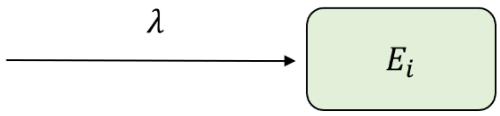
PASTA Property

PASTA (Poisson Arrivals See Time Average)



現考慮一個系統，arrival 爲一個 poisson process，arrival 會造成系統狀態的轉移（系統狀態轉移，如人數從 1 個人上升到 2 個人）。

當系統達到平衡態時，因觀察系統方式的不同，我們可以計算兩個機率。

① 從外部隨機進入系統進行觀察，觀察到系統處於 E_i 狀態的機率 (即觀察到E_i 狀態的次數 / 總觀察次數)，記為 π_i 。

② 讓即將到達系統的顧客觀察系統，觀察到系統處於 E_i 狀態的機率，記為 $\pi_i{}^*$。(觀察到 E_i 狀態是該顧客看到的系統狀態，是排除他自己是系統的一員的情況)

一般情況下，$\pi_i \neq \pi_i{}^*$

<u>*Example. Your own PC (one customer, one server)*</u>

$$\begin{cases} E_0 & = \text{PC free} \\ E_1 & = \text{PC occupied} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0^* & = 1 \qquad \text{(your own PC is always free when you need it)} \\ \pi_1^* & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 & = \text{proportion of time the PC is free } (< 1) \\ \pi_1 & = \text{proportion of time the PC is occupied } (> 0) \end{cases}$$

Note, in this case the arrival process is not Poisson; when an arrival has occurred (i.e. you have started to work with you PC) for a while it's unlikely that another arrival occurs (i.e. you have stopped the previous session and started a new one). Thus the arrivals at different times are not independent.

✧ 考慮一台電腦，非工作時段即空閑。現在的顧客就是我，當我要用電腦的時候，很明顯電腦現在處於空閑，所以 $\pi_0{}^* = 1$。然而，現在有外人隨機看看電腦是不是空閑或忙碌，自然一般是空閑的機率 π_1 與我本人去看的 $\pi_1{}^*$是不等的。

若顧客到達是一個 poisson process，即我去使用電腦是一個 poisson process，有，

$$\pi_i = \pi_i{}^*$$

PASTA (continued)

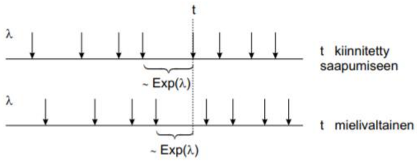
In the case of a Poisson arrival process it holds

$$\boxed{\pi_j = \pi_j^*}$$

Proof

The arrival history before the instant of consideration, irrespective whetehr we are considering a random instant or an arrival instant, are stochastically the same:
a sequence of arrivals with exponentially distributed interarrival times.

This follows from the memoryless property of the exponential distribution. The remaining time to the next arrival has the same exponential distribution irrespective of the time that has already elapsed since the previous arrival (the same holds also in reversed time, i.e. looking backwards).



Since the stochastic characterization of the arrival process before the instant of consideration is the same, irrespective how the instant has been chosen) the state distributions of the system (induced by the past arrivals processes) at the instant of consideration must be the same in both cases.

Hint：站在時間的角度想，電腦忙碌的機率 ＝ 忙碌的總時間 /(忙碌總時間+空閑總時間) 這句話沒有問題，不過是時間之比。

問題是現在站在 poisson arrival 的角度，假設我是一名顧客滿足 poisson arrival，當我到達系統時觀察系統，系統的狀態居然只和時間有關。

（泊松和時間扯上了關係）

理解上述部分需要參考指數分佈的無記憶性。

參考資料

https://www.netlab.tkk.fi/opetus/s383143/kalvot/E_poisson.pdf

現在舉一個例子證明 PASTA 性質

進入系統的顧客滿足 poisson arrival，當一個顧客進入系統時，

- 整個系統的人數(排隊的加上正在被服務的)的期望值為 $\bar{Q}$
- 系統處於忙碌的幾率為 U
- 系統處於空閑的機率為 $1-U$
- 系統中處於等待的人數的期望值為 $\bar{Q}-U$

考慮一段時間，時間長度為 t，把這段時間分成不重疊的三段，長度分別爲 a，b，c，那麼其實(在 b 時段來一個顧客的機率)=(在 t 時段隨機選擇一個點，且落在 b 時段的機率)

有一個 poisson arrival 發生在 [0，t] ，且落在 b 時段的機率, 即在 b 時段來一個顧客的機率。

$$\frac{P\{\text{0 arrivals in a and 1 arrival in b and 0 arrivals in c}\}}{P\{\text{1 arrival in t}\}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda a} * \lambda b e^{-\lambda b} * e^{-\lambda c}}{\lambda t e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{\lambda b e^{-\lambda(a+b+c)}}{\lambda t e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{\lambda b e^{-\lambda t}}{\lambda t e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{b}{t}$$

計算的結果表示不過是時間長度之比。

(在 b 時段來一個顧客的機率) = (在 t 時段隨機選擇一個點，且落在 b 時段的機率)

成立

Hint: 假設 a, b, c 等長，一個人出現在 a, b, c 時段的機率分別是 1/4, 1/2, 1/4。這是一個確定的機率，因此他出現在 b 的機率就是 1/2, 從時間的比例去看，是完全不等於 1/3。但是這個人一旦滿足 poisson arrival，那麼就是一個時間長度比例的關係。

Hint: 再具體一點，a, b, c 時間長度之比為 2:3:3，現在一個人出現在 a,b,c 的機率服從 uniform distribution，即分別爲 1/3, 1/3, 1/3。這樣出現在 b 的機率為 1/3， 也不等於 3/8。

回到 PASTA

- ✧ 綜上兩個 Hint，不管是 general distribution，uniform distribution 還是其他，只要不是 poisson distribution，就不會有時間長度的比例關係。
- ✧ 說明的是從 possion arrival 的角度觀察系統，和隨機地去觀察系統（意思等於在時間段上撒豆子，落在忙碌區域的機率），結果是一樣的。