Birth-Death Process

Transition Matrix P of Discrete Markov Process

離散時間的 Markov Chain 才使用轉移矩陣 P。

P 指的是狀態轉移機率的矩陣，準確地說，是針對當下時刻，轉移到下一狀態的機率。也可以理解成一步轉移的機率。舉例，從狀態 a 轉移到狀態 a 的機率，從狀態 a 轉移到狀態 b 再轉移到狀態 a 的機率。本質都是從狀態 a 轉移到狀態 a，但前者是一步轉移，後者是兩步轉移。因此如果只是轉移一步，那麼就根據 P 這個矩陣，若是轉移兩步，則根據 $P^{(2)}$,兩者的關係是 $P^{(2)} = P{\cdot}P$，這部分需要看到 **Chapman-Kolmogorov Equation**，是機率的部分，這邊不過多解釋。

因此我們可以知道轉移 n 步，也就是轉移 n 次時的狀態轉移機率。就是說狀態 a 轉移了 n 次之後，會轉移到各個狀態的機率。如下面這個轉移矩陣是一步的轉移矩陣。

$$
P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & \ddots & & & \vdots \\ p_{31} & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}
$$

$$
P^{(m)} = P{\cdot}P{\cdot}P{\cdots}P = P^m
$$

到此，應該對穩態有一個認知，不妨這樣去理解狀態 a 經過 n 次轉移回到 a 的機率，其實就是在說系統達到穩定時，處於狀態 a 的機率，只要 n 足夠大，就說明時間足夠長。

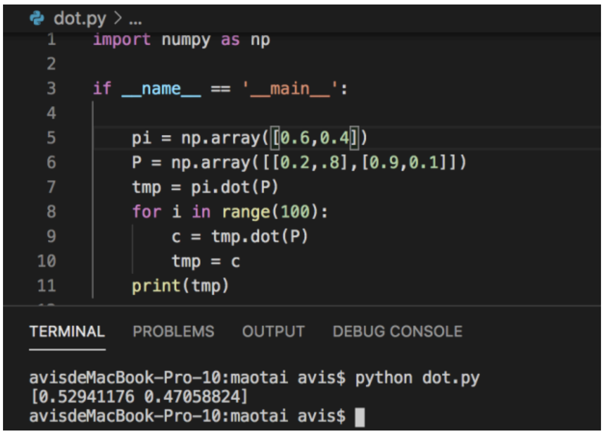
只要有 P 就可以求系統的穩態。我們現在定義系統處於穩態時, 處於各狀態的機率記作 π，舉例，系統只有 a，b 兩個狀態，$(\pi_a, \pi_b) = (0.4, 0.6)$，說明穩態時，系統處於 a 狀態的機率是 0.4，處於 b 狀態的機率是 0.6, 於是有下面這個公式，

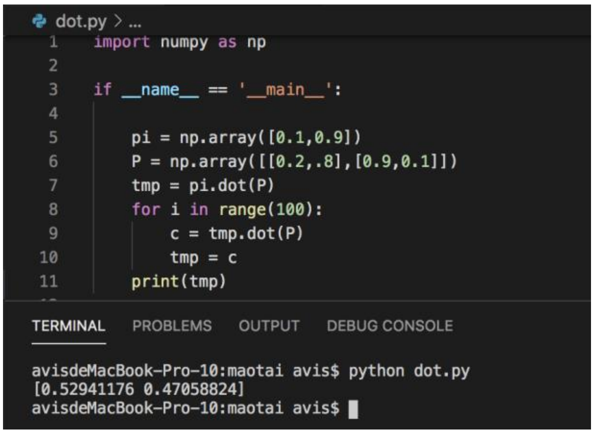
$$
\lim_{m\to\infty} {p_{ab}}^m = \pi_b
$$

爲什麼引入π？因爲表示形式是不一樣的，假如系統只有兩個狀態，那麼 π 就只有兩個元素，而 P 是一個 2x2 的矩陣。π 是一種更直觀的表示方法來表示穩態時系統的狀況，稱爲穩定狀態分配機率。

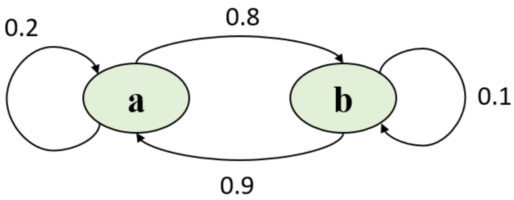
- 理論上系統的穩態其實跟系統的初始狀態無關。假設我們先前觀測到系統處於 a 狀態的機率為 0.2，處於 b 狀態的機率為 0.8，記作$(\pi_a, \pi_b) = (0.2, 0.8)$，(所謂的觀測，就是計數，用人眼去記錄一段時間內 a，b 出現的次數，這個就是系統的初始狀態)。現在我們知道了狀態轉移矩陣 P，看到如下兩個例子。不管初始狀態觀測的是怎樣(圖中一個是 0.6，0.4，一個是 0.1，0.9)，最後迭代出來的結果都是一樣的，也就是說只要轉移矩陣 P，系統的穩態就確定。這個迭代式就是

$$\pi = \pi \cdot P$$



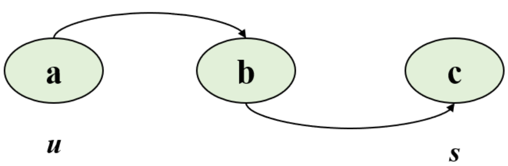


- 以上這個 P 對應的 Markov Chain 如下圖



Q Matrix of Continuous-Parameters Markov Process

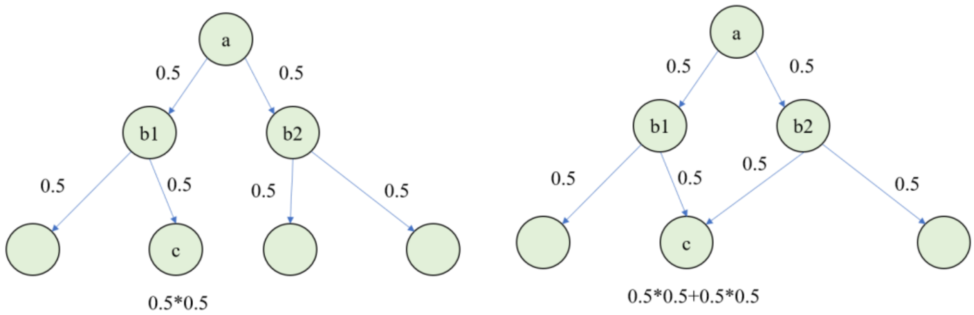
離散時間馬可夫過程和連續時間馬可夫過程只是時間的差別，剛剛一直在講轉移了多少次，是因爲時間是離散的，即 t=0,1,2…。當然時間是連續的 (t>0)，就沒有多少次這個說法了。



假設 $p_{ac}(u,s)$ 表示從 u 時刻開始，從 a 狀態，在 s 時刻到達狀態 c，有

$$p_{ac}(u,s) = \sum_b p_{ab}(u,t)p_{bc}(t,s) \qquad (1)$$

可見下圖幫助理解上式，最下層的機率 sum 為 1。Sum 的原因是從 a 出發，下一個狀態不止一個，有可能到 b1，有可能到 b2。



令上式 $u = 0$，有，

$$p_{ac}(0,t+\Delta t) = \sum_b p_{ab}(0,t)p_{bc}(t,t+\Delta t) \qquad (2)$$

假設在 0 時刻的狀態是 i，有

$$p_c(t+\Delta t) = \sum_b p_b(t)p_{bc}(t,t+\Delta t) \qquad (3)$$

因爲是 Poisson Process, 有，

$$p_{bc}(t,t+\Delta t) = \begin{cases} \lambda\Delta t + o(\Delta t), & where\ (b = c-1, c \geq 1) \\ 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), & where\ (b = c) \\ o(\Delta t), & otherwise \end{cases} \qquad (4)$$

上面的式子之所以是 $\lambda\Delta t$，是說 b 和 c 之間發生了一次轉移，意思就是事件發生了一次。$\lambda\Delta t$ 是事件在Δt内發生了一次的機率。從 Poisson Distribution 的 PDF 可知。

$$\mathrm{P(X = k)} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$$

當 $k = 1$, $t = \Delta t$

$$\mathrm{P(X = 1)} = \frac{(\lambda\Delta t)^1 e^{-\lambda\Delta t}}{1!} = \lambda\Delta t$$

因爲 $e^{-\lambda\Delta t} = e^{-0} = 1$

也符合了 Poisson Process 的第一個特性，

✓ 在一個短時間區間 Δt內，發生一次事件的機率與 Δt 成正比：$\lambda\Delta t$。

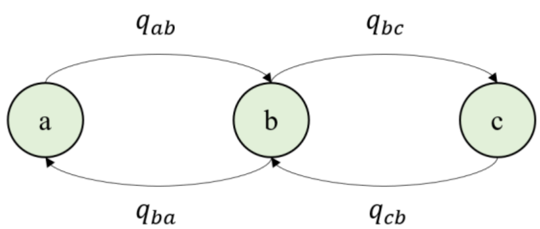
現在引入 q

$$q_{ij} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Pr\{X(t+\Delta t) = j | X(t) = i\}}{\Delta t}$$

- 這是一個機率的比率(這個概念需要接受)
- 系統從狀態 i 轉移到狀態 j 的單位時間的概率 (probability per time unit that the system makes a transition from state i to state j)
- transition rate or transition intensity (書本的說法)

- 爲什麼引入 q，用 P 不好嗎？P 的測量依賴時間，觀測時間越長，P 越準確，但是觀測的時間不同的時候，結果就會有誤差。
- 上面的式子完全就是一個“密度”的思想，分子那一項越大，q 就越大，反映的就是說事件發生的次數在 Δt 内很多。那麼其實只要知道這個密度，就可以知道這個 P(聯想一下，我們知道水的密度，給你一個已知道體積的大水缸，我們就可以知道這缸水的質量，這邊是一樣的概念。)
- q 這個概念因此不再依賴於時間，可以理解成依然是一個機率，但還是要和 P 做一個區分，我們可以把它理解成是一個稱爲“流入率、流出率”的東西。爲什麼要做區分？因爲我們早把問題做了離散和連續的定義，連續的話就要把時間這個維度考慮進去。
- 知乎上的一個説法，值得參考。https://www.zhihu.com/question/45532797?sort=created

生滅過程



顧名思義，即狀態的生死過程，有一種在描述狀態的生命周期的感覺。實際上，q 可以看作是一種生命周期的概念。我們先前講的 P，例如 $p_{ab} = 0.7$, 説的就是從狀態 a 轉移到狀態 b 這就是發生的機率是 0.7。機率其實就是一段時間内的數數，若總事件量是 100，那麼狀態 a

轉移到狀態 b 這件事就發生 70 次。

現在用 q 來理解，我把時間分成 100 秒，假設每秒發生一個事件，要想$p_{ab} = 0.7$，那麼就是有 70 秒發生狀態 a 到狀態 b 的轉移。從零開始，發生 1 次，就還剩下 69 次沒完成，也就是說你的總量必須是 70 次。我們借用速率的概念，就是你一共要跑 70 米，每秒跑 1 米，你的速率就是 1/70，意思就是說你現在正以 1/70 的速率朝著狀態 b 轉移，也就是說你會以 1/70 的速率與狀態 a 漸行漸遠。因此我們可以感受到用一種狀態的 lifetime 的感覺。

當然這只是站在一個角度去看，狀態 a 轉移到狀態 b 說明了狀態 a 生命的減少，那麼狀態 b 轉移到狀態 b 就是說明狀態 a 生命的的增加。因此 a 有付出也有收穫，付出和收穫維繫這狀態 a 的生命，因此我們會引入"流入率/流出率的概念"。狀態 a 之所以可以存在，是因爲他不可以全是流出而沒有流入，換句話說要想維繫整個系統的穩定，狀態的流出一定要等於他的流入。

上面的例子，我們可以用矩陣表示，

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{aa} & q_{ab} & q_{ac} \\ q_{ba} & q_{bb} & q_{bc} \\ q_{ca} & q_{cb} & q_{cc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ 0 & \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

延續先前資料的例子，系統狀態就是系統的人數，有 0，1，2，arrival 服從泊松分佈，service rate 服從指數分佈，因此有人到達，系統往前跳，有人被服務完，系統往後跳。

$$q_{aa} = q_a \quad (\text{為狀態 a 流出的總量})$$

$$q_a = \sum_{i \neq a} q_{ai}$$

生滅過程大概就到這邊，其中很多是一些較爲感性的認知，望對理解有所幫助。更爲詳盡的資料還需自己親自動手尋找，以下有一份資料可供參考。

https://www.netlab.tkk.fi/opetus/s383143/kalvot/E_markov.pdf