Лабораторная работа №11.

МЕТОД КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Цель работы: приобретение и закрепление практических навыков при решении систем линейных алгебраических уравнений методом квадратного корня.

Задание. Используя метод квадратного корня, решить с точностью до $\varepsilon = 0,001$ уравнение в матричной форме: $A^T Ax = A^T b$, предварительно выполнив действия с матрицами. Матрицу A и вектор b записать из соответствующей системы линейных алгебраических уравнений: $Ax = b$, приведенной в лабораторной работе №9.

Сравнить полученные результаты.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– вычисление матрицы и правой части искомой системы линейных алгебраических уравнений;

– вычисление элементов матрицы L, используемой при разложении матрицы $A^T A$ в произведение вида $A^T A = LL^T$;

– решение системы линейных уравнений $Lg = A^T b$;

– решение системы линейных уравнений $L^T x = g$;

– проверку полученного решения;

– выводы по работе.

Пример. Используя метод квадратного корня, решить с точностью до $\varepsilon = 0,001$ уравнение в матричной форме: $A^T Ax = A^T b$, где матрица A и вектор b имеют вид:

$$A=\begin{pmatrix} 2,74 & -1,18 & 3,17 \\ 1,12 & 0,83 & -2,16 \\ 0,18 & 1,27 & 0,76 \end{pmatrix}, \qquad b=\begin{pmatrix} 2,18 \\ -1,15 \\ 3,23 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу $A^T A$ и вектор $A^T b$:

$$A^T A=\begin{pmatrix} 2,74 & 1,12 & 0,18 \\ -1,18 & 0,83 & 1,27 \\ 3,17 & -2,16 & 0,76 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2,74 & -1,18 & 3,17 \\ 1,12 & 0,83 & -2,16 \\ 0,18 & 1,27 & 0,76 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 8,7944 & -2,0750 & 6,4034 \\ -2,0750 & 3,6942 & -4,5682 \\ 6,4034 & -4,5682 & 15,2921 \end{pmatrix};$$

$$A^T b=\begin{pmatrix} 2,74 & 1,12 & 0,18 \\ -1,18 & 0,83 & 1,27 \\ 3,17 & -2,16 & 0,76 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2,18 \\ -1,15 \\ 3,23 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5,2666 \\ 0,5752 \\ 11,8494 \end{pmatrix}.$$

Матрица $F = A^T A$ – симметричная положительно определенная. В методе квадратного корня используется разложение матрицы F в виде $F = LL^T$, где L – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами. При этом исходная система линейных уравнений принимает вид $LL^T x = A^T b$, а её решение сводится к решению двух систем уравнений: $Lg = A^T b$ и $L^T x = g$. Так как каждая из этих систем имеет треугольную матрицу, то они решаются достаточно просто – аналогично обратному ходу в методе Гаусса.

Найдем элементы матрицы $L=\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$ из условия $LL^T = A^T A$, которое в развернутой форме принимает вид:

$$\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8,7944 & -2,0750 & 6,4034 \\ -2,0750 & 3,6942 & -4,5682 \\ 6,4034 & -4,5682 & 15,2921 \end{pmatrix}.$$

Умножая первый столбец матрицы L^T последовательно на первую, вторую и третью строки матрицы L, получаем систему уравнений, из которой находим элементы первого столбца матрицы L: l_{11}, l_{21} и l_{31}.

$$\begin{cases} l_{11}^2 = 8,7944; \\ l_{11}l_{21} = -2,0750; \\ l_{11}l_{31} = 6,4036. \end{cases}$$

Отсюда: $l_{11} = \sqrt{8,7944} = 2,9655$, $l_{21} = -\dfrac{2,0750}{l_{11}} = -\dfrac{2,0750}{2,9655} = -0,6997$, $l_{31} = \dfrac{6,4036}{l_{11}} = \dfrac{6,4036}{2,9655} = 2,1593$.

Теперь умножим второй столбец матрицы L^T на вторую и третью строки матрицы L:

$$\begin{cases} l_{21}^2 + l_{22}^2 = 3,6942; \\ l_{21}l_{31} + l_{22}l_{32} = -4,5682. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:

$l_{22} = \sqrt{3,6942 - l_{21}^2} = \sqrt{3,6942 - (-0,6997)^2} = 1,7901$.

Из второго уравнения получаем:

$$l_{32} = \frac{1}{l_{22}}\left(-4,5682 - l_{21}l_{31}\right) = \frac{1}{1,7901}\left[-4,5682 - (-0,6997)\cdot 2,1593\right] = -1,7079.$$

И, наконец, умножим третий столбец матрицы L^T на третью строку матрицы L: $l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2 = 15,2921$. Отсюда находим элемент l_{33}: $l_{33} = \sqrt{15,2921 - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{15,2921 - 2,1593^2 - (-1,7079)^2} = 2,7772$.

Таким образом, матрица L имеет вид:

$$L = \begin{pmatrix} 2,9655 & 0 & 0 \\ -0,6997 & 1,7901 & 0 \\ 2,1593 & -1,7079 & 2,7772 \end{pmatrix}.$$

Теперь, в начале, решаем систему $Lg = A^T b$, которая в развернутой форме имеет вид:

$$\begin{cases} 2,9655 g_1 = 5,2666; \\ -0,6997 g_1 + 1,7901 g_2 = 0,5752; \\ 2,1593 g_1 - 1,7079 g_2 + 2,7772 x_3 = 11,8494. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$g_1 = \frac{5,2666}{2,9655} = 1,7759, \qquad g_2 = \frac{0,5752 - (-0,6997) \cdot 1,7759}{1,7901} = 1,0155,$$

$$g_3 = \frac{11,8494 - (-1,7079) \cdot 1,0155 - 2,1593 \cdot 1,7759}{2,7772} = 3,5104.$$

Таким образом, имеем: $g = (1,7759;\ 1,0155;\ 3,5104)^T$.

На заключительном этапе решаем систему $L^T x = g$:

$$\begin{cases} 2,9655 x_1 - 0,6997 x_2 + 2,1593 x_3 = 1,7759; \\ 1,7901 x_2 - 1,7079 x_3 = 1,0155; \\ 2,7772 x_3 = 3,5104. \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$x_3 = \frac{3,5104}{2,7772} = 1,2640, \qquad x_2 = \frac{1,0155 + 1,7079 \cdot 1,2640}{1,7901} = 1,7732,$$

$$x_1 = \frac{1,7759 - 2,1593 \cdot 1,2640 - (-0,6997) \cdot 1,7732}{2,9655} = 0,0969.$$

Таким образом, решение заданного уравнения в матричной форме имеет вид: $x = (0,097;\ 1,773;\ 1,264)^T$.

Контрольные вопросы

1. Назвать известные численные методы решения систем линейных алгебраических уравнений.
2. Чем отличаются прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений от итерационных методов?
3. При решении каких систем применяется метод квадратного корня?
4. В чем состоит идея метода квадратного корня?
5. Описать алгоритм вычисления элементов матрицы L в методе квадратного корня.
6. Чему равно количество арифметических операций, выполняемых в методе квадратного корня?
7. Назвать основные преимущества метода квадратного корня по сравнению с методом Гаусса.