Лабораторная работа №10.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ МЕТОДОМ ЖОРДАНА-ГАУССА

Цель работы: приобретение и закрепление практических навыков при вычислении определителей и обращении невырожденных квадратных матриц.

Задание. Применяя метод полного исключения Жордана-Гаусса, вычислить определитель матрицы A и найти обратную для неё матрицу A^{-1}.

Используя определение обратной матрицы, сделать проверку полученного результата.

Варианты заданий к лабораторной работе №10

Вариант №1

$$A = \begin{pmatrix} 0,64 & -0,83 & 4,20 \\ 0,58 & -0,43 & 1,45 \\ 0,86 & 0,77 & 0,88 \end{pmatrix}$$

Вариант №2

$$A = \begin{pmatrix} 0,62 & -0,44 & -0,86 \\ 0,83 & 0,42 & -0,56 \\ 0,58 & -0,37 & 0,87 \end{pmatrix}$$

Вариант №3

$$A = \begin{pmatrix} 2,18 & 1,72 & -0,93 \\ 1,42 & 0,18 & 1,12 \\ 0,92 & -1,14 & -2,53 \end{pmatrix}$$

Вариант №4

$$A = \begin{pmatrix} 4,24 & 2,73 & -1,55 \\ 2,34 & 1,27 & 3,15 \\ 3,05 & -1,05 & -0,63 \end{pmatrix}$$

Вариант №5

$$A = \begin{pmatrix} 1,06 & 0,34 & 1,26 \\ 2,54 & -1,16 & 0,55 \\ 1,34 & -0,47 & -0,83 \end{pmatrix}$$

Вариант №6

$$A = \begin{pmatrix} 0,34 & 0,71 & 0,63 \\ 0,71 & -0,65 & -0,18 \\ 1,17 & -2,35 & 0,75 \end{pmatrix}$$

Вариант №7

$$A = \begin{pmatrix} 3,01 & -0,14 & -0,15 \\ 1,11 & 0,13 & -0,75 \\ 0,17 & -2,11 & 0,71 \end{pmatrix}$$

Вариант №8

$$A = \begin{pmatrix} 0,43 & 1,24 & -0,58 \\ 0,74 & 0,83 & 1,17 \\ 1,43 & -1,58 & 0,83 \end{pmatrix}$$

Вариант №9

$$A=\begin{pmatrix}0,95 & 0,72 & -1,14\\ 0,63 & 0,24 & 0,38\\ 1,23 & -1,08 & -1,16\end{pmatrix}$$

Вариант №10

$$A=\begin{pmatrix}0,21 & -0,18 & 0,75\\ 0,13 & 0,75 & -0,11\\ 3,01 & -0,33 & 0,11\end{pmatrix}$$

Вариант №11

$$A=\begin{pmatrix}1,26 & -2,34 & 1,17\\ 0,75 & 1,24 & -0,48\\ 3,44 & -1,85 & 1,16\end{pmatrix}$$

Вариант №12

$$A=\begin{pmatrix}1,24 & 0,62 & -0,95\\ 2,15 & -1,18 & 0,57\\ 1,72 & -0,83 & 1,57\end{pmatrix}$$

Вариант №13

$$A=\begin{pmatrix}0,46 & 1,72 & 2,53\\ 1,53 & -2,32 & -1,83\\ 0,75 & 0,86 & 3,72\end{pmatrix}$$

Вариант №14

$$A=\begin{pmatrix}3,75 & -0,28 & 0,17\\ 2,11 & -0,11 & -0,12\\ 0,22 & -3,17 & 1,81\end{pmatrix}$$

Вариант №15

$$A=\begin{pmatrix}0,73 & 1,24 & -0,38\\ 1,25 & 0,66 & -0,78\\ 0,75 & 1,22 & -0,83\end{pmatrix}$$

Вариант №16

$$A=\begin{pmatrix}1,73 & -0,83 & 1,82\\ 0,27 & 0,53 & -0,64\\ 0,56 & -0,48 & 1,95\end{pmatrix}$$

Вариант №17

$$A=\begin{pmatrix}2,47 & 0,65 & -1,88\\ 1,34 & 1,17 & 2,54\\ 0,86 & -1,73 & -1,08\end{pmatrix}$$

Вариант №18

$$A=\begin{pmatrix}0,13 & -0,14 & -2,00\\ 0,75 & 0,18 & -0,77\\ 0,28 & -0,17 & 0,39\end{pmatrix}$$

Вариант №19

$$A=\begin{pmatrix}0,32 & -0,42 & 0,85\\ 0,63 & -1,43 & -0,58\\ 0,84 & -2,23 & -0,52\end{pmatrix}$$

Вариант №20

$$A=\begin{pmatrix}3,15 & -1,72 & -1,23\\ 0,72 & 0,67 & 1,18\\ 2,57 & -1,34 & -0,68\end{pmatrix}$$

Вариант №21

$$A=\begin{pmatrix}1,24 & -0,87 & -3,17\\ 2,11 & -0,45 & 1,44\\ 0,48 & 1,25 & -0,63\end{pmatrix}$$

Вариант №22

$$A=\begin{pmatrix}0,43 & 0,63 & 1,44\\ 1,64 & -0,83 & -2,45\\ 0,58 & 1,55 & 3,18\end{pmatrix}$$

Вариант №23

$$A=\begin{pmatrix}0,92 & -0,83 & 0,62\\ 0,24 & -0,54 & 0,43\\ 0,73 & -0,81 & -0,67\end{pmatrix}$$

Вариант №24

$$A=\begin{pmatrix}0,62 & 0,56 & -0,43\\ 1,32 & -0,88 & 1,76\\ 0,73 & 1,42 & -0,34\end{pmatrix}$$

Вариант №25

$$A=\begin{pmatrix}2,55 & -0,78 & 0,47\\ -1,01 & -1,61 & -0,39\\ 2,02 & 1,18 & 0,89\end{pmatrix}$$

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– расширенную матрицу на каждом шаге метода полного исключения Жордана-Гаусса;

– проверку полученного решения;

– выводы по работе.

Пример 10. Применяя метод полного исключения Жордана-Гаусса, вычислить определитель матрицы A и найти обратную для неё матрицу A^{-1}:

$$A=\begin{pmatrix}2,74 & -1,18 & 3,17\\ 1,12 & 0,83 & -2,16\\ 0,18 & 1,27 & 0,76\end{pmatrix}.$$

Вычисление определителя матрицы A на основе метода исключений Гаусса сводится к использованию таких преобразований матрицы A, которые приводят её к треугольному виду, не изменяя при этом её определитель. В этом случае определитель матрицы A будет равен произведению элементов, лежащих на главной диагонали полученной таким образом квадратной матрицы треугольного вида: $\det A=(-1)^p\, a_{11}a_{22}^{(1)}a_{33}^{(2)}\ldots a_{nn}^{(n-1)}$, где p - число перестановок строк.

Вычисление обратной матрицы A^{-1} можно свести к одновременному решению трех систем линейных алгебраических уравнений, у которых матрица коэффициентов совпадает с матрицей A, а правыми частями являются столбцы единичной матрицы.

Применим метод полного исключения Жордана-Гаусса к расширенной матрице $\left[A \,\vdots\, E\right]$, состоящей из матрицы A и единичной матрицы E. В результате преобразований, реализующих метод Жордана-Гаусса, расширенная матрица приводится к виду: $\left[E \,\vdots\, A\right]$.

Сформируем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2,74 & -1,18 & 3,17 & 1 & 0 & 0 \\ 1,12 & 0,83 & -2,16 & 0 & 1 & 0 \\ 0,18 & 1,27 & 0,76 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Используя линейные преобразования над строками расширенной матрицы, не изменяющие определитель матрицы A, получим во второй и третьей строках первого столбца нули (т.е. исключим неизвестную x_1 из второго и третьего уравнений в каждой из систем):

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2,7400 & -1,1800 & 3,1700 & 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,3123 & -3,4558 & -0,4088 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,3475 & 0,5518 & -0,0657 & 0,0000 & 1,0000 \end{array}\right).$$

Теперь получим нули в первой и третьей строках второго столбца расширенной матрицы (исключим неизвестную x_2 из первого и третьего уравнений):

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2,7400 & 0,0000 & 0,0627 & 0,6325 & 0,8992 & 0,0000 \\ 0,0000 & 1,3123 & -3,4558 & -0,4088 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 4,1002 & 0,3540 & -1,0268 & 1,0000 \end{array}\right).$$

Так как после описанных преобразований матрица A (первые три столбца расширенной матрицы) имеет верхний треугольный вид, то определитель матрицы A равен произведению элементов, расположенных на главной диагонали:

$$\det A = 2,7400 \cdot 1,3123 \cdot 4,1002 = 14,743.$$

И, наконец, получим нули в первой и второй строках третьего столбца расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2,7400 & 0,0000 & 0,0000 & 0,6270 & 0,9149 & -0,0153 \\ 0,0000 & 1,3123 & 0,0000 & -0,1104 & 0,1346 & 0,8428 \\ 0,0000 & 0,0000 & 4,1002 & 0,3540 & -1,0268 & 1,0000 \end{array}\right).$$

Теперь, разделив первую строку расширенной матрицы на элемент $a_{11} = 2,7400$, вторую строку на $a_{22}^{(1)} = 1,3123$, а третью – на элемент $a_{33}^{(2)} = 4,1002$, получаем расширенную матрицу вида $[E \,\vdots\, A]$:

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,2288 & 0,3339 & -0,0056 \\ 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 & -0,0841 & 0,1025 & 0,6422 \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0863 & -0,2504 & 0,2439 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что обратная матрица A^{-1} имеет вид:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,2288 & 0,3339 & -0,0056 \\ -0,0841 & 0,1025 & 0,6422 \\ 0,0863 & -0,2504 & 0,2439 \end{pmatrix}.$$

Проверка полученного результата выполняется на основе определения обратной матрицы и заключается в проверке тождества: $A^{-1}A = AA^{-1} = E$.

Действительно, получаем:

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix} 0,2288 & 0,3339 & -0,0056 \\ -0,0841 & 0,1025 & 0,6422 \\ 0,0863 & -0,2504 & 0,2439 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2,74 & -1,18 & 3,17 \\ 1,12 & 0,83 & -2,16 \\ 0,18 & 1,27 & 0,76 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{pmatrix};$$

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 2,74 & -1,18 & 3,17 \\ 1,12 & 0,83 & -2,16 \\ 0,18 & 1,27 & 0,76 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,2288 & 0,3339 & -0,0056 \\ -0,0841 & 0,1025 & 0,6422 \\ 0,0863 & -0,2504 & 0,2439 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1,000 & 0,000 & 0,000 \\ 0,000 & 1,000 & 0,000 \\ 0,000 & 0,000 & 1,000 \end{pmatrix}.$$

Контрольные вопросы

1. В чем заключается метод исключения неизвестных Гаусса?
2. Чему равно количество арифметических операций, требуемых при вычислении определителя *n*-ого порядка на основе его формального определения?
3. В чем заключается вычисление определителя квадратной матрицы на основе метода исключений Гаусса?
4. Чему равен определитель квадратной матрицы треугольного вида?
5. Чему равно количество арифметических операций, выполняемых при вычислении определителя *n*-ого порядка на основе метода Гаусса?
6. Каким образом обращение матрицы сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений?
7. В чем заключается метод полного исключения Жордана-Гаусса?
8. Чему равно количество арифметических операций, выполняемых при обращении квадратной матрицы *n*-ого порядка на основе метода Гаусса?