Лабораторная работа №2.

АНАЛИЗ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Цель работы: приобретение и закрепление практических навыков при оценке погрешности вычисления значений функции одной и нескольких переменных.

Задание 1. По данным из таблицы 2.1 вычислить значение функции z в заданной точке (x, y), абсолютную и относительную погрешности результата, используя формулу оценки погрешности функции нескольких переменных. Принять абсолютную погрешность для переменной x равной $\Delta x = 0,05$, а для переменной y равной $\Delta y = 0,01$.

Задание 2. Найти значение аргумента x_0, при котором точность результата не зависит от погрешности величины *x*. Построить зависимость коэффициента передачи ошибки по аргументу x и относительной погрешности вычисления функции z при изменении переменной x в окрестности точки x_0 и заданном значении y.

Таблица 2.1

Варианты заданий к лабораторной работе №2

№ вар.	$z = f(x, y)$	x	y
1	$z = \ln\left(x^2 + 2\right) e^{3y^2}$	1,2	0,12
2	$z = e^{2x}\left(x^2 - 2\right)\sin 5y$	0,2	2,13
3	$z = \left(x^2 - x + 2\right)\ln(1 + y)$	0,3	1,15
4	$z = \dfrac{e^{2x}(3x - 1)}{y^2 + 4}$	-1,1	2,31
5	$z = \dfrac{5\sin\left(x - \dfrac{\pi}{12}\right)}{\ln\left(1 + 3y + y^2\right)}$	$\dfrac{\pi}{4}$	1,31

Таблица 2.1 (продолжение)

№ вар.	$z = f(x, y)$	x	y
6	$z = \dfrac{(x+5)e^{3x}}{\cos(y^3 - 3)}$	-1,1	0,92
7	$z = \sqrt{x^2 + 3}\, e^{5y^2 + y}$	0,9	0,13
8	$z = \dfrac{e^{3x}(5x+3)}{\sqrt{y^2+1}}$	-0,1	1,31
9	$z = \dfrac{2(x^2 - x)}{\ln\sin 3y}$	1,3	$\dfrac{\pi}{12}$
10	$z = \dfrac{x^2 - 5x}{\ln(y^2 + 2)}$	0,8	0,91
11	$z = \dfrac{3x^2 - 5x}{y^3 - 3y + 1}$	0,1	2,31
12	$z = \dfrac{\ln(5y^2 + 1)}{x^2 + 3x + 2}$	0,1	1,24
13	$z = \dfrac{e^x(x^2 - 3)}{\sqrt{y^2 + 3}}$	-1,1	0,92
14	$z = (x^3 - 4x)\sin(y^2 + 1)$	-1,2	0,15
15	$z = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{\ln(y^2 + 5y + 6)}$	0,1	-1,13
16	$z = 5\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)e^y$	$\dfrac{2\pi}{9}$	0,87
17	$z = \dfrac{x^2 + 7x}{\ln(y^3 + 6)}$	0,9	0,16
18	$z = \dfrac{x^2 + 6x}{3y^2 + 7}$	1,0	0,29
19	$z = \dfrac{\ln(y^3 + 1)}{x^3 - 12x}$	1,1	1,21

Таблица 2.1 (окончание)

№ вар.	$z = f(x, y)$	x	y
20	$z = \dfrac{5e^x\left(x^2+1\right)}{e^{3y}+2}$	0,1	0,23
21	$z = \dfrac{\left(3x^3-1\right)e^y}{y+2}$	0,2	0,17
22	$z = \dfrac{\left(x^2+6\right)\sin 3y}{y^2+5}$	0,3	$\dfrac{\pi}{12}$
23	$z = \dfrac{x^2-x+2}{arctg\left(y^2+1\right)}$	0,1	0,32
24	$z = \dfrac{y\left(x^2+3x\right)}{\ln\left(y^2+5\right)}$	1,2	0,98
25	$z = \dfrac{x^2-3x+4}{\ln\left(y^2+7y\right)}$	0,1	-1,13

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– результаты аналитических вычислений частных производных от функции z в заданной точке;

– результат вычисления предельных абсолютной и относительной погрешностей;

– решение x_0 уравнения $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ относительно переменной x;

– формулу для вычисления предельной относительной погрешности δ_z функции двух переменных z;

– таблицу значений коэффициента $\left|\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|$ передачи ошибки по аргументу x и значений предельной относительной погрешности δ_z

функции z, вычисленных при различных значениях переменной x в окрестности точки x_0;

– графики кривых зависимости коэффициента передачи ошибки по аргументу x и предельной относительной погрешности δ_z функции z от изменения переменной x;

– выводы по работе.

Пример 2. Вычислить значение функции $z = \dfrac{2\sqrt{x^2 - 5x + 8}}{\ln\left(3y^2 + 1\right)}$ и оценить погрешность результата при $x = 2{,}30 \pm 0{,}05$ и $y = 1{,}31 \pm 0{,}01$.

Область определения заданной функции: $x \in \left(-\infty; \infty\right)$, $y \neq 0$. По условию задачи значения приближенных величин x и y заданы с предельными абсолютными погрешностями: $\Delta x = 0{,}05$ и $\Delta y = 0{,}01$, соответственно.

Для вычисления предельной абсолютной погрешности значения функции используем формулу [3,4,5]:

$$\Delta z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\Delta y \ , \tag{2.1}$$

в которой частные производные вычисляются в заданной точке $x = 2{,}3;\ y = 1{,}31$.

Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 5}{\ln\left(3y^2 + 1\right)\sqrt{x^2 - 5x + 8}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{12y\sqrt{x^2 - 5x + 8}}{\left(3y^2 + 1\right)\ln^2\left(3y^2 + 1\right)}$$

и их значения в заданной точке: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2,3\\ y=1,31}} = -0{,}165$ и $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=2,3\\ y=1,31}} = -1{,}037$. Таким образом, имеем: $\Delta z = 0{,}165 \cdot \Delta x + 1{,}037 \cdot \Delta y$.

Отсюда получаем предельную абсолютную погрешность значения функции: $\Delta z = 0{,}165 \cdot 0{,}05 + 1{,}037 \cdot 0{,}01 = 0{,}0186$.

Приближенное значение функции z равно:

$$z = \frac{2\sqrt{2,3^2 - 5\cdot 2,3 + 8}}{\ln\left(3\cdot 1,31^2 + 1\right)} = 1,473.$$

Тогда предельная относительная погрешность значения функции составит: $\delta_z = \frac{\Delta z}{|z|} = \frac{0,0186}{1,473} = 0,0126 \quad (1,3\%)$.

Отметим, что в формуле (2.1) величины $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ и $\left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|$ характеризуют коэффициенты передачи ошибки по аргументам x и y, соответственно. Найдем значение x_0, при котором коэффициент передачи ошибки по аргументу x равен 0. Решаем уравнение относительно x: $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x - 5}{\sqrt{x^2 - 5x + 8}\ \ln\left(3y^2 + 1\right)} = 0$. Отсюда получаем: $x_0 = 2,5$.

Исследуем зависимость коэффициента $\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|$ передачи ошибки по аргументу x и зависимость предельной относительной погрешности δ_z функции z от изменения переменной x в окрестности точки $x_0 = 2,5$ в интервале от 0 до 5,0 при $y = 1,31$, $\Delta x = 0,05$ и $\Delta y = 0,01$.

В основе расчетов лежат формулы:

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| = \left|\frac{2x - 5}{\ln\left(3y^2 + 1\right)\sqrt{x^2 - 5x + 8}}\right|,$$

$$\delta_z = \left|\frac{2x - 5}{2\left(x^2 - 5x + 8\right)}\right|\Delta x + \left|\frac{6y}{\left(3y^2 + 1\right)\ln\left(3y^2 + 1\right)}\right|\Delta y,\ \Delta x = 0,05,\ \Delta y = 0,01.$$

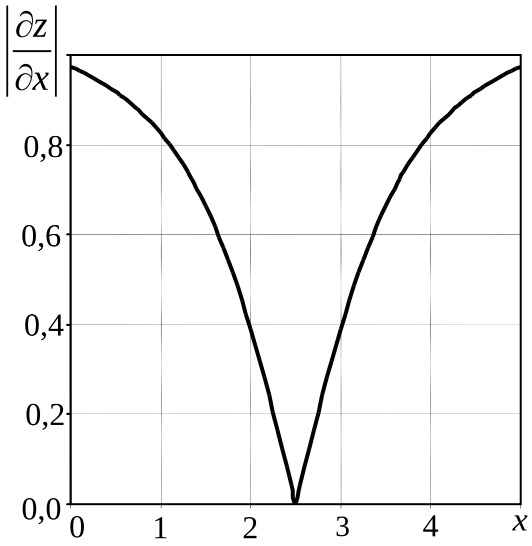
Результаты вычислений представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2

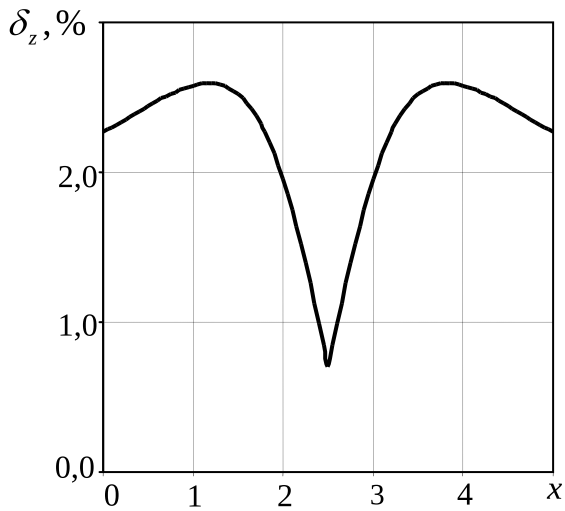
Результаты вычислений для примера 2

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0
$\left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|$	0,973	0,918	0,826	0,664	0,389	0,000	0,389	0,664	0,826	0,918	0,973
δ_z,%	2,3	2,4	2,6	2,5	2,0	0,7	2,0	2,5	2,6	2,4	2,3

На рисунке 2.1 представлены кривые зависимости коэффициента передачи ошибки по переменной x (рис. 2.1 а) и относительной погрешности δ_z,% (рис. 2.1 б) от изменения переменной x. Очевидно, что в окрестности точки $x_0 = 2,5$ ошибка Δx практически не влияет на точность результата.



а)



б)

Рис. 2.1. Кривые зависимости коэффициента передачи ошибки по аргументу x (*а*) и предельной относительной погрешности функции (*б*) от изменения переменной x

Контрольные вопросы

1. Сформулировать и доказать теорему о погрешности функции одной переменной.
2. Как изменяется погрешность приближенного числа при возведении его в степень?
3. Как изменяется погрешность приближенного числа при извлечении из него корня n-ой степени?
4. Сформулировать и доказать теорему о погрешности функции нескольких переменных.
5. Что характеризует коэффициент передачи ошибки и как он вычисляется?