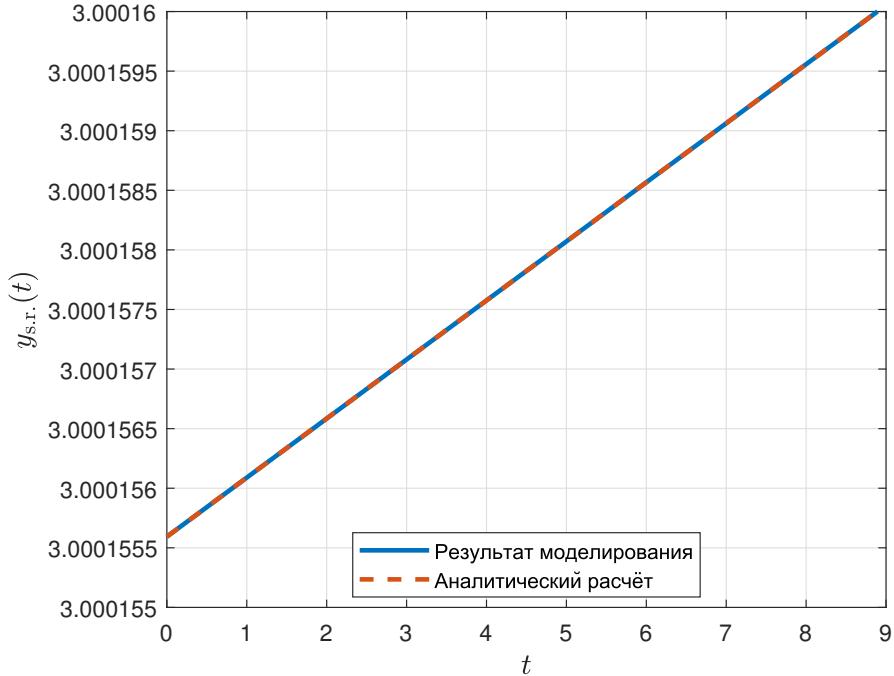


Рисунок 31: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

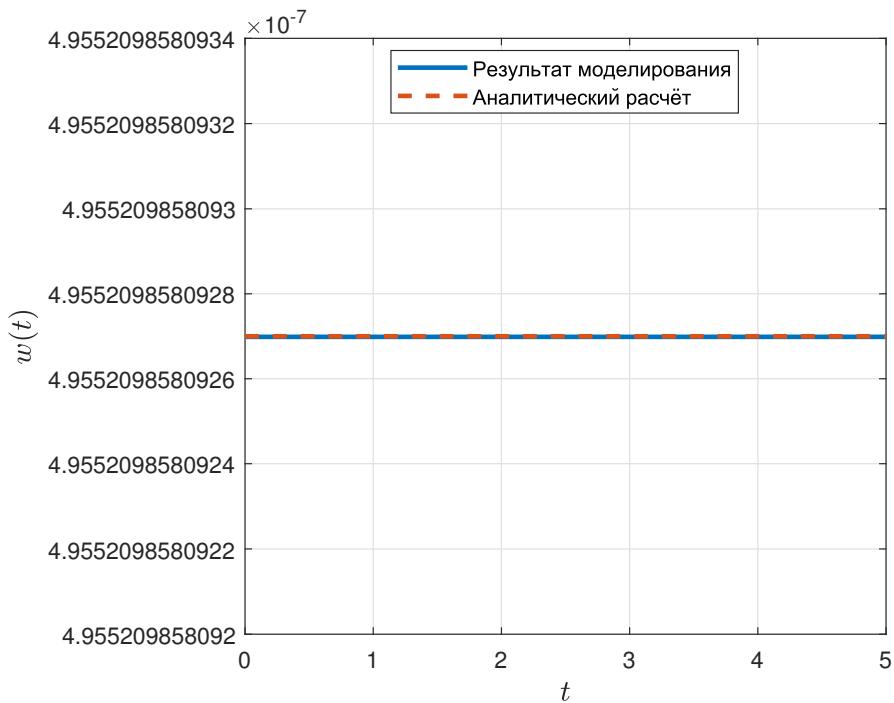


Рисунок 32: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного изодромного звена.

## 2 Вывод по работе

В ходе работы я ознакомился с основными типовыми звеньями, их частотными и временными характеристиками, научился вычислять их аналитически, проверил полученные результаты программным моделированием.

## 3 Приложение А. Код для выполнения заданий

### Листинг 1. Код для выполнения заданий

```

1 clear all;
2 close all;
3
4 [~, scriptName] = fileparts(mfilename('fullpath'));
5 if ~isfolder(scriptName)
6     mkdir(scriptName);
7 end
8
9 km = 0.3612;
10 ke = 0.3612;
11 J = 0.0031;
12 R = 4.7237;
13 L = 1.0567;
14
15 N = 1000;
16 w = logspace(-2, 2, N); % от 0.01 до 100 рад/с
17 s = 1j * w;
18
19 t_final = 15; % время моделирования
20 t = linspace(0, t_final, 1000);
21
22 % K = 1 / ke;
23 % T = (J * R) / (ke * km);
24 % A = K ./ sqrt((1 + (T.*w).^2));
25 % L = 20*log10(K) - 10*log10(1 + (T.*w).^2);
26 % phi = atan2((( -K * T) .* w) ./ (1 + (T.*w).^2), (K) ./ (1 + (T.*w).^2));
27 % phi = rad2deg(phi);
28 % num = K;
29 % den = [T, 1];
30 % sys = tf(num, den) % дпт
31 % [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
32 % mag = squeeze(mag);
33 % phase = squeeze(phase);
34 % y_imp_native = (K / T) .* exp((-1/T) .* t);
35 % y_step_native = K * (1 - exp(-t .* (1/T)));
36 % [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
37 % [y_step, t_step] = step(sys, t);
38
39
40 % K = 1 / ke;
41 % T = sqrt((J) / ke * km);
42 % xi = (T * R) / 2 * L;
43 % A = K * sqrt((T^2 * w.^2 .* (4*xi^2 - 2 + T^2 * w.^2) + 1) ./ ((1 - T^2 * w.^2).^2 + (2*T*xi*w).^2));
44 % L = 20*log10(A);
45 % phi = zeros(size(w));
46 % idx1 = w < 1/T;
47 % idx2 = w > 1/T;
48 % idx_eq = abs(w - 1/T) < 1e-12;
49 % phi(idx1) = -atan((2*T*xi*w(idx1)) ./ (1 - T^2 * w(idx1).^2));
50 % phi(idx_eq) = -pi/2;
51 % phi(idx2) = -atan((2*T*xi*w(idx2)) ./ (1 - T^2 * w(idx2).^2)) - pi;
52 % phi = rad2deg(phi);
53 %
54 % num = K;
55 % den = [T^2, 2*T*xi, 1];
56 % sys = tf(num, den) % DPT 2.0
57 % [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
58 % mag = squeeze(mag);
59 % phase = squeeze(phase);

```

```

60 % % W = K ./ (T^2 * s.^2 + 2*T*xi*s + 1); % DPT 2.0
61 % y_imp_native = (K / (T*sqrt(1-xi^2))) .* exp((-xi/T) .* t) .* sin(((sqrt(1-xi^2))/T).*t);
62 % y_step_native = K * (1 - exp(-(xi .* t)/T) .* ((xi ./ sqrt(1 - xi^2)) .* sin(t .* (sqrt(1 - xi^2)
   / T)) + cos(t .* (sqrt(1 - xi^2) / T)) ));
63 % [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
64 % [y_step, t_step] = step(sys, t);
65
66
67
68 % K = 1 / 314;
69 % A = K ./ w;
70 % L = 20 * log10(K) - 20 .* log10(w);
71 % phi = (-pi / 2) .* ones(size(w));
72 % phi = rad2deg(phi);
73 %
74 % num = K;
75 % den = [1, 0];
76 % sys = tf(num, den) % конденсируй-умножай
77 % [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
78 % mag = squeeze(mag);
79 % phase = squeeze(phase);
80 %
81 % % W = K ./ (s); % конденсируй-умножай
82 % y_imp_native = K .* ones(size(t));
83 % y_step_native = K .* t;
84 % [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
85 % [y_step, t_step] = step(sys, t);
86
87
88 % M = 35;
89 % k = 324;
90 % K = 1 / k;
91 % T = sqrt(M / k);
92 % A = abs(K ./ (-T^2 .* w.^2 + 1));
93 % L = 20 * log10(K) - 20 * log10(abs(1 - (T^2).*(w.^2)));
94 % phi = zeros(size(w));
95 % idx1 = w <= 1/T;
96 % idx2 = w > 1/T;
97 % phi(idx1) = 0;
98 % phi(idx2) = -pi;
99 % phi = rad2deg(phi);
100 %
101 % num = K;
102 % den = [T^2, 0, 1];
103 % sys = tf(num, den) % пружинка
104 % [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
105 % mag = squeeze(mag);
106 % phase = squeeze(phase);
107 %
108 % % W = K ./ T^2 * s.^2 + 1; % пружинка
109 % y_imp_native = (K / T) .* sin(t ./ T);
110 % y_step_native = K .* (1 - cos(t ./ T));
111 % [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
112 % [y_step, t_step] = step(sys, t);
113
114
115
116 R1 = 6427;
117 R2 = 19282;
118 C = 314;
119 K = 1 / (R1 * C);
120 T = R2 * C;
121 A = K .* sqrt(T^2 + 1./w.^2);
122 L = 20 * log10(K) + 10 * log10(T^2 + 1./w.^2);
123 phi = - atan(1./(T .* w));
124 phi = rad2deg(phi);
125
126 num = [K * T, K];
127 den = [1, 0];
128 sys = tf(num, den) % что ты такое
129 [mag, phase, wout] = bode(sys, w);

```

```

130 mag = squeeze(mag);
131 phase = squeeze(phase);
132
133 % W = K * (T * s + 1) ./ s; % что ты такое
134 u = zeros(size(t));
135 % u(1) = N;
136 y_imp_native = K * ones(size(t));
137 y_step_native = K*T + K .* t;
138 [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
139 [y_step, t_step] = step(sys, t);
140
141
142
143 impulse = figure;
144 plot(t, y_imp, LineWidth=1.4);
145 hold on;
146 plot(t, y_imp_native, '--', LineWidth=1.4);
147 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
148 xlabel('$t$', Interpreter='latex', FontSize=13);
149 ylabel('$w(t)$', Interpreter='latex', FontSize=13);
150 grid on;
151 xlim([0, 5])
152 ylim([-0.01, 0.015])
153 saveas(impulse, string(scriptName) + '\impulse.eps', 'epsc')
154
155 step = figure;
156 plot(t, y_step, LineWidth=1.4);
157 hold on;
158 plot(t, y_step_native, '--', LineWidth=1.4);
159 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
160 xlabel('$t$', Interpreter='latex', FontSize=13);
161 ylabel('$y_{\mathrm{s.r.}}(t)$', Interpreter='latex', FontSize=13);
162 % title('АЧХ');
163 grid on;
164 % xlim([0, 5])
165 % ylim([0, 3])
166 saveas(step, string(scriptName) + '\step.eps', 'epsc')
167
168 % АЧХ
169 achh = figure;
170 plot(w, mag, LineWidth=1.4);
171 hold on;
172 plot(w, A, '--', LineWidth=1.4);
173 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
174 xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');
175 ylabel('$|W(j\omega)|$', Interpreter='latex');
176 title('АЧХ');
177 grid on;
178 xlim([0, 0.75])
179 saveas(achh, string(scriptName) + '\achh.eps', 'epsc')
180
181 % ФЧХ
182 fchh = figure;
183 plot(w, phase, LineWidth=1.4);
184 hold on;
185 plot(w, phi, '--', LineWidth=1.4);
186 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
187 xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');
188 ylabel('$\varphi(\omega)$', Interpreter='latex');
189 title('ФЧХ');
190 % xlim([0, 5])
191 grid on;
192 saveas(fchh, string(scriptName) + '\fchh.eps', 'epsc')
193
194 %ЛАЧХ
195 lachh = figure;
196 semilogx(w, 20*log10(mag), LineWidth=1.4);
197 hold on;
198 semilogx(w, L, '--', LineWidth=1.4);
199 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
200 xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');

```

```
201 ylabel('$L(\omega)$', Interpreter='latex');
202 title('ЛАЧХ');
203 grid on;
204 ylim([9.5, 10])
205 saveas(lachh, string(scriptName) + '\lachh.eps', 'epsc')
206
207 % ЛФЧХ
208 lfchh = figure;
209 semilogx(w, phase, LineWidth=1.4);
210 hold on;
211 semilogx(w, phi, '--', LineWidth=1.4);
212 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
213 xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');
214 ylabel('$\varphi(\omega)$', Interpreter='latex');
215 title('ЛФЧХ');
216 grid on;
217 saveas(lfchh, string(scriptName) + '\lfchh.eps', 'epsc')
```

Листинг 1: Код для построения графиков характеристик для всех рассмотренных объектов