Серия 8. Планарность и немного стереометрии (до 21.02.24)

1. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует двусвязный планарный граф G с $v(G) > n$, который имеет два неизоморфных плоских изображения.

2. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует планарный граф G с $v(G) > n$, что графы G и G^* изоморфны.

3. Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует планарный граф, существует планарный граф, такой что $v(G) = n, e(G) = 3n - 6$.

4. Докажите, что любой выпуклый многогранник имеет либо вершину степени 3, либо грань-треугольник. (Выпуклый многогранник — трёхсвязный граф без петель и кратных рёбер, который можно изобразить на сфере без пересечений рёбер.)

5. Многогранник называется правильным, если он выпуклый, в каждой вершине сходится одно и то же число рёбер, а его грани — одинаковые правильные многоугольники.

а) Пусть у правильного многогранника в каждой вершине сходится k рёбер, а грань — это s-угольник. Докажите, что $(k-2)(s-2) < 4$.

б) Перечислите все правильные многогранники и докажите, что других нет.

6. В графе 2000 вершин, все они имеют степень 7. Докажите, что в этом графе можно выбрать 777 ребер, не имеющих общих концов.

7. Все грани многогранника являются треугольниками. Каждая грань окрашена в черный или белый цвет так, что количество ребер, по которым граничат одноцветные грани, минимально. Пусть a и b — количества белых и черных граней, соответственно. Докажите, что $a \leq 1,5b$.

8. Докажите, что грани плоского графа можно правильным образом покрасить в 2 цвета тогда и только тогда, когда степени всех вершин четны.

9. Пусть G - связный плоский граф без мостов, кратных ребер и петель и $|V(G)| \geq 3$. Докажите, что G - двухсвязен $\iff$ G^* - двухсвязен.

10. Граф называется **внешне планарным**, если он имеет изображение, в котором каждая вершина лежит на границе внешней грани. Докажите, что граф является внешне планарным, если и только если он не содержит в качестве подграфа ни подразбиение K_4, ни подразбиение $K_{2,3}$.

11*. В триангуляции все вершины имеют степень хотя бы 5, причем никакие две вершины степени 5 не смежны. Докажите, что есть треугольник с вершинами степеней 5, 6 и 6.

12*. Граф G при удалении любой вершины становится планарным. Докажите, что $\chi(G) \leq 5$.(теорему о 4-ех красках можно использовать только с вместе доказательством)

13*. Изобразите на торе без пересечений во внутренних точках:

а) K_7

б) $K_{4,4}$

14*. Докажите, что на торе без пересечений во внутренних точках можно изобразить граф G, полученный из цикла на $2k$ вершинах($k \geq 2$), путём добавления рёбер, соединяющих противоположные пары вершин цикла.