Серия 9. Остатки (до 07.03.24)

1. Пусть $d > 100$, а граф G получен из d-регулярного графа с нечетным числом вершин в результате удаления 45 ребер. Докажите, что $\chi'(G) = d + 1$.

2. В компании из 50 человек каждый имеет хотя-бы 25 знакомых. Докажите, что четверых из них можно посадить за круглый стол так, чтобы каждый из них сидел между двумя своими знакомыми.

3. В группе 20 студентов. Среди них есть студент, имеющий в группе одного друга, студент, имеющий двух друзей, ... , студент, имеющий в группе 14 друзей. Докажите, что найдутся трое студентов, любые двое из которых дружат

4. Назовем p^n -деревом следующую конструкцию: из корня дерева выходят p ребер, ведущих к вершинам первого уровня; из каждой вершины первого уровня выходит еще по p ребер, ведущих к вершинам второго уровня и т.д., наконец, из каждой вершины $(n-1)$-го уровня ведут p ребер к вершинам n-го уровня, которые являются висячими.

Висячие вершины 4^n-дерева покрашены в 3000 цветов. Докажите, что из него можно выбрать 2^n-поддерево с тем же корнем так, чтобы висячие вершины поддерева были покрашены не более, чем в 1000 цветов.

5. По окружности расставлено несколько точек. Из каждой точки выходит 100 отрезков в другие точки. Отрезки покрашены в 100 цветов так, что одноцветные отрезки не имеют общих точек (в том числе концов). Докажите, что точки можно покрасить в два цвета так, чтобы каждый отрезок соединял разноцветные точки.

6*. Пусть G — связный планарный граф с n вершинами, m рёбрами. Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{E}$ графа G над полем $\mathbb{Z}_2$ - подмножества $E(G)$ с операцией сложения $\triangle$ и его подпространство $\mathcal{C}$ порожденное всеми циклами данного графа. Докажите, что:

a) $\mathcal{C}$ - порождается границами граней G.

b) $\dim \mathcal{C} = m - n + 1$

7*. В многограннике есть ровно две вершины, из которых выходит нечетное число ребер, причём эти вершины соединены ребром. Докажите, что для каждого $n \geq 3$ у этого многогранника найдется грань, число сторон которой не делится на n.