Лабораторная работа №13.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ЗЕЙДЕЛЯ

Цель работы: приобретение и закрепление практических навыков при решении систем линейных алгебраических уравнений методом Зейделя.

Задание. Решить систему линейных алгебраических уравнений с погрешностью $\varepsilon = 0,001$ методом Зейделя. Указать количество итераций, при котором была достигнута заданная точность решения.

Варианты заданий взять из лабораторной работы №12.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– преобразование исходной системы линейных алгебраических уравнений к виду, при котором обеспечивается условие доминирования диагональных элементов;

– приведение преобразованной системы линейных алгебраических уравнений к виду, удобному для применения метода Зейделя;

– необходимые расчеты в соответствие с алгоритмом метода Зейделя;

– таблицу результатов вычислений методом Зейделя;

– проверку полученного решения;

– выводы по работе.

Пример. Методом Зейделя решить с точностью до $\varepsilon = 0,001$ систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 4,5\,x_1 - 1,8\,x_2 + 3,6\,x_3 = -1,7; \\ 3,1\,x_1 + 2,3\,x_2 - 1,2\,x_3 = 3,6; \\ 1,8\,x_1 + 2,5\,x_2 + 4,6\,x_3 = 2,2. \end{cases}$$

Для решения заданной системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя воспользуемся полученными выше уравнениями (1) из лабораторной работы №12:

$$\begin{cases} x_1 = & -0,0658\,x_2 - 0,3158\,x_3 + 0,2500; \\ x_2 = -0,2418\,x_1 & -0,4835\,x_3 + 1,0659; \\ x_3 = \;\; 0,2241\,x_1 - 0,0345\,x_2 & -0,2414. \end{cases}$$

В этом случае итерационные формулы Зейделя будут иметь вид:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = & -0,0658\;x_2^{(k-1)} - 0,3158\,x_3^{(k-1)} + 0,2500; \\ x_2^{(k)} = -0,2418\,x_1^{(k)} & -0,4835\,x_3^{(k-1)} + 1,0659; \\ x_3^{(k)} = \;\; 0,2241\,x_1^{(k)} - 0,0345\,x_2^{(k)} & -0,2414. \end{cases}$$

Используя в качестве начального приближения нулевой вектор $x^{(0)} = (0;\ 0;\ 0)^T$, получаем $x^{(1)} = (0,2500;\ 1,0055;\ -0,2200)^T$. Теперь подставляя полученные значения в рекуррентные формулы Зейделя, получаем второе приближение к точному решению заданной системы: $x^{(2)} = (0,2533;\ 1,1111;\ -0,2229)^T$. При этом расхождение между двумя полученными приближениями составляет:

$$\left\| x^{(2)} - x^{(1)} \right\| = \max\left\{ |0,0033|;\ |0,1056|;\ |-0,0029| \right\} = 0,1056 > \varepsilon .$$

Продолжая процесс вычислений дальше, получаем последовательность приближенных решений заданной системы уравнений, сходящуюся к точному решению.

Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты вычислений по методу Зейделя

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\|$
0	0,0000	0,0000	0,0000	
1	0,2500	1,0055	-0,2200	1,0055
2	0,2533	1,1111	-0,2229	0,1056
3	0,2473	1,1139	-0,2244	0,0060
4	0,2476	1,1146	-0,2243	0,0006
5	0,2475	1,1146	-0,2243	0,0001
6	0,2475	1,1146	-0,2243	0,0000

Очевидно, что на *пятой* итерации заданная точность достигнута. Таким образом, решение заданной системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 0,001$ имеет вид:

$$x_1 = 0,248 \pm 0,001; \quad x_2 = 1,115 \pm 0,001; \quad x_3 = -0,224 \pm 0,001.$$

Контрольные вопросы

1. В чём заключается метод Зейделя решения системы линейных уравнений?
2. Чем метод Зейделя отличается от метода простых итераций?
3. Как преобразовать исходную систему линейных уравнений к виду, удобному для применения Зейделя?
4. Сформулировать достаточные условия сходимости метода Зейделя.