Лабораторная работа №12.

РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ ПРОСТЫХ ИТЕРАЦИЙ

Цель работы: приобретение и закрепление практических навыков при решении систем линейных алгебраических уравнений методом простых итераций.

Задание 1. С помощью эквивалентных преобразований заданной системы уравнений обеспечить выполнение достаточного условия сходимости метода простых итераций.

Задание 2. Привести преобразованную систему линейных уравнений к виду, удобному для применения метода простых итераций.

Задание 3. Найти норму матрицы приведенной системы уравнений и проверить выполнение достаточного условия сходимости метода простых итераций.

Задание 4. Оценить число итераций, необходимое для обеспечения заданной точности результата вычислений.

Задание 5. Решить систему линейных уравнений методом простых итераций с погрешностью $\varepsilon = 0,001$. Указать число итераций, при котором была достигнута заданная точность решения.

Варианты заданий к лабораторным работам №12, 13

Вариант №1

$$\begin{cases} 2,7x_1 + 3,3x_2 + 1,3x_3 = 2,1; \\ 3,5x_1 - 1,7x_2 + 2,8x_3 = 1,7; \\ 4,1x_1 + 5,8x_2 - 1,7x_3 = 0,8. \end{cases}$$

Вариант №2

$$\begin{cases} 1,7x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,7; \\ 2,1x_1 + 3,4x_2 + 1,8x_3 = 1,1; \\ 4,2x_1 - 1,7x_2 + 1,3x_3 = 2,8. \end{cases}$$

Вариант №3

$$\begin{cases} 3,1x_1 + 2,8x_2 + 1,9x_3 = 0,2; \\ 1,9x_1 + 3,1x_2 + 2,1x_3 = 2,1; \\ 7,5x_1 + 3,8x_2 + 4,8x_3 = 5,6. \end{cases}$$

Вариант №4

$$\begin{cases} 9,1x_1 + 5,6x_2 + 7,8x_3 = 9,8; \\ 3,8x_1 + 5,1x_2 - 2,8x_3 = 6,7; \\ 4,1x_1 + 5,7x_2 + 1,2x_3 = 5,8. \end{cases}$$

Вариант №5

$$\begin{cases} 3,3x_1 + 2,1x_2 + 2,8x_3 = 0,8; \\ 4,1x_1 + 3,7x_2 + 4,8x_3 = 5,7; \\ 2,7x_1 + 1,8x_2 + 1,1x_3 = 3,2. \end{cases}$$

Вариант №6

$$\begin{cases} 7,6x_1 + 5,8x_2 + 4,7x_3 = 10,1; \\ 3,8x_1 + 4,1x_2 + 2,7x_3 = 9,7; \\ 2,9x_1 + 2,1x_2 + 3,8x_3 = 7,8. \end{cases}$$

Вариант №7

$$\begin{cases} 3,2x_1 - 2,5x_2 + 3,7x_3 = 6,5; \\ 0,5x_1 + 0,34x_2 + 1,7x_3 = -0,24; \\ 1,6x_1 + 2,3x_2 - 1,5x_3 = 4,3. \end{cases}$$

Вариант №8

$$\begin{cases} 5,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = -3,5; \\ 4,2x_1 + 1,7x_2 - 2,3x_3 = 2,7; \\ 3,4x_1 + 2,4x_2 + 7,4x_3 = 1,9. \end{cases}$$

Вариант №9

$$\begin{cases} 3,6x_1 + 1,8x_2 - 4,7x_3 = 3,8; \\ 2,7x_1 - 3,6x_2 + 1,9x_3 = 0,4; \\ 1,5x_1 + 4,5x_2 + 3,3x_3 = -1,6. \end{cases}$$

Вариант №10

$$\begin{cases} 5,6x_1 + 2,7x_2 - 1,7x_3 = 1,9; \\ 3,4x_1 - 3,6x_2 - 6,7x_3 = -2,4; \\ 0,8x_1 + 1,3x_2 + 3,7x_3 = 1,2. \end{cases}$$

Вариант №11

$$\begin{cases} 2,7x_1 + 0,9x_2 - 1,5x_3 = 3,5; \\ 4,5x_1 - 2,8x_2 + 6,7x_3 = 2,6; \\ 5,1x_1 + 3,7x_2 - 1,4x_3 = -0,14. \end{cases}$$

Вариант №12

$$\begin{cases} 4,5x_1 - 3,5x_2 + 7,4x_3 = 2,5; \\ 3,1x_1 - 0,6x_2 - 2,3x_3 = -1,5; \\ 0,8x_1 + 7,4x_2 - 0,5x_3 = 6,4. \end{cases}$$

Вариант №13

$$\begin{cases} 3,8x_1 + 6,7x_2 - 1,2x_3 = 5,2; \\ 6,4x_1 + 1,3x_2 - 2,7x_3 = 3,8; \\ 2,4x_1 - 4,5x_2 + 3,5x_3 = 0,6. \end{cases}$$

Вариант №14

$$\begin{cases} 5,4x_1 - 6,2x_2 - 0,5x_3 = 0,52; \\ 3,4x_1 + 2,3x_2 + 0,8x_3 = -0,8; \\ 2,4x_1 - 1,1x_2 + 3,8x_3 = 1,8. \end{cases}$$

Вариант №15

$$\begin{cases} 7,8x_1 + 5,3x_2 + 4,8x_3 = 1,8; \\ 3,3x_1 + 1,1x_2 + 1,8x_3 = 2,3; \\ 4,5x_1 + 3,3x_2 + 2,8x_3 = 3,4. \end{cases}$$

Вариант №16

$$\begin{cases} 3,8x_1 + 4,1x_2 - 2,3x_3 = 4,8; \\ -2,1x_1 + 3,9x_2 - 5,8x_3 = 3,3; \\ 1,8x_1 + 1,1x_2 - 2,1x_3 = 5,8. \end{cases}$$

Вариант №17

$$\begin{cases} 1,7x_1 - 2,2x_2 + 3,0x_3 = 1,8; \\ 2,1x_1 + 1,9x_2 - 2,3x_3 = 2,8; \\ 4,2x_1 + 3,9x_2 - 3,1x_3 = 5,1. \end{cases}$$

Вариант №18

$$\begin{cases} 2,8x_1 + 3,8x_2 - 3,2x_3 = 4,5; \\ 2,5x_1 - 2,8x_2 + 3,3x_3 = 7,1; \\ 6,5x_1 - 7,1x_2 + 4,8x_3 = 6,3. \end{cases}$$

Вариант №19

$$\begin{cases} 3,3x_1 + 3,7x_2 + 4,2x_3 = 5,8; \\ 2,7x_1 + 2,3x_2 - 2,9x_3 = 6,1; \\ 4,1x_1 + 4,8x_2 - 5,0x_3 = 7,0. \end{cases}$$

Вариант №20

$$\begin{cases} 7,1x_1 + 6,8x_2 + 6,1x_3 = 7,0; \\ 5,0x_1 + 4,8x_2 + 5,3x_3 = 6,1; \\ 8,2x_1 + 7,8x_2 + 7,1x_3 = 5,8. \end{cases}$$

Вариант №21

$$\begin{cases} 3,7x_1 + 3,1x_2 + 4,0x_3 = 5,0; \\ 4,1x_1 + 4,5x_2 - 4,8x_3 = 4,9; \\ -2,1x_1 - 3,7x_2 + 1,8x_3 = 2,7. \end{cases}$$

Вариант №22

$$\begin{cases} 4,1x_1 + 5,2x_2 - 5,8x_3 = 5,8; \\ 3,8x_1 - 3,1x_2 + 4,0x_3 = 5,3; \\ 7,8x_1 + 5,3x_2 - 6,3x_3 = 5,8. \end{cases}$$

Вариант №23

$$\begin{cases} 3,7x_1 - 2,3x_2 + 4,5x_3 = 2,4; \\ 2,5x_1 + 4,7x_2 - 7,8x_3 = 3,5; \\ 1,6x_1 + 5,3x_2 + 1,3x_3 = -2,4. \end{cases}$$

Вариант №24

$$\begin{cases} 6,3x_1 + 5,2x_2 - 0,6x_3 = 1,5; \\ 3,4x_1 - 2,3x_2 + 3,4x_3 = 2,7; \\ 0,8x_1 + 1,4x_2 + 3,5x_3 = -2,3. \end{cases}$$

Вариант №25

$$\begin{cases} 3,8x_1 + 6,7x_2 - 1,2x_3 = 5,2; \\ 6,4x_1 + 1,3x_2 - 2,7x_3 = 3,8; \\ 2,4x_1 - 4,5x_2 + 3,5x_3 = 0,6. \end{cases}$$

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– преобразование исходной системы линейных алгебраических уравнений к виду, при котором обеспечивается условие доминирования диагональных элементов;

– приведение преобразованной системы линейных алгебраических уравнений к виду, удобному для применения метода простых итераций;

– проверку выполнения достаточного условия сходимости метода простых итераций;

– оценку числа итераций, при достижении которого обеспечивается заданная точность решения системы линейных уравнений;

– необходимые расчеты в соответствие с алгоритмом метода простых итераций;

– таблицу результатов вычислений методом простых итераций;

– проверку полученного решения;

– выводы по работе.

Пример. Методом простых итераций решить с точностью до $\varepsilon = 0,001$ систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 4,5\,x_1 - 1,8\,x_2 + 3,6\,x_3 = -1,7; \\ 3,1\,x_1 + 2,3\,x_2 - 1,2\,x_3 = 3,6; \\ 1,8\,x_1 + 2,5\,x_2 + 4,6\,x_3 = 2,2. \end{cases}$$

С помощью эквивалентных преобразований приведём исходную систему к виду, при котором обеспечивается выполнение достаточного условия сходимости метода простых итераций – условия доминирования диагональных элементов [5]:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Сначала сложим первое и второе уравнения системы, и результат запишем на место первого уравнения. Затем ко второму уравнению прибавим удвоенное третье уравнение, потом вычтем первое и результат запишем на место второго уравнения. И, наконец, из третьего уравнения вычтем второе, а результат запишем на место третьего уравнения. В итоге получаем:

$$\begin{cases} \mathbf{7,6}\,x_1 + 0,5\,x_2 + 2,4\,x_3 = 1,9; \\ 2,2\,x_1 + \mathbf{9,1}\,x_2 + 4,4\,x_3 = 9,7; \\ -1,3\,x_1 + 0,2\,x_2 + \mathbf{5,8}\,x_3 = -1,4. \end{cases}$$

Очевидно, что условие доминирования диагональных элементов теперь выполняется.

Приведем преобразованную систему линейных уравнений к виду, удобному для применения метода простых итераций: $x = Bx + d$. Для этого из первого уравнения выразим переменную x_1, из второго – переменную x_2, а из третьего уравнения выразим x_3. В результате получаем:

$$\begin{cases} x_1 = & & -0,0658\,x_2 - 0,3158\,x_3 + 0,2500; \\ x_2 = -0,2418\,x_1 & & -0,4835\,x_3 + 1,0659; \\ x_3 = \ \ 0,2241\,x_1 - 0,0345\,x_2 & & -0,2414. \end{cases} \qquad (1)$$

Таким образом, имеем:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -0,0658 & -0,3158 \\ -0,2418 & 0 & -0,4835 \\ 0,2241 & -0,0345 & 0 \end{bmatrix}, \qquad d = \begin{bmatrix} 0,2500 \\ 1,0659 \\ -0,2414 \end{bmatrix}.$$

Найдем норму матрицы B приведенной системы уравнений и проверим выполнение достаточного условия сходимости метода простых итераций: $\|B\| = \max\limits_{i=\overline{1,3}} \sum\limits_{j=1}^{3} |b_{ij}| < 1$. Имеем:

$$\|B\| = \max\{0,3816;\ 0,7253;\ 0,2586\} = 0,7253 < 1.$$

Следовательно, достаточное условие сходимости метода простых итераций выполняется.

Оценим число итераций, необходимое для обеспечения заданной точности результата вычислений. Для этого используем формулу априорной оценки погрешности k-ого приближения:

$$\|\bar{x} - x^{(k)}\| \le \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \cdot \|d\|,$$

где $\bar{x}$ – точное решение заданной системы уравнений; $x^{(k)}$ – её приближенное решение, вычисленное на k- той итерации; $\|B\| = 0,7253$; $\|d\| = \max\limits_{i=\overline{1,3}} |d_i| = 1,0659$; $\|\bar{x} - x^{(k)}\| = \max\limits_{i=\overline{1,3}} |\bar{x}_i - x_i^{(k)}|$.

Очевидно, что для того чтобы выполнялось условие $\|\bar{x} - x^{(k)}\| < \varepsilon$, достаточно выполнения неравенства: $\dfrac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \cdot \|d\| < \varepsilon$.

Имеем: $\dfrac{0,7253^k}{0,2747}\cdot 1,0659 < 0,001$ или $0,7253^k < 2,577\cdot 10^{-4}$. Отсюда получаем: $k > \dfrac{-4+\lg 2,577}{\lg 0,7253} = 25,7$. Таким образом, заданная точность результата будет гарантированно обеспечена при числе итераций $k \geq 26$.

Для решения задачи методом простых итераций используем рекуррентные формулы:

$$\begin{cases} x_1^{(k)} = & & -0,0658\, x_2^{(k-1)} - 0,3158\, x_3^{(k-1)} + 0,2500; \\ x_2^{(k)} = -0,2418\, x_1^{(k-1)} & & -0,4835\, x_3^{(k-1)} + 1,0659; \\ x_3^{(k)} = \ \ 0,2241\, x_1^{(k-1)} - 0,0345\, x_2^{(k-1)} & & -0,2414. \end{cases}$$

Начальное приближение полагаем равным $x^{(0)} = \left(0;\ 0;\ 0\right)^T$. Очевидно, что тогда первое приближение $x^{(1)}$ будет равно вектору d: $x^{(1)} = \left(0,2500;\ 1,0659;\ -02414\right)^T$. Подставляя полученные значения в рекуррентные формулы, получаем второе приближение к точному решению заданной системы: $x^{(2)} = \left(0,2561;\ 1,1222;\ -02221\right)^T$, и т.д. Для остановки рекуррентной процедуры вычислений приближённых решений системы линейных уравнений можно использовать условие: $\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \leq \dfrac{1-\|B\|}{\|B\|}\cdot\varepsilon$, которое при $\|B\| = 0,7253$ и $\varepsilon = 0,001$ принимает вид $\left\| x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\| \leq 0,00038.$

Результаты вычислений представлены в таблице 1.

Очевидно, что уже на *шестой* итерации заданная точность достигнута. Таким образом, решение заданной системы линейных алгебраических уравнений с точностью $\varepsilon = 0,001$ имеет вид:

$$x_1 = 0,248 \pm 0,001; \quad x_2 = 1,115 \pm 0,001; \quad x_3 = -0,224 \pm 0,001.$$

Таблица 1

Результаты вычислений по методу простых итераций

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\Vert x^{(k)} - x^{(k-1)} \right\Vert$
0	0,0000	0,0000	0,0000	
1	0,2500	1,0659	-0,2414	1,0659
2	0,2561	1,1222	-0,2221	0,0563
3	0,2463	1,1114	-0,2227	0,0108
4	0,2472	1,1141	-0,2245	0,0026
5	0,2476	1,1147	-0,2244	0,0007
6	0,2475	1,1146	-0,2243	0,0001
7	0,2475	1,1146	-0,2243	0,0000

Контрольные вопросы

1. Дать определение сходимости в метрических и нормированных пространствах.
2. Дать определение нормы квадратной матрицы.
3. Что такое число (мера) обусловленности матрицы?
4. Дать определение устойчивости решения системы линейных уравнений.
5. Записать формулу оценки погрешности решения системы линейных уравнений через меру обусловленности её матрицы.
6. В чем заключается метод простых итераций решения системы линейных уравнений?
7. Как преобразовать исходную систему линейных уравнений к виду, удобному для применения метода простых итераций?
8. Сформулировать достаточные условия сходимости метода простых итераций.
9. Вывести формулу априорной оценки погрешности решения системы линейных уравнений методом простых итераций.
10. Вывести формулу апостериорной оценки погрешности решения системы линейных уравнений методом простых итераций.