Union, Superposition, and Decomposition Property

PDF of Poisson Distribution

$$\Pr(X=k)=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

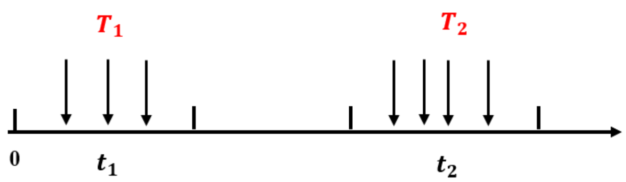
λ 指的是一段時間發生的次數，但有時候公式會是 λt，兩個 λ 意思不同，後者是單位時間內事件發生的次數(即發生率 occur rate，乘上時間就是一段時間內事件發生的次數)。以下 λ 均表示為發生率，因此機率密度函數為，

$$\Pr(X=k)=\frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

Union Property

If *I* is the union of a finite number of disjoint intervals and the length of the disjoint intervals, sum up to t_1 and k is the number of arrivals in *I* from poisson process with rate λ, the *k* has the poisson distribution with parameter λt

意思就是在 t_1 時間間隔發生了 k1 次事件， t_2 時間間隔發生了 k2 次事件，分別屬於 poisson，而且有同一個發生率 λ。加總 k1 和 k2，也同屬於 poisson，此時為 $\lambda(t_1+t_2)$。



Proof: 假設 t_1 時間間隔發生了 k1 次事件, t_2 時間間隔發生了 k2 次事件

$$\Pr(K=k, t=t_1+t_2)=\sum_{k1=0}^{k}\Pr[(k1=k,t_1),(k2=k-k1,t_2)]$$

$$=\sum_{k1=0}^{k}\frac{(\lambda t_1)^{k1}}{k!}*e^{-\lambda t_1}*\frac{(\lambda t_2)^{k2}}{(k-k1)!}*e^{-\lambda t_2}$$

$$=\sum_{k1=0}^{k}[\frac{(\lambda t_1)^{k1}*(\lambda t_2)^{k2}}{k!\,(k-k1)!}]*e^{-\lambda(t_1+t_2)}$$

$$= \sum_{k1=0}^{k} \binom{k}{k1} (\frac{1}{k!})((\lambda t_1)^{k1})((\lambda t_2)^{k-k1})\, e^{-\lambda t}$$

$$= [\sum_{k1=0}^{k} \binom{k}{k1}((t_1)^{k1})((t_2)^{k-k1})] * (\frac{\lambda^k}{k!}) e^{-\lambda t}$$

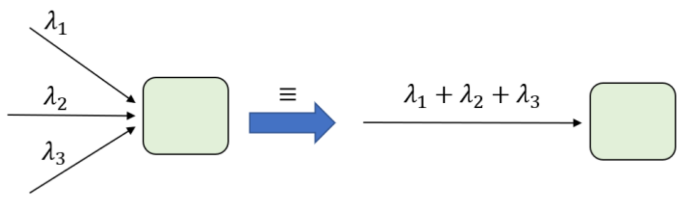
$$= (t_1 + t_2)^k (\frac{\lambda^k}{k!}) e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{(\lambda t)^k}{k!} *\, e^{-\lambda t} \qquad \text{Q.E.D}$$

Superposition Property

If $A_1, A_2, A_3 \ldots$ are independent poison process with rate $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ respectively. Then their superposition is also a poisson process with rate $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \cdots)$

意思就是有好幾個不同發生率的 poisson process 在同一時間作用，那麼總的來看，也是一個 poisson process，如下圖所示，



Proof

$$\Pr(K = k, T = t) = \sum_{k1=0}^{k} \Pr[(k1 = k1, T = t), (k2 = k - k1, T = t)]$$

$$= \sum_{k1=0}^{k} \frac{(\lambda_1 t)^{k1}}{k!} * e^{-\lambda_1 t} * \frac{(\lambda_2 t)^{k-k1}}{(k-k1)!} * e^{-\lambda_2 t}$$

$$= \sum_{k1=0}^{k} (\frac{1}{k!})({\lambda_1}^{k1})({\lambda_2}^{k-k1}) * (\frac{t^k}{k!}) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t}$$

$$= \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)t]^k}{k!} *\, e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \qquad \text{Q.E.D}$$

Conclusion

- **Union**: 在不同時間間隔中發生的 poisson process 加總起來，結果仍為 poisson process，前提是發生率相同。
- **Superposition**: 在同一時間間隔，發生在其中的 poisson process，加總起來仍爲 poisson process
- Union 是針對時間間隔的事件加總
- Superposition 是針對每個不同的 poisson process 的發生率加總

Decomposition Property

If a poisson process A with rate is decomposed into processes $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ by assigning each arrival in A to B_i, with probability q_i. (where $i = 1,2,3,4 \ldots n$) and ($q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n = 1$). Then $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ are poisson process with rate $\lambda q_1,\ \lambda q_2, \lambda q_3, \ldots \lambda q_n$

意思就是把一個大的 poisson process A 分開成很多小的 $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$，這些 $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ 也分別是 poisson process，且發生率為 $\lambda q_1,\ \lambda q_2, \lambda q_3, \ldots \lambda q_n$。