אינפי 1

2019ב קבוצה מקוונת
מפגש #6 10.5.19

יחידה 5: רציפות (המשך)

להוכיח ש $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ חסומה ב $(0,\infty)$.

f רציפה ב $(0,\infty)$ בתור מנה של פונקציות רציפות בקטע ומכנה $\neq 0$.

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1$ (משפט 4.45)

ולכן עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$ קיים $\delta>0$ כך שלכל

$0<x<0+\delta$ מתקיים $|f(x)-1|<\frac{1}{2}$

$\Rightarrow -\frac{1}{2}<f(x)-1<\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}<f(x)<\frac{3}{2}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} \sin x\cdot\frac{1}{x}=0$$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$! $\sin x$ חסומה בסביבה של ∞ (כי חסומה ב $\mathbb{R}$)

ולכן: "חסומה x אפס" באנלוגיה לסדרות

ולכן עבור $\varepsilon=4$ קיים N כך שלכל $x>N$

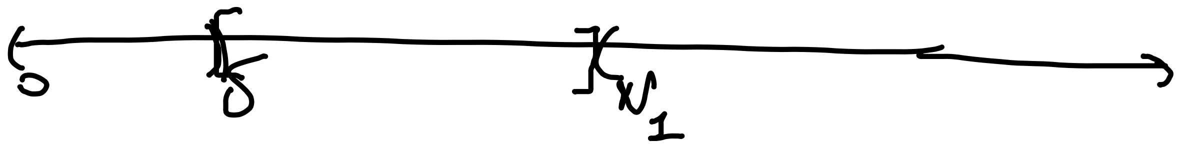
מתקיים $|f(x)-0|<4 \Rightarrow -4<f(x)<4$

נסמן $N_1=\max\{N,\delta+1\}$

אז $N_1\geq N$ ולכן לכל $x>N_1$ מתקיים $x>N$

$\Rightarrow -4<f(x)<4$

בנוסף $N_1\geq\delta+1>\delta$



$(0,\infty) \supset [\delta, N_1]$ ולכן מכיוון ש f רציפה ב $(0,\infty)$ נובע

ש f רציפה ב $[\delta, N_1]$.

ממשפט הראשון של ויירשטראס נובע ש f חסומה ב $[\delta, N_1]$, כלומר

קיימים A, B כך שלכל $x \in [\delta, N_1]$ מתקיים $A \le f(x) \le B$.

נסמן:

$$\beta = \max\{4, B\}$$

$$\alpha = \min\{-4, A\}$$

אז:

לכל $x \in (0,\delta)$ מתקיים $\alpha \le -4 \le \frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2} \le 4 \le \beta$

$x \in [\delta, N_1]$ מתקיים $\alpha \le A \le f(x) \le B \le \beta$

$x > N_1$ מתקיים $\alpha \le -4 < f(x) < 4 \le \beta$

כלומר לכל $x \in (0,\infty)$, $\alpha \le f(x) \le \beta$, f חסומה ב $(0,\infty)$.

$f(x)$ רציפה ב $[0,\infty)$, $f(0)=1$

לכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים $f(x)\le \frac{x+3}{x+1}=g(x)$

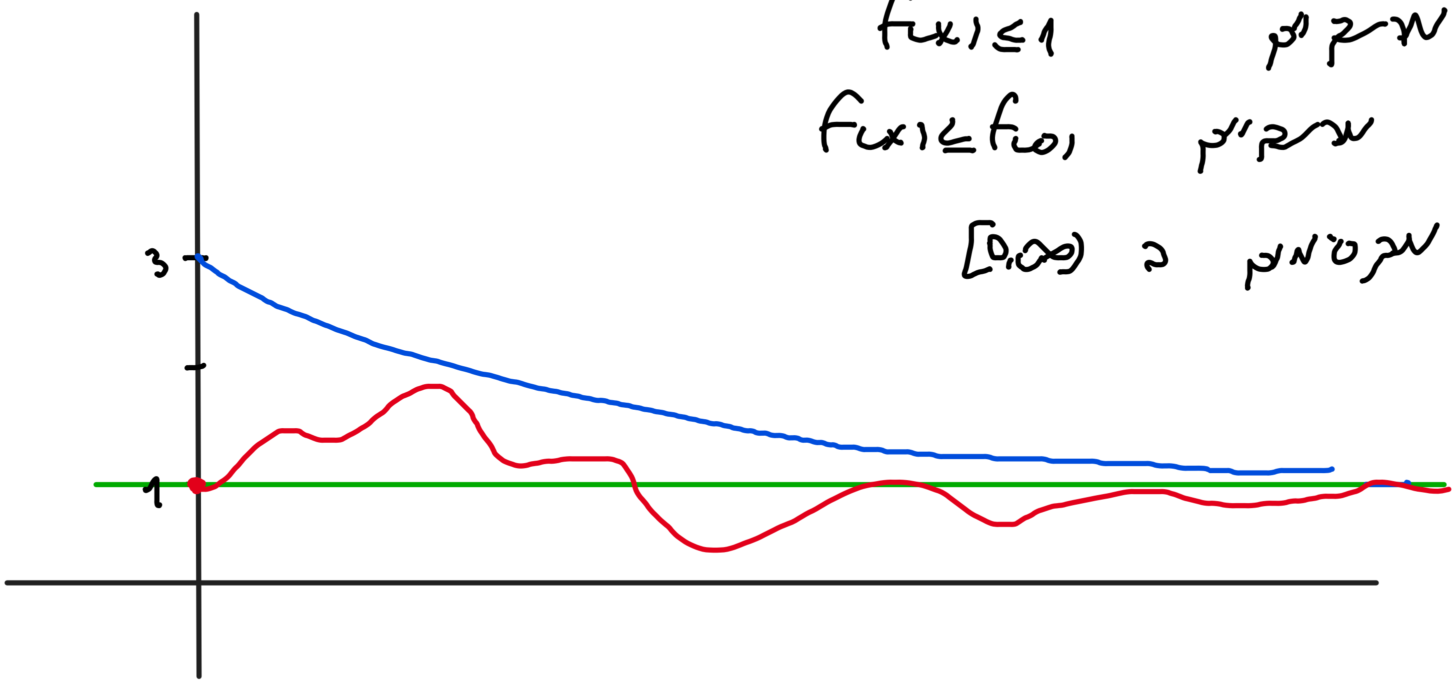
להוכיח ש f מקבלת מקסימום ב $[0,\infty)$.

רמז: לבדוק קודם את המקרה בו לכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים $f(x)\le 1$.

אם לכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים $f(x)\le 1$

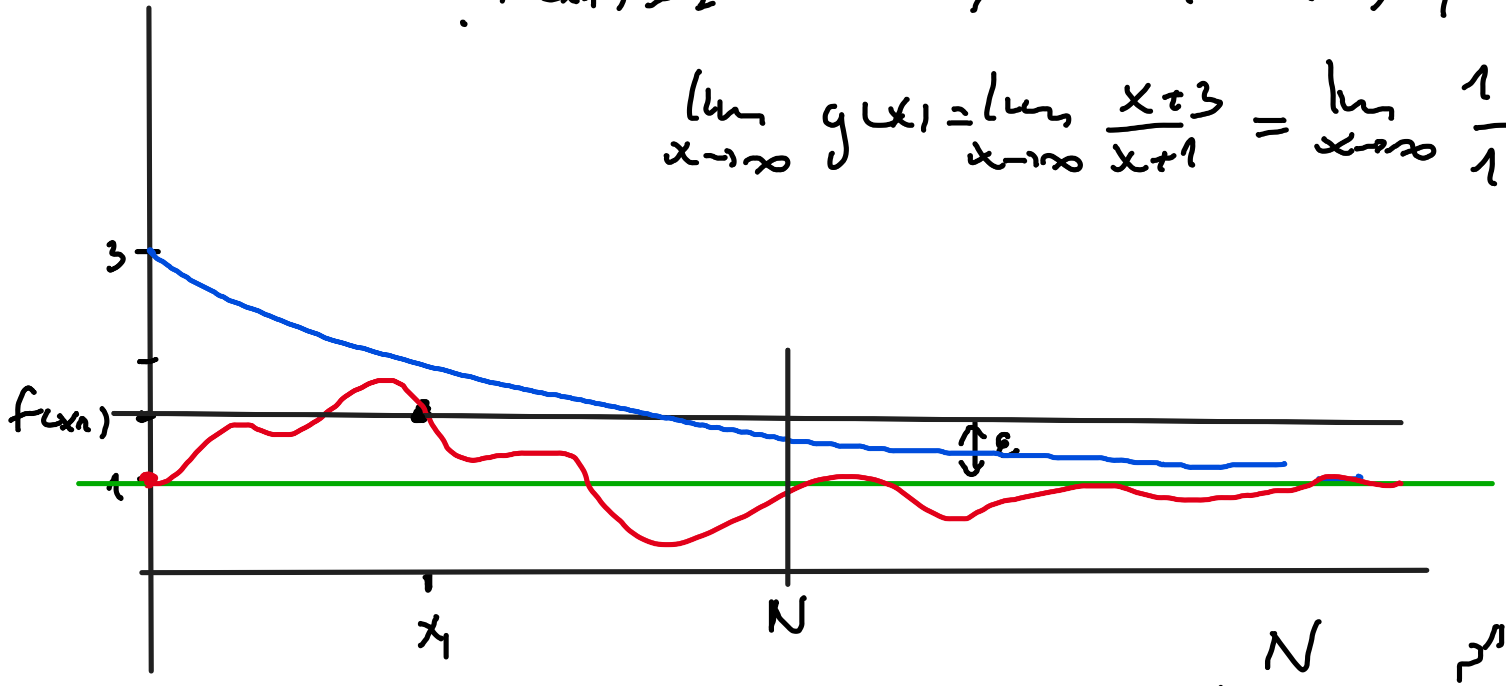
אז לכל $x\in[0,\infty)$ מתקיים $f(x)\le f(0)$

כלומר f מקבלת מקסימום ב $[0,\infty)$



נניח כעת שקיים $x_1 \in [0,\infty)$ כך ש $f(x_1) > 1$.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+3}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$



נבחר $\varepsilon = f(x_1) - 1 > 0$

מהגדרת הגבול קיים N, שאפשר להניח ש $N > x_1$, כך שלכל $x > N$ מתקיים

$$|g(x) - 1| < \varepsilon \Rightarrow 1-\varepsilon < g(x) < 1+\varepsilon \Rightarrow g(x) < 1+\varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x) \le g(x) < 1+\varepsilon \Rightarrow f(x) < 1+\varepsilon = f(x_1)$$

$[0,M]\subseteq[0,\infty)$ ולכן f רציפה ב $[0,M]$.

לפי המשפט השני של ויירשטראס ל f יש מקסימום בקטע $[0,M]$,

נניח שהמקסימום מתקבל בנקודה $c\in[0,M]$.

ולכן לכל $x\in[0,M]$ מתקיים $f(c)\geq f(x)$.

$0\leq x_1\leq M$ ולכן בפרט $f(c)\geq f(x_1)$

ולכל $x>M$ מתקיים $f(c)\geq f(x_1)>f(x)$

$\Rightarrow f(c)\geq f(x)$

ובסך הכל מתקיים $f(c)\geq f(x)$ לכל $x\in[0,\infty)$

כלומר ל $f([0,\infty))$ יש מקסימום.

רציפות במידה שווה

f רציפה במידה שווה בקטע I אם:

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x_1,x_2\in I$, $|x_2-x_1|<\delta$

אז $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$

---

f אינה רציפה במ"ש בקטע I אם:

קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיימים $x_1,x_2\in I$, $|x_2-x_1|<\delta$

וגם $|f(x_2)-f(x_1)|\geq\varepsilon$.

הוכיחו ש $f(x)=\frac{1}{1+|x|}$ רציפה במ"ש ב $\mathbb{R}$.

פתרון I: לפי ההגדרה.

צריך להוכיח: לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in\mathbb{R}$ המקיימים $|y-x|<\delta$ מתקיים $|f(y)-f(x)|=\left|\frac{1}{1+|y|}-\frac{1}{1+|x|}\right|<\varepsilon$

יהי $\varepsilon>0$.

$$|f(y)-f(x)|=\left|\frac{1}{1+|y|}-\frac{1}{1+|x|}\right|=\left|\frac{(1+|x|)-(1+|y|)}{(1+|x|)(1+|y|)}\right|=\left|\frac{|x|-|y|}{(1+|x|)(1+|y|)}\right| \underset{\text{תכונות ערך מוחלט}}{=}$$

$$=\frac{\big||x|-|y|\big|}{|(1+|x|)(1+|y|)|}\underset{\text{אי משולש}}{\leq}\frac{|x-y|}{|\underbrace{(1+|x|)(1+|y|)}_{>0}|}=\frac{|x-y|}{(1+|x|)(1+|y|)}\leq\frac{|x-y|}{1}=|y-x|<\delta$$

$|x|\geq 0 \Rightarrow 1+|x|\geq 1$

בדומה $1+|y|\geq 1$

$\Rightarrow (1+|x|)(1+|y|)\geq 1>0$

נבחר $\delta = \varepsilon$.

אז לכל $x,y \in \mathbb{R}$ המקיימים $|x-y| < \delta$ מתקיים

$|f(y) - f(x)| < \delta = \varepsilon$.

תרגיל II:

$f(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ רציפה ב $\mathbb{R}$ כהרכב סכום ומנה של פונקציות

רציפות (המכנה $\neq 0$ כי $1+|x| \geq 1$)

ובפרט f רציפה ב $[0,\infty)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+|x|} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x} = \text{"}\frac{1}{1+\infty}\text{"} = \text{"}\frac{1}{\infty}\text{"} = 0$$

$x>0$

$|x|=x$

∞

ובפרט זהו גבול סופי

ולכן לפי הטענה משאלה 48 במטלה 5 נובע ש $f(x)$ רציפה במ"ש ב $[0,\infty)$.

f רציפה ב $\mathbb{R}$ ולכן רציפה ב $(-\infty,0]$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1+|x|}\underset{\substack{x<0\\|x|=-x}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{1-x}=\text{"}\frac{1}{1-(-\infty)}\text{"}=\text{"}\frac{1}{\infty}\text{"}=0$$

וזהו גבול סופי!

ולכן לפי טענה אנלוגית לטענה משאלה 48 במטלה 5 נסיק כי f רציפה במ"ש ב $(-\infty,0]$.

ומהטענה בשאלה 49 במטלה 5 ניתן להסיק כי f רציפה במ"ש ב $(-\infty,0]\cup[0,\infty)=\mathbb{R}$.

הוכיחו ש $f(x)=\arctan\frac{1}{x^2}$ רציפה במ"ש ב $(0,\infty)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{t\to\infty}\arctan(t)=\frac{\pi}{2}$$

$$t=\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=\infty$$

משפט 4.39 גבול של הרכבה

נגדיר:

$$h(x)=\begin{cases}\arctan\frac{1}{x^2} & x>0\\ \frac{\pi}{2} & x=0\end{cases}$$

ב $(0,\infty)$, $h(x)=\arctan\frac{1}{x^2}$ ולכן רציפה ב $(0,\infty)$ בתור

הרכבת פונקציות רציפות בקטע (ומכנה $\neq 0$)

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x^2} = \frac{\pi}{2} = h(0)$$

ולכן h רציפה מימין ב $x=0$.

ומכאן h רציפה ב $[0,\infty)$

$$\lim_{x\to \infty} h(x) = \lim_{x\to \infty} \arctan\frac{1}{x^2} = \arctan 0 = 0$$

$$t=\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^2} = "\frac{1}{\infty}" = 0$$

לפי משפט גבול של הרכבה 5.14

ורציפות הפונקציה arctan.

וזהו גבול סופי.

לפי הטענה משאלה 48 ביחידה 5 שמקבל g $h(x)$ רציפה
במ״ש ב $[0,\infty)$.
לפי הטענה משאלה 44 ביח׳ 5, נובע ש h רציפה במ״ש
ב $(0,\infty)$
אבל בקטע $(0,\infty)$ שמתקיים $f(x)=h(x)$.
ולכן f רציפה במ״ש ב $(0,\infty)$.

פתרון שאלה

f רציפה ב $(0,\infty)$ בתור הרכבת פונקציות רציפות בקטע (ומכנה $\neq 0$),

בפרט f רציפה ב $(0,2)$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dots = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2)$$

מרציפות f.

ושני גבולות אלה סופיים.

לפי משפט 5.49 נובע ש f רציפה במ"ש ב $(0,2)$.

ולפי הלמה שמופיע לעיל בעמ' 5, f רציפה במ"ש ב $(0,1]$.

f רציפה ב $[1,\infty)$ כי רציפה ב $(0,\infty)$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \arctan\frac{1}{x^2} = \dots = 0$$

וגבול זה סופי.

ולפי הטענה משאלה 28 במקרה 2 נקבל ש f רציפה
במ״ש ב $[1,\infty)$
ולפי הטענה משאלה 24 במ׳ 2, f רציפה במ״ש
ב $(0,1]\cup[1,\infty)$ כלומר ב $(0,\infty)$.

להוכיח ש $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ רציפה במ"ש ב $(0,\pi)$.

---

f רציפה ב $(0,\infty)$ בתור הרכבה ומכפלה של פונקציות רציפות (ומכנה $\neq 0$), ובפרט רציפה ב $(0,\pi)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f = \dots = 0$$

$$\lim_{x\to \pi^-} f(x) = f(\pi)$$

f רציפה ב $x=\pi$

ולפי משפט קקצ נסיק כי f רציפה במ"ש ב $(0,\pi)$.

נוכיח ש $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ אינה רציפה במ"ש ב $(0,1)$

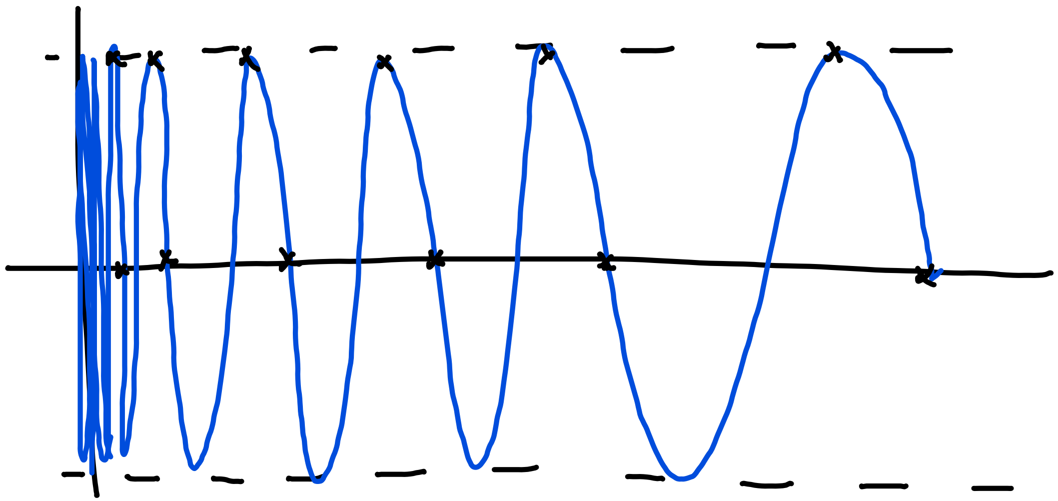
צריך להוכיח:

קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $\delta>0$ קיימים $x,y\in(0,1)$, $|y-x|<\delta$

וגם $|f(y)-f(x)| = |\sin\frac{1}{y}-\sin\frac{1}{x}| \geq \varepsilon$

נבחר $\varepsilon=1$.

יהי $\delta>0$.



נסמן $x_n = \frac{1}{2\pi n}$, $y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ לכל n טבעי

ברור ש:

$$0 < y_n = \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} < \frac{1}{2\pi n} = x_n$$

$$0 < y_n < x_n = \frac{1}{2\pi n} \underset{\substack{\uparrow \\ n \text{ טבעי}}}{\le} \frac{1}{2\pi} < 1$$

ולכן $x_n, y_n \in (0,1)$

בנוסף:

$$f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin 2\pi n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{מחזוריות } \sin}}{=} \sin 0 = 0$$

$$f(y_n) = \sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \left| f(y_n) - f(x_n) \right| = |1-0| = 1 \ge \varepsilon$$

$$|y_n - x_n| = x_n - y_n = \frac{1}{2\pi n} - \frac{1}{2\pi n + \pi/2} = \frac{\pi/2}{2\pi n\,(2\pi n + \pi/2)} <$$

$y_n < x_n$

$y_n - x_n < 0$

$2\pi n + \frac{\pi}{2} > 1$

$$< \frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi n} = \frac{1}{4n} < \frac{1}{n}$$

לפי משפט 1.61 קיים n גבוה כך ש $\frac{1}{n} < \delta$

נקח עבור n כזה, ה x_n ו y_n שהגדרנו

מתקיים: $x_n, y_n \in (0,1)$

$$|f(y_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon$$

$|y_n - x_n| < \frac{1}{n} < \delta$. ולכן f לא רציפה במ"ש ב $(0,1)$.