Лабораторная работа №7.

КОМБИНИРОВАННЫЙ МЕТОД ХОРД И КАСАТЕЛЬНЫХ

Цель работы: приобретение и закрепление практических навыков при решении нелинейных уравнений комбинированным методом хорд и касательных.

Задание. Найти один из корней уравнения (2) из таблицы (3.1) комбинированным методом хорд и касательных с погрешностью $\varepsilon = 0,001$.

Указать число итераций необходимое для достижения заданной точности.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– проверку выполнения достаточного условия существования и единственности корня уравнения (2) внутри найденного отрезка;

– выбор начального приближения x_0^* в методе Ньютона, обеспечивающего выполнение достаточного условия сходимости;

– необходимые расчеты в соответствие с алгоритмом комбинированного метода хорд и касательных;

– таблицу результатов вычислений на основе комбинированного метода хорд и касательных;

– выводы по работе.

Пример. Найти комбинированным методом хорд и касательных с погрешностью $\varepsilon = 0,001$ один из корней уравнения

$$x^3 + 3x^2 - 1 = 0. \tag{7.1}$$

В примере 3.2 из лабораторной работы №3 был установлен отрезок $[a,b] = [0;1]$, внутри которого находится ровно один из корней уравнения (7.1): $F(0)F(1) = -1 \cdot 3 < 0$ и $F'(x) = 3x^2 + 6x \geq 0$ при $x \in [0;1]$. Любая точка этого отрезка может быть принята за корень уравнения (7.1) с погрешностью, не превышающей длины отрезка $\left[a,b\right]$, равной единицы.

Итерационный процесс уточнения корня уравнения (7.1) комбинированным методом хорд и касательных описывается двумя формулами:

$$x_n = \frac{x_{n-1}F\left(x_{n-1}^*\right) - x_{n-1}^*F\left(x_{n-1}\right)}{F\left(x_{n-1}^*\right) - F\left(x_{n-1}\right)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.2}$$

$$x_n^* = x_{n-1}^* - \frac{F\left(x_{n-1}^*\right)}{F'\left(x_{n-1}^*\right)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{7.3}$$

где $\left\{x_n\right\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, – приближения, вычисленные по методу хорд; $\left\{x_n^*\right\}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, – приближения, вычисленные по методу касательных. Очевидно, что точное значение корня уравнения $\overline{x}$ удовлетворяет неравенству: $x_n < \overline{x} < x_n^*$. Так как для функции $F\left(x\right) = x^3 + 3x^2 - 1$ на отрезке $\left[0;1\right]$ выполняются неравенства $F\left(0\right) < 0$, $F\left(1\right) > 0$, $F'\left(x\right) = 3x^2 + 6x \geq 0$ и $F''\left(x\right) = 6x + 6 > 0$, то, во-первых, неподвижным будет правый конец отрезка $\left[a,b\right] = \left[0;1\right]$, то есть точка $b = 1$: $F\left(1\right)F''\left(1\right) = 1 \cdot 2 > 0$, и, во-вторых, в качестве начального приближения x_0^* в формуле (7.3) выберем также правый конец отрезка $\left[a,b\right] = \left[0;1\right]$, для которого выполняется достаточное условие сходимости метода Ньютона: $F\left(x_0\right)F''\left(x_0\right) > 0$.

Процесс вычислений приближенного значения корня уравнения с заданной погрешностью $\varepsilon = 0,001$ следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнено условие останова: $\left|x_n - x_n^*\right| < \varepsilon$.

На первой итерации вычислений имеем:

$$x_1 = \frac{x_0F\left(x_0^*\right) - x_0^*F\left(x_0\right)}{F\left(x_0^*\right) - F\left(x_0\right)} = \frac{0 \cdot \left(1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1\right) - 1 \cdot \left(0^3 + 3 \cdot 0^2 - 1\right)}{\left(1^3 + 3 \cdot 1^2 - 1\right) - \left(0^3 + 3 \cdot 0^2 - 1\right)} = 0,2500,$$

$$x_1^* = x_0^* - \frac{F\left(x_0^*\right)}{F'\left(x_0^*\right)} = 1 - \frac{1^3 + 3\cdot 1^2 - 1}{3\cdot 1^2 + 6\cdot 1} = 0,6667.$$

Проверяем условие останова: $\left|x_1 - x_1^*\right| = \left|0,2500 - 0,6667\right| = 0,4167 > \varepsilon$.

Вторая итерация вычислений дает: $x_2 = \dfrac{x_1 F\left(x_1^*\right) - x_1^* F\left(x_1\right)}{F\left(x_1^*\right) - F\left(x_1\right)} =$

$$= \frac{0,25\cdot\left(0,6667^3 + 3\cdot 0,6667^2 - 1\right) - 0,6667\cdot\left(0,25^3 + 3\cdot 0,25^2 - 1\right)}{\left(0,6667^3 + 3\cdot 0,6667^2 - 1\right) - \left(0,25^3 + 3\cdot 0,25^2 - 1\right)} = 0,4828,$$

$$x_2^* = x_1^* - \frac{F\left(x_1^*\right)}{F'\left(x_1^*\right)} = 0,6667 - \frac{0,6667^3 + 3\cdot 0,6667^2 - 1}{3\cdot 0,6667^2 + 6\cdot 0,6667} = 0,5486,$$

$\left|x_2 - x_2^*\right| = \left|0,4828 - 0,5486\right| = 0,0658 > \varepsilon$ и т.д.

Результаты вычислений комбинированным методом хорд и касательных представлены в таблице 1.

Таблица 1

Результаты вычислений на основе комбинированного метода хорд и касательных

n	x_{n-1}	x_{n-1}^*	$F\left(x_{n-1}\right)$	$F\left(x_{n-1}^*\right)$	$F'\left(x_{n-1}\right)$	x_n	x_n^*	$\left\|x_n - x_n^*\right\|$
1	0,0000	1,0000	-1,0000	3,0000	9,0000	0,2500	0,6667	0,4167
2	0,2500	0,6667	-0,7969	0,6296	5,3333	0,4828	0,5486	0,0659
3	0,4828	0,5486	-0,1883	0,0680	4,1946	0,5311	0,5324	0,0013
4	0,5311	0,5324	-0,0039	0,0012	4,0447	0,5321	0,5321	0,0000

Очевидно, что уже на *четвертой* итерации условие останова: $\left|x_n - x_n^*\right| < \varepsilon$, выполняется. Поэтому за приближенное значение корня $\bar{x}$ уравнения (7.1) с заданной погрешностью $\varepsilon = 0,001$ можно принять величину $x_3 = 0,532$, то есть $\bar{x} = 0,532 \pm 0,001$.

Геометрическая интерпретация результатов вычислений комбинированным методом хорд и касательных представлена на рисунке 1.

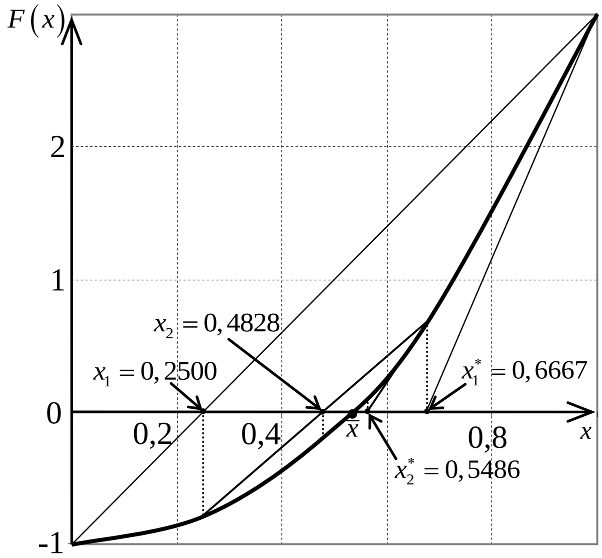

Рис. 1. Геометрическая интерпретация уточнения корня уравнения (7.1) комбинированным методом хорд и касательных

Контрольные вопросы

1. Сформулировать достаточное условие существования и единственности корня уравнения внутри отрезка $[a,b]$.
2. Записать формулу, реализующую алгоритм вычислений по методу хорд.
3. Записать формулу, реализующую алгоритм вычислений по методу Ньютона.
4. Дать геометрическую интерпретацию комбинированного метода хорд и касательных.
5. Записать формулу оценки погрешности на n-ом шаге комбинированного метода хорд и касательных.