

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ  
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №5

**ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ**

Студент: Заводин Е.Ю.

Лин САУ R23 бак 1.1.1

Преподаватели: Перегудин А.А.

Пашенко А.В.

Санкт-Петербург

2025

## Содержание

<b>1</b>	<b>Задача исследования типовых динамических звеньев</b>	<b>3</b>
1.1	ДПТ	3
1.1.1	Частотные характеристики	4
1.1.2	Временные характеристики	7
1.2	ДПТ 2.0	8
1.2.1	Частотные характеристики	10
1.2.2	Временные характеристики	13
1.3	Конденсируй-умножай	16
1.3.1	Частотные характеристики	16
1.3.2	Временные характеристики	19
1.4	Пружинка	21
1.4.1	Частотные характеристики	22
1.4.2	Временные характеристики	24
1.5	Что ты такое?	26
1.5.1	Частотные характеристики	27
1.5.2	Временные характеристики	30
<b>2</b>	<b>Вывод по работе</b>	<b>32</b>
<b>3</b>	<b>Приложение А. Код для выполнения заданий</b>	<b>32</b>

# 1 Задача исследования типовых динамических звеньев

В работе исследуются реальные объекты — находятся их передаточные функции, сопоставляются с типовыми звеньями, временные и частотные характеристики объектов моделируются и сравниваются с конкретными теоретическими для найденных типовых звеньев.

Временными характеристиками системы являются её весовая и переходная функции, то есть ответ системы соответственно на дельта-функцию в качестве входного воздействия и ответ на единичный скачок, тогда весовая функция может быть определена по следующей формуле:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W(s) \cdot \mathcal{L}\{\delta(t)\}\} = \mathcal{L}^{-1} \{W(s) \cdot 1\} = \mathcal{L}^{-1} \{W(s)\},$$

где  $W(s)$  — передаточная функция системы.

Тогда переходная функция, являющаяся ответом системы на единичный скачок, определяется следующей формулой:

$$y_{s.r.} = \mathcal{L}^{-1} \{W(s) \cdot \mathcal{L}\{1\}\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ W(s) \cdot \frac{1}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}.$$

В качестве частотных характеристик рассматриваются АЧХ, ФЧХ, ЛАЧХ, ЛФЧХ. Формулы для расчета АЧХ  $A(\omega)$  и ФЧХ  $\varphi(\omega)$  следующие:

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2}, \quad \varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)),$$

где  $P(\omega), Q(\omega)$  — соответственно действительная и мнимая части частотной передаточной функции  $W(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$ .

Выражение для ЛФЧХ ничем не будет отличаться от такового для ФЧХ, но ЛАЧХ отлична от АЧХ:

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{A(\omega)}{A_0} \right), A_0 = 1.$$

## 1.1 ДПТ

Рассмотрим ДПТ независимого возбуждения, задаваемый формулами

$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon_i}{R}, \varepsilon_i = -k_e \omega.$$

Считая  $U$  входом,  $\omega$  — выходом, сведу формулы к одному линейному дифференциальному уравнению:

$$J\dot{\omega} = k_m \frac{U - k_e \omega}{R} = \frac{U k_e}{R} - \frac{k_m k_e \omega}{R}$$

$$J\dot{\omega} + \frac{k_m k_e \omega}{R} = \frac{k_m U}{R}$$

$$\frac{JR}{k_m} \dot{\omega} + k_e \omega = U$$

$$\frac{\omega}{U} = W(s) = \frac{1}{\frac{JR}{k_m} s + k_e} = \frac{1}{k_e} \frac{1}{\frac{JR}{k_e k_m} s + 1}$$

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1}, T = \frac{JR}{k_e k_m}, K = \frac{1}{k_e}$$

Получил передаточную функцию в стандартизированном виде, соответствующую реальному усилительному звену.

### 1.1.1 Частотные характеристики

Выделю действительную и мнимую части полученной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{Ts + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T(j\omega) + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + jT\omega} \cdot \frac{1 - jT\omega}{1 - jT\omega} = \frac{K(1 - jT\omega)}{1 + (T\omega)^2} = \frac{K}{1 + (T\omega)^2} + j \frac{-KT\omega}{1 + (T\omega)^2}$$

Пусть  $P(\omega) = \frac{K}{1 + (T\omega)^2}$ ,  $Q(\omega) = \frac{-KT\omega}{1 + (T\omega)^2}$ . Рассчитаю АЧХ такой передаточной функции:

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \sqrt{\frac{K^2 + (KT\omega)^2}{(1 + (T\omega)^2)^2}} = \frac{K\sqrt{1 + (T\omega)^2}}{1 + (T\omega)^2} = \frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}$$

Тогда ЛАЧХ будет выглядеть так:

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} \right)$$

Разложим логарифм:

$$L(\omega) = 20 \lg(K) - 10 \lg(1 + (T\omega)^2).$$

Фазовая частотная характеристика может быть найдена по следующей формуле:

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)).$$

У двигателя постоянного тока активное сопротивление обмоток ротора  $R$ , момент инерции ротора  $J$  и конструктивные постоянные  $k_e, k_m$  при реальном моделировании являются положительными, также буду считать, что  $\omega$  принимает только неотрицательные значения (в отрицательной области для вещественной функции результат преобразования Лапласа будет симметричен результату в положительной области). Исходя из этого, коэффициент усиления и постоянная времени

$$T = \frac{JR}{k_e k_m} > 0, K = \frac{1}{k_e} > 0.$$

Тогда числитель действительной части передаточной функции всегда положителен, как и знаменатель, а значит,  $P(\omega) > 0$ . Числитель мнимой части передаточной функции же всегда отрицателен, а знаменатель всегда положителен, следовательно,  $Q(\omega) < 0$ . Исходя из этих соображений, комплексное число  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  находится в четвёртом квадранте, а значит, вместо  $\text{atan2}(Q(\omega), P(\omega))$  можем использовать  $\arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right)$ :

$$\arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{-KT\omega}{1 + (T\omega)^2}}{\frac{K}{1 + (T\omega)^2}}\right) = \arctan\left(\frac{-KT\omega}{K}\right) = \arctan(-T\omega) = -\arctan T\omega$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{k_e} = \frac{1}{0.3612} \approx 2.7685, T = \frac{JR}{k_e k_m} = \frac{0.0031 \cdot 4.7231}{0.3612 \cdot 0.3612} \approx 0.1122 \Rightarrow W(s) = \frac{2.7685}{0.1122s + 1}$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}} = \frac{2.7685}{\sqrt{1 + (0.1122\omega)^2}}$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{2.7685}{\sqrt{1 + (0.1122\omega)^2}} \right)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan(0.1122\omega).$$

## Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

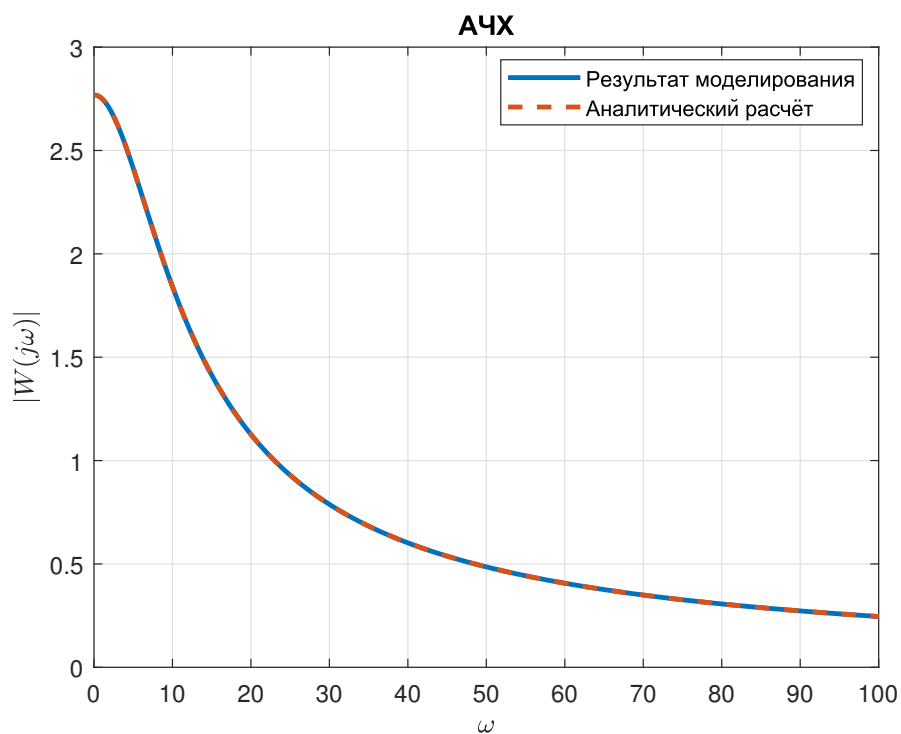


Рисунок 1: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

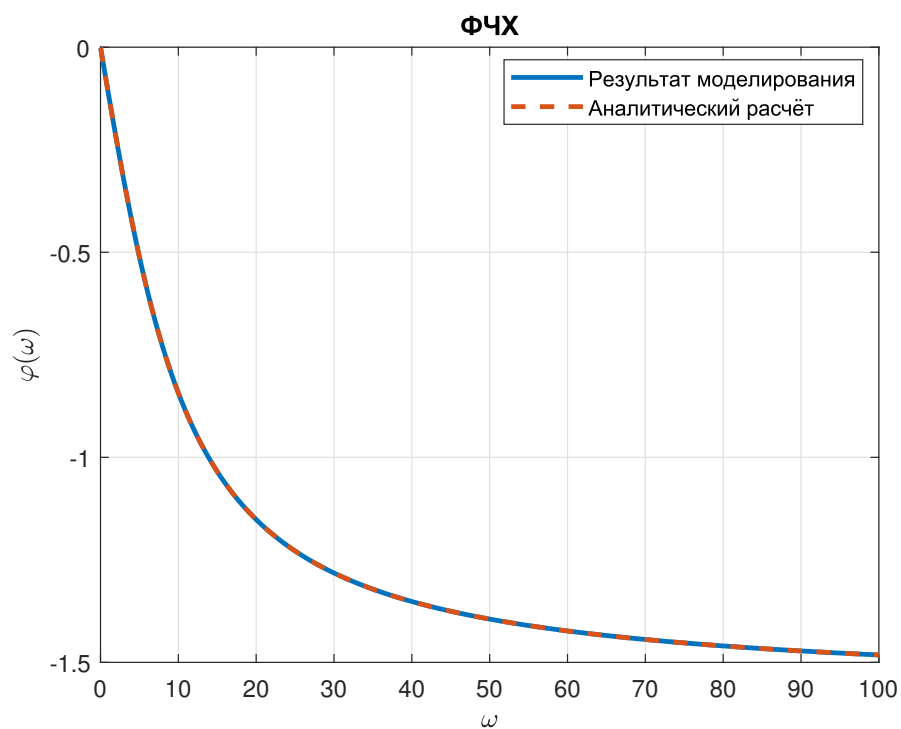


Рисунок 2: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

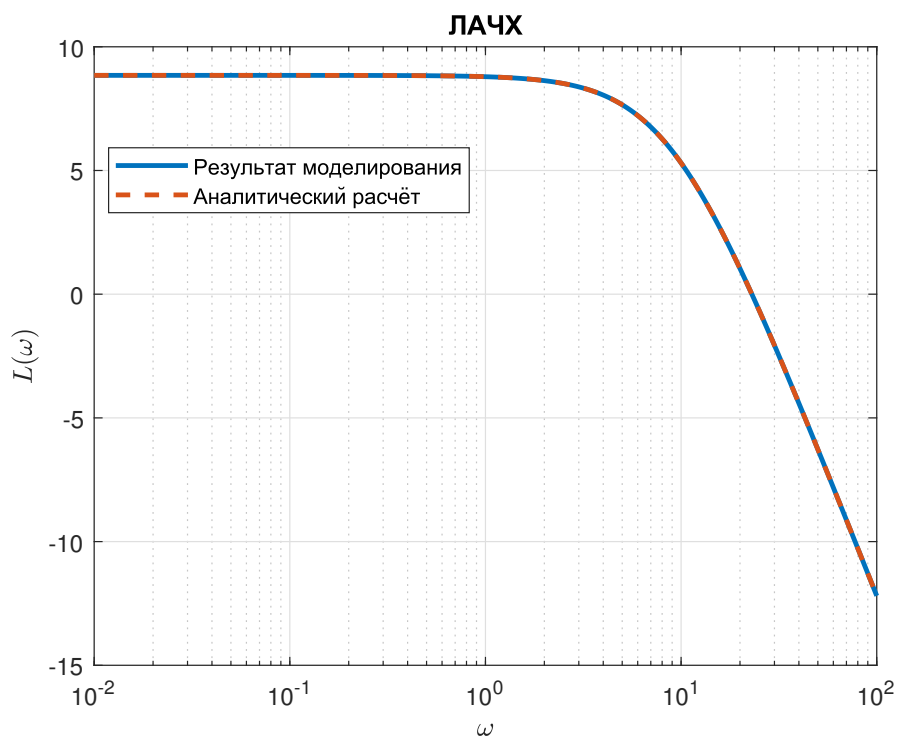


Рисунок 3: Сравнение ЛАЧХ протемоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

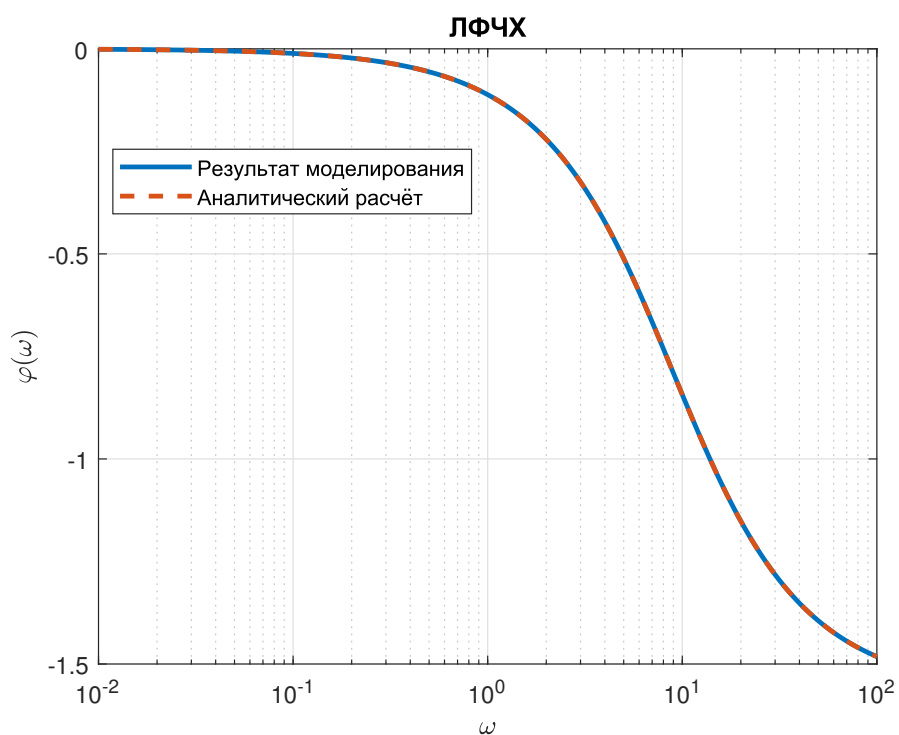


Рисунок 4: Сравнение ЛФЧХ протемоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного реального усилительного звена.

### 1.1.2 Временные характеристики

Весовая функция объекта:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{Ts+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K/T}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\}$$

Воспользуемся табличным преобразованием:

$$\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\} = \frac{1}{s-\alpha} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-\alpha}\right\} = e^{\alpha t}$$

Тогда, при  $\alpha = -\frac{1}{T}$ :

$$w(t) = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T}e^{-\frac{1}{T}t}.$$

Переходная функция:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\frac{W(s)}{s} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s(Ts+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K/T}{s^2+s/T}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s/T}\right\} = \frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s+1/T}\right\}.$$

По свойству интегрирования:

$$\frac{K}{T}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\frac{1}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T}\int_{0^-}^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\}.$$

Воспользуемся уже вычисленным при нахождении весовой функции значением:

$$\frac{K}{T}\int_{0^-}^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1/T}\right\} = \frac{K}{T}\int_{0^-}^t e^{-\frac{1}{T}x}dx.$$

Рассмотрим неопределенный интеграл  $\int e^{-\frac{1}{T}x}dx$ :

$$F(x) = \int e^{-\frac{1}{T}x}dx = -Te^{-\frac{x}{T}} + C.$$

Первообразная найдена, можем посчитать определенный интеграл:

$$y_{s.r.}(t) = \frac{K}{T}\int_{0^-}^t e^{-\frac{1}{T}x}dx = \frac{K}{T}(F(t) - F(0^-)) = \frac{K}{T}(-Te^{-\frac{t}{T}} + Te^0) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}).$$

Подставлю исходные данные для своего варианта в полученные характеристики:

$$K = 2.7685, T = 0.1122 \Rightarrow w(t) = \frac{K}{T}e^{-\frac{1}{T}t} = \frac{2.7685}{0.1122}e^{-\frac{1}{0.1122}t} = 24.6747e^{-8.9127t}$$

$$y_{s.r.} = K(1 - e^{-\frac{t}{T}}) = 2.7685(1 - e^{-8.9127t}).$$

### Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

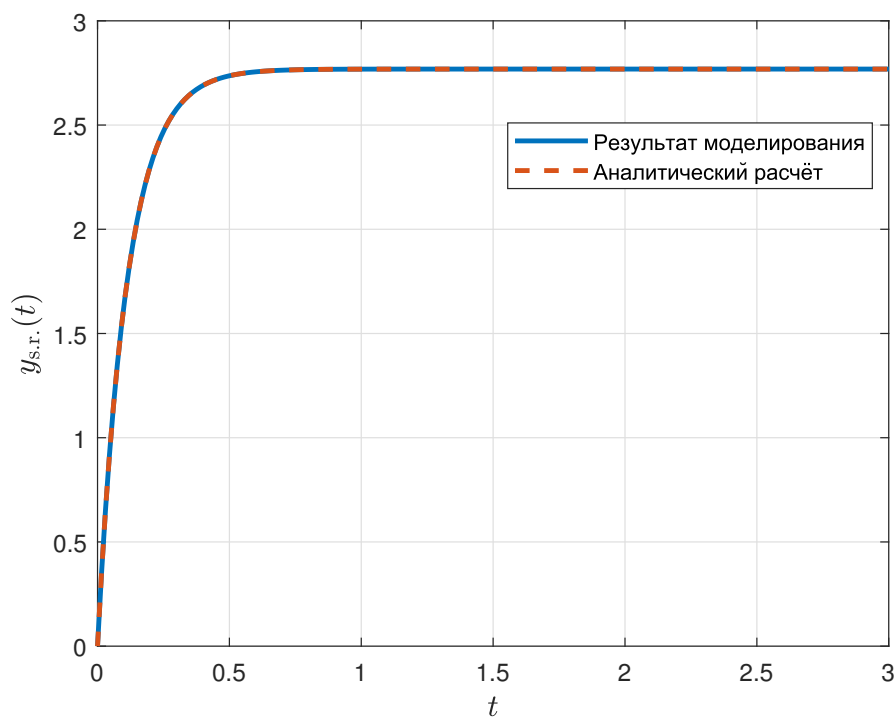


Рисунок 5: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

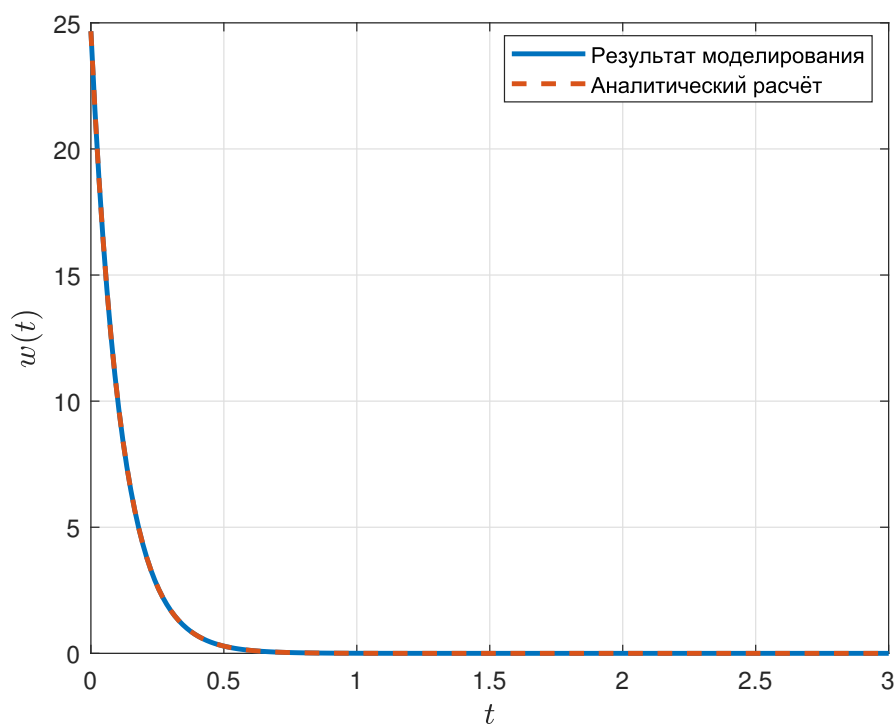


Рисунок 6: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного реального усилительного звена.

## 1.2 ДПТ 2.0

Рассмотрим уравнения для полной модели ДПТ независимого возбуждения:



$$J\dot{\omega} = M, M = k_m I, I = \frac{U + \varepsilon}{R}, \varepsilon = \varepsilon_i + \varepsilon_s, \varepsilon_i = -k_e \omega, \varepsilon_s = -L\dot{I}.$$

Считая  $U$  входом,  $\omega$  — выходом, сведём формулы к одному линейному дифференциальному уравнению:

$$J\dot{\omega} = k_m \frac{U - k_e \omega - L\dot{I}}{R} = \frac{k_m}{R} U - \frac{k_m k_e \omega}{R} - \frac{L\dot{I} k_m}{R} \Bigg| \cdot \frac{R}{k_m}$$

$$\frac{JR}{k_m} \dot{\omega} + k_e \omega + L\dot{I} = U$$

$$J\dot{\omega} = k_m I \Rightarrow I = \frac{J\dot{\omega}}{k_m}, \dot{I} = \frac{J\ddot{\omega}}{k_m}$$

$$\frac{JL}{k_m} \ddot{\omega} + \frac{JR}{k_m} \dot{\omega} + k_e \omega = U \Leftrightarrow \ddot{\omega} + \frac{R}{L} \dot{\omega} + \frac{k_e k_m}{J} \omega = \frac{k_m}{J} U$$

Переведу получившееся уравнение в пространство изображений Лапласа:

$$s^2 \Omega(s) + \frac{R}{L} s \Omega(s) + \frac{k_e k_m}{J} \Omega(s) = \frac{k_m}{J} U(s)$$

$$W(s) = \frac{U(s)}{\Omega(s)} = \frac{\frac{k_m}{J}}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{k_e k_m}{J}} = \frac{\frac{1}{k_e}}{\frac{J}{k_e k_m} s^2 + \frac{RJ}{k_e k_m L} s + 1}$$

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}, K = \frac{1}{k_e}, T = \sqrt{\frac{J}{k_e k_m}}, \xi = \frac{TR}{2L}$$

Получена передаточная функция в стандартизированном виде. Для определения конкретного типа звена объекта найду дискриминант знаменателя передаточной функции объекта, подставив параметры  $T, \xi$  в соответствии со своим вариантом:

$$T = \sqrt{\frac{J}{k_e k_m}} = \sqrt{\frac{0.0031}{0.3612 \cdot 0.3612}} \approx 0.1541,$$

$$\xi = \frac{TR}{2L} = \frac{0.154 \cdot 4.7237}{2 \cdot 1.0567} \approx 0.3445.$$

Тогда,

$$D = (2T\xi)^2 - 4(T^2) = (2 \cdot 0.1541 \cdot 0.3445)^2 - 4 \cdot 0.1541^2 = (0.0858)^2 - 4 \cdot 0.0237 \approx -0.009$$

Получается что корни знаменателя комплексно-сопряженные, а значит, функция соответствует колебательному звену. Для выделения действительной и мнимой части сперва перейду к частотной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T^2 (j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1}$$

$$W(j\omega) = \frac{K(T^2 (j\omega)^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(T^2 (j\omega)^2 + 2T\xi(j\omega) + 1)(T^2 (j\omega)^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))} = \frac{K(-T^2 \omega^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(-T^2 \omega^2 + 1 + j2T\xi\omega)(-T^2 \omega^2 + 1 - j2T\xi\omega)} =$$

$$= \frac{K(-T^2 \omega^2 + 1 - 2T\xi(j\omega))}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} = \frac{K - KT^2 \omega^2}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2} + j \frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}.$$

$$\text{Пусть } P(\omega) = \frac{K - KT^2 \omega^2}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}, Q(\omega) = \frac{-2KT\xi\omega}{(1 - T^2 \omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}.$$

### 1.2.1 Частотные характеристики

Рассчитаю амплитудно-частотную характеристику:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{\left(\frac{-2KT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)^2 + \left(\frac{K - KT^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4K^2T^2\xi^2\omega^2 + K^2 - 2K^2T^2\omega^2 + K^2T^4\omega^4}{((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}} = \\ &= K\sqrt{\frac{4T^2\xi^2\omega^2 - 2T^2\omega^2 + T^4\omega^4 + 1}{((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}} = K\sqrt{\frac{T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1}{((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}}. \end{aligned}$$

Тогда ЛАЧХ:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg K \sqrt{\frac{T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1}{((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2}} = 20 \lg K + 20 \cdot \frac{1}{2} \lg \left( \frac{T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1}{((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2} \right) = \\ &= 20 \lg K + 10 \lg (T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1) - 10 \lg ((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2) = \\ &= 20 \lg K + 10 \lg (T^2\omega^2(4\xi^2 - 2 + T^2\omega^2) + 1) - 20 \lg ((1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2). \end{aligned}$$

Фазовая частотная характеристика будет определяться следующим образом:

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \text{atan2}\left(\frac{-2KT\xi\omega}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}, \frac{K - KT^2\omega^2}{(1-T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2}\right)$$

Расположение  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  на комплексной плоскости, а значит, и оценка фазовой частотной характеристики, определяется в зависимости от того, положительные ли значения принимают  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ .

Знаменатели  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  всегда положительны. Тогда знаки вещественной и мнимой части  $W(j\omega)$  определяются их числителями —  $Q(\omega) < 0$  (т.к.  $K, T, \xi > 0$ ), знак  $P(\omega)$  меняется в зависимости от значения  $\omega$ .

Рассмотрим  $P(\omega) > 0$ :

$$\frac{1 - T^2\omega^2}{((1 - T^2\omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - T^2\omega^2 > 0 \Leftrightarrow \omega < \frac{1}{T}$$

Тогда  $P(\omega) > 0$  при  $\omega < \frac{1}{T}$ ,  $P(\omega) = 0$  при  $\omega = \frac{1}{T}$ . следовательно:

При  $0 \leq \omega < \frac{1}{T}$   $W(j\omega)$  находится в четвертом квадранте, значит,

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) = -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right).$$

При  $\omega = \frac{1}{T}$   $W(j\omega)$   $P(\omega) = Q(\omega) = 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

При  $\omega > \frac{1}{T}$   $W(j\omega)$  в третьем квадранте, а значит,

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan\left(\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}\right) - \pi = -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right) - \pi.$$

Итого:

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right), & \omega \in [0, \frac{1}{T}) \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T} \\ -\arctan\left(\frac{2T\xi\omega}{1 - T^2\omega^2}\right) - \pi, & \omega \in (\frac{1}{T}, +\infty) \end{cases}$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{k_e} = \frac{1}{0.3612} \approx 2.7685, T \approx 0.1541, \xi \approx 0.3445 \Rightarrow W(s) &= \frac{2.7685}{0.1541^2 s^2 + 2 \cdot 0.3445 \cdot 0.1122s + 1} = \\ &= \frac{2.7685}{0.0238 + 0.0773s + 1}. \end{aligned}$$

$$A(\omega) = K \sqrt{\frac{T^2 \omega^2 (4\xi^2 - 2 + T^2 \omega^2) + 1}{((1 - T^2 \omega^2)^2 + (2T\xi\omega)^2)}} = 2.7685 \sqrt{\frac{0.0238\omega^2 (-1.5253 + 0.0238\omega^2) + 1}{((1 - 0.0238\omega^2)^2 + (0.0773\omega)^2)}}.$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left( 2.7685 \sqrt{\frac{0.0238\omega^2 (-1.5253 + 0.0238\omega^2) + 1}{((1 - 0.0238\omega^2)^2 + (0.0773\omega)^2)}} \right)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left(\frac{0.0773\omega}{1-0.1541\omega^2}\right), & \omega \in [0, \frac{1}{T}) \\ -\frac{\pi}{2}, & \omega = \frac{1}{T} \\ -\arctan\left(\frac{0.0773\omega}{1-0.1541\omega^2}\right) - \pi, & \omega \in (\frac{1}{T}, +\infty). \end{cases}$$

### Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

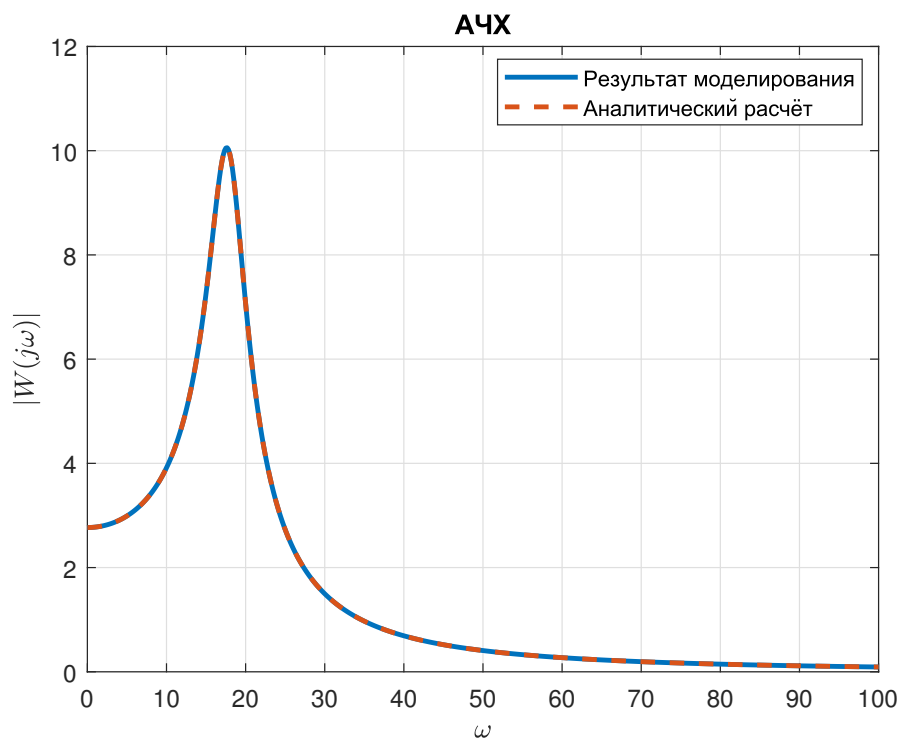


Рисунок 7: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

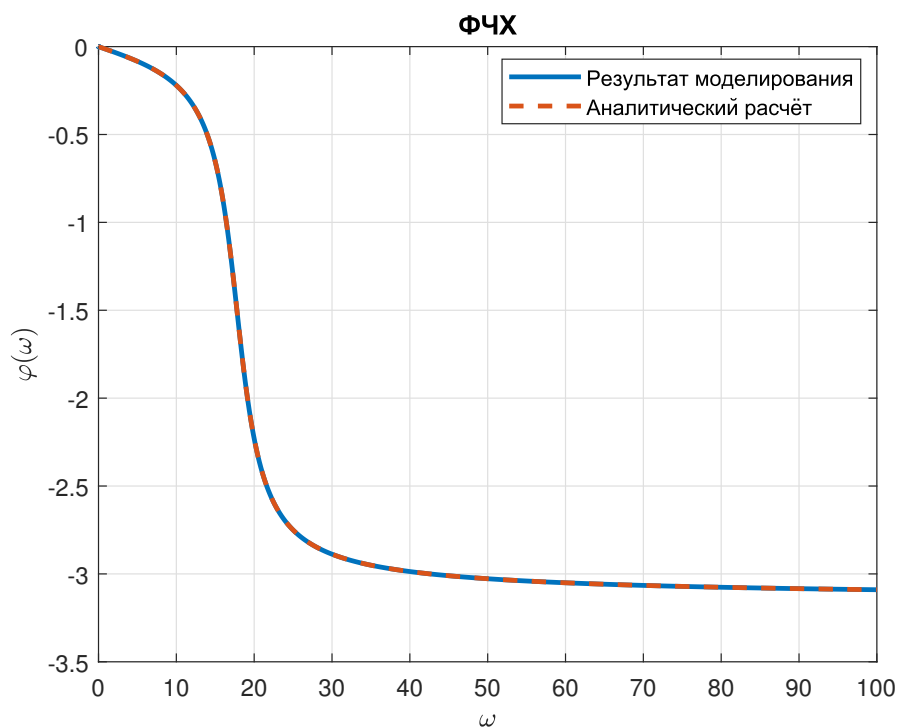


Рисунок 8: Сравнение ФЧХ протемелированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

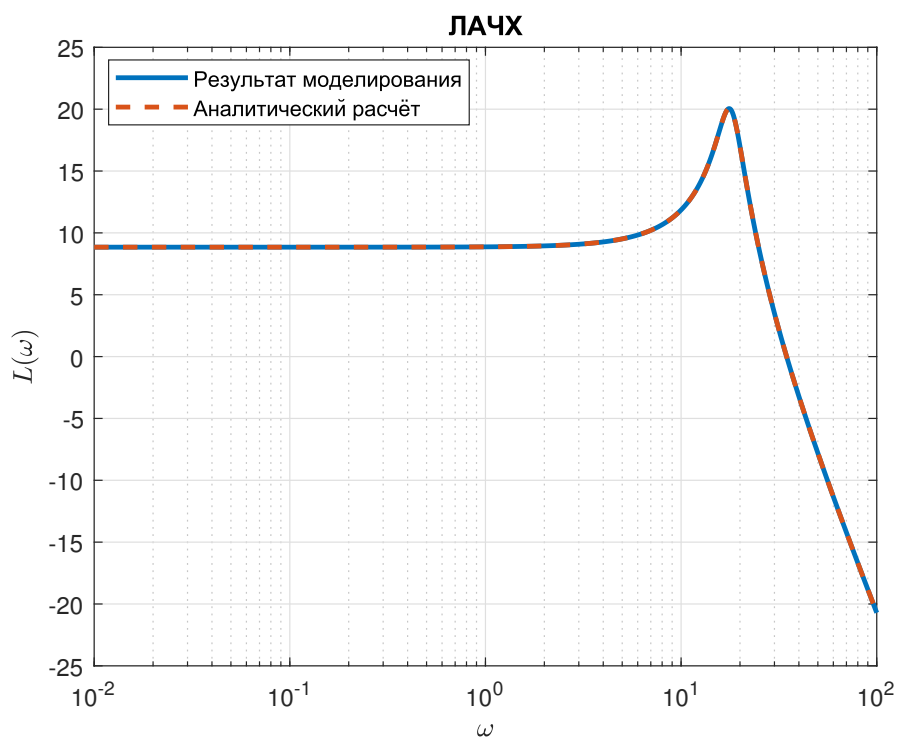


Рисунок 9: Сравнение ЛАЧХ протемелированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

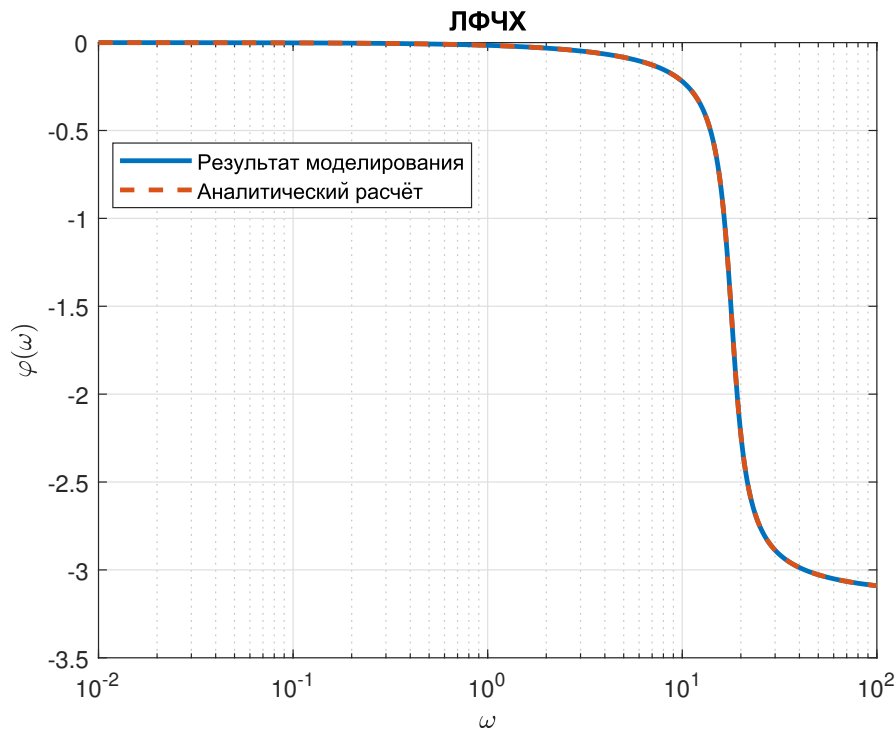


Рисунок 10: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного колебательного звена.

### 1.2.2 Временные характеристики

Весовая функция:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1} \right\}.$$

Для сверки с таблицей готовых преобразований Лапласа приведу к стандартному виду с единицей в качестве коэффициента перед старшей степенью  $s$ :

$$\frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1} = \frac{K}{T^2 \left( s^2 + \frac{2\xi}{T} s + \frac{1}{T^2} \right)}$$

В знаменателе можно вывести полный квадрат:

$$T^2 \left( s^2 + \frac{2\xi}{T} s + \frac{1}{T^2} \right) = T^2 \left( \left( s + \frac{\xi}{T} \right)^2 + \frac{1 - \xi^2}{T^2} \right)$$

Для моего случая  $\xi \approx 0.3445 > 0$  можно безболезненно внести замену  $\frac{\xi}{T} = a$ ,  $\frac{1 - \xi^2}{T^2} = \omega^2$ :

$$W(s) = \frac{K}{T^2} \frac{1}{((s + a)^2 + \omega^2)}$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{(s + a)^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega} \cdot \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

Известно табличное преобразование Лапласа, похожее на получившееся выражение:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} \sin(\omega t)\} = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

Так как  $\frac{1}{\omega}, \frac{K}{T^2}$  — константы, то, по свойству линейности:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{K}{T^2} \frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t) \right\} = \frac{K}{T^2} \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} = W(s).$$

Значит,

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{T^2} \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} \right\} = \frac{K}{T^2} \frac{1}{\omega} e^{-at} \sin(\omega t).$$

Подставил введённые замены  $\frac{\xi}{T} = a, \frac{1-\xi^2}{T^2} = \omega^2$ :

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \{W(s)\} = \frac{K}{T} \frac{1}{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) = \frac{K}{T\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right).$$

Переходная функция:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\}.$$

Используя полученные при вычислении весовой функции преобразования, получаю при  $a = \frac{\xi}{T}, \omega = \sqrt{\frac{1-\xi^2}{T^2}}$ :

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{1}{s} \frac{K}{T^2} \frac{1}{((s+a)^2 + \omega^2)}.$$

Тогда, по свойству интегрирования:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \frac{K}{T^2} \frac{1}{((s+a)^2 + \omega^2)} \right\} = \int_{0^-}^t \frac{K}{T^2} \frac{1}{\omega} e^{-ax} \sin(\omega x) dx = \frac{K}{T^2 \omega} \int_{0^-}^t e^{-ax} \sin(\omega x) dx$$

Рассмотрю неопределенный интеграл  $\int e^{-ax} \sin(\omega x) dx$ :

$$\int e^{-ax} \sin(\omega x) dx = \left[ \int fg' = fg - \int f'g, f = \sin(\omega x), g' = e^{-ax} \right] = -\frac{e^{-ax} \sin(\omega x)}{a} - \int -\frac{\omega e^{-ax} \cos(\omega x)}{a} dx.$$

Проинтегрирую по частям ещё раз:

$$\begin{aligned} -\frac{e^{-ax} \sin(\omega x)}{a} - \int -\frac{\omega e^{-ax} \cos(\omega x)}{a} dx &= \left[ f = \omega \cos(\omega x), g' = -\frac{e^{-ax}}{a} \right] = \\ &= -\frac{e^{-ax} \sin(\omega x)}{a} - \left( -\frac{\omega e^{-ax} \cos \omega x}{a^2} - \int -\frac{\omega^2 e^{-ax} \sin(\omega x)}{a^2} dx \right) \end{aligned}$$

Исходный рассматриваемый интеграл снова появляется в правой части выражения, таким образом решаем уравнение по  $\int e^{-ax} \sin(\omega x) dx$ :

$$F(x) = -\frac{e^{-ax} (a \sin(\omega x) + \omega \cos(\omega x))}{\omega^2 + a^2} + C$$

Первообразная найдена, можно посчитать определенный интеграл:

$$\begin{aligned} y_{s.r.}(t) &= \frac{K}{T^2 \omega} \int_{0^-}^t e^{-ax} \sin(\omega x) dx = F(t) - F(0^-) = \frac{K}{T^2 \omega} \left( \frac{\omega}{\omega^2 + a^2} - \frac{a \sin(t\omega) + \omega \cos(t\omega)}{e^{at} \omega^2 + a^2 e^{at}} \right) = \\ &= \frac{K}{T^2 \omega (\omega^2 + a^2)} (\omega - e^{-at} (a \sin(t\omega) + \omega \cos(t\omega))) \end{aligned}$$

Произведу обратную замену  $a = \frac{\xi}{T}, \omega = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}$ :

$$\begin{aligned}
y_{s.r.}(t) &= \frac{K}{T^2 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \left( \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right)^2 + \left( \frac{\xi}{T} \right)^2 \right)} \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left( \frac{\xi}{T} \sin \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) + \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \cos \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) \right) \right) = \\
&= \frac{K}{T \sqrt{1-\xi^2} \left( \frac{1-\xi^2+\xi^2}{T^2} \right)} \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \left( 1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left( \frac{\xi}{T \sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) + \cos \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) \right) \right) = \\
&= K \left( 1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) + \cos \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Подставляю исходные данные в полученные функции:

$$\begin{aligned}
w(t) &= \frac{K}{T \sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}t} \sin \left( \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} t \right) = 19.1327 e^{-2.2356t} \sin(6.0921t) \\
y_{s.r.}(t) &= K \left( 1 - e^{-\frac{\xi}{T}t} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) + \cos \left( t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} \right) \right) \right) = \\
&= 2.7685 \left( 1 - e^{-2.2356t} (0.3669 \sin(6.0921t) + \cos(6.0921t)) \right).
\end{aligned}$$

## Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

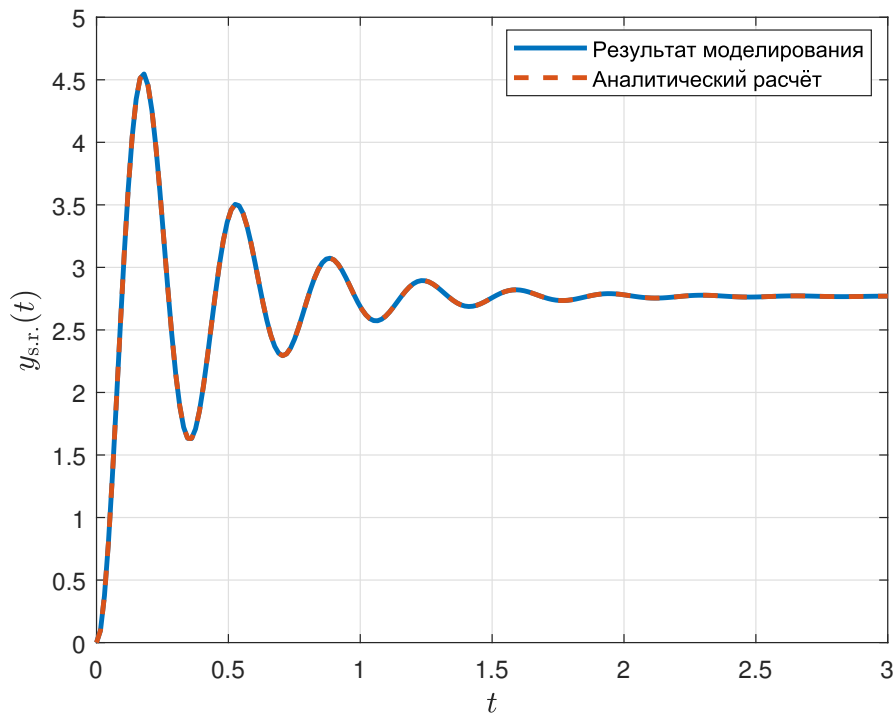


Рисунок 11: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

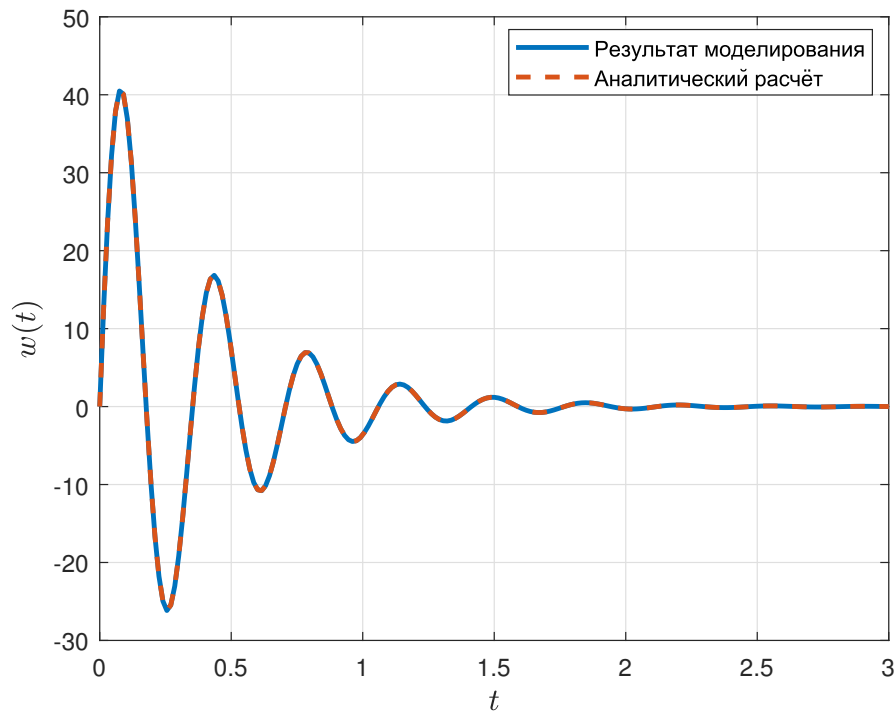


Рисунок 12: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного колебательного звена.

### 1.3 Конденсируй-умножай

В задании рассматривается уравнение конденсатора

$$I = C \frac{dU}{dt}$$

с  $I(t)$  в качестве входа и  $U(t)$  в качестве выхода.

Для вывода передаточной функции представлю уравнение в виде

$$C\dot{U} = I$$

Тогда передаточная функция выглядит следующим образом:

$$W(s) = \frac{1}{Cs}$$

Она представима в стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{K}{s}, K = \frac{1}{C}$$

Функция сопоставима с идеальным интегрирующим звеном. Ёмкость конденсатора — величина неотрицательная, соответственно и  $K > 0$ .

#### 1.3.1 Частотные характеристики

Для определения АЧХ и ФЧХ перейду к частотной передаточной функции и разобью её на вещественную и мнимую составляющие:

$$W(s) = \frac{K}{s} \Leftrightarrow W(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$



$$W(j\omega) = \frac{-jK\omega}{(j\omega)(-j\omega)} = \frac{-jK\omega}{\omega^2} = \frac{-jK}{\omega}.$$

В этом случае действительная составляющая  $P(\omega)$  равна 0, значит,  $W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  — чисто мнимое число, при этом  $Q(\omega) < 0$ . Найдём АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{W(j\omega)^2} = \sqrt{\left(\frac{-jK}{\omega}\right)^2} = \frac{K}{\omega}.$$

Тогда ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \left( \frac{K}{\omega} \right)$$

Разложим логарифм:

$$L(\omega) = 20 \lg K - 20 \lg \omega.$$

ФЧХ же в этом случае будет определяться так:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{atan2} \left( \frac{-K}{\omega}, 0 \right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{C} = \frac{1}{314} \approx 0.0032 \Rightarrow W(s) = \frac{0.0032}{s}.$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega} = \frac{0.0032}{\omega}.$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{0.0032}{\omega} \right).$$

## Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

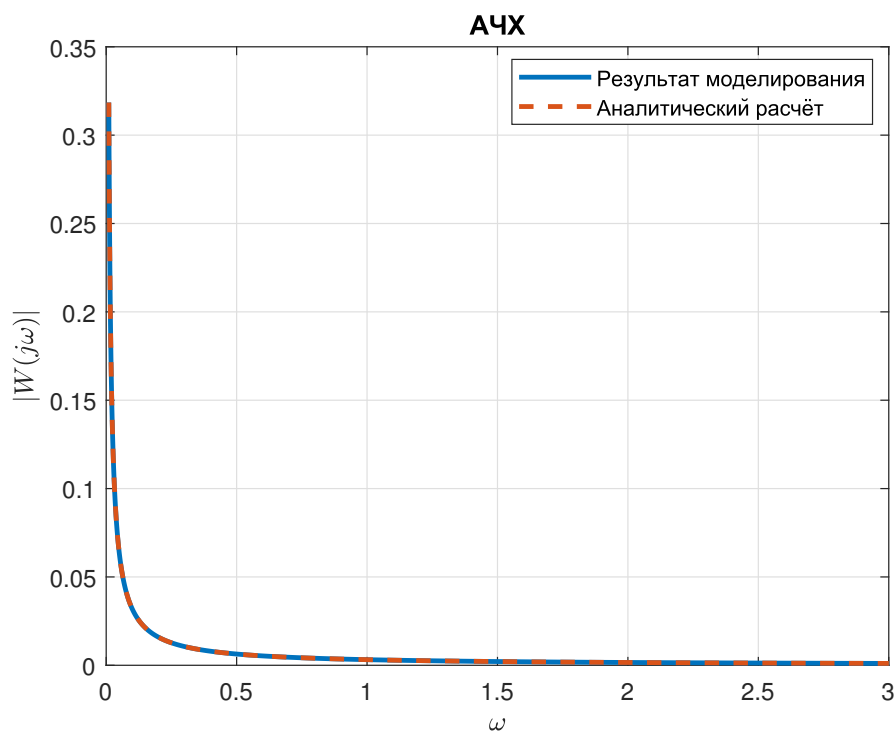


Рисунок 13: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

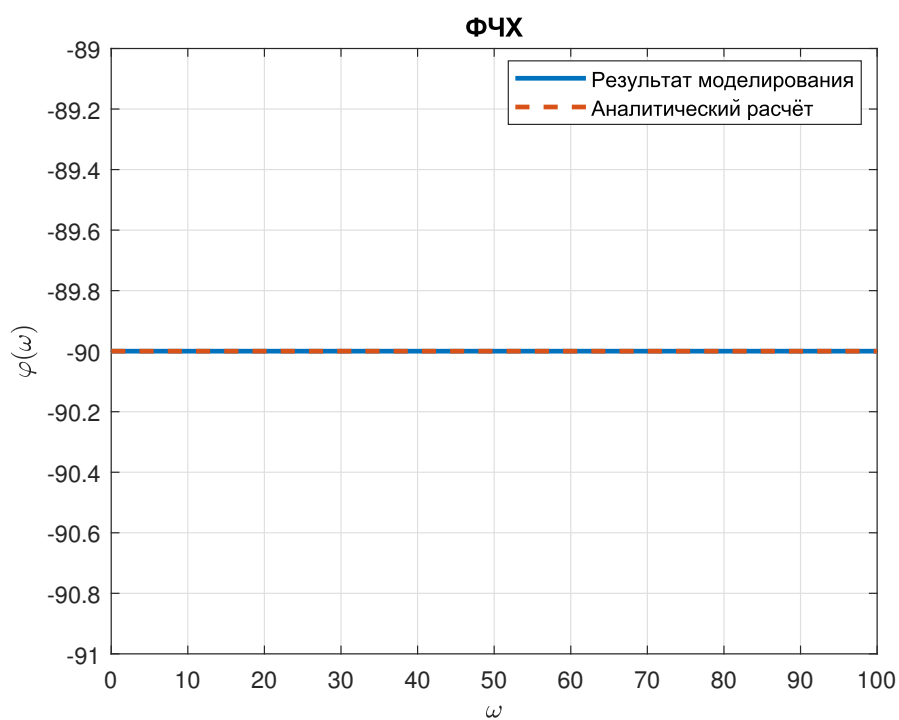


Рисунок 14: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

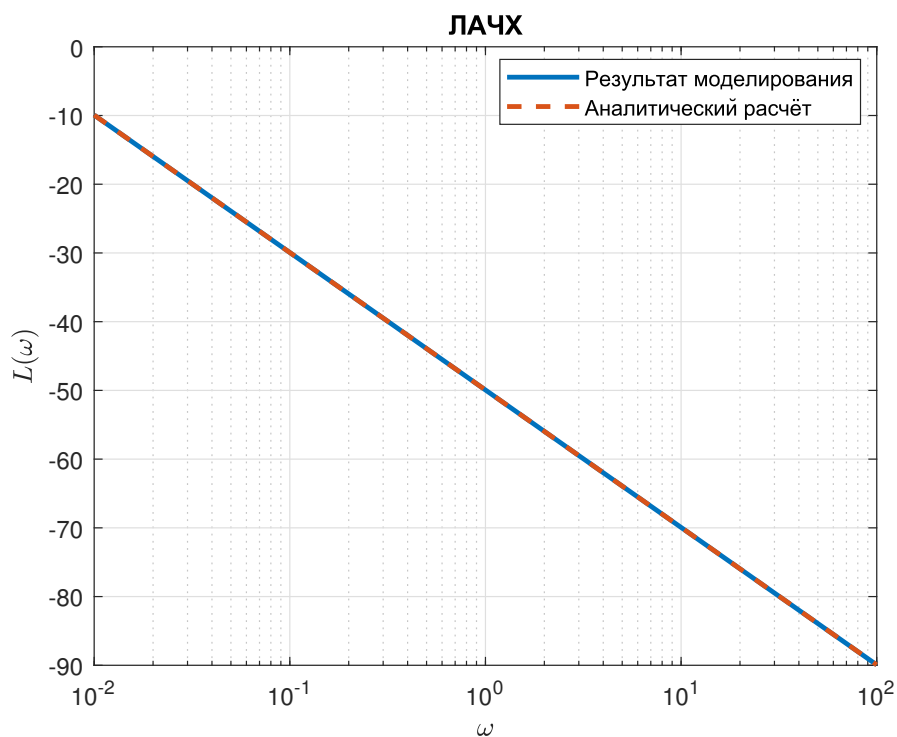


Рисунок 15: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

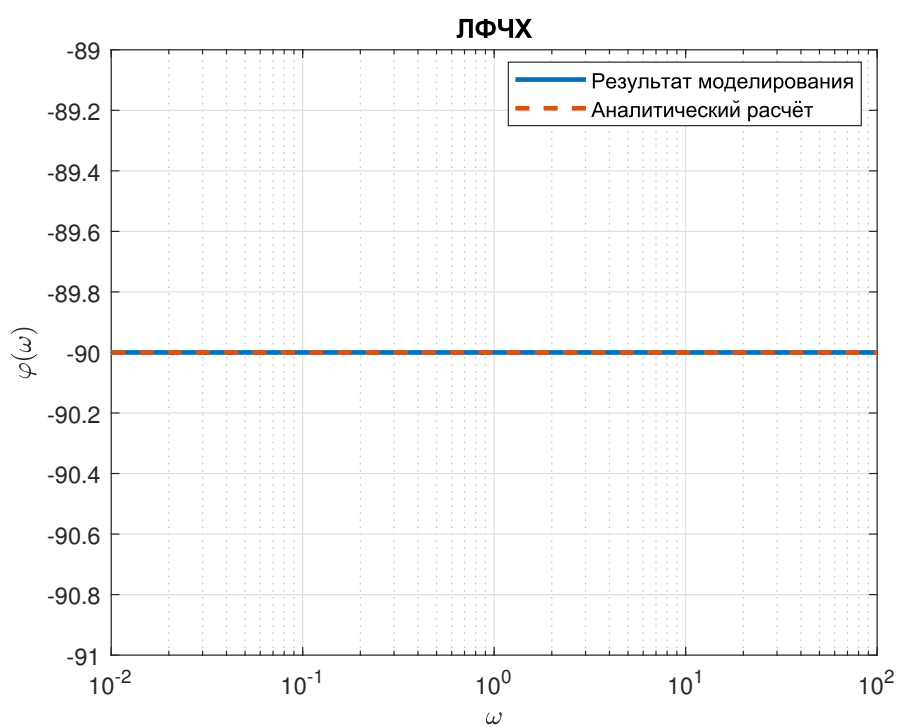


Рисунок 16: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного идеального интегрирующего звена.

### 1.3.2 Временные характеристики

Весовая функция для уравнения конденсатора:

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s}\right\} = K \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = K$$

Переходная функция:

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{K}{s^2}\right\} = K \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = Kt$$

Подставляя исходные данные для этого объекта, получаю:

$$w(t) = K = 0.0032,$$

$$y_{s.r.}(t) = Kt = 0.0032t.$$

## Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

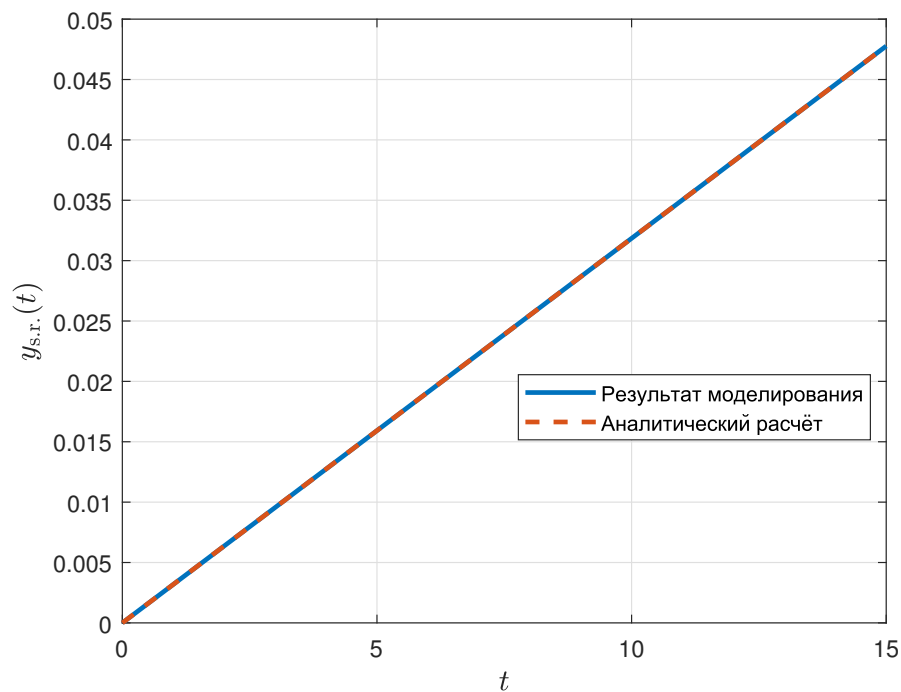


Рисунок 17: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

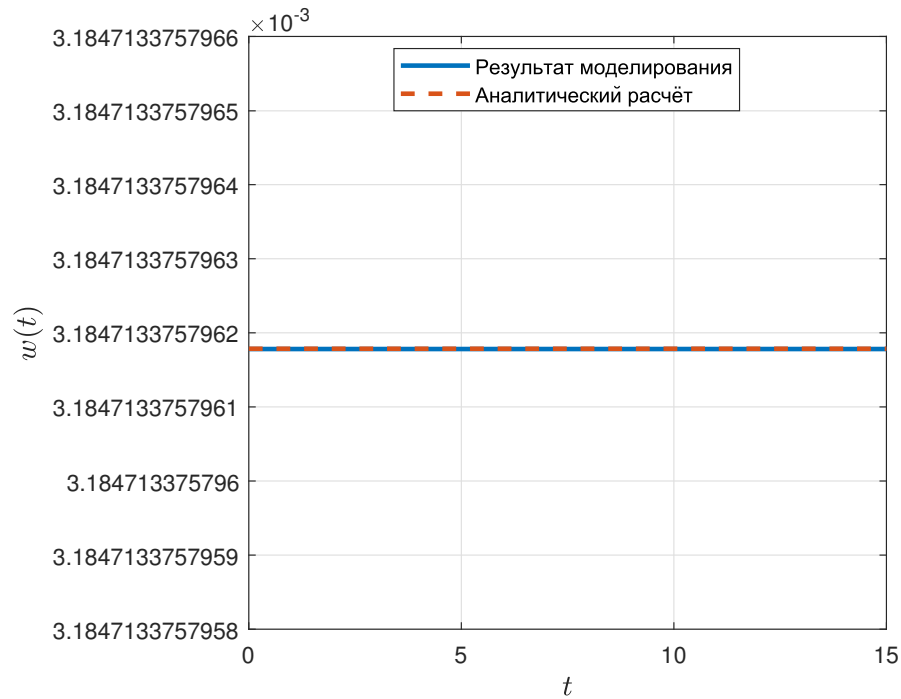


Рисунок 18: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного идеального интегрирующего звена.

#### 1.4 Пружинка

В задании рассматривается пружинный маятник, представленный на рисунке:

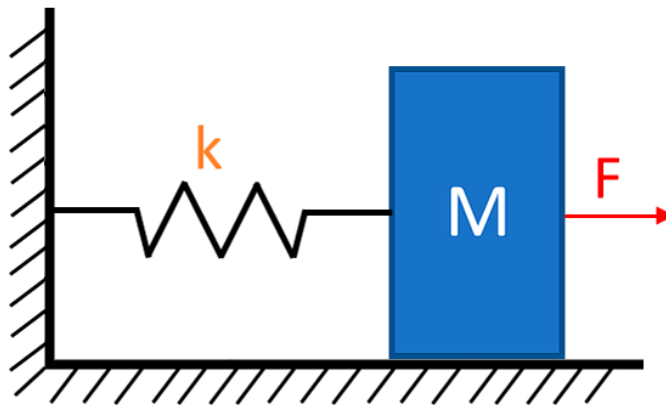


Рисунок 19: Пружинный маятник

Его движение задаётся следующими уравнениями:

$$F_{\text{упр}} = -kx, F = ma.$$

Входом этой системы считается некая внешняя сила  $F_{\text{ext}}$ , направленная соосно движению маятника, а выходом — траектория движения  $x(t)$ . Так как  $a = \ddot{x}$ :

$$F_{\text{ext}}(t) = m\ddot{x} + kx$$

Переходим к пространству изображений Лапласа:

$$ms^2 X(s) + kX(s) = F_{\text{ext}}(s)$$

$$X(s) (ms^2 + k) = F_{\text{ext}}(s)$$

$$W(s) = \frac{X(s)}{F_{\text{ext}}(s)} = \frac{1}{ms^2 + k} = \frac{1}{k} \frac{1}{\frac{m}{k}s^2 + 1}$$

В стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1}, K = \frac{1}{k}, T^2 = \frac{m}{k}$$

Получаем консервативное звено.

#### 1.4.1 Частотные характеристики

Найдём АЧХ и ФЧХ, перейдя к частотной передаточной функции:

$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K}{T^2 (j\omega)^2 + 1} = \frac{K}{-T^2 \omega^2 + 1}$$

В этом случае в качестве  $W(j\omega)$  получается вещественное число. Тогда АЧХ — просто его модуль:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \left| \frac{K}{-T^2 \omega^2 + 1} \right|.$$

ЛАЧХ:

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \left| \frac{K}{1 - T^2 \omega^2} \right| = 20 \lg K - 20 \lg |1 - T^2 \omega^2|.$$

Заметно, что АЧХ имеет разрыв в точке  $\omega_0 = \frac{1}{T}$ , и ФЧХ также не определена на этой частоте из-за наличия резонанса (знаменатель становится равен нулю). При этом частотная передаточная функция положительна, если  $0 < \omega \leq \omega_0$ , и отрицательна при  $\omega > \omega_0$ . Имея  $Q(\omega) = 0, P(\omega) = \frac{K}{-T^2 \omega^2 + 1}$ , получаем:

$$\text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan \left( \frac{0}{P(\omega)} \right) = 0.$$

$$\begin{cases} 0, & 0 < \omega \leq \frac{1}{T} \\ -\pi, & \omega > \frac{1}{T}. \end{cases}$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{k} = \frac{1}{324} \approx 0.0031, T = \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{35}{324}} \approx 0.3287 \Rightarrow W(s) = \frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1}$$

$$A(\omega) = \left| \frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1} \right| = \frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1}.$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left( \frac{0.0031}{0.1081s^2 + 1} \right)$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & 0 < \omega \leq 3.0423, \\ -\pi, & \omega > 3.0423. \end{cases}$$

## Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

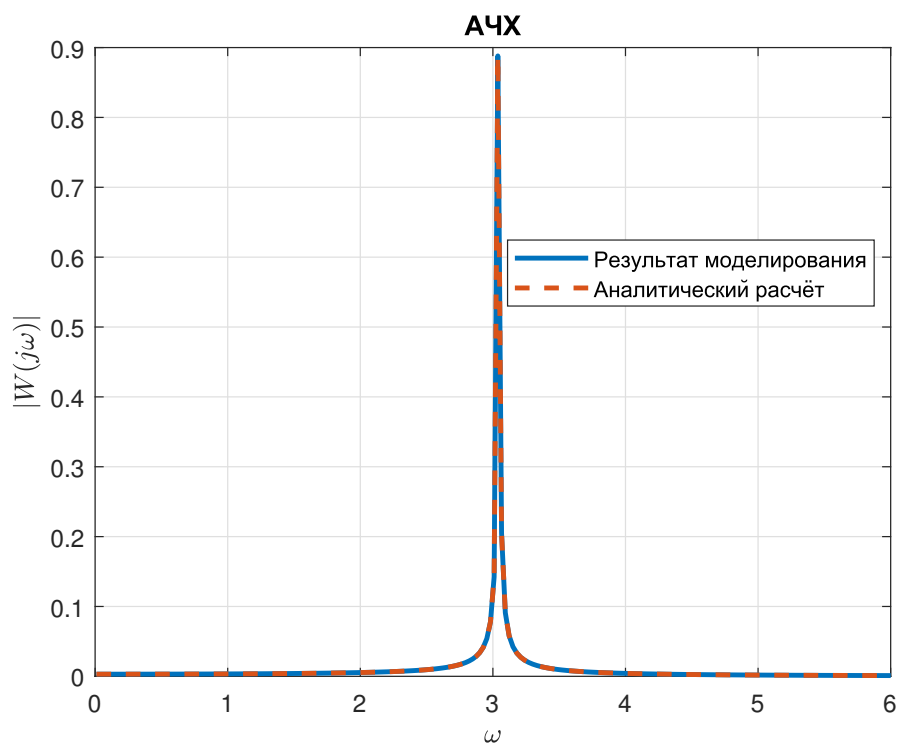


Рисунок 20: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

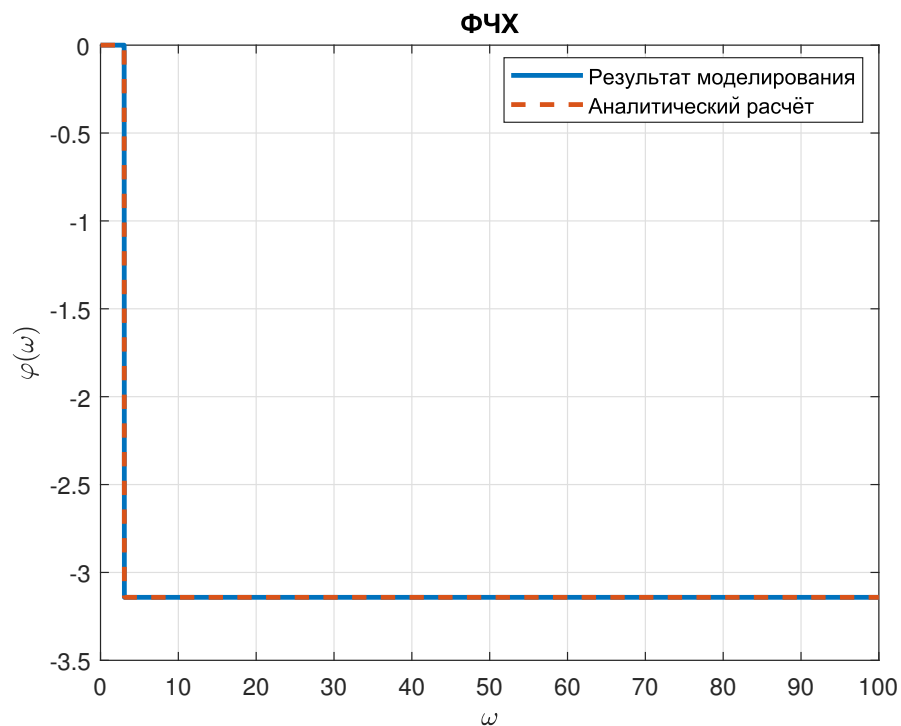


Рисунок 21: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

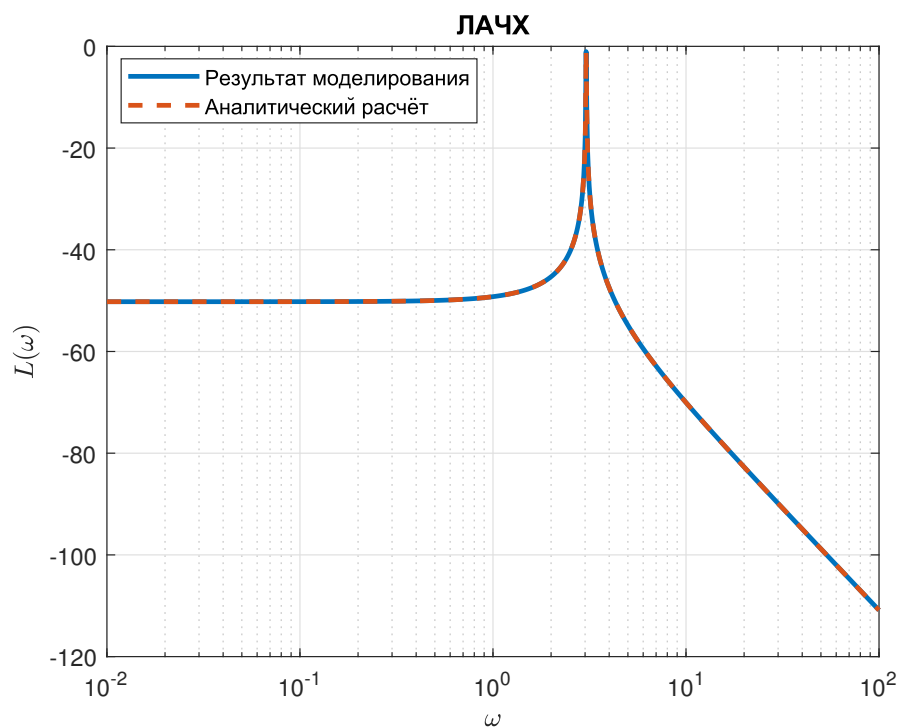


Рисунок 22: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

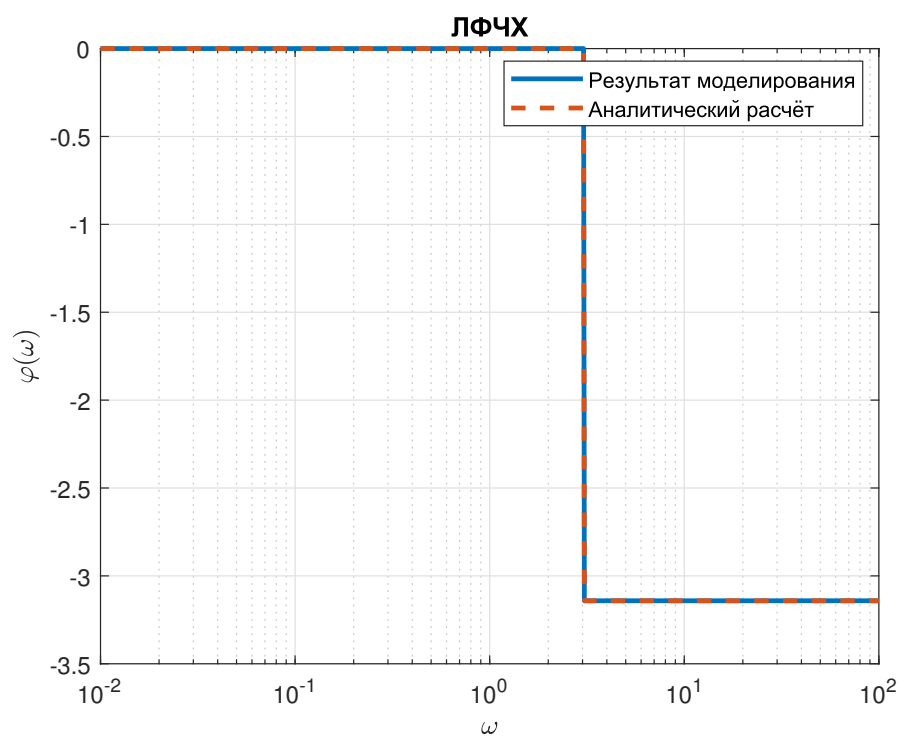


Рисунок 23: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного консервативного звена.

#### 1.4.2 Временные характеристики

Для поиска весовой функции сведу передаточную функцию до табличного значения:



$$W(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 1} = \frac{K}{T^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{1}{T^2}} = \frac{K}{T} \cdot \frac{1/T}{s^2 + (1/T)^2}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right\} = \sin(\omega t) \Rightarrow w(t) = \frac{K}{T} \sin\left(\frac{t}{T}\right)$$

Переходная функция:

$$w_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{W(s)}{s} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{s(T^2 s^2 + 1)} \right\}$$

Разложу на элементарные дроби:

$$\frac{K}{s(T^2 s^2 + 1)} = K \left( \frac{1}{s} - s \frac{T^2}{T^2 s^2 + 1} \right)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1, \mathcal{L}^{-1} \left\{ s \frac{1}{s^2 + (1/T)^2} \right\} = \cos\left(\frac{t}{T}\right), \text{ тогда:}$$

$$w_{s.r.}(t) = K \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{T^2 s}{T^2 s^2 + 1} \right\} = K \left( 1 - \cos\left(\frac{t}{T}\right) \right).$$

Подставляю исходные данные:

$$w(t) = \frac{K}{T} \sin\left(\frac{t}{T}\right) = 0.0094 \sin\left(\frac{t}{0.3287}\right).$$

$$y_{s.r.}(t) = K \left( 1 - \cos\left(\frac{t}{T}\right) \right) = 0.0031 \left( 1 - \cos\left(\frac{t}{0.3287}\right) \right)$$

## Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

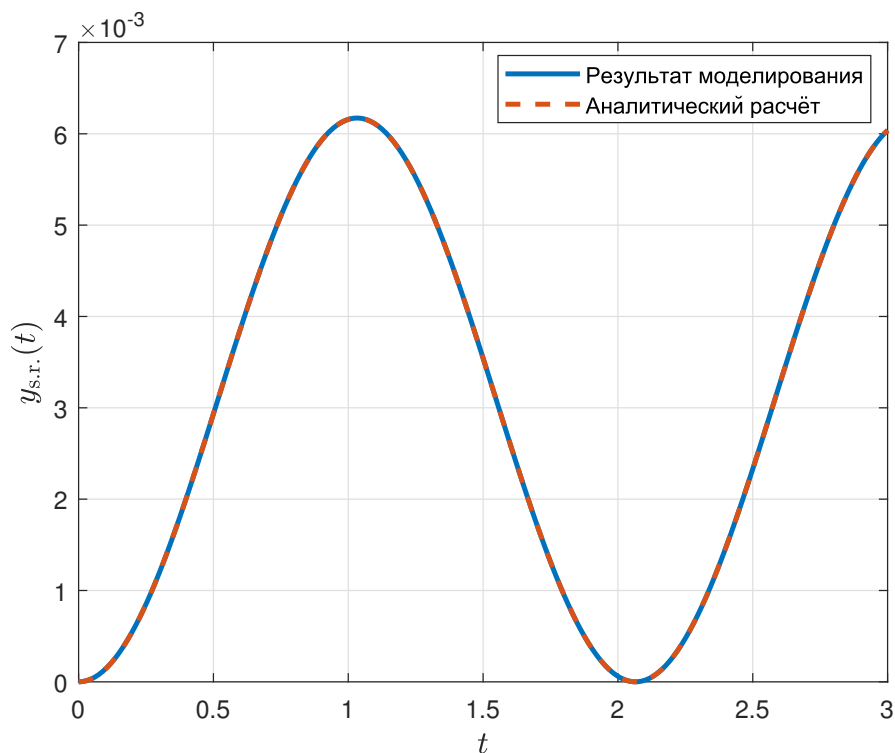


Рисунок 24: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

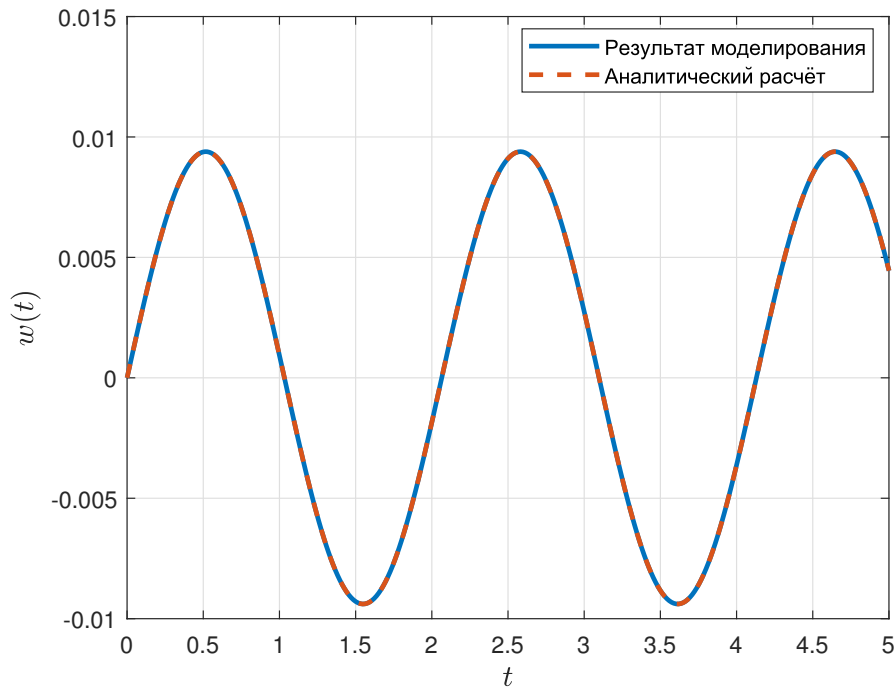


Рисунок 25: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного консервативного звена.

### 1.5 Что ты такое?

В задании рассматривается схема регулятора на операционном усилителе, представленная на рисунке:

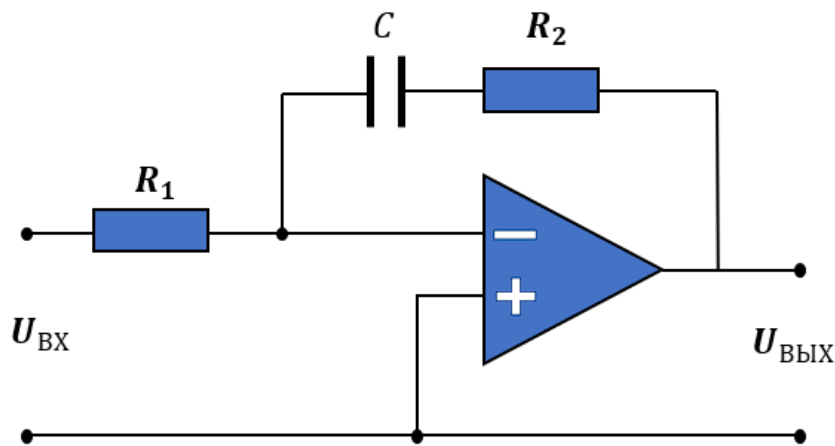


Рисунок 26: Принципиальная схема регулятора на операционном усилителе

Считая входом системы  $U_{ВХ}(t)$ , а выходом —  $U_{ВЫХ}(t)$ , можем рассмотреть преобразования, выполняемые над входным сигналом более подробно:

На входном резисторе сопротивлением  $R_1$  при подаче напряжения появляется ток  $I(t) = \frac{U_{ВХ}(t)}{R_1}$ . Далее этот ток попадает на конденсатор с отрицательной обратной связью ёмкостью  $C$ , и, зная что ток, проходящий через конденсатор такой ёмкости, равен  $I(t) = C \frac{du(t)}{dt}$ , можем рассчитать напряжение на нём:

$$u(t) = u(0) + \frac{1}{C} \int_0^t I(x) dx.$$

Воспользуемся полученным ранее значением  $I(t) = \frac{U_{BX}(t)}{R_1}$  и примем начальное условие  $u(0) = 0$ , тогда  $u(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{U_{BX}(x)}{R_1} dx = \frac{1}{R_1 C} \int_0^t U_{BX}(x) dx$ . В пространстве изображений Лапласа по свойству интегрирования после прохождения конденсатора выходом будет являться  $Z(s) = \frac{1}{R_1 C s}$ . Далее сигнал идёт на последовательно подключенный резистор  $R_2$ , и выходом по обратной связи будет являться  $W(s) = \frac{1}{R_1 C s} + R_2 \cdot I(s) = \frac{1}{R_1 C s} + \frac{R_2}{R_1} = \frac{1 + R_2 C s}{R_1 C s}$ . Получается изотропное звено. Так как передаточная функция этого регулятора состоит из двух слагаемых, интегрирующего  $\frac{1}{R_1 C s}$  и пропорционального  $\frac{R_2}{R_1}$ , то регулятор пропорционально-интегральный (ПИ).

Передаточная функция объекта найдена, можно привести её к стандартизированной форме:

$$W(s) = \frac{1 + R_2 C s}{R_1 C s} = \frac{1}{R_1 C} \frac{R_2 C s + 1}{s} = \frac{K(Ts + 1)}{s}, K = \frac{1}{R_1 C}, T = R_2 C.$$

### 1.5.1 Частотные характеристики

Для нахождения АЧХ и ФЧХ переведем уравнение в частотную область:

$$W(s) = \frac{K(Ts + 1)}{s} \Rightarrow W(j\omega) = \frac{K(T(j\omega) + 1)}{(j\omega)}$$

Домножу числитель и знаменатель на сопряженное:

$$W(j\omega) = \frac{K(-T(j\omega)^2 - (j\omega))}{-(j\omega)(j\omega)} = \frac{KT\omega^2 - jK\omega}{\omega^2} = \frac{KT\omega^2}{\omega^2} + j \frac{-K\omega}{\omega^2} = KT + j \frac{-K}{\omega}$$

Пусть  $P(\omega) = KT$ ,  $Q(\omega) = -\frac{K}{\omega}$ . Тогда АЧХ:

$$A(\omega) = \sqrt{P(\omega)^2 + Q(\omega)^2} = \sqrt{K^2 T^2 + \frac{K^2}{\omega^2}} = K \sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}}$$

ЛАЧХ определяется как:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \lg A(\omega) = 20 \lg \left( K \sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}} \right) \\ &= 20 \lg K + 20 \lg \left( \sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}} \right) = 20 \lg K + 10 \lg \left( T^2 + \frac{1}{\omega^2} \right). \end{aligned}$$

Также вычислю и ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = \text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \text{atan2} \left( -\frac{K}{\omega}, KT \right)$$

$K = \frac{1}{R_1 C} > 0$ , так как сопротивление резистора и ёмкость конденсатора — величины положительные.  $T = R_2 C > 0$  по той же причине, а значит,  $Q(\omega) = -\frac{K}{\omega} < 0 \forall \omega > 0$ , и  $P(\omega) = KT > 0$ . Следовательно,  $W(\omega) = P(\omega) + jQ(\omega)$  всегда расположено во втором квадранте. В этом случае  $\text{atan2}(Q(\omega), P(\omega)) = \arctan \left( \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right)$ . Тогда:

$$\varphi(\omega) = \arctan \left( \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \right) = \arctan \left( \frac{-\frac{K}{\omega}}{KT} \right) = \arctan \left( \frac{-1}{T\omega} \right) = \arctan \left( \frac{-1}{T\omega} \right) = \arctan \left( \frac{1}{T\omega} \right).$$

Подставляя значения исходных данных для своего варианта, получаю

$$K = \frac{1}{R_1 C} = \frac{1}{6427 \cdot 314} \approx 4.955 \cdot 10^{-7}, T = R_2 C = 19282 \cdot 314 = 6054548 \Rightarrow W(s) = \frac{4.955 \cdot 10^{-7} (6054548s + 1)}{s}.$$

$$A(\omega) = K \sqrt{T^2 + \frac{1}{\omega^2}} = 4.955 \cdot 10^{-7} \sqrt{6054548^2 + \frac{1}{\omega^2}}.$$

$$L(\omega) = 20 \lg \left( 4.955 \cdot 10^{-7} \sqrt{6054548^2 + \frac{1}{\omega^2}} \right)$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \left( \frac{1}{6054548\omega} \right).$$

### Моделирование

Полученная передаточная функция была промоделирована, и результаты моделирования были сопоставлены с полученными аналитически:

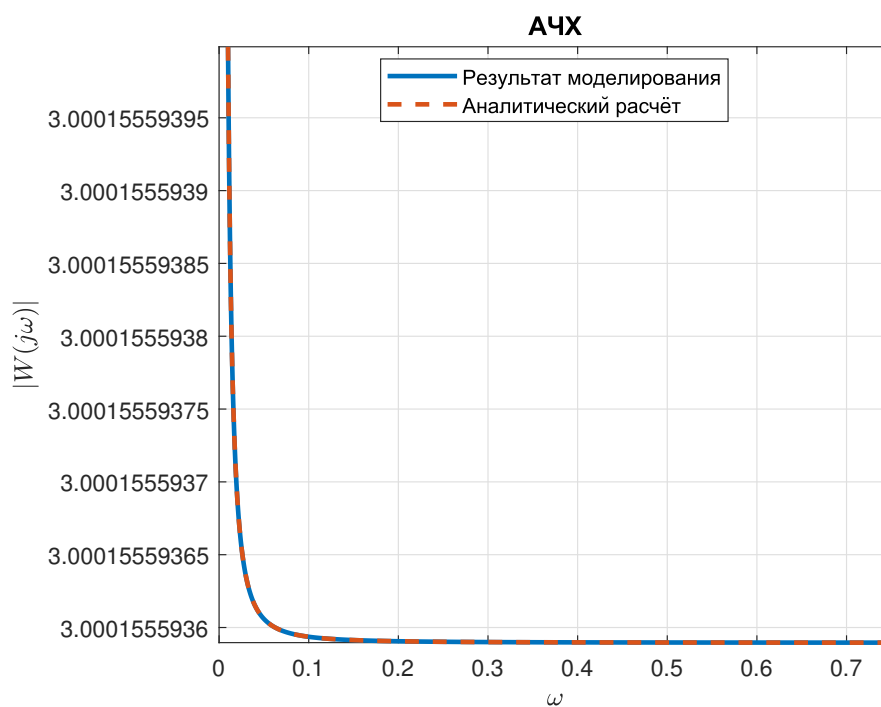


Рисунок 27: Сравнение АЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной АЧХ

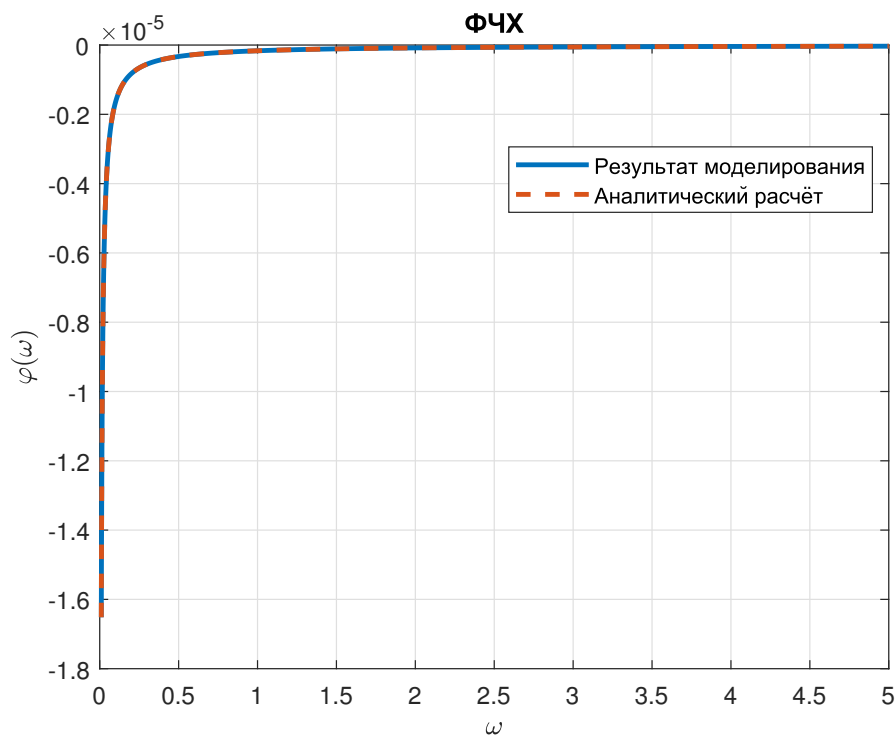


Рисунок 28: Сравнение ФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ФЧХ

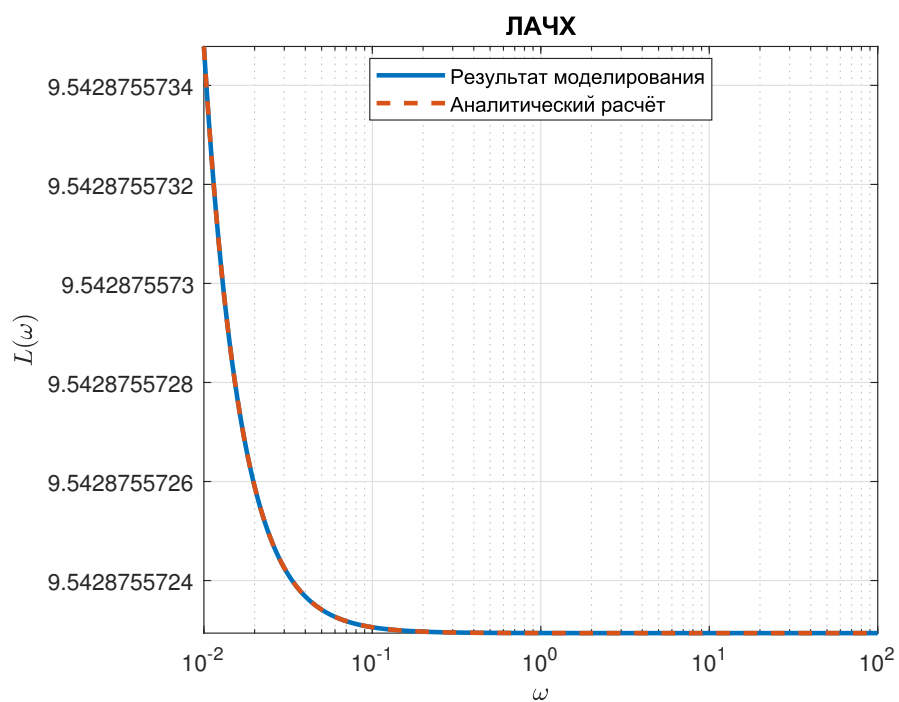


Рисунок 29: Сравнение ЛАЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛАЧХ

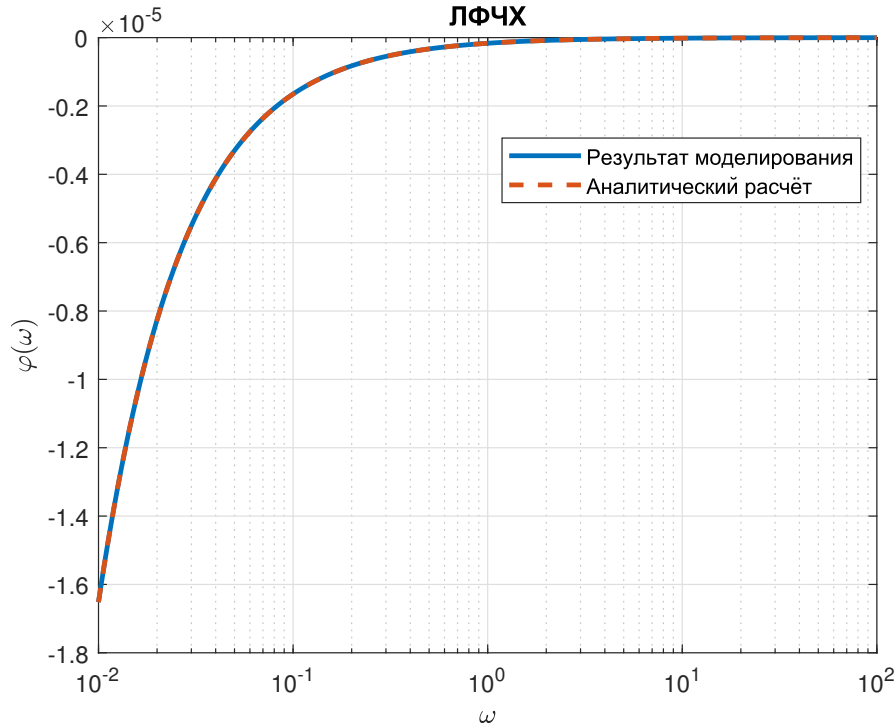


Рисунок 30: Сравнение ЛФЧХ промоделированной системы с аналитически рассчитанной ЛФЧХ

Результаты полученных графических представлений частотных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного изодромного звена.

### 1.5.2 Временные характеристики

Разложу передаточную функцию для удобного нахождения весовой функции:

$$W(s) = \frac{K(Ts + 1)}{s} = KT + \frac{K}{s}$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1}\{W(s)\} = KT \delta(t) + K$$

Передаточная функция  $y_{s.r.}(t)$  всё также является реакцией системы на единичный скачок, образ Лапласа которого —  $\frac{1}{s}$ :

$$y_{s.r.}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{W(s)}{s}\right\}$$

$$\frac{W(s)}{s} = \frac{K(Ts + 1)}{s^2} = K\left(\frac{T}{s} + \frac{1}{s^2}\right)$$

$\mathcal{L}^{-1}\{1/s\} = 1$ ,  $\mathcal{L}^{-1}\{1/s^2\} = t$ , следовательно:

$$y_{s.r.}(t) = K(T + t)$$

В очередной раз подставляю исходные данные и найду характеристики для объекта с ними:

$$w(t) = KT \delta(t) + K = 3.001\delta(t) + 4.955 \cdot 10^{-7},$$

$$y_{s.r.}(t) = 3.001 + 4.955 \cdot 10^{-7}t.$$

## Моделирование

Снова проведя моделирование, я получил временные характеристики системы, и сопоставил их с полученными аналитически:

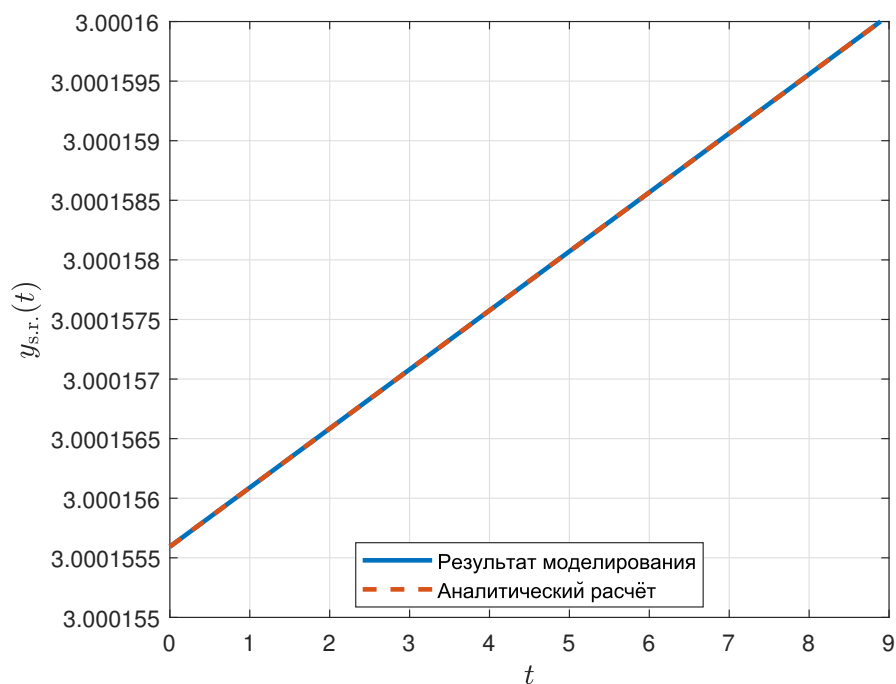


Рисунок 31: Сравнение промоделированной переходной функции с полученной аналитически

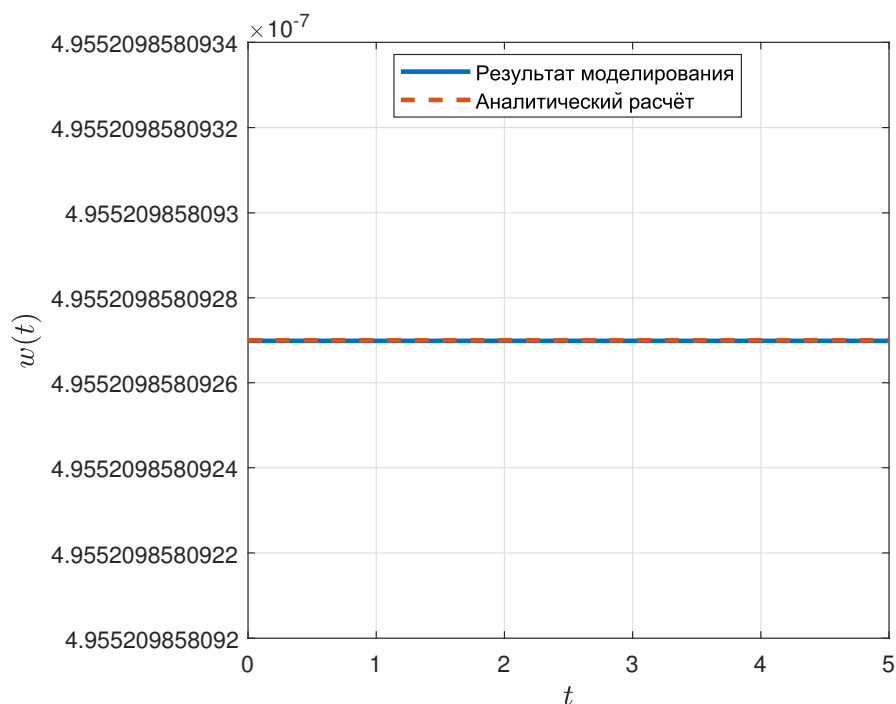


Рисунок 32: Сравнение промоделированной весовой функции с полученной аналитически

Результаты полученных графических представлений временных характеристик полностью совпали с теоретическими для рассмотренного изодромного звена.

## 2 Вывод по работе

В ходе работы я ознакомился с основными типовыми звеньями, их частотными и временными характеристиками, научился вычислять их аналитически, проверил полученные результаты программным моделированием.

## 3 Приложение А. Код для выполнения заданий

### Листинг 1. Код для выполнения заданий

```

1 clear all;
2 close all;
3
4 [~, scriptName] = fileparts(mfilename('fullpath'));
5 if ~isfolder(scriptName)
6     mkdir(scriptName);
7 end
8
9 km = 0.3612;
10 ke = 0.3612;
11 J = 0.0031;
12 R = 4.7237;
13 L = 1.0567;
14
15 N = 1000;
16 w = logspace(-2, 2, N); % от 0.01 до 100 рад/с
17 s = 1j * w;
18
19 t_final = 15; % время моделирования
20 t = linspace(0, t_final, 1000);
21
22 % K = 1 / ke;
23 % T = (J * R) / (ke * km);
24 % A = K ./ sqrt((1 + (T.*w).^2));
25 % L = 20*log10(K) - 10*log10(1 + (T.*w).^2);
26 % phi = atan2((-K * T) .* w ./ (1 + (T.*w).^2), (K) ./ (1 + (T.*w).^2));
27 % phi = rad2deg(phi);
28 % num = K;
29 % den = [T, 1];
30 % sys = tf(num, den) % дпт
31 % [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
32 % mag = squeeze(mag);
33 % phase = squeeze(phase);
34 % y_imp_native = (K / T) .* exp((-1/T) .* t);
35 % y_step_native = K * (1 - exp(-t .* (1/T)));
36 % [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
37 % [y_step, t_step] = step(sys, t);
38
39
40 % K = 1 / ke;
41 % T = sqrt((J) / ke * km);
42 % xi = (T * R) / 2 * L;
43 % A = K * sqrt( (T^2 * w.^2 .* (4*xi^2 - 2 + T^2 * w.^2) + 1) ./ ((1 - T^2 * w.^2).^2 + (2*T*xi*w).^2).^2);
44 % L = 20*log10(A);
45 % phi = zeros(size(w));
46 % idx1 = w < 1/T;
47 % idx2 = w > 1/T;
48 % idx_eq = abs(w - 1/T) < 1e-12;
49 % phi(idx1) = -atan( (2*T*xi*w(idx1)) ./ (1 - T^2 * w(idx1).^2) );
50 % phi(idx_eq) = -pi/2;
51 % phi(idx2) = -atan( (2*T*xi*w(idx2)) ./ (1 - T^2 * w(idx2).^2) ) - pi;
52 % phi = rad2deg(phi);
53 %
54 % num = K;
55 % den = [T^2, 2*T*xi, 1];
56 % sys = tf(num, den) % DPT 2.0
57 % [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
58 % mag = squeeze(mag);
59 % phase = squeeze(phase);

```



```

60 % W = K ./ (T^2 * s.^2 + 2*T*xi*s + 1); % DPT 2.0
61 % y_imp_native = (K / (T*sqrt(1-xi^2))) .* exp((-xi/T) .* t) .* sin(((sqrt(1-xi^2))/T).*t);
62 % y_step_native = K * (1 - exp(-(xi .* t)/T) .* ((xi ./ sqrt(1 - xi^2)) .* sin(t .* (sqrt(1 - xi^2)
    / T)) + cos(t .* (sqrt(1 - xi^2) / T)) ));
63 % [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
64 % [y_step, t_step] = step(sys, t);
65
66
67
68 % K = 1 / 314;
69 % A = K ./ w;
70 % L = 20 * log10(K) - 20 .* log10(w);
71 % phi = (-pi / 2) .* ones(size(w));
72 % phi = rad2deg(phi);
73 %
74 % num = K;
75 % den = [1, 0];
76 % sys = tf(num, den) % конденсируй-умножай
77 % [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
78 % mag = squeeze(mag);
79 % phase = squeeze(phase);
80 %
81 % W = K ./ (s); % конденсируй-умножай
82 % y_imp_native = K .* ones(size(t));
83 % y_step_native = K .* t;
84 % [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
85 % [y_step, t_step] = step(sys, t);
86
87
88 % M = 35;
89 % k = 324;
90 % K = 1 / k;
91 % T = sqrt(M / k);
92 % A = abs(K ./ (-T^2 .* w.^2 + 1));
93 % L = 20 * log10(K) - 20 * log10(abs(1 - (T^2).*(w.^2)));
94 % phi = zeros(size(w));
95 % idx1 = w <= 1/T;
96 % idx2 = w > 1/T;
97 % phi(idx1) = 0;
98 % phi(idx2) = -pi;
99 % phi = rad2deg(phi);
100 %
101 % num = K;
102 % den = [T^2, 0, 1];
103 % sys = tf(num, den) % пружинка
104 % [mag, phase, wout] = bode(sys, w);
105 % mag = squeeze(mag);
106 % phase = squeeze(phase);
107 %
108 % W = K ./ T^2 * s.^2 + 1; % пружинка
109 % y_imp_native = (K / T) .* sin(t ./ T);
110 % y_step_native = K .* (1 - cos(t ./ T));
111 % [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
112 % [y_step, t_step] = step(sys, t);
113
114
115
116 R1 = 6427;
117 R2 = 19282;
118 C = 314;
119 K = 1 / (R1 * C);
120 T = R2 * C;
121 A = K .* sqrt(T^2 + 1./w.^2);
122 L = 20 * log10(K) + 10 * log10(T^2 + 1./w.^2);
123 phi = - atan(1./(T .* w));
124 phi = rad2deg(phi);
125
126 num = [K * T, K];
127 den = [1, 0];
128 sys = tf(num, den) % что ты такое
129 [mag, phase, wout] = bode(sys, w);

```

```

130 mag = squeeze(mag);
131 phase = squeeze(phase);
132
133 % W = K * (T * s + 1) ./ s;           % что ты такое
134 u = zeros(size(t));
135 % u(1) = N;
136 y_imp_native = K * ones(size(t));
137 y_step_native = K*T + K .* t;
138 [y_imp, t_imp] = impulse(sys, t);
139 [y_step, t_step] = step(sys, t);
140
141
142
143 impulse = figure;
144 plot(t, y_imp, LineWidth=1.4);
145 hold on;
146 plot(t, y_imp_native, '--', LineWidth=1.4);
147 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
148 xlabel('$t$', Interpreter='latex', FontSize=13);
149 ylabel('$w(t)$', Interpreter='latex', FontSize=13);
150 grid on;
151 xlim([0, 5])
152 ylim([-0.01, 0.015])
153 saveas(impulse, string(scriptName) + '\impulse.eps', 'epsc')
154
155 step = figure;
156 plot(t, y_step, LineWidth=1.4);
157 hold on;
158 plot(t, y_step_native, '--', LineWidth=1.4);
159 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
160 xlabel('$t$', Interpreter='latex', FontSize=13);
161 ylabel('$y_{\mathrm{s.r.}}(t)$', Interpreter='latex', FontSize=13);
162 % title('АЧХ');
163 grid on;
164 % xlim([0, 5])
165 % ylim([0, 3])
166 saveas(step, string(scriptName) + '\step.eps', 'epsc')
167
168 % АЧХ
169 achh = figure;
170 plot(w, mag, LineWidth=1.4);
171 hold on;
172 plot(w, A, '--', LineWidth=1.4);
173 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
174 xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');
175 ylabel('$|W(j\omega)|$', Interpreter='latex');
176 title('АЧХ');
177 grid on;
178 xlim([0, 0.75])
179 saveas(achh, string(scriptName) + '\achh.eps', 'epsc')
180
181 % ФЧХ
182 fchh = figure;
183 plot(w, phase, LineWidth=1.4);
184 hold on;
185 plot(w, phi, '--', LineWidth=1.4);
186 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
187 xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');
188 ylabel('$\varphi(\omega)^\circ$', Interpreter='latex');
189 title('ФЧХ');
190 %xlim([0, 5])
191 grid on;
192 saveas(fchh, string(scriptName) + '\fchh.eps', 'epsc')
193
194 %ЛАЧХ
195 lachh = figure;
196 semilogx(w, 20*log10(mag), LineWidth=1.4);
197 hold on;
198 semilogx(w, L, '--', LineWidth=1.4);
199 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
200 xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');

```

```
201 ylabel('$L(\omega)$', Interpreter='latex');
202 title('ЛАЧХ');
203 grid on;
204 ylim([9.5, 10])
205 saveas(lachh, string(scriptName) + '\lachh.eps', 'epsc')
206
207 % ЛФЧХ
208 lfchh = figure;
209 semilogx(w, phase, LineWidth=1.4);
210 hold on;
211 semilogx(w, phi, '--', LineWidth=1.4);
212 legend('Результат моделирования', 'Аналитический расчет', Location='best')
213 xlabel('$\omega$', Interpreter='latex');
214 ylabel('$\varphi(\omega)$', Interpreter='latex');
215 title('ЛФЧХ');
216 grid on;
217 saveas(lfchh, string(scriptName) + '\lfchh.eps', 'epsc')
```

Листинг 1: Код для построения графиков характеристик для всех рассмотренных объектов