АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
«СРЕДНЯЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА «ЛЕОНАРДО»

ПРОЕКТ

«ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО МАТЕМАТИКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЯЗЫКА *PYTHON* КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ЗНАНИЙ И УМЕНИЙ ОБУЧАЮЩИХСЯ В СТАРШИХ КЛАССАХ»

Проект подготовил:
ученик 11 «А» класса А.О. Илюхин

Руководитель проекта:
учитель математики, к.ф.-м.н., доцент О.Д. Соломатин

2021-2022 учебный год

АННОТАЦИЯ

Целью итогового проекта по математике является выявление методических особенностей лабораторно-практических работ с применением языка *Python* как средства формирования знаний и умений учащихся средней школы, а также разработка комплекса лабораторных работ для учащихся 10-11 классов.

Проект состоит из введения, двух глав, приложения, заключения и списка литературы.

Глава 1 посвящена теоретическим основам языка *Python* для разработки лабораторно-практических работ по математике в 10-11 классах: понятие, цели и основные требования, методика организации как средства формирования знаний и умений обучающихся средней школы.

В *Главе 2* представлены методические разработки лабораторно-практических работ по математике для учащихся 10-11 классов.

Список литературы содержит 7 наименований.

Объем работы составляет 70 страниц.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Для реализации связи теории с практикой при обучении математике учащихся образовательной школы важное значение имеют лабораторно-практические работы. Под данными работами понимают такие учебные занятия, которые решаются конструктивными методами с применением непосредственных измерений, построений, изображений, геометрического моделирования и конструирования.

Владение цифровыми математическими методами анализа количественных данных является необходимым условием достижения целей, стоящих перед современным специалистом. Многие профессиональные навыки, формируемые в ходе изучения дисциплин математического блока, могут быть наилучшим образом развиты с применением информационных технологий. *Авторам проекта представляется актуальным и целесообразным, в современных условиях, внедрение в учебный процесс, наряду с традиционными методами решения математических задач, компьютерных форматов*. Для этого могут быть использованы различные цифровые средства обработки данных при решении математических задач. В настоящей работе для решения математических задач используется язык *Python* – интерпретируемый, объектно-ориентированный язык программирования высокого уровня.

Заметим, что лабораторно-практические работы на уроках математики используются в общеобразовательной школе достаточно нечасто.

Таким образом, возникает противоречие между необходимостью проведения лабораторно-практических работ по математике для формирования знаний и умений у учащихся средней школы и недостаточным использованием данной формы работы в практике учителей при обучении математике.

Все вышеприведенные аргументы определяют актуальность темы исследования.

Проблема исследования: каковы методические особенности организации лабораторно-практических работ по математике с применением языка *Python* как средства формирования знаний и умений учащихся 10-11 классов.

Объект исследования: процесс обучения математике в средней школе.

Предмет исследования: лабораторно-практические работы по математике с применением языка *Python* как средство формирования знаний и умений обучающихся средней школы.

Цель исследования: выявить методические особенности лабораторно-практических работ по математике с применением языка *Python* как средства формирования знаний и умений учащихся средней школы.

Задачи исследования:

1. Разработать теоретические основы применения языка *Python* при реализации комплекса лабораторно-практических работ в 10-11 классах.

2. Изучить и составить методические рекомендации по организации лабораторно-практических работ по математике в средней школе.

3. Разработать комплекс лабораторно-практических работ по математике для учащихся 10-11 классов.

Для решения сформулированных задач были использованы следующие **методы исследования:** анализ учебно-методических пособий на предмет содержания и тематики лабораторно-практических работ в них, изучение опыта учителей математики по их организации, обобщение и систематизация материала.

Теоретическая значимость исследования состоит в выявлении методических особенностей по организации лабораторно-практических работ по математике с применением языка *Python* как средства формирования знаний и умений учащимися средней школы.

Практическую значимость результатов исследования составляет комплекс лабораторно-практических работ по математике с использованием языка *Python* для учащихся 10-11 классов.

ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗРАБОТКИ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЯЗЫКА *PYTHON* В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

§1. Знакомство с ЯП *Python*

Владение методами анализа данных при помощи вычислительной техники является необходимым условием для достижения успеха во многих профессиях. Первый шаг в этом направлении - овладение цифровыми методами анализа данных с применением какого-либо языка программирования. Данный курс создан с использованием ЯП *Python 3*.

Python — высокоуровневый язык программирования общего назначения с динамической строгой типизацией и автоматическим управлением памятью, ориентированный на повышение производительности разработчика, читаемости кода и его качества, а также на обеспечение переносимости написанных на нём программ.

Язык является полностью объектно-ориентированным. Синтаксис ядра языка минималистичен, за счёт чего на практике редко возникает необходимость обращаться к документации. Недостатками языка являются зачастую более низкая скорость работы и более высокое потребление памяти написанных на нём программ по сравнению с аналогичным кодом, написанным на компилируемых языках, таких как *Си* или *C++*. Это происходит из-за того, что *Python* является интерпретируемым языком. Он был выбран для данного курса благодаря тому, что является достаточно распространенным и несложным для самостоятельного изучения по сравнению с другими языками.

Создан данный язык в 1989-1991 годах программистом нидерландского происхождения Гвидо Ван Россумом. Название языка произошло от названия британского комедийного телешоу "*Летающий цирк Монти Пайтона*".

§2. Выбор и установка интерпретатора

Существует несколько способов установки и использования *Python*.

1. Использование интегрированной среды *IDLE*. Для этого просто установите интерпретатор *Python* с официального сайта *https://www.python.org/*. После установки запустите среду разработки *IDLE*.

2. Использование *Jupyter Notebook*. Данная среда разработки входит в состав пакета *Anaconda* и рекомендуется её установка в составе пакета. Преимуществом данной среды является тот факт, что в ней код не обязательно выполнять целиком. Можно разбить его на несколько фрагментов, что значительно упрощает проверку программы и устранение ошибок. Ссылка на официальный сайт: *https://www.anaconda.com/products/individual*.

3. Использование *IDE PyCharm* от *Jetbrains*. *PyCharm* имеет удобный редактор кода со всеми полезными функциями: подсветкой синтаксиса, автоматическим форматированием, дополнением и отступами. *PyCharm* позволяет проверять версии интерпретатора языка на совместимость, а также использовать шаблоны кода. Но полная версия *PyCharm* является платной, поэтому мы рекомендуем использование *Jupyter Notebook,* так как данный формат облегчает выполнение заданий и их проверку преподавателем.

§3. Начало работы

Синтаксис:

- Конец строки является концом инструкции (точка с запятой не требуется).
- Вложенные инструкции объединяются в блоки по величине отступов. Отступ может быть любым, главное, чтобы в пределах одного вложенного блока отступ был одинаков. Рекомендуется использовать 4 пробела (или знак табуляции).
- Вложенные инструкции в *Python* записываются в соответствии с одним и тем же шаблоном: основная инструкция завершается двоеточием, вслед за которым располагается вложенный блок кода.

Напишем первую программу на языке *Python*.

```
print("Hello world!") #print выводит переданные ей строку или число на экран

Output: Hello world!
```

Python поддерживает набор всех обычных математических операций.

```
print(2 + 2) - Output: 4
print(3 - 1) - Output: 2
print(2 * 2) - Output: 4
print(6 / 2) - Output: 3.0
print(5 // 2) - Output: 2(деление нацело)
print(5 % 2) - Output: 1(остаток от деления)
```

Ввод значений осуществляется при помощи функции *input()*.

```
a = input()
print("Hello, " + a + "!")

Input: Python; Output: Hello, Python!
```

§4. Условная инструкция *if – elif – else*

if - *elif* - *else* - оператор ветвления. С помощью его программа выбирает, какое действие следует выполнить, в зависимости от различных условий. Синтаксис выглядит так:

if <условие1>:

<действие 1>

elif <условие 2>:

<действие 2>

else:

<действие 3>

elif и *else* - не обязательные части. *elif* позволяет проверить альтернативное условие; *else* позволяет показать какое действие следует выполнять если условия из *if* и *elif* неверны.

Пример: Напишем программу определяющую четность числа.

```
a = int(input())
if a < 0: # Сначала проверяем корректность введенных данных
    print("Ошибка: было введено не натуральное число")
elif a % 2 == 0:
    print("Чётное")
else:
    print("Нечетное")

Input: 4; Output: Чётное
```

```
Input: 3; Output: Нечётное
```

§5. Циклы

Циклические конструкции используются, когда необходимо повторить какое-либо действие несколько раз. В языке *Python* есть два вида циклов: *while* и *for*. Сначала рассмотрим цикл *while*:

while <условие>:

<действия>.

Действия будут повторяться пока условие истинно. Рассмотрим пример использования цикла *while*: программа должна вывести все четные числа меньшие введенного с клавиатуры.

```
n = int(input())
k = 1
while k < n:
    if k % 2 == 0:
        print(k)
    k += 1

 Input: 6; Output: 2,4
```

Цикл *for* работает по-другому. Он проходит по всему итерируемому объекту, переданному в качестве параметра и во время каждого прохода выполняет тело цикла.

for j in <итерируемый объект>:

<действия>.

Рассмотрим пример решения задачи с использованием цикла *for*: вывести все числа кратные трем из заданного списка.

```
numbers = map(int,input().split())
for i in numbers:
    if i % 3 == 0:
        print(i)
```

Input: 2 3 4 5 6; **Output:** 3, 6

§6. Контейнеры

В языке *Python* реализованы 4 типа контейнеров: *list*, *tuple*, *dictionary* и *set*.

List:

Списки в *Python* - упорядоченные изменяемые коллекции объектов произвольных типов (почти как массив, но типы могут отличаться). Чтобы использовать списки, их нужно создать. Создать список можно несколькими способами. Например, можно обработать любой итерируемый объект (например, строку) встроенной функцией *list*:

x = list() # Создает пустой список

x = list("список") => x = ["с","п","и","с","о","к"].

Список можно создать и при помощи литерала:

x = [] # Создает пустой список

x = ["с","п","и","с","о","к"].

Многие методы списков уже реализованы:

- *list.append(x)* - Добавляет элемент в конец списка.
- *list.extend(L)* - Расширяет список *list*, добавляя в конец все элементы списка *L*.
- *list.insert(i, x)* - Вставляет на *i*-ую позицию значение *x*.
- *list.remove(x)* - Удаляет первый элемент в списке, имеющий значение *x*. *ValueError*, если элемента не существует.

- *list.index(x, start, end)* - Возвращает положение первого элемента со значением *x* (при этом поиск ведется от *start* до *end*).
- *list.count(x)* - Возвращает количество элементов со значением *x*.
- *list.sort([key=функция])* - Сортирует список на основе функции.

Кортеж (tuple) - неизменяемый список.

Множество (set) - контейнер, содержащий неповторяющиеся элементы в случайном порядке.

Словарь (dictionary) - контейнер, содержащий пары ключ - значение.

Более подробную информацию о данных контейнерах можно найти в интернете:

- https://pythonworld.ru/tipy-dannyx-v-python/kortezhi-tuple.html;
- [https://pythonworld.ru/tipy-dannyx-v-python/mnozhestva-set-i-frozenset.html;](https://pythonworld.ru/tipy-dannyx-v-python/mnozhestva-set-i-frozenset.html)
- [https://pythonworld.ru/tipy-dannyx-v-python/slovari-dict-funkcii-i-metody-slovarej.html.](https://pythonworld.ru/tipy-dannyx-v-python/slovari-dict-funkcii-i-metody-slovarej.html)

§7. Функции

Функция - объект, принимающий аргументы и возвращающий значение. Обычно функция определяется при помощи инструкции *def*. Рассмотрим простейшую функцию:

```python
def add(a, b):  # Принимаем на вход два числа
    return a + b # Возвращаем их сумму


# Далее мы можем использовать созданную функцию
x, y = map(int, input().split())
print(add(x, y))

Input: 2 3; Output: 5
```

Инструкцию *return* указывает какое значение возвращает функция. Если *return* отсутствует, функция возвращает *None*.

Анонимные функции могут содержать всего одно выражение, но зато выполняются быстрее. Они определяются при помощи инструкции *lambda*. Рассмотрим пример анонимной функции, аналогичной функции, рассмотренной выше.

```
add = lambda a, b: a + b
x, y = map(int, input().split())
print(add(x, y))

Input: 2 3; Output: 5
```

§8. Библиотеки *Matplotlib, Sympy, NumPy*

Библиотека – подключаемый набор функций. Для языка *Python* написано огромное количество различных библиотек, в том числе таких, которые могут быть использованы для цифрового анализа данных. В данном параграфе будут приведены их названия и краткие характеристики. Подробную информацию можно найти по приведенным ниже ссылкам.

Matplotlib – одна из удобнейших библиотек для визуализации данных: построения графиков, в том числе интерактивных и анимированных.

Официальный сайт - [https://matplotlib.org/.](https://matplotlib.org/)

Sympy - это библиотека *Python* для выполнения символьных вычислений. Это система компьютерной алгебры, которая может выступать как отдельное приложение, так и в качестве библиотеки для других приложений.

Официальный сайт - [https://www.sympy.org/en/index.html.](https://www.sympy.org/en/index.html)

Numpy - это библиотека добавляющая поддержку больших многомерных массивов и матриц, содержащая много высокоуровневых математических функций для операций с этими массивами. Зачастую используется для обработки данных.

Официальный сайт - [https://numpy.org/.](https://numpy.org/)

ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗРАБОТКИ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИХ РАБОТ ПО МАТЕМАТИКЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ЯЗЫКА *PYTHON* В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

§9. Методические рекомендации по организации и проведению лабораторно-практических работ в школьном курсе математики

Определим лабораторно-практические работы как вид работ, направленных на формирование или закрепление новых понятий путем проведения опытов, доказательств, изучений и наблюдений с помощью дополнительного оборудования.

Лабораторно-практические работы классифицируем по дидактической цели (изучение нового материала, закрепление изученного материала, формирование практических умений и навыков, развитие умений и навыков исследовательского характера); по месту проведения (классные, внеклассные, домашние); по степени самостоятельности активности учащихся или по способу организации (демонстрационные, фронтальные, самостоятельные); по методам выполнения и обработке результатов (наблюдение, опыты, измерительные работы, исследование зависимости величин); по месту и времени на уроке (в начале урока, в середине, в конце - 10-20 минут; на весь урок).

В процессе лабораторно-практической работы учащиеся используют компьютер. Использование учащимися учебников, справочной литературы, таблиц, интернета способствует развитию навыков самостоятельности, их подготовке к самообразованию.

Практические работы, помимо решения своей специальной задачи – усиления практической направленности обучения, должны быть не только теснейшим образом связаны с изучаемым материалом, но и способствовать прочному, неформальному его усвоению. Важнейшей методической проблемой, решаемой в процессе выполнения практических работ, является развитие вычислительной культуры у учащихся.

Проведение лабораторных и практических работ с целью осмысления нового учебного материала включает в себя следующие методические приемы:

1. Постановка темы занятий и определение задач (цели);

2. Определение порядка работы или определенных ее этапов;

3. Непосредственное выполнение работы учащимися и контроль учителя за ходом занятий и соблюдение техники безопасности;

4. Подведение итогов работы и формулирование основных выводов.

Факты, которые учащиеся получают в результате самостоятельной экспериментальной работы, дольше удерживаются в памяти и в нужный момент помогают ученикам усвоить сложный теоретический материал.

Составим план организации лабораторно-практических работ по математике.

1. Определение темы и цели лабораторно-практической работы.

Согласно цели лабораторно-практической работы (введение нового понятия, закрепление изученной темы и т.д.) определяются ее задачи, которые требуется решить учащимся.

2. Определение этапов и содержания работы.

Необходимо определить ход работы для учащихся с подробным описанием заданий и инструкциями к их выполнению.

Например, выделим три основных этапа лабораторно-практической работы: организационный момент, выполнение лабораторно-практической работы, подведение итогов.

- Организационный момент предполагает проведение инструктажа по выполнению лабораторно-практической работы.

- Выполнение лабораторно-практической работы проходит под наблюдением учителя. Учащиеся выполняют задания самостоятельно или в группах.

- Подведение итогов может проходить как самостоятельно, так и всем классом совместно с учителем. Учащиеся определяют, какой вывод (навык) они получили при выполнении лабораторно-практической работы.

На каждый этап необходимо выделить и указать определенное количество времени.

3. Подготовка к проведению лабораторно-практической работы.

На этапе подготовки, основываясь на содержании, следует определить и подготовить необходимый материал (оборудование) для проведения лабораторно-практической работы.

4. Выполнение работы.

Учитель сообщает тему лабораторной работы заранее. Организует повторение ранее изученного материала, необходимых понятий, формул, определений, которые придется использовать при выполнении работы.

Перед началом работы учащимся необходимо провести инструктаж по выполнению работы.

Учитель, наблюдая за работой учащихся, проверяет решения, указывает на индивидуальные и общие ошибки учащихся. Особое внимание уделяется менее подготовленным учащимся.

5. Подведение итогов лабораторно-практической работы.

Вывод после проведения работы должен соответствовать цели лабораторно-практической работы. Учащиеся могут сделать его как самостоятельно, так и вместе с учителем. Если учащиеся работают в группе, то группа может презентовать итоги выполненной работы перед классом.

§10. Комплекс лабораторно-практических работ по математике в 10-11 классах

Лабораторная работа № 1. Предел последовательности, предел функции, непрерывность функции.

Цель работы: обучить учеников вычислять предел последовательности и предел функции; находить точки разрыва функции и определять их типы с использованием систем компьютерной математики.

Теоретический материал по теме «Предел последовательности, предел функции, непрерывность функции».

Числовая последовательность – это действительная функция $x_n = f(n)$, определенная на множестве всех натуральных чисел, то есть $f: N \to R$. Очевидно, числовая последовательность – частный случай действительной функции действительного аргумента.

Определение. Число a называется пределом последовательности x_n, если для любого, наперед заданного, положительного числа ε найдется номер n_ε, такой, что для всех номеров $n \geq n_\varepsilon$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Если последовательность x_n имеет конечный предел, то она называется *сходящейся*, в противном случае x_n называется *расходящейся*.

Замечание. Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ эквивалентно условию $x_n \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Таким образом, справедливо еще одно определение предела последовательности.

Определение. Число a называется пределом последовательности x_n, если в любой ε -окрестности точки a содержатся все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера n_ε. То есть вне этой окрестности находится лишь конечное число членов данной последовательности: $x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_{n_\varepsilon - 1}$.

Определение предела функции (по Коши, или на языке «$\varepsilon - \delta$»). Пусть D_f– область определения функции f. $a \in \overline{R}$– предельная точка множества D_f. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется число $\delta_\varepsilon > 0$ такое, что для $\forall x \in D_f$: $0 < |x - a| < \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение предела функции (на языке окрестностей). Число A есть предел функции $f(x)$ в точке a, если для любой ε -окрестности числа A можно найти такую проколотую δ -окрестность точки a, что для всех x, принадлежащих этой δ -окрестности, соответствующие значения функции содержатся в ε -окрестности числа A.

Определение односторонних пределов функции (по Коши). Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке a слева (справа), если для $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_\varepsilon > 0$, такое, что $\forall x \in D_f$ и удовлетворяющих неравенству $a - \delta < x < \delta$ $(a < x < a + \delta)$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $a \in D_f$ (a– предельная точка множества D_f), если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Дадим несколько эквивалентных определений.

Определение (по Гейне). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $a \in D_f$, если $\forall x_n, \quad x_n \in D_f$ и $x_n \to a$ соответствующая последовательность значений функции $f(x_n) \to f(a)$.

Определение (по Коши). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $a \in D_f$, если для $\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta_\varepsilon > 0$, такое, что для $\forall x \in D_f$ и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta_\varepsilon$, выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Определение (на языке окрестностей). Для $\forall\varepsilon > 0$ имеем:

ε -окрестность точки $f(a)$ содержит образ (при отображении f) некоторой δ -окрестности точки a.

Определение (на языке приращений). Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $a \in D_f$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(a) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(a + \Delta x) - f(a) = 0$, где $\Delta x = x - a$.

Определение. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке а справа*, если $f(a+) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = f(a)$, и *непрерывной слева*, если $f(a-) = \lim\limits_{x \to a-} f(x) = f(a)$.

Теорема. Для того, чтобы $f(x)$ была непрерывной в точке a, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была одновременно непрерывна справа и слева, то есть чтобы было выполнено равенство:

$$f(a-) = f(a+) = f(a).$$

Определение. Точка a называется *точкой разрыва функции* f, если эта функция либо не определена в точке a, либо определена, но не является непрерывной в точке a.

Следовательно, a– точка разрыва функции f, если не выполняется по крайней мере одно из следующих условий:

а) $a \in D_f$; б) $\exists$ конечный $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$; в) $A = f(a)$.

Если a– точка разрыва функции f, причем в этой точке существуют конечные пределы слева и справа, то есть $f(a-)$ и $f(a+)$, то эту точку a называют *точкой разрыва первого рода*. При этом разность $f(a+) - f(a-)$ называют *скачком функции в точке* a.

В случае, когда $f(a+) = f(a-)$, точку a называют *точкой устранимого разрыва*. Полагая $f(a) = f(a+) = f(a-) = A$, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a, \\ A, & x = a, \end{cases}$$

непрерывную в точке a и совпадающую с $f(x)$ при $x \neq a$. В этом случае говорят, что функция *доопределена по непрерывности в точке* a.

Пусть $x = a$– точка разрыва функции f, не являющаяся точкой разрыва первого рода. Тогда ее называют *точкой разрыва второго* *рода* функции f. В такой точке хотя бы один из односторонних пределов либо не существует, либо бесконечен.

Практические задания по теме «Предел последовательности, предел функции, непрерывность функции», решенные классическими методами математического анализа.

Примеры на вычисление пределов функций.

1) Непосредственное вычисление.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)=\frac{3}{4}.$$

2) Сокращение множителей в числителе и знаменателе.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=0.$$

3) Приведение к общему знаменателю.

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}-\frac{1}{x^3-3x-2}\right)$$
$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}-\frac{1}{(x-2)(x+1)^2}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{x+1-x+2}{(x+1)^2(x-2)^2}=\lim_{x\to 2}\frac{3}{(x+1)^2(x-2)^2}=+\infty.$$

4) Деление числителя и знаменателя на наибольшую степень.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

5) Умножение на сопряженное выражение.

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

6) Деление многочленов.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x^2+x+2)}{(x-1)^2(x+1)}=\infty.$$

7) Использование при вычислениях известных пределов.

$$\lim_{x\to0}\frac{tg\ x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=1\cdot1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

8) Введение подстановки.

$$\lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}=e\cdot\lim_{x\to1}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}=[x-1=t]=e\cdot\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=e\cdot1$$

$$=e.$$

9) Использование замечательных пределов.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{x^3}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}\right)^{x^3}=\frac{1}{e}\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)^{x^3}$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{-x^3}\right)^{-x^3(-1)}=\frac{1}{e^2}.$$

10) Использование таблицы эквивалентных функций.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2\frac{x}{2}}$$

$$=\left[\sqrt{\cos 2x}=\sqrt{1+\cos 2x-1}\sim1+\frac{\cos 2x-1}{2}\right]=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1+\frac{x\sin x}{2}-1-\frac{\cos 2x-1}{2}}{\frac{x^2}{4}}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin x}{x}+\lim_{x\to0}\frac{4\sin^2 x}{x^2}=6.$$

Упражнения для самостоятельного решения.

Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to4}\frac{5x+2}{2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+5}{2x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-3x}$; г) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to10}\frac{x^3-1000}{x^3-20x^2+100x}$; е) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$; ж) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[5]{(1+x)^3}-1}{x}$;

з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin mx}{x}$; и) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{x^2}$; к) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+2x^2+3x+4}{4x^3+3x^2+2x+1}$;

л) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$; м) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+8x+3}-\sqrt{x^2+4x+3}\right)$;

н) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$; о) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^x-1}{x\ln x}$; п) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+\ldots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$;

р) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$; с) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$; т) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{(\pi-x)^3}{tg\, x-\sin x}$; у) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$;

ф) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$; х) $\lim\limits_{a\to 3}\left(\frac{1}{2(1+\sqrt{a})}+\frac{1}{2(1-\sqrt{a})}-\frac{a^2+2}{1-a^3}\right)$;

ц) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt{x\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}$.

Примеры на нахождение точек разрыва функции.

1) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geq 0,\\ 3, & x<0.\end{cases}$

Находим $\lim\limits_{x\to 0-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}3=3,\quad \lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}x^2=0.$ Следовательно, $x=0$ является точкой разрыва первого рода – точкой скачка. Скачок функции в этой точке равен $f(0+)-f(0-)=0-3=-3$.

2) $\phi(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}, & x>0,\\ -x, & x\leq 0.\end{cases}$

Находим $\lim\limits_{x\to 0-}\phi(x)=\lim\limits_{x\to 0-}(-x)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0+}\phi(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{x}=+\infty.$ Таким образом, функция при $x\to 0$ не имеет правого конечного предела. Следовательно, $x=0$ – точка разрыва второго рода.

3) Функция $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ имеет разрыв в точке $x=3$, причем $x=3$– точка устранимого разрыва. Действительно, при $x=3$ функция не определена, $x=3$– точка разрыва данной функции. Поскольку $f(3-)=f(3+)$, то есть

$$\lim_{x\to 3-}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3-}(x+3)=6,\quad \lim_{x\to 3+}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3+}(x+3)=6,$$

то $x = 3$– точка устранимого разрыва. Полагая $f(3) = 6$, получаем уже непрерывную функцию $y = x + 3$.

4) $f(x) = [x]$. Находим: $f(2-) = 1$, $f(2) = 2$, $f(2-) \neq f(2)$, следовательно, данная функция не является непрерывной слева в точке $x = 2$. Убедитесь, что данная функция является непрерывной справа в точке $x = 2$. Таким образом, функция $f(x) = [x]$ не является непрерывной в точке $x = 2$. Для этой функции $x = 2$– точка разрыва первого рода, скачок функции равен $f(2+) - f(2-) = 2 - 1 = 1$.

5) Для функции $f(x) = x \cdot sin\frac{1}{x}$ точка $x = 0$– точка разрыва первого рода. Доопределив эту функцию по непрерывности, получим функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \cdot sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

непрерывную в точке $x = 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \cdot sin\frac{1}{x}\right) = 0$.

Упражнения для самостоятельного решения.

Найдите точки разрыва функций:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2-9}$; б) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, & 0 \leq x < 1, \\ x^2 + 1, & x \geq 1; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x \leq 1, \\ \frac{1}{1-x}, & x > 1; \end{cases}$ г) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ tg\ x + 1, & x > 0; \end{cases}$

д) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 4, & x = 1; \end{cases}$ е) $f(x) = e^{\frac{1}{x+3}}$; ж) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

Python.

Для вычисления пределов удобно использовать библиотеку *Sympy*. В ней имеется встроенная функция *limit*. Функция *limit* принимает четыре параметра: саму функцию, переменную, точку в которой ищется пример, и + или – если предел односторонний.

Примерно так должна выглядеть программа для вычисления предела с использованием функции *limit*:

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(expression, x, a,(-))
```

Для нахождения точек разрыва функции можно просто вычислить все необходимые пределы при помощи функции *limit* и сравнив их значения определить род разрыва и скачок.

Также можно воспользоваться модулем *singularities*. Он содержит одноименную функцию, которую можно использовать для вычисления точек разрыва. Функция *singularities* принимает 2 аргумента: саму функцию и переменную. Важно отметить, что *singularities* может вычислять точки разрыва не всех функций, поэтому в некоторых случаях удобнее несколько раз воспользоваться функцией *limit*.

```
from sympy import *
x = symbols('x')
singularities(1/(x**2 - 1), x)

Output: {-1,1}
```

Практические задания по теме «Предел последовательности, предел функции, непрерывность функции», решенные с применением языка *Python*.

1) Непосредственное вычисление. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)$

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
```

```
3. print(limit(1 + (x**3 - 3 * x + 1)/(x-4), x, 0))

Output: 3/4
```

2) Сокращение множителей в числителе и знаменателе.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$$

```
1. from sympy import *
2. x = Symbol("x")
3. print(limit((x**2 - 2 * x + 1)/(x**3-x), x, 1))

Output: 0
```

3) Приведение к общему знаменателю.

$$\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{(x+1)(x-2)^2} - \frac{1}{x^3 - 3x - 2} \right)$$

```
1. from sympy import *
2. x = Symbol("x")
3. print(limit(1/((x+1) * (x - 2)**2) - 1/(x**2 - 3*x -
   2),x, 2))

   Output: ∞
```

4) Деление числителя и знаменателя на наибольшую степень.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$$

```
1. from sympy import *
2. x = Symbol("x")
3. limit((x**2 - 1)/(2*x**2 + 1), x, oo) #oo - бесконечность

   Output: 1/2
```

5) Умножение на сопряженное выражение.

$$\lim_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{x^2 + 1} - x\right)$$

```
1. from sympy import *
2. x = Symbol("x")
```

```
3. limit(x*((x**2 + 1)**(1/2) - x), x, oo)

Output: 1/2
```

6) Деление многочленов. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

```
1. from sympy import *
2. x = Symbol("x")
3. limit((x**3 + x - 2)/(x**3 - x**2 - x + 1), x, 1)

Output: ∞
```

7) Использование при вычислениях известных пределов. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\ x-\sin x}{x^3}$

```
1. from sympy import *
2. x = Symbol("x")
3. limit((tan(x)-sin(x))/(x**3), x, 0)

Output: 1/2
```

8) Введение подстановки. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{e^x-e}{x-1}$

```
1. from sympy import *
2. x = Symbol("x")
3. limit((E**x-E)/(x-1), x, 1) #e в python обозначается как
   E

Output: e
```

9) Использование замечательных пределов. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+1}\right)^{x^3}$

```
1. from sympy import *
2. x = Symbol("x")
3. limit(((x**3-1)/(x**3+1))**(x**3), x, oo)

Output: e^-2
```

10) Использование таблицы эквивалентных функций. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{tg^2\frac{x}{2}}$

```
from sympy import *
x = Symbol("x")
limit(((1 + x * sin(x)) ** (1/2) - (cos(2*x)) **(1/2))
/((tan(x/2))**2), x, 0)

Output: 6.
```

Дополнительные задания:

1) Самостоятельно реализовать функцию для вычисления пределов функций вида *f(x) = P(x)/Q(x)*, где *P(x)* и *Q(x)* – многочлены произвольной степени.
2) Не используя модуль *singularity*, реализовать функцию для вычисления точек разрыва функций вида *f(x) = 1/P(x)*, где *P(x)* – многочлен произвольной степени.

Лабораторная работа № 2. Производная функции и ее применение.

Цель работы: обучить учеников вычислять производную функции, производную неявной функции, производную параметрически заданной функции, показать основные методы применения производной при исследовании функции.

Теоретический материал по теме «Производная функции и ее применение».

Производной от функции $y = f(x)$ по аргументу x называется конечный предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Геометрически производная представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x, то есть $y' = tg\alpha$.

Производная есть *скорость изменения* функции в точке x. Отыскание производной называется *дифференцированием* функции.

Основные правила дифференцирования.

Пусть C – постоянная, $u = u(x)$, $v = v(x)$ – функции, имеющие производные. Тогда:

1) $C' = 0$; 2) $x' = 1$; 3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$; 4) $(Cu)' = Cu'$;

5) $(uv)' = u'v + uv'$; 6) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

7) Если $y = f(u)$, $u = u(x)$, то есть $y = f\big(u(x)\big)$, где функции $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. (правило дифференцирования сложной функции).

Дифференцирование неявных функций. Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ определяет y как неявную функцию от x. В дальнейшем будем считать эту функцию дифференцируемой.

Продифференцировав по x обе части уравнения $F(x, y) = 0$, получим уравнение первой степени относительно y'. Из этого уравнения легко находится y', то есть производная неявной функции для всех значений x и y, при которых множитель при y' в уравнении не обращается в нуль.

Производная функции, заданной в параметрической форме. Если функция аргумента x задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$, или $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$.

Приложения производной к задачам геометрии и механики. Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = tg\alpha$, где α – угол, образованный с положительным направлением оси Ox касательной к кривой в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид $y - y_0 = y_0'(x - x_0)$, где y_0' есть значение производной y' при $x = x_0$.

Нормалью к кривой называется прямая, перпендикулярная касательной и проходящая через точку касания.

Уравнение нормали имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0)$.

Углом между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0. Этот угол находится по формуле $tg\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}$.

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $s = s(t)$, то скорость движения в момент t_0 есть производная пути по времени: $v = s'(t_0)$.

Возрастание и убывание функции. Экстремум функции. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в интервале* (a, b), если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Функция $f(x)$ называется убывающей в интервале (a, b), если для любых двух точек x_1 и x_2 из указанного интервала, удовлетворяющих неравенству $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Признаки возрастания и убывания функции.

Если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ возрастает в точке x_0.

Если $f'(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ убывает в точке x_0.

Если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума функции, если же с плюса на минус, то x_0 – точка максимума.

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ нужно из значений функции на границах отрезка и в критических точках, принадлежащих этому отрезку, выбрать наибольшее (наименьшее).

Практические задания по теме «Производная функции и ее применение», решенные классическими методами математического анализа.

1) Применяя формулы и правила дифференцирования, найти производные следующих функций:

а) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4.$

Решение.

$$y' = (2x^3)' - (5x^2)' + (7x)' + (4)' = 2 \cdot 3x^2 - 5 \cdot 2x + 7 \cdot 1 + 0 = 6x^2 - 10x + 7$$

б) $y = x^3 arctgx.$

Решение.

$$y' = x^3(arctgx)' + arctgx \cdot (x^3)' = x^3 \frac{1}{1+x^2} + 3x^2 arctgx =$$

$$= \frac{x^3}{1+x^2} + 3x^2 arctgx.$$

в) $y = \frac{arcsin\, x}{x}.$

Решение.

$$y' = \frac{x \cdot (arcsin\, x)' - arcsin\, x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - arcsin\, x}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot arcsin\, x}{x^2\sqrt{1-x^2}}.$$

г) $y = sin^3 \frac{x}{3}.$

Решение.

$$y' = 3\, sin^2 \frac{x}{3} \left(sin \frac{x}{3} \right)' = 3\, sin^2 \frac{x}{3} cos \frac{x}{3} \left(\frac{x}{3} \right)' = sin^2 \frac{x}{3} cos \frac{x}{3}.$$

2) Найти производную y'_x из уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

Решение.

Так как y является функцией от x, то будем рассматривать y^2 как сложную функцию от x. Следовательно, $(y^2)' = 2yy'$. Продифференцировав по x обе части данного уравнения, получим $2x + 2yy' = 0$, то есть $y' = -\frac{x}{y}$.

3) Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, если $x = t^3 + 3t + 1,\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1$.

Решение.

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 3,\ \frac{dy}{dt} = 15t^4 + 15t^2.$$

Следовательно, $\frac{dy}{dx} = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2$.

4) Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1, -1)$.

Решение.

Из уравнения кривой найдем производную:

$2x + 2y^2 + 4xyy' + 12y^3y' = 0$, то есть $y' = -\frac{x+y^2}{2xy+6y^3}$.

Следовательно, $y_0' = -\frac{1+(-1)^2}{2\cdot1(-1)+6(-1)^3} = \frac{1}{4}$.

Уравнение касательной: $y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1)$, или $x - 4y - 5 = 0$.

Уравнение нормали: $y + 1 = -4(x - 1)$, или $4x + y - 3 = 0$.

5) Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{t^5}{5} + \frac{2}{\pi} sin \frac{\pi t}{8}$ (t – в секундах, s – в метрах). Определить скорость движения в конце второй секунды.

Решение.

Находим производную пути по времени:

$\frac{ds}{dt} = t^4 + \frac{1}{4} cos \frac{\pi t}{8}$. При $t = 2$ имеем $\frac{ds}{dt} = 16 + \frac{1}{8}\sqrt{2} = 16{,}18$.

6) Исследовать на экстремум функцию $y = (x - 1)^4$.

Решение.

Найдем производную: $y' = 4(x - 1)^3$; $(x - 1)^3 = 0$; $x = 1$ – стационарная точка. Производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $x = 1$ – точка минимума, значение в которой y_{min}.

7) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке $[-2; 3]$.

Решение.

Находим производную:

$f'(x) = 3 - 3x^2$; $3 - 3x^2 = 0$; $x = \pm 1$ – стационарные точки. Определяем значения функции в этих точках: $f(1) = 2$, $f(-1) = -2$. Вычисляем значения данной функции на границах промежутка:

$f(-2) = 2,\ f(3) = -18$. Из полученных четырех значений выбираем наибольшее и наименьшее. Итак, наибольшее значение функции на данном отрезке равно 2, а наименьшее равно –18.

Упражнения для самостоятельного решения.

1) Найти угол между параболами $y = 8 - x^2$ и $y = x^2$.

2) Найти производную y'_x из уравнения $x^3 + ln\, y - x^2 e^y = 0$.

3) Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, если $x = e^{-t} \sin t\,,\ y = e^t \cos t$.

4) Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 - 3x + 5$, проведенная в точке $M(2{,}3)$? Написать уравнение этой касательной.

5) Составить уравнения касательной и нормали к полукубической параболе $x = t^2,\ y = t^3$, проведенных в точке, для которой $t = 2$.

6) По кубической параболе $y = x^3$ движется точка так, что ее ордината изменяется в зависимости от времени t по закону $y = at^3$. Какова скорость изменения абсциссы в зависимости от времени?

7) Найти экстремумы функций:

а) $y = x^2\left(1 - x\sqrt{x}\right)$; б) $y = ln(x^2 + 1)$; в) $y = x - 2\sin^2 x$.

8) Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3; 2]$.

Python.

Для нахождения производной функции удобно использовать функцию *diff* библиотеки *Sympy*. Синтаксис выглядит так: *diff* (*func*, *x*, *a*), где *func* – функция, *x* – переменная, по которой берется производная, *a* – порядок производной (по умолчанию – 1).

Для нахождения производной функции, заданной в неявном виде, используется функция *idiff*. Синтаксис выглядит так: *idiff* (*eq*, *y*, *x*, *a*), где *eq = 0* – выражение, связывающее переменные, *y* – зависимая переменная, *x* – переменная, по которой берется производная, *a* – порядок производной.

Функция для нахождения уравнения касательной в точке отсутствует в готовом виде, ниже приведена её примерная реализация с использованием модулей библиотеки *Sympy*.

```
def tangent(y,x0):
    # y(x) - график, x0 - точка касания
    y0 = y.subs(x,x0)
    x1 = x0 + 1
    k = diff(y,x).subs(x,x0)
    y1 = y0 + k
    return f"{Line((x0,y0),(x1,y1)).equation()} = 0"

Комментарий: subs используется для замены одной переменной
на другую, либо на её значение. Line((x1,y1),(x2,y2)) –
создает прямую, заданную точками с данными координатами.
Метод equation позволяет вывести общее уравнение прямой.
```

Функция для нахождения точек экстремума:

```
def extr(f,x):
    f_ = diff(f,x)
    crit_pts = solve(f_,x)
    k = len(crit_pts)
    if k > 0:
        for i in range(0,k):
            ri= crit_pts[i]
            f2 = diff(f,x,2).subs(x,ri)
            if f2>0:
                print(f"{ri} - точка максимума, y_max = {f.subs(x,ri)}")
            elif f2<0:
                print(f"{ri} - точка минимума, y_min = {f.subs(x,ri)}")
            else:
                print(f"{ri} - критическая точка")
```

Для определения минимумов и максимумов функции на отрезке удобно использовать модули *minimum* и *maximum* библиотеки *Sympy*. Примерный синтаксис приведен ниже.

```
from sympy.calculus.util import minimum, maximum
x = symbols("x")
f = x**2
intr = Interval(-2,2)
print(maximum(f,x,intr))
print(minimum(f,x,intr))
```

Практические задания по теме «Производная функции и ее применение», решенные с применением языка *Python*.

1) Найти производные следующих функций:

а) $y = 2x^3 - 5x^2 + 7x + 4.$

```
from sympy import *
x = symbols('x')
y = 2 * x**3 - 5 * x**2  + 7 * x + 4
diff(y,x)
```

Output: $6x^2-10x+7$

б) $y = x^3 arctgx.$

```
from sympy import *
x = symbols('x')
y = x**3  * atan(x)
diff(y,x)
```

Output: $x^3/(x^2 + 1) + 3x^2 * atan(x)$

в) $y = \frac{arcsin\,x}{x}.$

```
from sympy import *
x = symbols('x')
y = asin(x)/x
diff(y,x)
```

Output: $1/(x*sqrt(1-x^2)) - asin(x)/x^2$

2) Найти производную y'_x из уравнения $x^2 + y^2 = 4$.

```
from sympy import *
x,y = symbols('x y')
f = x**2 + y**2 - 4
idiff(f,y,x)

Output: - x/y
```

3) Найти $y' = \frac{dy}{dx}$, если $x = t^3 + 3t + 1,\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1$.

```
from sympy import *
t = symbols('t')
x = diff(t**3 + 3*t + 1,t) #dx/dt
y = diff(3 * t**5 + + 5 * t**3 + 1,t)#dy/dt
simplify(y/x) # Функция simplify упрощает выражение

Output: 5t²
```

4) Составить уравнения касательной и нормали к кривой $x^2 + 2xy^2 + 3y^4 = 6$ в точке $M(1,-1)$.

```
#Найдем значение производной в точке (1,-1)
x, y = symbols('x y')
x0,y0 = (1,-1)
f = x**2 + 2 * x * y**2 + 3 * y**4 - 6
deriv = idiff(f,y,x).subs(x,x0).subs(y,y0)
# Далее просто выведем уравнения прямых
kas = f"{(y + 1 - deriv*(x-1)).simplify()} = 0"
norm = f"{(y + 1 + 1/deriv*(x-1)).simplify()} = 0"
print(kas)
print(norm)
```

5) Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s = \frac{t^5}{5} + \frac{2}{\pi} sin\frac{\pi t}{8}$ (t – в секундах, s – в метрах). Определить скорость движения в конце второй секунды.

```
#Скорость - производная пути по времени.
t = symbols("t")
s = t**5/5 + 2/math.pi * sin(math.pi * t/8)
round(diff(s, t).subs(t,2),2)

Output: 16.18
```

6) Исследовать на экстремум функцию $y = (x - 1)^4$.

```
x = symbols("x")
f = (x-1)**4
extr(f,x)

Комментарий – функция extr была рассмотрена выше.
```

7) Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 3x - x^3$ на отрезке $[-2; 3]$.

```
from sympy.calculus.util import minimum, maximum
x = symbols("x")
f = 3*x - x**3
intr = Interval(-2,3)
print(f"{maximum(f,x,intr)} - максимум")
print(f"{minimum(f,x,intr)} - минимум")

Output: 2 – максимум, -18 – минимум.
```

8) Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 3$ на отрезке $[-3; 2]$.

```
from sympy.calculus.util import minimum, maximum
x = symbols("x")
f = 3*x - x**3
intr = Interval(-2,3)
print(f"{maximum(f,x,intr)} - максимум")
print(f"{minimum(f,x,intr)} - минимум")

Output: 2 - максимум
-18 - минимум
```

Лабораторная работа № 3. Частные производные. Градиент. Производная по направлению. Касательная плоскость. Экстремумы функции многих переменных. Условный экстремум.

Цель работы: обучить учеников вычислять частные производные, градиент, производную по направлению, познакомить с алгоритмом нахождения экстремумов функции многих переменных, дать понятие условного экстремума.

Теоретический материал по теме «Частные производные. Градиент. Производная по направлению. Касательная плоскость. Экстремумы функции многих переменных. Условный экстремум».

Градиентом функции называется вектор, составленный из частных производных этой функции.

Для функции двух переменных градиент вычисляется по правилу: $grad f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$.

Производная функции $z = f(x; y)$ *в данном направлении* $\vec{l} = \left(l_x; l_y\right)$ вычисляется по формуле:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x} cos\,\alpha + \frac{\partial z}{\partial y} cos\,\beta,$$

где $cos\,\alpha = \frac{l_x}{|\vec{l}|},\ cos\,\beta = \frac{l_y}{|\vec{l}|}$ – направляющие косинусы вектора $\vec{l}$, и

$|\vec{l}| = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$.

Касательной плоскостью к поверхности в точке M_0 называется плоскость, содержащая касательные ко всем кривым, которые принадлежат данной поверхности и проходят через точку M_0.

Нормалью к поверхности в точке M_0 называется прямая, проходящая через данную точку перпендикулярно касательной плоскости.

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ находится по формуле:

$$F_x'(M_0)(x - x_0) + F_y'(M_0)(y - y_0) + F_z'(M_0)(z - z_0) = 0.$$

Производные F_x', F_y', F_z' не являются производными неявной функции, а вычисляются по правилам дифференцирования функции трех переменных (при взятии производной по переменной x, остальные две переменные рассматриваются как константы).

Из уравнения касательной плоскости можно сделать вывод, что оно представляет собой уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 с нормальным вектором $\vec{n} = \left(F_x'(M_0); F_y'(M_0); F_z'(M_0)\right)$.

Уравнение нормали можно записать в виде канонического уравнения прямой: $\frac{x-x_0}{F_x'(M_0)} = \frac{y-y_0}{F_y'(M_0)} = \frac{z-z_0}{F_z'(M_0)}$,

или в параметрическом виде:

$x = x_0 + F_x'(M_0) \cdot t,\ y = y_0 + F_y'(M_0) \cdot t,\ z = z_0 + F_z'(M_0) \cdot t,\ t \in R.$ *Необходимый признак*. Для того, чтобы дифференцируемая функция $f(x, y)$ имела экстремум в точке $(x_0; y_0)$, необходимо, чтобы в этой точке обращались в нуль частные производные: $f_x'(x_0, y_0) = 0,\ f_y'(x_0, y_0) = 0$.

Достаточный признак. Обозначим $A = f_{xx}'',\ B = f_{xy}'',\ C = f_{yy}'',\ \Delta = AC - B^2$. Функция $f(x, y)$ имеет экстремум в критической точке (x_0, y_0), если выполняется условие: $\Delta > 0$, причем, если $A > 0$, то достигается минимум, если $A < 0$, то максимум.

Если $\Delta < 0$, то экстремума в этой точке нет.

Если $\Delta = 0$, то необходимо дополнительное исследование.

Пусть необходимо исследовать на экстремум функцию $f(x, y)$ при выполнении условия $g(x, y) = 0$. (Условный экстремум). Введем обозначения: $L(x,y) = f + \lambda g(x,y)$ – функция Лагранжа, здесь λ – множитель Лагранжа. Определитель находится по формуле:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & g_x' & g_y' \\ g_x' & L_{xx}'' & L_{xy}'' \\ g_y' & L_{xy}'' & L_{yy}'' \end{vmatrix}.$$

Необходимый признак. Для того, чтобы функция $f(x,y)$ достигала экстремума в некоторой точке $(x_0; y_0)$, такой, что $g(x_0; y_0) = 0$, необходимо, чтобы в этой точке обращались в нуль частные производные $L_x',\ L_y',\ L_z'$:

$$\begin{cases} L_x' = 0, \\ L_y' = 0, \\ L_z' = 0. \end{cases}$$

Достаточный признак. Функция $f(x,y)$ достигает минимума в критической точке $(x_0; y_0)$, такой, что $g(x_0; y_0) = 0$, если выполняется условие: $\Delta > 0$, и максимума, если, $\Delta < 0$.

Если $\Delta = 0$, то необходимо дополнительное исследование.

Практические задания по теме «Частные производные. Градиент. Производная по направлению. Касательная плоскость. Экстремумы функции многих переменных. Условный экстремум», решенные классическими методами математического анализа.

1) Вычислить частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = xy^2 + e^{-x}$.

Решение.

$z_x' = y^2 - e^{-x},\ z_{xx}'' = e^{-x},\ z_y' = 2xy,\ z_{yy}'' = 2x.$

2) Вычислить частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y}$ функции $z = \sin x \cos y$.

Решение.

$z'_x = \cos x \cos y$; $z''_{xx} = -\sin x \cos y$; $z'''_{xxy} = \sin x \sin y$.

3) Вычислить градиент функции $z = 5\ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(1; 2)$.

Решение.

$z'_x = \frac{10x}{x^2+y^2}$; $z'_x(1; 2) = \frac{10}{2} = 2$; $z'_y = \frac{10y}{x^2+y^2}$; $z'_y(1; 2) = 4$.

Следовательно, $grad\ z = 2\vec{i} + 4\vec{j} = (2; 4)$.

4) Найти производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1; 1)$ по направлению вектора $\vec{l} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

Решение.

$$z'_x = 2x,\ z'_x(1; 1) = 2,\ z'_y = 2y,\ z'_y(1; 1) = 2;$$

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial l}(1; 1) = 2 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{14}{5}$.

5) Провести касательную плоскость и нормаль к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ в точке $M(1; 1; 1)$.

Решение.

$F'_x(M) = F'_y(M) = F'_z(M) = 2$,

$2(x-1) + 2(y-1) + 2(z-1) = 2x + 2y + 2z - 6 = 0$;

$x + y + z - 3 = 0$ – касательная плоскость,

тогда нормаль: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

6) Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$

Решение. $z'_x = 4x^3 - 4x + 4y;\ z'_y = 4y^3 + 4x - 4y.$

$$\begin{cases} z'_x = 0, \\ z'_y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - x + y = 0, \\ y^3 + x - y = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим $(0;0)$, $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, $\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ – критические точки. Для каждой критической точки проверяем достаточный признак экстремума. Вторая и третья точки являются точками минимума $(\Delta = 384 > 0,\ A = 20 > 0)$. Значения функции в этих точках $z\left(\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)_{min}$. В точке $(0;0)$ значение $\Delta = 0$. Необходимо дополнительное исследование. Вычисляя значения функции в близких к началу координат точках, получим значения, и меньшие, и большие, чем значение в исследуемой точке, следовательно, она не является точкой экстремума.

Упражнения для самостоятельного решения.

1) $z = y\ln x$. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

2) Найти производную функции $u = xy^2z^3$ в точке $M(3;2;1)$ в направлении вектора $\overrightarrow{MN}$, где $N(5;4;2)$.

3) Найти величину и направление градиента функции $u = tgx - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + ctgz$ в точке $M\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right)$.

4) $x = y - \sin y$. Найти y' и y''.

5) Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = 1 + x^2 + y^2$ в точке $M(1;1;3)$.

6) Найти экстремумы функции $z = xy^2(1 - x - y)$.

7) Найти экстремум функции $z = x^2 + y^2$, если x и y связаны уравнением $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

Python.

1) Для вычисления частных производных удобнее всего использовать функцию *diff* () библиотеки *Sympy*. (см теоретические материалы к лабораторной работе №2).

2) Функция для вычисления производной по направлению отсутствует в библиотеках *Sympy* и *Scipy*, мы рекомендуем вам использовать приведенную ниже функцию:

```
def diff_direct(f, var, l, p):
    """
    Finds directional derivative of given function
    f - function
    var - list of variables(type - Symbol)
    l - direction(given as an vector)
    p - point(type = sympy.Point)
    """

    # Вычисляем градиент
    grad = []
    for i in range(len(var)):
        grad.append(diff(f, var[i]).subs({var[i]:p[i]}))

    # Вычисляем направляющие косинусы
    cos = []
    temp = sum(i**2 for i in l)**(1/2)
    for i in range(len(l)):
        cos.append(l[i]/temp)

    # Вычисляем производную по направлению
    d = 0
    for i in range(len(grad)):
        d += grad[i]  * cos[i]
    return d
```

3) Функция для определения касательных гиперплоскостей и нормалей по заданному уравнению отсутствует в библиотеках *Sympy* и *Scipy*, мы рекомендуем вам использовать приведенную ниже функцию.

```
def tangent_plane(f, var, p):
    """
    Finds the equations of the tangent plane and normal to the surface
    f - function
    var - list of variables
    p - point(type = sympy.Point)
    """

    # Вычисляем градиент функции в точке p
        grad = []
        for i in range(len(var)):
            grad.append(diff(f, var[i]).subs({var[i]:p[i]}))

        # Нормальный вектор плоскости
        n = Point(*grad)

        # Касательная проходит через точку p с нормальным вектором n
        tangent = Plane(p, normal_vector = n).equation()

        # Нормаль проходит через точку p и точку k = p + n
        k = Point(*[n[i] + p[i] for i in range(len(n))])
        l_n =Line(p, k).arbitrary_point()
        norm = ""
        for i in range(len(l_n)):
            norm += f"{var[i]} = {l_n[i]}; "
        return f"tangent_plane - {tangent} = 0", f"normal - {norm}t ∈ R"
```

4) Функции для нахождения критических точек и значений A и Δ отсутствуют в библиотеке *Sympy*. Мы предлагаем вам использовать приведенные ниже функции.

I. Нахождение критических точек

```
def critical_points(f):
    """
    Finds critcal points, A and Delta for function f(x, y)
    f - function
    """

    # Вычисляем градиент функции
    f_x = diff(f, x)
    f_y = diff(f, y)

    # Ищем критические точки, приравнивая производные к нулю
    cr_point = solve([f_x, f_y], [x, y] , dict = True)

    # Вычислим A и delta
    A = diff(f, x, 2)
    B = diff(f, x, y)
    C = diff(f, y, 2)

    # Вычислим delta
    D = A*C - B**2
    return cr_point, A, D
```

II Вычисление A и Δ

```
def suff_indic(A, D, cr_point):
    """
    Finds values of A and D in given critical point
    A, D - functions of two variables
    cr_points - dictionary with coordinates of critical points
    """
    return A.subs(cr_point), D.subs(cr_point)
```

5) Для вычисления экстремумов функции от нескольких переменных удобнее всего использовать приведенные выше функции и далее проверять все критические точки вручную.

Практические задания по теме «Частные производные. Градиент. Производная по направлению. Касательная плоскость. Экстремумы функции многих переменных. Условный экстремум», решенные с применением языка *Python*.

1) Вычислить частные производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ функции $z = xy^2 + e^{-x}$.

```
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
z = x*y**2 + exp(-x)
print(diff(z, x, 2)) # Вторая производная по переменной x
print(diff(z, y, 2)) # Вторая производная по переменной y

Output: exp(-x), 2*x
```

2) Вычислить частную производную $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2 \partial y}$ функции $z = sin\, x\, cos\, y$.

```
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
z = sin(x) * cos(y)
print(diff(z, x, 2, y)) #Для x порядок производной - 2, для y - 1

Output: sin(x) * sin(y)
```

3) Вычислить градиент функции $z = 5\, ln(x^2 + y^2)$ в точке $M(1; 2)$.

```
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
z = 5 * log(x**2 + y**2)
dx = diff(z, x).subs({x:1, y:2})
dy = diff(z, y).subs({x:1, y:2})
```

```
grad_f = f"gradf = {dx}i + {dy}j = ({dx},{dy})"
print(grad_f)

Output: gradf = 2i + 4j = (2,4)
```

4) Найти производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $M(1;1)$ по направлению вектора $\vec{l} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$.

```
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
f = x**2 + y**2
diff_direct(f,[x,y],[3,4],(1,1))

Output: 2,8
```

5) Провести касательную плоскость и нормаль к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ в точке $M(1;1;1)$.

```
from sympy import *
x, y, z = symbols("x y z")
f = x**2 + y**2 + z**2 - 9
tangent_plane(f, [x, y, z], Point(1,1,1))цц

Output: 'tangent_plane - 2*x + 2*y + 2*z - 6 = 0',
 'normal - x = 2*t + 1; y = 2*t + 1; z = 2*t + 1; t ∈ R'
```

6) Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

```
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
z = x**4 + y**4 - 2 * x**2 + 4*x*y - 2 * y**2
cr_p, A, D = critical_points(z)
for i in range(len(cr_p)):
    extr = suff_indic(A,D, cr_p[i])
    if type(extr[0]) == Integer and extr[0] > 0 and extr[1] > 0:
        print(z.subs(cr_p[i])))

Output: - 8
```

Дополнительное задание:

1) Реализовать функцию, вычисляющую градиент по переданным функции и списку переменных.
2) Реализовать функцию, вычисляющую экстремумы функции с дополнительным условием связи переменных по переданным функции, списку переменных и условию.

Примечание: Используйте функцию Лагранжа.

Лабораторная работа № 4. Интегралы. Неопределенный и определенный интегралы. Несобственный интеграл. Кратные интегралы.

Цель работы: обучить учеников вычислять неопределенный и определенный интегралы, дать понятие и механизм вычисления несобственного интеграла, методы вычисления кратных интегралов классическим способом, а также с помощью применения компьютерных технологий.

Теоретический материал по теме «Интегралы. Неопределенный и определенный интегралы. Несобственный интеграл. Кратные интегралы».

Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ называется совокупность всех ее первообразных. Обозначение:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $F'(x) = f(x)$.

Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков $(max\,\Delta\,x_k)$ стремится к нулю:

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k)\Delta x_k .$$

Числа a и b соответственно называются *нижним и верхним пределами интегрирования*.

Формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Интегрирование по частям:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu,$$

где $u = u(x),\ v = v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[a; b]$.

Несобственными интегралами называются: 1) интегралы с бесконечными пределами; 2) интегралы от неограниченных функций.

Несобственный интеграл от функции $f(x)$ в пределах от a до $+\infty$ определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Аналогично определяются интегралы от $-\infty$ до b, и от $-\infty$ до $+\infty$.

Несобственный интеграл называется *сходящимся*, если указанный предел существует, в противном случае интеграл называется *расходящимся*.

Если при $max\ d_k \to 0$ интегральная сумма имеет определенный конечный предел, не зависящий от способа разбиения области D на элементарные области и от выбора точек P_k в пределах каждой из них, то этот предел называется *двойным интегралом* от функции $f(x;y)$ в области D и обозначается следующим образом:

$$I=\iint_D f(x,y)d\sigma=\lim_{\max d_k\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varsigma_k,\eta_k)\Delta\sigma_k,$$

где $d\sigma$ – элемент площади.

Практические задания по теме «Интегралы. Неопределенный и определенный интегралы. Несобственный интеграл. Кратные интегралы», решенные классическими методами математического анализа.

1)$\int 6x^5dx=\frac{6x^6}{6}+C=x^6+C.$

2)Найти $\int\frac{x}{x+2}dx.$

Решение.

$\int\frac{x}{x+2}dx=\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx=\int 1dx-2\int\frac{dx}{x+2}=x-2\ln|x+2|+C.$

3)Найти $\int xe^{2x}dx.$

Решение.

$\int xe^{2x}dx=\begin{bmatrix} u=x;\ du=dx; \\ dv=e^{2x}dx;\ v=\frac{1}{2}e^{2x}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C.$

4) $\int_0^4 6x^5dx=x^6|_0^4=4^6-0=4096.$

5)$\int_1^3\frac{x}{x+2}dx=(x-2\ln|x+2|)|_1^3=3-2\ln 5-1+2\ln 3=2-2\ln 5+2\ln 3=2(1-\ln 5+\ln 3)=2\left(1+\ln\frac{3}{5}\right).$

6) $\int_1^{+\infty} x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

7) $\int_{-1}^{+\infty} e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}\Big|_{-1}^{+\infty} = 0 + \frac{1}{2}e^2 = \frac{1}{2}e^2$.

8) Вычислить двойной интеграл от функции $f(x;y) = 3x^2 + xy$ по области D: $1 \le x \le 5;\ 2 \le y \le 4$.

Решение. $\iint_D (3x^2 + xy)dxdy = \int_1^5 dx \int_2^4 (3x^2 + xy)dy = 320$.

Упражнения для самостоятельного решения.

1) Найти интеграл $\int e^{3\cos x} \sin x\, dx$.

2) Найти интеграл $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{x^{10}-2}}$.

3) Вычислить интеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

4) Вычислить интеграл $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx$.

5) Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ (или установить его расходимость).

6) Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 4x - x^2$ и осью Ox.

7) Вычислить $\iint_D (x - y)dxdy$, если область D ограничена линиями $y = 2 - x^2,\ y = 2x - 1$.

Python.

1) Для вычисления неопределенных интегралов удобнее всего использовать функцию *integrate (f(x), x)*, где *f(x)* – подынтегральная функция, *x* – переменная интегрирования.

2) Функция *integrate* может использоваться и для вычисления определённых интегралов. Синтаксис функции для вычисления определенного интеграла: *integrate (f(x), (x, a, b))*, где *f(x)* –

подынтегральная функция, x – переменная интегрирования, a и b – верхняя и нижняя границы интегрирования.

3) Для вычисления кратных интегралов по области удобнее всего использовать ту же функцию *integrate*, но несколько раз. Пример: найти $\iint(y^2 * x - 2xy)dxdy$, где $x \le y \ \le 2;\ -1 \le x \le 2$.

```
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
i = integrate(y**2*x - 2*x*y, (y, x, 2))
print(integrate(i, (x, -1, 2)))

Output: -9/20
```

Практические задания по теме «Интегралы. Неопределенный и определенный интегралы. Несобственный интеграл. Кратные интегралы», решенные с применением языка *Python*.

1) Найти $\int 6x^5dx$.

```
from sympy import *
x = symbols("x")
print(f"{integrate(6*x**5, x)} + C")

Output: x**6 + C
```

2) Найти $\int \frac{x}{x+2}dx$.

```
from sympy import *
x = symbols("x")
print(f"{integrate(x/(x+2), x)} + C".replace("log",
"ln"))

Output: x - 2*ln(x + 2) + C
```

3) Найти $\int xe^{2x}dx$.

```
from sympy import *
x = symbols("x")
print(f"{integrate(x * exp(2*x), x)} + C")

Output: (2*x - 1)*exp(2*x)/4 + C
```

4) Вычислить $\int_0^4 6x^5dx$.

```
from sympy import *
```

```
x = symbols("x")
print(f"{integrate(6 * x ** 5, (x, 0, 4))}")

Output: 4096
```

5) Вычислить $\int_1^3 \frac{x}{x+2} dx$.

```
from sympy import *
x = symbols("x")
print(f"{integrate(x/(x+2), (x, 1, 3))}".replace("log",
"ln"))

Output: -2*ln(5) + 2 + 2*ln(3)
```

6) Вычислить $\int_1^{+\infty} x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3}\Big|_1^{+\infty} = -\frac{1}{3x^3}\Big|_1^{+\infty} = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

```
from sympy import *
x = symbols("x")
print(f"{integrate(x**(-4),(x, 1, oo))}")

Output: 1/3
```

7) Вычислить $\int_{-1}^{+\infty} e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}\Big|_{-1}^{+\infty} = 0 + \frac{1}{2} e^2 = \frac{1}{2} e^2$.

```
from sympy import *
x = symbols("x")
print(f"{integrate(exp(-2 * x),(x, -1, oo))}")

Output: exp(2)/2
```

8) Вычислить двойной интеграл от функции $f(x; y) = 3x^2 + xy$ по области D: $1 \le x \le 5;\ 2 \le y \le 4$.

```
from sympy import *
x, y = symbols("x y")
i = integrate(3 * x ** 2 + x * y, (y, 2, 4))
print(integrate(i, (x, 1, 5)))

Output: 320
```

Лабораторная работа № 5. Применение интегралов. Площади фигур. Объемы тел вращения. Длина дуги.

Цель работы: обучить учеников применять определенный интеграл Римана для практических приложений: вычисления площадей фигур, объемов тел, длин дуг как по классической схеме анализа, так и с помощью компьютерных технологий.

Теоретический материал по теме «Применение интегралов. Площади фигур. Объемы тел вращения. Длина дуги».

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$, прямыми $x = a$ и $x = b$, отрезком $[a; b]$ оси Ox, вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$.

Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $f_1(x) \leq f_2(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, осью Ox, находится по формуле $V = \pi \int_a^b y^2 dx$.

Длина дуги кривой $y = f(x)$, заданной в пределах от $x = a$ до $x = b$, находится по формуле $l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$.

Практические задания по теме «Применение интегралов. Площади фигур. Объемы тел вращения. Длина дуги», решенные классическими методами математического анализа.

1) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x,\ y = -x^2 + 7x - 6$.

Решение.

$$\int_2^3 (-x^2 + 7x - 6 - 2x)dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 6x\right)\Bigg|_2^3 =$$

$$= -\frac{27}{3} + \frac{45}{2} - 18 + \frac{8}{3} - \frac{20}{2} + 12 = \frac{1}{6}.$$

2) Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y = x^2 - x$ и
$y = 0$ при $x \in [2; 4]$.

Решение.

$$V = \pi \int_2^4 (x^2 - x)^2 dx = \pi \int_2^4 (x^4 - 2x^3 + x^2) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^4 = \pi \left(\frac{4^5}{5} - \frac{4^2}{2} + \frac{4^3}{3} \right) - \pi \left(\frac{2^5}{5} - \frac{2^4}{2} + \frac{2^3}{3} \right) = \frac{1456}{15} \pi.$$

3) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x-1)^3$ и прямой $x = 2$.

Решение.

$V = \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 (x-1)^3 dx = \frac{1}{4} \pi (x-1)^4 |_1^2 = \frac{1}{4} \pi$ (куб. ед.).

4) Найти длину дуги цепной линии $y = a \cdot ch \frac{x}{a}, \ -a \le x \le a.$

Решение.

$l = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + y'^2} dx = 2 \int_0^a ch \frac{x}{a} dx = 2a \cdot sh \frac{x}{a} \Big|_0^a = 2a \cdot sh 1.$

Упражнения для самостоятельного решения.

1) Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

а) $y = -x^2, \ x + y + 2 = 0;$

б) $y = \frac{16}{x^2}, \ y = 17 - x^2$ (1 четверть);

в) $y^2 = 4x^3, \ y = 2x^2;$

г) $y = sin\, x\,, \ y = cos\, x\,, \ x = 0.$

2) Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигур, ограниченных линиями:

а) $y = \frac{64}{x^2 + 16}, \ x^2 = 8y;$

б) $y^2 = x, \ x^2 = y;$

в) $y = \sqrt{x}e^x,\ x = 1,\ y = 0$;

г) $y = \frac{x^2}{2},\ y = \frac{x^3}{8}$.

3) Найти объем тела, ограниченного плоскостями $x = 1,\ x = 3$, если площадь его поперечного сечения обратно пропорциональна квадрату расстояния сечения от начала координат, а при $x = 2$ площадь сечения равна 27 (кв. ед.).

4) Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{1}{3}\sqrt{(2x-1)^3}$ между точками M_1 и M_2 с абсциссами $x_1 = 2$ и $x_2 = 8$.

5) Вычислить длину дуги $y = \frac{4}{3}x$, заключенной между точками с абсциссами $x_1 = 2$ и $x_2 = 5$.

6) Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$ от точки с абсциссой $x_1 = 1$ до точки с абсциссой $x_2 = 9$.

Python.

Один из способов решения задач на применение интегралов является использование формул и затем вычисление интегралов с помощью функции *integrate* библиотеки *Sympy* (см. теоретические материалы к лабораторной работе №4).

Практические задания по теме «Применение интегралов. Площади фигур. Объемы тел вращения. Длина дуги», решенные с применением языка *Python*.

1) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x,\ y = -x^2 + 7x - 6$.

```python
from sympy import *
x = symbols("x")
# Найдём точки пересечения
f1 = 2 * x
f2 = - x ** 2 + 7 * x - 6
points = solve(f1 - f2, x)

# Вычислим площадь, используя определённый интеграл
```

```
s = integrate(f2 - f1, (x, *points))
    print(s)

Output: 1/6
```

2) Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной линиями $y = x^2 - x$ и

$y = 0$ при $x \in [2; 4]$.

```
from sympy import *
x = symbols("x")
# Воспользуемся формулой для объёма тела вращения
f = x ** 2 - x
v = pi * integrate(f ** 2, (x, 2, 4))
print(v)

Output: 1456□/15
```

3) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривой $y^2 = (x-1)^3$ и прямой $x = 2$.

```
from sympy import *
x = symbols("x")
# Воспользуемя формулой для объёма тела вращения
f = (x - 1)**3
v = pi * integrate(f, (x, 1, 2))
print(v)

Output: □/4
```

4) Найти длину дуги цепной линии $y = a \cdot ch\frac{x}{a}$, $-a \leq x \leq a$.

```
from sympy import *
x, a= symbols("x a")
f = a * cosh(x/a)
l = 2 * integrate(cosh(x/a), (x, 0, a))
print(l)

Output: 2a*sh(1)
```

Лабораторная работа № 6. Комплексные числа и операции над ними.

Цель работы: познакомить учащихся с основными операциями над комплексными числами, применением комплексных чисел при решении уравнений.

Теоретический материал по теме «Комплексные числа и операции над ними».

Комплексные числа – это числа вида $x = a + bi$ (*алгебраическая форма записи*), где $a, b \in R,\ i^2 = -1,\ a$ – действительная часть $Re(x)$, b – мнимая часть числа $Im(x)$. В полярных координатах $x = (r, \varphi)$, где модуль $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, аргумент или фаза φ – это угол, такой, что $cos\,\varphi = \frac{a}{r},\ sin\,\varphi = \frac{b}{r},\ x = r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)$ – *тригонометрическая форма записи комплексного числа*.

Основные операции над комплексными числами:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 + \varphi_2));$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\,sin(\varphi_1 - \varphi_2));$$

$$z^n = r^n(cos\,n\,\varphi + i\,sin\,n\,\varphi);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\,sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Практические задания по теме «Комплексные числа и операции над ними», решенные классическими методами математического анализа.

1) Вычислите $(1 + 3i)(2 - i) + \frac{10}{1-2i} + (-1 - i)^2$.

Решение.

$(1 + 3i)(2 - i) = 2 - i + 6i + 3 = 5 + 5i$,

$\frac{10}{1-2i} = \frac{10(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{10(1+2i)}{1+4} = 2(1 + 2i) = 2 + 4i$,

$(-1 - i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i$.

Окончательно, $5 + 5i + 2 + 4i + 2i = 7 + 11i$.

2) Решите уравнение $x^2 - 2x + 5 = 0$.

Решение.

$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16$,

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$.

3) Найти модуль и аргумент комплексного числа $z = 2 + 2\sqrt{3}i$.

Решение.

$|z| = \sqrt{2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4, tg\varphi = \frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \ \varphi = \frac{\pi}{3}$.

4) Пусть $z_1 = -4 - 9i,\ z_2 = 1 - 8i$. Вычислите $\frac{z_1 - \overline{z_2}}{\overline{z_1} + z_2}$.

Решение.

$\overline{z_1} = -4 + 9i,\ \overline{z_2} = 1 + 8i$, тогда находим

$\frac{z_1 - \overline{z_2}}{\overline{z_1} + z_2} = \frac{-4 - 9i - (1 + 8i)}{-4 + 9i + 1 - 8i} = \frac{-5 - 17i}{-3 + i} = \frac{(-5 - 17i)(-3 - i)}{(-3 + i)(-3 - i)} = \frac{15 + 5i + 51i - 17}{9 + 1} = \frac{-2 + 56i}{10} =$
$-\frac{1}{5} + \frac{28}{5}i$.

5) Приведите число $z = -3 + 3\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

Решение.

$|z| = \sqrt{9 + 27} = 6, \quad tg\varphi = \frac{3\sqrt{3}}{-3} = -\sqrt{3} \Rightarrow \ \varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Значит, $z = 6\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

6) Вычислите значение многочлена $P(z) = (1 + 3i)z^2 + (-5 + 6i)z + 2 - i$ в точке $z = 1 + 2i$.

Решение.

$P(1 + 2i) = (1 + 3i)(1 + 2i)^2 + (-5 + 6i)(1 + 2i) + 2 - i =$

$= (1 + 3i)(1 + 4i - 4) + (-5 - 10i + 6i - 12) + 2 - i =$

$= (1 + 3i)(-3 + 4i) - 17 - 4i + 2 - i = -3 + 4i - 9i - 12 - 15 - 5i = -30 - 10i$.

Упражнения для самостоятельного решения.

1) Вычислите значение выражения $\frac{7-3i}{i-4}$ и представьте результат в виде $a+bi$.

2) Вычислите значение многочлена $P(z)=(-1-3i)z^2+(6-i)z+(1-2i)$ в точке $z=2+6i$.

3) Пусть $z_1=-1+9i,\ z_2=-1-5i$. Вычислите $\frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_1+z_2}$.

4) Вычислите модуль и аргумент числа $z=8i$.

5) Найдите комплексные корни $x^2-12x+45=0$.

6) Составьте квадратное уравнение с действительными коэффициентами, одним из корней которого является число $z=-2-5i$. Сколько существует таких уравнений?

7) Найдите все корни уравнения

$z^4-z^3-32z^2-62z-56=0$, если известно, что $z_1=-1-i$ один из его корней.

Python.

В *Python* есть два способа создать комплексное число: используя класс *complex* или напрямую.

```
a = complex(2, 3)
a = 2 + 3j
```

Для получения действительной части числа нужно использовать *number.real*, для получения комплексной части – *number.imag*.

```
a = 2 + 3j
print(a.real)
print(a.imag)

Output: 2; 3.
```

Для получения сопряженного комплексного числа удобно использовать метод *conjugate()*.

```
a = 2 + 3j
print(a.conjugate())

Output: 2 - 3j
```

Все арифметические операции аналогичны операциям с действительными числами. Одна из самых удобных библиотек для работы с комплексными числами - *cmath*. Она содержит тригонометрические, гиперболические, экспоненциальные и логарифмические функции для комплексных чисел. Также, там есть функции для перехода к полярным координатам.

Практические задания по теме «Комплексные числа и операции над ними», решенные с применением языка *Python*.

1) Вычислите $(1+3i)(2-i)+\frac{10}{1-2i}+(-1-i)^2$.

```
x = complex(1, 3)
y = complex(2, -1)
g = complex(1, -2)
h = complex(-1, -1)
print(f"{x * y + 10/g + h**2}".strip("()"))

Output: 7 + 11j
```

2) Решите уравнение $x^2-2x+5=0$.

```
import math
from sympy import *
x = symbols("x")
print(f"{solve(x**2 - 2 * x + 5)}".replace("I", "j"))

Output: [1 - 2*j, 1 + 2*j]
```

3) Найти модуль и аргумент комплексного числа $z=2+2\sqrt{3}i$.

```
import cmath
z = complex(2, 2*sqrt(3))
print(round(abs(z)))
print(f"{cmath.phase(z)/math.pi}π")

Output: 4
0.3333333333333333π
```

4) Пусть $z_1=-4-9i,\ z_2=1-8i$. Вычислите $\frac{z_1-\overline{z_2}}{\overline{z_1}+z_2}$.

```
import cmath
z1 = complex(-4, -9)
z2 = complex(1, -8)
```

```
res = complex(z1 - conjugate(z2))/complex(conjugate(z1) + z2)
print(f"{round(res.real, 2)} + {round(res.imag, 2)}j")

Output: -0.2 + 5.6j
```

5) Приведите число $z = -3 + 3\sqrt{3}i$ к тригонометрическому виду.

```
import math
v = complex(-3, 3 * sqrt(3))
r = int(abs(v))
ang = atan(v.imag/v.real)/math.pi + 1
print(f"{r}(cos({ang}π) + sin({ang}π) * j")

Output: 6(cos(0.6666666666666667π) + sin(0.6666666666666667π) * j
```

6) Вычислите значение многочлена $P(z) = (1 + 3i)z^2 + (-5 + 6i)z + 2 - i$ в точке $z = 1 + 2i$.

```
import cmath
z = complex(1, 2)
p = (1 + 3j)*z**2 + (-5 +6j)*z + 2 - 1j
print(p)

Output: -30 - 10j
```

ПРИЛОЖЕНИЕ.

***Matplotlib*:**

matplotlib - один из наиболее популярных пакетов для построения графиков.

- *matplotlib inline* --- специальная *ipython* команда, которая позволяет отображать графики прямо в *jupyter notebook.*

- Некоторые основные команды для рисования графиков:

*plt.scatter(x, y, *args)* — нарисовать точки с координатами из x по горизонтальной оси и из y по вертикальной оси.

*plt.plot(x, y, *args)* — нарисовать график по точкам с координатами из x по горизонтальной оси и из y по вертикальной оси. Точки будут соединятся в том порядке, в котором они указаны в этих массивах.

plt.contour(x1, x2, y, lines) — нарисовать линии уровня.

- Вспомогательные функции:

plt.figure(figsize=(x, y)) — создать график размера (x,y).

plt.show() — показать график.

plt.xlim(x_min, x_max) — установить пределы графика по горизонтальной оси.

plt.ylim(y_min, y_max) — установить пределы графика по вертикальной оси.

plt.title(name) — установить имя графика.

plt.xlabel(name) — установить название горизонтальной оси.

plt.ylabel(name) — установить название вертикальной оси.

plt.legend() — сделать легенду.

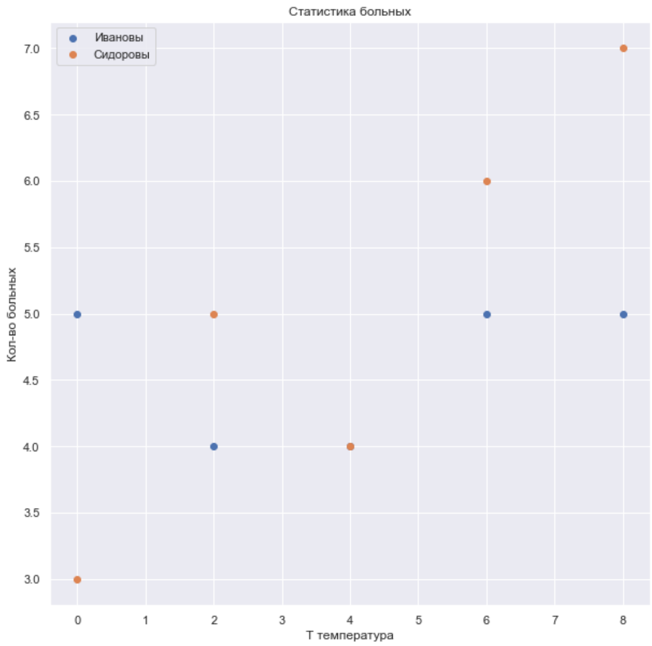
plt.grid() — добавить сетку на график.

plt.savefig(filename) — сохранить график в файл.

```
# для отображения в notebook
%matplotlib inline
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

sns.set()

# установим фиксированный размер наших графиков
    from pylab import rcParams
    rcParams['figure.figsize'] = 10, 10

    # для того, чтобы не засорять вывод предупреждениями
    import warnings
    warnings.filterwarnings('ignore')
```

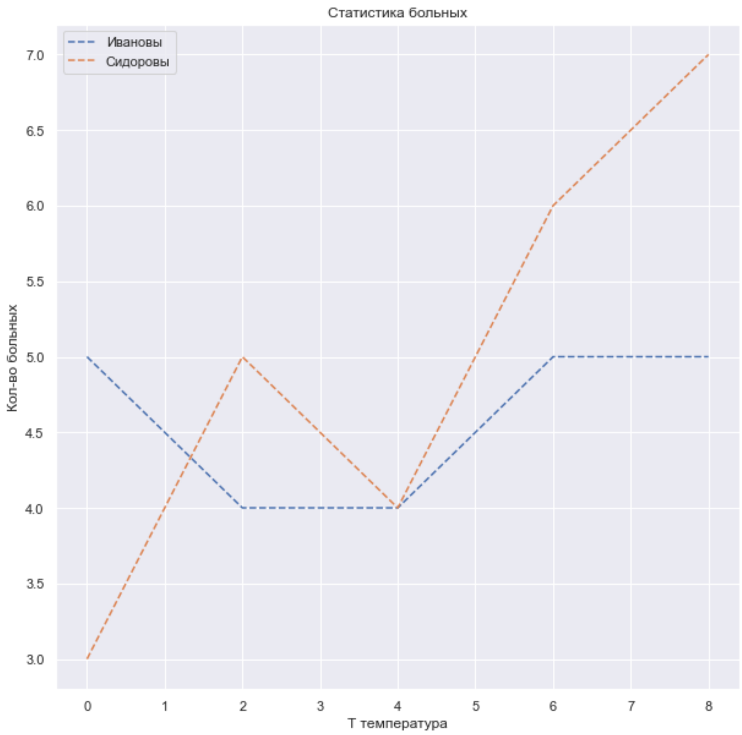
Сейчас пора, когда многие болеют. Построим зависимость числа больных в семье Ивановых и Сидоровых от температуры на улице. Мы имеем дискретное распределение, поэтому самое напрашивающееся представление — это обычные точки.

```
np.random.seed(42)
family_ivan = np.random.poisson(5, 5)
family_sid = np.random.poisson(5, 5)

x = np.arange(0, 10, 2)
plt.scatter(x, family_ivan, label='Ивановы')
plt.scatter(x, family_sid, label='Сидоровы')
plt.title('Статистика больных')
plt.ylabel('Кол-во больных')
plt.xlabel('Т температура')
plt.legend()
plt.show()
```



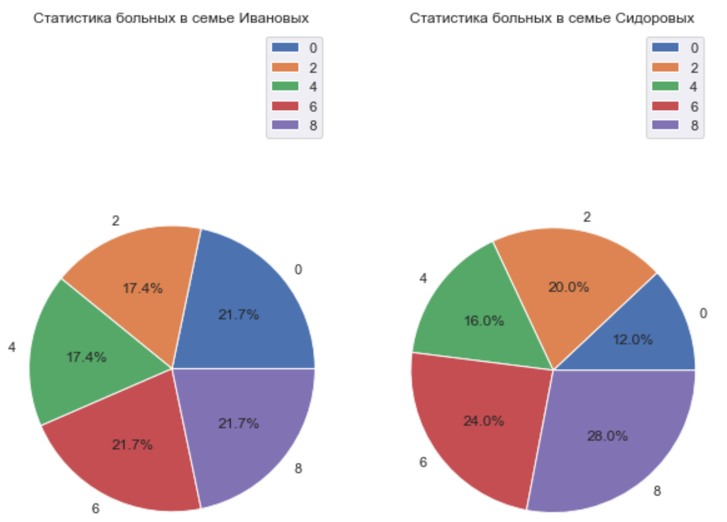
Чтобы отследить зависимость лучше, воспользуемся непрерывным представлением.

```
plt.plot(x, family_ivan, '--', label='Ивановы')
plt.plot(x, family_sid, '--', label='Сидоровы')
plt.title('Статистика больных')
plt.ylabel('Кол-во больных')
plt.xlabel('Т температура')
plt.legend()
plt.show()
```



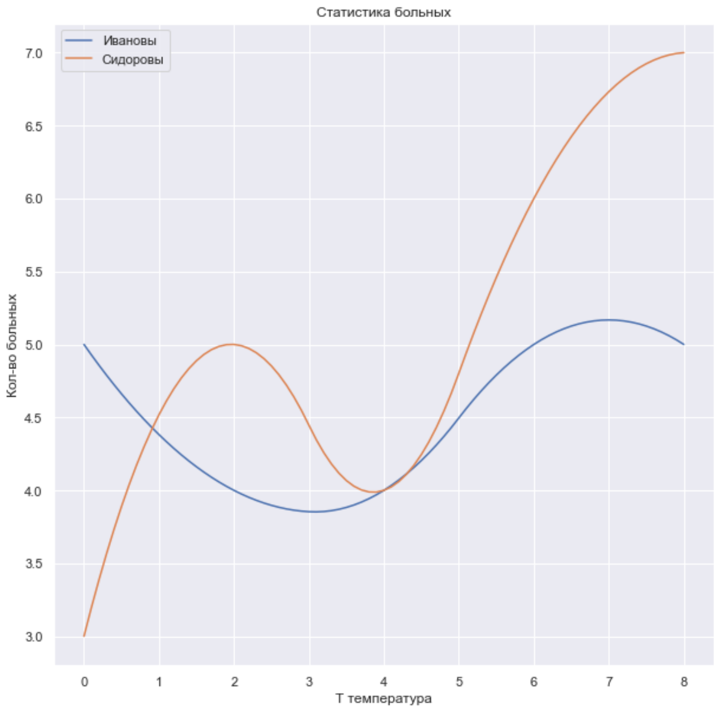
Можно попробовать нарисовать статистику в виде круговой диаграммы. Заодно посмотрим, как на одной фигуре отрисовать несколько графиков.

```
plt.subplot(1, 2, 1)
plt.pie(family_ivan, labels=x, autopct='%1.1f%%')
plt.axis('equal')
plt.title('Статистика больных в семье Ивановых')
plt.legend()
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.pie(family_sid, labels=x, autopct='%1.1f%%')
plt.axis('equal')
plt.title('Статистика больных в семье Сидоровых')
plt.legend()
plt.show()
```



Давайте функции зависимости сделаем более гладкими. Отобразим получившиеся функции.

```
from scipy.interpolate import interp1d
f_ivan = interp1d(np.arange(0, 10, 2), family_ivan, kind='quadratic', fill_value="extrapolate")
f_sid = interp1d(np.arange(0, 10, 2), family_sid, kind='quadratic', fill_value="extrapolate")
xnew = np.arange(0, 8.1, 0.1)
ynew_ivan = f_ivan(xnew)
ynew_sid = f_sid(xnew)
plt.plot(xnew, ynew_ivan, label='Ивановы')
plt.plot(xnew, ynew_sid, label='Сидоровы')
plt.title('Статистика больных')
plt.ylabel('Кол-во больных')
plt.xlabel('Т температура')
plt.legend()
plt.show()
```



В *Matplotlib* также можно строить фигуры или параметрические линии $x = x(t)$, $y = y(t)$. Много примеров различных графиков содержится на сайте https://matplotlib.org/gallery.html .

Seaborn (оф. сайт: https://seaborn.pydata.org/) - это библиотека, которая написана поверх *matplotlib*, её удобно использовать, так как она проще в изучении и применении.

Рекомендуемые ресурсы:

- https://seaborn.pydata.org/tutorial.html - официальные обучающие документы.
- https://habr.com/ru/company/ods/blog/323210/ - статья на *Habr.com*.

Plotly (оф сайт: https://plot.ly/) - еще одна библиотека для рисования графиков.

Рекомендуемые ресурсы:

- https://plot.ly/python/ - официальные обучающие документы.
- https://towardsdatascience.com/the-next-level-of-data-visualization-in-python-dd6e99039d5e - статья на *medium*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одной из главных задач школы является развитие у учащихся познавательных интересов, творческого отношения к делу, стремления к самостоятельному «добыванию» и расширению знаний и умений, совершенствованию умения применять их в своей практической деятельности. Поскольку подавляющее число учеников будут использовать математику для практических целей, можно точно сказать, что математику следует преподавать на уровне школы в первую очередь в качестве практического предмета, а не абстрактного.

Выводы проведенного исследования:

1. Одним из средств повышения эффективности урока математики являются лабораторно-практические работы – работы, предполагающие выполнение определенных практических заданий, которые помогают учащимся воспринимать и осмысливать новый учебный материал или закрепить полученные ранее знания. Проведение лабораторных и практических работ вносит разнообразие в уроки математики; повышает активность и самостоятельность учащихся; улучшает качество знаний учащихся по предмету; делает абстрактные теоретические положения понятными, доступными, наглядными. При правильной организации работ воспитывается культура труда, привычка к систематическому труду, уважение к работе, стремление к познанию и постоянному совершенствованию полученных знаний и навыков. Изящно выполненная работа способствует развитию чувства красоты, удовлетворенности от проделанной работы.

2. Анализ имеющейся на данный момент тематики лабораторно-практических работ показывает, что больший уклон авторы учебников

делают на работу с геометрическими понятиями (с такими как угол, многоугольник, геометрические тела, центральная и осевая симметрия и другие), что объясняется наглядностью рассматриваемой темы. Разработок по основным темам математического анализа (предел, непрерывность, производная, интеграл и другим) в виде практических работ с использованием компьютерных технологий достаточно немного. Авторы настоящей работы постарались восполнить этот пробел, разработав примерный комплекс лабораторно-практических работ по основным темам математического анализа.

3. Согласно Федеральному государственному общеобразовательному стандарту выявлены такие основные требования к знаниям и умениям учащихся средней школы, как осознание значения математики в повседневной жизни человека; формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления; а также различные предметные требования в зависимости от класса и изучаемого предмета.

4. Основываясь на списке часто используемых тем и методических рекомендациях к разработке лабораторно-практических работ, были предложены методические рекомендации по организации и примеры лабораторно-практических работ по математическому анализу, как основной составляющей курса математики 10-11 классов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Криволапов С.Я., Хрипунова М.Б. Математика на *Python*: учебник. – Москва: КНОРУС, 2021.

2. Аммосова Н.В., Коваленко Б.Б. Практические работы по математике в учебной деятельности школьников [Электронный ресурс] // Актуальные проблемы современного образования. – 2015. - №2 (19). – с. 87-92. – Режим доступа: http: // *elibrary.ru*.

3. Широкова Е.А. Лабораторная работа как средство понимающего усвоения старшеклассниками понятий математического анализа [Текст] / Е.А. Широкова // Известия Российского государственного университета им. А.И. Герцена. – 2008. – №69. – с. 508-513.

4. Яковлев Ф.И., Кирюшкин Д.М., Воробьев Г.В. Лабораторно-практические работы учащихся. – М.: Изд-во АПН РСФСР, 1963. – 229 с.

5. Федеральные государственные стандарты общего образования [Электронный ресурс].

6. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. – М.: Высшая школа, 1999.

7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. Пособие для студентов вузов. В 2-ч. Части 1 и 2. – 4-е изд., испр. и доп. – М.: Высшая школа, 1986.