Teoria węzłów

nasze nazwiska

27 października 2015

Spis treści

1 Definicja węzła **1**

2 Grupa kolorująca **1**

3 Wielomian Alexandera **1**

4 Wielomian Jonesa **1**

4.1 Nawias Kauffmana 1
4.2 Spin 2
4.3 Wielomian Jonesa 2
4.4 Relacja kłębiasta 2
4.5 Odwrotności, lustra i sumy 2

1 Definicja węzła

2 Grupa kolorująca

Tekst.

3 Wielomian Alexandera

Tekst.

4 Wielomian Jonesa

W tej sekcji zbadamy inny wielomianowy niezmiennik węzłów, wielomian Jonesa. Został odkryty w 1984 roku przez Vaughana Jonesa, znajduje zastosowanie między innymi przy badaniu węzłów przemiennych.

4.1 Nawias Kauffmana

Zaczniemy od zdefiniowania nawiasu Kauffmana. Przypomnijmy, wielomian Laurenta zmiennej X to formalny symbol $f = a_r X^r + \ldots + a_s X^s$, gdzie $r, s, a_r, \ldots, a_s$ są całkowite i $r \leq s$.

Definicja 4.1. *Nawias Kauffmana $\langle D \rangle$ dla diagramu splotu D to wielomian Laurenta zmiennej A, który jest niezmienniczy ze względu na gładkie deformacje diagramu, a przy tym spełnia trzy aksjomaty:*

1. $\langle \bigcirc \rangle = 1$
2. $\langle D \sqcup \bigcirc \rangle = (-A^{-2} - A^{2})\langle D \rangle$
3. $\langle \times \rangle = A\langle)(\rangle + A^{-1}\langle \asymp \rangle$

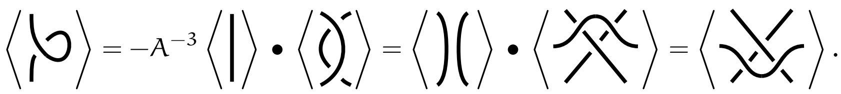
Tutaj $\bigcirc$ oznacza standardowy diagram dla niewęzła, $D \sqcup \bigcirc$ jest diagramem, który powstaje z D przez dodanie nieprzecinającej go krzywej zamkniętej, zaś trzy symbole $\times$, $)($ oraz $\asymp$ odnoszą się do diagramów, które są identyczne wszędzie poza małym obszarem. Diagramy $)($ oraz $\asymp$ nazywa się odpowiednio dodatnim (prawym) i ujemnym (lewym) wygładzeniem $\times$

Lemat 4.2. *Nawias Kauffmana dowolnego diagramu można wyznaczyć w skończonym czasie.*

Dowód. Jeżeli diagram D ma n skrzyżowań, to nieustanne stosowanie aksjomatu trzeciego pozwala na zapisanie $\langle D \rangle$ jako sumy 2^n składników, z których każdy jest po prostu zamkniętą krzywą i ma trywialny nawias ($\langle \circ \rangle = 1$). Nawias sumy wyznacza się korzystając z drugiego aksjomatu. $\square$

Przedstawimy teraz wpływ ruchów Reidemeistera na nawias Kauffmana.

Lemat 4.3. *Pierwszy ruch Reidemeistera zmienia nawias Kauffmana zgodnie z poniższą regułą. Pozosałe ruchy Reidemeistera nie zmieniają nawiasu.*



4.2 Spin

4.3 Wielomian Jonesa

4.4 Relacja kłębiasta

Dotychczas wyznaczyliśmy wielomian Jonesa jedynie dla trywialnych splotów. Spowodowane jest to tym, że chociaż nawias Kauffmana jest przydatny przy dowodzeniu różnych własności, to zupełnie nie nadaje się do obliczeń. Dużo lepszym narzędziem jest następujące twierdzenie.

Twierdzenie 4.4 (relacja kłębiasta)**.** *Wielomian Jonesa spełnia równość* $V(\bigcirc) = 1$ *oraz relację*

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0,$$

gdzie L_+, L_-, L_0 *to zorientowane sploty, kóre różnią się jedynie na małym obszarze:* $\times$

4.5 Odwrotności, lustra i sumy

Starsze materiały

Węzeł to obraz różnowartościowej funkcji $f\colon S^1 \to \mathbb{R}^3$, która jest gładka i ma wszędzie niezerową pochodną. Przykłady: niewęzeł, trójlistnik, ósemka. **Splot** to suma rozłączna skończenie wielu węzłów. Węzły K i K' są równoważne, jeżeli istnieje rodzina węzłów K_x dla $x \in [0,1]$, że $K_0 = K$ i $K_1 = K'$ oraz gładka funkcja $[0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, że $F(x,-)$ reprezentuje węzeł K_x.
Twierdzenie Reidemeistera: każdy węzeł (splot) ma diagram, czyli „cień" bez potrójnych skrzyżowań, stycznych i dziobów razem z informacją o skrzyżowaniach. Dwa węzły są równoważne $\iff$ jeden da się otrzymać z drugiego przez ciąg ruchów Reidemeistera i gładkich deformacji.
Linking number: suma znaków skrzyżowań, rozróżnia splot Hopfa od Whiteheada. *Crossing number*: najmniejsza możliwa liczba skrzyżowań na diagramie.
Nowe węzły: lustro, odwrócenie, suma rozłączna i suma spójna.
Kolorowanie: każdemu łukowi przypisujemy pewną liczbę całkowitą tak, by suma (znakowana) tych liczb na każdym skrzyżowaniu była równa zero modulo n. Jest niezmiennikiem, odróżnia ósemkę od trójlistnika. Macierz kolorowania i jej wyznacznik; macierz Goeritza.
Grupa kolorująca: abelowa grupa, której generatory to łuki diagramu, zaś relacje odpowiadają równaniom na skrzyżowaniach (do tego dokładamy $a = 0$). Grupa jest skończona $\iff$ wyznacznik jest niezerowy.
Wielomian Alexandera: wyznacznik pewnej macierzy ze skreśloną kolumną i wierszem. **Wielomian Jonesa** V: należy do $\mathbb{Z}[t^{1/2}, t^{-1/2}]$; wielomian niewęzła to 1, spełniona jest *skein relation*, to znaczy: $t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0$.
Są jeszcze powierzchnie Seiferta z topologii algebraicznej. Adams: notacja Dowkera, Conwaya. Węzły torusowe (5.1), węzły satelitarne i hiperboliczne. Warkocze (5.4), wielomiany HOMFLY (6.3). *Bachelor's unknotting*.
Rzeczy raczej zbyt skomplikowane: niezmiennik Arfa.