Лабораторная работа №9.

МЕТОД ГАУССА

Цель работы: приобретение и закрепление практических навыков при решении систем линейных алгебраических уравнений методом исключений (методом Гаусса).

Задание. Используя метод исключений Гаусса, решить с точностью до $\varepsilon = 0,001$ систему линейных алгебраических уравнений.

Выполнить проверку полученного результата.

Варианты заданий к лабораторным работам №9, 11

Вариант №1

$$\begin{cases} 0,34x_1 + 0,71x_2 + 0,63x_3 = 2,08; \\ 0,71x_1 - 0,65x_2 - 0,18x_3 = 0,17; \\ 1,17x_1 - 2,35x_2 + 0,75x_3 = 1,28. \end{cases}$$

Вариант №2

$$\begin{cases} 3,75x_1 - 0,28x_2 + 0,17x_3 = 0,75; \\ 2,11x_1 - 0,11x_2 - 0,12x_3 = 1,11; \\ 0,22x_1 - 3,17x_2 + 1,81x_3 = 0,05. \end{cases}$$

Вариант №3

$$\begin{cases} 0,21x_1 - 0,18x_2 + 0,75x_3 = 0,11; \\ 0,13x_1 + 0,75x_2 - 0,11x_3 = 2,00; \\ 3,01x_1 - 0,33x_2 + 0,11x_3 = 0,13. \end{cases}$$

Вариант №4

$$\begin{cases} 0,13x_1 - 0,14x_2 - 2,00x_3 = 0,15; \\ 0,75x_1 + 0,18x_2 - 0,77x_3 = 0,11; \\ 0,28x_1 - 0,17x_2 + 0,39x_3 = 0,12. \end{cases}$$

Вариант №5

$$\begin{cases} 3,01x_1 - 0,14x_2 - 0,15x_3 = 1,00; \\ 1,11x_1 + 0,13x_2 - 0,75x_3 = 0,13; \\ 0,17x_1 - 2,11x_2 + 0,71x_3 = 0,17. \end{cases}$$

Вариант №6

$$\begin{cases} 0,92x_1 - 0,83x_2 + 0,62x_3 = 2,15; \\ 0,24x_1 - 0,54x_2 + 0,43x_3 = 0,62; \\ 0,73x_1 - 0,81x_2 - 0,67x_3 = 0,88. \end{cases}$$

Вариант №7

$$\begin{cases} 1,24x_1 - 0,87x_2 - 3,17x_3 = 0,46; \\ 2,11x_1 - 0,45x_2 + 1,44x_3 = 1,50; \\ 0,48x_1 + 1,25x_2 - 0,63x_3 = 0,35. \end{cases}$$

Вариант №8

$$\begin{cases} 0,64x_1 - 0,83x_2 + 4,20x_3 = 2,23; \\ 0,58x_1 - 0,83x_2 + 1,43x_3 = 1,71; \\ 0,86x_1 + 0,77x_2 + 0,88x_3 = 0,54. \end{cases}$$

Вариант №9

$$\begin{cases} 0,32x_1 - 0,42x_2 + 0,85x_3 = 1,32; \\ 0,63x_1 - 1,43x_2 - 0,58x_3 = 0,44; \\ 0,84x_1 - 2,23x_2 - 0,52x_3 = 0,64. \end{cases}$$

Вариант №10

$$\begin{cases} 0,73x_1 + 1,24x_2 - 0,38x_3 = 0,58; \\ 1,25x_1 + 0,66x_2 - 0,78x_3 = 0,66; \\ 0,75x_1 + 1,22x_2 - 0,83x_3 = 0,92. \end{cases}$$

Вариант №11

$$\begin{cases} 0,62x_1 - 0,44x_2 - 0,86x_3 = 0,68; \\ 0,83x_1 + 0,42x_2 - 0,56x_3 = 1,24; \\ 0,58x_1 - 0,37x_2 - 0,62x_3 = 0,87. \end{cases}$$

Вариант №12

$$\begin{cases} 1,26x_1 - 2,34x_2 + 1,17x_3 = 3,14; \\ 0,75x_1 + 1,24x_2 - 0,48x_3 = 1,17; \\ 3,44x_1 - 1,85x_2 + 1,16x_3 = 1,83. \end{cases}$$

Вариант №13

$$\begin{cases} 0,46x_1 + 1,72x_2 + 2,53x_3 = 2,44; \\ 1,53x_1 - 2,32x_2 - 1,83x_3 = 2,83; \\ 0,75x_1 + 0,86x_2 + 3,72x_3 = 1,06. \end{cases}$$

Вариант №14

$$\begin{cases} 2,47x_1 + 0,65x_2 - 1,88x_3 = 1,24; \\ 1,34x_1 + 1,17x_2 + 2,54x_3 = 2,35; \\ 0,86x_1 - 1,73x_2 - 1,08x_3 = 3,15. \end{cases}$$

Вариант №15

$$\begin{cases} 4,24x_1 + 2,73x_2 - 1,55x_3 = 1,87; \\ 2,34x_1 + 1,27x_2 + 3,15x_3 = 2,16; \\ 3,05x_1 - 1,05x_2 - 0,63x_3 = 1,25. \end{cases}$$

Вариант №16

$$\begin{cases} 0,43x_1 + 1,24x_2 - 0,58x_3 = 2,71; \\ 0,74x_1 + 0,83x_2 + 1,17x_3 = 1,26; \\ 1,43x_1 - 1,58x_2 + 0,83x_3 = 1,03. \end{cases}$$

Вариант №17

$$\begin{cases} 0,43x_1 + 0,63x_2 + 1,44x_3 = 2,18; \\ 1,64x_1 - 0,83x_2 - 2,45x_3 = 1,84; \\ 0,58x_1 + 1,55x_2 + 3,18x_3 = 0,74. \end{cases}$$

Вариант №18

$$\begin{cases} 1,24x_1 + 0,62x_2 - 0,95x_3 = 1,43; \\ 2,15x_1 - 1,18x_2 + 0,57x_3 = 2,43; \\ 1,72x_1 - 0,83x_2 + 1,57x_3 = 3,88. \end{cases}$$

Вариант №19

$$\begin{cases} 0,62x_1 + 0,56x_2 - 0,43x_3 = 1,16; \\ 1,32x_1 - 0,88x_2 + 1,76x_3 = 2,07; \\ 0,73x_1 + 1,42x_2 - 0,34x_3 = 2,18. \end{cases}$$

Вариант №20

$$\begin{cases} 1,06x_1 + 0,34x_2 + 1,26x_3 = 1,17; \\ 2,54x_1 - 1,16x_2 + 0,55x_3 = 2,23; \\ 1,34x_1 - 0,47x_2 - 0,83x_3 = 3,26. \end{cases}$$

Вариант №21

$$\begin{cases} 3,15x_1 - 1,72x_2 - 1,23x_3 = 2,15; \\ 0,72x_1 + 0,67x_2 + 1,18x_3 = 1,43; \\ 2,57x_1 - 1,34x_2 - 0,68x_3 = 1,03. \end{cases}$$

Вариант №22

$$\begin{cases} 1,73x_1 - 0,83x_2 + 1,82x_3 = 0,36; \\ 0,27x_1 + 0,53x_2 - 0,64x_3 = 1,23; \\ 0,56x_1 - 0,48x_2 + 1,95x_3 = 0,76. \end{cases}$$

Вариант №23

$$\begin{cases} 0,95x_1 + 0,72x_2 - 1,14x_3 = 2,15; \\ 0,63x_1 + 0,24x_2 + 0,38x_3 = 0,74; \\ 1,23x_1 - 1,08x_2 - 1,16x_3 = 0,97. \end{cases}$$

Вариант №24

$$\begin{cases} 2,18x_1 + 1,72x_2 - 0,93x_3 = 1,06; \\ 1,42x_1 + 0,18x_2 + 1,12x_3 = 2,07; \\ 0,92x_1 - 1,14x_2 - 2,53x_3 = 0,45. \end{cases}$$

Вариант №25

$$\begin{cases} 0,54x_1 + 0,92x_2 - 1,34x_3 = 1,15; \\ 0,73x_1 + 0,14x_2 + 0,58x_3 = 0,71; \\ 1,29x_1 - 1,18x_2 - 1,45x_3 = 0,17. \end{cases}$$

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– преобразованную систему линейных уравнений на каждом шаге прямого хода метода Гаусса;

– необходимые расчеты при реализации обратного хода метода Гаусса;

– проверку полученного решения;

– выводы по работе.

Пример 9. Используя метод исключений Гаусса, решить с точностью до $\varepsilon = 0,001$ систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2,74x_1 - 1,18x_2 + 3,17x_3 = 2,18; \\ 1,12x_1 + 0,83x_2 - 2,16x_3 = -1,15; \\ 0,18x_1 + 1,27x_2 + 0,76x_3 = 3,23. \end{cases} \qquad (9.1)$$

Алгоритм решения системы линейных алгебраических уравнений n-ого порядка методом исключений Гаусса включает прямой и обратный ход. На каждом шаге прямого хода метода Гаусса (а таких шагов $n-1$) из уравнений системы последовательно, одна за другой, исключаются неизвестные. Сначала из второго и последующих уравнений системы исключается неизвестная x_1. Затем из третьего, четвертого и т д. уравнений исключается неизвестная x_2. Процесс исключения неизвестных продолжается до тех пор, пока в последнем n-ном уравнении системы не останется одна неизвестная x_n.

Обратный ход метода Гаусса заключается в последовательном вычислении неизвестных системы. Сначала из последнего уравнения находится неизвестная x_n. Она подставляется в предпоследнее, $(n-1)$-вое уравнение системы, после чего вычисляется неизвестная x_{n-1}. Процесс подстановки найденных значений неизвестных x_n, x_{n-1}, …, x_{n-k} в $(n-k-1)$ уравнение системы и вычисление из этого уравнения неизвестной x_{n-k-1} продолжается до первого уравнения системы, из которого с учетом уже известных значений x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, …, x_2 находится неизвестная x_1.

Прямой ход метода Гаусса.

На первом шаге исключим неизвестную x_1 из второго и третьего уравнений системы (9.1). Для этого умножим первое уравнение сначала на $\left(-\dfrac{1,12}{2,74}\right)$ и прибавим ко второму уравнению, а затем умножим первое уравнение на $\left(-\dfrac{0,18}{2,74}\right)$ и сложим с третьим уравнением. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2,7400x_1 - 1,1800x_2 + 3,1700x_3 = 2,1800; \\ \qquad\qquad\quad 1,3123x_2 - 3,4558x_3 = -2,0411; \\ \qquad\qquad\quad 1,3475x_2 + 0,5518x_3 = 3,0868. \end{cases} \tag{9.2}$$

На втором шаге исключим неизвестную x_2 из третьего уравнения системы (9.2). Для этого умножим второе уравнение системы (9.2) на $\left(-\frac{1,3475}{1,3123}\right)$ и результат прибавим к третьему уравнению. В результате третье уравнение будет содержать только одну неизвестную x_3. Преобразованная таким образом система линейных алгебраических уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} 2,7400x_1 - 1,1800x_2 + 3,1700x_3 = 2,1800; \\ \qquad\qquad 1,3123x_2 - 3,4558x_3 = -2,0411; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 4,1002x_3 = 5,1826. \end{cases} \tag{9.3}$$

Обратный ход метода Гаусса.

Из последнего уравнения системы (9.3) находим неизвестную x_3: $x_3 = \frac{5,1826}{4,1002} = 1,2640$. Подставляем это значение во второе уравнение системы (9.3) и вычисляем неизвестную x_2:

$$x_2 = \frac{1}{1,3123}\left[-2,0411 - (-3,4558)\cdot 1,2640\right] = 1,7732.$$

Теперь, подставляя полученные значения $x_3 = 1,2640$ и $x_2 = 1,7732$ в первое уравнение системы (9.3), находим неизвестную x_1:

$$x_1 = \frac{1}{2,7400}\left[2,1800 - (-1,1800)\cdot 1,7732 - 3,1700\cdot 1,2640\right] = 0,0969.$$

Таким образом, система линейных алгебраических уравнений (9.1) с точностью до $\varepsilon = 0,001$ имеет решение: $x_1 = 0,097$; $x_2 = 1,773$; $x_3 = 1,264$.

Сделаем проверку полученного решения. Подставляя результаты вычислений в заданную систему уравнений (9.1), получаем верные тождества:

$$\begin{cases} 2,74\cdot 0,097-1,18\cdot 1,773+3,17\cdot 1,264=2,180; \\ 1,12\cdot 0,097+0,83\cdot 1,773-2,16\cdot 1,264=-1,150; \\ 0,18\cdot 0,097+1,27\cdot 1,773+0,76\cdot 1,264=3,230 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2,180=2,180; \\ -1,150=-1,150; \\ 3,230=3,230. \end{cases}$$

Контрольные вопросы

1. Назвать известные численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Чем отличаются прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений от итерационных методов?
3. В чем заключается идея метода Гаусса?
4. Из каких основных этапов состоит метод Гаусса?
5. Как реализуется прямой ход в методе Гаусса?
6. Как реализуется обратный ход в методе Гаусса?
7. В чем заключается метод исключения Гаусса с выбором главного элемента и полным упорядочиванием?
8. В чем заключается метод исключения Гаусса с выбором главного элемента и частичным упорядочиванием?
9. Чему равно количество арифметических операций, выполняемых при реализации прямого хода метода Гаусса?
10. Чему равно количество арифметических операций, выполняемых при реализации обратного хода метода Гаусса?
11. Чему равно количество арифметических операций, выполняемых при решении системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса?