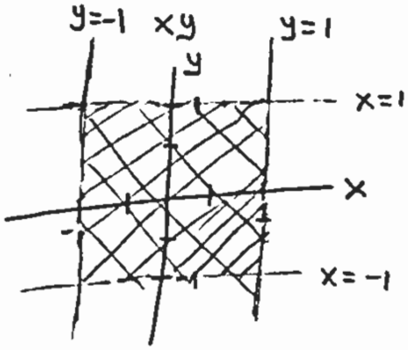
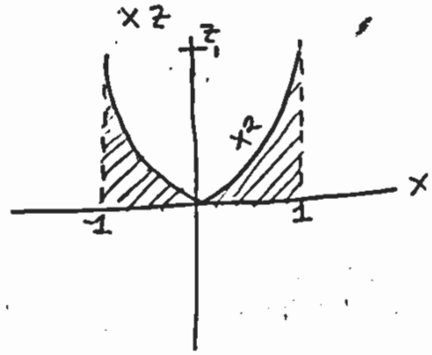
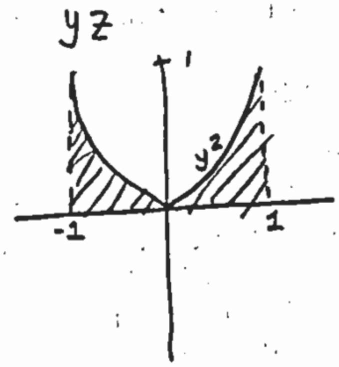
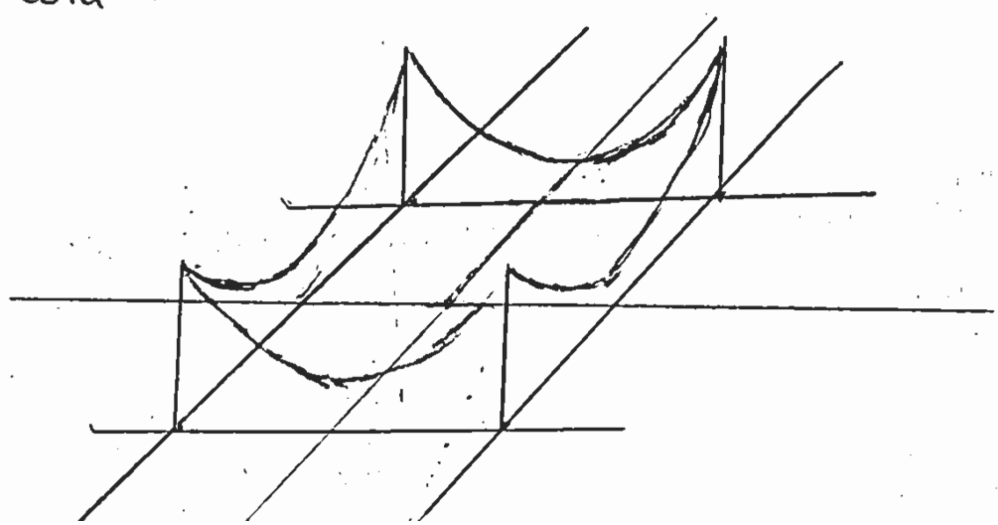
5.- Sabemos por la integral que el area de integración con respecto a Z es de Ø a x^2+y^2, y es de -1 a 1, y X es de -1 a 1



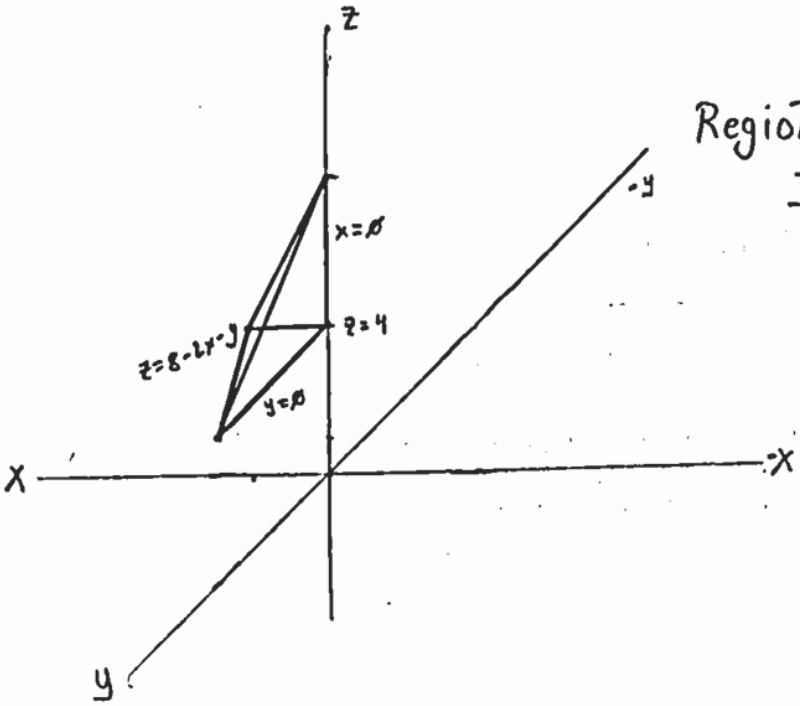




Uniendo toda esta información podemos concluir que xyZ es



7.- $\iiint_D f(x,y,z)\,dV$, Donde D es la región delimitada por los planos $z=8-2x-y$, $z=4$, $x=0$



Región a Integrar

Al dibujar la zona a integrar nos podemo fijar de los puntos de corte entre los planos.

$z=4,\ x=\emptyset,\ z=8-2x-y \qquad \therefore\ 0\leq y\leq 4$

$4=8-2(0)-y$

$y=4$

Para x se despeja de $z=8-2x-y$ pero como la base es $z=4$

$4=8-2x-y$

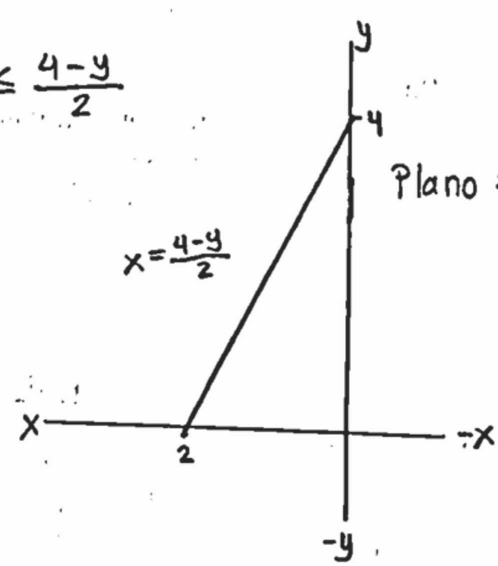
$x=\dfrac{4-y}{2}$

$\therefore\ 0\leq x\leq \dfrac{4-y}{2}$

Para z unicamente se queda como la primera integral

$0\leq z\leq 8-2x-y$

$$1.-\ \int_0^4\int_0^{\frac{4-y}{2}}\int_0^{8-2x-y} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy$$



Plano $z=4$

2.- Con el dibujo anterior podemos darnos cuenta que x puede ir de $\emptyset$ a 2, $\emptyset \leq x \leq 2$

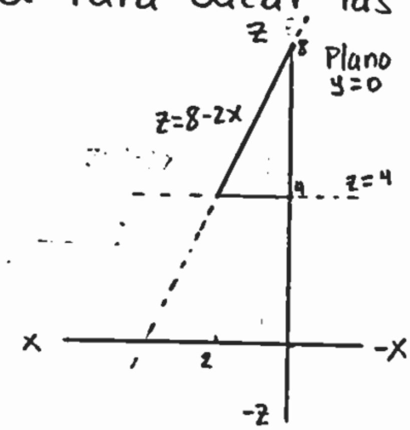
y del despeje de y en $x = \frac{4-y}{2}$

$\Rightarrow y = 4 - 2x$, $0 \leq 4 - 2x$

y z sigue igual

$$\int_0^2 \int_0^{4-2x} \int_0^{8-2x-y} f(x,y,z)\, dz\, dy\, dx$$

3.- Para sacar las sig dos, tenemos que ver la base en $y = \emptyset$



Para x podemos verlo de $\emptyset$ a 2, $\emptyset \leq x \leq 2$

por lo tanto z va de 4 a $8-2x$, $4 \leq z \leq 8-2x$

como la base es y la despejamos de $z = 8 - 2x - y$

$y = 8 - 2x - z$

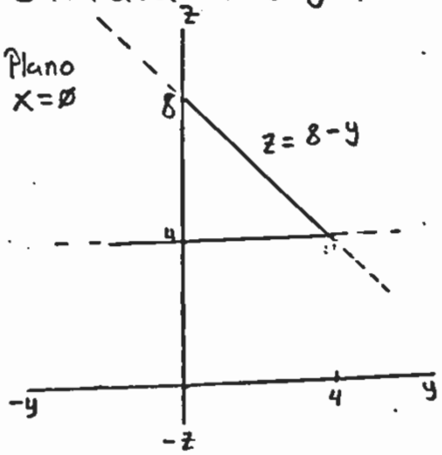
$$\therefore \int_0^2 \int_4^{8-2x} \int_0^{8-2x-z} f(x,y,z)\, dy\, dz\, dx$$

4.- De igual forma podemos ver a z de 4 a 8 y x de 2 a $z = 8 - 2x$

al despejar x de $z = 8 - 2x$, tenemos $x = \frac{z-8}{-2}$

$$\therefore \int_4^8 \int_2^{\frac{z-8}{-2}} \int_0^{8-2x-z} f(x,y,z)\, dy\, dx\, dz$$

5.- Para el sig par podemos ver la base en $x=\emptyset$



Para y podemos verlo de $\emptyset$ a 4, $\emptyset \leq y \leq 4$

y z de 4 a $8-y$, $4 \leq z \leq 8-y$

Como la base es x la despejamos de $z=8-2x-y$

tenemos $x=\frac{z+y-8}{-2}$

$$\therefore \int_0^4 \int_4^{8-y} \int_0^{\frac{z+y-8}{2}} f(x,y,z)\,dx\,dz\,dy$$

6.- De igual forma podemos ver a z de 4 a 8, $4 \leq z \leq 8$ y y de $\emptyset$ a $z=8-y$, al desperar y tenemos $y=8-z$, $\emptyset \leq y \leq 8-z$

$$\therefore \int_4^8 \int_0^{8-z} \int_0^{\frac{z+y-8}{-2}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

8.- Para resolver la integral aplicaremos el teorema de cambio de variable para pasarlo a coordenadas esféricas

Sea $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definimos $g(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\phi)$

Por teorema sabemos que su Jacobiano $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \rho^2 \sin\phi$

Como sabemos $f \circ g(\rho, \phi, \theta) = f(\rho \cos\theta \sin\phi ; \rho \sin\theta \sin\phi, \rho\cos\phi) = \rho^{-3}$

Como sabemos que $D = \{b \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a\}$, tenemos que la región de integración es: $D = \{(\rho, \phi, \theta) \mid b \leq \rho \leq a, \emptyset \leq \phi \leq \pi, \emptyset \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$\Rightarrow \iiint_D f(x,y,z)\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^a \rho^{-3}\rho^2 \sin\, d\rho\, d\phi\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_b^a \frac{1}{\rho} \sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$* \int_b^a \frac{1}{\rho} \sin\phi\, d\rho = \left[\ln(|\rho|)\sin\phi\right]_b^a = [\ln(|a|) - \ln(|b|)]\sin\phi$$

$$* \int_0^{\pi} \sin\phi\, [\ln(|a|) - \ln(|b|)]\, d\phi = (\ln(|a|) - \ln(|b|))\int_0^{\pi} \sin\phi\, d\phi = (\ln(|a|) - \ln(|b|))\left[-\cos\pi\right]_0^{\pi}$$
$$= (\ln(|a|) - \ln(|b|))(-\cos(\pi) + \cos(0) = 2(\ln(|a|) - \ln(|b|))$$

$$* \int_0^{2\pi} 2(\ln(|a|) - \ln(|b|))\, d\theta = 2(\ln(|a|) - \ln(|b|))\left[\theta\right]_0^{2\pi} = \underline{4\pi[\ln(|a|) - \ln(|b|)]} \,//$$