## Серия 9. Орграфы (до 21.02.24)

**1.** В графе 2021 вершина, и каждая вершина имеет степень 4. На каждом ребре этого графа поставили стрелочку. Докажите, что найдётся вершина, в которую входит чётное число стрелок.

**2.** В компании из 50 человек каждый имеет хотя-бы 25 знакомых. Докажите, что четверых из них можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый из них сидел между двумя своими знакомыми.

**3.** В группе 20 студентов. Среди них есть студент, имеющий в группе одного друга, студент, имеющий двух друзей, ... , студент, имеющий в группе 14 друзей. Докажите, что найдутся трое студентов, любые двое из которых дружат

**4.** Назовем $p^n$ -деревом следующую конструкцию: из корня дерева выходят $p$ ребер, ведущих к вершинам первого уровня; из каждой вершины первого уровня выходит еще по $p$ ребер, ведущих к вершинам второго уровня и т.д., наконец, из каждой вершины $(n-1)$-го уровня ведут $p$ ребер к вершинам $n$-го уровня, которые являются висячими.

Висячие вершины $4^n$-дерева покрашены в 3000 цветов. Докажите, что из него можно выбрать $2^n$-поддерево с тем же корнем так, чтобы висячие вершины поддерева были покрашены не более, чем в 1000 цветов.

**5.** а) Докажите, что в любом графе без кратных рёбер есть две вершины одинаковой степени. (Петли и кратные рёбра запрещены.)

б) А верно ли, что в любом орграфе (без петель и кратных стрелок) есть две вершины одинаковой исходящей степени?

**6.** Дан неполный ориентированный граф $G$ без кратных стрелок. При добавлении любой стрелки (без появления кратных и встречных стрелок) он становится сильно связным. Докажите, что граф $G$ является сильно связным.

**7.** Пусть $G$ - сильно связный орграф с $\delta_+(G) \geq 2$. Докажите, что существует такая вершина $v \in V(G)$, что орграф $G - v$ сильно связен

**8.** В орграфе 200 вершин, из каждой вершины выходит хотя бы одна стрелка и в каждую вершину входит хотя бы одна стрелка. Докажите, что можно добавить не более 100 новых стрелок так, чтобы этот орграф стал сильно связным. (Между двумя вершинами может быть проведено несколько стрелок.)

**9.** Орграф $D$ таков, что нериентированный граф $\underline{D}$ связен. В каждой вершине $D$ входящих и исходящих стрелок поровну. Докажите, что $D$ эйлеров (то есть, имеет эйлеров цикл — ориентированный цикл, проходящей по каждой стрелке ровно один раз).

**10.** а) Докажите, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует сильно связный орграф $G$, не содержащий четных циклов, все исходящие степени вершин которого равны $k$.

б) Докажите, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует орграф $G$ с $\delta_+(G) \geq k, \delta_-(G) \geq k$, не содержащий четных циклов.

**11*.** Пусть $G$ - турнир на 2020 вершинах. Докажите, что в нем существует такой гамильтонов путь $a_1 a_2 ... a_{2020}$, что его концы соединены стрелкой $a_1 a_{2020}$.

**12.** Докажите, что любой не сильно связный турнир (то есть, орграф, в котором любые две вершины соединены ровно одной стрелкой) не менее чем на 3 вершинах можно сделать сильно связным, изменив направление одной стрелки.

**13*.** Ребра связного графа $G$ разбили на два множества. Ребра из первого множества можно так ориетировать, что граф останется связным (при этом, ребра второго множества остаются двусторонними). Ребра второго множества также можно ориентировать, не нарушив связности. Докажите, что все ребра можно ориентировать так, чтобы получился сильно связный орграф.

**14.** Между волейбольными командами двух стран был проведен матчтурнир, в котором каждая команда сыграла ровно по одному разу со всеми командами другой страны. При этом каждая команда выиграла хотя бы одну встречу. Докажите, что найдутся четыре команды A, B, C и D такие, что A выиграла у B, B выиграла у C, C выиграла у D, а D выиграла у A. (Ничьих в волейболе не бывает).

**15*.** Пусть $G$ - турнир на $n^2 + 1$ вершине. Его стрелки раскрашены в два цвета так, что нет одноцветных циклов. Докажите, что в $G$ есть одноцветный простой путь длины $n$.

**16**.** Сильно связный орграф $D$ таков, что $\delta_+(D) \geq 2, \delta_-(D) \geq 2$. Докажите, что орграф $D$ имеет такой цикл $C$, что орграф $D - A(C)$ сильно связен.