Лабораторная работа №8.

МЕТОД ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Цель работы: приобретение и закрепление практических навыков при решении нелинейных уравнений методом простых итераций.

Задание. Найти корень уравнения (3) из таблицы (3.1) методом простых итераций с погрешностью $\varepsilon = 0,001$.

Указать число итераций необходимое для достижения заданной точности.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– проверку выполнения достаточного условия существования и единственности корня уравнения (3) внутри найденного отрезка;

– приведение заданного нелинейного уравнения к виду $x = \varphi(x)$;

– проверка, а при необходимости обеспечение, достаточного условия сходимости метода простых итераций;

– необходимые расчеты в соответствие с алгоритмом метода простых итераций;

– таблицу результатов вычислений методом простых итераций;

– выводы по работе.

Пример 8. Найти методом простых итераций с погрешностью $\varepsilon = 0,001$ один из корней уравнения

$$x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0, \qquad (8.1)$$

В примере 3.3 из лабораторной работы №3 был установлен отрезок $[-16; -1,230]$, внутри которого находится единственный действительный корень уравнения (8.1). Уменьшим длину этого отрезка. Очевидно, что отрезок $[a, b] = [-4; -2]$ удовлетворяет достаточным условиям существования и единственности корня уравнения (8.1): $F(-4) \cdot F(-2) = -37 \cdot 17 < 0$ и $F'(x) = 3x^2 - 2x - 7 > 0$ при $x \in [-4; -2]$. Любая точка этого отрезка может быть принята за корень уравнения

(8.1) с погрешностью, не превышающей длины отрезка $\left[a,b\right]$, равной двум.

Рассмотрим итерационную процедуру уточнения корня уравнения (8.1) методом простых итераций.

Приведем уравнение (8.1) к виду $x=\varphi\left(x\right)$ таким образом, чтобы выполнялось достаточное условие сходимости итерационной процедуры:

$$\left|\varphi'\left(x\right)\right|\le q<1. \tag{8.2}$$

Для этого представим уравнение (8.1) следующим образом:

$$x=x+c\left(x^3-x^2-7x+15\right), \tag{8.3}$$

где c - некоторый параметр, обеспечивающий выполнение достаточного условия сходимости. Очевидно, что для уравнения (8.3) имеем $\varphi\left(x\right)=x+c\left(x^3-x^2-7x+15\right)$. Отсюда: $\varphi'\left(x\right)=1+c\left(3x^2-2x-7\right)$. Из неравенства (8.2) получаем: $\left|1+c\left(3x^2-2x-7\right)\right|\le q<1$ или

$$-2<-q-1\le c\left(3x^2-2x-7\right)\le q-1<0. \tag{8.4}$$

Так как при $x\in\left[-4;-2\right]$ $F'\left(x\right)=3x^2-2x-7>0$, то параметр c должен удовлетворять условию: $c<0$. Знакоположительная функция $F'\left(x\right)=3x^2-2x-7>0$ на отрезке $\left[-4;-2\right]$ монотонно убывает, так как её производная $F''\left(x\right)=6x-2<0$. Следовательно, имеем: $F'\left(-2\right)\le F'\left(x\right)\le F'\left(-4\right)$ или $9\le F'\left(x\right)\le 49$, то есть $\max\limits_{[-4;-2]}\left|F'\left(x\right)\right|=49$.

Из (8.4) следует, что $-\dfrac{2}{3x^2-2x-7}<-\dfrac{1+q}{3x^2-2x-7}\le c<0$. Так как $-\dfrac{2}{3x^2-2x-7}\le-\dfrac{2}{\max\limits_{[-4;-2]}\left|F'\left(x\right)\right|}=-\dfrac{2}{49}$, то условие (8.4) будет выполняться при значениях $-\dfrac{2}{49}<c<0$. Зададимся значением $q=0,9$. Тогда из соотношения $-\dfrac{2}{49}<-\dfrac{1+q}{49}\le c<0$ получаем $c=-\dfrac{1,9}{49}=-0,0388$.

Таким образом, получаем $\varphi(x) = x - 0,0388\left(x^3 - x^2 - 7x + 15\right)$ или $\varphi(x) = -0,0388x^3 + 0,0388x^2 + 1,2716x - 0,582$. Покажем, что достаточное условие сходимости метода простых итераций для этой функции действительно выполняется.

Вычислим производные: $\varphi'(x) = -0,1164x^2 + 0,0776x + 1,2716$ и $\varphi''(x) = -0,2328x + 0,0776$. Очевидно, что при $x \in [-4; -2]$ $\varphi''(x) > 0$. Это означает, что функция $\varphi'(x)$ монотонно возрастает на отрезке $[-4; -2]$. Следовательно, наибольшее значение на этом отрезке функция $|\varphi'(x)|$ может принимать только на одном из его концов: $\max\limits_{[-4;-2]} |\varphi'(x)| = \max\left\{|\varphi'(-4)|, |\varphi'(-2)|\right\} = \max\{0,900; 0,651\} = 0,9$. Следовательно, $|\varphi'(x)| \le 0,9 < 1$ и параметр $q = 0,9$.

В этом случае итерационная формула метода простых итераций при решении уравнения (8.1) принимает вид:

$$x_n = -0,0388x_{n-1}^3 + 0,0388x_{n-1}^2 + 1,2716x_{n-1} - 0,582, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad (8.5)$$

Примем за начальное приближение правый конец отрезка – точку $x_0 = -2,0000$. Подставляя это значение в формулу (8.5), получаем: $x_1 = -0,0388 \cdot (-2)^3 + 0,0388 \cdot (-2)^2 + 1,2716 \cdot (-2) - 0,582 = -2,6596$. Подставляя найденное значение $x_1 = -2,6592$ снова в формулу (8.5), имеем: $x_2 = -0,0388 \cdot (-2,6596)^3 + 0,0388 \cdot (-2,6596)^2 + 1,2716 \cdot (-2,6596) - 0,582 = -2,9596$, и т.д.

Отметим, что параметр c, обеспечивающий сходимость итерационной процедуры уточнения корня уравнения (8.1), может быть также найден из простого соотношения:

$$|c| < \frac{1}{1+M}, \qquad (8.6)$$

где $M = \max\limits_{[-4;-2]} |F'(x)| = 49$. Таким образом, имеем $c = -\frac{1}{50} = -0,02$.

Для оценки погрешности *n*-ого приближения в методе простых итераций, с учетом того, что в окрестности корня $\bar{x}$ уравнения (8.1) $\varphi'(x) < 0$, воспользуемся формулой: $|x_n - \bar{x}| < |x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

Результаты вычислений в методе простых итераций представлены в таблице 8.

Таблица 8

Результаты вычислений по методу простых итераций

n	x_{n-1}	x_n	$\|x_n - x_{n-1}\|$
1	-2,0000	-2,6596	0,6596
2	-2,6596	-2,9596	0,3000
3	-2,9596	-2,9997	0,0402
4	-2,9997	-3,0000	0,0003

Очевидно, что уже на *четвертой* итерации заданная точность вычисления корня заданного уравнения достигнута. Таким образом, корень уравнения (8.1) равен: $\bar{x} = 3{,}000 \pm 0{,}001$.

Контрольные вопросы

1. Из каких основных этапов состоит метод простых итераций?
2. Привести примеры замены уравнения вида $F(x) = 0$ эквивалентным ему уравнением $x = \varphi(x)$.
3. Дать геометрическую интерпретацию метода простых итераций для случая $0 < \varphi'(x) < 1$.
4. Дать геометрическую интерпретацию метода простых итераций для случая $-1 < \varphi'(x) < 0$.
5. Дать геометрическую интерпретацию метода простых итераций для случая $\varphi'(x) > 1$.
6. В чем заключается достаточное условие сходимости метода простых итераций?
7. Сформулировать и доказать теорему о достаточном условии сходимости метода простых итераций.
8. Записать формулу оценки погрешности *n*-ого приближения в методе простых итераций.