Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Факультет систем управления и робототехники

Лабораторная работа №1

ФОРМЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Студент: Заводин Е.Ю.
Лин САУ R23 бак 1.1.1

Преподаватели: Перегудин А.А.
Пашенко А.В.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1 Одноканальная система в форме вход-выход

Согласно указанному в таблице с результатами успеваемости варианту 6, мои коэффициенты для выполнения этого задания следующие:

$$a_2 = 10, a_1 = 31, a_0 = 30, b_2 = 36, b_1 = 21, b_0 = 21.$$

Соответственно, модель в форме дифференциального уравнения выглядит следующим образом:

$$\dddot{y} + 10\,\ddot{y} + 31\,\dot{y} + 30\,y = 36\,\ddot{u} + 21\,\dot{u} + 21\,u.$$

Введём оператор дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$, перепишем систему с его использованием:

$$p^3[y] + 10\,p^2[y] + 31\,p[y] + 30\,y = 36\,p^2[u] + 21\,p[u] + 21\,u.$$

Теперь перенесём все члены полинома, кроме $p^3[y]$, в правую сторону уравнения относительно знака "равно", и, благодаря "Операционному исчислению" Оливера Хевисайда без малейших колебаний поделим всё уравнение на член, оставшийся в левой его части, получим

$$y = \frac{1}{p^3}(21u - 30y) + \frac{1}{p^2}(21u - 31y) + \frac{1}{p}(36u - 10y).$$

Полученное ДУ легко представимо в виде структурной схемы.

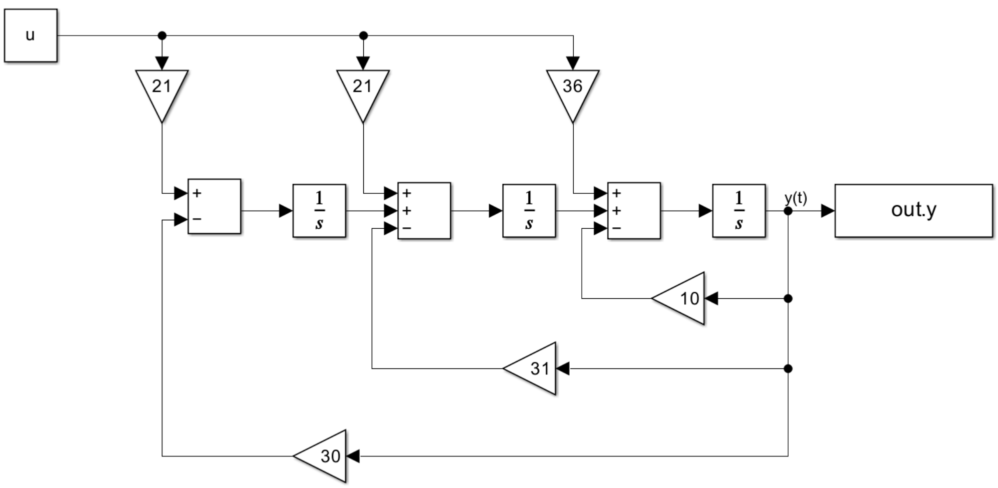

Рисунок 1: Структурная схема одноканальной системы В-В

Для анализа этой системы можно выполнить её моделирование при входном воздействии вида $u(t) = 1$ и нулевых начальных условиях $\ddot{y}(0), \dot{y}(0), y(0)$. Сделаю это, запустив соответствующий скрипт в MATLAB, вот полученные результаты:

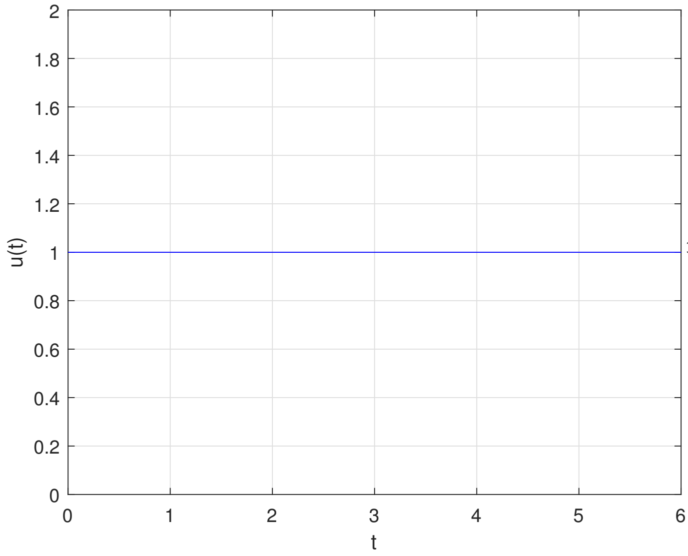

Рисунок 2: График $u(t)$

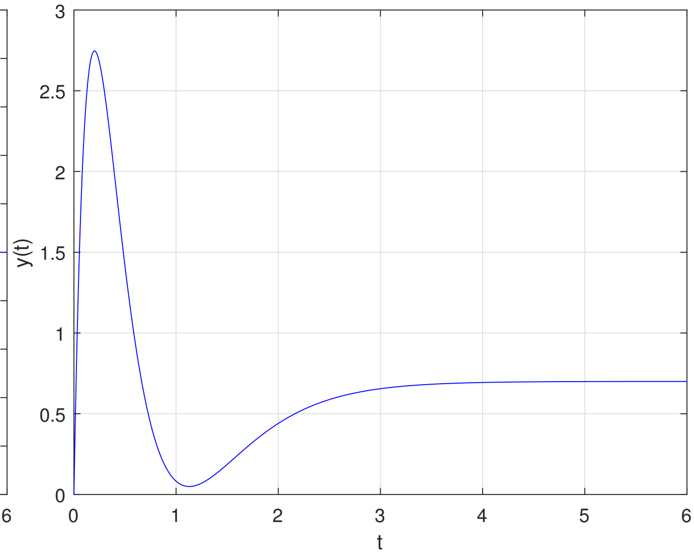

Рисунок 3: График $y(t)$

2 Переход от формы вход-выход к форме вход-состояние-выход

2.1 Математические модели системы

Для построения математических моделей в форме вход-состояние-выход для начала найду передаточную функцию системы. Для этого в исходном дифференциальном уравнении введу дифференциальный оператор, вынесу y и u за скобки и поделю на линейный дифференциальный оператор, стоящий перед y:

$$p^3[y] + 10\,p^2[y] + 31\,p[y] + 30\,y = 36\,p^2[u] + 21\,p[u] + 21\,u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p^3 + 10\,p^2 + 31\,p + 30)[y] = (36\,p^2 + 21\,p + 21)[u] \Leftrightarrow y = \frac{36\,p^2 + 21\,p + 21}{p^3 + 10\,p^2 + 31\,p + 30}[u] = W(p)[u]$$

Передаточная функция в виде дифференциально-интегрального оператора найдена. Это уже позволяет построить 2 из 3 требуемых канонических форм мат. модели вход-состояние-выход.

2.1.1 Общий вид канонических форм

В общем виде мат.модели в канонической управляемой и наблюдаемой формах для передаточной функции вида $W(p) = \frac{b_2p^2+b_1p+b_0}{p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}$ схожи.

Каноническая управляемая:

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}b_0 & b_1 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

Каноническая наблюдаемая:

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & -a_0\\ 1 & 0 & -a_1\\ 0 & 1 & -a_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}b_0\\ b_1\\ b_2\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Общий вид канонической диагональной несколько отличается структурно от предыдущих. Для передаточной функции с динамическим порядком 3 и относительным динамическим 1 он выглядит следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

где λ_n – корни знаменателя передаточной функции, $\beta_n \gamma_n = c_n$, где c_n – коэффициенты в разложении передаточной функции на простейшие дроби.

2.1.2 Математические модели системы в управляемой и наблюдаемой формах

Для получения требуемой управляемой формы системы просто подставлю коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточной функции в общий вид соответствующей модели:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -30 & -31 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 21 & 21 & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Теперь на очереди каноническая наблюдаемая форма. Снова подставлю коэффициенты передаточной функции:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -30 \\ 1 & 0 & -31 \\ 0 & 1 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 21 \\ 21 \\ 36 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Для составления мат. модели в канонической диагональной форме требуется разложить передаточную функцию на простые дроби (можем воспринимать дифференциально-интегральный оператор как функцию от p благодаря трудам Оливера-Хевисайда). Для этого сперва найду корни знаменателя. Первый из них, $\lambda_1 = -2$, я подобрал подстановкой, остальные – делением полиномов "уголком", в результате чего получил $\lambda_2 = -3, \lambda_3 = -5$. Тогда можно записать передаточную функцию следующим образом:

$$W(p) = \frac{36\,p^2 + 21\,p + 21}{p^3 + 10\,p^2 + 31\,p + 30} = \frac{c_1}{p+2} + \frac{c_2}{p+3} + \frac{c_3}{p+5}$$

Коэффициенты c_1, c_2, c_3 могут быть найдены по методу неопределенных коэффициентов. Для начала приведу дроби в правой части к общему знаменателю:

$$\frac{c_1}{p+2} + \frac{c_2}{p+3} + \frac{c_3}{p+5} = \frac{c_1(p+3)(p+5) + c_2(p+2)(p+5) + c_3(p+2)(p+3)}{(p+2)(p+3)(p+5)}.$$

Теперь приравняю изначальную передаточную функцию к тому, что получил, и избавлюсь от знаменателя:

$$W(p) = \frac{36\,p^2 + 21\,p + 21}{p^3 + 10\,p^2 + 31\,p + 30} = \frac{c_1(p+3)(p+5) + c_2(p+2)(p+5) + c_3(p+2)(p+3)}{(p+2)(p+3)(p+5)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36\,p^2 + 21\,p + 21 = c_1(p+3)(p+5) + c_2(p+2)(p+5) + c_3(p+2)(p+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 36\,p^2 + 21\,p + 21 = c_1(p^2 + 8p + 15) + c_2(p^2 + 7p + 10) + c_3(p^2 + 5p + 6) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 36\,p^2 + 21\,p + 21 = p^2(c_1 + c_2 + c_3) + p^1(8c_1 + 7c_2 + 5c_3) + p^0(15c_1 + 10c_2 + 6c_3).$$

Составлю систему, приравняв коэффициенты при одинаковых степенях p:

$$\begin{cases} 36 = c_1 + c_2 + c_3 \\ 21 = 8c_1 + 7c_2 + 5c_3 \\ 21 = 15c_1 + 10c_2 + 6c_3 \end{cases}$$

Решив систему, получил $c_1 = 41, c_2 = -141, c_3 = 136$.

Тогда $W(p) = \frac{41}{p+2} + \frac{-141}{p+3} + \frac{136}{p+5}$. Для нахождения диагональной формы требуется найти такие β_n, γ_n, что $c_n = \beta_n\gamma_n$. Пусть $\beta_1 = 41, \beta_2 = 141, \beta_3 = 68$, тогда $\gamma_1 = 1, \gamma_2 = -1, \gamma_3 = 2$.

Зная общий вид канонической диагональной формы, подставим найденные значения, получим мат. модель вход-состояние-выход в канонической диагональной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 41 \\ 141 \\ 68 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

2.2 Структурные схемы для представлений В-С-В и их моделирование

Структурные схемы строил при помощи *Simulink* на основании уже полученных моделей.

Структурная схема модели в канонической наблюдаемой форме:

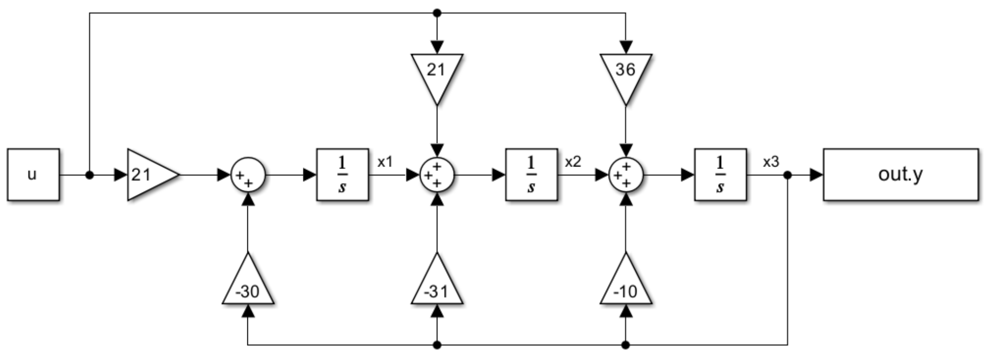

Рисунок 4: Структурная схема одноканальной системы В-С-В в наблюдаемой форме

Структурная схема модели в канонической управляемой форме:

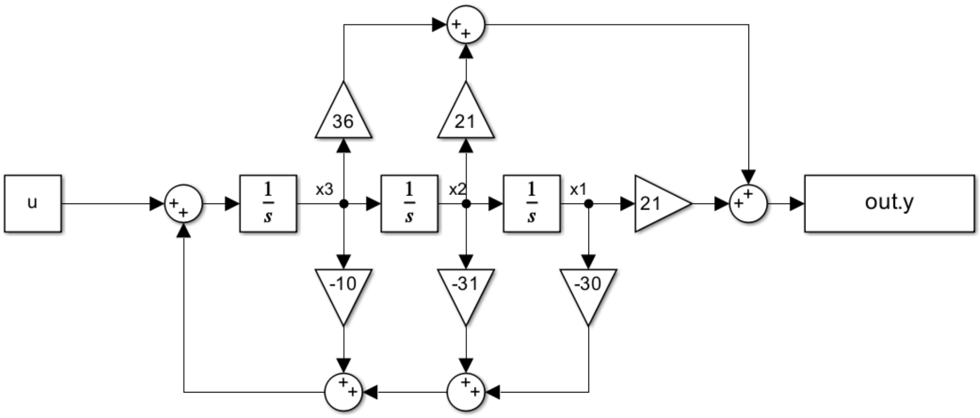

Рисунок 5: Структурная схема одноканальной системы В-С-В в управляемой форме

Структурная схема модели в канонической диагональной форме:

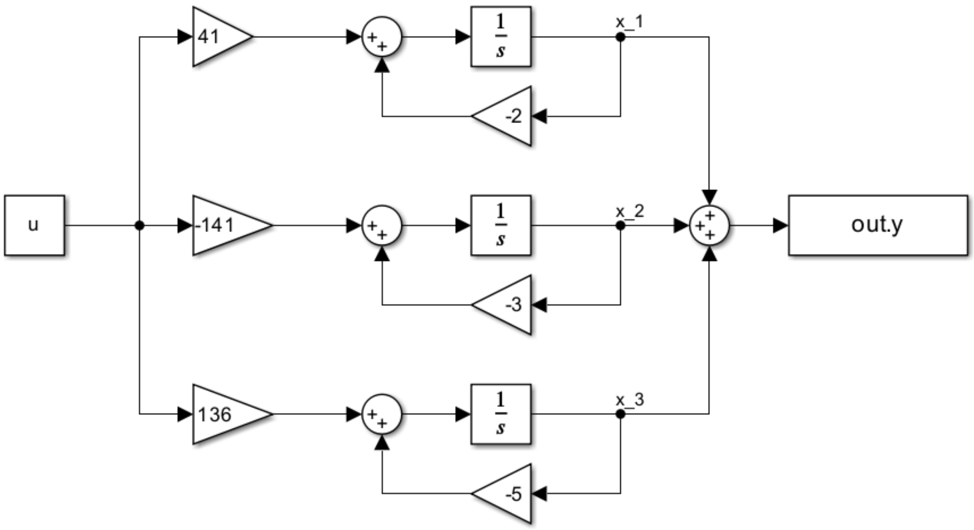

Рисунок 6: Структурная схема одноканальной системы В-С-В в диагональной форме

Задал входное воздействие $u(t) = 1$, смоделировал передаточную функцию и полученные формы В-С-В:

2.3 Выводы

На графиках выходного сигнала можно заметить, что выходы от каждой из форм полностью идентичны, что говорит о том, что добавление в систему промежуточных состояний не меняет результата. Также графики выходных сигналов совпадают с графиком моделирования передаточной функции, из чего можно сделать вывод о том, что структурные схемы составлены верно.

3 Многоканальная система в форме вход-выход

Рассмотрим систему вида

$$A(p)y(t) = B(p)u(t),$$

Для моего варианта:

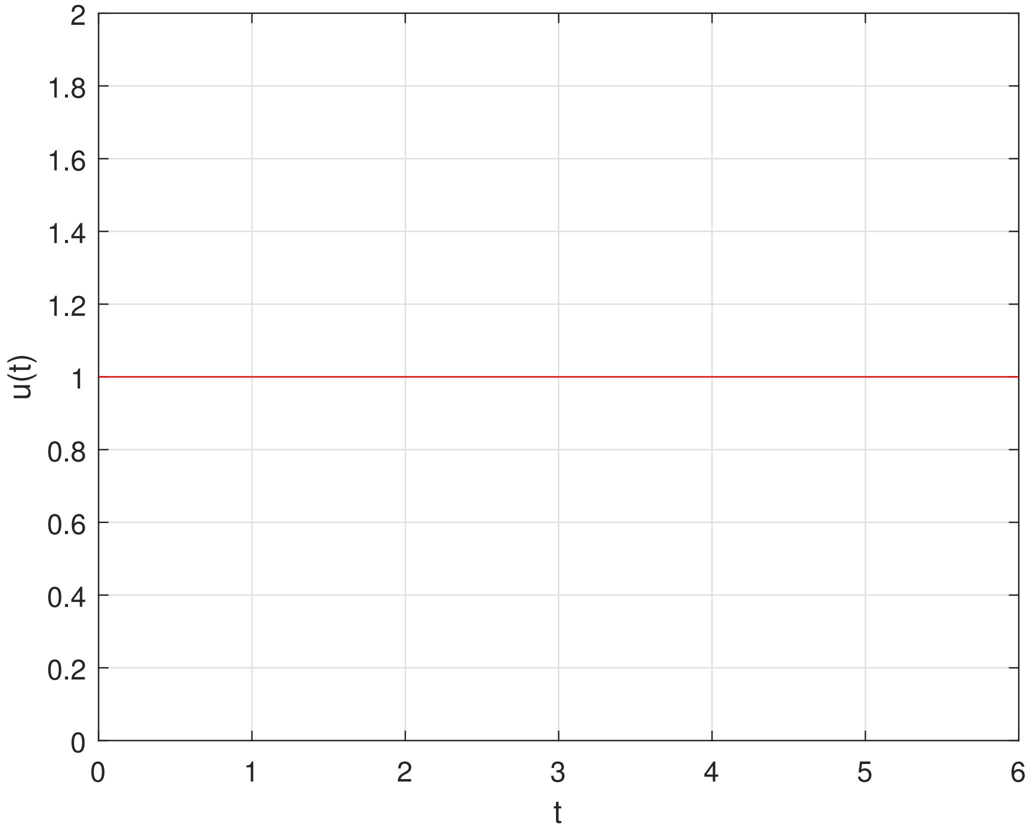

Рисунок 7: График $u(t)$

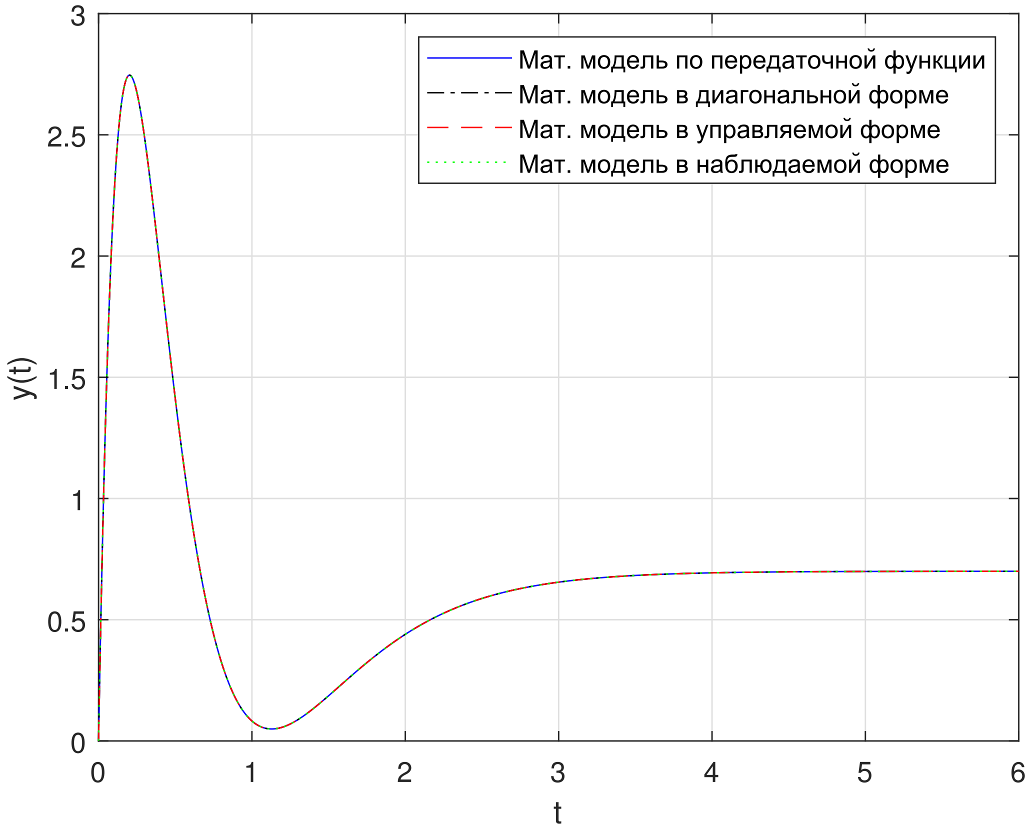

Рисунок 8: Графики $y(t)$

$$A(p) = \begin{bmatrix} p+19 & p+3 \\ p+6 & p+2 \end{bmatrix}, B(p) = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Передаточную матрицу найду из соотношения $W(p) = A(p)^{-1}B(p)$, по аналогии с передаточной функцией в одноканальной системе.

$$A(p)^{-1} = \frac{1}{det\,A(p)}, adj(A(p)) = \frac{1}{det\,A(p)} A(p)^T_{ij}, \Rightarrow W(p) = \frac{1}{det\,A} A(p)^T_{ij} B(p)$$

$$detA(p) = (p+19)(p+2) - (p+3)(p+6) = p^2 + 19p + 2p + 38 - p^2 - 3p - 6p - 18 = 12p + 20$$

$$A(p)^T_{ij} = \begin{bmatrix} p+2 & -p-3 \\ -p-6 & p+19 \end{bmatrix}$$

значит,

$$W(p) = \frac{1}{12p+20} \begin{bmatrix} p+2 & -p-3 \\ -p-6 & p+19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{12p+20} \begin{bmatrix} 2p-1 & p-4 \\ -2p+53 & -p+72 \end{bmatrix}$$

По данной передаточной матрице была построена структурная схема системы:

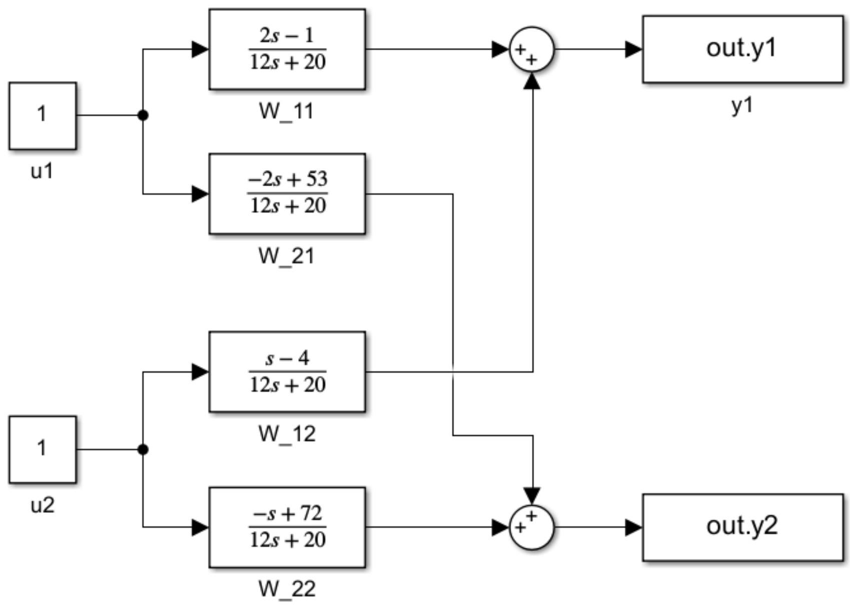

Рисунок 9: Структурная схема многоканальной системы В-В

Схема была запущена с входными воздействиями $u_1 = 1(t)$ и $u_2 = sin(t)$ при нулевых начальных условиях:

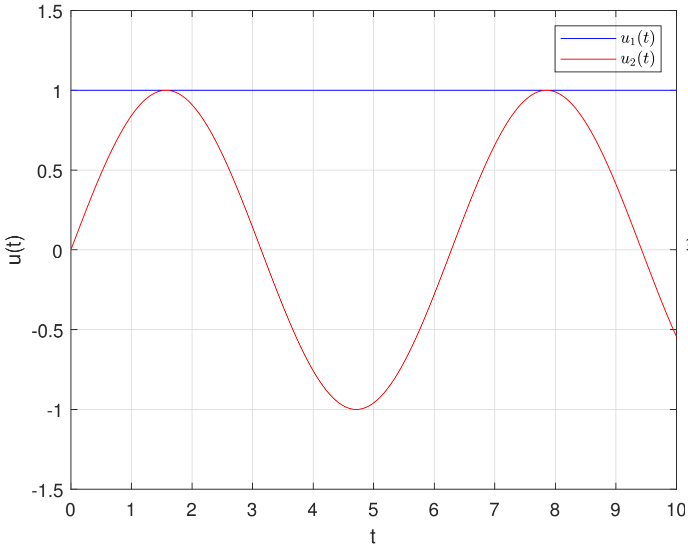

Рисунок 10: График $u(t)$

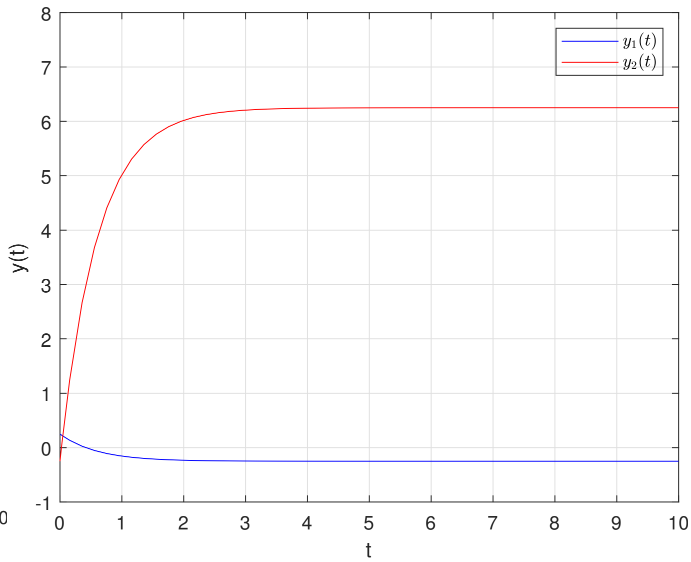

Рисунок 11: Графики $y(t)$

4 Многоканальная система в форме вход-состояние-выход

Общий вид используемой в задании многоканальной системы *Strictly Proper* в форме В-С-В следующий:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

В качестве A, B, C в соответствии с 6 вариантом были взяты следующие матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Структурная схема, составленная в соответствии с полученной системой:

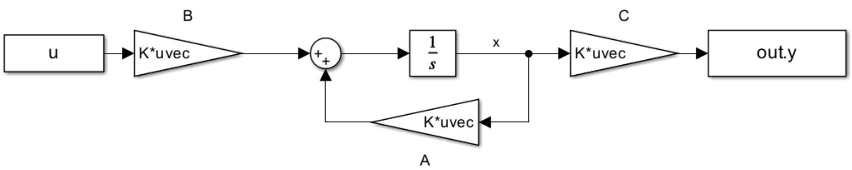

Рисунок 12: Структурная схема многоканальной системы В-С-В

Схема была смоделирована при начальных воздействиях $u_1(t) = 1$ и $u_2(t) = sin(t)$ и нулевом начальном значении вектора состояния:

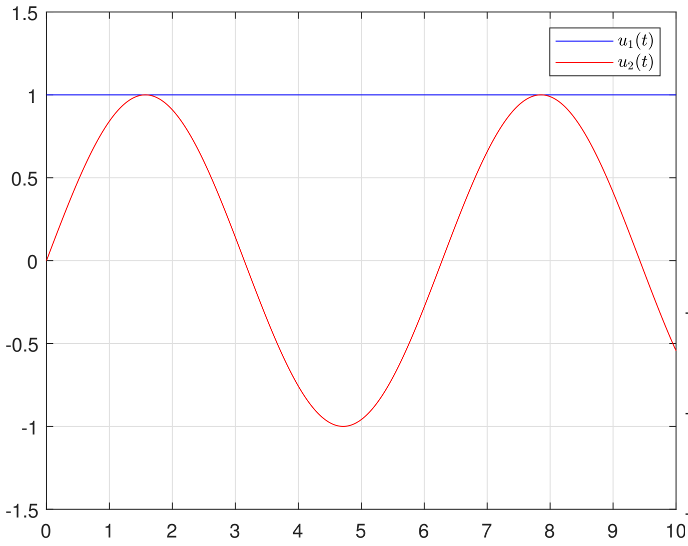

Рисунок 13: График $u(t)$

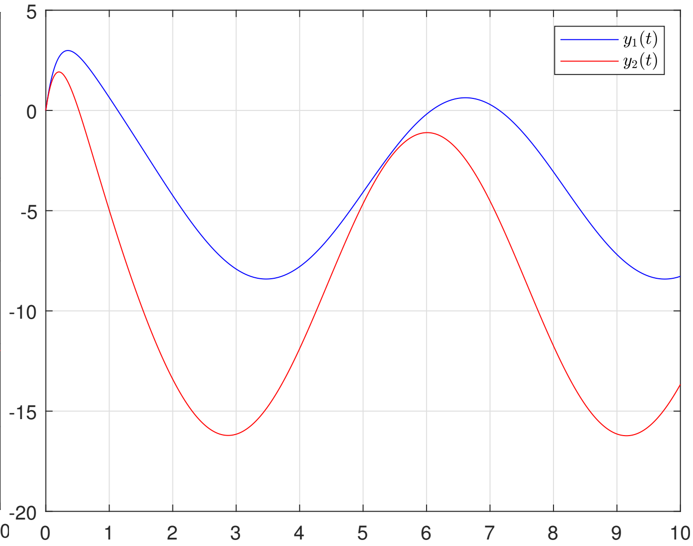

Рисунок 14: Графики $y(t)$

Рисунок 15: Графики многоканальной системы В-С-В

По графикам выходного сигнала видно, что вход $u_2(t)$ действует на оба выхода, так как гармонические колебания появляются и на графике $y_1(t)$, и на $y_2(t)$. Амплитуда колебаний у $y_2(t)$ больше, поэтому можно предположить, что вход $u_2(t)$ оказывает на него большее влияние.

5 Выводы

В процессе выполнения работы я научился более вдумчиво читать структурные схемы, а также создавать их, поработал с операторными передаточными функциями как с обычными функциями, а также познакомился с различными формами представления линейных систем, научился составлять их из передаточных функций (переходить от В-В к В-С-В).

6 Приложение А. Код для выполнения заданий

Листинг 1. Код для выполнения задания 1

```
u = ones(1000,1);

out = sim('model.slx','StopTime','6');
t = linspace(0, 999, 1000);
y = out.y;

u_t = figure;
plot(t, u, 'red'), grid on
xlim([0, 6]);
xlabel('t'), ylabel('u(t)')
title('График u(t)')

y_t = figure;
y.plot('black'), grid on
xlabel('t'), ylabel('y(t)')
title('График y(t)')
```

Листинг 1: Код для построения графиков для задания 1

Листинг 2. Код для выполнения задания 2

```
close all;
u = 1;

out = sim('model2_diagonal.slx','StopTime','6');
t = linspace(0, 6, 1000);
y_diagonal = out.y;

u_t = figure;
u1 = ones(size(t));
plot(t, u1, 'red'); grid on
xlim([0, 6]);
xlabel('t'), ylabel('u(t)')
title('График u(t)')

num = [36 21 21];
den = [1 10 31 30];
sys = tf(num, den);
y = lsim(sys, u1, t);
y_t = figure;
plot(t, y); grid on
xlabel('t'), ylabel('y(t)')
hold on;

y_diagonal.plot('black')
title('Графики y(t)')
hold on;

out = sim('model2_controlable.slx','StopTime','6');
y_controlable = out.y;
y_controlable.plot('--red')
hold on;

xlim([0, 6]);
out = sim('model2_observable.slx','StopTime','6');
y_observable = out.y;
y_observable.plot(':green')
grid on;
legend('Мат. модель по передаточной функции', 'Мат. модель в диагональной форме', 'Мат. модель в упр
    авляемой форме', 'Мат. модель в наблюдаемой форме')
```

Листинг 2: Код для построения графиков для задания 2

Листинг 3. Код для выполнения задания 3

```
close all;

t = (0:0.01:10);
u1 = ones(size(t));
u2 = sin(t);
out = sim('model3');

figure;
out.y1.plot('black')
title('Графики y(t)')
xlabel('t'); ylabel('y(t)')
hold on;

out.y2.plot('red')
grid on;
legend('$y_1(t)$', '$y_2(t)$', 'Interpreter', 'latex')

figure;
plot(t, u1, 'black')
hold on;
plot(t, u2, 'red')
xlabel('t'); ylabel('u(t)')
grid on
title('Графики u(t)')
ylim([-1.5, 1.5])
legend('$u_1(t)$', '$u_2(t)$', 'Interpreter', 'latex', BackgroundAlpha=.2)
```

Листинг 3: Код для построения графиков для задания 3

Листинг 4. Код для выполнения задания 4

```
close all;
t = (0:0.001:10)';
u = [t, ones(size(t)), sin(t)];

out = sim('model4');
plot(out.y.Time, out.y.Data(:, 1))
hold on;
plot(out.y.Time, out.y.Data(:, 2))
grid on;
legend('$y_1(t)$', '$y_2(t)$', 'Interpreter', 'latex')

figure
plot(t, u(:, 2))
hold on;
plot(t, u(:, 3))
grid on;
ylim([-1.5, 1.5])
legend('$u_1(t)$', '$u_2(t)$', 'Interpreter', 'latex')
```

Листинг 4: Код для построения графиков для задания 4