НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»
ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ТА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

КУРСОВА РОБОТА

з дисципліни **«Теорія ймовірностей»**

на тему: **«Випадкове блукання. Принцип віддзеркалення та закон арксинуса»**

Студентів 3-го курсу, групи ОМ-91, ОМ-92
Зінюк Софії Олександрівни,
Онищенко Вероніки Максимівни,
Ткаченко Анастасії Володимирівни,
Заколенко Ольги Констянтинівни,
Мізернюк Софії Владиславівни

Київ — 2021

Зміст

1 Вступ

Випадкове блукання — це математичний об'єкт, відомий як стохастичний або випадковий процес, який описує шлях, що складається з послідовних випадкових кроків у просторі простих чисел.

Цікаво буде детальніше ознайомитися з історією цієї теоритичної моделі у науці, адже це яскравий приклад корисної взаємодії та взаємного збагачення математики та інших наук. Першим важливим досягненням було пояснення броунівського руху.

Рис. 1: Роберт Браун.

У 1827 році шотландський біолог Роберт Браун, за допомогою мікроскопа, виявив явище хаотичного руху мікроскопічних частинок у порожнинах зерен пилку. Вчений вважав, що він відкрив «джерело життя», проте в результаті тривалих досліджень Браун дійшов іншого висновку: природа такого руху (названого зараз броунівським) — фізична, а не біологічна. Результати подальших експериментів виключили можливі причини такого руху: випаровування, перебіг рідини, світло, зовнішні вібрації тощо. Саме вивчення математичної моделі броунівського руху дозволило на початку XX століття отримати одне з перших підтверджень атомної теорії.

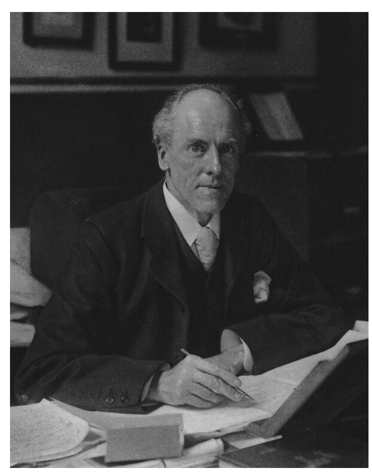

Рис. 2: Карл Пірсон.

Вперше термін випадкових блукань ввів Карл Пірсон у 1950 році. У журналі «Nature» він подав просту модель різкого збільшення кількості комарів у лісах. Пірсон хотів знайти причину поширення комарів шляхом дослідження випадкових кроків, які здійснювали комахи. За певний проміжок часу комарі долали певну фіксовану відстань під випадково обраним кутом. В тому ж році Альберт Ейнштейн опублікував свою основну роботу про броунівський рух, який він моделював як випадкове блукання, викликане зіткненнями з молекулами газу.

На відміну від фізичних експериментів, де кожна «зустріч» частинки з молекулою призводить до її зсуву в довільному напрямку на якусь відстань (рис.3), у математичній моделі розглядаються випадкові блукання точки на площині (рис.4).

Для спрощення вивчення моделі, передбачається, що поведінка частинки є менш хаотичною й більш передбачуваною: величина зсуву є постійною; напрямки зсуву — тільки сторони світу: північ, південь, схід, захід; за певний інтервал часу відбувається фіксована кількість зіткнень.

Класичний приклад випадкового блукання відомий як проста випадкова прогулянка, яка являє собою випадковий процес в дискретному часі з числами в просторі станів, і на основі процесу Бернуллі, де кожна змінна приймає додатне або від'ємне значення.

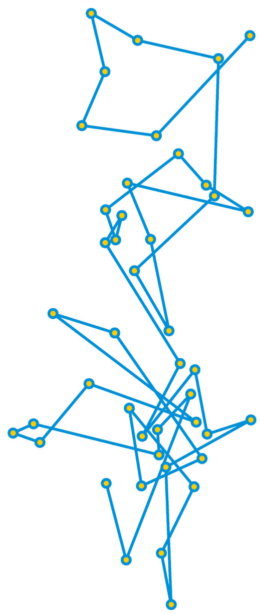

Рис. 3: Хаотичний рух частинки.

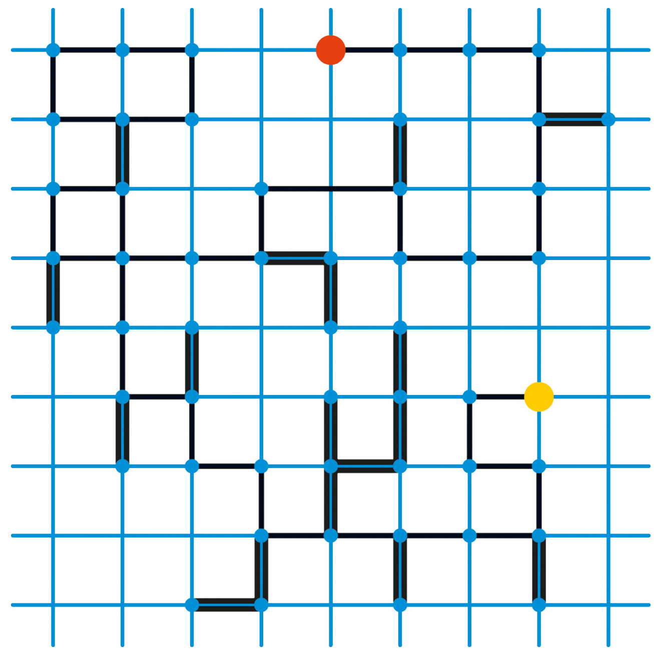

Рис. 4: Блукання з фіксованим зміщенням по сторонам світу.

2 Симетричне випадкове блукання. Принцип віддзеркалення

В теорії, випадкове блукання можна розлядати у просторі будь-якої розмірності. Проаналізуємо деякі параметри (характеристики) випадкових блукань, а саме, якщо ймовірність повернутися в нуль хоча б один раз дорівнює одиниці, то таке блукання називають рекурентним. Проте, якщо існує ненульовий шанс ніколи не повернутися у початкову точку, то таке блукання називають транзитивним.

Також випадкове блукання можна поділити на *симетричне* та *несиметричне*. Різниця полягає в тому, що в першому випадку ймовірність зробити крок у будь-якому напрямку є однаковою. Розглянемо найпростіший випадок — симетричне випадкове блукання на прямій, тобто у просторі розмірності 1. Нехай $\xi_1, \dots \xi_{2n}$ — це послідовність незалежних однаково розподілених бернулівських випадкових величин, тобто

$$\mathbf{P}\{\xi_i = 1\} = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}\{\xi_i = -1\} = \frac{1}{2}.$$

Позначимо $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k, \quad 1 \le k \le 2n$, тоді зрозуміло, що $S_0 = 0$. Цю суму можна розуміти як положення, в якому ми знаходимося на кроці $2n$.

Введемо також наступне позначення

$$\sigma_{2n} = \min\{1 \le k \le 2n : S_k = 0\}.$$

Сенс цієї величини наступний — це *момент першого повернення в нуль.*

Для $0 \le k \le n$ позначимо:

$$u_{2k} = \mathbf{P}\{S_{2k} = 0\}, \quad f_{2k} = \mathbf{P}\{\sigma_{2n} = 2k\}.$$

Різниця між цими величинами наступна: u_{2k} позначає ймовірність того, що на кроці $2k$ ми будемо у положенні нуль, тоді як f_{2k} — ймовірність того, що перше повернення в нуль відбудеться на кроці $2k$. Тоді стає зрозуміло, що $u_0 = 1$. Знайдемо u_{2k}.

Зрозуміло, що:

$$u_{2k} = C_{2k}^{k} \cdot 2^{-2k}.$$

Введемо наступне поняття, нехай послідовність $(S_0, \dots S_k)$ буде траєкторією довжини k, тоді через $L_k(A)$ позначимо кількість траєкторій довжини k, для яких виконується властивість A. Виведемо наступну формулу:

$$f_{2k} = \frac{1}{2k} \cdot u_{2(k-1)}. \tag{1}$$

Зрозуміло, що

$$\{\sigma_{2n} = 2k\} = \{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0\}, 1 \leq k \leq n,$$

за введеним означенням. Тоді в силу симетрії,

$$f_{2k} = \mathbf{P}\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0\} =$$
$$= 2\mathbf{P}\{S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 0\}.$$

Отже,

$$f_{2k} = 2 \sum_{\alpha_{2k+1},\ldots,\alpha_{2n}} L_{2n}(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 0, \ldots$$
$$\ldots, S_{2n} = \alpha_{2k+1} + \ldots + \alpha_{2n}) \cdot 2^{-2n} =$$
$$= 2L_{2k}(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 0) \cdot 2^{-2k}.$$

Цей перехід є еквівалентним, оскільки нас цікавить тільки шлях до першого повернення в нуль, а отже, шлях до кроку $2k$.

Проаналізувавши, робимо висновок, що для пошуку f_{2k}, нам потрібно підрахувати кількість траєкторій

$$L_{2k}(S_1 > 0, S_2 > 0, \ldots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 0).$$

Для досягнення потрібної цілі, розглянемо більш загальний випадок, коли потрібно на k-му кроці знаходитися у будь-якому конкретному положенні.

Лема 1. *Нехай a та b - цілі невід'ємні числа, $a - b > 0, k = a + b$. Тоді,*

$$L_k(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{k-1} \neq 0, S_{2k} = a - b) = \frac{a-b}{k} C_k^a$$

Доведення. Зазначимо, що наш перший крок є визначеним, ми обов'язково маємо зробити його у додатну сторону, за принципом симетрії. Зрозуміло, що шукана кількість траєкторій, тобто кількість траєкторій, що виходять з одиниці та приходить в $a - b$, це різниця між усіма можливими шляхами та траєкторіями, що перетинають нуль. Запишемо це наступним чином:

$$L_k(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{k-1} \neq 0, S_{2k} = a - b) =$$

$$= L_k(S_1 = 1, S_2 \neq 0, \ldots, S_{k-1} \neq 0, S_{2k} = a - b) = L_k(S_1 \neq 0, S_{2k} = a - b) -$$
$$- L_k(S_1 \neq 0, S_{2k} = a - b; \quad \exists i, 2 \leq i \leq k - 1 : S_i \leq 0).$$

Помітимо наступне: між траєкторіями, що починаються в точці $(1, 1)$ та приходять в точку $(k, a - b)$ і траєкторіями, що виходять з $(1, -1)$ та йдуть до $(k, a - b)$ існує взаємно однозначна відповідність, тобто їх кількість однакова. Цей факт носить назву *принцип віддзеркалення*. Нехай у нас є шлях $A = (S_1, \ldots, S_a, S_{a+1}, \ldots, S_k)$, що з'єднує точки α та β, та шлях $B = (-S_1, \ldots, -S_a, S_{a+1}, \ldots, S_k)$, що з'єднує точки $\alpha*$ та β. Причому a — точка, де шляхи A та B вперше повертаються в нуль. Покажемо на малюнку:

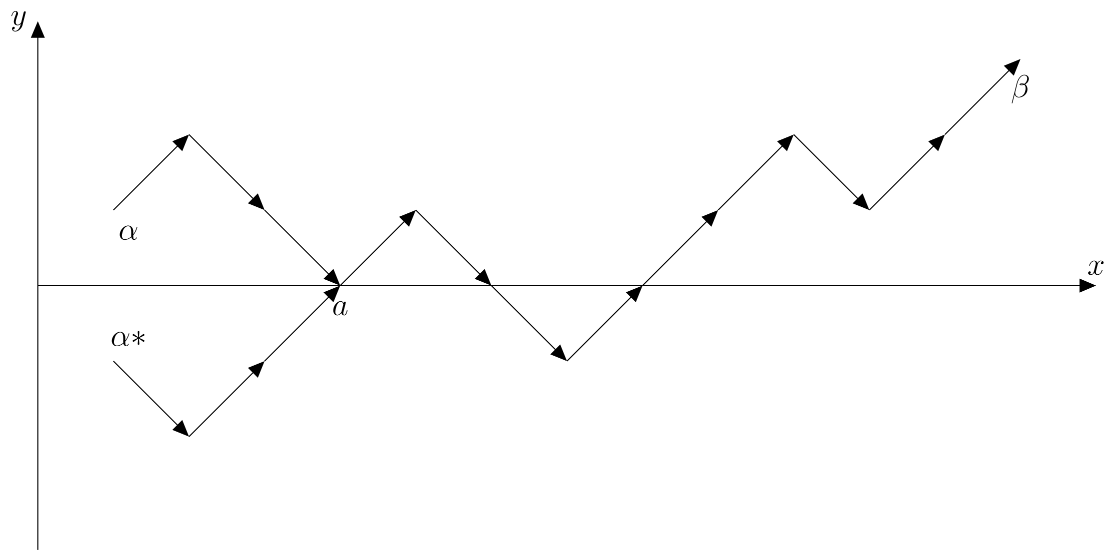

Рис. 5: Принцип віддзеркалення.

Отже,

$$L_k(S_1 > 0, \ldots, S_{k-1} > 0, S_k = a - b) = L_k(S_1 = 1, S_k = a - b) -$$
$$- L_k(S_1 = -1, S_k = a - b) = C_{k-1}^{((k-1)+(a-b-1))/2} - C_{k-1}^{((k-1)+(a-b+1))/2} =$$
$$= C_{k-1}^{a-1} - C_{k-1}^{a} = \frac{(k-1)!}{(a-1)!(k-a)!} - \frac{(k-1)!}{a!(k-a-1)!} =$$
$$= \frac{k!}{a!(k-a)!} \left(\frac{a}{k} - \frac{k-a}{k} \right) = C_k^a \left(\frac{a-b}{k} \right),$$

що і доводить твердження. □

Повертаючись до підрахунку ймовірності f_{2k}, знайдемо:

$$f_{2k} = 2L_{2k}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2k-1} \neq 0, S_{2k} = 0) \cdot 2^{-2k},$$

оскільки нам відомо, що останній крок переходить до 0, то очевидно, що він має відбуватися з положення 1.

$$2L_{2k-1}(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \ldots, S_{2k-1} = 1) \cdot 2^{-2k} = 2 \cdot 2^{-2k} \cdot C_{2k-1}^{k} \left(\frac{1}{2k-1} \right) =$$
$$= \frac{1}{2k} u_{2(k-1)}.$$

Що і доводить формулу (1).

Твердження. *Ймовірність того, що до моменту $2k$ включно не відбудеться жодного повернення в нуль, рівна ймовірності того, що повернення в нуль відбудеться в момент часу $2k$, тобто*

$$\mathbf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2k} \neq 0) = \mathbf{P}(S_{2k} = 0) = u_{2k}. \tag{2}$$

При виконанні події в лівій частині всі S_i або додатні, або від'ємні. Обидва ці випадки є рівноможливими, тому

$$2\mathbf{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{2k} > 0) = u_{2k}.$$

Доведення. Розглядаючи всі можливі значення S_{2k}, маємо

$$\mathbf{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{2k} > 0) = \sum_{l=1}^{k} \mathbf{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 2l).$$

Множина $(S_1 > 0, \ldots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 2l)$ є сукупністю траєкторій, що йдуть з точки $(1, 1)$ в точку $(2k, 2l)$, не перетинаючи нуль. Відповідно до принципу віддзеркалення, кількість таких траєкторій дорівнює різниці кількості усіх траєкторій, що йдуть з $(1, 1)$ в $(2k, 2l)$ та із точки $(1, -1)$ в $(2k, 2l)$, тобто

$$L_{2k}(S_1 > 0, \ldots, S_{2k-1} > 0, S_{2k} = 2l) = L_{2k}(S_1 = 1, S_{2k} = 2l) -$$
$$- L_{2k}(S_1 = -1, S_{2k} = 2l) = C_{2k-1}^{k+l-1} - C_{2k-1}^{k+l}.$$

Отже,

$$L_{2k}(S_1 > 0, \ldots, S_{2k} > 0) = \sum_{l=1}^{k} (C_{2k-1}^{k+l-1} - C_{2k-1}^{k+l}) = C_{2k-1}^{k} \Rightarrow$$

$$\mathbf{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{2k} \neq 0) = 2\mathbf{P}(S_1 > 0, \ldots, S_{2k} > 0) = 2C_{2k-1}^{k} \frac{1}{2^{2k}} =$$
$$= \frac{2(2k-1)!}{k!(k-1)!} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{1}{2^{2k}} = C_{2k}^{k} \frac{1}{2^{2k}} = u_{2k} = \mathbf{P}(S_{2k} = 0).$$

Твердження може бути переформульоване різними способами, зокрема

$$\mathbf{P}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2k} \geq 0) = u_{2k}.$$

Дійсно, додатна траєкторія (тобто $\forall i, 1 \leq i \leq 2k : S_i > 0$) довжиною $2k$ проходить через точку $(1,1)$, якщо ж обрати цю точку за новий початок координат, отримаємо невід'ємну траєкторію (тобто $\exists i, 1 \leq i \leq 2k : S_i = 0$) довжиною $2k-1$. Звідси

$$2\mathbf{P}(S_1 > 0, \dots, S_{2k} > 0) = \mathbf{P}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2k-1} \geq 0).$$

Але S_{2k-1} — непарне число, то відповідно, з нерівності $S_{2k-1} \geq 0$ слідує, що $S_{2k} \geq 0$, тобто

$$2\mathbf{P}(S_1 > 0, \dots, S_{2k} > 0) = \mathbf{P}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2k} \geq 0) = u_{2k}.$$

Геометрично доведення твердження можна пояснити наступним чином, а саме, показавши, взаємно однозначну відповідність між типами траєкторій.

Нехай $A = (S_0, \dots, S_{2k})$ — деяка траєкторія, що веде в точку $(2k, 0)$ (тобто $S_{2k} = 0$), $M = (l, -m)$ — точка першого мінімуму (рис. 6). Відобразимо ділянку $(S_0, \dots, S_l)$ відносно вертикальної прямої $x = l$ та змістимо віддзеркалену ділянку так, щоб її початкова точка співпала з точкою $(2k, 0)$. Якщо M прийняти за початок координат, то отримаємо нову додатну траєкторію A^* (рис. 7). Зауважимо, якщо для траєкторії A мінімум досягається лише один раз, то результатом перетворень буде додатна траєкторія, якщо ж мінімум досягається декілька разів — невід'ємна.

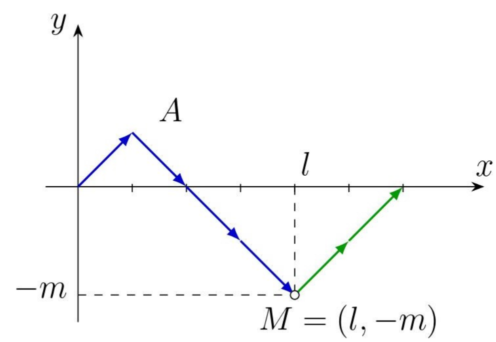

Рис. 6

Навпаки, нехай $A^* = (S_0, \dots, S_{2k})$ — деяка додатна траєкторія з $S_{2k} = 2m$, p — остання точка, де $S_p = m$ (рис. 7). Відобразимо ділянку $(S_p, \dots, S_{2m})$ відносно вертикальної прямої $x = p$ та змістимо віддзеркалену ділянку так, щоб її кінцева точка співпала з точкою $(0,0)$. Прийнявши лівий кінець отриманої траєкторії за початок координат, отримаємо траєкторію A, що має єдиний мінімум та $S_{2k} = 0$ (рис. 6). Відповідно, для невід'ємної траєкторії результат буде мати декілька мінімумів.

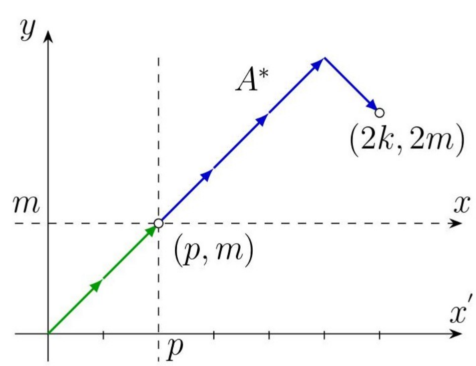

Рис. 7

Крім того, покажемо, що між невід'ємними та додатними траєкторіями можна також встановити взаємно однозначну відповідність.

Нехай $B = (S_1, \dots, S_{2k})$ — деяка невід'ємна траєкторія, для якої перше обернення в нуль відбувається в точці a (тобто $S_a = 0$). З точки $(a, 2)$ побудуємо траєкторію (на рис. 8 вона зображена штриховими лініями) $(S_a + 2, S_{a+1} + 2, \dots, S_{2k} + 2)$, в результаті $B^* = (S_1, \dots, S_{a-1}, S_a + 2, \dots, S_{2k} + 2)$ — додатна.

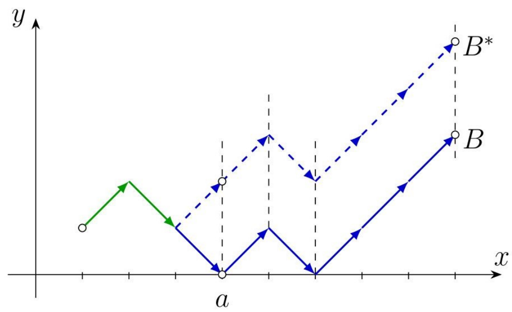

Рис. 8

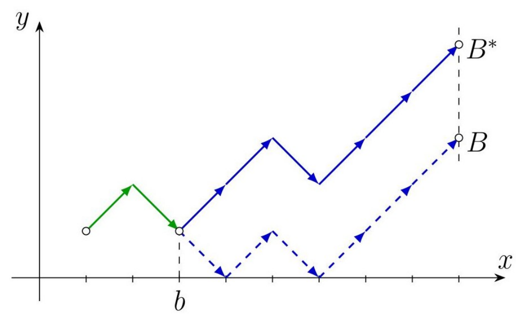

Рис. 9

Навпаки, нехай $B^* = (S_1, \dots, S_{2k})$ — деяка додатна траєкторія, b — остання точка, де $S_b = 1$ (рис. 9), тоді $B = (S_1, \dots, S_b, S_{b+1} - 2, \dots, S_{2k} - 2)$ — невід'ємна. Таким чином,

$$L_{2k}(S_1 \neq 0, \dots, S_{2k} \neq 0) = 2L_{2k}(S_1 > 0, \dots, S_{2k} > 0) =$$
$$= L_{2k}(S_1 \geq 0, \dots, S_{2k} \geq 0) = L_{2k}(S_{2k} = 0).$$

Оскільки

$$\{\sigma_{2n} = 2k\} = \{\sigma_{2n} > 2(k-1)\} \backslash \{\sigma_{2n} > 2k\},$$
$$\{\sigma_{2n} > 2l\} = \{S_1 \neq 0, \dots, S_{2l} \neq 0\}, \text{ то}$$
$$\{\sigma_{2n} = 2k\} = \{S_1 \neq 0, \dots, S_{2(k-1)} \neq 0\} \backslash \{S_1 \neq 0, \dots, S_{2k} \neq 0\}.$$

Тобто сказати «перше повернення в нуль відбулося в момент часу $2k$» все одно, що сказати «умова $S_1 \neq 0, \dots, S_{2l} \neq 0$ виконується для $l = k - 1$, але не виконується для $l = k$». Користуючись (2), звідси отримаємо

$$f_{2k} = u_{2(k-1)} - u_{2k}, \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Відповідно

$$f_{2k} = C_{2(k-1)}^{k-1} \frac{1}{2^{2(k-1)}} - C_{2k}^{k} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{2^{2(k-1)}} \left(\frac{(2(k-1))!}{(k-1)!(k-1)!} - \frac{(2k)!}{4 \cdot k!k!} \right) =$$

$$= \frac{1}{2^{2(k-1)}} \frac{(2(k-1))!}{(k-1)!(k-1)!} \left(1 - \frac{2k-1}{2k}\right) = \frac{1}{2k} C_{2(k-1)}^{k-1} \frac{1}{2^{2(k-1)}} =$$
$$= \frac{1}{2k} u_{2(k-1)}.$$

Таким чином, ми показали ще одне доведення формули (1).

За формулою Стірлінґа $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ при $n \to \infty$, тоді

$$u_{2k} = C_k^{2k} \cdot 2^{-2k} = \frac{(2k)!}{k!k!} 2^{-2k} \sim \frac{(2k)^{2k} e^{-2k} \sqrt{4\pi k}}{(k^k e^{-k} \sqrt{2\pi k})^2 2^{2k}} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}}, \quad k \to \infty.$$

Тому

$$f_{2k} \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} k^{3/2}}, \quad k \to \infty.$$

Звідси слідує, що математичне очікування часу першого повернення в нуль є досить-таки великим.

$$\mathbf{E} \min(\sigma_{2n}, 2n) = \sum_{k=1}^{n} 2k \mathbf{P}\{\sigma_{2n} = 2k\} + 2n \mathbf{P}\{\sigma_{2n} > 2n\} =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} u_{2(k-1)} + 2n u_{2n}.$$

Крім того, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_{2(k-1)} = \infty$. Відповідно, граничне середнє значення часу повернення блукання в нуль (за нескінченного числа кількості кроків) рівне ∞.

Цей факт пояснює багато інших неочікуваних властивостей симетричного випадкового блукання. Наприклад, природно було б очікувати, що за час $2n$ *середнє число* нічиїх при грі двох рівносильних супротивників ($p = q = 1/2$), тобто число тих моментів часу i, для яких $S_i = 0$, має бути пропорційним до $2n$. Однак, насправді, середнє число нічиїх має інший порядок — $\sqrt{2n}$. Зокрема, звідси слідує, що, всупереч очікуваному, «типові» реалізації блукання $(S_0, S_1, \ldots, S_n)$ повинні мати не *синусоїдальний характер* (приблизно половину часу частинка проводить на додатній стороні, а іншу — на від'ємній), а характер довгих затяжних хвиль. Точне формулювання цього твердження дає так званий *закон арксинуса*, який буде розглядатися надалі.

3 Закон арксинусу

Позначимо $P_{2k,2n}$ як ймовірність того, що на проміжку $[0, 2n]$ частинка проводить $2k$ одиниць часу на *додатній стороні.*[1]

Лема 2. *Нехай* $u_0 = 1$ *та* $0 \le k \le n$. *Тоді*

$$P_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{3}$$

Доведення. Вище було встановлено, що $f_{2k} = u_{2(k-1)} - u_{2k}$. Покажемо, що

$$u_{2k} = \sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2(k-r)}. \tag{4}$$

Оскільки $\{S_{2k} = 0\} \subseteq \{\sigma_{2n} \le 2k\}$, то

$$\{S_{2k} = 0\} = \{S_{2k} = 0\} \cap \{\sigma_{2n} \le 2k\} = \sum_{1 \le l \le k} \{S_{2k} = 0\} \cap \{\sigma_{2n} \le 2l\}.$$

Отже,

$$u_{2k} = \mathbf{P}\{S_{2k} = 0\} = \sum_{1 \le l \le k} \mathbf{P}\{S_{2k} = 0, \sigma_{2n} = 2l\} =$$
$$= \sum_{1 \le l \le k} \mathbf{P}(S_{2k} = 0 | \sigma_{2k} = 2l) \mathbf{P}\{\sigma_{2n} = 2l\}.$$

Але

$$\mathbf{P}(S_{2k} = 0 | \sigma_{2n} = 2l) = \mathbf{P}(S_{2k} = 0 | S_1 \ne 0, \dots, S_{2l-1} \ne 0, S_{2l} = 0) =$$
$$= \mathbf{P}(S_{2l} + (\xi_{2l+1} + \dots + \xi_{2k}) = 0 | S_1 \ne 0, \dots, S_{2l-1} \ne 0, S_{2l} = 0) =$$
$$= \mathbf{P}(S_{2l} + (\xi_{2l+1} + \dots + \xi_{2k}) = 0 | S_{2l} = 0) =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_{2l+1} + \dots + \xi_{2k} = 0\} = \mathbf{P}\{S_{2(k-l)} = 0\}.$$

Тому

$$u_{2k} = \sum_{1 \le l \le k} \mathbf{P}\{S_{2(k-l)} = 0\} \mathbf{P}\{\sigma_{2n} = 2l\},$$

що й доводить формулу (4).

Перейдемо до доведення формули (3). При $k = 0$ та $k = n$ її правдивість очевидна. Нехай тепер $1 \le k \le n - 1$. Якщо частинка проводить $2k$ моментів

[1] Вважаємо, що на проміжку $[m-1, m]$ частинка знаходиться на додатній стороні, якщо принаймі одне зі значень S_{m-1} чи S_m додатне.

часу на додатній стороні, то вона проходить крізь нуль. Нехай $2r$ — момент першого повернення в нуль. Можливі два випадки: коли $S_l \geq 0, l \leq 2r$ та $S_l \leq 0, l \leq 2r$.

Кількість шляхів, що стосуються першого випадку, рівна[2]

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 2^{2r} f_{2r}\right) 2^{2(n-r)} P_{2(k-r),2(n-r)} = \frac{1}{2} \cdot 2^{2n} f_{2r} P_{2(k-r),2(n-r)}.$$

У другому випадку кількість шляхів становить

$$\frac{1}{2} \cdot 2^{2n} f_{2r} P_{2k,2(n-r)}.$$

Отже, для $1 \leq k \leq n-1$

$$P_{2k,2n} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} f_{2r} P_{2(k-r),2(n-r)} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} f_{2r} P_{2k,2(n-r)}. \tag{5}$$

Припустимо, що формула $P_{2k,2m} = u_{2m} u_{2m-2k}$ справджується для $m = 1, \ldots,$ $n-$ 1. Тоді з (4) та (5) знайдемо, що

$$P_{2k,2n} = \frac{1}{2} u_{2n-2k} \sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2k-2r} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{k} f_{2r} u_{2n-2r-2k} =$$

$$= \frac{1}{2} u_{2n-2k} u_{2k} + \frac{1}{2} u_{2k} u_{2n-2k} = u_{2k} u_{2n-2k}.$$

□

Нехай тепер $\gamma(2n)$ — число одиниць часу з проміжку $[0, 2n]$, яке частинка проводить на *додатній* стороні. Тоді для $x < 1$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{2} < \frac{\gamma(2n)}{2n} \leq x\right\} = \sum_{\left\{k: \frac{1}{2} < \frac{2k}{2n} \leq x\right\}} P_{2k,2n}.$$

Оскільки при $k \to \infty$

$$u_{2k} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi k}},$$

тоді

$$P_{2k,2n} = u_{2k} u_{2(n-k)} \sim \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}},$$

[2] Домножили на $\frac{1}{2}$, так як потребуємо половину (що були додатніми); множники 2^{2r} та $2^{2(n-r)}$ використовуються для скорочення знаменників f_{2r} і $P_{2(k-r),2(n-r)}$ відповідно.

якщо $k \to \infty, n-k \to \infty$. Тому

$$\sum_{\left\{k: \frac{1}{2}<\frac{2k}{2n} \leq x\right\}} P_{2k,2n} - \sum_{\left\{k: \frac{1}{2}<\frac{2k}{2n} \leq x\right\}} \frac{1}{\pi n}\left[\frac{k}{n}\left(1-\frac{k}{n}\right)\right]^{-1/2} \to 0, n \to \infty.$$

звідки

$$\sum_{\left\{k: \frac{1}{2}<\frac{2k}{2n} \leq x\right\}} P_{2k,2n} - \frac{1}{\pi}\int_{1/2}^{x} \frac{\mathrm{d}\, t}{\sqrt{t(1-t)}} \to 0, n \to \infty.$$

Але з міркувань симетрії

$$\sum_{\left\{k: \frac{k}{n} \leq \frac{1}{2}\right\}} P_{2k,2n} \to \frac{1}{2}$$

та

$$\frac{1}{\pi}\int_{1/2}^{x} \frac{\mathrm{d}\, t}{\sqrt{t(1-t)}} = \left| \begin{matrix} t = u^2, \\ \mathrm{d}\, u = 2u\, \mathrm{d}\, t, \end{matrix} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline t & 1/2 & x \\ \hline u & 1/\sqrt{2} & \sqrt{x} \\ \hline \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{x}} \frac{\mathrm{d}\, u}{\sqrt{(1-u^2)}} = 2\pi^{-1} \arcsin u \Big|_{\sqrt{x}}^{1/\sqrt{2}} =$$

$$= 2\pi^{-1} \arcsin \sqrt{x} - \frac{1}{2}.$$

Тим самим доведено наступна

Теорема (закон арксинуса)**.** *Ймовірність того, що частка часу, проведеного частинкою на додатній стороні, менша або дорівнює* x*, прямує до* $2\pi^{-1} \arcsin \sqrt{x}$.

$$\sum_{\left\{k: \frac{k}{n} \leq x\right\}} P_{2k,2n} \to 2\pi^{-1} \arcsin \sqrt{x}. \tag{6}$$

Зауважимо, що підінтегральна функція $u(t) = (t(1-t))^{-1/2}$ в інтегралі

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{x} \frac{\mathrm{d}\, t}{\sqrt{t(t-1)}}$$

представляє U-подібну криву, що прямує до нескінченності у точках $t=0$ та $t=1$ (рис. 10). Звідси слідує, що при великих n

$$\mathbf{P}\left\{0 < \frac{\gamma(2n)}{2} \leq \Delta\right\} > \mathbf{P}\left\{\frac{1}{2} < \frac{\gamma(2n)}{2} \leq \frac{1}{2} + \Delta\right\},$$

тобто, образно кажучи, більш ймовірно, що частка часу, проведеного часткинкою на додатній стороні, буде близька до нуля (або одиниці), ніж до природно очікуваного значення 1/2.

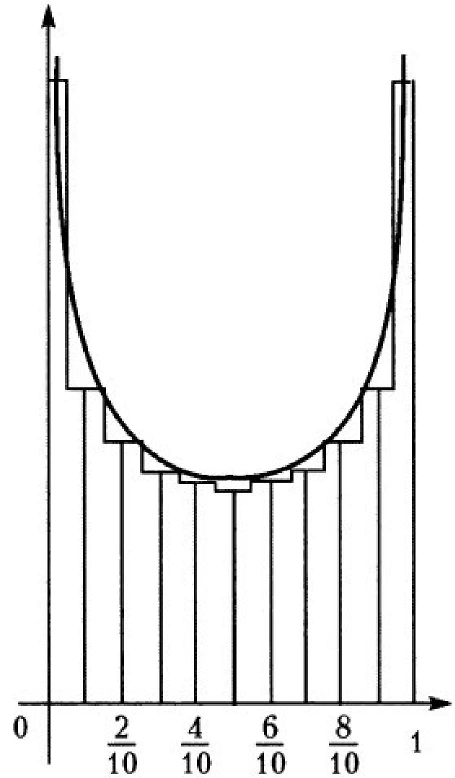

Рис. 10

Користуючись таблицями арксинусу і тією умовою, що насправді швидкість збіжності в (6) дуже швидка, знаходимо, що

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\gamma(2n)}{2n} \leq 0,024\right\} \approx 0,1,$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\gamma(2n)}{2n} \leq 0,1\right\} \approx 0,2,$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\gamma(2n)}{2n} \leq 0,02\right\} \approx 0,3,$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\gamma(2n)}{2n} \leq 0,65\right\} \approx 0,6.$$

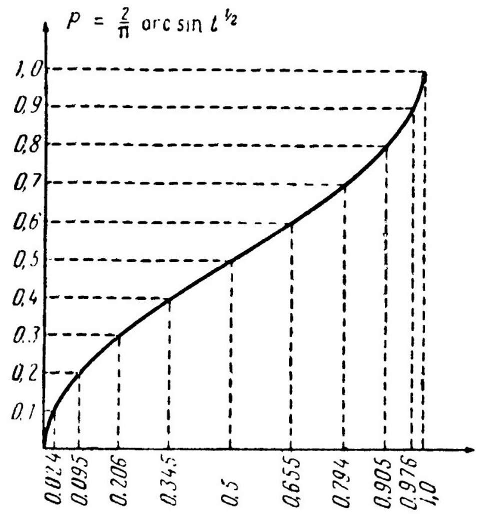

Рис. 11: Закон арксинуса.

Приклад. Уявімо, що дві людини грають у гру під назвою «Орел чи Решка», в якій виграшем буде вважатися випадіння «Орла». Тобто, послідовність результатів окремих партій (послідовність виграшів та програшів) геометрично буде представлятися графіком симетричного випадкового блукання. Положення графіку вище осі абсцис буде відповідати ситуації, коли один з гравців лідирує: досягнення графіком осі абсцис інтерпретується як «нічия» і так далі. Зі збільшенням числа зіграних партій, зменшується кількість моментів, коли графік досягає осі абсцис, а також зменшується кількість змін лідерства і, таким чином, один з гравців проводить більшу частину часу в лідерстві.

В грі, що складається з 1000 партій, середня кількість досягнення осі абсцис дорівнює 12, з них приблизно половина буде відповідати зміні лідерства. За законом арксинуса, не рідше ніж в одному випадку з десяти один з гравців буде за весь час знаходитися у лідерстві більше ніж в 975 партій із 1000.

4 Задачі

Розглянуті нижче задачі взяті з книги [1] §10.

Задача 1. З якою швидкістю $\mathbf{E}\min(\sigma_{2n}, 2n) \to \infty$ при $n \to \infty$?

Розв'язання. Раніше ми довели що,

$$\mathbf{E}\min(\sigma_{2n}, 2n) = \sum_{k=1}^{n} 2k\mathbf{P}\{\sigma_{2n} = 2k\} + 2nu_{2n} = \sum_{k=1}^{n} u_{2(k-1)} + 2nu_{2n}.$$

За формулою Стірлінга:

$$u_{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \quad \text{та} \quad u_2(k-1) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi(k-1)}}.$$

Тому розпишемо нашу початкову суму наступним чином:

$$\mathbf{E}\min(\sigma_{2n}, 2n) \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\pi k}} + \frac{2n}{\sqrt{\pi n}} \sim \int_1^n \frac{\mathrm{d}\, x}{\sqrt{\pi x}} + \frac{2n}{\sqrt{\pi n}} \sim 4\sqrt{\frac{n}{\pi}}, \quad n \to \infty.$$

Тому ми кажемо, що $\mathbf{E}\min(\sigma_{2n}, 2n)$ прямує до нескінченності з такою ж швидкістю як $4\sqrt{\frac{n}{\pi}}$. □

Задача 2. Нехай $\tau_n = \min\{1 \le k \le n : S_k = 1\}$ і $\tau_n = \infty$, якщо $S_k < 1$ для всіх $1 \le k \le n$. До чого прямує $\mathbf{E}\min(\tau_n, n)$ при $n \to \infty$ для симетричного $(p = q = 1/2)$ и несиметричного $(p \ne q)$ блукань?

Розв'язання. Оскільки повернення в одиницю може відбутися лише за непарну кількость кроків, будемо вважати $\tau_n = \min\{1 \le 2k+1 \le n : S_{2k+1} = 1\}$ і $\tau_n = \infty$, якщо $S_{2k+1} < 1$ для всіх $1 \le 2k+1 \le n$, а також $p = \mathbf{P}\{\xi_i = 1\}$, $q = \mathbf{P}\{\xi_i = -1\}$.

Математичне сподівання першого поверненя в одиницю буде мати вигляд:

$$\mathbf{E}\min(\tau_n, n) = \sum_{1 \le 2k+1 \le n} \mathbf{P}\{\tau_n = 2k+1\}(2k+1) + n\mathbf{P}\{\tau_n = \infty\}. \tag{7}$$

Розпишемо ймовірність того, що на кроці $2k+1$ ми опинимося в одиниці вперше:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{\tau_n = 2k+1\} &= \mathbf{P}\{S_1 < 1, \dots, S_{2k} < 1, S_{2k+1} = 1\} = \\ &= \mathbf{P}\{S_1 < 1, \dots, S_{2k} = 0, S_{2k+1} = 1\}.\end{aligned}$$

Кількість траєкторій, що починаються в точці $(0,0)$ та приходять в точку $(2k,0)$, при цьому залишаючись під прямою $y=0$, або торкаються її, є число Каталана:

$$C_{k+1} = \frac{C_{2k}^k}{k+1}.$$

Для того, щоб прийти в одиницю на $2k+1$ кроці потрібно зробити k вниз та $k+1$ кроків угору, тому ймовірність буде мати наступний вигляд:

$$\mathbf{P}\{\tau_n = 2k+1\} = \frac{C_{2k}^k}{k+1} p^{k+1} q^k.$$

При $p = g = 1/2$ маємо

$$\sum_{1 \le 2k+1 \le n} \mathbf{P}\{\tau_n = 2k+1\}(2k+1) \ge \frac{1}{2} \sum_{1 \le 2k+1 \le n} C_{2k}^k 2^{-2k} \sim \sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$

Отже, при $p = g = 1/2$ маємо, що $\mathbf{E}\min(\tau_n, n) \to \infty, \quad n \to \infty.$

Нехай $p \ne g$, тоді

$$\sum_{1 \le 2k+1 \le n} \mathbf{P}\{\tau_n = 2k+1\}(2k+1) = \sum_{1 \le 2k+1 \le n} \frac{2k+1}{k+1} C_{2k}^k p^{k+1} q^k =$$
$$= 2 \sum_{1 \le 2k+1 \le n} C_{2k}^k p^{k+1} q^k - \sum_{1 \le 2k+1 \le n} \frac{1}{k+1} C_{2k}^k p^{k+1} q^k. \tag{8}$$

Користуючись означенням генератриси для чисел Каталана $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n z^n = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}$:

$$\sum_{k \ge 0} \frac{1}{k+1} C_{2k}^k x^{k+1} = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4x}) \quad \text{при } |x| \le \frac{1}{4}. \tag{9}$$

Продиференціювавши степеневий ряд, отримаємо:

$$\sum_{k \ge 0} C_{2k}^k x^k = \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \quad \text{при } |x| < \frac{1}{4}.$$

Розглянемо випадок, коли $x = pq$, тоді при $n \to \infty$ вираз (8) прямує до

$$\frac{2p}{\sqrt{1-4pq}} - \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q} = \frac{1-|p-q|}{2q|p-q|}.$$

Остання рівність виконується в силу того, що $p+q=1$, а саме

$$\begin{aligned}
&(p+q)^2=1,\\
&p^2-2pq+q^2=1-4pq,\\
&\sqrt{(p-q)^2}=\sqrt{1-4pq},\\
&|p-q|=\sqrt{1-4pq}.
\end{aligned}$$

Розглянемо тепер питання про збіжність другого доданка у формулі (7). В силу (9) маємо

$$\mathbf{P}\{\tau_n=\infty\}=1-\sum_{1\le 2k+1\le n}\mathbf{P}\{\tau_n=2k+1\}=1-\sum_{1\le 2k+1\le n}\frac{1}{k+1}C_{2k}^k p^{k+1}q^k$$
$$\to 1-\frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2q}=1-\frac{1-|p-q|}{2q}\quad n\to\infty.$$

Якщо $q>p$, то

$$\begin{aligned}
&n\mathbf{P}\{\tau_n=\infty\}\to n\left(1-\frac{1+p-q}{2q}\right)=n\left(1-\frac{p}{q}\right)\to\infty,\quad n\to\infty\\
&\Rightarrow \mathbf{E}\min(\tau_n,n)\to\infty,\quad n\to\infty
\end{aligned}$$

Якщо $q<p$, то в силу попередніх міркувань

$$n\mathbf{P}\{\tau_n=\infty\}=n\sum_{2k+1>n}\frac{1}{k+1}C_{2k}^k p^{k+1}q^k\le 2\sum_{2k+1>n}C_{2k}^k p^{k+1}q^k \tag{10}$$

За формулою Стірлінга $C_{2k}^k=2^{2k}e^{\theta(k)}\left(\sqrt{\pi k}\right)^{-1}$, де $\theta(k)<1$. Тоді права частина формули (10) набуває вигляду:

$$\sum_{2k+1>n}\frac{2p}{\sqrt{\pi k}}(4pq)^k e^{\theta(k)}\le C\sum_{k\ge n}(4pq)^k=C\frac{(4pq)^n}{1-4pq}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Тоді при $q<p$ будемо мати

$$\mathbf{E}\min(\tau_n,n)\to\frac{1-p+q}{2q(p-q)}=\frac{1}{p-q},\quad n\to\infty.$$

Відповідь:

$$\text{при } n\to\infty,\quad \mathbf{E}\min(\tau_n,n)\to\begin{cases}(p-q)^{-1}, & p>q,\\ \infty, & p\le q.\end{cases}$$

$\square$

Задача 3. Спираючись на ідеї та методи §10, показати, що для симетричного ($p = q = 1/2$) випадкового блукання Бернуллі $\{S_k, k \le n\}$ з $S_0 = 0$, $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$ мають місце наступні формули (N — ціле додатне число):

1. $\mathbf{P}\Big\{\max\limits_{1 \le k \le n} S_k \ge N, S_n < N\Big\} = P\{S_n > N\}$,
2. $\mathbf{P}\Big\{\max\limits_{1 \le k \le n} S_k \ge N\Big\} = 2P\{S_n \ge N\} - P\{S_n = N\}$,
3. $\mathbf{P}\Big\{\max\limits_{1 \le k \le n} S_k = N\Big\} = P\{S_n = N\} + P\{S_n = N + 1\}$.

Розв'язання.

$$1.\ \mathbf{P}\Big\{\max_{1 \le k \le n} S_k \ge N, S_n < N\Big\} = \mathbf{P}\{S_n < N | \exists k, 1 \le k \le n-1, S_k = N\} =$$
$$= \mathbf{P}\{S_n > N\}.$$

Для доведення потрібно встановити, що

$$L_n(S_n < N | \exists k, 1 \le k \le n-1, S_k = N) = L_n(S_n > N).$$

Тобто достатньо показати, що між траєкторіями $A = (S_0, \ldots, S_n)$ з $S_n < N$, для яких хоча б одне $S_k = N$, та траєкторіями $A^* = (S_0, \ldots, S_n)$ з $S_n > N$ можна встановити взаємно однозначну відповідність.

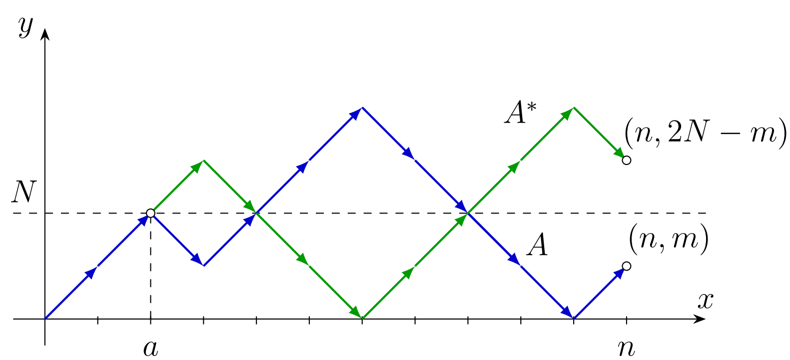

Рис. 12

Дійсно, нехай $A = (S_0 \ldots, S_n)$ — деяка траєкторія з $S_n = m < N$, a — перша точка, де $S_a = N$. Виконавши віддзеркалення ділянки $(S_a, \ldots, S_n)$ відносно горизонтальної прямої $y = N$, отримаємо нову траєкторію A^*, для якої $S_n > N$, причому $S_n = 2N - m$ (рис. 12). Навпаки, нехай $A^* = (S_0, \ldots, S_n)$ — деяка траєкторія з $S_n = 2N - m > N$, a — перша точка, де $S_a = N$. Виконавши віддзеркалення ділянки $(S_a, \ldots, S_n)$ відносно горизонтальної прямої $y = N$, отримаємо нову траєкторію A, для якої $S_n = m < N$. Отже, між заданими траєкторіями встановлено взаємно однозначну відповідність, що і доводить потрібний результат.

$$2.\ \mathbf{P}\Big\{\max_{1\le k\le n} S_k \ge N\Big\} = \Big|\ \text{для зручності позначимо } \max_{1\le k\le n} S_k = M\ \Big| =$$

$$= \mathbf{P}\{S_n \ge N, M \ge N\} + \mathbf{P}\{S_n < N, M \ge N\}.$$

Оскільки $(S_n \ge N) \subseteq (M \ge N)$, то $\mathbf{P}\{S_n \ge N, M \ge N\} = \mathbf{P}\{S_n \ge N\}$. Враховуючи результат, отриманий в попередньому пункті, та те, що

$$(S_n \ge N)\backslash(S_n = N) = (S_n > N):$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big\{\max_{1\le k\le n} S_k \ge N\Big\} &= \mathbf{P}\{S_n \ge N\} + \mathbf{P}\{S_n > N\} = \\
&= \mathbf{P}\{S_n \ge N\} + \mathbf{P}\{S_n \ge N\} - \mathbf{P}\{S_n = N\} = \\
&= 2\mathbf{P}\{S_n \ge N\} - \mathbf{P}\{S_n = N\}.
\end{aligned}$$

$$3.\ \mathbf{P}\Big\{\max_{1\le k\le n} S_k = N\Big\} = \mathbf{P}\Big\{\max_{1\le k\le n} S_k \ge N\Big\} - \mathbf{P}\Big\{\max_{1\le k\le n} S_k \ge N+1\Big\}.$$

Враховуючи результат, отриманий в попередньому пункті, та те, що

$$(S_n \ge N) \supseteq (S_n \ge N+1), \qquad (S_n \ge N)\backslash(S_n \ge N+1) = (S_n = N):$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\Big\{\max_{1\le k\le n} S_k = N\Big\} &= 2\mathbf{P}\{S_n \ge N\} - \mathbf{P}\{S_n = N\} - 2\mathbf{P}\{S_n \ge N+1\}+ \\
&+ \mathbf{P}\{S_n = N+1\} = 2\mathbf{P}\{S_n = N\} - \mathbf{P}\{S_n = N\}+ \\
&+ \mathbf{P}\{S_n = N+1\} = \mathbf{P}\{S_n = N\} + \mathbf{P}\{S_n = N+1\}.
\end{aligned}$$

$\square$

5 Висновок

Випадкові блукання — це стохастичні процеси, які зазвичай визначаються як суми випадкових величин або випадкових векторів в Евклідовому просторі, тому вони є процесами, які змінюються в дискретному часі. Але деякі також використовують цей термін для позначення процесів, які змінюються безперервно, зокрема, вінерівський процес, використовуваний в області фінансів.

Дослідження природи випадкових блукань дуже вплинуло на розвиток багатьох галузей науки, включаючи економіку, інформатику, інженерію, екологію, біологію, фізику, хімію, психологію та соціологію.

Багато різних типів випадкових блукань представляють інтерес. Деякі випадкові блукання здійснюються на графах, інші — на прямій, на площині або у більш високих розмірностях, тоді як деякі блукання здійснюються на групах. Випадкові блукання також розрізняються у відношенні до часового параметру.

Прикладом використання випадкових блукань є вінерівський процес, який відіграє важливу роль у прикладній математиці. В математиці, вінерівський процес породив вивчення мартингалів з неперервним часом (випадковий процес, математичне сподівання якого в майбутній час рівне значенню процесу в цей час. Теорія мартингалів є одним з основних розділів сучасної теорії ймовірностей і має широке застосування у стохастичному моделюванні, зокрема у сфері фінансів).

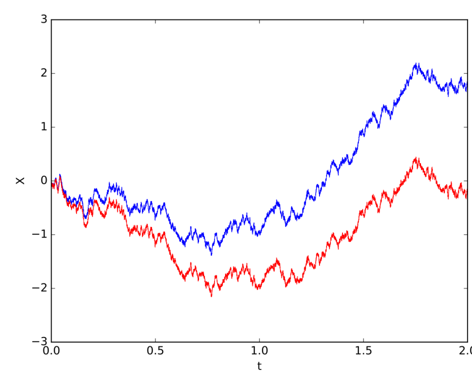

Рис. 13: реалізація вінерівського процесу

Література

[1] Ширяев А. Н. ВЕРОЯТНОСТЬ - 1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы / Альберт Николаевич Ширяев. – Москва: МЦНМО, 2004. – 519 с. – (третье).

[2] Погоруй А. О. Вступ до теорії випадкових процесів : навчальний посібник / А. О. Погоруй, О. А. Чемерис – Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. – 70 с

[3] Феллер В. Введение в теорию вероятности и ее приложения / В. Феллер. – Москва: МИР, 1984. – 528 с.

[4] Случайное блуждание и Броуновское движение [Електронний ресурс]. – 2018. – Режим доступу до ресурсу: web-site

[5] Теория вероятностей [Електронний ресурс]. – 2021. – Режим доступу до ресурсу: video .

[6] POLYA'S RECURRENCE THEOREM [Електронний ресурс] // TYLER ZHU – Режим доступу до ресурсу: web-site