

תרגיל בית 1

יש לענות על שאלה אחת לבחירתכם. הגשה בזוגות, עד תחילת ההרצאה בשבוע הבא.

שאלה 1: יעילות ואמיתיות

[מבוסס על סיפור אמיתי; השמות שונים למניעת זיהויים] בני משפחת X רוצים ללכת יחד למסעדה. הם מתלבטים בין שלוש אפשרויות: מסעדה א, מסעדה ב ומסעדה ג. כל אחד מציין, לגבי כל מסעדה, מספר בין 1 = מאד לא רוצה, לבין 10 = מאד רוצה, למשל:

משתתפים	מסעדה א	מסעדה ב	מסעדה ג
א	8	4	3
ב	5	8	1
ג	3	6	9
ד	4	5	2
ה	3	4	3

א. ירמיהו¹ מציע לבחור בין האפשרויות בעזרת המנגנון הבא. עבור כל מסעדה, מחשבים את **סכום** כל המספרים שסימנו המשתתפים (הסכום בכל עמודה). בוחרים את המסעדה שהסכום בעמודה שלה הוא הגבוה ביותר. האם המנגנון של ירמיהו הוא אמיתי? האם הוא יעיל פארטו? הוכיחו או הפריכו.

ב. יוחנן² מציע לבחור בין האפשרויות בעזרת המנגנון הבא. עבור כל מסעדה מחשבים את **המינימום** בין כל המספרים שסימנו המשתתפים (המינימום בכל עמודה). בוחרים את המסעדה שהמינימום בעמודה שלה הוא הגבוה ביותר. האם המנגנון של יוחנן הוא אמיתי? האם הוא יעיל פארטו? הוכיחו או הפריכו.

שאלה 2: דיקטטורה סדרתית

א. בכיתה תיארו את אלגוריתם הדיקטטורה הסדרתית בהנחה שאף משתתף לא אדיש - כל סטודנט יכול לדרג כל שני חדרים במעונות ולהגיד איזה מהם טוב יותר. נניח עכשיו שיש סטודנטים אדישים - למשל יש סטודנטים שלא אכפת להם אם יהיו בבניין 101 או 102. האם המנגנון עדיין יעיל פארטו? האם המנגנון עדיין אמיתי? הוכיחו או הפריכו.

ב. לאחר שהסטודנטים קיבלו מעונות, אגודת הסטודנטים מחלקת להם מתנות. יש n סטודנטים ו- $2n$ מתנות וכל סטודנט צריך לקבל 2 מתנות. נשיא האגודה הציע את האלגוריתם הבא: מסדרים את הסטודנטים לפי סדר העדיפות שלהם (אותו סדר-עדיפות כמו בחלוקת המעונות), וכל אחד מהם בוחר חפץ. לאחר מכן עושים עוד סיבוב בסדר הפוך, וכל אחד בוחר חפץ נוסף. הוכיחו שהאלגוריתם אינו אמיתי; הציעו תיקון קטן באלגוריתם שיהפוך אותו לאמיתי.

1 ירמיהו בנתהאם (Jeremy Bentham), פילוסוף אנגלי שחי לפני כ-200 שנה. פיתח את הפילוסופיה **האוטיליטרית** שמשפט המפתח שלה הוא: "it is the greatest happiness of the greatest number that is the measure of right and wrong". מקובל לפרש שהכוונה למיקסום הסכום של רמות האושר.
2 יוחנן רולס (John Rawls), פילוסוף אמריקאי שנפטר לפני כ-20 שנה. פיתח את העיקרון: "promoting the interests of the least advantaged members of society". מקובל לפרש שהכוונה למיקסום רמת האושר הנמוכה ביותר.

שאלה 3: יציבות ויעילות

- א. האם כל שידוך יציב הוא יעיל פארטו? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.
- ב. האם כל שידוך יעיל פארטו הוא יציב? הוכיחו או הביאו דוגמה נגדית.

שאלה 4: אלגוריתם קבלה-על-תנאי

- א. מיצאו דוגמה עם 3 סטודנטים ו-3 מחלקות שבו אלגוריתם קבלה-על-תנאי מחזיר תמיד את אותו שידוך, בין אם הסטודנטים מציעים או המחלקות מציעות.
- ב. הוכיחו שאלגוריתם קבלה-על-תנאי כשהמחלקות מציעות, מחזיר את השידוך היציב הכי גרוע עבור הסטודנטים מכל השידוכים היציבים (רמז: הוכיחו שכל שידוך יציב שהוא הכי טוב עבור המחלקות, הוא הכי גרוע עבור הסטודנטים).

שאלה 5: הרחבות לאלגוריתם קבלה-על-תנאי

- א. הסבירו איך צריך לשנות את האלגוריתם כדי שיעבוד גם כשמספר הסטודנטים גדול יותר או קטן יותר ממספר המחלקות (עדיין בכל מחלקה יש מקום אחד).
- ב. הסבירו איך צריך לשנות את האלגוריתם כאשר בכל מחלקה יש מקום לכמה סטודנטים, מספר המקומות הכולל במחלקה i הוא C_i , לכל מחלקה יש דירוג על הסטודנטים, וכל מחלקה מעדיפה לקבל את C_i הסטודנטים עם הדירוג הגבוה ביותר בכל קבוצה. כתבו בפירוש את האלגוריתם למקרה זה.
- ג. באלגוריתם "קבלה על תנאי", כל מחלקה מדרגת את הסטודנטים בלי לראות מה הסטודנטים דירגו. נניח עכשיו שאנחנו מאפשרים למחלקות לראות את הדירוג של הסטודנטים לפני שהן מפרסמות את הדירוג שלהן. האם האלגוריתם עדיין אמיתי?

שאלה 6: שידוך יציב במקרה פשוט

- בליגת כדורסל מסויימת, לכל שחקן יש העדפות שונות על הקבוצות, אבל לכל הקבוצות יש אותן העדפות על השחקנים - כל הקבוצות מדרגות את השחקנים מהגבוה לנמוך. כיתבו אלגוריתם לשידוך יציב בין קבוצות לשחקנים, שהוא פשוט יותר מאלגוריתם קבלה-על-תנאי, אך עדיין אמיתי.

שאלה 7: מנגנונים במציאות

- א. כזכור, **מנגנון** הוא אלגוריתם שהקלט שלו הוא ההעדפות של בני-אדם. תנו דוגמה מהחיים למנגנון. ציינו האם המנגנון אמיתי והאם הוא יעיל פארטו.
- ב. האם אתם מכירים שוק דו-צדדי המתנהל כיום בצורה מבוזרת (בלי מנגנון), ולדעתכם היה יכול להתנהל טוב יותר בצורה מרכזית ע"י מנגנון למציאת שידוך יציב?
- ג. במציאות, אלגוריתמי שידוך משמשים לשידוך בין סטודנטים למחלקות או רופאים לבתי-חולים. אבל ספרי-הלימוד והמאמרים המחקריים מדברים על שידוך בין נשים לגברים. האם לדעתכם מערכת שידוכים מרכזית כזאת יכולה לעבוד במציאות? מה היתרונות והחסרונות של מערכת כזאת ומה יקרה אם ננסה ליישם אותה?