Гузенко А.М.

Вариант 3.

№1.

$(f * g)(x)$, $f(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$ $\quad \chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & else \end{cases}$

$g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$

Обозначим $(f \cdot g)(x) = h(x)$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt = \int_1^2 f(x-t)\,dt$$

$f(x-t) \neq 0 \qquad -2 \le x - t \le 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 \le t \le x+2 \\ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

1 случай: $x < -2$ $\quad \begin{cases} t \le x+2 < 0 \\ t \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-2 \le x < -2 \\ t \ge 1 \end{cases}$ $\quad \varnothing \Rightarrow h(x) = 0$

2 случай: $x > 3$ $\quad \begin{cases} t \ge x-2 > 1 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2 \ge x > 3 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \Rightarrow h(x) = 0$

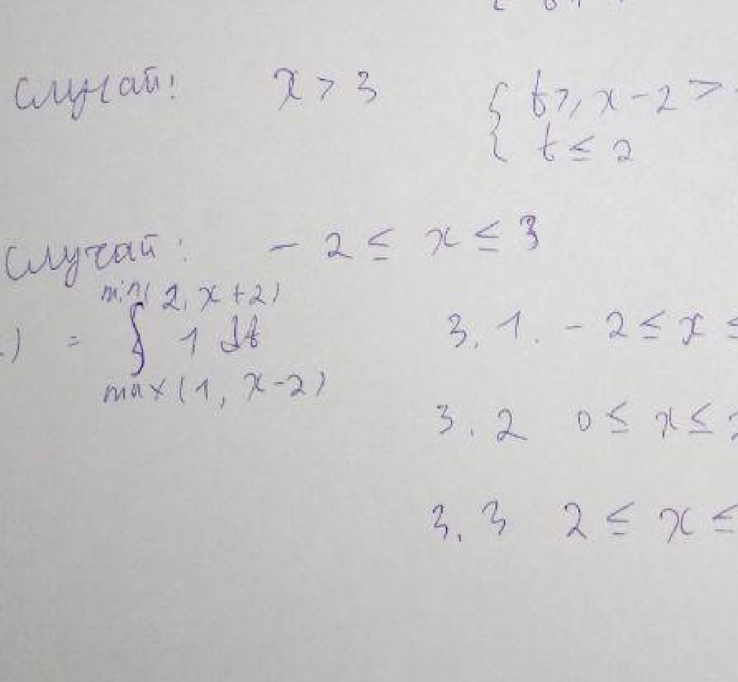
3 случай: $-2 \le x \le 3$

$$h(x) = \int_{max(1,\, x-2)}^{min(2,\, x+2)} 1\,dt$$

3.1. $-2 \le x \le 0$ $\quad h(x) = \int^{x+2} dt = x+4$

3.2 $0 \le x \le 2$ $\quad h(x) = \int_{x-2}^{x+2} dt = 4$

3.3 $2 \le x \le 3$ $\quad h(x) = \int_{x-2}^{3} dt = 5 - x$



Гузенко А.М.

Вариант 3.

№1.

$(f * g)(x)$, $f(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$ $\quad \chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, x \in [a,b] \\ 0, \text{else} \end{cases}$

$g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$

Обозначим $(f \cdot g)(x) = h(x)$

$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int\limits_{1}^{2} f(x-t)\, dt$

$f(x-t) \neq 0 \qquad -2 \le x - t \le 2$

$\Rightarrow \begin{cases} x-2 \le t \le x+2 \\ 1 \le t \le 2 \end{cases}$

1 случай: $x < -2$ $\quad \begin{cases} t \le x+2 < 0 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-2 \le x < -2 \\ t \geq 1 \end{cases}$ $\quad \varnothing \Rightarrow$ $h(x) = 0$

2 случай: $x > 3$ $\quad \begin{cases} t \geq x-2 > 1 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2 \geq x > 3 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \Rightarrow$ $h(x) = 0$

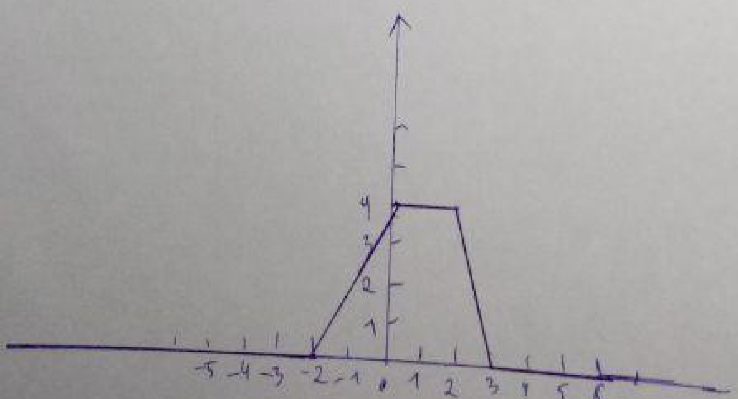
3 случай: $-2 \le x \le 3$

$h(x) = \int\limits_{\max(1,\, x-2)}^{\min(2,\, x+2)} 1\, dt$

3.1. $-2 \le x \le 0$ $\quad h(x) = \int\limits_{x+2} dt = x+4$

3.2 $\quad 0 \le x \le 2$ $\quad h(x) = \int\limits_{x-2}^{x+2} dt = 4$

3.3 $\quad 2 \le x \le 3$ $\quad h(x) = \int\limits_{x-2}^{3} dt = 5 - x$



Гузенко А.М.

Вариант 3.

№1.

$(f * g)(x)$, $f(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$ $\quad \chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, x\in[a,b] \\ 0, else \end{cases}$

$g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$

Обозначим $(f \cdot g)(x) = h(x)$

$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\,g(t)\,dt = \int_{1}^{2} f(x-t)\,dt$

$f(x-t) \neq 0 \qquad -2 \le x - t \le 2$

$\Rightarrow \begin{cases} x-2 \le t \le x+2 \\ 1 \le t \le 2 \end{cases}$

1 случай: $x < -2$ $\quad \begin{cases} t \le x+2 < 0 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-2 \le x < -2 \\ t \geq 1 \end{cases}$ $\quad \varnothing \Rightarrow h(x) = 0$

2 случай: $x > 3$ $\quad \begin{cases} t \geq x-2 > 1 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2 \geq x > 3 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \Rightarrow h(x) = 0$

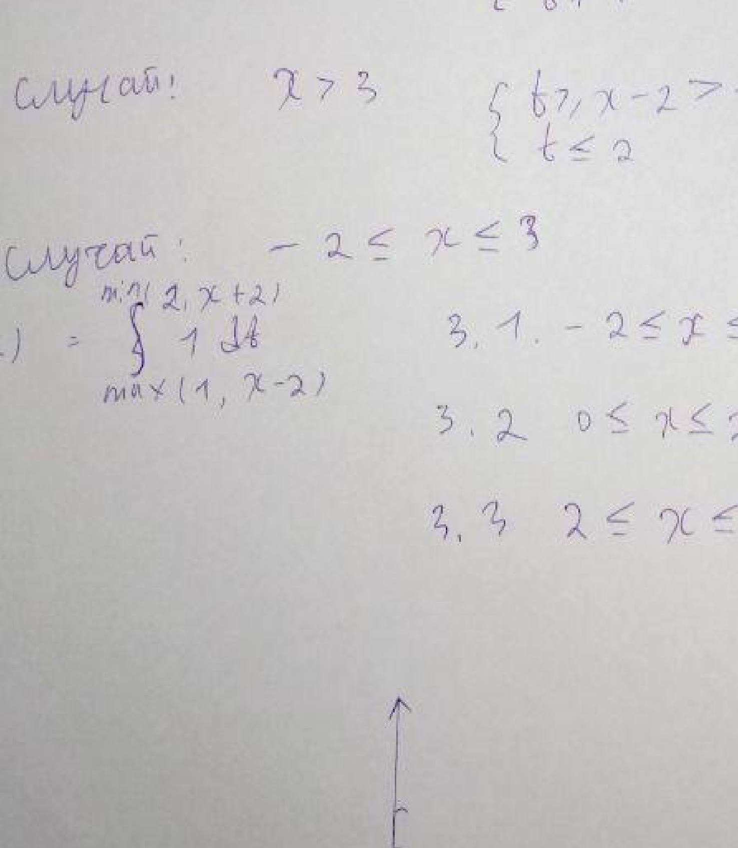
3 случай: $-2 \le x \le 3$

$h(x) = \int_{\max(1,\,x-2)}^{\min(2,\,x+2)} 1\,dt$

3.1. $-2 \le x \le 0$ $\quad h(x) = \int^{x+2} dt = x+4$

3.2 $0 \le x \le 2$ $\quad h(x) = \int_{x-2}^{x+2} dt = 4$

3.3 $2 \le x \le 3$ $\quad h(x) = \int_{x-2}^{3} dt = 5 - x$



Гузенко А.М. Вариант 3.

№1.

$(f*g)(x)$, $f(x)=\chi_{[-2,2]}(x)$ $\quad \chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1, x\in[a,b]\\ 0, \text{else}\end{cases}$

$g(x)=\chi_{[1,2]}(x)$

Обозначим $(f\cdot g)(x)=h(x)$

$$h(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t)\,dt=\int_1^2 f(x-t)\,dt$$

$f(x-t)\neq 0 \qquad -2\le x-t\le 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2\le t\le x+2\\ 1\le t\le 2\end{cases}$$

1 случай: $x<-2$ $\quad \begin{cases}t\le x+2<0\\ t\ge 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t-2\le x<-2\\ t\ge 1\end{cases}$ $\quad \varnothing \Rightarrow h(x)=0$

2 случай: $x>3$ $\quad \begin{cases}t\ge x-2>1\\ t\le 2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}t+2\ge x>3\\ t\le 2\end{cases} \Rightarrow \varnothing \Rightarrow h(x)=0$

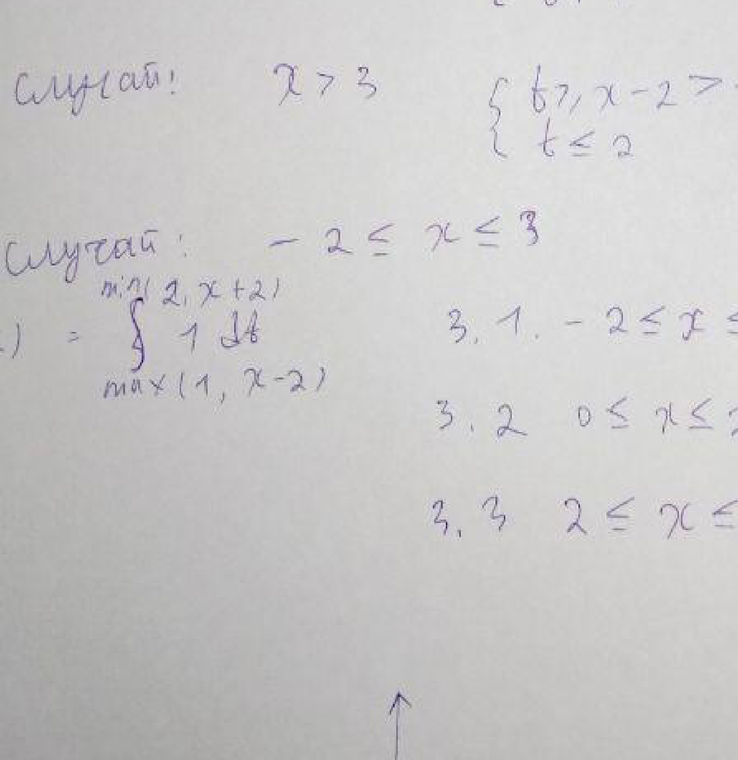
3 случай: $-2\le x\le 3$

$$h(x)=\int_{\max(1,x-2)}^{\min(2,x+2)} 1\,dt$$

3.1. $-2\le x\le 0$ $\quad h(x)=\int^{x+2} dt = x+4$

3.2 $0\le x\le 2$ $\quad h(x)=\int_{x-2}^{x+2} dt = 4$

3.3 $2\le x\le 3$ $\quad h(x)=\int_{x-2}^{3} dt = 5-x$



Гузенко А.М.

Вариант 3.

№1

$(f * g)(x)$, $f(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$ $\quad \chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & else \end{cases}$

$g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$

Обозначим $(f \cdot g)(x) = h(x)$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int_1^2 f(x-t)\, dt$$

$f(x-t) \neq 0 \qquad -2 \le x - t \le 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2 \le t \le x+2 \\ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

1 случай: $x < -2$ $\quad \begin{cases} t \le x+2 < 0 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-2 \le x < -2 \\ t \geq 1 \end{cases}$ $\quad \varnothing \Rightarrow h(x) = 0$

2 случай: $x > 3$ $\quad \begin{cases} t \geq x-2 > 1 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2 \geq x > 3 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \Rightarrow h(x) = 0$

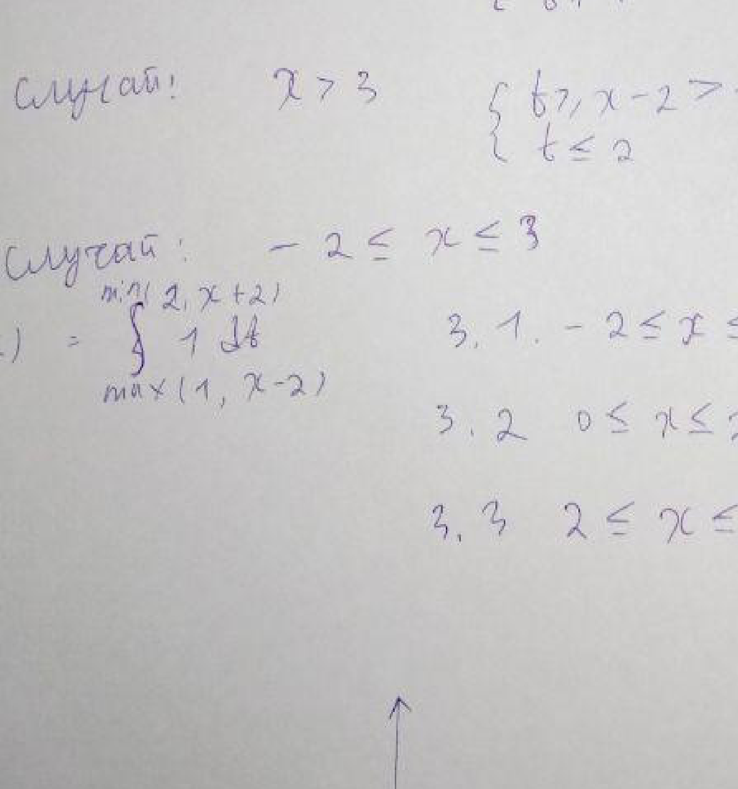
3 случай: $-2 \le x \le 3$

$$h(x) = \int_{max(1,\, x-2)}^{min(2,\, x+2)} 1\, dt$$

3.1. $-2 \le x \le 0$ $\quad h(x) = \int_{x+2}^{x+2} dt = x + 4$

3.2 $\quad 0 \le x \le 2$ $\quad h(x) = \int_{x-2}^{x-2} dt = 4$

3.3 $\quad 2 \le x \le 3$ $\quad h(x) = \int_{x-2}^{3} dt = 5 - x$



Гузенко А.М.

Вариант 3.

№1.

$(f * g)(x)$, $f(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$ $\quad \chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, x \in [a,b] \\ 0, \text{else} \end{cases}$

$g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$

Обозначим $(f \cdot g)(x) = h(x)$

$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int\limits_{1}^{2} f(x-t)\, dt$

$f(x-t) \neq 0 \qquad -2 \le x - t \le 2$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 \le t \le x + 2 \\ 1 \le t \le 2 \end{cases}$

1 случай: $x < -2$ $\quad \begin{cases} t \le x+2 < 0 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - 2 \le x < -2 \\ t \geq 1 \end{cases}$ $\quad \varnothing \Rightarrow$ $h(x) = 0$

2 случай: $x > 3$ $\quad \begin{cases} t \geq x - 2 > 1 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + 2 \geq x > 3 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \Rightarrow$ $h(x) = 0$

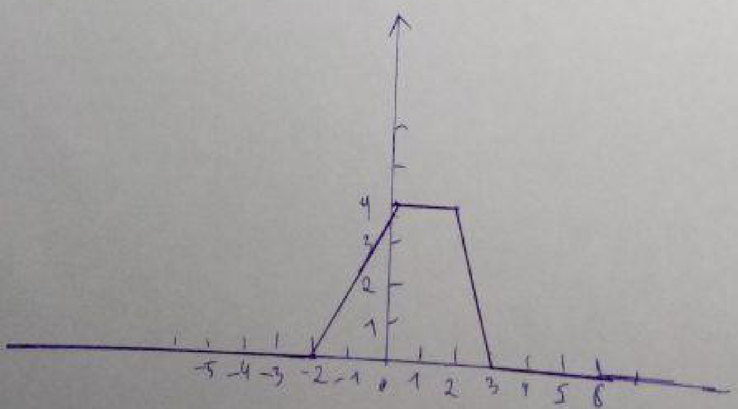
3 случай: $-2 \le x \le 3$

$h(x) = \int\limits_{\max(1,\, x-2)}^{\min(2,\, x+2)} 1\, dt$

3.1. $-2 \le x \le 0$ $\quad h(x) = \int\limits_{x+2}^{x+2} dt = x + 4$

3.2 $\quad 0 \le x \le 2$ $\quad h(x) = \int\limits_{x-2}^{x+2} dt = 4$

3.3 $\quad 2 \le x \le 3$ $\quad h(x) = \int\limits_{x-2}^{3} dt = 5 - x$



Гузенко А.М.

Вариант 3.

№1

$(f * g)(x)$, $f(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$ $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b] \\ 0, & else \end{cases}$

$g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$

Обозначим $(f \cdot g)(x) = h(x)$

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int_1^2 f(x-t)\, dt$$

$f(x-t) \neq 0$ $-2 \le x - t \le 2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 \le t \le x + 2 \\ 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

1 случай: $x < -2$ $\begin{cases} t \le x + 2 < 0 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t - 2 \le x < -2 \\ t \geq 1 \end{cases}$ $\emptyset \Rightarrow h(x) = 0$

2 случай: $x > 3$ $\begin{cases} t \geq x - 2 > 1 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t + 2 \geq x > 3 \\ t \le 2 \end{cases} \Rightarrow \emptyset \Rightarrow h(x) = 0$

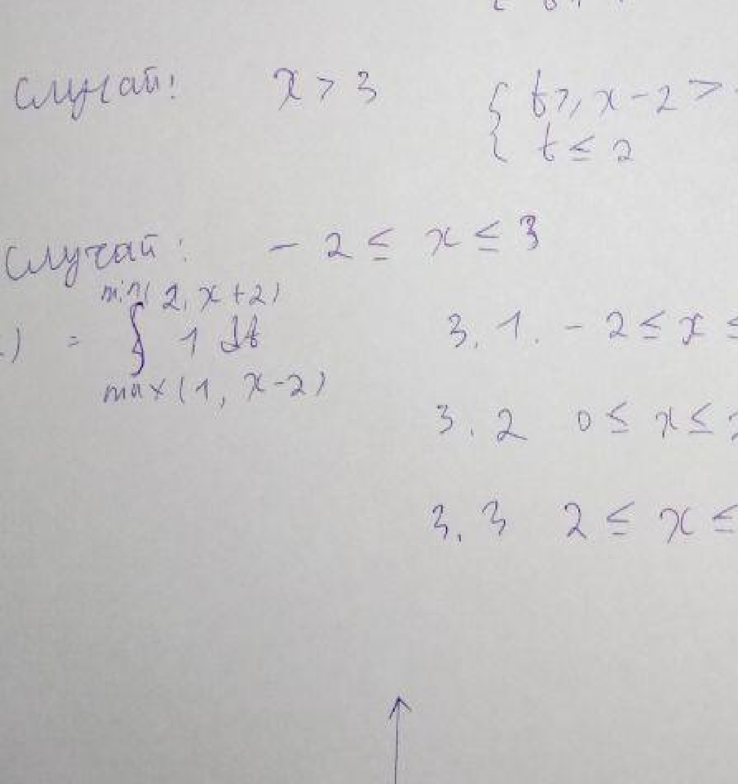
3 случай: $-2 \le x \le 3$

$$h(x) = \int_{\max(1,\, x-2)}^{\min(2,\, x+2)} 1\, dt$$

3.1. $-2 \le x \le 0$ $h(x) = \int^{x+2} dt = x + 4$

3.2 $0 \le x \le 2$ $h(x) = \int_{x-2}^{x+2} dt = 4$

3.3 $2 \le x \le 3$ $h(x) = \int_{x-2}^{3} dt = 5 - x$



Гузенко А.М.

Вариант 3.

№1.

$(f * g)(x)$, $f(x) = \chi_{[-2,2]}(x)$ $\quad \chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, x \in [a,b] \\ 0, else \end{cases}$

$g(x) = \chi_{[1,2]}(x)$

Обозначим $(f \cdot g)(x) = h(x)$

$h(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)\, g(t)\, dt = \int\limits_{1}^{2} f(x-t)\, dt$

$f(x-t) \neq 0 \qquad -2 \leq x - t \leq 2$

$\Rightarrow \begin{cases} x-2 \leq t \leq x+2 \\ 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$

1 случай: $x < -2$ $\quad \begin{cases} t \leq x+2 < 0 \\ t \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t-2 \leq x < -2 \\ t \geq 1 \end{cases}$ $\quad \varnothing \Rightarrow h(x) = 0$

2 случай: $x > 3$ $\quad \begin{cases} t \geq x-2 > 1 \\ t \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t+2 \geq x > 3 \\ t \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \varnothing \Rightarrow h(x) = 0$

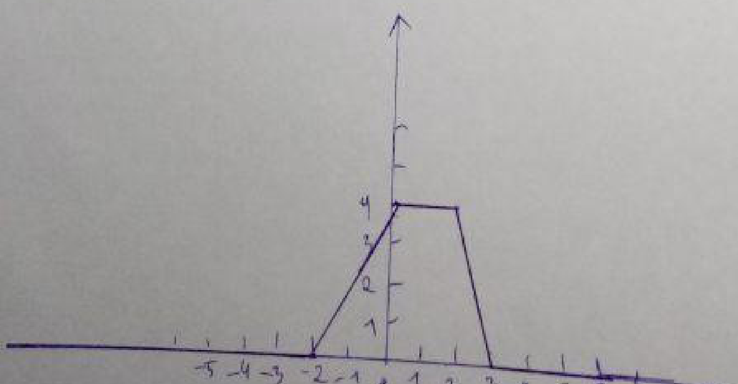
3 случай: $-2 \leq x \leq 3$

$h(x) = \int\limits_{\max(1,\, x-2)}^{\min(2,\, x+2)} 1\, dt$

3.1. $-2 \leq x \leq 0$ $\quad h(x) = \int\limits^{x+2} dt = x+4$

3.2. $0 \leq x \leq 2$ $\quad h(x) = \int\limits_{x-2}^{x+2} dt = 4$

3.3. $2 \leq x \leq 3$ $\quad h(x) = \int\limits_{x-2}^{3} dt = 5 - x$



Гузенко А.М №3

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)(C_{2k}^{k})^2\right)^{-1}, \quad n = 3, 4$$

$$\Delta_2 = (3(C_2^1)^2 \cdot 5(C_4^2)^2)^{-1} = (12 \cdot 5 \cdot 36)^{-1} = \frac{1}{2160}$$

$$\Delta_3 = (2160 \cdot 7 \cdot (C_6^3)^2))^{-1} = (2160 \cdot 7 \cdot 400)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{6048000}$$

№2

Пусть требуется вычислить в точке x_0 производную некоторой функции f. Для нахождения производной будем использовать простейшую формулу численного дифференцирования с модификацией:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \quad (1)$$

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема, причем $|f''(x)| \le M$ (2)

Оценим точность формулы (1) в зависимости от $h>0$. Предположим, что значения f в точках x_0, x_0+h и x_0-h известны точно. Согласно формуле Тейлора:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h) \quad (3)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h - R(h)$$

В силу предположения (2) для остаточного члена $R(h)$ формулы Тейлора справедлива оценка

$$|R(h)| \le \frac{Mh^2}{2}$$

Гузенко А.М   № 3

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)(C_{2k}^{k})^2\right)^{-1}, \quad n = 3, 4$$

$$\Delta_2 = (3(C_2^1)^2 \cdot 5(C_4^2)^2)^{-1} = (12 \cdot 5 \cdot 36)^{-1} = \frac{1}{2160}$$

$$\Delta_3 = (2160 \cdot 7 \cdot (C_6^3)^2))^{-1} = (2160 \cdot 7 \cdot 400)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{6048000}$$

№ 2

Пусть требуется вычислить в точке x_0 производную некоторой функции f. Для нахождения производной будем использовать простейшую формулу численного дифференцирования с модификацией:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \qquad (1)$$

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема, причем $|f''(x)| \leq M$ (2)

Оценим точность формулы (1) в зависимости от $h>0$. Предположим, что значения f в точках x_0, x_0+h и x_0-h известны точно. Согласно формуле Тейлора: $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h)$ (3)

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h - R(h)$$

В силу предположения (2) для остаточного члена $R(h)$ формулы Тейлора справедлива оценка

$$|R(h)| \leq \frac{Mh^2}{2}$$

Гузенко А.М

№ 3

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)\left(C_{2k}^{k}\right)^2\right)^{-1}, \quad n = 3, 4$$

$$\Delta_2 = \left(3\left(C_2^1\right)^2 \cdot 5\left(C_4^2\right)^2\right)^{-1} = (12 \cdot 5 \cdot 36)^{-1} = \frac{1}{2160}$$

$$\Delta_3 = \left(2160 \cdot 7 \cdot \left(C_6^3\right)^2\right)^{-1} = (2160 \cdot 7 \cdot 400)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{6048000}$$

№ 2

Пусть требуется вычислить в точке x_0 производную некоторой функции f. Для нахождения производной будем использовать простейшую формулу численного дифференцирования с модификацией:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \qquad (1)$$

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема, причем $|f''(x)| \leq M$ (2)

Оценим точность формулы (1) в зависимости от $h>0$. Предположим, что значения f в точках x_0, x_0+h и x_0-h известны точно. Согласно формуле Тейлора:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h) \qquad (3)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h - R(h)$$

В силу предположения (2) для остаточного члена $R(h)$ формулы Тейлора справедлива оценка

$$|R(h)| \leq \frac{Mh^2}{2}$$

Гузенко А.М   № 3

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1}(2k+1)(C_{2k}^{k})^2\right)^{-1}, \quad n=3,4$$

$$\Delta_2 = \left(3(C_2^1)^2 \cdot 5(C_4^2)^2\right)^{-1} = (12\cdot 5\cdot 36)^{-1} = \frac{1}{2160}$$

$$\Delta_3 = \left(2160\cdot 7\cdot (C_6^3)^2)\right)^{-1} = (2160\cdot 7\cdot 400)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{6048000}$$

№ 2

Пусть требуется вычислить в точке x_0 производную некоторой функции f. Для нахождения производной будем использовать простейшую формулу численного дифференцирования с модификацией:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \qquad (1)$$

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема, причем $|f''(x)| \le M$ (2)

Оценим точность формулы (1) в зависимости от $h>0$. Предположим, что значения f в точках x_0, x_0+h и x_0-h известны точно. Согласно формуле Тейлора:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h) \qquad (3)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h - R(h)$$

В силу предположения (2) для остаточного члена $R(h)$ формулы Тейлора справедлива оценка

$$|R(h)| \le \frac{Mh^2}{2}$$

Гузенко А.М № 3

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)(C_{2k}^{k})^2\right)^{-1}, \quad n = 3, 4$$

$$\Delta_2 = \left(3(C_2^1)^2 \cdot 5(C_4^2)^2\right)^{-1} = (12 \cdot 5 \cdot 36)^{-1} = \frac{1}{2160}$$

$$\Delta_3 = \left(2160 \cdot 17 \cdot (C_6^3)^2\right)^{-1} = (2160 \cdot 7 \cdot 400)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{6048000}$$

№ 2

Пусть требуется вычислить в точке x_0 производную некоторой функции f. Для нахождения производной будем использовать простейшую формулу численного дифференцирования с модификацией:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \quad (1)$$

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема, причем $|f''(x)| \leq M$ (2)

Оценим точность формулы (1) в зависимости от $h>0$. Предположим, что значения f в точках x_0, x_0+h и x_0-h известны точно. Согласно формуле Тейлора:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h) \quad (3)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h - R(h)$$

В силу предположения (2) для остаточного члена $R(h)$ формулы Тейлора справедлива оценка

$$|R(h)| \leq \frac{Mh^2}{2}$$

Гузенко А.М № 3

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)(C_{2k}^k)^2\right)^{-1}, \quad n = 3, 4$$

$$\Delta_2 = (3(C_2^1)^2 \cdot 5(C_4^2)^2)^{-1} = (12 \cdot 5 \cdot 36)^{-1} = \frac{1}{2160}$$

$$\Delta_3 = (2160 \cdot 17 \cdot (C_6^3)^2))^{-1} = (2160 \cdot 7 \cdot 400)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{6048000}$$

№ 2

Пусть требуется вычислить в точке x_0 производную некоторой функции f. Для нахождения производной будем использовать простейшую формулу численного дифференцирования с модификацией:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \quad (1)$$

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема, причем $|f''(x)| \le M$ (2)

Оценим точность формулы (1) в зависимости от $h>0$. Предположим, что значения f в точках x_0, x_0+h и x_0-h известны точно. Согласно формуле Тейлора:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h) \quad (3)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h - R(h)$$

В силу предположения (2) для остаточного члена $R(h)$ формулы Тейлора справедлива оценка

$$|R(h)| \le \frac{Mh^2}{2}$$

Гузенко А.М   № 3

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)(C_{2k}^k)^2\right)^{-1}, \quad n = 3, 4$$

$$\Delta_2 = (3(C_2^1)^2 \cdot 5(C_4^2)^2)^{-1} = (12 \cdot 5 \cdot 36)^{-1} = \frac{1}{2160}$$

$$\Delta_3 = (2160 \cdot 7 \cdot (C_6^3)^2))^{-1} = (2160 \cdot 7 \cdot 400)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{6048000}$$

№ 2

Пусть требуется вычислить в точке x_0 производную некоторой функции f. Для нахождения производной будем использовать простейшую формулу численного дифференцирования с модификацией:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \quad (1)$$

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема, причем $|f''(x)| \leq M$ (2)

Оценим точность формулы (1) в зависимости от $h > 0$. Предположим, что значения f в точках x_0, $x_0 + h$ и $x_0 - h$ известны точно. Согласно формуле Тейлора:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h) \quad (3)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h - R(h)$$

В силу предположения (2) для остаточного члена $R(h)$ формулы Тейлора справедлива оценка

$$|R(h)| \leq \frac{Mh^2}{2}$$

Гузенко А.М. № 3

$$\Delta_n = \left(\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)(C_{2k}^{k})^2\right)^{-1}, \quad n = 3, 4$$

$$\Delta_2 = (3(C_2^1)^2 \cdot 5(C_4^2)^2)^{-1} = (12 \cdot 5 \cdot 36)^{-1} = \frac{1}{2160}$$

$$\Delta_3 = (2160 \cdot 17 \cdot (C_6^3)^2))^{-1} = (2160 \cdot 7 \cdot 400)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{6048000}$$

№ 2

Пусть требуется вычислить в точке x_0 производную некоторой функции f. Для нахождения производной будем использовать простейшую формулу численного дифференцирования с модификацией:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \qquad (1)$$

Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема, причем $|f''(x)| \le M$ (2)

Оценим точность формулы (1) в зависимости от $h>0$. Предположим, что значения f в точках x_0, x_0+h и x_0-h известны точно. Согласно формуле Тейлора:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h) \qquad (3)$$

$$f(x_0-h) = f(x_0) - f'(x_0)h - R(h)$$

В силу предположения (2) для остаточного члена $R(h)$ формулы Тейлора справедлива оценка

$$|R(h)| \le \frac{Mh^2}{2}$$

Гузенко А.М.

Обозначим через $r_1 = r_1(h)$ разность между приближенным и точным значениями производной, т.е. $r_1(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0)$ (4)

Из формулы (3) видно, что $r_1(h) = \frac{R(h)}{2h}$, откуда

$$|r_1(h)| \le Mh$$

Таким образом, $r_1(h) \to 0$ при $h \to 0$

Ситуация существенно меняется, если значение f известны в точках x_0, x_0+h, x_0-h с некоторой погрешностью $\varepsilon > 0$. Пусть заданы приближенные значения $\tilde{f}(x_0+h), \tilde{f}(x_0-h)$, такие что

$$|\tilde{f}(x_0-h) - f(x_0-h)| \le \varepsilon, \quad |\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h)| \le \varepsilon \quad (5)$$

В этом случае

$$\frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = r_1(h) + r_2(h)$$

r_1 нам известно из (4), а r_2

$$r_2(h) = \frac{\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h) + f(x_0-h)}{2h}$$

Отсюда из формулы (5) следует оценка.

$$|r_2(h)| \le \frac{\varepsilon}{h}$$

следовательно общая погрешность формулы (1)

$$g(h) = Mh + \frac{\varepsilon}{h}$$

При стремлении h к нулю величина $\frac{\varepsilon}{h}$ стремится к бесконечности, т.е. формулу (1) при слишком малых h применять нельзя.

Найдем минимальное значение $g(h)$.

Гузенко А.М.

Обозначим через $r_1 = r_1(h)$ разность между приближенным и точным значениями производной, т.е.
$$r_1(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \quad (4)$$
Из формулы (3) видно, что $r_1(h) = \frac{R(h)}{2h}$, откуда
$$|r_1(h)| \leq Mh$$
Таким образом, $r_1(h) \to 0$ при $h \to 0$

Ситуация существенно меняется, если значение f известны в точках x_0, x_0+h, x_0-h с некоторой погрешностью $\varepsilon > 0$. Пусть заданы приближенные значения $\tilde{f}(x_0+h), \tilde{f}(x_0-h)$, такие что
$$|\tilde{f}(x_0-h) - f(x_0-h)| \leq \varepsilon, \quad |\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h)| \leq \varepsilon \quad (5)$$
В этом случае
$$\frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = r_1(h) + r_2(h)$$
r_1 нам известно из (4), а r_2
$$r_2(h) = \frac{\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h) + f(x_0-h)}{2h}$$
Отсюда из формулы (5) следует оценка.
$$|r_2(h)| \leq \frac{\varepsilon}{h}$$
следовательно общая погрешность формулы (1)
$$g(h) = Mh + \frac{\varepsilon}{h}$$
При стремлении h к нулю величина $\frac{\varepsilon}{h}$ стремится к бесконечности, т.е. формулу (1) при слишком малых h применять нельзя.

Найдем минимальное значение $g(h)$.

Гузенко А.М.

Обозначим через $r_1 = r_1(h)$ разность между приближенным и точным значениями производной, т.е.

$$r_1(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \quad (4)$$

Из формулы (3) видно, что $r_1(h) = \frac{R(h)}{2h}$, откуда

$$|r_1(h)| \le Mh$$

Таким образом, $r_1(h) \to 0$ при $h \to 0$

Ситуация существенно меняется, если значение f известны в точках x_0, x_0+h, x_0-h с некоторой погрешностью $\varepsilon > 0$. Пусть заданы приближенные значения $\tilde{f}(x_0+h), \tilde{f}(x_0-h)$, такие что

$$|\tilde{f}(x_0-h) - f(x_0-h)| \le \varepsilon, \quad |\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h)| \le \varepsilon \quad (5)$$

В этом случае

$$\frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = r_1(h) + r_2(h)$$

r_1 нам известно из (4), а r_2

$$r_2(h) = \frac{\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h) + f(x_0-h)}{2h}$$

Отсюда из формулы (5) следует оценка.

$$|r_2(h)| \le \frac{\varepsilon}{h}$$

следовательно общая погрешность формулы (1)

$$g(h) = Mh + \frac{\varepsilon}{h}$$

При стремлении h к нулю величина $\frac{\varepsilon}{h}$ стремится к бесконечности, т.е. формулу (1) при слишком малых h применять нельзя.

Найдем минимальное значение $g(h)$.

Гуженко А.М.

Обозначим через $r_1 = r_1(h)$ разность между приближенным и точным значениями производной, т.е.

$$r_1(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \quad (4)$$

Из формулы (3) видно, что $r_1(h) = \frac{R(h)}{2h}$, откуда

$$|r_1(h)| \le Mh$$

Таким образом, $r_1(h) \to 0$ при $h \to 0$

Ситуация существенно меняется, если значение f известны в точках x_0, x_0+h, x_0-h с некоторой погрешностью $\varepsilon > 0$. Пусть заданы приближенные значения $\tilde{f}(x_0+h)$, $\tilde{f}(x_0-h)$, такие что

$$|\tilde{f}(x_0-h) - f(x_0-h)| \le \varepsilon, \quad |\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h)| \le \varepsilon \quad (5)$$

В этом случае

$$\frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = r_1(h) + r_2(h)$$

r_1 нам известно из (4), а r_2

$$r_2(h) = \frac{\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h) + f(x_0-h)}{2h}$$

Отсюда из формулы (5) следует оценка.

$$|r_2(h)| \le \frac{\varepsilon}{h}$$

следовательно общая погрешность формулы (1)

$$g(h) = Mh + \frac{\varepsilon}{h}$$

При стремлении h к нулю величина $\frac{\varepsilon}{h}$ стремится к бесконечности, т.е. формулу (1) для слишком малых h применять нельзя.

Найдем минимальное значение $g(h)$.

Гуженко А.М.

Обозначим через $r_1 = r_1(h)$ разность между приближенным и точным значениями производной, т.е.
$$r_1(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \quad (4)$$

Из формулы (3) видно, что $r_1(h) = \frac{R(h)}{2h}$, откуда
$$|r_1(h)| \leq Mh$$

Таким образом, $r_1(h) \to 0$ при $h \to 0$

Ситуация существенно меняется, если значение f известны в точках x_0, x_0+h, x_0-h с некоторой погрешностью $\varepsilon > 0$. Пусть заданы приближенные значения $\tilde{f}(x_0+h), \tilde{f}(x_0-h)$, такие что
$$|\tilde{f}(x_0-h) - f(x_0-h)| \leq \varepsilon, \quad |\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h)| \leq \varepsilon \quad (5)$$

В этом случае
$$\frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = r_1(h) + r_2(h)$$

r_1 нам известно из (4), а r_2
$$r_2(h) = \frac{\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h) + f(x_0-h)}{2h}$$

Отсюда из формулы (5) следует оценка.
$$|r_2(h)| \leq \frac{\varepsilon}{h}$$

следовательно общая погрешность формулы (1)
$$g(h) = Mh + \frac{\varepsilon}{h}$$

При стремлении h к нулю величина $\frac{\varepsilon}{h}$ стремится к бесконечности, т.е. формулу (1) при слишком малых h применять нельзя.

Найдем минимальные значение $g(h)$.

Гуденко А.М.

Обозначим через $r_1 = r_1(h)$ разность между приближенным и точным значениями производной, т.е.

$$r_1(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \quad (4)$$

Из формулы (3) видно, что $r_1(h) = \frac{R(h)}{2h}$, откуда

$$|r_1(h)| \le Mh$$

Таким образом, $r_1(h) \to 0$ при $h \to 0$

Ситуация существенно меняется, если значение f известны в точках x_0, x_0+h, x_0-h с некоторой погрешностью $\varepsilon > 0$. Пусть заданы приближенные значения $\tilde{f}(x_0+h), \tilde{f}(x_0-h)$, такие что

$$|\tilde{f}(x_0-h) - f(x_0-h)| \le \varepsilon, \quad |\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h)| \le \varepsilon \quad (5)$$

В этом случае

$$\frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = r_1(h) + r_2(h)$$

r_1 нам известно из (4), а r_2

$$r_2(h) = \frac{\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h) + f(x_0-h)}{2h}$$

Отсюда из формулы (5) следует оценка.

$$|r_2(h)| \le \frac{\varepsilon}{h}$$

следовательно общая погрешность формулы (1)

$$g(h) = Mh + \frac{\varepsilon}{h}$$

При стремлении h к нулю величина $\frac{\varepsilon}{h}$ стремится к бесконечности, т.е. формулу (1) при слишком малых h применять нельзя.

Найдем минимальное значение $g(h)$.

Гуденко А.М.

Обозначим через $r_1 = r_1(h)$ разность между приближенным и точным значениями производной, т.е.

$$r_1(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \quad (4)$$

Из формулы (3) видно, что $r_1(h) = \frac{R(h)}{2h}$, откуда

$$|r_1(h)| \leq Mh$$

Таким образом, $r_1(h) \to 0$ при $h \to 0$

Ситуация существенно меняется, если значение f известны в точках x_0, x_0+h, x_0-h с некоторой погрешностью $\varepsilon > 0$. Пусть заданы приближенные значения $\tilde{f}(x_0+h), \tilde{f}(x_0-h)$, такие что

$$|\tilde{f}(x_0-h) - f(x_0-h)| \leq \varepsilon, \quad |\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h)| \leq \varepsilon \quad (5)$$

В этом случае

$$\frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = r_1(h) + r_2(h)$$

r_1 нам известно из (4), а r_2

$$r_2(h) = \frac{\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h) + f(x_0-h)}{2h}$$

Отсюда из формулы (5) следует оценка.

$$|r_2(h)| \leq \frac{\varepsilon}{h}$$

следовательно общая погрешность формулы (1)

$$g(h) = Mh + \frac{\varepsilon}{h}$$

При стремлении h к нулю величина $\frac{\varepsilon}{h}$ стремится к бесконечности, т.е. формулу (1) при слишком малых h применять нельзя.

Найдем минимальное значение $g(h)$.

Гузенко А.М.

Обозначим через $r_1 = r_1(h)$ разность между приближенным и точным значениями производной, т.е.

$$r_1(h) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) \quad (4)$$

Из формулы (3) видно, что $r_1(h) = \frac{R(h)}{2h}$, откуда

$$|r_1(h)| \leq Mh$$

Таким образом, $r_1(h) \to 0$ при $h \to 0$

Ситуация существенно меняется, если значение f известны в точках x_0, x_0+h, x_0-h с некоторой погрешностью $\varepsilon > 0$. Пусть заданы приближенные значения $\tilde{f}(x_0+h)$, $\tilde{f}(x_0-h)$, такие что

$$|\tilde{f}(x_0-h) - f(x_0-h)| \leq \varepsilon, \quad |\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h)| \leq \varepsilon \quad (5)$$

В этом случае

$$\frac{\tilde{f}(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h)}{2h} - f'(x_0) = r_1(h) + r_2(h)$$

r_1 нам известно из (4), а r_2

$$r_2(h) = \frac{\tilde{f}(x_0+h) - f(x_0+h) - \tilde{f}(x_0-h) + f(x_0-h)}{2h}$$

Отсюда из формулы (5) следует оценка.

$$|r_2(h)| \leq \frac{\varepsilon}{h}$$

следовательно общая погрешность формулы (1)

$$g(h) = Mh + \frac{\varepsilon}{h}$$

При стремлении h к нулю величина $\frac{\varepsilon}{h}$ стремится к бесконечности, т.е. формулу (1) при слишком малых h применять нельзя.

Найдем минимальное значение $g(h)$.

$(g(h))'_h = M - \frac{\varepsilon}{h^2}$ Гузенко А.М.

$h_{min} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$

$g_{min}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}\right) = \sqrt{M\varepsilon}$.

Рассмотрим некоторые моменты:

1. При очень малых h задача численного дифференцирования некорректна, так как нарушено условие — определение корректности. Погрешность в исходных данных величины ε приводит к погрешности $\frac{\varepsilon}{h}$.
2. При фиксированном ε ошибка вычисления $f'(x_0)$ не может быть ниже определенной границы. В нашем примере эта граница равна $\sqrt{M\varepsilon}$
3. Предполагалась известная оценка (2) для второй производной функции f, т.е. использовалась некоторая доп. информация.

$$(g(h))'_h = M - \frac{\varepsilon}{h^2}$$

Гузенко А.М.

$$h_{min} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$$

$$g_{min}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}\right) = \sqrt{M\varepsilon}.$$

Рассмотрим некоторые моменты:

1. При очень малых h задача численного дифференцирования некорректна, так как нарушено условие – определение корректности. Погрешность в исходных данных величины ε приводит к погрешности $\frac{\varepsilon}{h}$.

2. При фиксированном ε ошибка вычисления $f'(x_0)$ не может быть ниже определенной границы. В нашем примере эта граница равна $\sqrt{M\varepsilon}$

3. Предполагалась известная оценка (2) для второй производной функции f, т.е. использовалась некоторая доп. информация.

$(g(h))'_h = M - \frac{\varepsilon}{h^2}$ Гузенко А.М.

$h_{min} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$

$g_{min}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}\right) = \sqrt{M\varepsilon}.$

Рассмотрим некоторые моменты:

1. При очень малых h задача численного дифференцирования некорректна, так как нарушено условие – определение корректности. Погрешность в исходных данных величины ε приводит к погрешности $\frac{\varepsilon}{h}$.

2. При фиксированном ε ошибка вычисления $f'(x_0)$ не может быть ниже определенной границы. В нашем примере эта граница равна $\sqrt{M\varepsilon}$

3. Предполагалась известная оценка (2) для второй производной функции f, т.е. использовалась некоторая доп. информация.

$$(g(h))'_h = M - \frac{\varepsilon}{h^2}$$

Гуденко А.М.

$$h_{min} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$$

$$g_{min}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}\right) = \sqrt{M\varepsilon}.$$

Рассмотрим некоторые моменты:

1. При очень малых h задача численного дифференцирования некорректна, так как нарушено условие — определение корректности. Погрешность в исходных данных величины ε приводит к погрешности $\frac{\varepsilon}{h}$.
2. При фиксированном ε ошибка вычисления $f'(x_0)$ не может быть ниже определенной границы. В нашем примере эта граница равна $\sqrt{M\varepsilon}$
3. Предполагалась известная оценка (2) для второй производной функции f, т.е. использовалась некоторая доп. информация.

$$(g(h))'_h = M - \frac{\varepsilon}{h^2}$$

Гузенко А.М.

$$h_{min} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$$

$$g_{min}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}\right) = \sqrt{M\varepsilon}.$$

Рассмотрим некоторые моменты:

1. При очень малых h задача численного дифференцирования некорректна, так как нарушено условие — определение корректности. Погрешность в исходных данных величины ε приводит к погрешности $\frac{\varepsilon}{h}$.

2. При фиксированном ε ошибка вычисления $f'(x_0)$ не может быть ниже определенной границы. В нашем примере эта граница равна $\sqrt{M\varepsilon}$

3. Предполагалась известная оценка (2) для второй производной функции f, т.е. использовалась некоторая доп. информация.

$$(g(h))'_h = M - \frac{\varepsilon}{h^2}$$

Гуденко А.М.

$$h_{min} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$$

$$g_{min}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}\right) = \sqrt{M\varepsilon}.$$

Рассмотрим некоторые моменты:

1. При очень малых h задача численного дифференцирования некорректна, так как нарушено условие – определение корректности. Погрешность в исходных данных величины ε приводит к погрешности $\frac{\varepsilon}{h}$.
2. При фиксированном ε ошибка вычисления $f'(x_0)$ не может быть ниже определенной границы. В нашем примере эта граница равна $\sqrt{M\varepsilon}$
3. Предполагалась известная оценка (2) для второй производной функции f, т.е. использовалась некоторая доп. информация.

$(g(h))'_h = M - \frac{\varepsilon}{h^2}$ Гуденко А.М.

$h_{min} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$

$g_{min}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}\right) = \sqrt{M\varepsilon}.$

Рассмотрим некоторые моменты:

1. При очень малых h задача численного дифференцирования некорректна, так как нарушено условие определение корректности. Погрешность в исходных данных величины ε приводит к погрешности $\frac{\varepsilon}{h}$.

2. При фиксированном ε ошибка вычисления $f'(x_0)$ не может быть ниже определенной границы. В нашем примере эта граница равна $\sqrt{M\varepsilon}$

3. Предполагалась известная оценка (2) для второй производной функции f, т.е. использовалась некоторая доп. информация.

Гуренко А.М.

$$(g(h))'_h = M - \frac{\varepsilon}{h^2}$$

$$h_{min} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}$$

$$g_{min}\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{M}}\right) = \sqrt{M\varepsilon}.$$

Рассмотрим некоторые моменты:

1. При очень малых h задача численного дифференцирования некорректна, так как нарушено условие — определение корректности. Погрешность в исходных данных величины ε приводит к погрешности $\frac{\varepsilon}{h}$.

2. При фиксированном ε ошибка вычисления $f'(x_0)$ не может быть ниже определенной границы. В нашем примере эта граница равна $\sqrt{M\varepsilon}$

3. Предполагалась известная оценка (2) для второй производной функции f, т.е. использовалась некоторая доп. информация.