



כ"ו בשבט תשפ"א

מס' שאלון - 461  
בפברואר 2021

מס' מועד 75

סמסטר 2021א

20407 / 4

שאלון בחינת גמר

20407 - מבני נתונים ומבוא לאלגוריתמים

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה 4 עמודים

מבנה הבחינה:

המבחן מורכב משני חלקים.

חלק א:

עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות 1-2.  
10 נקודות לחלק זה.

חלק ב:

עליכם לענות על שלוש מבין ארבע השאלות 3-6.  
(30 נקודות לשאלה; 90 נקודות לחלק זה).

הנחיות:

רצוי שכל תשובה תתחיל בעמוד חדש.  
יש להשאיר מספיק זמן לקראת סוף הבחינה כדי לסרוק ולהעלות את הקבצים.

בהצלחה !!!

## חלק א (10 נקודות)

עליכם לענות על שאלה אחת מבין שתי השאלות 1-2.  
10 נקודות לחלק זה.

### שאלה 1

מצאו פתרון אסימפטוטי הדוק עבור נוסחת הנסיגה הבאה:

$$\begin{cases} T(1) = 1 \\ T(n) = 9T(n/3) + n^\alpha \cdot \lg^{\alpha+1} n \end{cases}$$

$\alpha$  הוא פרמטר ממשי חיובי.

רמז: התייחסו לשלושה מקרים אפשריים.

### שאלה 2

א. (5 נק') הוכיחו (למשל ע"י מציאת  $c$  ו- $n_0$  מתאימים) או הפריכו (למשל ע"י מציאת דוגמה נגדית):

$$T_1(M) = O(T_2(M)) \quad \text{או} \quad T_2(M) = O(f(n)) \quad \text{ו-} \quad T_1(M) = O(f(n)) \quad \text{אם}$$

ב. (5 נק') קבעו את היחס האסימפטוטי בין  $2^{\log^2 n}$  ל- $n^{\log n}$ .

**המשך הבחינה בעמוד הבא**

## חלק ב (90 נקודות)

עליכם לענות על **שלוש** מבין ארבע השאלות 3-6.  
(30 נקודות לשאלה ; 90 נקודות לחלק זה).

### שאלה 3

נתאר אלגוריתם מיון עבור מערך  $A$  בגודל  $n$ :

- מחלקים את  $A$  ל- $\lceil \sqrt{n} \rceil$  קטעים, כל אחד בגודל  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$  לפחות; לדוגמה, עבור  $n=8$  נחלק את המערך ל-3 חלקים בגדלים 2,3,3 (עקרונית ניתן גם 2,2,4 אך דמיינו חלוקה שווה ככל הניתן).
- על כל אחד מ- $\lceil \sqrt{n} \rceil$  הקטעים, קוראים לאלגוריתם שלנו באופן רקורסיבי.
- ממזגים את  $\lceil \sqrt{n} \rceil$  הקטעים הממוינים.

(15 נק') א. תארו אלגוריתם למיזוג הקטעים בזמן  $O(n \cdot \lg n)$ ; אין להשתמש בשגרת מיון.

(5 נק') ב. כתבו את נוסחת הנסיגה לחישוב זמן הריצה של האלגוריתם.

(10 נק') ג. פתרו את נוסחת הנסיגה.

**הערה:** מותר בכל שלב לרשום  $\sqrt{n}$  במקום  $\lceil \sqrt{n} \rceil$  או  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ .

### שאלה 4

נתון מערך  $A$  בגודל  $n$  של מספרים שלמים בתחום  $1-k$  (כלשהו). נניח שהשתמשנו במיון מנייה כדי למיין את איברי המערך.

(5 נק') א. מה זמן הריצה של המיון (במונחים של  $n$  ו- $k$ )?

(10 נק') ב. בהנתן מערך העזר  $C$  אשר נבנה במהלך מיון מנייה (כלומר לאחר איפוס, מנייה, וצבירה), הראו כיצד ניתן להעזר בו כדי לבצע חיפוש **בזמן קבוע**. כלומר בהינתן ערך

$z$  כלשהו (לאו דווקא מבין ערכי איברי המערך המקורי) יש לענות האם הערך הזה קיים במערך  $A$ , בזמן קבוע, תוך שימוש במערך  $C$  בלבד.

הערה: הערך הנתון לאו דווקא שלם ולא דווקא בתחום הנתון.

(15 נק') ג. נתונה מטריצה  $M$  בגודל  $n$  על  $n$  עם ערכים מספריים חיוביים. ברצוננו לתכנן מבנה נתונים שיענה על שאלה מהצורה:

בהינתן תת מטריצה של  $M$ , מה סכום המספרים בתת-מטריצה זו?

תת המטריצה נתונה ע"י פינה שמאלית עליונה  $(i,j)$  ופינה ימנית תחתונה  $(k,l)$ .

תארו מבנה מתאים לשאילתה זו. מה זמן בנייתו?

רמז: חשבו תחילה כיצד הייתם עושים זאת אם מובטח לכם ש  $i=j=1$  (כלומר פינה שמאלית עליונה של  $M$ ) ונסו להכליל.

**המשך הבחינה בעמוד הבא**

## שאלה 5

נתונה ערימת מינימום  $H$  בת  $n$  איברים.

(10 נק') א. נניח שבוחרים מסלול מהשורש עד לאחד העלים ומגדילים את כל המפתחות במסלול זה בערך כלשהו  $c > 0$ .

תארו אלגוריתם לתיקון הערימה בזמן  $O(\lg^2 n)$ .

(10 נק') ב. נניח כעת שבוחרים  $\lceil \lg n \rceil$  איברים כלשהם בערימה ומקטינים את כל המפתחות בערך כלשהו  $c > 0$ .

תארו אלגוריתם לתיקון הערימה בזמן  $O(\lg^2 n)$ .

(10 נק') ג. בהינתן מצביע אל האיבר המקסימלי, כתבו שגרה המעבירה אותו אל המיקום השמאלי ביותר האפשרי; זמן הריצה הנדרש:  $O(\lg n)$ . מהו האינדקס של אותו מיקום?

הערה: בתיקון הערימה אין לשנות את ערכי המפתחות אלא לתקן כך שתכונת הערימה תתקיים.

## שאלה 6

הציעו מבנה נתונים  $S$ , שבעזרתו ניתן לבצע את הפעולות הבאות בזמנים הנדרשים  $m$  מציין את מספר האיברים ב- $S$ ):

FIND ( $S, k$ ): חיפוש אחר המפתח  $k$  במבנה  $S$ ; זמן:  $O(\lg n)$ ;

INSERT ( $S, k$ ): הכנסת איבר בעל המפתח  $k$  למבנה  $S$ ; זמן:  $O(\lg n)$ ;

DELETE ( $S, p$ ): מחיקת האיבר שאליו מצביע  $p$  מהמבנה  $S$ ; זמן:  $O(\lg n)$ ;

SUM ( $S, k_1, k_2$ ): חישוב והחזרת סכום המפתחות  $k$  של  $S$  המקיימים את התנאי:  
 $k_1 \leq k \leq k_2$ ; זמן:  $O(\lg n)$ .

תארו במילים את המבנה המוצע, איך מתבצעת כל פעולה, והסבירו את הנכונות ואת זמן הריצה שלה.

**בהצלחה !**