ממן 16

שאלה 1:

תהי $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}6 & -9\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$**.**

א. מצא את צורת ז'ורדן $\boldsymbol{G}$ של $\boldsymbol{A}$ ומצא מטריצה הפיכה $\boldsymbol{P}$ כך ש$\boldsymbol{P^{-1}AP=G}$:

ראשית כל, נחשב פולינום אופייני למטריצה A:

$$p_A(t)=|tI-A|=\begin{vmatrix}t-6 & 9\\ -1 & t\end{vmatrix}\underset{\text{הגדרה}}{=}t(t-6)-9(-1)=t^2-6t+9\underset{\text{טרינום}}{=}(t-3)^2$$

לפי קיילי-המילטון $(XI.5)$, הצבת מטריצה בפולינום האופייני שלה מאפסת את הפולינום, כלומר:

$$p_A(A)=(A-3I)^2=0$$

ולכן, לפי הגדרה $XI.22$, המטריצה $A-3I$ נילפוטנטית. נשים לב כי:

$$A-3I=\begin{pmatrix}6-3 & -9\\ 1 & 0-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -9\\ 1 & -3\end{pmatrix}\neq 0$$

ולכן, אינדקס הנילפוטנטיות הוא 2, לפי הגדרתו, כי הוא החזקה הקטנה שהעלאת $A-3I$ בו מאפסת את המטריצה.

בנוסף, לפי טענה $XI.26$, הבלוק הגדול ביותר בצורת ז'ורדן של $A-3I$ הוא מסדר השווה לאינדקס הנילפוטנטיות, כלומר הבלוק הגדול ביותר הוא מסדר 2, זוהי מטריצה מסדר 2 ולכן בהכרח זהו הבלוק היחיד במטריצה. לכן, מצאנו כי $A-3I$ דומה למטריצת ז'ורדן מסדר 2 בעלת בלוק יחיד, כלומר קיימת מטריצה הפיכה P מסדר 2 (כי הן דומות):

$$P^{-1}(A-3I)P=(J_2)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

נטפל באגף השמאלי: לפי פילוג כפל מטריצות:

$$P^{-1}(A-3I)P=P^{-1}AP-3P^{-1}P=P^{-1}AP-3I=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

נעביר אגפים:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+3I=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=G$$

כלומר, מצאנו מטריצת ז'ורדן G כך שקיימת P הפיכה: $P^{-1}AP=G$. לכן, A דומה לG.

כעת, אם נגדיר $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ העתקה לינארית אשר מקיימת $Tv=Av$ לכל $v\in\mathbb{R}^2$, אנו יודעים כי וקטור הקואורדינטות של וקטור מסוים ביחס לבסיס הסטנדרטי במרחב $\mathbb{R}^2$ הוא הוקטור עצמו, ולכן:

$$\forall v\in\mathbb{R}^2:[Tv]_E=Tv=Av=A[v]_E$$

לא תקין

ולכן, לפי לינארית 1, אנו מסיקים כי $[T]_E=A$. בנוסף, A דומה לG, ולכן קיים בסיס סדור B ל$\mathbb{R}^2$ כך ש$B=(b_1,b_2)$ וכן $[T]_B=G$, כיוון שהן דומות (מלינארית 1). וקטורי בסיס זה הן עמודות מטריצת המעבר מE לB, וזוהי בדיוק המטריצה P שמצאנו לעיל! לכן נמצא את הבסיס שבו מטריצת הייצוג של T היא $[T]_B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=G$. נזכור, כי לפי הגדרת מטריצת הייצוג:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}\uparrow & \uparrow\\ [Tb_1]_B & [Tb_2]_B\\ \downarrow & \downarrow\end{pmatrix}=G=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

לכן, מהשוויון, נסיק כי:

$$[Tb_1]_B=(3,0)^t$$

לכן, לפי הגדרת וקטור קואורדינטות:

$$Tb_1=3b_1+0b_2=3b_1$$

שייך ל I/A

כלומר, b_1 הוא וקטור עצמי של הערך העצמי 3! לכן נרצה למצוא את המרחב העצמי של הערך העצמי 3, ביחס למטריצה A. נזכור כי המרחב העצמי של 3 הוא מרחב הפתרונות למערכת $3I-A$:

$$3I-A=\begin{pmatrix}-3 & 9\\ -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to-\frac{1}{3}R_1}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+R_1}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

מתקבלת המערכת:

$$\{x-3y=0\leftrightarrow x=3y$$

ולכן וקטור כללי שמהווה פתרון לה הוא: $(3y,y)=y(3,1)$. לפיכך, $V_3=Sp\{(3,1)\}$.

ננסה לבחור $b_1=(3,1)$. זהו, כאמור, וקטור עצמי שמתאים לערך העצמי 3 ולכן עונה על הדרישה עבור העמודה הראשונה. נמשיך:

$$[Tb_2]_B=(1,3)^t$$

ומהגדרת הקואורדינטות:

$$\to Tb_2=b_1+3b_2\Leftrightarrow Tb_2-3b_2=b_1=(3,1)\underset{\forall v\in\mathbb{R}^2:Tv=A}{\Longleftrightarrow}Ab_2-3b_2=(A-3I)b_2=(3,1)$$

כלומר, b_1 פתרון למערכת האי-הומוגנית $(A-3I)x=(1,3)$. נמצא פתרון לה:

$$(A-3I|(1,3)^t)=\left(\begin{array}{cc|c}3 & -9 & 3\\ 1 & -3 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 1\\ 3 & -9 & 3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

מתקבלת המערכת:

$$\{x-3y=1\Leftrightarrow x=3y+1$$

כלומר, פתרון כללי למערכת הנ"ל, שהוא גם אפשרות ל-b_2, הוא:

$$(3y+1,y)$$

אם נציב $y=0$, שהרי הוא חופשי וזה אפשרי, יתקבל:

$$b_2=(1,0)$$

שני הוקטורים בת"ל, ולכן אין שום סתירה, ואכן, $B=\big((3,1),(1,0)\big)$ בסיס שבו T מיוצגת על ידי G, ולכן נוכל להגדיר: $P=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, וזו, כאמור, תקיים את התנאי הנדרש.

נמצא את P^{-1} ונוודא שאכן צדקנו (יהיה לה שימוש בסעיפים הבאים בלאו הכי). נדרג למטריצת היחידה לצד מטריצת היחידה:

$$(P|I_2)=\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-3R_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -3\end{array}\right)=(I_2|P^{-1})$$

ולכן, $P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$. נוודא שלא טעינו:

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{6} & \mathbf{-9}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & -9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=G$$

כלומר, אכן מצאנו את המטריצות הנכונות.

ב. חשבו את G^{100} ואת A^{100}:

לפי שאלה 13 בספר של יחידות 7-8-9, מתקיים כי:

$$G^{100}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}^{100}=\begin{pmatrix}3^{100} & 3^{99}\cdot\binom{100}{1}\\ 0 & 3^{100}\end{pmatrix}$$

נשים לב כי: $\binom{100}{1}=\frac{100!}{99!1!}=\frac{99!\cdot 100}{99!}=100$, ולכן:

$$G^{100}=\begin{pmatrix}3^{100} & 3^{99}\cdot 100\\ 0 & 3^{100}\end{pmatrix}$$

בנוסף, נשים לב כי לפי המשוואה:

$$P^{-1}AP=G$$

אם נעלה כל אגף בחזקת 100:

$$(P^{-1}AP)^{100}=P^{-1}A\boldsymbol{PP^{-1}}A\boldsymbol{PP^{-1}}\dots\boldsymbol{PP^{-1}}A\boldsymbol{PP^{-1}}AP=P^{-1}AIAIAI\dots IAIAIP=P^{-1}A^{100}P$$
$$=G^{100}$$

נכפול ב-P משמאל וב-P^{-1} מימין:

$$\leftrightarrow A^{100} = PG^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{3^{100}} & \mathbf{3^{99}\cdot 100} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3^{100}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{101} & 100\cdot 3^{100}+3^{100} \\ 3^{100} & 100\cdot 3^{99} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3^{101} & 101\cdot 3^{100} \\ 3^{100} & 100\cdot 3^{99} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 101\cdot 3^{100} & 3^{101}-101\cdot 3^{101} \\ 100\cdot 3^{99} & 3^{100}-100\cdot 3^{100} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 101\cdot 3^{100} & -100\cdot 3^{101} \\ 100\cdot 3^{99} & -99\cdot 3^{100} \end{pmatrix}$$
כנדרש.

ג. מצא נוסחה עבור a_n, כאשר נתון: $a_0 = a, a_1 = b, \forall 0 \le n \in \mathbb{N}: a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$:

נשים לב כי השורה הראשונה במטריצה A מאוד דומה להגדרה הרקורסיבית של a_{n+2} מבחינת המקדמים. לכן, נוכל להציב:

$$A\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

ואכן:

$$A\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a_{n+1} - 9a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$$

השתמשנו אך ורק בהגדרה לפי הנתון, ולכן אין סתירה.

נוכיח באינדוקציה את המקרה הכללי:

עבור מקרה הבסיס, כאשר $n = 0$:

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$$

נניח עבור n כי $A^{n+1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$ ונוכיח עבור $n+1$ באינדוקציה:

נכפול בA משמאל:

$$A^{n+2}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = A^{n+2}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = AA^{n+1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = A\left(A^{n+1}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+3} \end{pmatrix} \underset{\text{לעיל}}{=} \begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

ולכן הטענה נכונה לכל $n \ge 0$, כלומר:

$$A^{n+2}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+3} \\ a_{n+2} \end{pmatrix}$$

אם נגדיר $k = n+3$, אזי:

$$A^{k-1}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix}$$

כעת, נחשב את A^k. בדרך דומה לזו ששימשה אותנו בסעיף ב':

$$P^{-1}AP = G$$

נעלה בחזקה, כל ה$P^{-1}P$ ייעלמו כי יהפכו לI:

$$P^{-1}A^kP = G^k$$

נכפול מימין ומשמאל בהפוכות:

$$\Leftrightarrow A^k = PG^kP^{-1}$$

לפי שאלה 13:

$$G^k = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 3^k & 3^{k-1}\cdot\binom{k}{1} \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

כאשר $k = \frac{k!}{(k-1)!1!} = \binom{k}{1}$, ואם נציב:

$$= \begin{pmatrix} 3^k & 3^{k-1}\cdot k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

נמצא את A^k:

$$A^k = PG^kP^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{3^k} & \mathbf{3^{k-1}\cdot k} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3^k} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3^{k+1} & k3^k + 3^k \\ 3^k & k3^{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (k+1)3^k & 3^{k+1} - 3^{k+1}(k+1) \\ k3^{k-1} & 3^k - k3^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k+1)3^k & 3^{k+1}(1-k+1) \\ k3^{k-1} & 3^k - k3^k \end{pmatrix}$$

לכן:

$$\begin{pmatrix} a_k \\ a_{k-1} \end{pmatrix} = A^{k-1}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k-1+1)3^{k-1} & 3^{k-1+1}(1-k+1-1) \\ k3^{k-1-1} & 3^{k-1} - (k-1)3^{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (k)3^{k-1} & 3^k(1-k) \\ (k-1)3^{k-2} & 3^{k-1} - (k-1)3^{k-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bk3^{k-1} + a(1-k)3^k \\ * \end{pmatrix}$$

מהשוויון (ברכיב הראשון של וקטור העמודה הסופי):

$$\boldsymbol{a_k = bk3^{k-1} + a(1-k)3^k}$$

שאלה 2:

יהי V מרחב אוניטרי ממימד סופי, ותהי $T: V \to V$ טרנספורמציה לינארית. נתון שכל וקטור עצמי של T הוא גם וקטור עצמי של T^*. הוכח כי T נורמלית.

נוכיח באינדוקציה כי אם כל וקטור עצמי של T הוא וקטור עצמי של T^*, אזי T נורמלית, על פי המימד של ~~T~~

בסיס: אם $\dim V = 1$ אזי T מיוצגת על ידי מטריצה $A = (\alpha)$ מסדר 1, ולכן לכל $Tv = Av = \alpha v$: $v \in V$, כלומר $T = \alpha I$, ולכן היא בוודאי נורמלית (שהרי הוקטור (1) מהווה בא"ן ומטריצת הייצוג ביחס אליו אלכסונית בהכרח).

ולכן, נורמלית.

נניח באינדוקציה חזקה עבור $\dim V < n$, ונוכיח עבור $\dim V = n$:

כלומר, $F = \mathbb{C}$

בגלל שT לינארית מעל מרחב אוניטרי, שהרי הפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים, ולכן יש לו לפחות שורש אחד – כלומר, ערך עצמי אחד. אם נסתכל על הערך העצמי הזה, λ, ועל המרחב העצמי שלו, V_λ:

אם $V_\lambda = V$, אזי T סקלרית (שהרי לכל $v \in V$, $Tv = \lambda v$, ולכן $T = \lambda I$), ולכן היא גם לכסינה אוניטרית, ולכן היא גם נורמלית (שהרי כל שיש לעשות הוא למצוא בא"ן כלשהו לV, לפי $IX.42$.

ואז מה כל ניתן? לא מדנ"ק.

אחרת, אם $V_\lambda \subset V$ (לא שווה אך בוודאי תת מרחב!), אזי נוכל לפרק אורתוגונלית את $V = V_\lambda \oplus V_\lambda^\perp$, לפי משפט הפירוק האורתוגונלי, $IX.19$, אך כמובן ש$V_\lambda^\perp \neq \{0\}$ (כי אם כן, אזי $V_\lambda = V$).

חסר נימוק שבה אפשר מכיוון ש-V_λ הוא ת"מ T-שמור

לכן, $\dim V_\lambda, \dim V_\lambda^\perp < n$, נוכל לצמצם את T לV_λ, בגלל שהצמצום מוגדר לפי $XI.15$ לכל $v \in V_\lambda \subseteq V$ על ידי $T_{V_\lambda}v = Tv$, שהרי כל וקטור עצמי של T_{V_λ} הוא גם וקטור עצמי של $T^*_{V_\lambda}$, כלומר התנאי לאינדוקציה מתקיים, ולכן לפי הנחת האינדוקציה מתקיים כי T_{V_λ} נורמלית, ולכן קיים בבסיס אורתונורמלי B_1 של וקטורים עצמיים של T_{V_λ}, שהם גם וקטורים עצמיים של T.

כי v ו"ע של T^*, ולכן $\bar{\lambda}$ ע"ע עבורו $=(\lambda v, u)$

נשים לב כי לכל $v \in V_\lambda$, $u \in V_\lambda^\perp$, $(v, Tu) = (T^*v, u)$ ולפי הלמה בעמוד 111 ביחידות 1-2-3 בהכרח $T^*v = \bar{\lambda}v$, ולכן $\bar{\lambda} \cdot 0 = 0 \underset{u \perp v!}{=} \bar{\lambda}(v, u) = (T^*v, u)$, כלומר מטרנזיטיביות השוויון: $(v, Tu) = 0$, לכן $v \perp Tu$, זאת לכל $u \in V_\lambda$, $v \in V_\lambda^\perp$, ולכן $Tu \in V_\lambda^\perp$, ולכן $V_\lambda^\perp$ הוא T-שמור!

לא ניתן להשתמש בכך ש-T נורמלית כדי להוכיח זו.

באופן דומה עבור T^*, אך אין צורך בשימוש בלמה: לכל $v \in V_\lambda$, $u \in V_\lambda^\perp$: $(T^*u, v) = (u, Tv) = (u, \lambda v) = \bar{\lambda}(u, v) \underset{u \perp v}{=} 0$, ולכן $T^*u \perp v$, כלומר u הוא T^*-שמור.

אותה הטעות

באופן דומה: יהי $v \in V_\lambda^\perp$ וקטור עצמי של T. לכן, לפי הנחת האינדוקציה, v וקטור עצמי של T^*, אך בגלל ש$v \in V_\lambda^\perp$, בהכרח v וקטור עצמי של $T_{V_\lambda^\perp}, T^*_{V_\lambda^\perp}$, נוכל לצמצם כי מצאנו ששני המרחבים הם T וT^* שמורים, ולכן כל וקטור עצמי של $T_{V_\lambda^\perp}$ הוא גם וקטור עצמי של $T^*_{V_\lambda^\perp}$, כלומר הצמצום של T ל$V_\lambda^\perp$ מקיים את תנאי האינדוקציה, כאמור, ולכן היא לכסינה אוניטרית, כלומר קיים גם בסיס אורתונורמלי B_2 של וקטורים עצמיים ל$V_\lambda^\perp$.

ו"ע של T^* ו"ע של T

פה חשוב להמשך.

15/20

כלומר: אם נסתכל על הסדרה $B_1 \cup B_2$, שהרי $SpB_1 \cap SpB_2 = \{\underline{0}\}$ (לפי הפירוק האורתוגונלי שנעשה לעיל), ולכן הסדרה הזו היא בסיס, אך מנגד, היא בסיס של וקטורים עצמיים מנורמלים, ולכן בהכרח היא בסיס אורתונורמלי – כלומר, קיים בסיס אורתונורמלי של וקטורים עצמיים לV, ולכן T לכסינה אוניטרית, ולכן גם נורמלי ת
לפי המשפט ~~$IX.40$~~ ~~וההגדרה של נורמליות ($IX.41$), כנדרש.~~ .42

שאלה 3:

א. מצאו את צורת ז'ורדן של המטריצה:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-3} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-6} & \mathbf{0} & \mathbf{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{-4} & \mathbf{0} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

נתחיל במציאת פולינום אופייני:

$$p_A(t) = |tI - A| = \begin{vmatrix} t-1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & t+6 & 0 & -13 \\ 0 & 3 & t-1 & -3 \\ 1 & 4 & 0 & t-8 \end{vmatrix} \stackrel{C_3}{=} (t-1)\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ 2 & t+6 & -13 \\ 1 & 4 & t-8 \end{vmatrix} \stackrel{R_2 \to R_2 - 2R_3}{=}$$

$$= (t-1)\begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ 0 & t-2 & -2t+3 \\ 1 & 4 & t-8 \end{vmatrix} \stackrel{C_1}{=} (t-1)\left((t-1)\begin{vmatrix} t-2 & -2t+3 \\ 4 & t-8 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ t-2 & -2t+3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= (t-1)\Big((t-1)\big((t-2)(t-8) - 4(-2t+3)\big) + \big(3(-2t+3) - (-3)(t-2)\big)\Big) =$$

$$= (t-1)\big((t-1)(t^2 - 10t + 16 + 8t - 12) + (-6t + 9 + 3t - 6)\big) =$$

$$= (t-1)\big((t-1)(t^2 - 2t + 4) + (-3t + 3)\big)$$

$$= (t-1)(t^3 - 2t^2 + 4t - t^2 + 2t - 4 - 3t + 3)$$

$$= (t-1)(t^3 - 3t^2 + 3t - 1)$$

נשים לב כי -1 נוצר ממכפלה של 1-ים ו-1-ים, בין היתר. לכן, ננסה לחלק בפולינום $(t-1)$ את הפולינום ממעלה 3 (הגורם השני). בעזרת חילוק פולינומים ארוך (לינארית 1), מגיעים למסקנה כי $t-1$ מחלק של הפולינום $t^3 - 3t + 3t - 1$, והמנה היא $t^2 - 2t + 1$. לכן:

$$p_A(t) = (t-1)(t-1)(t^2 - 2t + 1) \underset{\text{טרינום}}{=} (t-1)^4$$

יותר פשוט להשתמש בנוסחת הבינום של ניוטון

ונמצא את הפולינום המינימלי של A: אנו יודעים כי הוא מחלק את הפולינום האופייני ($XI.11$), לכן, הוא יכול להיות כל אחת מהאופציות הבאות:

$$(t-1), (t-1)^2, (t-1)^3, (t-1)^4$$

בנוסף, הוא צריך להיות ממעלה קטנה ככל האפשר, ובהצבת A בתוכו הוא אמור להתאפס. לכן, נגדיר בכל פעם פולינום $q(x)$ לכל אחת מהאופציות, נתחיל מהחזקה הקטנה ביותר ונתקדם עד שנמצא את הפולינום שכאשר מציבים בו את A הוא מתאפס.

כאשר $q(x) = t - 1$:

$$q(A) = A - I = \begin{pmatrix} 1-1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6-1 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1-1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

כאשר $q(x) = (t-1)^2$:

$$q(A) = (A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$$

כאשר $q(x) = (t-1)^3$:

$$q(A) = (A-I)^3 = (A-I)(A-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \\ 3 & 9 & 0 & -18 \\ 1 & 3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

ולכן, הפולינום המינימלי הוא: $M_A(t) = (t-1)^3$.

ועל מנת שנוכל להשתמש במשפט $XI.30$, נמצא גם את הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי $\lambda = 1$. כאן אין צורך.

נזכור שזהו מימד מרחב הפתרונות של $\lambda I - A$, אשר שווה לסדר המטריצה פחות דרגת $\lambda I - A$. לכן נדרג את $\lambda I - A = I - A$:

לפי $M_A(t)$: סדר הבלוק המקסימלי הוא 3, וסכום הסדרים של כל הבלוקים 4.

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 \leftrightarrow R_4]{R_1 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 3R_2}$$

$$\to \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$r_{geom}(\lambda) = \dim P(\lambda I - A) = 4 - \rho(\lambda I - A) = 4 - 2 = 2$$

כעת, נשתמש במשפט $XI.30$ על מנת לבנות את מטריצת הז'ורדן הרצויה.

לפי משפט $XI.30$, ישנו בלוק אחד, G_1, שנמצא באלכסון של מטריצת הז'ורדן, כאשר יש $r_{geom}(\lambda) = 2$ בלוקי ז'ורדן בתוך הבלוק, הגדול ביותר מסדר 3 (החזקה של $(t-1)$ במינימלי), ולכן בהכרח הבלוק G_i בנוי מבלוק ז'ורדן בגודל 3 ועוד בלוק בגודל 1, ושניהם שייכים לערך העצמי $\lambda = 1$. דהיינו, קיימת P הפיכה מסדר 4:

$$P^{-1}AP = G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_3(\lambda = 1) & 0 \\ 0 & J_1(\lambda = 1) \end{pmatrix}$$

כנדרש.

ב. מצא את צורת ז'ורדן J של המטריצה B ומצא מטריצה הפיכה P המקיימת $B = P^{-1}JP$, כאשר נתונה: $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$:

ראשית כל, נמצא את הפולינום האופייני של B. נשים לב, כי בהשמטת השורה השלישית והעמודה השלישית מהמטריצה A, כפי שעשינו בחישוב הדטרמיננטה בסעיף א', מניב לנו בדיוק את B. לכן, לפי המינור מסעיף א', אנו מסיקים כי:

$$p_B(t) = |tI - B| = \begin{vmatrix} t-1 & 3 & -3 \\ 2 & t+6 & -13 \\ 1 & 4 & t-8 \end{vmatrix} \underset{\text{א}}{=} (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) = (t-1)^3$$

ניתן לראות מידית כי 1 השורש היחיד של הפולינום האופייני, ולכן הוא הערך העצמי היחיד של B. נחפש את המרחב העצמי שלו (כי נזדקק לו בהמשך). מרחב זה הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $1I-A=I-A$:

$$I-A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 7 & -13 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 7 & -13 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1 \to R_1 + 4R_2]{R_3 \to R_3 + 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

מתקבלת המערכת:

$$\begin{cases} x - 3z = 0 \Leftrightarrow x = 3z \\ -y + z = 0 \Leftrightarrow y = z \end{cases}$$

עם הפתרון הכללי: $(3z,z,z)=z(3,1,1)$, ולכן $V_1 = Sp\{(3,1,1)\}$. הריבוי האלגברי של ערך עצמי הוא ממד המרחב העצמי המתאים לאותו ערך עצמי, מצאנו שהמרחב העצמי של הערך העצמי 1 נפרש על-ידי וקטור בסיס אחד, ולכן הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 1 הוא $\dim V_1 = 1$.

נמצא את הפולינום המינימלי. כאמור, הפולינום המינימלי מחלק את האופייני (לפי $XI.11$), ולכן הוא יכול להיות כל אחד מבין הפולינומים הבאים, שהם גורמים לינאריים בחזקות שונות מהפולינום האופייני (כי אחרת המינימלי פשוט לא ייחלק את האופייני ללא שארית):

$$(t-1), (t-1)^2, (t-1)^3$$

נבדוק כל אפשרות:

אם $M_B(t) = t-1$, אזי:

$$M_B(B) = B - I = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 7 & -13 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \neq 0$$

וזוהי סתירה, כי הפולינום המינימלי מתאפס על-ידי הצבת המטריצה שלו בו.

אם $M_B(t) = (t-1)^2$:

$$M_B(B) = (B-I)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 7 & -13 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 \\ 2 & 7 & -13 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix} \neq 0$$

לכן נשללו כל שאר האופציות, בנוסף אנו יודעים לפי קיילי-המילטון כי הצבת מטריצה בפולינום האופייני שלה מאפסת את המטריצה, ולכן בהכרח $M_B(t) = (t-1)^3 = p_B(t)$.

כעת, לפי משפט $XI.30$, נוכל לבנות את מטריצת הז'ורדן J אשר דומה לB (כי עלינו לחפש מטריצה הפיכה P: $J = P^{-1}AP$, וזוהי בדיוק ההגדרה של מטריצות דומות!):

לפי המשפט, יש לנו ערך עצמי אחד, ולכן יהיה בלוק אחד במטריצה J, והוא כמובן יהיה כסדר המטריצה, או החזקה של $(t-1)$ בפולינום האופייני – 3.

בנוסף, בתוך הבלוק היחיד שמרכיב את המטריצה, יהיה בלוק ז'ורדן יחיד (כריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי 1 – שהוא 1), ולכן בהכרח הבלוק יהיה בלוק ז'ורדן בסיסי מסדר 3, שמתאים לערך העצמי 1, כלומר:

$$J = \left(\left(J_3(1) \right) \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

היא מטריצת הז'ורדן שאנו מחפשים. כעת, תהא $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ טרנספורמציה לינארית שמוגדרת:

$$\forall v \in \mathbb{R}^3 : Tv = Bv$$

ולפי משפט 10.2.1, ובגלל שוקטורי הקואורדינטות בבסיס הסטנדרטי הם לא אחרים מאשר הוקטורים המקוריים עצמם – שהרי B מטריצת הייצוג של T ביחס לבסיס הסטנדרטי (הסבר מפורט גם בשאלה 1).

כלומר, $[T]_E = B$. אנו יודעים שB דומה לJ, ולכן לפי לינארית 1 קיים בסיס $C = (c_1, \dots, c_3)$ שבו $[T]_C = J$. לכן, נרצה למצוא את הבסיס הזה, ואנו גם יודעים ש: $B = [T]_C = P^{-1}BP = P^{-1}[T]_E P$, ולכן P היא למעשה מטריצת המעבר מהבסיס הסטנדרטי לבסיס C, ולכן, לפי הגדרת מטריצת המעבר, עמודותיה של P יהיו וקטורי C! לכן, נסתכל לפי הגדרת מטריצת הייצוג:

$$[T]_C=\begin{pmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ [Tc_1]_C & [Tc_2]_C & [Tc_3]_C\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=J$$

נסתכל על העמודה הראשונה:

$$[Tc_1]_C=(1,0,0)^t$$

ולפי הגדרת וקטורי הקואורדינטות:

$$\to Tc_1=1c_1+0c_2+0c_3=1c_1$$

כלומר, c_1 וקטור עצמי של הערך העצמי 1. כבר מצאנו את V_1 (המרחב העצמי של 1), ולכן נוכל לבחור:

$$c_1=(3,1,1)$$

ולפי העמודה השנייה, ובעזרת הגדרה הקואורידנטות:

$$[Tc_2]_C=(1,1,0)^t\to Tc_2=c_1+c_2$$

לפי הגדרת T:

$$Tc_2=Ac_2=c_1+c_2\Leftrightarrow Bc_2-c_2=(B-I)c_2=c_1$$

כלומר, c_2 הוא הפתרון למערכת $(B-I)x=c_1$. לכן, נפתור את המערכת:

$$(B-I|c_1^t)$$
$$=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-3&3&3\\-2&-7&13&1\\-1&-4&7&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-4&7&1\\-2&-7&13&1\\0&-3&3&3\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-4&7&1\\0&1&-1&-1\\0&-3&3&3\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_2]{R_1\to R_1+4R_2}$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&3&-3\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to -R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&3\\0&1&-1&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

מתקבלת המערכת:

$$\begin{cases}x-3z=3\Leftrightarrow x=3z+3\\ y-z=-1\Leftrightarrow y=z-1\end{cases}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא $(3z+3,z-1,z)$, כאשר z, כמובן, חופשי.

נזכור, כי הפתרון למערכת זו הוא אופציה לc_2. לכן, אם נבחר $z=-1$: $c_2=(0,-2,-1)$.

באופן כמעט זהה עבור העמודה השלישית:

$$[Tc_3]_C=(0,1,1)^t\to Tc_3=c_2+c_3\Leftrightarrow Tc_3-c_3=c_2$$

ולפי הגדרת T: $Tc_3-c_3=Bc_3-c_3=(B-I)c_3=c_2$

ושוב, נשים לב כי c_3 מהווה פתרון למערכת $(B-I)x=c_2$. לכן נפתור:

$$(B-I|c_2^t)$$
$$=\left(\begin{array}{ccc|c}0&-3&3&0\\-2&-7&13&-2\\-1&-4&7&-1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-4&7&-1\\-2&-7&13&-2\\0&-3&3&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}-1&-4&7&-1\\0&1&-1&0\\0&-3&3&0\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3+3R_2]{R_1\to R_1+4R_2}$$
$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}-1&0&3&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1\to -R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-3&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x-3z=1\Leftrightarrow x=3z+1\\ y-z=0\Leftrightarrow y=-z\end{cases}$$

לכן, פתרון כללי למערכת הוא: $(3z+1,-z,z)$. אם נבחר $z=0$: $c_3=(1,0,0)$.

כאמור, מצאנו בסיס C שבו $[T]_C=J$, ולכן המטריצה P, שכאמור, עמודותיה הן וקטורי C (לפי הנימוק לעיל – כי היא למעשה מטריצת המעבר!), היא:

20/20

$$P=\begin{pmatrix}\uparrow & \uparrow & \uparrow\\ [c_1]_E=c_1 & \dots & [c_3]_E=c_3\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&-2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

שאלה 4: תהי A מטריצה ריבועית מסדר 7 בעלת ערך עצמי יחיד $\lambda\in\mathbb{C}$. נתון:

$$\boldsymbol{\rho(A-\lambda I)=2,\rho(A-\lambda I)^2=1}$$

ראשית כל, לפי הנתון, בגלל שיש ערך עצמי יחיד, אזי יש שורש יחיד לפולינום האופייני (שהרי כל שורש הוא ערך עצמי), ושורש זה הוא λ. בנוסף, הפולינום האופייני הוא פולינום מתוקן ממעלה ששווה לסדר המטריצה, ולכן בהכרח יש בפולינום גורם לינארי אחד, $(t-\lambda)$, מועלה בחזקת 7. כלומר:

$$\boldsymbol{p_A(t)=(t-7)^7}$$

בנוסף, $\rho(A-\lambda I)=\rho\big(-(A-\lambda I)\big)=\rho(\lambda I-A)$ כי פעולות אלמנטריות (ובפרט כפל כל שורה במטריצה בסקלר -1) לא משנות דרגה. אנו יודעים כי הריבוי הגיאומטרי הוא ממד המרחב העצמי המתאים לערך העצמי, ובנוסף, המרחב העצמי שמתאים לערך העצמי λ הוא מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית $\lambda I-A$. אנו יודעים גם מלינארית 1 כי $\dim P(\lambda I-A)=n-\rho(\lambda I-A)$ כאשר n הוא סדר המטריצה, ולכן $r_{geom}(\lambda)=7-\rho(\lambda I-A)=7-\rho(A-\lambda I)=7-2=5$. כלומר,

הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי λ הוא 5.

נתחיל לנסות לבנות את מטריצת הז'ורדן, באמצעות משפט $XI.30$.
לפי המשפט, יש ערך עצמי אחד ולכן יש גם בלוק ז'ורדן אחד, G_λ שמתאימה לערך העצמי הזה – λ.
נסתכל על מבנה הבלוק G_λ. לפי המשפט, מספר בלוקי הז'ורדן הבסיסיים בתוך הבלוק הזה הוא כריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי המתאים – λ. מצאנו שהריבוי הגיאומטרי הזה הוא 5, ולכן ישנם 5 בלוקי ז'ורדן בסיסיים בתוך הבלוק הגדול.

- אם הבלוק הגדול ביותר הוא מסדר 4 לפחות, אזי נשאר לכל היותר מקום לעוד 3 בלוקים מסדר 1 (הם הקטנים ביותר ולכן יהיו בכל מקרה לכל היותר עוד 3 בלוקים), ואז יש לכל היותר 4 בלוקי ז'ורדן בסיסיים בבלוק, אבל מצאנו שצריכים להיות לפחות 5 וזוהי סתירה!
- אם הבלוק הגדול ביותר הוא מסדר 2, אזי לפי המשפט $XI.30$ אנו יודעים כי החזקה של $(t-\lambda)$ בפולינום המינימלי היא 2, ואין עוד גורמים אחרים בפולינום המינימלי (לפי $\mathrm{XI}.11$). בנוסף, לפי הגדרתו של הפולינום המינימלי של מטריצה ($XI.7$), הצבת אותה מטריצה בתוכו מאפסת אותו. לכן, אם אכן $M_A(t)=(t-\lambda)^2$ כפי שתואר לעיל, אזי $M_A(A)=(A-\lambda I)^2=0$, אבל נתון כי $\rho(A-\lambda I)^2\neq 0$, וזוהי סתירה – כי למטריצת האפס יש דרגה ששווה לאפס!
- אם הבלוק הגדול ביותר הוא מסדר 1, אזי החזקה של $t-\lambda$ בפולינום המינימלי היא 1, וכאמור, אין עוד גורמים כי הוא מחלק את האופייני. לכן, לפי משפט $XI.20$, A לכסינה! אבל הריבוי הגיאומטרי של הערך העצמי λ הוא 5, בעוד האלגברי הוא 7, וזוהי סתירה – שהרי אם מטריצה לכסינה אזי הריבויים של כל ערך עצמי שווים!

כלומר – אם נסמן את גודל הבלוק הקטן ביותר r, אזי $0<r<4$ וגם $r\neq 1,2$, לפי הנימוקים לעיל, ולכן $2<r<4$ כאשר, כמובן $r\in\mathbb{N}$, ולכן בהכרח $\boldsymbol{r=3}$. כלומר, המטריצה דומה למטריצת ז'ורדן:

$$G=\begin{pmatrix} J_3(\lambda) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & J_1(\lambda)=\lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

בנוסף, כפי שצוין לעיל, גודל הבלוק הגדול ביותר הוא החזקה של $(t-\lambda)$ בפולינום המינימלי. גילינו שחזקה זו היא בהכרח 3, וכמובן שהפולינום המינימלי מחלק את האופייני ולכן אין גורמים נוספים בו, כלומר:

$$\boldsymbol{M_A(t)=(t-\lambda)^3}$$

20/20

שאלה 5: תהי A מטריצה מסדר 3 בעלת ערכים עצמיים ממשיים בלבד, כך שצורת הז'ורדן של A^3 היא:

$$G = \begin{pmatrix} \mathbf{8} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{8} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

19/20

מצא את הפולינום האופייני והפולינום המינימלי של A, ורשום את צורת ז'ורדן של A. נמק.

ראשית כל, נחשב את הפולינום האופייני של A^3. לפי לינארית 1, הפולינום האופייני של מטריצות דומות הוא שווה. לכן, נוכל לחשב את הפולינום האופייני של צורת הז'ורדן והוא יהיה בדיוק אותו פולינום:

$$p_A(t) = p_G(t) = |tI - G| = \begin{pmatrix} t-8 & -1 & 0 \\ 0 & t-8 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix} \overset{\text{משולשית}}{=} (t-8)^2(t-1)$$

השורשים של הפולינום האופייני הם הערכים העצמיים. לכן, הערכים העצמיים של A^3 הם 1,8. כעת ננסה למצוא את הערכים העצמיים של A. לפי שאלה ביחידה 11 של לינארית 1, אם λ ערך עצמי של A אזי λ^3 ערך עצמי של A^3.

לכן, יהי $\lambda \in \mathbb{R}$ ערך עצמי של A. לכן, λ^3 ערך עצמי של A^3. אנו יודעים שהערכים העצמיים של A^3 הם 1,8, ולכן בהכרח $\lambda^3 \in \{1,8\}$. נזכור כי λ ממשי (לפי הנתון!), ולכן λ יכול להיות כל אחד מהשורשים השלישיים של כל אחד מהערכים העצמיים 1,8. השורש השלישי הממשי היחיד של 1 הוא 1 עצמו, והשורש השלישי הממשי היחיד של 8 הוא 2.

בנוסף, נזכור מלינארית 1 כי למטריצות דומות יש אותה דטרמיננטה ואותה עקבה. לכן ל-A^3 ול-G אותה דטרמיננטה - $8 \cdot 8 \cdot 1 = 64$ (משולשית!). בנוסף, $|A^3| = |AAA| = |A||A||A| = \boldsymbol{|A|^3 = 64}$.

כעת, נבחן אפשרויות לפולינום האופייני של A. אנו יודעים כי הוא מתוקן ממעלה 3, וכל שורש שלו הוא ערך עצמי. לכן, הוא יכול להיות כל שילוב של הגורמים $(t-2)$, $(t-1)$, כאשר סכום החזקות הוא 3 בדיוק, כסדר המטריצה. לכן, האפשרויות לפולינום האופייני הן:

$$(t-2)^3, (t-1)(t-2)^2, (t-1)^2(t-2), (t-1)^3$$

נשים לב כי כל מטריצה דומה למטריצת ז'ורדן אחת ויחידה (לפי $XI.30'$), ובמטריצה כזאת הערכים העצמיים נמצאים על האלכסון הראשי, ומתחתם יש רק אפסים – כלומר, היא משולשית! לכן הדטרמיננטה היא המכפלה של כל ערך עצמי, כאשר מספר הפעמים שנכפלת כל ערך עצמי הוא הריבוי האלגברי שלו. לכן:

- אם $p_A(t) = (t-2)^3 \rightarrow |A| = 2^3 = 8$ וזוהי סתירה, שהרי $8^3 = 512 \neq 64$!
- אם $p_A(t) = (t-1)^2(t-2) \rightarrow |A| = 1^2 \cdot 2 = 2$ וגם זוהי סתירה, $2^2 = 8 \neq 64$!
- אם $p_A(t) = (t-1)^3 \rightarrow |A| = 1^3 = 1$ ושוב סתירה, שהרי $1^3 = 1 \neq 64$!
- אם $p_A(t) = (t-1)(t-2)^2 \rightarrow |A| = 1 \cdot 2^2 = 4$, אך אכן $4^3 = 64$. לכן <u>זוהי האפשרות היחידה!</u>

כלומר, הסקנו ש-$\boldsymbol{p_A(t) = (t-1)(t-2)^2}$.

כעת, נחפש את הפולינום המינימלי של A. ראשית כל, נשים לב כי A לכסינה אם ורק אם היא דומה לאלכסונית. אנו יודעים שמטריצה אלכסונית היא למעשה צורת ז'ורדן (מקרה פרטי, כאשר הבלוק הגדול ביותר הוא מסדר 1), ובגלל שהן דומות קיימת P הפיכה אשר מקיימת: $P^{-1}AP = D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_3)$. אם נעלה את כל הביטוי בחזקה:

$$(P^{-1}AP)^3 = P^{-1}APP^{-1}APP^{-1}AP = P^{-1}AIAIAP = \boldsymbol{P^{-1}A^3P = D^3}$$

בנוסף, D אלכסונית ולכן כל חזקה שלה גם היא אלכסונית. לפיכך - A^3 לכסינה, כי קיימת P הפיכה: $P^{-1}AP = D^3 = diag(\lambda_1^3, \dots, \lambda_3^3)$. נזכיר שוב, כי <u>צורת הז'ורדן יחידה עד כדי סדר הבלוקים</u>, ומטריצה אלכסונית היא מקרה

פרטי של צורת ז'ורדן שבו הבלוקים הכי גדולים הם מסדר 1. לכן, צורת הז'ורדן של A^3 היא D^3, וזוהי סתירה, שהרי נתונה צורה זו, והיא לא אלכסונית!

לכן, A אינה לכסינה.

נחזור לחיפוש אחר הפולינום המינימלי. נזכור כי לפי $IX.11$, הפולינום המינימלי מחלק את האופייני. לכן, נכתוב את כל האפשרויות השונות של גורמים מהפולינום האופייני, כמועמדים לפולינום המינימלי:

מיותר לפי המשפט XI.11 ב' $(t-1), (t-1)(t-2), (t-1)(t-2)^2, (t-2)$ מיותר לפי XI.11 ב'

כאמור, A אינה לכסינה, ולכן הפולינום המינימלי שלה לא מתפרק לגורמים לינאריים זרים, ($IX.20$, אם ורק אם בשלילה), ולכן נוכל לפסול את שתי האופציות הראשונות ואת הרביעית – כי אחרת זו סתירה!

לכן, נותרה אופציה אחת בלבד לפולינום המינימלי, כלומר: $\boldsymbol{M_A(t) = (t-1)(t-2)^2}$!

כעת, נמצא את צורת ז'ורדן של A, באמצעות משפט $XI.30$. יש לנו שני ערכים עצמיים, 1 ו2, ולכן יש שני בלוקים בצורת הז'ורדן - G_1 וG_2, כאשר G_1 מסדר 1 (החזקה בפולינום האופייני) וG_2 מסדר 2 (כנ"ל).

בG_1 בכל מקרה יש לכל היותר בלוק יחיד ששייך לערך העצמי 1, ולכן $G_1 = (1)$.

נבנה את G_2: הבלוק הגדול ביותר הוא בגודל של החזקה של $(t-2)$ בפולינום המינימלי – וזה, כמובן, 2. לכן זהו בלוק מסדר 2, שבו יש בלוק ז'ורדן מסדר 2 בלבד.

ולכן, צורת הז'ורדן היא:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 = J_1(1) & 0 \\ 0 & G_2 = J_2(2) \end{pmatrix}$$