Little’s Law

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

✧ 離開系統時，回頭看身後有多少人。這些人都是我從進入系統開始直到離開系統這段時間內進來的人。Little‘s Law 描述的就是這一件事情。

L ：系統內總人數

W：Mean system delay (一進一出的總時間稱爲系統延遲，即一個使用者從進入系統開始排隊到被服務後離開系統的總時間)

λ: 單位時間內到達系統的使用者數量

假設 $W = 10$ seconds，即從進入系統到離開需要 10 秒。$\lambda = 1/2$，即每秒有 1/2 個人到達系統（就是每 2 秒會來一個人）。那麼在本人需要經歷的 10 秒中，將會有 5 個人進入到系統站在我身後。

✧ 但是系統並不是無限大的，假如系統只能容納 3 個人，那麼我身後永遠都不會看到有 5 個人，這樣的系統被稱作是 blocking system，在電信網路中很常見。例如此時基站只能同時容納 5 個人打電話，那麼此時第 6 個人就打不出去了。

基於上述假設，

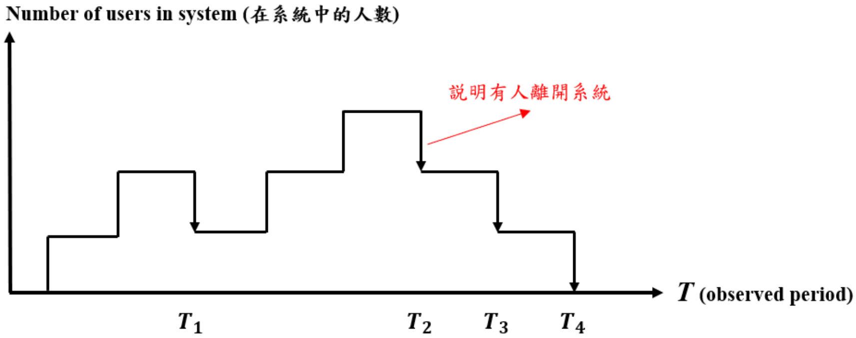
$$\boldsymbol{L = \lambda(1 - P_B)W}$$

$$\boldsymbol{L_q = \lambda(1 - P_B)W_q}$$

✧ $\boldsymbol{P_B}$ 指的是被 block 的機率

很明顯，$\boldsymbol{P_B}$ 描述的是一個機率。假設系統只能同一時間容納 3 人，現在同一時間有 5 人進入系統，那麼就有兩個人會被 block。$\boldsymbol{P_B} = (\text{被 block 的人數})/(\text{總人數})$。此處爲 0.4。$L = \lambda(1 - P_B)W = 1/2 * (1 - 0.4) * 10 = 3$ (符合容納 3 人的假設)

Proof of Little's Law



✧ 每個人都會在系統中逗留 t 時間，現在加總所有人的逗留時間，即，

$$總逗留時間 = Number\ of\ users\ in\ system \cdot t$$

$$\int_0^T N(t)dt = \sum_{i=0}^{N_c} T(i)$$

✧ $T(i)$ 表示顧客 i 逗留的時間

$$\sum_{i=0}^{N_c} T(i) \cong \frac{\sum_{i=0}^{N_c} T(i)}{N_c} \cdot N_c$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{N_c} T(i)}{N_c} = W$$

✧ 這裏表述的是一個均值的形式，(總逗留時間 / 總人數) 就是平均逗留時間，也就是所謂的 **Mean system delay** (一進一出的總時間稱爲系統延遲，即一個使用者從進入系統開始排隊到被服務後離開系統的總時間)

$$L \cong \frac{\int_0^T N(t)dt}{T}$$

✧ 這裡的表述是 (總逗留時間 / 觀察時間)，其實就是描述系統的總人數。

$$LT \cong \int_0^T N(t)dt$$

$\boldsymbol{L \cong (N_c * W) / T \cong \lambda W}$， $\boldsymbol{where\ \ N_c / T = \lambda}$ (100 人/ 10 秒 = 每秒來 10 人) QED