Національній технічний університет України
“Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського”

Модуль

Вероніка М. Онищенко
onvera22@gmail.com

11 травня 2020 р.

Модуль

Означення

У математиці, абсолютне значення або модуль дійсного числа x — це невід’ємне значення x без врахування його знаку. Позначаться $|x|$. Абсолютне значення числа також можна розглядати як відстань від нуля.

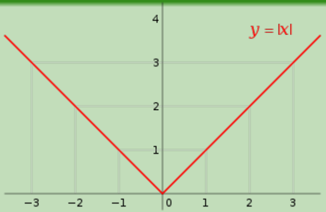

Рис.: Графік модуля функції для дійсних чисел.

Узагальнення модуля для дійсних чисел зустрічається у різних областях математики. Наприклад, абсолютне значення визначається для комплексних чисел, кватерніонів, упорядкованих кілець, полів і векторних просторів.

Модуль на множині дійсних чисел

Означення

Для будь-якого дійсного числа x абсолютне значення або модуль позначається $|x|$ і визначається як

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{при } x \geq 0, \\ -x, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Таким чином, абсолютне значення числа x або додатнє або нуль, але ніколи не є від'ємним. Якщо число x від'ємне ($x < 0$), то його модуль завжди додатній ($|x| = -x > 0$).

Модуль на множині дійсних чисел

Означення

В аналітичній геометрії, модуль дійсного числа — це відстань від даного числа до нуля уздовж дійсної прямої. Поняття абстрактної функції відстані в математиці можна розглядати як узагальнення абсолютного значення різниці.

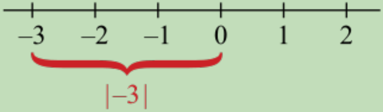

Рис.: Абсолютне значення числа може розглядатися як його відстань від нуля.

Оскільки символ квадратного кореня представляє собою єдиний невід'ємний квадратний корінь (від числа більшого за 0 або 0), то це означає, що

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

еквівалентно наведеному вище означенню, і може використовуватися як альтернативне означення абсолютного значення для дійсних чисел.

Означення

Модуль комплексного числа визначається відстанню від його точки в комплексній площині до початку координат. Ця відстань обчислюється для будь-якого комплексного числа наступним чином:

$$z = x + iy,$$

де x і y — дійсні числа, модуль числа z позначається $|z|$ і визначається як

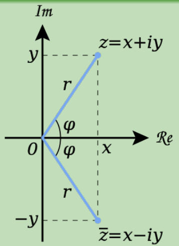

Рис.: Модулем комплексного числа z є відстань r від числа z до початку координат.

$$|z| = \sqrt{[\mathrm{Re}(z)]^2 + [\mathrm{Im}(z)]^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

де $\mathrm{Re}(z) = x$ і $\mathrm{Im}(z) = y$ дійсна і уявна частини z відповідно.

Зв'язок похідної та модуля

Властивості похідної функції модуля

Функція абсолютного значення має похідну для кожного $x \neq 0$, але не диференціюється при $x = 0$. Похідна функції для $x \neq 0$ задається ступеневою функцією:

$$\frac{d(x)}{dx} = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, & \text{при } x > 0, \\ -1, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Друга похідна $|x|$ стосовно x дорівнює нулю всюди, окрім нуля, де його не існує. В якості узагальненої функції друга похідна може бути прийнята як двократна функція дельти Дірака.

Відстань на площинах дійсних і комплексних чисел

Означення

Модуль дійсного або комплексного числа — це відстань від цього числа до початку, по лінії дійсних чи комплексних чисел на відповідних площинах.

Звичайна відстань між двома точками $A = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$ та $B = (b_1; b_2; \ldots; b_n)$ у Евклідовому n-вимірному просторі позначається як:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i - b_i)^2}.$$

а для комплексних чисел $a = a_1 + ia_2$ та $b = b_1 + ib_2$, тобто у двовимірному просторі модуль визначається наступним чином:

$$|a - b| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + i(a_2 - b_2)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{2}(a_i - b_i)^2}.$$

Дякую за увагу!