



Union, Superposition, and Decomposition Property

PDF of Poisson Distribution

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

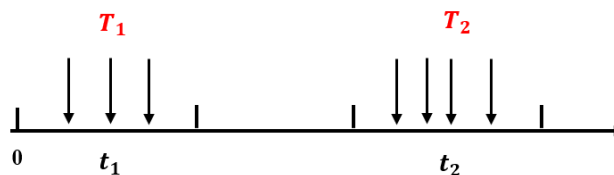
λ 指的是一段時間發生的次數，但有時候公式會是 λt ，兩個 λ 意思不同，後者是單位時間內事件發生的次數(即發生率 occur rate，乘上時間就是一段時間內事件發生的次數)。以下 λ 均表示為發生率，因此機率密度函數為，

$$\Pr(X = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

Union Property

If I is the union of a finite number of disjoint intervals and the length of the disjoint intervals, sum up to t_1 and k is the number of arrivals in I from poisson process with rate λ , the k has the poisson distribution with parameter λt

意思就是在 t_1 時間間隔發生了 k_1 次事件， t_2 時間間隔發生了 k_2 次事件，分別屬於 poisson，而且有同一個發生率 λ 。加總 k_1 和 k_2 ，也同屬於 poisson，此時為 $\lambda(t_1 + t_2)$ 。



Proof: 假設 t_1 時間間隔發生了 k_1 次事件， t_2 時間間隔發生了 k_2 次事件

$$\begin{aligned} \Pr(K = k, t = t_1 + t_2) &= \sum_{k_1=0}^k \Pr[(k_1 = k_1, t_1), (k_2 = k - k_1, t_2)] \\ &= \sum_{k_1=0}^k \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} * e^{-\lambda t_1} * \frac{(\lambda t_2)^{k_2}}{(k - k_1)!} * e^{-\lambda t_2} \\ &= \sum_{k_1=0}^k \left[\frac{(\lambda t_1)^{k_1} * (\lambda t_2)^{k_2}}{k_1! (k - k_1)!} \right] * e^{-\lambda(t_1 + t_2)} \end{aligned}$$

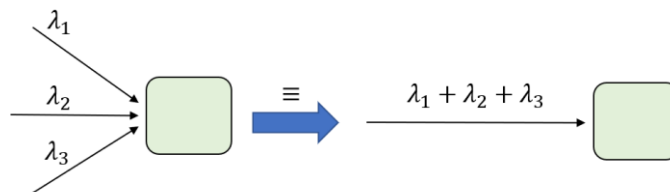


$$\begin{aligned}
&= \sum_{k_1=0}^k \binom{k}{k_1} \left(\frac{1}{k!}\right) ((\lambda t_1)^{k_1}) ((\lambda t_2)^{k-k_1}) e^{-\lambda t} \\
&= \left[\sum_{k_1=0}^k \binom{k}{k_1} ((t_1)^{k_1}) ((t_2)^{k-k_1}) \right] * \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) e^{-\lambda t} \\
&= (t_1 + t_2)^k \left(\frac{\lambda^k}{k!}\right) e^{-\lambda t} \\
&= \frac{(\lambda t)^k}{k!} * e^{-\lambda t} \quad \text{Q. E. D}
\end{aligned}$$

Superposition Property

If $A_1, A_2, A_3 \dots$ are independent poisson process with rate $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ respectively. Then their superposition is also a poisson process with rate $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots)$

意思就是有好幾個不同發生率的 poisson process 在同一時間作用，那麼總的來看，也是一個 poisson process，如下圖所示，



Proof

$$\begin{aligned}
\Pr(K = k, T = t) &= \sum_{k_1=0}^k \Pr[(k_1 = k_1, T = t), (k_2 = k - k_1, T = t)] \\
&= \sum_{k_1=0}^k \frac{(\lambda_1 t)^{k_1}}{k!} * e^{-\lambda_1 t} * \frac{(\lambda_2 t)^{k-k_1}}{(k-k_1)!} * e^{-\lambda_2 t} \\
&= \sum_{k_1=0}^k \left(\frac{1}{k!}\right) (\lambda_1^{k_1}) (\lambda_2^{k-k_1}) * \left(\frac{t^k}{k!}\right) e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \\
&= \frac{[(\lambda_1 + \lambda_2)t]^k}{k!} * e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} \quad \text{Q. E. D}
\end{aligned}$$



Conclusion

- **Union:** 在不同時間間隔中發生的 poisson process 加總起來，結果仍為 poisson process，前提是發生率相同。
- **Superposition:** 在同一時間間隔，發生在其中的 poisson process，加總起來仍為 poisson process
- Union 是針對時間間隔的事件加總
- Superposition 是針對每個不同的 poisson process 的發生率加總

Decomposition Property

If a poisson process A with rate is decomposed into processes $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ by assigning each arrival in A to B_i , with probability q_i . (where $i = 1, 2, 3, 4 \dots n$) and $(q_1 + q_2 + q_3 + \dots + q_n = 1)$. Then $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ are poisson process with rate $\lambda q_1, \lambda q_2, \lambda q_3, \dots, \lambda q_n$

意思就是把一個大的 poisson process A 分開成很多小的 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ ，這些 $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ 也分別是 poisson process，且發生率為 $\lambda q_1, \lambda q_2, \lambda q_3, \dots, \lambda q_n$ 。

