Лабораторная работа №4.

МЕТОД БИСЕКЦИЙ (ДЕЛЕНИЯ ОТРЕЗКА ПОПОЛАМ)

Цель работы: приобретение и закрепление практических навыков при решении нелинейных уравнений методом бисекций (деления отрезка пополам).

Задание. Найти корень уравнения (1) из таблицы 3.1 методом бисекций (деления отрезка пополам) с погрешностью $\varepsilon = 0,001$.

Указать число итераций необходимое для достижения заданной точности.

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

– тему лабораторной работы, полный текст задания и исходные данные в соответствии с номером варианта;

– проверку выполнения достаточного условия существования и единственности корня уравнения (1) внутри найденного отрезка;

– расчеты в соответствие с алгоритмом метода бисекций;

– таблицу результатов вычислений по методу бисекций;

– априорную оценку числа итераций, необходимого для достижения заданной точности результата вычислений;

– выводы по работе.

Пример 4. Найти методом бисекций с погрешностью $\varepsilon = 0,001$ корень уравнения

$$x - e^{-x} = 0. \qquad (4.1)$$

В примере 3.1 из лабораторной работы №3 был установлен отрезок $[a,b] = [0;1]$, внутри которого находится единственный корень уравнения (4.1). Действительно, на концах отрезка $[0;1]$ функция $F(x) = x - e^{-x}$ принимает значения различных знаков: $F(0) = -1 < 0$ и $F(1) = 1 - \dfrac{1}{e} \approx 0,6321 > 0$, так, что $F(0)F(1) < 0$. Очевидно, что если за корень уравнения (4.1) $\bar{x}$ принять середину отрезка $[0;1]$ – точку $x = 0,5000$, то предельная абсолютная погрешность Δx: $|x - \bar{x}| \le \Delta x$, такого приближения будет равна $\Delta x = 0,5000 > \varepsilon$.

При уточнении приближенного значения корня уравнения (4.1) методом бисекций используем следующий алгоритм вычислений.

1. Разделим отрезок $\left[a,b\right]=\left[0;1\right]$ точкой $c=\dfrac{a+b}{2}=0,5000$ пополам и вычислим значение функции $F\left(x\right)$ в этой точке: $F\left(0,5000\right)=-0,1065$.

2. Из двух полученных отрезков $\left[a,c\right]=\left[0;0,5000\right]$ и $\left[c,b\right]=\left[0,5000;1\right]$ в качестве отрезка, содержащего корень уравнения (4.1), выбираем отрезок $\left[c,b\right]$, так как на его концах функция $F\left(x\right)=x-e^{-x}$ принимает значения различных знаков: $F\left(0,5000\right)=-0,1065<0$ и $F\left(1\right)\approx 0,6321>0$, так, что $F\left(0,500\right)F\left(1\right)<0$.

3. Переобозначим левый конец выбранного отрезка $\left[c,b\right]$: $a=c$, и найдем длину нового отрезка $\left[a,b\right]=\left[0,5000;1\right]$: $\left|b-a\right|=0,5000$.

4. Сравним длину отрезка $\left[a,b\right]$, $\left|b-a\right|=0,5000$, с величиной $\varepsilon=0,001$. Так как имеем $\left|b-a\right|>\varepsilon$, то переходим к шагу 1.

Результаты вычислений по описанному выше алгоритму метода бисекций представлены в таблице 4.

Таблица 4

Результаты вычислений по методу бисекций

№ итер.	a	b	c	$F\left(a\right)$	$F\left(b\right)$	$F\left(c\right)$	$\left\|b-a\right\|$
0	0,0000	1,0000	0,5000	-1,0000	0,6321	-0,1065	1,00000
1	0,5000	1,0000	0,7500	-0,1065	0,6321	0,2776	0,50000
2	0,5000	0,7500	0,6250	-0,1065	0,2776	0,0897	0,25000
3	0,5000	0,6250	0,5625	-0,1065	0,0897	-0,0073	0,12500
4	0,5625	0,6250	0,5938	-0,0073	0,0897	0,0415	0,06250
5	0,5625	0,5938	0,5781	-0,0073	0,0415	0,0172	0,03125
6	0,5625	0,5781	0,5703	-0,0073	0,0172	0,0050	0,01563
7	0,5625	0,5703	0,5664	-0,0073	0,0050	-0,0012	0,00781
8	0,5664	0,5703	0,5684	-0,0012	0,0050	0,0019	0,00391
9	0,5664	0,5684	0,5674	-0,0012	0,0019	0,0004	0,00195
10	0,5664	0,5674	0,5669	-0,0012	0,0004	-0,0004	0,00098

Можно априорно оценить число итераций, необходимое для достижения заданной точности. Очевидно, что на каждой итерации метода бисекций длина отрезка, внутри которого содержится корень уравнения (4.1), уменьшается в два раза. Поэтому на n-ой итерации длина такого отрезка составит $\frac{|b-a|}{2^n}$. Из неравенства $\frac{|b-a|}{2^n} < \varepsilon$ получаем: $n > \frac{\ln|b-a| - \ln\varepsilon}{\ln 2}$, где $|b-a|$ – длина первоначального отрезка $[a,b]$. При $[a,b]=[0;1]$ и $\varepsilon = 0,001$ имеем:

$$n > \frac{\ln 1 - \ln 10^{-3}}{\ln 2} = \frac{3\ln 10}{\ln 2} = 9,97.$$

Таким образом, заданная точность вычислений будет достигнута при $n = 10$. Действительно, из таблицы 4.1 видно, что на десятой итерации вычислений длина отрезка $[a,b] = [0,5664; 0,5674]$ составляет $|b-a| = 0,00098 < \varepsilon$. При выполнении этого условия вычисления заканчиваются и за приближенное с заданной точностью значение корня уравнения (4.1) принимается середина полученного отрезка: $\bar{x} = 0,567 \pm 0,001$.

Контрольные вопросы

1. В чем заключается задача уточнения корня уравнения с заданной точностью?
2. Сформулировать достаточное условие существования и единственности корня уравнения внутри отрезка $[a,b]$.
3. Описать алгоритм метода бисекций.
4. Как оценить число итераций в методе бисекций, необходимое для достижения заданной точности?
5. Доказать сходимость процесса деления отрезка пополам к точному значению корня уравнения.
6. Дать геометрическую интерпретацию метода бисекций.
7. Указать достоинства и недостатки метода бисекций.