

אלגוריתמים 2 מ

מבוא

אלגוריתמים ומנגנונים

- מציאת מסלול מהיר ביותר ברשת מחשבים...
- ... כשכל מחשב מדווח על המהירות שלו.

- מציאת ערך גבוה ביותר...
- ... כשכל אדם מדווח על הערך שלו.

- מציאת שידוך בין צמתים בגרף דו-צדדי...
- ... כשצד אחד מייצג סטודנטים
וצד שני מייצג מחלקות.

אלגוריתמי שיבוץ

שיבוץ סטודנטים למעונות

הקלט: 1. כל סטודנט ממלא:

עדיפות ראשונה:

עדיפות שניה:

עדיפות שלישית:

2. משרד המעונות מגדיר תור בין סטודנטים לפי קריטריוני זכאות.

האלגוריתם: 1. עוברים על הסטודנטים לפי התור.

2. נותנים לכל סטודנט את העדיפות הכי גבוהה הפנויה.

3. אם כל 3 העדיפויות תפוסות – נותנים לסטודנט חדר באקראי.

בנין מעונות 103



דירה בת 2 חדרים, כוללת 2 חדרי שינה הכוללים מיטה 2, 2 ארונות, 2 שולחנות, 2 כסאות, שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיורים, חשמל וארונות מטבח, סלון, דירה ממוזגת.

*אפשרות לדירה עם מרפסת או גיזה בתוספת תשלום.

בנין מעונות 102



סטודיו

דירה המיועדת לסטודנט אחד, מותגה באישור דיוקן הסטודנטים.

שלישיה

דירה המיועדת ל-3 סטודנטים, כל סטודנט בחדר נסדר שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיורים חשמל וארונות מטבח, סלון, דירה ממוזגת.

רביעיה

דירה המיועדת ל-4 סטודנטים, 2 סטודנטים בחדר שינה שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיורים חשמל וארונות מטבח, סלון, דירה ממוזגת.

זוגי

דירה המיועדת ל-2 סטודנטים, כל סטודנט בחדר נסדר שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיורים חשמל וארונות מטבח, סלון, דירה ממוזגת.

קרוואן סטודיו



יחידה לסטודנט יחיד, הכוללת מיטה, ארון בגדים, שולחן, כיסא, מראה, שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיורים חשמל וארונות מטבח, סלון. אפשרות התקנת מזגן בתוספת תשלום. קרוואן זה ניתן לקבל אך ורק באישור של דיוקן הסטודנטים.

בנין מעונות 101



יחידה בת 2 חדרים, הכוללת: 2 חדרי שינה הכוללים 4 מיטות, 2 ארונות בגדים, 3 שולחנות, 4 כסאות שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיורים חשמל וארונות מטבח, סלון, דירות ממוזגות.

קרוואן זוגי



יחידה כוללת חדר שינה + סלון, הכוללת: 2 מיטות, 1 ארון בגדים, 2 שולחנות, 2 כסאות, מראה, שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיורים חשמל וארונות מטבח, סלון, אפשרות התקנת מזגן בתוספת תשלום.

מעון לזוגות נשאים



יחידה כוללת חדר שינה + סלון לזוג נשוי, חדר שינה הכולל 2 מיטות, 1 ארון בגדים, שולחן, 2 כסאות, מראה, שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיורים חשמל וארונות מטבח, סלון, אפשרות התקנת מזגן בתוספת תשלום.

קרוואן שלישיה



יחידה כוללת 3 חדרים, הכוללת: 3 חדרים שינה הכוללים 3 מיטות, 3 ארונות בגדים, 4 שולחנות, 4 כסאות שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיורים חשמל וארונות מטבח, סלון, אפשרות התקנת מזגן בתוספת תשלום.

קרוואן רביעיה



יחידה כוללת 2 חדרים שינה + סלון, 2 חדרים שינה הכוללים 4 מיטות, 2 ארונות בגדים, 3 שולחנות, 4 כסאות שירותים + מקלחת, מטבח מאובזר, מקרר, כיורים חשמל וארונות מטבח, סלון, אפשרות התקנת מזגן בתוספת תשלום.

שיבוץ סטודנטים למעונות

הקלט: 1. כל סטודנט ממלא:

עדיפות ראשונה: _____

עדיפות שניה: _____

עדיפות שלישית: _____

2. משרד המעונות מגדיר

תור בין סטודנטים לפי

קריטריוני זכאות.

האלגוריתם: 1. עוברים על

הסטודנטים לפי התור.

2. נותנים לכל סטודנט את

העדיפות הכי גבוהה הפנויה.

3. אם כל 3 העדיפויות תפוסות –

נותנים לסטודנט חדר באקראי.

האם המנגנון

הזה טוב?

ומה זה בכלל

מנגנון "טוב"?

תכונה א: אמיתיות

הגדרה: אלגוריתם נקרא **אמיתי** (truthful, strategyproof) אם כל משתתף משיג את התוצאה הטובה ביותר עבורו כאשר הוא מדווח את ההעדפות האמיתיות שלו, וזאת בלי **תלות** בפעולות של המשתתפים האחרים.

שאלות:

- למה זה טוב?
- האם אלגוריתם "שיבוץ שלוש עדיפויות" הוא אמיתי?

תכונה א:כא

משפט: אלגוריתם "שיבוץ שלוש עדיפויות" אינו אמיתי.

הוכחה: ניקח לדוגמה סטודנט ששלושת העדיפויות הראשונות שלו הן 101, 102, 103. נניח לצורך הדוגמה שבכל בניין יש 100 חדרים, והסטודנט נמצא במקום 301 בתור. אם הסטודנט יודע ש-300 הראשונים בתור רוצים את הבניינים האלה, כדאי לו לומר שהוא רוצה בעדיפות ראשונה את העדיפות הרביעית שלו – זה טוב יותר מלקבל חדר באקראי.

· תכונה א:כא

שאלה: האם קיים אלגוריתם שיבוץ אמיתי?

תשובה: כן, זה קל:

• התעלם מהקלט ושבץ את הסטודנטים באקראי.

מה הבעיה באלגוריתם זה?

תכונה ב: יעילות פארטו

הגדרות:

- תוצאה א נקראת **שיפור פארטו** (Pareto) של תוצאה ב, אם היא טובה יותר לחלק מהמשתתפים, וטובה לפחות באותה מידה לכולם.
- בעברית: "זה נהנה וזה לא חסר".
- תוצאה נקראת **יעילה פארטו** אם לא קיימת תוצאה אחרת שהיא שיפור פארטו שלה.
- **מנגנון הוא יעיל פארטו** אם תוצאתו יעילה פארטו.

• למה זה טוב?

• האם מנגנון "שיבוץ שלוש עדיפויות" יעיל פארטו?

תכונה ב: יעילות פארטו

משפט: אלגוריתם "שיבוץ שלוש עדיפויות" אינו יעיל פארטו.

הוכחה:

ניקח לדוגמה שני סטודנטים, א ו-ב, שכל שלושת העדיפויות שלהם נתפסו כשהגיע תורם. כל אחד מהם משובץ באקראי. ייתכן ש-א ישובץ לעדיפות הרביעית של ב שהיא העדיפות האחרונה שלו, ולהיפך. תוצאה זו אינה יעילה פארטו.

תכונה ב: יעילות פארטו

שאלה: האם קיים אלגוריתם שיבוץ יעיל פארטו?

תשובה: כן! דומה לקודם בהבדל אחד:
כל סטודנט מסמן את **כל** רשימת העדיפויות שלו,
ולא רק שלוש עדיפויות גבוהות ביותר.

האלגוריתם המתקבל נקרא "דיקטטורה סדרתית"
(serial dictatorship).

אלגוריתם "דיקטטורה סדרתית" לא רק יעיל
פארטו אלא גם אמיתי.

תכונה א:כא

משפט: אלגוריתם "דיקטורה סדרתית" אמיתי.

הוכחה: נניח שמקומך בתור הוא k . עד שמגיע תורך, $k-1$ חדרים כבר תפוסים, וקבוצת החדרים הנשארים לא תלויה בדיווח שלך. המנגנון בוחר עבורך, מתוך החדרים הנשארים, את החדר הטוב ביותר עבורך – בהתאם לרשימה שדיווחת. לכן, התוצאה הטובה ביותר עבורך תתקבל ע"י דיווח הרשימה האמיתית.

תכונה ב: יעילות פארטו

משפט: אלגוריתם "דיקטורה סדרתית" יעיל פארטו.

הוכחה: כיוון שהאלגוריתם אמיתי, ניתן להניח שכל הסטודנטים מדווחים את העדיפויות האמיתיות.

בהינתן קלט מסויים, נגדיר:

- שיבוץ א - השיבוץ של המנגנון.

- שיבוץ ב - שיבוץ אחר כלשהי.

נניח בשלילה ששיבוץ ב הוא שיפור פארטו של שיבוץ א.

תכונה ב: יעילות פארטו

[המשך הוכחה]

נניח בשלילה ששיבוץ ב הוא שיפור פארטו של שיבוץ א.

• נניח שהסטודנט הראשון הנהנה מהשיפור הוא הסטודנט שמקומו בתור הוא k .

• כל הסטודנטים שמקומם 1 עד $k-1$ לא חסרים, כלומר – קיבלו את אותו סוג חדר בשני השיבוצים.

• מכאן: כשמגיע תורו של הסטודנט ה- k , בשני השיבוצים, אוסף החדרים הפנויים הוא זהה.

• אבל המנגנון בוחר עבור סטודנט k את החדר הטוב ביותר עבורו מבין החדרים הפנויים – סתירה. ***

המסר

שינוי קטן באלגוריתם יוצר שינוי גדול
באיכות-החיים של המשתתפים.

שאלה: האם מנגנון השיבוץ למעונות
באריאל הוא אמיתי? יעיל פארטו?