Національний технічний університет України
“Київський політехнічний інститут” ім. І. Сікорського
фізико-математичний факультет

Домашні роботи

LaTeX

Студента 1-го курсу
Онищенко Вероніка Максимівна

Викладач:
Бойко Вячеслав Миколайович

Зміст

1 Приклади інтегрування

$$\int (x+1)^{15}\,\mathrm{d}\,x = \frac{(x+1)^{16}}{16} + C;$$

$$\int \mathrm{e}^{2x+1}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{e}^{2x+1}}{2} + C;$$

$$\int \sin^3 x \cos x\,\mathrm{d}\,x = \int \sin^3 x\,\mathrm{d}(\sin x) = \frac{\sin^4 x}{4} + C;$$

$$\int \frac{\sin x\,\mathrm{d}\,x}{\cos^2 x} = -\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + C;$$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,\mathrm{d}\,x = \int \sqrt{\ln x}\,\mathrm{d}(\ln x) = \frac{\ln^{\frac{3}{2}} x}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2\sqrt{(\ln x)^3}}{3} + C.$$

2 Формули В'єта

Розглянемо многочлен, степінь якого дорівнює n зі старшим коефіцієнтом $a_0 = 1$:

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n. \tag{2.1}$$

Нехай $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — корені цього многочлена, причому кожний кратний корінь взятий відповідне число разів. Тоді$f(x)$ має наступний розклад:

$$f(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n). \tag{2.2}$$

Запишемо та доведемо формули, які встановлюють зв'язок між коренями та коефіцієнтами многочлена:

$$\begin{aligned}
&a_1 = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n,\\
&a_2 = \sum_{\substack{i,j=1,\\ i<j}}^{n} \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n,\\
&a_3 = -\sum_{\substack{i,j,k=1,\\ i<j<k}}^{n} \alpha_i\alpha_j\alpha_k = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2\alpha_4 - \cdots - \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\alpha_n = (-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ці формули названі на честь французького математика, творця символьної алгебри Франсуа В'єта, який першим довів її для квадратного рівняння.

Доведемо формули В'єта за допомогою метода математичної індукції. При $n = 1$, для многочлена першого степеня ця формула очевидна. Припустимо, що формули (2.3) виконуються для многочлена n-того степеня (2.1) і доведемо, що вони будуть виконуватися для многочлена $n+1$-го степеня

$$g(x) = x^{n+1} + b_1x^n + \cdots + b_nx + b_{n+1}, \tag{2.4}$$

корені якого позначимо через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$.

Тоді,

$$g(x) = (x - \alpha_{n+1})(x^n + \alpha_1x^{n-1} + \alpha_2x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}x + \alpha_n) =$$

$$= x^{n+1} + (\alpha_1 - \alpha_{n-1})x^n + (\alpha_2 - \alpha_1\alpha_{n+1})x^{n-1} + \cdots +$$
$$+ (-\alpha_n\alpha_{n+1}).$$

Отже, $b_1 = a_1 - \alpha_{n+1}$, $b_2 = a_2 - a_1\alpha_{n+1}$, $\ldots$, $b_{n+1} = -a_n\alpha_{n+1}$.

Так як за припущенням індукції виконуються формули (2.3), то отримаємо

$$b_1 = -\alpha_1 - \alpha_2 - \cdots - \alpha_n - \alpha_{n+1},$$
$$b_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)\alpha_{n+1} =$$
$$= \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_1\alpha_{n+1} + \cdots + \alpha_n\alpha_{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$b_{n+1} = -(-1)^n\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1} = (-1)^{n+1}\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\alpha_{n+1}.$$

Таким чином формули (2.3) залишаються справедливими і для $n+1$. Індукція проведена і справедливість формул доведена.

2.1 Многочлени з дійсними коефіцієнтами

Нехай $f(x)$ довільний многочлен степеня n з дійсними коефіцієнтами. Припустимо, що $f(x)$ має комплексний корінь α, $f(\alpha) = 0$. Можна довести, що спряжене число $\overline{\alpha}$ також буде коренем многочлена $f(x)$, тобто $f(\overline{\alpha}) = 0$. Тоді многочлен має своїми дільниками лінійні двочлени $x - \alpha$ і $x - \overline{\alpha}$, отже, цей многочлен буде ділитися на квадратний тричлен:

$$\varphi(x) = (x - \alpha)(x - \overline{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \overline{\alpha})x + \alpha\overline{\alpha}. \tag{2.5}$$

Числа $\alpha + \overline{\alpha}$ і $\alpha\overline{\alpha}$ є дійсними числами. Тому дільник многочлена $f(x)$, квадратний тричлен $\varphi(x)$ має дійсні коефіцієнти.

Доведемо, що корені α і $\overline{\alpha}$ мають в многчлені $f(x)$ однакову кратність. Припустимо, що корені α і $\overline{\alpha}$ мають відповідно кратності k і l, причому $k > l$. Тоді многочлен $f(x)$ ділиться на l-тий степінь многочлена $\varphi(x)$, тобто $f(x) = [\varphi(x)]^l q(x)$. Многочлен $q(x)$, як частка двох многочленів з дійсними коефіцієнтами також має дійсні коефіцієнти. Число α , буде $k - l$ кратним коренем цього многочлена, в той же час як число $\overline{\alpha}$ не буде його коренем. Отримали протиріччя, внаслідок якого $k = l$. Таким чином нами доведена теорема.

Теорема 2.1. *Комплексні корені будь-якого многочлена з дійсними коефіцієнтами попарно спряжені.*

3 Задача з параметром

Задача 3.1. Знайти всі значення a, при яких система

$$\begin{cases} y = |2|x| - 1|, \\ y = a \end{cases}$$

має два розв'язки.

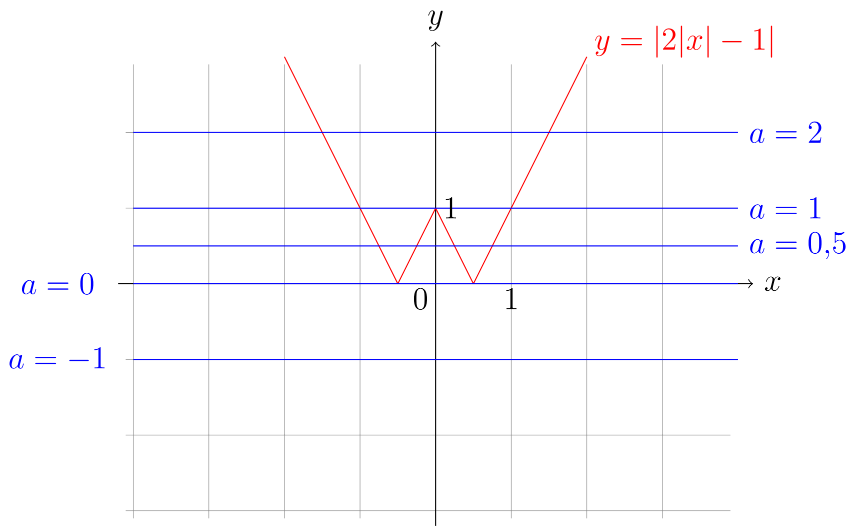

Рис. 1:

Розв'язання: Побудуємо спочатку графік $y = |2|x| - 1|$, а після цього побудуємо прямі $y = a$, довільно підбираючи значення a. З графіка можемо зробити висновок, що при $a = 0$ і $a = 2$ система має лише два розв'язки. □

4 Фізична задача

Задача 4.1. Брусок масою 2 кг рівномірно тягнуть по столу за допомогою горизонтальної пружини жорсткістю 50 Н/м. Чому дорівнює видовження пружини, якщо коефіцієнт тертя між бруском і столом становить 0,25?

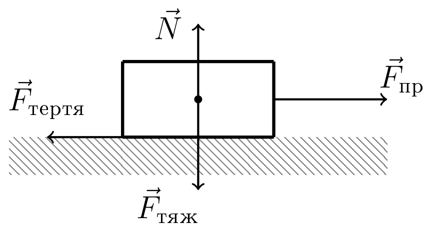

Рис. 2: Ілюстрація до задачі 4.1.

Розв'язання. Так як брусок тягнуть по столу, тому за даної умови сила пружності дорівнює силі тертя (див. рис. 2):

$$F_{\text{пр}} = F_{\text{тертя}}, \tag{4.1}$$

$$kx = \mu N, \tag{4.2}$$

$$kx = \mu mg, \tag{4.3}$$

$$x = \frac{\mu mg}{k}, \tag{4.4}$$

$$[x] = \frac{\text{кг} \cdot \text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг} \cdot \text{Н}} = \text{м}, \tag{4.5}$$

$$x = \frac{0{,}25 \cdot 2 \cdot 10}{50} = 0{,}1 \text{ (м)}. \tag{4.6}$$

Отже, видовження пружини, до якої прикрілено брусок, що тягнуть по столу, становить 0,1 м (СІ) або 10 см. □

5 Модуль

https://en.wikipedia.org/wiki/Absolute_value

У математиці, *абсолютне значення* або *модуль* дійсного числа x — це невід'ємне значення x без врахування його знаку. Позначається $|x|$. А саме, $|x| = x$, якщо x додатне, та $|x| = -x$, якщо x від'ємне значення (у цьому випадку $-x$ додатне), а також $|0| = 0$. Наприклад, абсолютне значення числа 3 дорівнює 3, а абсолютне значення числа -3 також дорівнює 3. Абсолютне значення числа також можна розглядати як відстань від нуля.

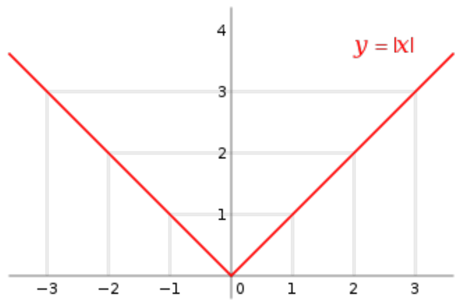

Рис. 3: Графік модуля функції для дійсних чисел.

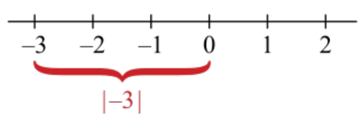

Рис. 4: Абсолютне значення числа може розглядатися як його відстань від нуля.

Узагальнення абсолютного значення для дійсних чисел зустрічається у різноманітних областях математики. Наприклад, абсолютне значення визначається для комплексних чисел, кватерніонів, упорядкованих кілець, полів і векторних просторів. Модуль тісно пов'язаний з поняттям величини, відстані і норми в різних математичних і фізичних контекстах.

Термінологія та позначення

У 1806 році Жан-Роберт Арган увів термін *модуль*, що позначає французьку одиницю виміру, зокрема, для комплексного абсолютного значення,[1][2] і в 1866 році цей термін був запозичений у англійську мову як

[1] Oxford English Dictionary, Draft Revision, June 2008

[2] Nahin, O'Connor and Robertson, and functions.Wolfram.com.; for the French sense, see Littré, 1877

латинський еквівалент модуля[3]. У цьому сенсі термін *абсолютне значення* використовувався з 1806 року французькою мовою[4] і з 1857 року англійською мовою.[5] Позначення $|x|$ (з використанням вертикальних рисок) було введено Карлом Вейєрштрассом у 1841 році.[6] Інші назви для абсолютного значення включають *числове значення*[7] і *величину*[8]. У мовах програмування та обчислювальних програмних пакетах абсолютне значення x зазвичай позначається $\mathrm{abs}(x)$, або за допомогою інших подібних виразів.

Позначення вертикальних рисок також використовується в ряді інших математичних контекстів: наприклад, при застосуванні до множини, воно означає його потужність; стосовно матриці, воно позначає її визначник. Вертикальні риски позначають абсолютне значення лише для алгебраїчних об'єктів, для яких визначено поняття абсолютного значення, особливо для елемента нормованої алгебри з діленням, наприклад, для дійсного числа, комплексного числа або кватерніона. Тісно пов'язаним, але іншим поняттям, є використання вертикальних рисок для евклідової норми[9] або для простору неперервних функцій[10] вектора в $\mathbb{R}^n$, хоча подвійні вертикальні риски з нижнім індексом знизу ($\|\cdot\|_2$ або $\|\cdot\|_\infty$) є більш поширеною і менш неоднозначною формою запису.

Визначення та властивості

Дійсні числа

Для будь-якого дійсного числа x *абсолютне значення* або *модуль* позначається $|x|$ і визначається як[11]

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0, \\ -x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

[3] Oxford English Dictionary, Draft Revision, June 2008

[4] Lazare Nicolas M. Carnot, Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq point quelconques pris dans l'espace, p. 105 at Google Books

[5] James Mill Peirce, A Text-book of Analytic Geometry at Internet Archive. The oldest citation in the 2nd edition of the Oxford English Dictionary is from 1907. The term absolute value is also used in contrast to relative value.

[6] Nicholas J. Higham, Handbook of writing for the mathematical sciences, SIAM. ISBN 0-89871-420-6, p. 25

[7] Oxford English Dictionary, Draft Revision, June 2008

[8] Oxford English Dictionary, Draft Revision, June 2008

[9] Spivak, Michael (1965). Calculus on Manifolds. Boulder, CO: Westview. p. 1. ISBN 0805390219.

[10] Munkres, James (1991). Analysis on Manifolds. Boulder, CO: Westview. p. 4. ISBN 0201510359.

[11] Mendelson, p. 2.

Таким чином, абсолютне значення числа x або додатнє або нуль, але ніколи не є від'ємним. Якщо число x від'ємне ($x < 0$), то його модуль завжди додатний ($|x| = -x > 0$).

В аналітичній геометрії, *абсолютне значення дійсного числа* — це відстань від цього числа до нуля уздовж дійсної прямої, а в більш загальному сенсі, *абсолютне значення* різниці двох дійсних чисел — це відстань між ними. Дійсно, поняття абстрактної функції відстані в математиці можна розглядати як узагальнення абсолютного значення різниці (див. "Відстань" нижче).

Оскільки символ квадратного кореня представляє собою єдиний невід'ємний квадратний корінь (від числа більшого за 0 або 0), то це означає, що

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

еквівалентно наведеному вище означенню, і може використовуватися як альтернативне означення *абсолютного значення* для дійсних чисел.[12]

Абсолютне значення має чотири наступні фундаментальні властивості (a і b — дійсні числа), які використовуються для узагальнення даного поняття для інших областях:

$$\begin{aligned}
&|a| \geq 0, && \text{невід'ємність,}\\
&|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0, && \text{додатна визначеність,}\\
&|ab| = |a||b|, && \text{мультиплікативність,}\\
&|a+b| \leq |a| + |b|, && \text{напівадитивність,}\\
& && \text{зокрема нерівність трикутника.}
\end{aligned}$$

Невід'ємність, додатна визначеність та мультиплікативність очевидні з означення. Щоб побачити, що має місце напівадитивність, спочатку зауважимо, що одна з двох альтернатив вибору для s як -1 або $+1$ гарантує, що $s \cdot (a+b) = |a+b| \geq 0$. Тепер, оскільки $-1 \cdot x \leq |x|$ та $+1 \cdot x \leq |x|$, то, залежно від значення s, для всіх дійсних x виконується умова $s \cdot x \leq |x|$. Отже, $|a+b| = s \cdot (a+b) = s \cdot a + s \cdot b \leq |a| + |b|$, що й потрібно було показати. (Для узагальнення цих аргументів на випадок комплексних чисел див. нижче "Доведення нерівності трикутника для комплексних чисел".)

[12] Stewart, James B. (2001). Calculus: concepts and contexts. Australia: Brooks/Cole. ISBN 0-534-37718-1., p. A5

Нижче наведено деякі властивості модуля, які є наслідками, що випливають із означення або з вищезазначених чотирьох властивостей:

$\lvert\lvert a\rvert\rvert = \lvert a\rvert$,	ідемпотентність (абсолютне значення абсолютного значення є абсолютним значенням),
$\lvert -a\rvert = \lvert a\rvert$,	парність (симетричність графіка),
$\lvert a-b\rvert = 0 \Leftrightarrow a = b$,	тотожність нерозрізних (еквівалент додатно визначеності),
$\lvert a-b\rvert \leq \lvert a-c\rvert + \lvert c-b\rvert$,	нерівність трикутника (еквівалентна напівадитивності),
$\left\lvert\frac{a}{b}\right\rvert = \frac{\lvert a\rvert}{\lvert b\rvert}$ (якщо $b \neq 0$),	збереження ділення (еквівалентно мультиплікативності),
$\lvert a-b\rvert \leq \lvert\lvert a\rvert - \lvert b\rvert\rvert$,	обернена нерівність трикутника (еквівалентна напівадитивності).

Дві інші корисні властивості щодо нерівностей:

$$|a| \leq b \;\Leftrightarrow\; -b \leq a \leq b,$$
$$|a| \geq b \;\Leftrightarrow\; a \leq -b \text{ або } a \geq b.$$

Дані властивості можуть використовуватися для розв'язування нерівностей, пов'язаних із абсолютним значенням x. Наприклад:

$$|x-3| \leq 9 \;\Leftrightarrow\; -9 \leq x-3 \leq 9 \;\Leftrightarrow\; -6 \leq x \leq 12.$$

Абсолютне значення, як "відстань від нуля", використовується для визначення абсолютної різниці між довільними дійсними числами, є стандартною метрикою на множині дійсних чисел.

Комплексні числа

Оскільки множина комплексних чисел не є впорядкованою, означення, наведене вище для дійсного абсолютного значення, не можна безпосередньо використовувати у випадку комплексних чисел. Однак геометричне тлумачення абсолютного значення дійсного числа як його відстані від 0 можна узагальнити. Абсолютне значення комплексного числа визначається евклідовою відстанню від його відповідної точки в комплексній площині до початку координат. Цю відстань можна обчислити, використовуючи теорему Піфагора: для будь-якого комплексного числа

$$z = x + iy,$$

де x і y — дійсні числа, *абсолютне значення* або *модуль* числа z позначається $|z|$ і визначається як[13]

$$|z| = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

де $\mathrm{Re}(z) = x$ і $\mathrm{Im}(z) = y$ позначають дійсну та уявну частини числа z відповідно. Якщо уявна частина y дорівнює нулю, то це означення збігається з означенням абсолютного значення дійсного числа x.

Якщо комплексне число z задано у полярних координатах:

$$z = r\mathrm{e}^{i\theta},$$

де $r = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2} \geq 0$ і $\theta = \arg(z)$ — аргумент (або фаза) числа z, то його абсолютне значення дорівнює

$$|z| = r.$$

Оскільки добуток будь-якого комплексного числа z та його комплексно-спряженого $\bar{z} = x - iy$ (з тим же абсолютним значенням) — це завжди невід'ємне дійсне число $x^2 + y^2$, то абсолютне значення комплексного числа можна зручно виразити як

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}},$$

що нагадує альтернативне означення для дійсних чисел: $|x| = \sqrt{x \cdot x}$.

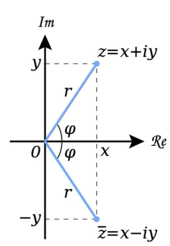

Рис. 5: Абсолютним значенням комплексного числа z є відстань r від числа z до початку координат. З рисунку також видно, що числа z та $\bar{z}$ мають рівні абсолютні значення.

[13] González, Mario O. (1992). Classical Complex Analysis. CRC Press. p. 19. ISBN 9780824784157.

Для комплексного абсолютного значення також виконуються чотири основні властивості, що наведені вище для дійсного абсолютного значення.

Мовою теорії груп властивість мультиплікативності можна перефразувати наступним чином: абсолютне значення — це груповий гомоморфізм з мультиплікативної групи комплексних чисел в групу з множенням додатних дійсних чисел.[14]

Важливо, що властивість напівадитивності ("нерівність трикутника") узагальнюється на будь-який скінченний набір з n комплексних чисел $(z_k)_{k=1}^n$ наступним чином:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|. \tag{$*$}$$

Ця нерівність застосовується також у випадку нескінченних індексованих наборів за умови, що нескінченний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ є абсолютно збіжним. Якщо інтеграл Лебега розглядати як неперервний аналог підсумовування, то дана нерівності аналогічно виконується для комплекснозначних, вимірні функції $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ при інтегруванні над вимірною підмножиною E:

$$\left|\int_E f \,\mathrm{d}\, x\right| \leq \int_E |f| \,\mathrm{d}\, x. \tag{$**$}$$

(Це включає функції, інтегровані за Ріманом, на відрізку $[a; b]$, як частковий випадок.)

Доведення комплексної нерівності трикутника

Нерівність трикутника, що визначена співвідношенням $(*)$, можна довести, використавши три прості властивості комплексних чисел. А саме, для кожного комплексного числа $z \in \mathbb{C}$:

(i) існує $c \in \mathbb{C}$ таке, що $|c| = 1$ і $|z| = c \cdot z$;

(ii) $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$.

Також для індексованого набору комплексних чисел $(w_k)_{k=1}^n$:

$$\sum_k w_k = \sum_k \mathrm{Re}(w_k) + i \sum_k \mathrm{Im}(w_k).$$

[14] Lorenz, Falko (2008), Algebra. Vol. II. Fields with structure, algebras and advanced topics, Universitext, New York: Springer, p. 39, doi:10.1007/978-0-387-72488-1, ISBN 978-0-387-72487-4, MR 2371763.

Зокрема,

(iii) якщо $\sum_k w_k \in \mathbb{R}$, то $\sum_k w_k = \sum_k \operatorname{Re}(w_k)$.

Доведення $(*)$**:** Оберемо $c \in \mathbb{C}$ таке, що $|c| = 1$ та $\sum_k z_k = c\big(\sum_k z_k\big)$ (підсумовування по $k = 1, \ldots, n$). Тоді наступні обчислення приводять до бажаної нерівності:

$$\left|\sum_k z_k\right| \overset{(i)}{=} c\left(\sum_k z_k\right) = \sum_k c z_k \overset{(iii)}{=} \sum_k \operatorname{Re}(c z_k) \overset{(ii)}{\leq} \sum_k |c z_k| = \\ = \sum_k |c||z_k| = \sum_k |z_k|.$$

З даного доведення випливає, що рівність $(*)$ виконується тотожно в тому випадку, якщо всі cz_k — це невід'ємні дійсні числа, що, в свою чергу, виконується тотожно, якщо всі ненульові z_k мають один і той самий аргумент, тобто $z_k = a_k \zeta$ для комплексної константи ζ і дійсних констант $a_k \geq 0$, $1 \leq k \leq n$.

Оскільки функція f є вимірною, то $|f|$ є також вимірною функцією, то доведення нерівності $(**)$ проводиться аналогічно, лише замінюючи $\sum_k(\cdot)$ на $\int_E(\cdot)\,\mathrm{d}\,x$ та z_k на $f(x)$.[15]

Функція абсолютного значення

Функція дійсного абсолютного значення є неперервною у всіх точках. Вона диференційована у всіх точках, за винятком $x = 0$. Вона є монотонно спадною на інтервалі $(-\infty, 0]$ і монотонно зростаючою на інтервалі $[0, +\infty)$. Оскільки дійсне число і його протилежне мають однакові абсолютні значення, то вона є парною функцією, а отже, не має оберненої. Функція дійсного абсолютного значення є кусково-лінійною та опуклою. Дійсна та комплексна функції абсолютного значення є ідемпотентними.

Зв'язок із функцією sign

Функція модуля дійсного числа вказує на його значення незалежно від його знака, тоді як функція sign визначає знак числа незалежно від його значення. Наступні співвідношення показують зв'язок між цими двома функціями:

$$|x| = x\operatorname{sgn}(x) \quad \text{або} \quad |x|\operatorname{sgn}(x) = x,$$

[15] Rudin, Walter (1976). Principles of Mathematical Analysis. New York: McGraw-Hill. p. 325. ISBN 0-07-054235-X.

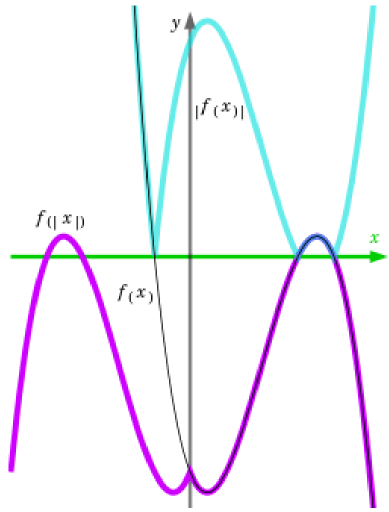

Рис. 6: Графіки композиції функції абсолютного значення та кубічної функції у різному порядку.

а також при $x \neq 0$

$$\operatorname{sgn}(x) = \frac{|x|}{x} = \frac{x}{|x|}.$$

Похідна

Функція абсолютного значення має похідну для кожного $x \neq 0$, але не є диференційовною при $x = 0$. Похідна функції для $x \neq 0$ задається кусково-сталою функцією:[16][17]

$$\frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Субдиференціал функції $|x|$ у точці $x = 0$ — це числовий проміжок $[-1; 1]$.[18]

Комплексна функція абсолютного значення є неперервною у всіх точках, але вона ніде не є комплексно-диференційовною, оскільки не виконуються умови Коші–Рімана.[19]

Друга похідна функції $|x|$ відносно x дорівнює нулю у всіх точка, крім нуля, де вона не існує. Другу похідну як узагальнену функцію можна розглядати як двократну дельта-функцію Дірака.

[16] Weisstein, Eric W. Absolute Value. From MathWorld – A Wolfram Web Resource.
[17] Bartel and Sherbert, p. 163
[18] Peter Wriggers, Panagiotis Panatiotopoulos, eds., New Developments in Contact Problems, 1999, ISBN 3-211-83154-1, p. 31–32
[19] Weisstein, Eric W. Absolute Value. From MathWorld — A Wolfram Web Resource.

Первісна

Первісною (невизначеним інтегралом) функції дійсного абсолютного значення є

$$\int |x| \mathrm{d}x = \frac{x|x|}{2} + C,$$

де C — довільна константа інтегрування. Це не є комплексною первісною, оскільки такі первісні можуть існувати тільки для комплексно-диференційованих (голоморфних) функцій, а комплексна функції абсолютного значення не є такою.

Відстань

Див. також Метричний простір.

Абсолютне значення тісно пов'язане з поняттям відстані. Як зазначалося вище, *модуль* дійсного або комплексного числа — це відстань від даного числа до початку координат вздовж прямої дійсних чисел (для дійсних чисел), або в комплексній площині (для комплексних чисел) і, у загальному випадку, абсолютне значення різниці двох дійсних чи комплексних чисел — це відстань між ними.

Звичайна евклідова відстань між двома точками $A = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ та $B = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$ у евклідовому n-вимірному просторі визначається як

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}.$$

Це можна розглядати як узагальнення, оскільки a_1 та b_1 є дійсними числами, тобто в одновимірному просторі, відповідно до альтернативного означення модуля,

$$|a_1 - b_1| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{1} (a_i - b_i)^2},$$

а для комплексних чисел $a = a_1 + ia_2$ та $b = b_1 + ib_2$, тобто у двовимірному просторі, модуль визначається наступним чином:

$$|a - b| = |(a_1 + ia_2) - (b_1 + ib_2)| = |(a_1 - b_1) + i(a_2 - b_2)|$$

$$= \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + i(a_2 - b_2)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2} (a_i - b_i)^2}.$$

Усе вищесказане свідчить про те, що "абсолютна значення"–відстань для дійсних та комплексних чисел узгоджується з стандартною евклідовою відстанню, яку вони наслідують у результаті їх розгляду як одно- та двовимірні евклідові простори, відповідно.

Такі властивості абсолютного значення різниці двох дійсних або комплексних чисел як невід'ємність, тотожність нерозрізних, симетричність і нерівність трикутника, які були наведені вище, можуть слугувати підставою для більш загального поняття функції відстані наступним чином:

Дійснозначна функція d на множині $X \times X$ називається метрикою (або *функцією відстані*) на множині X, якщо вона задовольняє наступні чотири аксіоми:[20]

$$\begin{aligned} & d(a,b) \geq 0, && \text{невід'ємність,} \\ & d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b, && \text{тотожність нерозрізних,} \\ & d(a,b) = d(b,a), && \text{симетричність,} \\ & d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b), && \text{нерівність трикутника.} \end{aligned}$$

Узагальнення

Упорядковані кільця

Наведене вище означення абсолютного значення для дійсних чисел можна узагальнити для будь-якого впорядкованого кільця. Тобто, якщо a — елемент упорядкованого кільця R, то абсолютне значення елемента a (позначається як $|a|$) визначається наступним чином:[21]

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{при } a \geq 0, \\ -a, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

де $-a$ — протилежний елемент до елементу a, 0 — адитивний нейтральний елемент, а знаки $<$ та $\geq$ мають звичайне значення щодо впорядкування у кільці.

Поля

Основна стаття: Абсолютне значення (алгебра).

[20] Ці аксіоми не є мінімальними; наприклад, невід'ємність може бути отримана з інших трьох аксіом: $0 = d(a,a) \leq d(a,b) + d(b,a) = 2d(a,b)$.

[21] Mac Lane, p. 264.

Чотири основні властивості абсолютного значення для дійсних чисел можуть бути використані для узагальнення поняття модуля на випадок довільного поля наступним чином:

Дійснозначна функція v над полем $\mathbb{F}$ називається *абсолютним значенням* (також модулем, величиною, значенням або оцінкою)[22], якщо вона задовольняє наступні чотири аксіоми:

$$\begin{array}{ll} v(a) \geq 0, & \text{невід'ємність,} \\ v(a) = 0 \Leftrightarrow a = \mathbf{0}, & \text{додатньо визначеність,} \\ v(ab) = v(a)v(b), & \text{мультиплікативність,} \\ v(a+b) \leq v(a) + v(b), & \text{напівадитивність або} \\ & \text{нерівність трикутника.} \end{array}$$

Де $\mathbf{0}$ позначає нуль-елемент поля $\mathbb{F}$. З аксіом додатньо визначеності та мультиплікативності випливає, що функція $v(\mathbf{1}) = 1$, де $\mathbf{1}$ позначає одиничний елемент поля $\mathbb{F}$. Вищезазначені дійсні та комплексні абсолютні значення є прикладами абсолютних значень для довільного поля.

Якщо функція v — абсолютне значення над полем $\mathbb{F}$, то функція d на $\mathbb{F} \times \mathbb{F}$, визначена як $d(a,b) = v(a-b)$, є метрикою та наступні умови еквівалентні:

- d задовольняє ультраметричну нерівність
$$d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(y,z))$$
для усіх x, y, z з поля $\mathbb{F}$;
- $\left\{ v\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$ обмежена над $\mathbb{R}$;
- $v\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}\right) \leq 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$;
- $v(a) \leq 1 \Rightarrow v(1+a) \leq 1$ для всіх $a \in \mathbb{F}$;
- $v(a+b) \leq \max\{v(a), v(b)\}$ для всіх $a, b \in \mathbb{F}$.

Абсолютне значення, яка задовольняє будь-яку (тут усі) з вищезазначених умов, називається *неархімедовим*, в противному випадку воно вважається архімедовим.[23]

[22] Shechter, p. 260. This meaning of valuation is rare. Usually, a valuation is the logarithm of the inverse of an absolute value

[23] Shechter, pp. 260–261.

Векторні простори

Головна стаття: Норма (математика)

Знову ж таки, основні властивості абсолютного значення для дійсних чисел можна використати з незначною модифікацією для узагальнення поняття на випадок довільного векторного простору.

Дійснозначна функції на векторному просторі V над полем $\mathbb{F}$ (позначається як $\|\cdot\|$) називається *абсолютним значенням*, але як правило її називають нормою, якщо вона задовольняє наступні аксіоми:

Для будь-яких $a \in \mathbb{F}$ та $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$,

$\|\mathbf{v}\| \geq 0,$	невід'ємність,
$\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0,$	додатньо визначеність,
$\|a\mathbf{v}\| = \|a\|\|\mathbf{v}\|,$	додатна однорідність або додатна масштабованість,
$\|\mathbf{v} + \mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|,$	напівадитивність або нерівність трикутника.

Норму вектора також називають його *довжиною* чи *величиною*.

У випадку евклідового простору $\mathbb{R}^n$ функція, визначена як

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2},$$

є нормою, яку називається евклідовою нормою. Якшо дійсні числа $\mathbb{R}$ розглядати як одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$, абсолютне значення є нормою, а також p-нормою (див. простір L^p) для будь-якого p. Насправді, абсолютне значення є "єдиною" нормою на векторному просторі $\mathbb{R}^1$, у тому сенсі, що для будь-якої норми $\|\cdot\|$ на одновимірному векторному просторі $\mathbb{R}^1$, $\|x\| = \|1\||x|$. Комплексне абсолютне значення — це особливий випадок норми у передгільбертовому просторі. Воно співпадає з евклідовою нормою, якщо комплексну площину ототожнювати з двовимірною евклідовою площиною $\mathbb{R}^2$.

Алгебра композицій

Головна стаття: Алгебра композицій

Будь-яка алгебра композицій A допускає інволюцію $x \to x^*$, яка називається *спряженням*. Добуток в алгебрі A елемента x і його спряженого x^* записується як $N(x) = xx^*$ і називається *нормою* елемента x.

Дійсні числа $\mathbb{R}$, комплексні числа $\mathbb{C}$ та кватерніони $\mathbb{H}$ — це композиційні алгебри з нормами, заданими визначеними квадратичними формами. Абсолютне значення в цих алгебрах з діленням визначається квадратним коренем норми алгебри композиції.

У загальному випадку алгебри композиції може мати квадратичну форму, яка є невизначеною та має нуль-вектори. Однак, як і у випадку алгебр з діленням, якщо елемент x має ненульову норму, то x має обернений елемент, що задається співвідношенням $x^*/N(x)$.

Література

- Bartle; Sherbert; Introduction to real analysis (4th ed.), John Wiley and Sons, 2011 ISBN 978-0-471-43331-6;
- Nahin, Paul J.; An Imaginary Tale; Princeton University Press; (тверда обкладинка, 1998) ISBN 0-691-02795-1;
- Mac Lane, Saunders, Garrett Birkhoff, Algebra, American Mathematical Soc., 1999 ISBN 978-0-8218-1646-2;
- Mendelson, Elliott, Schaum's Outline of Beginning Calculus, McGraw-Hill Professional, 2008 ISBN 978-0-07-148754-2;
- O'Connor, J.J. and Robertson, E.F.; "Jean Robert Argand";
- Schechter, Eric; Handbook of Analysis and Its Foundations, pp. 259–263, "Absolute Values", Academic Press (1997) ISBN 0-12-622760-8.

Зовнішні посилання

- Hazewinkel, Michiel, ed. (2001) [1994], "Absolute value", Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers, ISBN 978-1-55608-010-4;
- absolute value на PlanetMath.org;
- Weisstein, Eric W. "Absolute Value". MathWorld.

6 Стаття в Вікі українською

Модуль

7 Презентація

Презентація

8 Резюме

Зараховано.

10 Математичний конспект

10.1 Невласні інтеграли

Нехай $f(x)$ інтегрована на будь-якому скінченному проміжку $[a; b]$.

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{x\to\infty} \int_n^b f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

то вона називається *невласним інтегралом першого роду* та позначається

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{10.1}$$

Нехай $f(x)$ інтегрована на будь-якому проміжку $[a; b-\varepsilon]$, де $0 < \varepsilon < b-a$, та необмежена в околі точки b. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

то вона називається *невласним інтегралом другого роду* та позначається

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}\,x. \tag{10.2}$$

Домовимось обидва невласні інтеграли позначати через

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x, \tag{10.3}$$

і казати, що він має особливість в єдиній точці b, де b може бути або скінченним, або $b = +\infty$. Якщо границі (10.1) та (10.2) існують та скінченні, то кажуть, що невласний інтеграл (10.3) збігається, в іншому випадку кажуть, що він розбігається.

Критерій Коші

Нехай інтеграл (10.3) має єдину особливість в точці b. Тоді він збігається тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $b_0 < b$ таке, що

$$\left| \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,\mathrm{d}\,x \right| < \varepsilon$$

які б не були b_1 та b_2, що задовольняють умові $b_0 < b_1 < b_2 < b$.

Теореми порівняння

Теорема 10.1. *Нехай інтеграл* (10.3) *та інтеграл*

$$\int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}\,x \tag{10.4}$$

мають єдину особливість в точці b *та для кожного* $x \in [a;b]$ *виконуються нерівності*

$$0 \le f(x) \le \varphi(x).$$

Тоді із збіжності інтеграла (10.4) *випливає збіжність інтеграла* (10.3)*. А з розбіжності інтеграла* (10.3) *— розбіжність інтеграла* (10.4)*.*

Теорема 10.2. *Нехай інтеграли* (10.3) *та* (10.4) *мають єдину особливість в точці* b*,* $f(x) > 0$*,* $g(x) > 0$ *на* $[a;b)$*. Якщо існує скінченна границя*

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = A > 0,$$

то інтеграли або обидва збігаються, або обидва розбігаються.

Кажуть, що інтеграл (10.3) збігається абсолютно, якщо збігається інтеграл

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\,x. \tag{10.5}$$

Відомо, що абсолютно збіжний інтеграл збігається. Якщо ж інтеграл (10.3) збігається, а інтеграл (10.5) розбігається, то кажуть, що інтеграл (10.3) збігається умовно.

Достатні умови збіжності

Ознака Діріхле. Нехай $f(x)$ інтегрована на будь-якому скінченному проміжку $[a;b]$, причому існує константа $K > 0$ така, що $\forall\, b > a$ виконується нерівність

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x \right| \le K.$$

Нехай $g(x)$ інтегрована на $[a;+\infty]$ та монотонно прямує до нуля при $x \to +\infty$. Тоді збігається інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}\,x. \tag{10.6}$$

Ознака Абеля. Нехай $f(x)$ інтегрована на $[a;+\infty)$, $g(x)$ монотонна та обмежена на $[a;+\infty)$. Тоді інтеграл (10.6) збігається. Оскільки заміна $t = \dfrac{1}{x} - b$ перетворює інтеграл (10.2) у невласний інтеграл першого роду, то вказані достатні ознаки збіжності можуть бути застосовані й для невласних інтегралів другого роду.

Приклади розв'язання

Приклад 10.1. *Обчислити інтеграл*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Розв'язання: Оскільки функція $\ln\sin x$ необмежена в околі точки $x = 0$, маємо невласний інтеграл другого роду. Скористаємося формулою інтегрування частинами, поклавши $u = \ln(\sin x)$, $\mathrm{d}\,v = \mathrm{d}\,x$, $\mathrm{d}\,u = \dfrac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}\,x$, $v = x$:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x)\,\mathrm{d}\,x = x\ln\sin x\Big|_{0+0}^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}\,x =$$
$$= \lim_{x\to 0} x\ln(\sin x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x\,\mathrm{d}\,x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}\,x.$$

Останній інтеграл збігається, оскільки функція $x\cot x$ обмежена на проміжку $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$. Щоб обчислити інтеграл I, зробимо в ньому заміну $x = 2t$. Одержимо:

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin 2t)\,\mathrm{d}\,t = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln 2 + \ln(\sin t) + \ln(\cos t))\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}\,t + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}\,t.$$

В останньому інтегралі зробимо заміну $t = \dfrac{\pi}{2} - u$. Одержимо

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}\,t + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin u)\,\mathrm{d}\,u \\
&= \frac{\pi}{2} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}\,t.
\end{aligned}
$$

Таким чином, для невідомої I одержимо рівняння: $I = \dfrac{\pi}{2}\ln 2 + 2I$, з якого зрозуміло, що $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

Відповідь: $-\dfrac{\pi}{2}\ln 2$. □

Приклад 10.2. *Обчислити інтеграл*

$$
\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.
$$

Розв'язання: Скористаємось властивістю адитивності:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \\
&= \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.
\end{aligned}
$$

У першому інтегралі правої частини рівності зробимо заміну $y = \dfrac{1}{x}$, одержимо

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \\
&= \int_0^{1} \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+y^2)(1+y^{-\alpha})} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{1+x^{-\alpha}} + \frac{1}{1+x^\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} = \\
&= \int_1^{+\infty} \left(\frac{x^\alpha}{1+x^{\alpha}} + \frac{1}{1+x^\alpha}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} = \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} x\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg} b - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Відповідь: $\dfrac{\pi}{4}$. □

Зауваження 10.1. Як бачимо, результати не залежать від параметра α.

Приклад 10.3. *Дослідити на збіжність інтеграл*

$$\int_0^1 \sin^2\left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{1-x}.$$

Розв'язання: Скористаємось критерієм Коші. Для цього розглянемо інтеграл від нашої функції на проміжку $[a;b]$, де $a = 1-\dfrac{1}{\pi n}$, $b = 1-\dfrac{1}{2\pi n}$, та зробимо заміну $t = \dfrac{1}{1-x}$:

$$\left|\int_a^b \left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{1-x}\right| = \int_{\pi n}^{2\pi n}\frac{\sin^2 t}{t}\,\mathrm{d}\,t > \frac{1}{2\pi n}\int_{\pi n}^{2\pi n}\sin^2 t\,\mathrm{d}\,t =$$
$$= \frac{1}{2\pi n}\int_{\pi n}^{2\pi n}\frac{1-\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2\pi n}\cdot\frac{\pi n}{2} = \frac{1}{4}.$$

Таким чином, існує число $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$ таке, що для будь-якого числа $c \in [0;1]$ існують числа $b > a > c$ для яких виконується нерівність:

$$\left|\int_a^b \left(\frac{1}{1-x}\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{1-x}\right| \geq \varepsilon.$$

За критерієм Коші це означає, що наш інтеграл розбігається.
Відповідь: розбігається. □

Приклад 10.4. *Дослідити на збіжність інтеграл*

$$\int_0^{+\infty} x^2\cos \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,x.$$

Розв'язання: Зробимо заміну $\mathrm{e}^x = t$, одержимо

$$\int_0^{+\infty} x^2\cos \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}\,x = \int_1^{+\infty}\frac{\ln^2 t}{t}\cos t\,\mathrm{d}\,t.$$

Покажемо, що функція $g(x) = \dfrac{\ln^2 t}{t}$ монотонно прямує до нуля при $t \to \infty$. Дійсно, при $t > \mathrm{e}^2$:

$$g'(x) = \frac{2\ln t - \ln^2 t}{t^2} < 0,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\ln^2 t}{t} = 2\lim_{t\to\infty}\frac{\ln t}{t} = 2\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t} = 0.$$

Оскільки

$$\forall\, b > 1 \quad \left|\int_1^b \cos t \,\mathrm{d}\, t\right| = |\sin b - \sin 1| \le 2,$$

то за ознакою Діріхле наш інтеграл збігається. З'ясуємо, чи збігається він абсолютно. Оскільки $\forall\, t > 0$ виконується нерівність

$$\frac{\ln^2 t}{t} |\cos t| \ge \frac{\ln^2 t}{t} \cos^2 t,$$

то дослідимо на збіжність інтеграл

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos^2 t \,\mathrm{d}\, t = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \,\mathrm{d}\, t + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos 2t \,\mathrm{d}\, t.$$

Перший з інтегралів в правій частині рівності розбігається, тому що

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \ln^2 t \,\mathrm{d}(\ln t) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{3}\ln^3 x = +\infty.$$

У той же час інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos^2 t \,\mathrm{d}\, t$$

збігається за ознакою Діріхле. Таким чином, інтеграл I розбігається.
Відповідь: збігається умовно. □

Приклад 10.5. *Дослідити на збіжність інтеграл Пуассона*

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \,\mathrm{d}\, x.$$

Розв'язання: підінтегральна функція $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} > 0$ та неперервна $\forall\, x \in [1; +\infty)$. Оскільки даний інтеграл не виражається через елементарні функції, то підберемо функцію порівняння $g(x)$:

$$\forall\, x \in [1; +\infty): \; x^2 \ge x \Rightarrow -x^2 \le -x \Rightarrow \mathrm{e}^{-x^2} \le \mathrm{e}^{-x},$$

отже,

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \le \mathrm{e}^{-x} = g(x),$$

де $\forall\, x \in [1; +\infty)$.

Дослідимо на збіжність інтеграл:

$$\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\,x = -\lim_{b\to\infty} \mathrm{e}^{-x}\Big|_1^b =$$
$$= -\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}^b} - \frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Інтеграл збігається, тому за арифметичною ознакою порівняння збігається інтеграл Пуассона

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x. \qquad \square$$