

החלפות ומעגלים

היום נדבר על החלפות. נניח שכמה עובדים משובצים לתורניות, וחלק מהם היו מעדיפים להתחלף עם אחרים. או, בהמשך לדוגמאות מהשיעור הקודם, כמה סטודנטים משובצים לחדרים במעונות והיו מעוניינים להתחלף. אנחנו רוצים ליצור שיבוץ חדש שיהיה יעיל פארטו. לכאורה הבעיה דומה לבעיית השיבוץ שדיברנו עליה בשיעור הראשון, הרי בסופו של דבר המטרה היא לייצר שיבוץ. ואכן אפשר להשתמש באלגוריתם "דיקטטורה סדרתית" שהזכרנו בשיעור הראשון והתוצאה תהיה יעילה פארטו. אבל זה לא אלגוריתם טוב. מדוע? כי כאן - בניגוד לבעיה הראשונה - לאנשים יש זכויות קודמות עוד לפני הפעלת המנגנון. כדי שאנשים יסכימו להשתתף במנגנון שלנו, אנחנו חייבים להבטיח להם שלא ייגרם להם נזק. אז בנוסף לתכונות של יעילות-פארטו ושל אמיתיות, אנחנו דורשים תכונה שלישית.

הגדרה: מנגנון מקיים את התכונה **השתתפות מרצון** (באנגלית: *voluntary participation*, מושג נרדף: *individual rationality*) אם כל משתתף מעדיף את תוצאת המנגנון על-פני המצב לפני המנגנון (או לפחות אדיש בין התוצאות).

אלגוריתם הדיקטטורה הסדרתית לא מקיים תכונה זו. הנה אלגוריתם שכן מקיים אותה.

אלגוריתם מעגלי המסחר - Top Trading Cycles

האלגוריתם פותח ע"י אותם חוקרים שפיתחו את המנגנון לשידוך יציב - Shapley ו Gale, עם חוקר שלישי בשם Scarf. הקלט לאלגוריתם הוא שיבוץ של אנשים לבתים - לכל איש יש בית אחד.

האלגוריתם מחזיק גרף מכון שבו:

- הצמתים הם האנשים והבתים;
- יש קשת מכל אדם אל הבית שהוא הכי רוצה, ומכל בית אל האדם שהוא שייך אליו.

מעדכנים את הגרף באופן הבא:

- א. מוצאים מעגל מכון בגרף (למשל ע"י אלגוריתם DFS שלמדנו בקורס קודם).
- ב. מבצעים את ההחלפה במעגל: כל אדם מקבל את הבית שהוא מצביע עליו.
- ג. מוחקים מהגרף את הצמתים של האנשים והבתים שהשתתפו בהחלפה.
- ד. לכל איש שנשאר בגרף, מעדכנים את הקשת שלו כך שתצביע לבית שהוא הכי רוצה מאלה שנשארו.
- ה. חוזרים על סעיפים א-ד עד שהגרף ריק.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מסתיים.

הוכחה: מספיק להוכיח שבשלב א תמיד קיים מעגל. הסיבה היא שמכל צומת יוצאת קשת אחת בדיוק. כיוון שהגרף סופי, אם נתחיל מצומת כלשהו ולך בכיוון החצים, מתישהו בהכרח נגיע לצומת שכבר היינו בו - זה מעגל. מש"ל.

מה סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם? - מציאת מעגל דורשת זמן $O(n)$. אחרי כל מציאת מעגל, מוחקים לפחות צומת אחד, כך שמספר השלבים הוא לכל היותר n . לכן זמן הריצה הכולל הוא $O(n^2)$.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר מקיים את תכונת ההשתתפות-מרצון.

הוכחה: האלגוריתם משבץ כל משתתף בבית שהוא הצביע עליו בשלב כלשהו. כל משתתף מצביע תמיד על הבית של עצמו או על בית טוב יותר. מש"ל.

משפט: כשהעדפות של כל המשתתפים חזקות, אלגוריתם מעגלי המסחר הוא יעיל פארטו. הוכחה: נגדיר שני שיבוצים:

שיבוץ א - השיבוץ של המנגנון.

שיבוץ ב - שיבוץ אחר כלשהו.

נניח בשלילה ששיבוץ ב הוא שיפור פארטו של שיבוץ א.

נתייחס למעגלי-המסחר לפי הסדר שבו התבצעו במנגנון: מעגל 1, מעגל 2 וכו'. יהי k המספר הקטן ביותר כך שאדם ממעגל k נהנה מהשיפור. בשיבוץ א, אדם זה מקבל את הבית הטוב ביותר מבין הבתים שלא נלקחו ע"י מעגלים שמספרם $j > k$. בשיבוץ ב מצבו טוב יותר, כלומר הוא בהכרח מקבל חדר שבשיבוץ א ניתן לאדם ממעגל $j > k$. בשיבוץ ב, אדם j מקבל בית אחר. כיוון שהוא לא אדיש, הבית האחר גרוע יותר או טוב יותר מזה שקיבל בשיבוץ א. אם הוא גרוע יותר - זה לא שיפור פארטו. אם הוא טוב יותר - זו סתירה להנחה ש- k הוא הראשון. מש"ל.

הערה: אלגוריתם מעגלי המסחר מקיים תכונה חזקה יותר הנקראת יציבות. בהינתן שיבוץ מסויים של אנשים לבתים, נגדיר **קבוצה מערערת** (blocking coalition) כקבוצה היכולה לפרוש מהמערכת ולבצע מסחר פנימי בתוך הקבוצה, והתוצאה שתתקבל תהיה טובה יותר לפחות לאחד מחברי הקבוצה, ולא פחות טובה לכל שאר חברי הקבוצה. אם אין קבוצה מערערת, השיבוץ נקרא **יציב**. קבוצת השיבוצים היציבים נקראת **הליבה** (core) של משחק השיבוצים. ניתן להראות שהליבה כוללת בדיוק שיבוץ אחד, והוא השיבוץ המוחזר ע"י אלגוריתם מעגלי המסחר (ההוכחה דומה להוכחת המשפט הקודם). קל לראות גם ששיבוץ יציב הוא יעיל פארטו ומקיים השתתפות מרצון.

משפט: אלגוריתם מעגלי המסחר הוא אמיתי.

הוכחה: האבחנה החשובה כאן היא, שהקשת היוצאת מאדם מסויים משפיעה על הגרף רק באותו סיבוב שהוא סוחר, ואז הוא יוצא מהמשחק. למשל, אם יוסי סוחר במעגל 3 כשהוא תמים ובמעגל 5 כשהוא ערמומי, אז המסחר עד למעגל 3 מתנהל בדיוק באותו אופן בשני המצבים - העובדה שיוסי שינה את הקשת שלו, לא גרמה שום שינוי בקשתות אחרות ובמעגלים אחרים.

נניח שיוסי סוחר במעגל k כשהוא תמים ובמעגל j כשהוא ערמומי. נשווה בין מצבים אלו בשני מקרים.

- מקרה א: $j = k$. במקרה זה, המסחר עד למעגל $k-1$ זהה בשני המצבים. לכן קבוצת הבתים שנשארו זמינים אחרי מעגל $k-1$ היא זהה בשני המצבים. וכשיוסי תמים, הוא מקבל את הבית הטוב ביותר בקבוצה זו.

- מקרה ב: $j < k$. במקרה זה, המסחר עד למעגל $j-1$ זהה בשני המצבים. בסיבוב הבא, כל הקשתות זהות בשני המצבים, פרט לקשת היוצאת מיוסי. כשיוסי ערמומי, הקשת היוצאת ממנו סוגרת מעגל (מעגל j); נניח שהוא סוגר מעגל עם בית כלשהו x . כשיוסי תמים, הוא נמצא בסופה של שרשרת המתחילה בבית x . כל עוד לא נסגר מעגל, כל השרשרת הזאת נשארת בגרף. בפרט, בית x עדיין נמצא בגרף כאשר מעגל k נסגר. לכן הבית שמקבל יוסי כשהוא תמים טוב לפחות כמו x .

אלגוריתם מעגלי המסחר יכול לשמש תחליף למסחר בכסף, במצבים שבהם לא רוצים מסיבה כלשהי להשתמש בכסף. לדוגמה, אפשר להשתמש בו כדי לבנות מערכת להחלפת ספרים משומשים. כל אחד מציע ספר ובוחר את הספר שהוא הכי רוצה מבין הספרים האחרים, והמערכת מבצעת החלפות במעגל. מעגלי-מסחר יכולים לשמש גם כדי ליישם את מצוות היוכל בימינו. ראו מאמרי "אלגוריתם היוכל - תהליך הדרגתי לחלוקת קרקעות", בד"ר 28, <http://www.tora.us.fm/tryg/yovl/bdd/yovel-bdd-28.pdf>.

החלפת כליות - kidney exchange

מחלת כליות היא בעיה רפואית קשה. חולי כליות צריכים להיות מחוברים לדיאליזה במשך שעות רבות - אלא-אם-כן משתילים להם כליה חדשה. ברוב המדינות, התור להשתלת כליות ארוך הרבה יותר ממספר הכליות הנתרמות. פתרון אפשרי לבעיה היה לאפשר מסחר בכליות, אלא שהחוק ברוב המדינות אוסר סחר באיברים (יש מדינה אחת שבה החוק מתיר סחר בכליות והיא איראן. זו גם המדינה היחידה שאין בה תור להשתלת כליות...).

החוק כן מתיר תרומת איברים בחינם, ואכן לחולים רבים יש חבר או קרוב המוכן לתרום להם כליה. הבעיה היא, שבמקרים רבים התורם לא מתאימה לחולה מבחינה רפואית. הסיבה העיקרית היא סוג הדם. כידוע, יש ארבעה סוגי דם. הטבלה הבאה מתארת מי יכול לתרום למי (למשל, סוג-דם O יכול לתרום לכולם):

תורם V נתם <	O	A	B	AB
O	כן	כן	כן	כן
A	לא	כן	לא	כן
B	לא	לא	כן	כן
AB	לא	לא	לא	כן

בנוסף לסוג דם ישנם עוד גורמים - נוגדנים מסויימים שנמצאים אצל התורם ולא אצל הנתרם יכולים לגרום לדחיית השתל.

עכשיו תארו לעצמכם שיש שני זוגות תורמים: תורם א מתאים לחולה ב (למשל שניהם עם דם סוג A), ותורם ב מתאים לחולה א (למשל שניהם עם דם סוג B). במצב זה אפשר לבצע החלפת כליות: הארבעה מסכמים ביניהם, שתורם א יתרום לחולה ב ובתמורה תורם ב יתרום לחולה א. "מסחר" מסוג זה הוא חוקי ברוב המדינות.

כדי לעודד החלפות כאלו, הוקמו מאגרי-מידע של זוגות חולים ותורמים, למשל מאגר Kidney Paired Donation בארה"ב. ניתן לייצג מאגר-מידע כזה כגרף מכוון שבו:

- הצמתים הם הזוגות;
 - יש קשת מזוג א אל זוג ב, אם התורם בזוג א יכול מבחינה רפואית לתרום כליה לחולה בזוג ב. עקרונית, יכולנו להשתמש כאן באלגוריתם "מעגלי המסחר" (וכך אכן עשו בהתחלה - בשנת 2004 - כשהקימו את המאגר הראשון). אולם יש שתי בעיות:
 - בהחלפת כליות ה"העדפות" הן בינאריות: או שזוג מסויים מתאים, או שלא. לכן לכל זוג יכולות להיות הרבה קשתות יוצאות. באלגוריתם מעגלי המסחר, לכל צומת היתה קשת יוצאת אחת.
 - החלפת כליות היא תהליך בלתי הפיך. לכן, כדי לוודא שאף תורם לא יתחרט באמצע, חשוב שכל ההשתלות יתבצעו בדיוק באותו זמן. ככל שהמעגלים גדולים יותר, זה יותר מסובך מבחינה לוגיסטית. לכן באופן פרקטי המעגלים צריכים להיות קצרים - באורך 2 או לכל היותר 3. אלגוריתם מעגלי המסחר לא מבטיח שום דבר לגבי אורך המעגלים.
- במצב זה, נראה שהפתרון של מציאת מעגלים אינו מתאים. אבל אפשר להשתמש בפתרון אחר.

החלפת כליות בזוגות

ראשית, נניח שאנחנו מסתפקים במעגלים באורך 2. במצב זה אפשר להפוך את הגרף לגרף לא-מכוון, שבו יש קשת בין זוג א לזוג ב, אם גם תורם א מתאים לחולה ב וגם תורם ב מתאים לחולה א. המטרה שלנו היא לבצע כמה שיותר החלפות. לאיזו בעיה בתורת הגרפים זה מתאים? מציאת שידוך גדול ביותר בגרף.

בקורס הקודם למדתם למצוא שידוך גדול ביותר בגרף דו-צדדי בעזרת אלגוריתם הזרימה של Ford-Fulkerson. הגרף שלנו הוא גרף כללי - לא בהכרח דו-צדדי. לכן צריך אלגוריתם כללי יותר. ואכן קיים אלגוריתם אשר מוצא שידוך גדול ביותר בגרף כללי בזמן פולינומיאלי. האלגוריתם הראשון שהוצג לבעיה זו היה של ג'ק אדמונדס (Jack Edmonds). הוא נקרא אלגוריתם הפרחים (Blossom algorithm). זמן הריצה שלו: $O(|E||V|^2)$.

א. צבע את כל הקשתות באדום (צבע אדום מסמל שהקשת לא בשידוך; ירוק יסמל שהקשת בשידוך).

ב. מצא מסלול שיפור (augmenting path): מסלול המתחיל ומסתיים בצומת שאינו בשידוך (סמוך רק לקשתות אדומות), והקשתות שבו מתחלפות בצבען: אדום--ירוק--אדום--...--ירוק--אדום.

ג. הפוך את צבע הקשתות במסלול השיפור: כל אדומה לירוקה וכל ירוקה לאדומה (שימו לב שמספר הקשתות הירוקות גדל ב-1 ומספר הצמתים בשידוך גדל ב-2).

ד. בצע את שלבים ב, ג כל עוד יש מסלול שיפור.

לפי הלמה של ברג' (Berge), שלא נוכיח כאן, שידוך הוא מקסימלי אם-ורק-אם אין בו מסלולי שיפור. לכן האלגוריתם הנ"ל עובד. החלק הקשה באלגוריתם הוא חלק ב - מציאת מסלול שיפור (כאן נכנס הקטע של הפרחים). מפאת קוצר הזמן לא נתאר שלב זה כאן; המעוניינים מוזמנים להסתכל בוויקיפדיה https://en.wikipedia.org/wiki/Blossom_algorithm.

השלב הבא הוא לברר האם האלגוריתם אמיתי. צריך קודם להגדיר מה זה בכלל "אמיתי" בהקשר של החלפת כליות. הרי התאמה בין תורם לנתרם אינה קשורה להעדפות של המשתתפים - היא אובייקטיבית וניתנת לבדיקה רפואית. עדיין יש שני דברים שזוגות יכולים לעשות:

- חולים שיש להם כמה תורמים תואמים במאגר, יכולים להסתיר תוצאות של בדיקות המראות על התאמה (או לא לבצע את הבדיקות), וכך להסתיר קשתות עם תורמים תואמים.
- חולים שיש להם כמה חברים לא-תואמים שמוכנים לתרום לזכותם, יכולים להסתיר אותם (או להגיד להם לא לבוא), וכך להסתיר קשתות עם חולים תואמים.

בשני המקרים המניפולציה מתבטאת בהסתרה של קשת בגרף ההתאמות. נגדיר שאלגוריתם להחלפת כליות הוא אמיתי אם אף זוג לא יכול להרוויח ע"י הסתרת קשת. "להרוויח" הכוונה, שבמצב הרגיל הוא לא ישתתף בהחלפה, וע"י ההסתרה הוא כן ישתתף בהחלפה.

האם אלגוריתם "שידוך גדול ביותר" הוא אמיתי לפי הגדרה זו? זה תלוי בפרט טכני-לכאורה באלגוריתם למציאת שידוך גדול ביותר -- באופן שבירת השיוויון שלו (tie-breaking) -- מה האלגוריתם עושה כשיש כמה שידוכים גדולים ביותר? איך הוא מחליט איזה מהם להחזיר?

בדרך-כלל, כשמפתחים אלגוריתם אופטימיזציה, הדבר היחיד שחשוב לנו הוא שהאלגוריתם יחזיר תוצאה אופטימלית כלשהי. אם יש שתיים - שיחזיר אחת מהן, מה אכפת לנו איזה? אבל כשמדברים על מנגנון, לפרטים האלה יש חשיבות. תארו לכם שמישהו ייכנס לקוד של האלגוריתם ויבין איך הוא עובד, ויגיע למסקנה שאם הוא יסתיר אחת מהקשתות שלו - הוא יגדיל את הסיכויים שלו להיכנס לשידוך (עם קשת אחרת). זה יגרום לאנשים להסתיר קשתות ועלול לפגוע ביעילות של האלגוריתם!

כדי לפתור את הבעיה צריך להגדיר את המנגנון בצורה מדויקת יותר. הנה דרך אפשרית לעשות זאת.

מנגנון שידוך-גדול-ביותר-עם-עדיפויות:

- קבע סדר-עדיפות כלשהו על הצמתים (למשל לפי זמן המתנה בתור להשתלה, דחיפות רפואית, גיל, וכד').
- מצא את כל השידוכים הגדולים ביותר בגרף (אפשר לעשות זאת ע"י שיפור של אלגוריתם אדמונדס).
- מכל השידוכים הגדול ביותר, בחר את השידוך עם וקטור-העדיפויות הגדול ביותר בסדר מילוני.

משפט: מנגנון שידוך-גדול-ביותר-עם-עדיפויות הוא אמיתי.

הוכחה: נניח בשלילה שצומת צ מסתיר קשת ומרוויח. כלומר:

- בלי הסתרה (מצב א) - נבחר שידוך א בלי צ.
 - עם הסתרה (מצב ב) - נבחר שידוך ב עם צ.
- אבל, שידוך א זמין במצב ב (כי צ יכול להסתיר רק קשתות סמוכות לו), ושידוך ב זמין במצב א (כי יש יותר קשתות). כיוון שהבחירה בין שידוכים היא לפי סדר מילוני קבוע על וקטורי העדיפויות שלהם, בשני המצבים ייבחר אותו שידוך - וזו סתירה. מש"ל.

מה המסר? שכשאלגוריתם עובד עם בני-אדם, גם פרטים טכניים-לכאורה כמו אופן שבירת השייווין עלולים להשפיע באופן מפתיע.

תמריצים של מרכזים רפואיים

הראינו קודם מנגנון למציאת שידוך גדול ביותר שהוא אמיתי ביחס לזוגות - זוגות לא מרויחים מכך שהם מסתירים קשתות.

אבל בעולם ההשתלות יש עוד שחקן עם אינטרסים משלו - המרכז הרפואי. האינטרס של מרכז רפואי הוא להשיג כמה שיותר השתלות לחולים שלו. נניח שבמרכז רפואי מסויים יש מאגר פרטי של זוגות, והוא יכול לעשות ביניהם התאמות ולבצע השתלות. האם כדאי לו לשתף את המאגר שלו עם המאגר הכללי? לא תמיד. לפעמים הוא "להרויח" (כלומר להשיג יותר השתלות עבור חולים שלו) ע"י הסתרת זוגות!

ראינו קודם מנגנון יעיל פארטו שהוא אמיתי עבור הזוגות. **משפט:** לא קיים מנגנון יעיל פארטו שהוא אמיתי עבור מרכזים רפואיים! הוכחה: נניח בשלילה שקיים מנגנון כזה. נראה מצב שבו, לכל שידוך-גדול-ביותר שהמנגנון בוחר, קיים מרכז רפואי שיכול להסתיר זוגות ולהרויח (ראו דוגמה למצב כזה במצגת). מש"ל.

מה עושים כשאי-אפשר למצוא מנגנון המקיים את כל התכונות הרצויות? - מתפשרים. דרך אחת להתפשר היא לחפש מנגנון אמיתי שהוא לא לגמרי יעיל פארטו - הוא לא מוצא את השידוך הגדול ביותר אלא שידוך שהוא "כמעט" גדול ביותר.

משפט: כשיש שני מרכזים רפואיים, קיים מנגנון שהוא אמיתי עבור המרכזים, ומחזיר שידוך בגודל לפחות $1/2$ מהאופטימלי.

רעיון ההוכחה: מחשבים, עבור כל מרכז רפואי, את השידוך הגדול ביותר שהוא יכול להשיג לבד. מחשבים את השידוך הגדול ביותר מבין כל השידוכים המבטיחים לכל מרכז רפואי לפחות אותו מספר של זוגות משודכים. אשלגי ושותפיו (2013) הראו, שמנגנון מעין זה (קצת יותר מורכב) הוא אמיתי, ומשיג שידוך גלובלי שגודלו לפחות $1/2$ מהשידוך הגדול ביותר. הם גם הראו איך להרחיב את הרעיון לשלושה בתי"ח או יותר.

החלפת כליות בשלשות

מה אם אנחנו רוצים לאפשר גם מעגלים באורך 3? כאן הבעיה כבר מסתבכת מאד מבחינה חישובית. לא קיים אלגוריתם פולינומיאלי המוצא את מספר המעגלים-באורך-3 הגדול ביותר. למעשה הבעיה היא NP-קשה, כך שלפי ההשערה המקובלת, כנראה גם לא יהיה אלגוריתם כזה. אבל החוקרים לא מתייאשים ומנסים לפתח אלגוריתמים שיצליחו לפתור גרפים כמה שיותר גדולים. למשל, ישנו אלגוריתם בשם branch-and-price המבצע חיפוש חכם במרחב המעגלים, ומצליח לפתור בעיות עם 10,000 זוגות במשך מספר שעות.

נקודה מעניינת - אם אנחנו מוכנים למצוא מעגל בכל אורך שהוא, הבעיה נעשית קלה יותר, וניתן לפתור אותה בזמן פולינומיאלי.

תורמים חסידים

עד עכשיו דיברנו על תורמים שמוכנים לתרום כליה בתמורה לכליה אחרת. אולם יש גם תורמים חסידים (=אלטרואיסטים, "שלי שלך ושליך שלך") המוכנים לתרום כליה בלי כל תמורה. איך הם משפיעים על מנגנון ההחלפה שלנו? בשתי דרכים:

א. כשיש תורמים חסידים, יש במאגר לא רק מעגלים, אלא גם **שרשראות**. צריך לשנות את האלגוריתם כך שימצא, לא את מספר המעגלים הגדול ביותר, אלא את השילוב המקסימלי של מעגלים+שרשראות. האלגוריתם מסובך למדי ולא נלמד אותו כאן.

ב. אורך השרשראות לא מוגבל, כי התרומות לא חייבות להתבצע בו-זמנית. בשנת 2011 בוצעה שרשרת של 30 השתלות (60 ניתוחים בו-זמנית) בזכות תורם חסיד אחד!

מקורות

• Parkes and Seuken, Economics and Computation (2018), chapter 12

סיכום: אראל סגל-הלוי.