《算法设计与分析》

第二章 图与遍历算法

马丙鹏

2023年09月11日

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

第二章 图与遍历算法

- 2.1 图的基本概念和性质
- 2.2 图的遍历算法
- 2.3 双联通图与网络可靠性
- 2.4 对策树

2.1 图的基本概念和性质

- 1. 栈和队列
  - 共性
    - n个元素的特殊的有序表
    - 都可以利用静态(动态)数据结构—数组(链表)实现
  - 栈的特点
    - 所有的插入和删除都在栈顶的一端进行
    - 后进先出表, 最后入栈的元素将首先被移出
  - 队列的特点
    - 所有的插入只在尾部的一端进行，所有的删除只能在前部的另外一端进行
    - 先进先出表，第一个出入队列中的元素也第一个被移出

2.1 图的基本概念和性质

- 1. 栈和队列
  - 栈的数组表示
    - 用一维数组STACKS(1:n)表示
    - 栈底: STACKS(1)
    - 第i个元素STACKS(i)
    - 栈顶指针: top

2.1 图的基本概念和性质

■ 1. 栈和队列

□栈的数组表示

栈运算: 插入一个元素

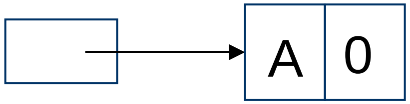
```
procedure ADD(item, STACK, n, top)
   if top ≥ n then call STACKFULL  endif
   top← top +1
   STACK(top) ← item
end ADD
```

栈运算: 删除一个元素

```
procedure DELETE(item, STACK, top)
   if top ≤ 0 then call STACKEMPTY  endif
   item ← STACK(top)
   top ← top-1
end DELETE
```

2.1 图的基本概念和性质

- **1. 栈和队列**
  - 栈的链接表表示
    - 一种单向链接表
    - 每个结点有两个信息段, **DATA**和**LINK**
    - **DATA**存放数据
    - **LINK**指向前一节点



STACK

2.1 图的基本概念和性质

■ 1. 栈和队列

□栈的链接表表示

➢结点的插入和删除

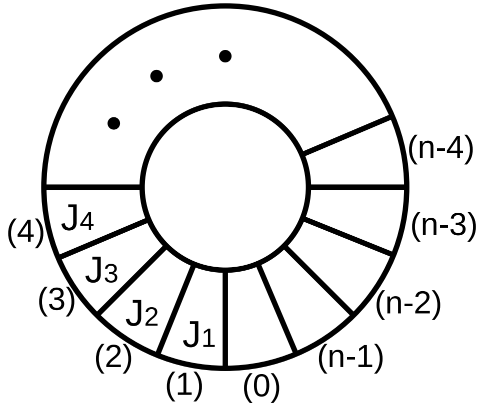
结点的插入	结点的删除
call GETNODE(T)	item ←DATA(STACK)
DATA(T) ←item	T ←STACK
LINK(T) ←STACK	STACK ←LINK(SATCK)
STACK ← T	call RETNODE(T)

2.1 图的基本概念和性质

■ 1. 栈和队列

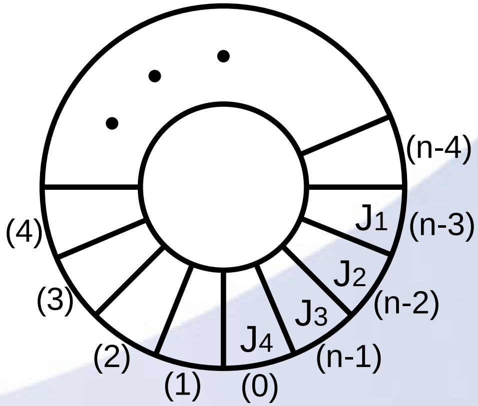
□ 队列的数组表示

- 当队列用数组表示时,可以当成一个环形来看待
- 插入数组按照顺时针方向将rear移到下一个空位置
- **Front**总指着队中第一个元素按照逆时针的前一个位置



front=0; rear=4

(a)



front=n-4; rear=0

(b)

2.1 图的基本概念和性质

- 1. 栈和队列
  - 队列的数组表示
    - 元素的插入和删除

队列运算: 插入一个元素

```
procedure ADDQ(item, Q, n, front, rear)
    rear ← (rear+1)  mod n
    if front=rear
        then call QUEUEFULL
    endif
   Q(rear)← item
end ADDQ
```

2.1 图的基本概念和性质

- 1. 栈和队列
  - 队列的数组表示
    - 元素的插入和删除

队列运算: 删除一个元素

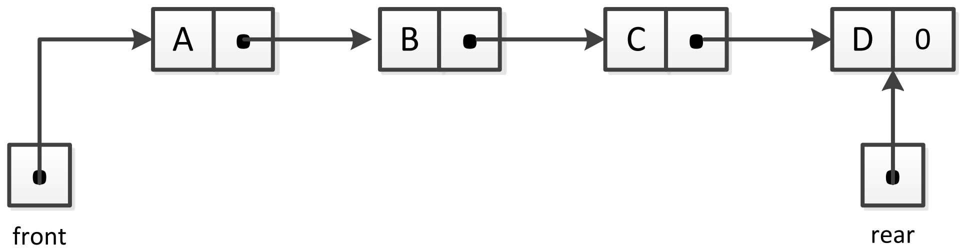
```
procedure DELETEQ(item, Q, n, front, rear)
   if front = rear
      then call QUEUEEMPTY
   endif
   front ← (front+1) mod n
   item ← Q(front)
end DELETEQ
```

2.1 图的基本概念和性质

■ 1. 栈和队列

□队列的链接表表示

- 与栈的链接表表示类似
- 指针front和rear 指示前部和尾部的位置



2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

□定义:

树(tree)是一个或多个结点的有限集合，它使得:

- 有一个指定为根(root)的结点
- 剩余结点被划分成m≥0个不相交的子集合: $T_1, \ldots, T_m$,
- 这些集合的每一个子集合又都是一棵树, 并称 $T_1, \ldots,$ T_m为根的子树。

2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

□基本概念

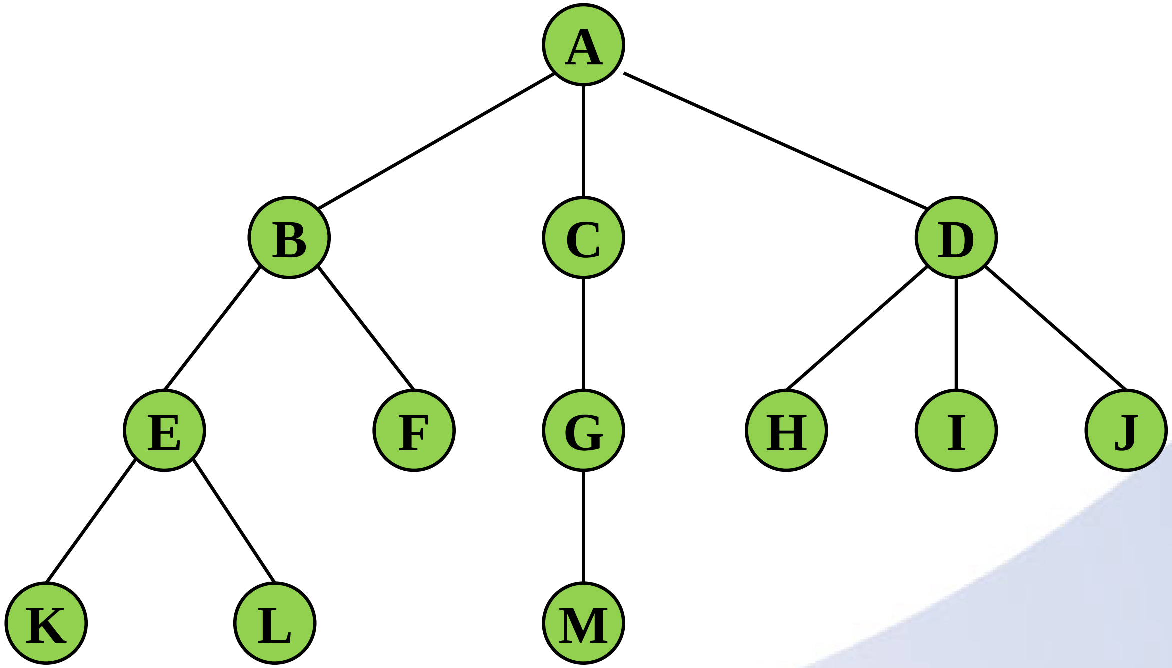
- ➢结点的度(degree)：一个结点的子树数
- ➢树的度：树中结点度的最大值
- ➢结点的级(level)(层)：设根是1级，若某结点在p级，则它的儿子在p+1级
- ➢树的高度(深度)：树中结点的最大级数
- ➢叶子(终端结点)：度为0的结点
- ➢内结点(非终端结点)：度不为0的结点
- ➢森林：m≥0个不相交树的集合

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

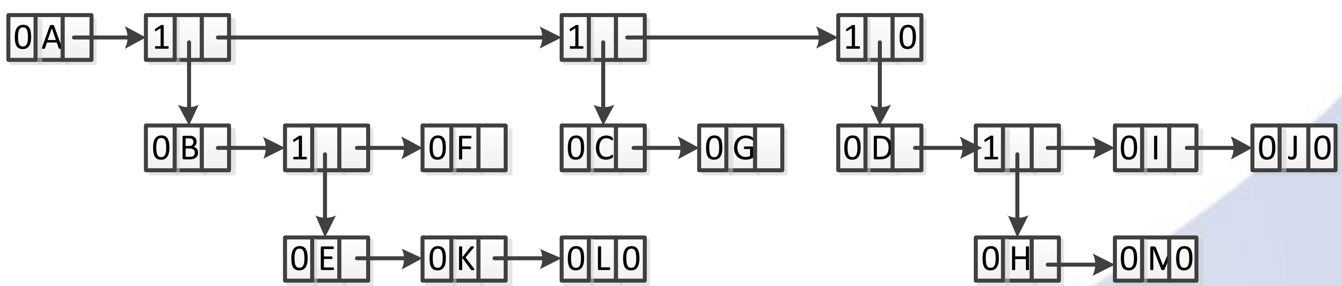
□基本概念



2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

- □树的表示方法：用链接表表示；
  - ➢每个结点三个信息段：**TAG, DATA, LINK**
  - ➢**TAG=0, DATA**存数据
  - ➢**TAG=1, DATA**存链接信息



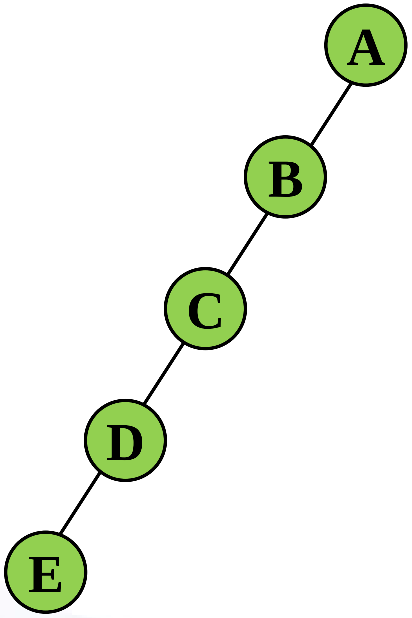
2.1 图的基本概念和性质

- 2. 树
  - 二元树
    - 定义2.1 二元树(binary tree)是结点的有限集合，它或者为空，或者由一个根和两棵称为左子树和右子树的不相交二元树所组成
  - 二元树性质1：
    - 引理2.1 一棵二元树第i级的最大结点数是2^{i-1}。深度为k的二元树的最大结点数为$2^k-1, k>0$。
  - 二元树和度为二的树的区别？
    - 二元树的子树有左右之分，而树的子树没有
    - 二元树允许有零个结点，而树至少一个结点

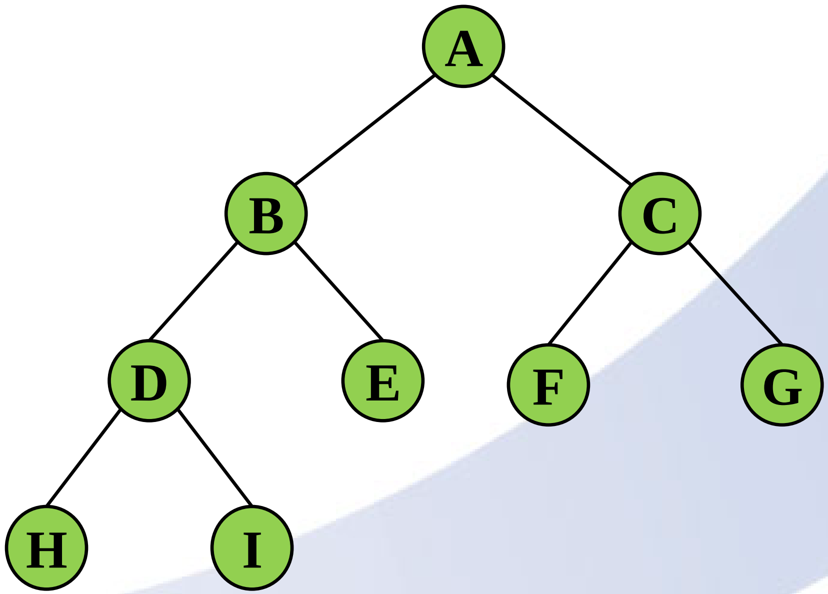
中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

2.1 图的基本概念和性质

- **2. 树**
  - 特殊的二元树
    - 斜树与完全二元树



(a)



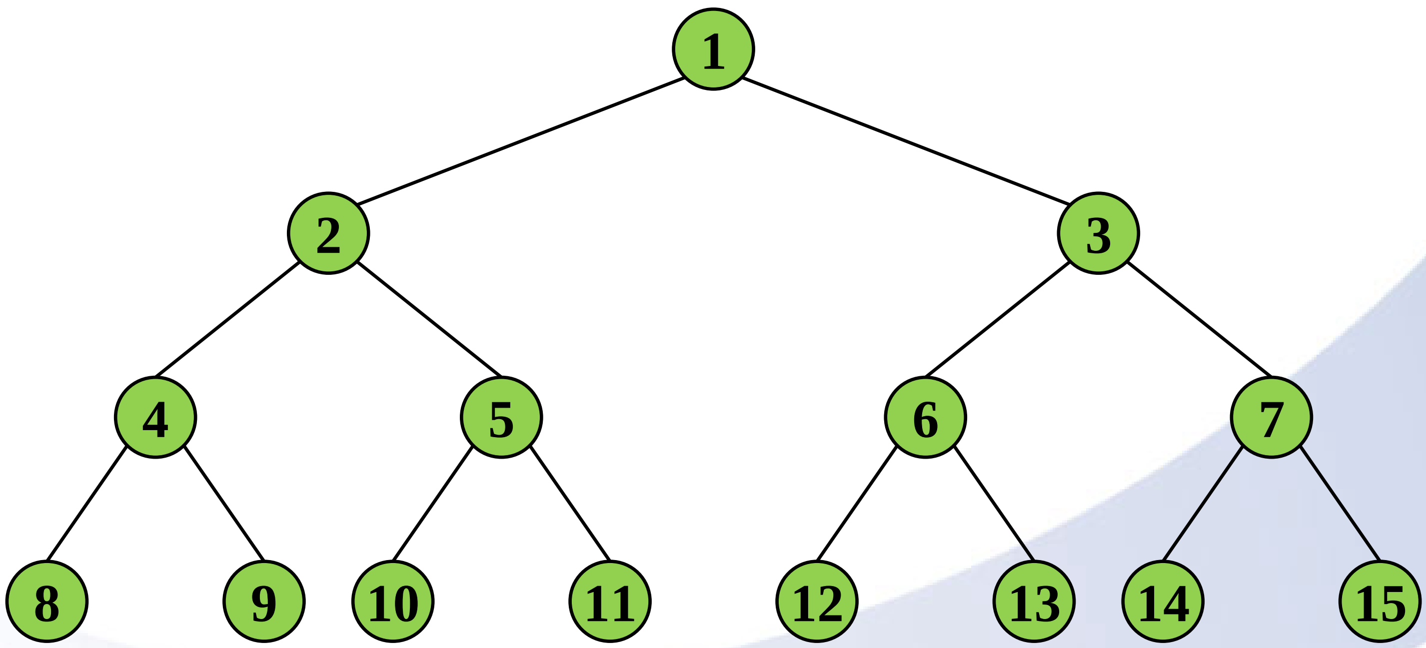
(b)

2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

□特殊的二元树

➢满二元树：深度为k且有2^k-1个结点的二元树



2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

□特殊的二元树

➢完全二元树：

一棵有n个结点深度为k的二元树，当它的结点相当于深度为k的满二元树中编号为1到n的结点时，称该二元树是完全的。

➢完全二元树的叶子结点至多出现在相邻的两级上。

➢完全二元树的结点可以紧凑地存放在一个一维数组中(性质见引理2.1)。

2.1 图的基本概念和性质

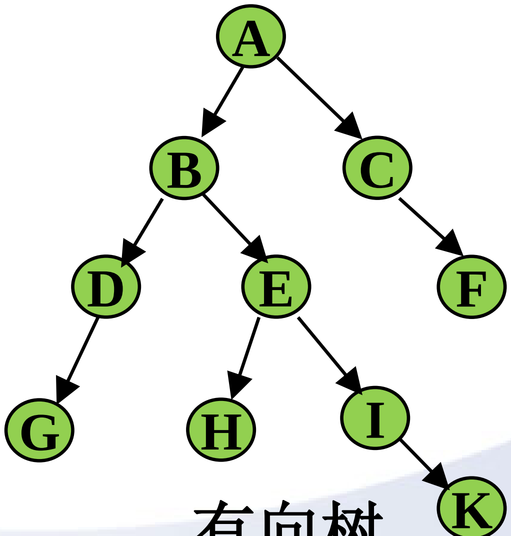
■ 2. 树

□有向树: 一棵有向树是满足下述条件的无圈有向图:

① 有一个称为根的顶点，它不是任何有向边的头;

② 除了根以外，其余每个顶点的入度均为1;

③ 从根到每个顶点有一条有向路。



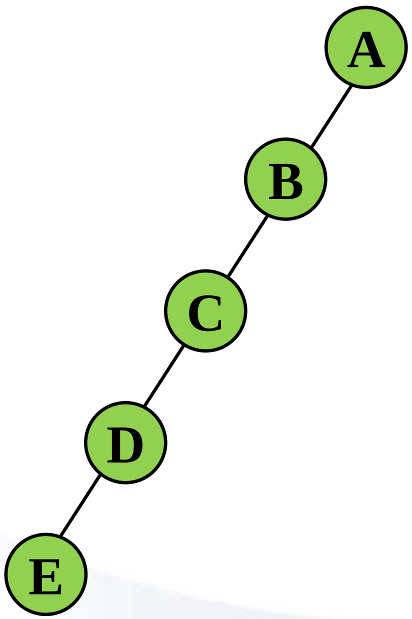
有向树

2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

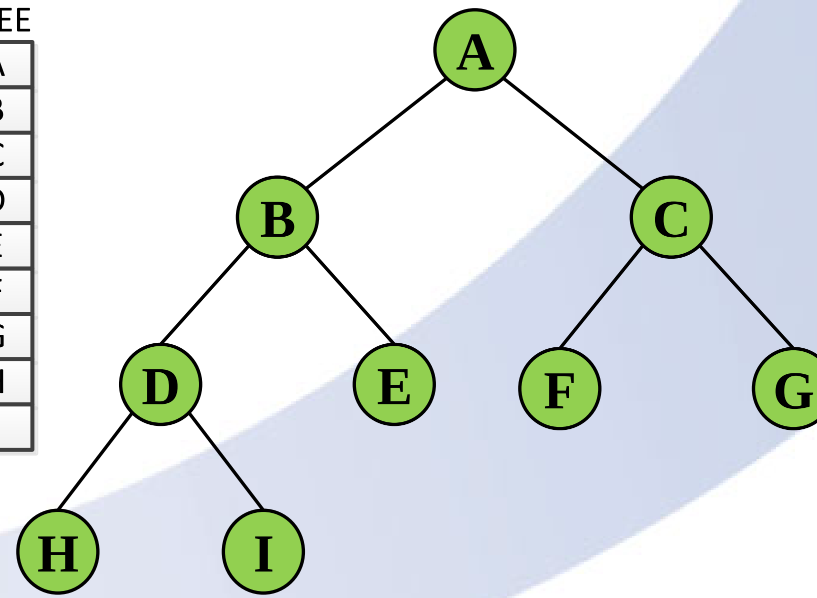
□二元树的数组表示方法

- ➢对于完全二元树，空间效率好；
- ➢其他二元树，要浪费大量空间

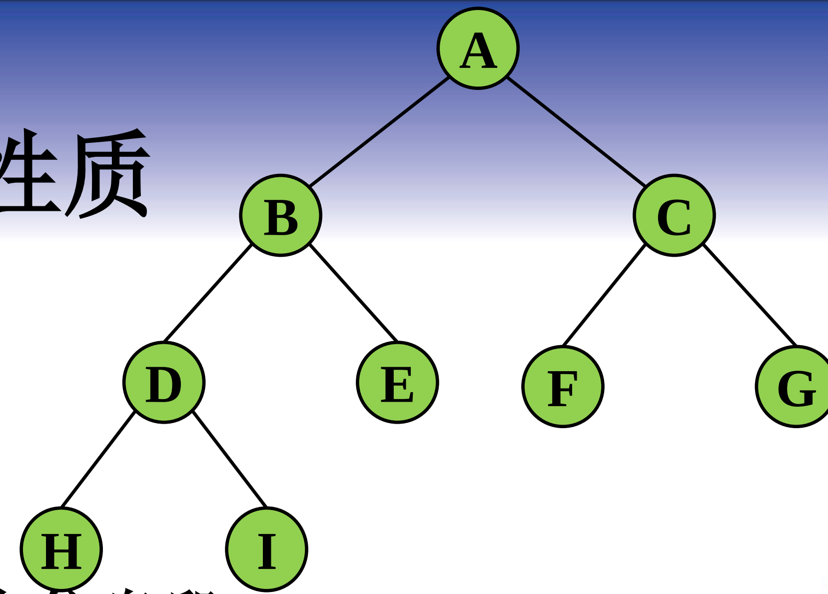


	TREE
(1)	A
(2)	B
(3)	--
(4)	C
(5)	--
(6)	--
(7)	--
(8)	D
(9)	--
⋮	⋮
(16)	E

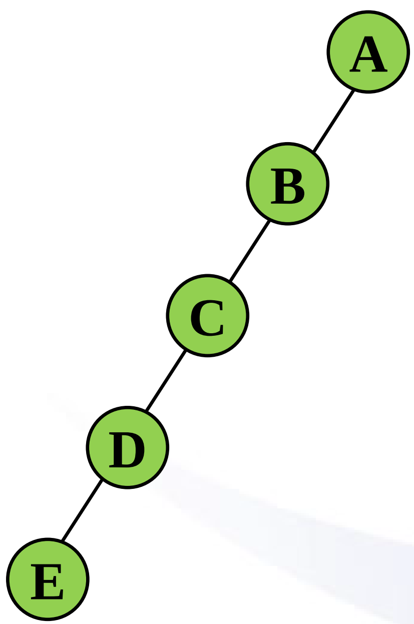
TREE
A
B
C
D
E
F
G
H
I

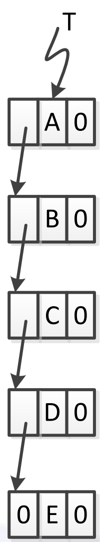


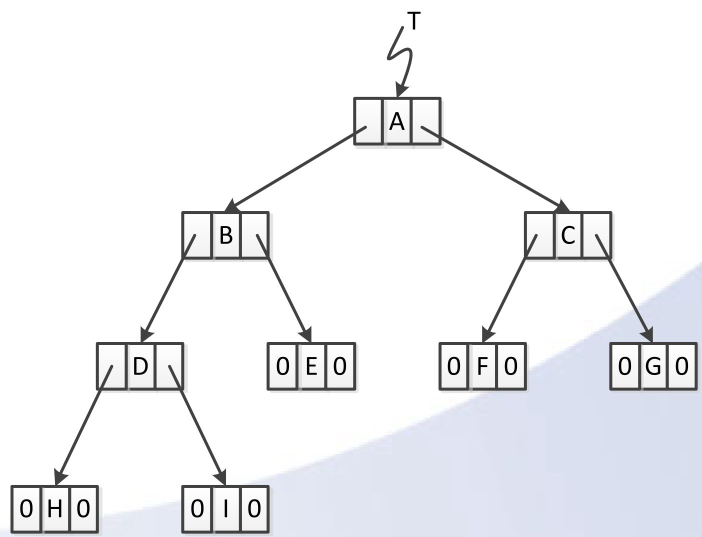
2.1 图的基本概念和性质



- **2. 树**
  - 二元树的链表表示方法
    - 结构简单，有效。
    - 链表中每个结点有三个信息段, **LCHILD, DATA** 和**RCHILD**



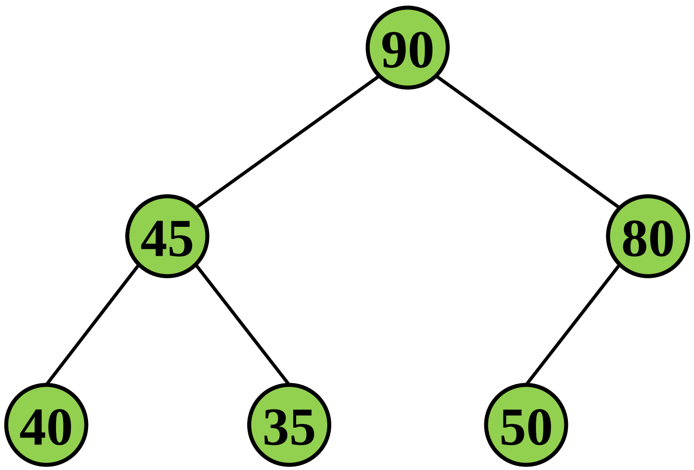




2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

- 堆：堆是一棵完全二元树，它的每个结点的值至少和该结点的儿子们(如果存在的话)的值一样大(max-堆)(或小，min-堆)。



2.1 图的基本概念和性质

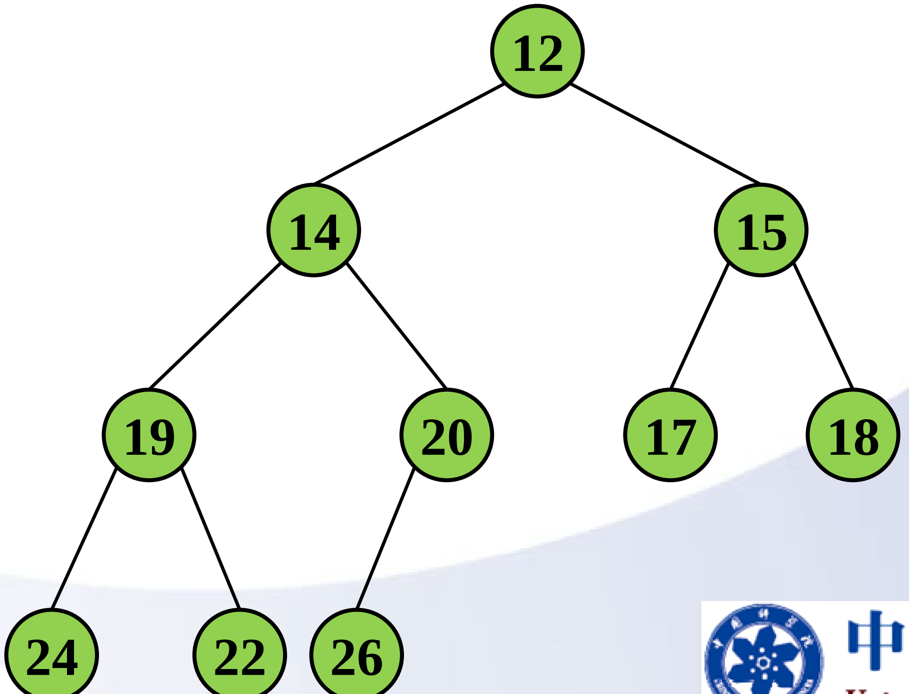
- 2. 树
  - 堆：
    - 堆序只是局部有序
      - ✓最小堆对应的完全二叉树中所有内部结点的值均不大于其左右孩子的关键字的值，
      - ✓而一个结点与其兄弟之间没有必然的联系。
    - 最小堆没有实现了关键字的完全排序。
      - ✓只有当结点之间是父子关系的时候，才可以确定这两个结点关键字的大小关系。

2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

□堆

➢K = {12, 14, 15, 19, 20, 17, 18, 24, 22, 26}所对应的最小堆形成的完全二叉树形式为图所示：

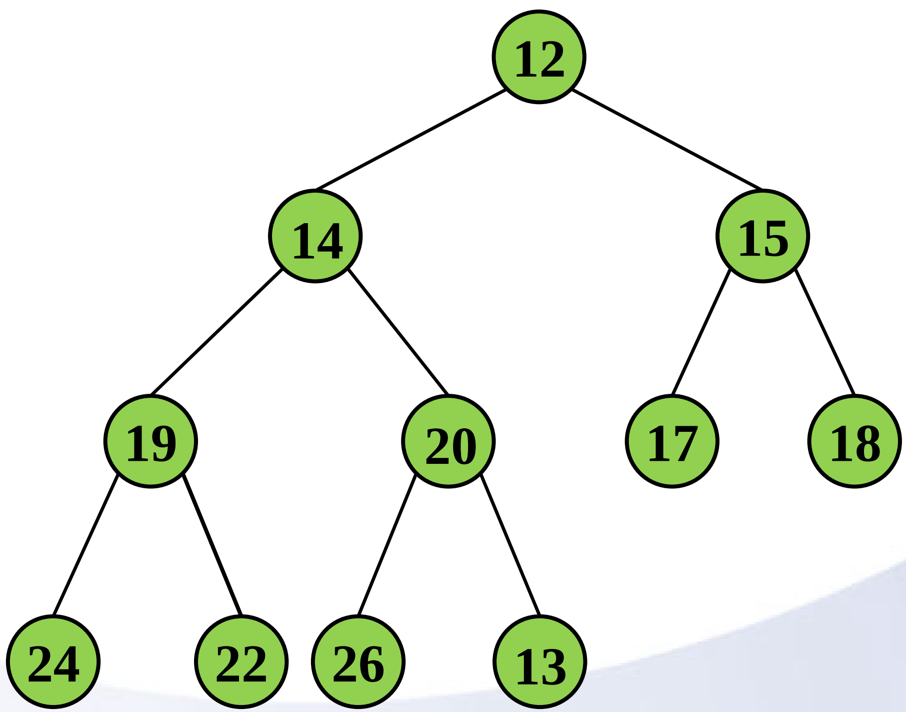


2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

□堆的元素插入：

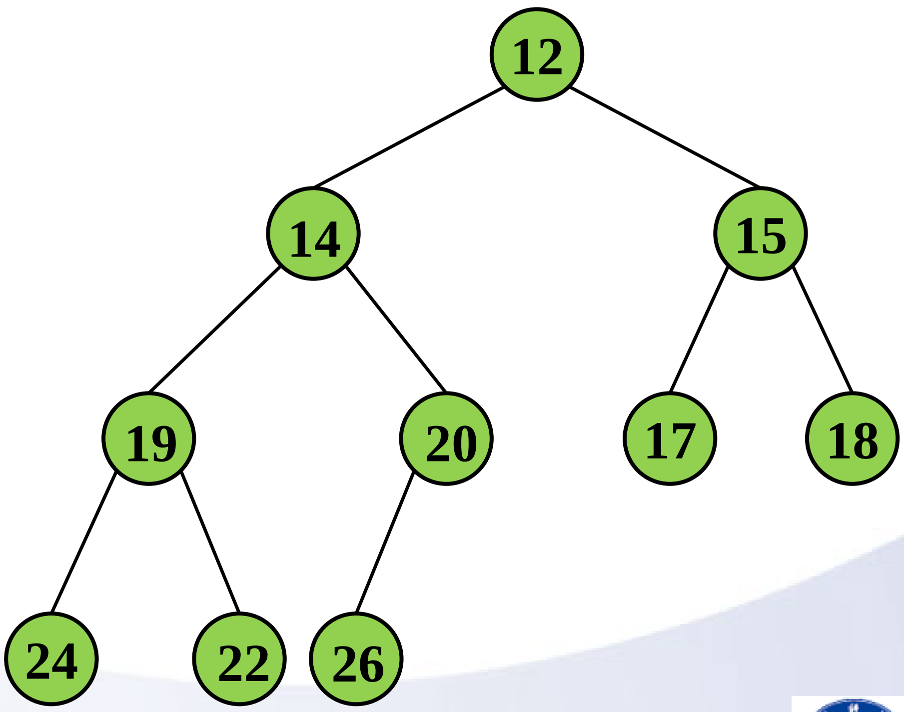
➢在最小堆中插入元素13



2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

- 堆的元素删除：
  - ➢在最小堆中删除元素14



2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

- 堆的构建：
  - 首先将所有关键码放到一维数组中，这时形成的完全二叉树并不具备最小堆的特性，但是仅包含叶子结点的子树已经是堆
  - 这时从含有内部结点数最少的子树(这种子树在完全二叉树的倒数第二层，此时i = [n/2]-1)开始，从右至左依次调整
  - 对这一层调整完成之后，继续对上一层进行同样的工作，直到整个过程到达树根时，整棵完全二叉树就成为一个堆了

2.1 图的基本概念和性质

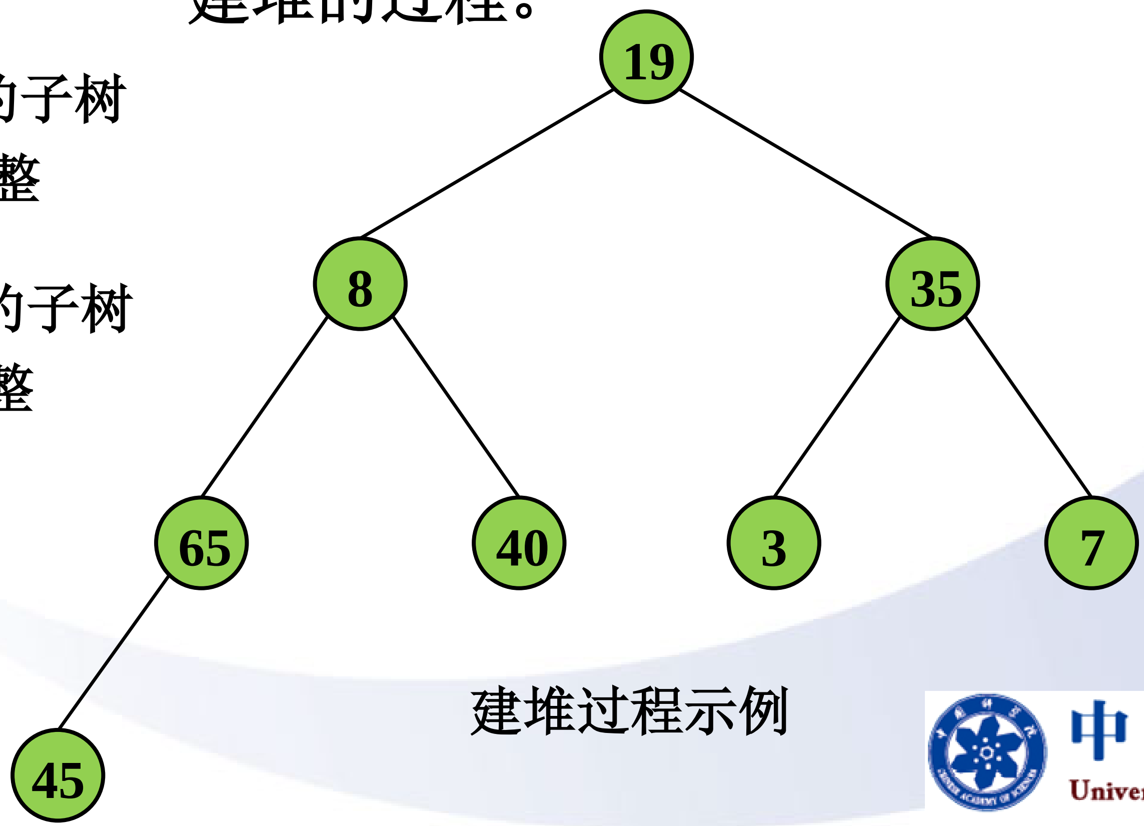
■ 2. 树

□堆的构建：

- 对于集合K = {19, 8, 35, 65, 40, 3, 7, 45}，用筛选法建堆的过程。

以k_3为根的子树
65>45 调整

以k_2为根的子树
35>3 调整



建堆过程示例

以k_1为根的子树
8<40, 8<45 无需调整

以k_0为根的子树
19>3 调整

19>7 调整

2.1 图的基本概念和性质

- **2. 树**
  - 建堆效率
    - 对于**n**个结点的堆，其对应的完全二叉树的层数为**logn**。
    - 建堆算法的时间复杂度是**O(n)**。这就说明可以在线性时间内把一个无序的序列转化成堆序
    - 由于堆有**log n**层深，插入结点、删除普通元素和删除最小元素的平均时间代价和最差时间代价都是 **log n**
    - 最小堆只适合于查找最小值，查找任意值的效率不高

2.1 图的基本概念和性质

■ 2. 树

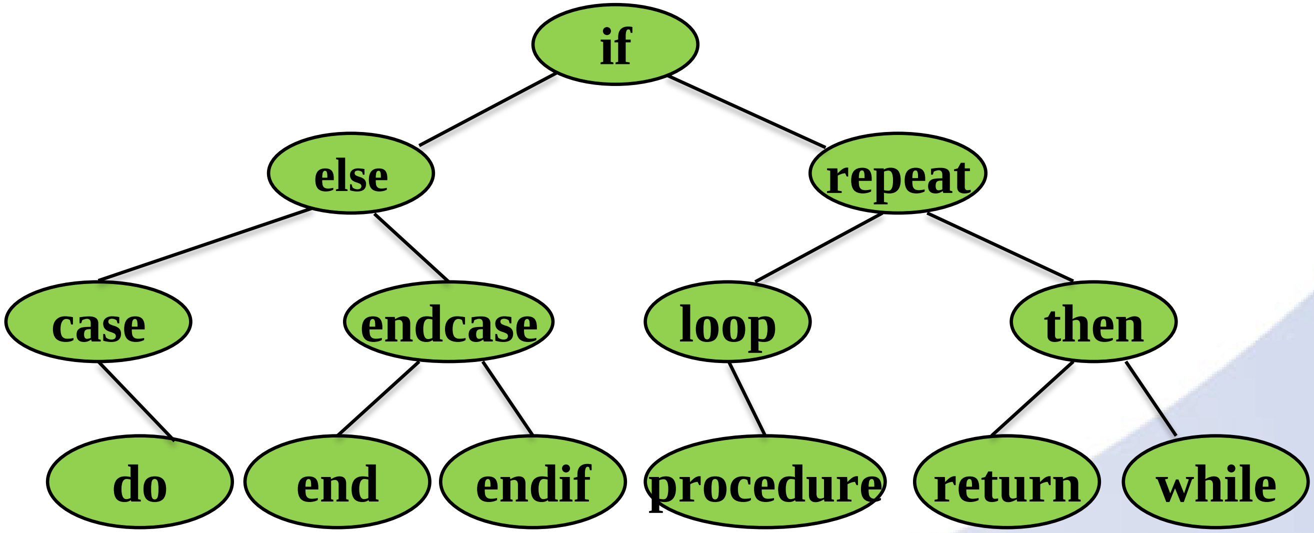
□二分检索树：

二分检索树 T 是一棵二元树，它或者为空，或者其每个结点含有一个可以比较大小的数据元素，且有：

- T 的左子树的所有元素比根结点中的元素小；
- T 的右子树的所有元素比根结点中的元素大；
- T 的左子树和右子树也是二分检索树。
- 注：二分检索树要求树中所有结点的元素值互异

2.1 图的基本概念和性质

- ■ 2. 树
  - □二分检索树
    - ➢按照首字母排序



2.1 图的基本概念和性质

■ 3. 集合的树表示和不相交集合的合并

- 问题描述：
  - 给定一个全集**U**，该集合包含**n**个元素
  - 该集合包含多个不相交的子集
  - 某些应用需要实现这些不相交子集的合并、查找操作，并且这些操作最终可形成序列
  - 如何高效率实现这些操作序列?

2.1 图的基本概念和性质

- **3. 集合的树表示和不相交集合的合并**
  - 集合操作举例
    - **$n=10$, $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$**
    - **$s_1=\{1, 7, 8, 9\}$; $s_2=\{2, 5, 10\}$; $s_3=\{3, 4, 6\}$**
    - 合并运算：
      - ✓ **$s_1 \cup s_2 =\{1, 7, 8, 9, 2, 5, 10\}$**
    - 查找运算：
      - ✓ 元素4包含在s_1, s_2, s_3的哪个集合中？

2.1 图的基本概念和性质

- **3. 集合的树表示和不相交集合的合并**
  - **方法一：位向量**
    - $s_1 = \{1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0\}$;
    - $s_2 = \{0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1\}$;
    - 利用位运算可得出
      $s_1 \cup s_2 = \{1, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1\}$
    - 缺点：
      当n很大，而每个集合的大小相对于n来说又很小时，并或者交的执行时间不是与两个集合中的元素数目成正比，而是与n成正比。

2.1 图的基本概念和性质

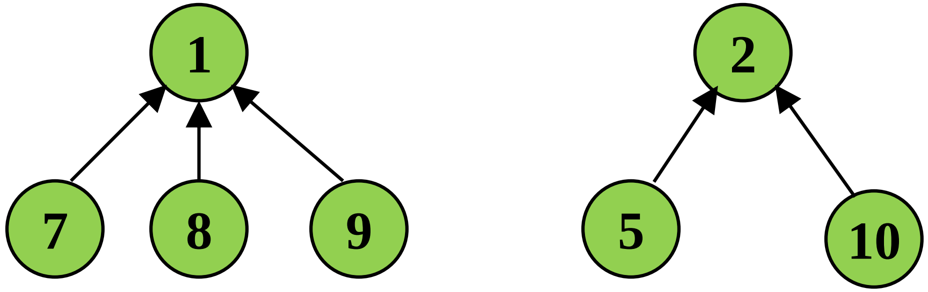
- 3. 集合的树表示和不相交集合的合并
  - 方法二: 集合元素表
    - $s_1=\{1, 7, 8, 9\}$
    - $s_2=\{2, 5, 10\}$
    - 合并操作：
      无序$|s_1|*|s_2|$, 有序$|s_1|+|s_2|$
    - 查找操作：
      与集合长度的和成正比。最坏为$|n|$

2.1 图的基本概念和性质

■ 3. 集合的树表示和不相交集合的合并

□方法三——树

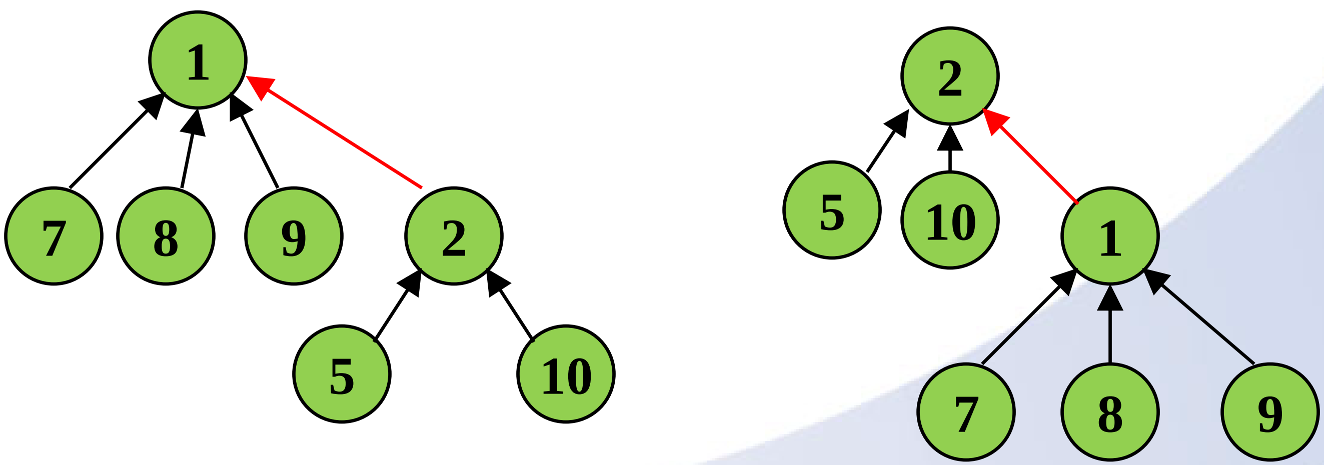
➢s_1和s_2可以用下面的两棵树来表示：



2.1 图的基本概念和性质

■ 3. 集合的树表示和不相交集合的合并

- 方法三——树
  - 求两个不相交集合的并集，一种最直接的方法就是使一棵树变成另一棵树的子树。
  - 因此，$s_1 \cup s_2$就有下面两种图的形式之一：



2.1 图的基本概念和性质

- **3. 集合的树表示和不相交集合的合并**
  - 数据结构
    - 树用链接表表示，树中每个结点仅含有一个信息段，每个结点只需要设置**PARENT**信息段。
    - **PARENT(i):** 存放着元素**i**在树中其父结点的指针。
    - 根结点的**PARENT**信息段的内容为零。

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
0	0	…	…	2	…	1	1	1	2

2.1 图的基本概念和性质

■ 3. 集合的树表示和不相交集合的合并

□数据结构

➢将两个不相交的集合合并，实质上就是把一棵树的根的PARENT信息段置成另一棵树的根。

✓合并操作U(1, 2)后：(Parent[1]=2)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
2	0	…	…	2	…	1	1	1	2

```
procedure U(i, j)
//根为i和j的两个不相交集合用它们的并来取代//
    integer i, j
    PARENT(i) ← j
end U
```

合并后树根为j

2.1 图的基本概念和性质

- **3. 集合的树表示和不相交集合的合并**
  - 数据结构
    - 找到元素i所属集合就是找到包含元素i的集合的树根。
    - U操作为常量时间，F操作则与查找元素在集合树中的层数有关。

```
procedure F(i)
//查找包含元素i的树的根//
   integer i, j
   j←i
   while PARENT(j)>0 do  //若此结点是根，则PARENT(j)=0 //
         j←PARENT(j)
   repeat
   return (j)
end F
```

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

2.1 图的基本概念和性质

■ 3. 集合的树表示和不相交集合的合并

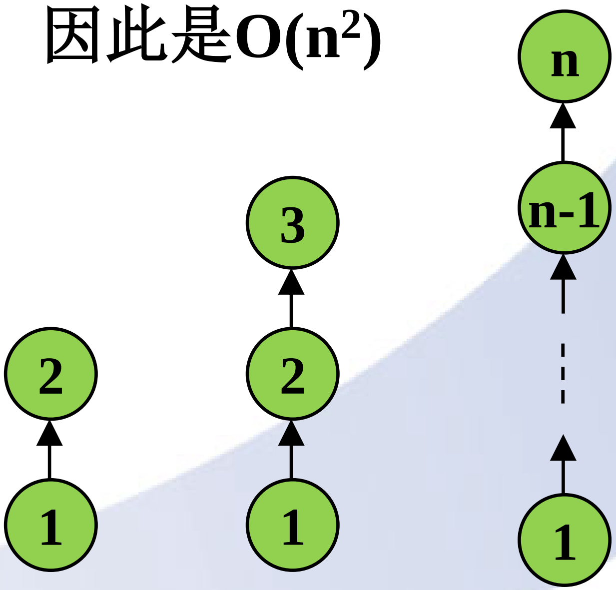
- U和F的性能问题——退化树
  - 问题描述：有集合如下：

(1)	(2)	( )	(i)	( )	(n)
0	0	…	0	…	0

  - 依次作下列操作: U(1, 2), F(1), U(2, 3), F(1), …, U(n-1, n)
  - 按照算法U和F, 最终得到的树及时间耗费分析

2.1 图的基本概念和性质

- ■ 3. 集合的树表示和不相交集合的合并
  - □U和F的性能问题——退化树
    - ➢分析
      - ✓U: 每次都是常量时间，因此总共是O(n-1)
      - ✓F(1): 2+3+…+(n-1)，因此是$O(n^2)$
      - ✓症结？合并操作！



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

2.1 图的基本概念和性质

■ 3. 集合的树表示和不相交集合的合并

- 加权规则
  - 如果树i的结点数少于树j的结点数，则使j成为i的父亲，反之，使i成为j的父亲。
  - 简化之:

    节点数少的树合并到节点数多的树中。
  - 树根i:

    PARENT(i)不再为0，而是树i中结点个数的负数形式。

2.1 图的基本概念和性质

■ 3. 集合的树表示和不相交集合的合并

□加权规则

```
Procedure  UNION(i,  j)
// PARENT(i) =-COUNT(i)//
   integer i, j, x
   x←PARENT(i) + PARENT(j)
   if PARENT(i) > PARENT(j)
      then  PARENT(i) ←j
            PARENT(j) ←x
      else   PARENT(j) ←i
            PARENT(i) ←x
   endif
end UNION
```

合并后集合中元素个数

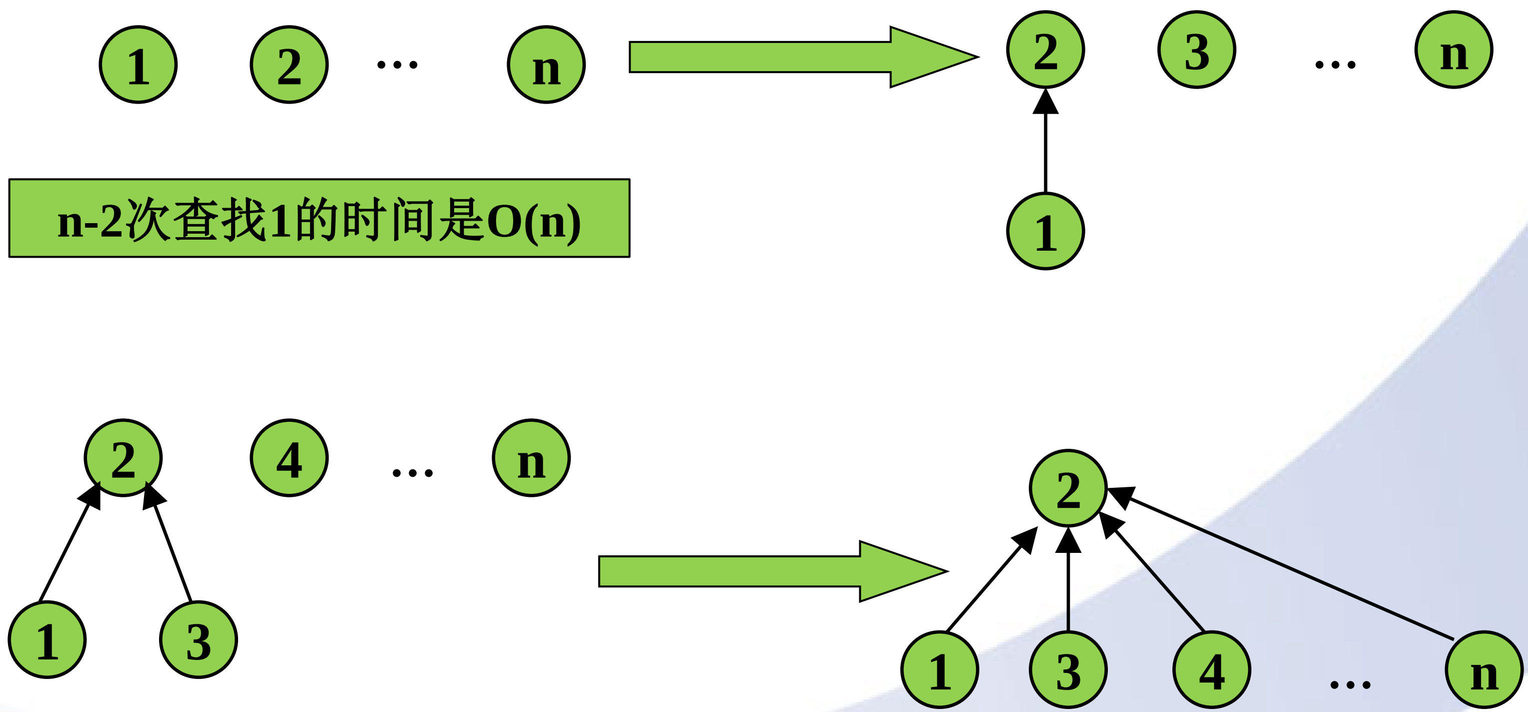
若树j的结点个数多，以j为根

若树i的结点个数多或两棵树结点个数相同，以i为根

2.1 图的基本概念和性质

■ 3. 集合的树表示和不相交集合的合并

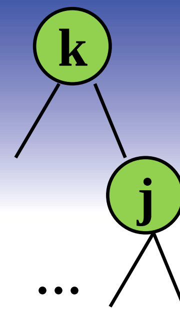
□ 加权规则



2.1 图的基本概念和性质

- 3. 集合的树表示和不相交集合的合并
  - 加权规则
    - 分析：
      - ✓**Union(1, 2), F(1), Union(2, 3), F(1), …, Union(n-1, n)**
      - ✓**Union**合并的开销较**u**要大，但仍然是常量时间
      - ✓每次查找**1**耗费时间为**2**，常量时间，则执行**n-2**次查找耗费时间为**O(n)**
      - ✓注意: 本例的查找耗时不是最坏情况
      - ✓最坏情况由引理**2.3**给出

2.1 图的基本概念和性质



■ 3. 集合的树表示和不相交集合的合并

引理2.3 设T是一棵由算法Union所产生的有n个节点的树。在T中没有节点的级数会大于(logn的下界+1)

证明：

- n=1，显然引理为真；
- i为T的级数，假设当$i \le n-1$时，引理为真，现证对于i=n，引理也为真；
  - ✓ 令k和j是形成树T的最后一次合并，即Union(k, j)；
  - ✓ 用count()表示数的节点数，假设count(j)=m，那么count(k)=n-m；
  - ✓ 不失一般性，可假设$1 \le m < n/2$，则有 $m \le n-m$；
  - ✓ 那么经Union合并后，j的父亲为k；则T的级数：

    1) 等于k的级数：log(n-m)的下界+1 ≤ (logn的下界+1)

    2) 或者等于(j的级数+1)：（logm的下界+2) ≤ (log(n/2)的下界+2) ≤ (logn的下界+1)
- 得证

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

2.1 图的基本概念和性质

- 3. 集合的树表示和不相交集合的合并
  - 压缩规则
    - 引理2.3表明，对于算法Union所产生的n个结点的树，执行一次查找的最差时间至多是O(logn)
    - 如果要处理的合并和查找序列含有n次合并和m次查找，则最坏时间变成了O(mlogn)
    - 还可以继续优化！
      - ✓如果j是由i到它的根的路径上的一个结点，则置PARENT(j) ← root(i)。
    - 更快的平均查找时间，适用于频繁查找操作。

2.1 图的基本概念和性质

```
procedure FIND(i)
    integer i, j, k
    j←i
    while  PARENT(j)>0 do
        j←PARENT(j)
    repeat
    k←i
    while k≠j do
        t←PARENT(k)
        PARENT(k) ←j
        k←t
    repeat
    return(j)
end FIND
```

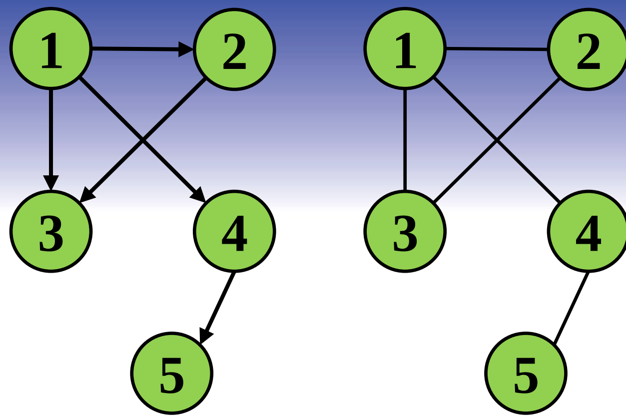
j：树根结点

找到结点i所在树的树根j

k：由i到j的路径上经过的结点

从结点i到树根j的路径上所有结点的PARENT(k)都变为j

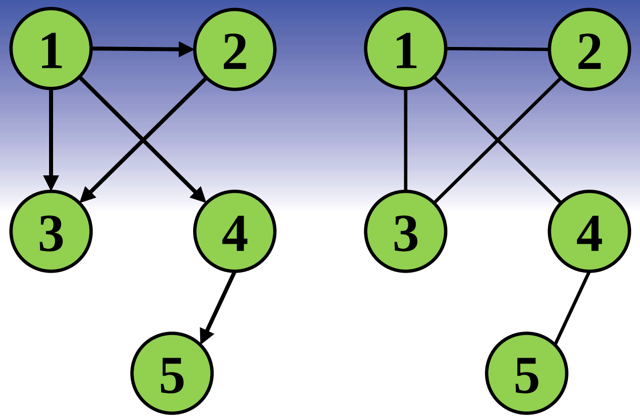
2.1 图的基本概念和性质



■ 4. 图

- □定义:
  - ➢图 G 由称之为结点 V 和边 E 的两个集合组成，记为G=(V, E)。其中， V 是一个有限非空的结点集合; E 是结点对偶的集合， E 的每一对偶表示 G 的一条边。
- □基本概念:
  - ➢无向图：边的表示(i, j)
  - ➢有向图：边的表示<i, j>
  - ➢成本：带有成本的图称为网络
  - ➢邻接: 无向图中，如果存在边(i, j)，则称i, j相邻接

2.1 图的基本概念和性质



■ 4. 图

□基本概念:

➢结点的度(出度/入度)：邻接点的数目

➢路径：由结点v_p到v_q的一条路(path)是结点v_p，v_{i1}，v_{i2}，…，v_{im}，v_q的一个序列，它使得(v_p，v_{i1})，(v_{i1}，v_{i2})，…，(v_{im}，v_q)是E(G)的边。

➢路的长度：组成路的边数

➢简单路径：除了第一和最后一个结点可以相同以外，其它所有结点都不同。

2.1 图的基本概念和性质

■ 4. 图

□基本概念

- ➢环：第一个和最后一个结点相同的简单路。
- ➢连通图：在无向图中，如果每对结点之间都存在一条路，则称该图是连通的。
- ➢子图：是由G的结点集V的子集(记为V_B)和边集E中连接V_B中结点的边的子集所组成的图。
- ➢连通分图：一个图的最大连通子图。
- ➢有向图的强连通性：在有向图中，如果对于每一对结点i和j，既存在一条从i到j的路，又存在一条从j到i的路，则称该有向图是强连通的。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

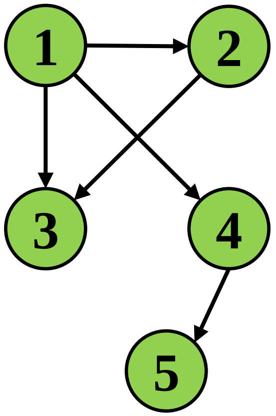
2.1 图的基本概念和性质

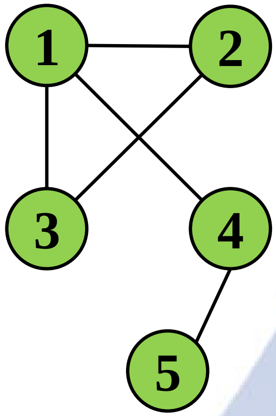
■ 4. 图

□图的表示方法

➢邻接矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$

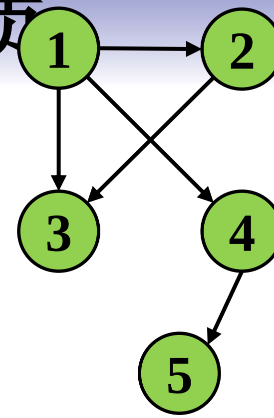
$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{if } (v_i,v_j)\in G\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

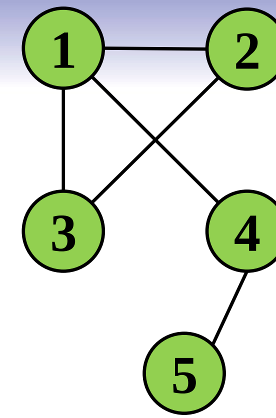




$$\begin{array}{c} \\ (1)\\ (2)\\ (3)\\ (4)\\ (5)\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&1&1&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\end{array}\qquad\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\end{array}\\ \begin{bmatrix}0&1&1&1&0\\1&0&1&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}\end{array}$$

2.1 图的基本概念和性质

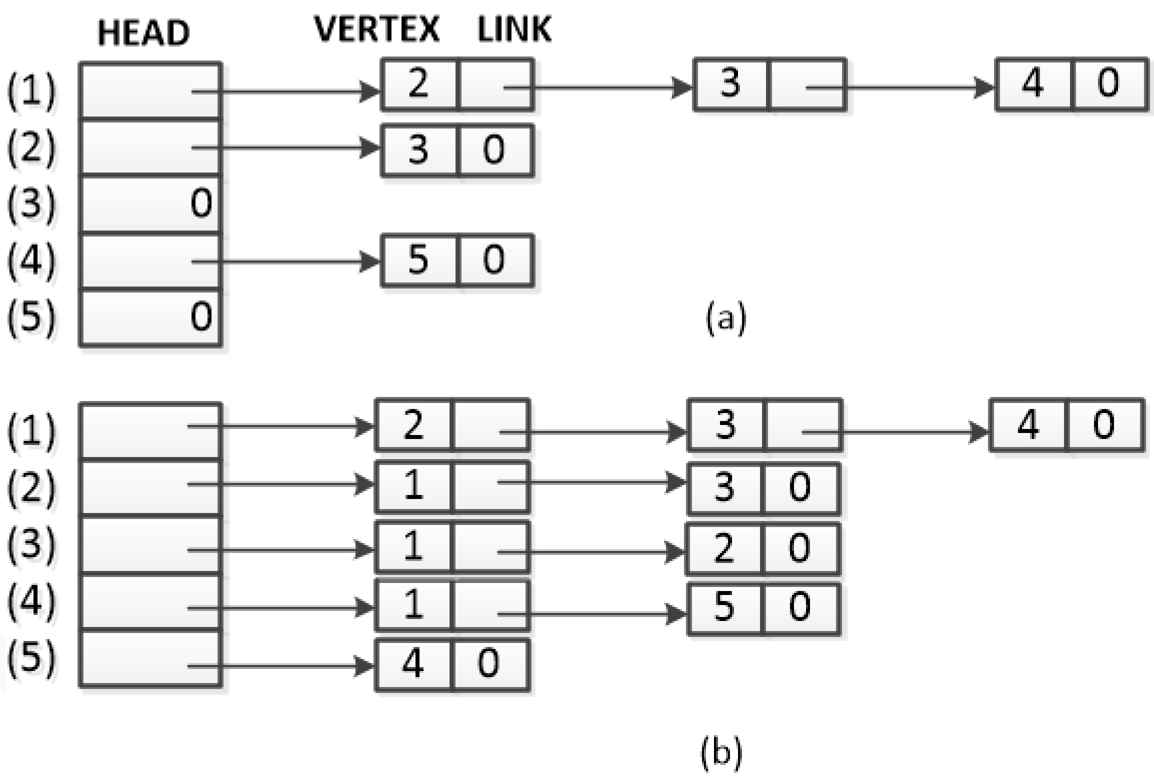




■ 4. 图

□ 图的表示方法

➢ 链接表

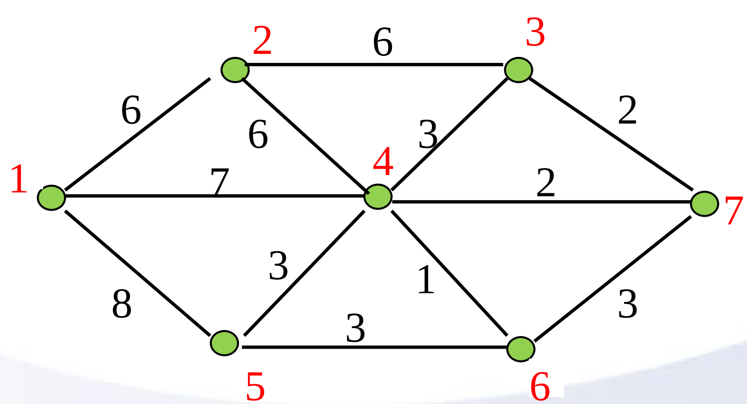


2.1 图的基本概念和性质

■ 4. 图

□赋权图

- ➢赋权图是将图的每个边都赋予一个权值，表示成本、效益值、容量、流量等。
- ➢赋权图的邻接矩阵的 (i, j) - 元素为连结顶点 i，j的权值。当顶点 i，j没有边连结时，可根据问题需要，取0或 ∞ 等。



一个赋权图

$$A=\begin{pmatrix} \infty & 6 & \infty & 7 & 8 & \infty & \infty \\ 6 & \infty & 6 & 6 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 6 & \infty & 3 & \infty & \infty & 2 \\ 7 & 6 & 3 & \infty & 3 & 1 & 2 \\ 8 & \infty & \infty & 3 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 3 & \infty & 3 \\ \infty & \infty & 2 & 2 & \infty & 3 & \infty \end{pmatrix}$$

End