Лабораторная работа №5.

МЕТОД ХОРД

Цель работы: приобретение и закрепление практических навыков при решении нелинейных уравнений методом хорд (секущей).

Задание. Найти корень уравнения (1) из таблицы (3.1) методом хорд с погрешностью $\varepsilon = 0,001$.

Указать число итераций необходимое для достижения заданной точности.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– проверку выполнения достаточного условия существования и единственности корня уравнения (1) внутри найденного отрезка;

– необходимые расчеты в соответствие с алгоритмом метода хорд;

– таблицу результатов вычислений по методу хорд;

– выводы по работе.

Пример 5. Найти методом хорд с погрешностью $\varepsilon = 0,001$ корень уравнения

$$x - e^{-x} = 0. \tag{5.1}$$

В примере 3.1 из лабораторной работы №3 был установлен отрезок $[a,b]=[0;1]$, внутри которого находится единственный корень уравнения (5.1). Любая точка этого отрезка может быть принята за корень уравнения (5.1) с погрешностью, не превышающей длины отрезка $[a,b]$, равной единицы.

Уточним значение корня уравнения (5.1) методом хорд [4,5,7]. Для этого сначала выясним, какой из концов отрезка $[a,b]=[0;1]$ будет неподвижным. Известно, что неподвижным остаётся тот конец отрезка $[a,b]$, на котором знак функции $F(x)$ совпадает со знаком её второй производной. Вычислим вторую производную: $F''(x) = -e^{-x}$. Очевидно, что вторая производная меньше нуля при любых значениях x. Так как $F(0) = -1 < 0$, то неподвижным будет левый конец отрезка $[a,b] = [0;1]$, то есть точка $a = 0$: $F(0)F''(0) > 0$. В этом случае при вычислениях методом хорд следует использовать формулу вида:

$$x_n = \frac{aF(x_{n-1}) - x_{n-1}F(a)}{F(x_{n-1}) - F(a)}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{5.1}$$

где $x_0 = b = 1$. Процесс вычислений методом хорд по формуле (5.1) следует проводить до тех пор, пока не будет выполняться неравенство

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \tag{5.2}$$

На первой итерации получаем:

$$x_1 = \frac{aF(x_0) - x_0F(a)}{F(x_0) - F(a)} = \frac{0 \cdot 0,6321 - 1 \cdot (-1)}{0,6321 - (-1)} = 0,6127.$$

Проверяем условие (5.2): $|x_1 - x_0| = |0,6127 - 1,0000| = 0,3873 > \varepsilon$.

На второй итерации имеем:

$$x_2 = \frac{aF(x_1) - x_1F(a)}{F(x_1) - F(a)} = \frac{0 \cdot 0,0708 - 0,6127 \cdot (-1)}{0,0708 - (-1)} = 0,5722,$$

$|x_2 - x_1| = |0,5722 - 0,6127| = 0,0405 > \varepsilon$ и т.д.

Результаты вычислений методом хорд представлены в таблице 5.

Таблица 5

Результаты вычислений по методу хорд

n	x_n	$F(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
0	1,0000	0,6321	
1	0,6127	0,0708	0,3873
2	0,5722	0,0079	0,0405
3	0,5677	0,0009	0,0045
4	0,5672	0,0001	0,0005

Очевидно, что уже на *четвертой* итерации условие (5.2) выполняется: $|x_4 - x_3| = |0,5672 - 0,5677| = 0,0005 < \varepsilon$. Поэтому за приближенное значение корня уравнения (5.1) $\bar{x}$ с заданной погрешностью $\varepsilon = 0,001$ можно принять величину $x_4 = 0,567$, то есть $\bar{x} = 0,567 \pm 0,001$.

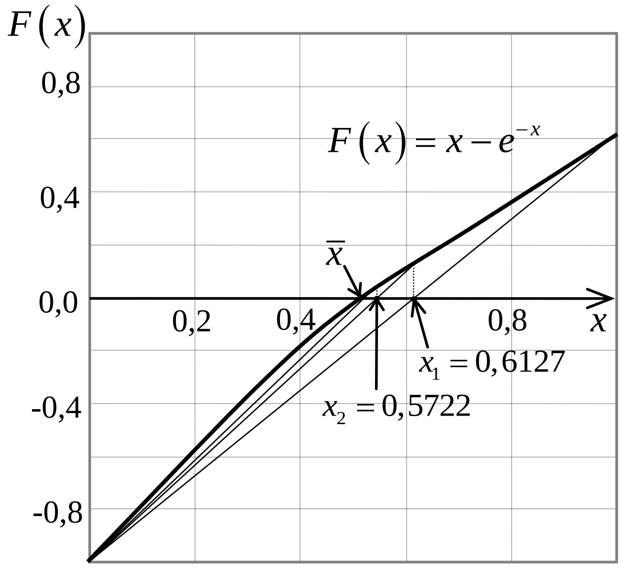

Рис. 5. Геометрическая интерпретация уточнения корня уравнения методом хорд

Геометрическая интерпретация результатов вычислений методом хорд представлена на рисунке 5.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается задача уточнения корня уравнения с заданной точностью?
2. Сформулировать достаточное условие существования и единственности корня уравнения внутри отрезка $[a,b]$.
3. Записать формулу, реализующую метод хорд с неподвижным правым концом.
4. Записать формулу, реализующую метод хорд с неподвижным левым концом.
5. Как определяется неподвижный конец отрезка в методе хорд?
6. Дать геометрическую интерпретацию метода хорд.
7. При выполнении какого условия итерационный процесс уточнения корня методом хорд можно завершить, так как заданная точность результата будет достигнута?