Poisson Process and Exponential Distribution

對於泊松過程，會先簡要描述 stochastic process，counting process， renewal process。

Stochastic Process

模擬一個人在基站中，現考慮他要多長時間走出這個基站的服務範圍。

Consider a value $t \in$ index set I (時間點)

X_t 表示在 t 時刻系統的狀態，因此 X_t 是一個隨機變數 (Random Variable)。

$$\mathbb{X} = \{X_t \text{ , } t \in I\} \quad t = 1,2,3,4\ldots.$$

$\mathbb{X}$ 就被稱作是一個隨機過程(Stochastic Process)

對於一個隨機過程，

i. 如果 index set I 是可數的， 那麼隨機過程 $\mathbb{X}$ 是一個離散變數的隨機過程。

ii. 如果 I 是不可數的。那麼隨機過程 $\mathbb{X}$ 是一個連續變數的隨機過程。

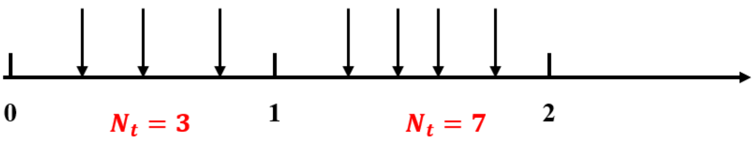
- 所謂的可數和不可數可想像成 1 或 1.23456…， 從 1 跳到 2，這樣便是離散可數的，從 1，到 1.23456…，再到 2，這樣便是一個連續的過程，沒有辦法數。
- 那麼可以知道，用直白的話來說，隨機過程就是一個隨機變數搭配上一個時間的維度。

Counting Process

$$\mathbb{N} = \{N_t \text{ , } t > 0\}$$

$\mathbb{N}$ 是一個 counting process。

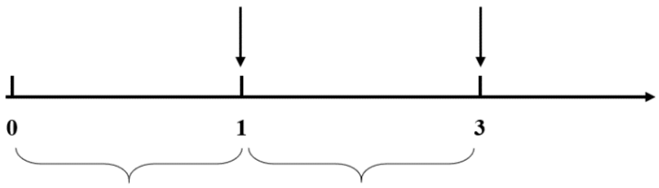
N_t 代表在 t 時刻，發生的事件的數量總量。



Renewal Process

對於一個 counting process $\mathbb{N}$，若事件發生的時間間隔是獨立同分佈，即 Independent and identically distributed (i.i.d), 且服從任意的機率分佈，那麼 $\mathbb{N}$ 便是一個 renewal process。

✧ 因此 renewal process 是在 counting process 的基礎上，對時間有一個假設(其實從另一個角度上看是對時間發生的時間間隔有一個假設。)

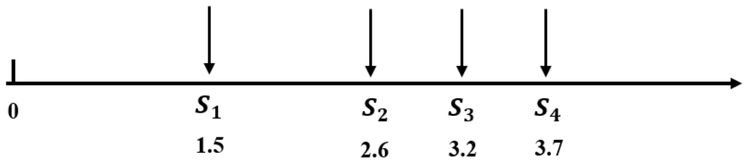


✧ 這些時間間隔符合任意分佈，但是要同屬一個分佈，不可以是不同分佈。

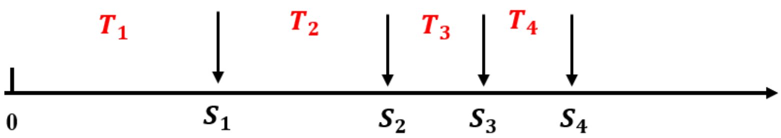
E.g. 考慮一個 renewal process

$$\mathbb{N} = \{N_t \,,\ t \geq 0\}$$

Let S_i be the time of the *i-th* renewal event happens.



$N_{S_n} = n$ 指的是在S_n時刻，共發生了 n 起事件。

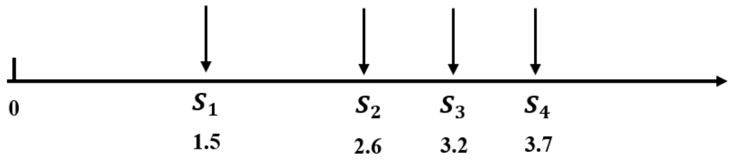


$$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$$

T_i 指的是第 (i-1)-th 個事件和第 i 個時間的時間間隔，T_i 被稱作是 renewal period.

Poisson Process

E.g. 考慮, $i = 0,1,2,3\ldots$ 讓 T_i 表示第 i 個燈泡的壽命長短。那麼換燈泡的動作便是一個 renewal process。(在 S_1, S_2, S_3, S_4 換燈泡)



定義：The poisson process is a special case of renewal process in which the interrenewal times are exponentially distributed. (意思就是時間間隔服從指數分佈的 renewal process 是 poisson process)

Condition 1: $N_0 = 0$

Property 1 (the independent increments property):

for any $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, Let $X_1 = N_{t_2} - N_{t_1}$, $X_2 = N_{t_4} - N_{t_3}$, then X_1 and X_2 are independent. 意思是各時間間隔內，發生時間的數量相互獨立。

Property 2 (the stationary increments property):

for $t_1 < t_2$, the distribution of $N_{t_2} - N_{t_1}$ depends only on different $t_2 - t_1$.（意思就是說任意時間間隔內，時間發生的數量的分佈，只與時間間隔的長度有關。即事件數量只決定於時間間隔的長短。）

- ✧ 關於 poisson process，大概的描述就到這邊，還有一些性質還未說明，可再參考其他資料，有的性質會單獨拿出來在下一節講述。
- ✧ poisson process 最關鍵的部分就是時間間隔服從指數分佈。即說明，時間發生的次數服從泊松分佈，就是事件發生的時間間隔服從指數分佈。
- ✧ poisson process 可從二項分佈推導出，視爲 n 趨近於無窮的情況，即爲 poisson process。

PDF of Poisson Distribution

$$\Pr(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

λ 指的是一段時間發生的次數，但有時候公式會是 λt，兩個 λ 意思不同，後者是單位時間內事件發生的次數(即發生(機)率 occur rate，乘上時間就是一段時間內事件發生的次數)。