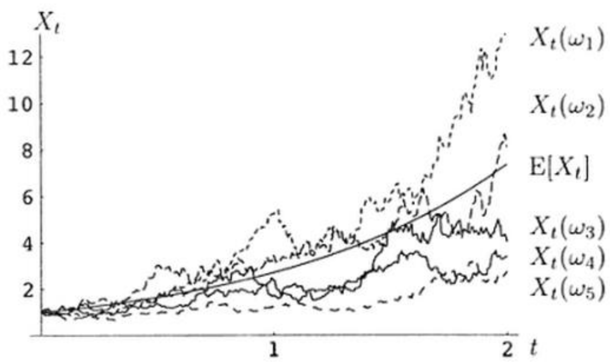
Markov Process

在這裏先用直白的話回顧一下隨機過程的定義。

Stochastic Process

隨機過程是同時定義在樣本空間 Ω 和時間 T 的二元函數，簡單地說就是隨機變數(random variable)加上了時間這個維度。結合下面這張圖說明。



需要先知道隨機變數和樣本空間的關係。假設我丟兩次銅板，那麼我的樣本空間就是Ω ={正反，反正，正正，反反}，空間大小是 4。現在考慮一隨機變數，描述出現正面的次數，記為 X，很明顯 X(正反) = 1, X(正正) = 2, 因此 X 是一個定義於樣本空間的函數。

當樣本空間發生變化時，函數的值域也會發生改變。舉例統計每個班的高於 170cm 的人數，即 $X_t(\omega 1)$ = 高於 170cm 的人數 (ω1可以指的是某個班級，如 1 班)。

- 當固定住 t ，不固定 ω 時，X_t 就只是一個隨機變數(函數)，對應了 t 時刻的樣本空間。

  E.g. $X_t(\omega 1)$ = 高於 170cm 的人數， $X_t(\omega 2)$ = 小於 170cm 的人數…

- 當固定住 t ，固定 ω 時，$X_t(\omega)$ 就是值域中的一個值。

  E.g. $\omega = \omega 1$, $X_t(\omega 1)$ = 高於 170cm 的人數

- **隨機過程**：當不固定 t ，固定 ω 時，X_t 就只是一個確定的隨機變數(函數)，對應了 t 時刻的樣本空間。

  E.g. $X_t(\omega 1), X_{t+2}(\omega 1), X_{t+3}(\omega 1), X_{t+4}(\omega 1)$ ...

Markov Process

我們只觀測系統狀態，也就是說固定 ω ， ω 指的就是系統狀態 (狀態可以是任何描述的東西，如上面的“正反”，“反正”，但是值域是一個實數，因爲上面我們關係的是次數)。現在隨機變數 X 描述的是當下時刻的系統人數。若時間 T 是離散的，表示爲 $T = \{0,1,2,3 \ldots\}$, 離散時間的馬可夫過程表示起來就是 $\{X(t), t = 0,1,2,3 \ldots\}$。 若時間是連續的，表示爲$T = \{t: 0 < t < +\infty\}$, 連續時間馬可夫過程表示起來就是 $\{X(t), t > 0\}$，這邊直接省略了ω。$(X_t(\omega))$

首先，馬可夫過程是一個隨機過程，而且是一個具有馬可夫性質的隨機過程。

對於 n 個時間點，$t_1 < t_2 < t_3 < \cdots < t_n$, t_n時間點系統狀態為 $X(t_n)$ ，在經歷了狀態 $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_{n-1})$的條件下，有

$$\Pr\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1) = x_1, \ldots, X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

$$= \Pr\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) = x_{n-1}\}$$

這個式子描述的是 t_n 時間點的系統狀態只跟上一個時間點 t_{n-1} 時的系統狀態有關。換句話說，未來的狀態只與現在的狀態有關，而與過去的一切無關。

Note：x_n 表示狀態的實值，狀態可以是離散或連續的，在評估系統的時候，我們認爲系統的狀態是離散的，雖然時間 T 是連續的，然而在這裏我們還是把這樣的馬可夫過程視作是 Markov Chain(很多書上面寫只有狀態空間是連續的和時間是連續的才可以稱爲是 Markov Chain)。

仔細思考，其實完全可以忽略時間這個維度，t_{n-1} 表示的是第 $n-1$ 個時間點。我們只是關注系統的狀態，因此t_{n-1}時間點的狀態，和第 $n-1$ 觀測時系統的狀態，描述的是同一件事情。因此，隨機變數$X(t)$就寫成了$\{X_n, \mathrm{n} = 0,1,2, \ldots \mid X_n = 0,1,2 \ldots\}$，進而有，

$$Pr\{X_n = j \mid X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

$$= Pr\{X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

$X_n = j$ 表示的是系統經過 n 步之後，或 n 次狀態轉移之後，系統狀態為 j。

當 n 等於 1 時候，就是一步轉移，有

$$Pr\{X_n = j \mid X_{n-1} = i\} = p_{ij}$$

表示從狀態 i 轉移到狀態 j 的機率。因此跟狀態的轉移機率可以用轉移矩陣 **P** 來表示。