



## Little's Law

$$L = \lambda W$$

$$L_q = \lambda W_q$$

- ✧ 離開系統時，回頭看身後有多少人。這些人都是我從進入系統開始直到離開系統這段時間內進來的人。Little's Law 描述的就是這一件事情。

$L$  : 系統內總人數

$W$  : Mean system delay (一進一出的總時間稱為系統延遲，即一個使用者從進入系統開始排隊到被服務後離開系統的總時間)

$\lambda$ : 單位時間內到達系統的使用者數量

假設  $W = 10$  seconds，即從進入系統到離開需要 10 秒。 $\lambda = 1/2$ ，即每秒有 1/2 個人到達系統（就是每 2 秒會來一個人）。那麼在本人需要經歷的 10 秒中，將會有 5 個人進入到系統站在我身後。

- ✧ 但是系統並不是無限大的，假如系統只能容納 3 個人，那麼我身後永遠都不會看到有 5 個人，這樣的系統被稱作是 blocking system，在電信網路中很常見。例如此時基站只能同時容納 5 個人打電話，那麼此時第 6 個人就打不出去了。

基於上述假設，

$$L = \lambda(1 - P_B)W$$

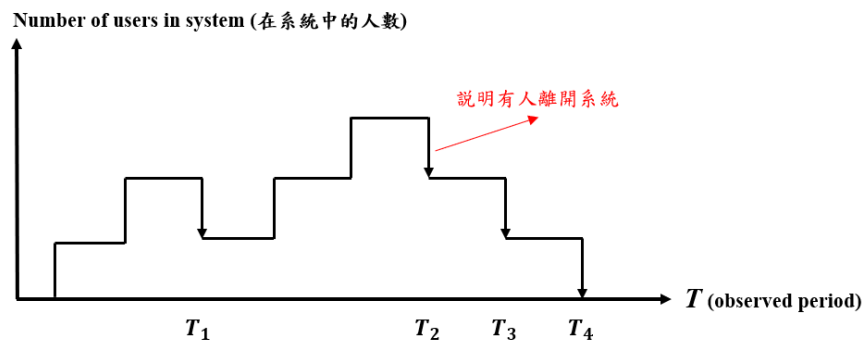
$$L_q = \lambda(1 - P_B)W_q$$

- ✧  $P_B$  指的是被 block 的機率

很明顯， $P_B$  描述的是一個機率。假設系統只能同一時間容納 3 人，現在同一時間有 5 人進入系統，那麼就有兩個人會被 block。 $P_B = (\text{被 block 的人數})/(\text{總人數})$ 。此處為 0.4。 $L = \lambda(1 - P_B)W = 1/2 * (1 - 0.4) * 10 = 3$  (符合容納 3 人的假設)



# Proof of Little's Law



- ✧ 每個人都會在系統中逗留  $t$  時間，現在加總所有人的逗留時間，即，

$$\text{總逗留時間} = \text{Number of users in system} * t$$

$$\int_0^T N(t) dt = \sum_{i=0}^{N_c} T(i)$$

- ✧  $T(i)$  表示顧客  $i$  逗留的時間

$$\sum_{i=0}^{N_c} T(i) \cong \frac{\sum_{i=0}^{N_c} T(i)}{N_c} * N_c$$

$$\frac{\sum_{i=0}^{N_c} T(i)}{N_c} = W$$

- ✧ 這裏表述的是一個均值的形式，(總逗留時間 / 總人數) 就是平均逗留時間，也就是所謂的 **Mean system delay** (一進一出的總時間稱為系統延遲，即一個使用者從進入系統開始排隊到被服務後離開系統的總時間)

$$L \cong \frac{\int_0^T N(t) dt}{T}$$

- ✧ 這裏的表述是 (總逗留時間 / 觀察時間)，其實就是描述系統的總人數。

$$LT \cong \int_0^T N(t) dt$$

$$L \cong (N_c * W) / T \cong \lambda W, \text{ where } N_c / T = \lambda \text{ (100 人 / 10 秒 = 每秒來 10 人) QED}$$