Серия 7.

1. В королевстве живут рыцари. Любые два из них либо враждуют (и такие среди них есть!), либо дружат, либо друг к другу безразличны. Друг врага рыцаря — враг этого рыцаря. Докажите, что хотя бы у одного рыцаря врагов больше, чем друзей.

2. Ребра полного графа K_{100} раскрашены в синий и зеленый цвета. Для любых пяти городов оказалось, что среди всех ребер между ними не более четырех синих. Докажите, что во всем графе синих ребер меньше, чем зеленых.

3. Пусть G — связный граф, $W \subset V(G)$. Докажите, что два утверждения равносильны.

1) Существует остовное дерево, в котором все вершины множества W являются висячими.

2) Для любого множества вершин $U \subseteq W$ граф $G - U$ связен

4. В регулярном графе G степени d нечетное число вершин. Докажите, что $\chi'(G) = d+1$

5. Пусть G — двудольный граф

а) Докажите, что G имеет регулярный двудольный надграф степени $\Delta(G)$ (добавлять можно как вершины, так и рёбра).

б) Докажите, что $\chi'(G) = \Delta(G)$ (с помощью пункта а и теорем о паросочетаниях).

6. Дан граф G с $e(G) > nv(G)$, где $n \in \mathbb{N}$. Докажите, что этот граф не является $(n+1)$-редуцируемым.

7. Дан граф, степени всех вершин которого равны 4. Его вершины покрашены в три цвета. Докажите, что есть цикл, вершины которого покрашены не более, чем в два цвета.

8. На вечеринке гость считается застенчивым, если у него не более трех знакомых. Оказалось, что у каждого гостя не менее трех застенчивых знакомых. Докажите, что все гости — застенчивые.

9. а) Докажите, что можно удалить не более $\frac{1}{k}$ рёбер из графа так, чтобы получился граф хроматического числа не более k.

б) Докажите, что любой граф G имеет такой подграф G' с $\chi(G') \leq k$, что для любой вершины v выполнено $d_{G'}(v) \geq \frac{k-1}{k} d_G(v)$.