מערכת משוואות לא ליניאריות – שיטות איטראטיביות

איטרציה : איטרציה היא שלב בתהליך החוזר על עצמו מספר פעמים - כל חזרה נקראת איטרציה.
שיטה איטרטיבית: שיטה המורכבת מאיטרציות נקראת שיטה איטרטיבית. מבצעים שימוש חוזר בנוסחה מתמטית לצורך קבלת תיקון לפתרון מקורב.

כדי לבנות איטרציה לשיטה איטרטיבית דרושים :

x_0 - ערך (ניחוש) התחלתי

G_x -כלל /תבנית איטרטיבית (נוסחה מתמטית)

ונקבל סדרת ערכים $\{x_1,..., x_n\}$ בעזרת שימוש בכלל $X_{n+1} = G(x_n)$

כאשר המטרה היא שהסדרה תתכנס לפתרון האמיתי

הערה:

הכלל $X_{n+1} = G(x_n)$ בתהליך האיטרטיבי אינו יוצר תמיד סדרה מתכנסת!

אי קיום ההתכנסות יכול להיות תלוי בניחוש ההתחלתי ובתבנית האיטרטיבית

פתרון מערכת משוואות לא לינאריות

בהינתן הפונקציה f עלינו למצוא את הערך x שעבורו מתקיים:

$$f(x) = 0$$

הפתרון x שמתקבל נקרא השורש של הפונקציה f (נקודת החיתוך עם ציר ה-x)

שני סוגים של משוואות לא לינאריות:

1. משוואה לא לינארית אחת עם נעלם יחיד

הפתרון x המתקבל הוא סקלר המקיים $f(x) = 0$

לדוגמא: $f(x) = x^2 - 4\,sin(x)$ כשהפתרון הוא $x = 1.9$

2. מערכת של n משוואות לא לינאריות עם n נעלמים -

הפתרון הוא וקטור עם n נעלמים שעבורו כל רכיבי הפונקציה f מתאפסים בו זמנית.

לדוגמא:

$$x^2 - y + 0.25 = 0$$

$$-x + y^2 + 0.25 = 0$$

כשהפתרון הוא וקטור: $\hat{x} = (0.5,\ 0.5)$

שיטת החצייה (bisection method)

שיטת החצייה היא שיטה איטרטיבית למציאת שורש של פונקציה,
אשר מבוססת על משפט "ערך הביניים".

משפט ערך הביניים

אם f(x) היא פונקציה רציפה בקטע [a ,b] המקיימת f(a)·f(b)<0

קיים לפחות שורש אחד C בקטע [a ,b]

הרעיון: חציית הקטע $[a\ ,b]$ לשני תתי קטעים שווים ובכל שלב נבחר בתת-קטע שבו נמצא השורש. תהליך זה נמשך עד שנגיע למקטע קטן מספיק.

דרישות: $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[\ a\ ,b\ ]$ ומתקיים $f(a)\cdot f(b)\ <\ 0$

שלבי האלגוריתם

- נניח כי למשוואה יש שורש אחד בלבד בקטע.
- נחשב את הנקודה c שהיא נקודת האמצע של הקטע $[a, b]$
- אם $f(c)\ =\ 0$ הרי ש- c הוא שורש המשוואה.
- במידה ו- $f(c)\neq 0$ ייתכנו שתי אפשרויות
  - אם $f(a)\cdot f(c)\ <\ 0$ אזי השורש נמצא בקטע $[a, c]$ ולכן נגדיר $b\ =\ c$
  - אם $f(c)\cdot f(b)\ <\ 0$ אזי השורש נמצא בקטע $[c, b]$ ולכן נגדיר $a\ =\ c$
- נחזור על התהליך עד אשר נגיע לקטע קטן מספיק – והשורש יהיה אמצע הקטע שעצרנו בו - הערך c

תנאי העצירה יכול להיות גם עד למספר מקסימלי של איטרציות

חישוב מספר האיטרציות הנדרש

לאחר k שלבים אורך הקטע יתקצר פי 2^{-k} קטעים מאורך הקטע הראשון
השגיאה המקסימלית היא מחצית אורך הקטע האחרון (השורש נקבע כנק' האמצע של הקטע האחרון)
לכן ניתן לחשב את מספר האיטרציות שנדרש כדי להגיע לשגיאה המקובלת ע"י הנוסחא:

$$max\ iteration\ =\ -\frac{ln\left(\frac{error}{(b-a)}\right)}{ln(2)}$$

פסאודו קוד

Bisection algorithm

```
BisectionMethod (f, a, b, TOL):
    while (b - a) > TOL do
        c = a + (b − a)/2.
        if f(a)·f(c) > 0 then a = c
        else then  b = c
    end while
return c
```

- פונקציה f רציפה בקטע $[\ a\ ,b\ ]$
- a,b המקיימים את התנאי $f(a)\cdot f(b)\ <\ 0$
- TOL - השגיאה שמותרת , רמת הדיוק.

שיטת ניוטון-רפסון (Newton Raphson Method)

שיטה איטרטיבית למציאת שורשים של פונקציה ממשית, השיטה מבוססת על משפט טיילור עם שארית.
הרעיון מאחורי השיטה הוא להתחיל בניחוש ראשוני לשורש ולאחר מכן נשפר באופן איטרטיבי את הניחוש באמצעות קירוב ליניארי (סדרת טיילור) של הפונקציה בקרבת השורש הנוכחי כדי להתקרב לשורש האמיתי של הפונקציה.

שלבי האלגוריתם

תהי f פונקציה רציפה וגזירה n+1 פעמים בקטע $[a, b]$,

1. מתחילים מניחוש התחלתי לשורש $p_0 \in [a, b]$ המקיים $f'(p_0) \neq 0$
2. נשפר את הניחוש ע"י הנוסחא של ניוטון-ראפסון:

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \qquad \text{ובאופן כללי:} \qquad p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

3. נחזור על התהליך עד שההפרש בין שני ניחושים עוקבים מספיק קטן: $|p_n - p_{n-1}| < TOL$
או עד מספר מקסימלי של איטרציות. והשורש יהיה הניחוש האחרון שעצרנו בו , כלומר p_n

פסאודו קוד

Newton Raphson algorithm

```
NewtonRaphson (f, df, p0, TOL, N):
    for i=1 to N do
        p = p0 - f(p0) / df(p0)
        if |p - p0| < TOL then return p
        else  p0 = p
    end for
return p
```

- **f** - פונקציה רציפה וגזירה בקטע $[a, b]$
- **df** - נגזרת של הפונקציה f
- **p0** - ניחוש התחלתי לשורש
- **TOL** - השגיאה שמותרת , רמת הדיוק.
- **N** - מספר מקסימלי של איטרציות.

שיטת המיתר (Secant Method)

השיטה של ניוטון היא טכניקה חזקה, אבל יש לה חולשה גדולה: הצורך לדעת את הערך של הנגזרת של f בכל קירוב. כאשר לעתים הנגזרת אינה ידועה, או שחישובה גוזל משאבי חישוב רבים.
שיטת המיתר היא שיטה הדומה לשיטת ניוטון-רפסון למציאת שורשים. אך במקום לחשב את הנגזרת כמו בשיטת ניוטון-רפסון, בשיטת המיתר מבצעים קירוב של הנגזרת ע"י שיפוע המיתר המחבר את שתי הנקודות (הניחושים) שחושבו.

שלבי האלגוריתם

- מתחילים מניחוש שני ערכים התחלתיים x_0, x_1, הקרובים יחסית לשורש המבוקש.
- מהם נחשב את הניחוש הבא x_n , ע"י הנוסחא:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)\,(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}$$

או באופן כללי:

$$\boxed{x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}}$$

- נחזור על התהליך כל עוד מתקיימים שני התנאים הבאים:
  1. $|x_n - x_{n-1}| > TOL$
  2. לא חרגנו ממספר האיטרציות המקסימלי N

פסאודו קוד

Secant algorithm

```
SecantMethod (f, x0, x1, TOL, N):
    for i=1 to N do
        p = x1 - f(x1)·(x1-x0) / f(x1)-f(x0)
        if |p - x1| < TOL then
            return p
        else
            x0 = x1
            x1 = p
    end for
return p
```

- **f** - פונקציה רציפה
- **x0, x1** - שני ערכים התחלתיים
- **TOL** - השגיאה המקסימלית המותרת
- **N** - מספר מקסימלי של איטרציות.