תורת המשחקים*

סוכם ע"י אביב יעיש

תוכן עניינים

*כפי שהועבר בתשע"ז על ידי המרצה גיל קלעי והמתרגלים חגי לבנר ואור שלום

1 תרגול 0

1.1 דוגמאות למשחקים

1.1.1 איקס עיגול

1. יש 2 שחקנים - שחקן X ושחקן O.
2. המשחק בתורות לחילופין - פעם X ופעם O.
3. המשחק מסתיים כשאחד השחקנים משיג שלשה של הצורה שלו בטור או באלכסון. כשאף אחד לא מצליח ליצור שלשה, אומרים שהמשחק נגמר בתיקו. כלומר, סה"כ יש 3 תוצאות:
   (א) ניצחון לX והפסד לO
   (ב) ניצחון לO והפסד לX
   (ג) תיקו
4. מטרת המשחק של כל שחקן היא להגיע לנצחון שלו.

1.1.2 שחמט

1. יש 2 שחקנים - לבן ושחור.
2. המשחק שוב בתורות לחילופין.
3. 3 מצבי סיום, זהים לקודם.
4. המשחק סופי

הגדרה 1.1 מצב משחק בשחמט
סדרה $(X_0, X_1, \cdots, X_k)$ כך ש:

1. X_0 הוא מצב הפתיחה.
2. לכל k זוגי, ניתן להגיע מX_k לX_{k+1} על ידי מהלך חוקי של לבן.
3. לכל k אי זוגי, X_{k+1} מתקבל על ידי מהלך חוקי של שחור מX_k.
4. כל מצב משחק שהוא מצב סיום, קובע את תוצאת המשחק (נצחון\הפסד\תיקו) לכל אחד מהשחקנים.

הגדרה 1.2 טבלת ניקוד בשחמט

	Tie	Black wins, white loses	White wins, black loses
White	$\frac{1}{2}$	0	1
Black	$\frac{1}{2}$	1	0

טבלה זו מגדירה את המשחק כמשחק סכום 1.

הגדרה 1.3 אסטרטגיה של לבן

פונקציה ממרחב מצבי המשחק, נסמנו $H = \{(X_0, \cdots, X_k)\}$, למצב משחק חוקי. היא מוגדרת כך:

$$S_W\left((X_0, \cdots, X_{2k})\right) = X_{2k+1}$$

כך שניתן במהלך חוקי של לבן להגיע מX_{2k} לX_{2k+1}.

הגדרה 1.4 אסטרטגיה של שחור

הגדרה דומה, רק שהפעם:

$$S_B\left((X_0, \cdots, X_{2k-1})\right) = X_{2k}$$

הגדרה 1.5 כך שניתן להגיע מX_{2k-1} לX_{2k} במהלך חוקי של השחור.

הגדרה 1.6 תחרות בין אסטרטגיות

מהלך המשחק הוא כזה:

$$X_0, X_1 := S_W\left((X_0)\right), X_2 := S_B\left((X_0, X_1)\right), X_3 := S_W\left((X_0, X_1, X_2)\right), \cdots$$

ובסיום מהלך המשחק נקבעת תוצאת הסיום.

משפט 1.7 בשחמט (ובעצם בכל משחק קומבינטורי סופי בשני שחקנים) מתקיימת אחת האפשרויות הבאות:

1. ללבן יש אסטרטגיה מנצחת (מנצחת תמיד, לא משנה מול מי).
2. לשחור יש אסטרטגיה מנצחת.
3. לשני השחקנים יש אסטרטגיה שתבטיח לפחות תיקו (לא משנה מול מי הם ישחקו).

הוכחה: ניתן לדמיין את המשחק בתור עץ. השורש הוא X_0, ובניו של X_0 הוא כל אחד מהמצבים החוקיים של לבן, וכל אחד מהבנים שלהם הוא אחד מהמצבים החוקיים של שחור בהתאם ללוח עד מצב זה, וכו'. העלים הם אחד מ: "לבן ניצח", "שחור ניצח", "תיקו". ההוכחה היא באינדוקציה על מס' הקודוקודים n_X בכל תת עץ (תת משחק) שנקבע על ידי קודקוד X (שורש תת העץ הוא X).

בסיס: אם $n_X = 1$ אז בתת העץ יש בדיוק קודקוד אחד - X עצמו. המשחק בעצם נגמר (לאף שחקן אין אפשרות לבצע מהלך), ולפי הגדרת המשחק בהכרח אחת האפשרויות מתקיימת.

צעד האינדוקציה: נניח שהטענה מתקיימת לכל $m < n_X$. נניח בה"כ שX הוא תור לבן. נשים לב שבכל אחד מילדי X מתקיים המשפט (כיוון שתתי העץ שמתחילים בהם לא מכילים את X, ולכן בהכרח באותם תתי עצים יש לכל היותר $n_X - 1$ קודקודים). נחלק למקרים:

1. אם לכל ילדי X אופציה 2 מתקיימת (בכל המשחקים שיתחילו בילדיו שחור ינצח), אז אופציה 2 מתקיימת גם בX עצמו - כי לא משנה מה לבן יעשה, שחור ינצח.
2. אם יש ילד בו אופציה 1 מתקיימת, אז אם לבן יבחר במהלך שמוביל לילד הזה, לבן ינצח גם, וקיבלנו שאופציה 1 מתקיימת.
3. אם שני המקרים הקודמים לא מתקיימים, אז לא לכל ילדי X אופציה 2 מתקיימת, ואין ילד בו אופציה 1 מתקיימת. כלומר, יש לפחות ילד אחד המוביל למצב 3, ולכן אם שחקן 1 יבחר במהלך המוביל לילד הזה נקבל שלשני הצדדים יש לשני השחקנים אסטרטגיה שתבטיח לפחות תיקו.

■

2 שיעור 1

2.1 הגדרות בסיס

הגדרה 2.1 תורת המשחקים
תחום העוסק במודלים מתמטיים של סוכנים רציונליים. כלומר, איך להתנהג ואיך צריך להתנהג בהתאם לפונקציית מטרה ופונקציית תועלת.

הגדרה 2.2 פונקציית תועלת
בהינתן מצב משחק נוכחי ופעולה אפשרית של השחקן שתורו לשחק, מה תיהיה התועלת של השחקנים השונים אם השחקן שתורו לשחק אכן ינקוט בפעולה הזו?

הגדרה 2.3 התנהגות רציונלית
שחקן הוא רציונלי אם המטרה שלו היא מקסום רווח התועלת מבין כלל האלטרנטיבות.

הגדרה 2.4 משחק ידיעה מלאה
כל שחקן יודע בדיוק בכל מצב מה הוא ומה יריביו יכולים לעשות.

3 תרגול 1

3.1 משחקים אסטרטגיים

הגדרה 3.1 משחק אסטרטגי

1. משחק המורכב מn שחקנים שיכונו $1, 2, \cdots, n$.
2. לכל שחקן $i \in [n]$ קבוצת אסטרטגיות: $\Sigma_i = \{1, 2, \cdots, s_i\}$.
3. לכל שחקן יש פונקציית תועלת: $u_i : \Sigma_1 \times \cdots \times \Sigma_n \to \mathbb{R}$

הערה 3.2 במשחקים אסטרטגיים פעולות השחקנים מתבצעות במקביל. למשל, אבן־נייר־מספרים הוא משחק אסטרטגי, לעומת שחמט שהוא אינו משחק אסטרטגי.

3.1.1 משחקים של שני שחקנים

מקרה פרטי של משחק אסטרטגי, עם $n = 2$. לכן נקבל:

$$\Sigma_1 = \{1, \cdots, s_1\}$$
$$\Sigma_2 = \{1, \cdots, s_2\}$$
$$u_1 : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$$
$$u_2 : \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$$

לדוגמא, אם שחקן 1 בוחר באסטרטגיה 3 שלו, ושחקן 2 בוחר באסטרטגיה 2 שלו, אז התועלת של שחקן 1 היא:

$$u_1(3, 2) = 17$$

נשים לב שניתן להציג זאת במטריצה.

אבן, נייר ומספריים

במשחק זה לכל שחקן יש 3 אסטרטגיות, לכן $s_1 = s_2 = 3$. נשים לב שמהגדרת המשחק:

$$u_1(\mathrm{rock}, \mathrm{rock}) = 0 = u_2(\mathrm{rock}, \mathrm{rock})$$
$$u_2(\mathrm{rock}, \mathrm{paper}) = 1 = -u_1(\mathrm{rock}, \mathrm{paper})$$

נשלים זאת למטריצת התועלות:

Player 1/Player2	rock	paper	scissors
rock	$0, 0$	$-1, 1$	$1, -1$
paper	$1, -1$	$0, 0$	$-1, 1$
scissors	$-1, 1$	$1, -1$	$0, 0$

הערה 3.3 בייצוג מטריציוני נהוג שהשורות מייצגות את שחקן 1, והעמודות את שחקן 2.

הערה 3.4 תא בעמודה ה-i והשורה ה-j הוא מהצורה: $u_1(i, j), u_2(i, j)$.

הערה 3.5 נשים לב שזהו משחק סכום אפס.

הגדרה 3.6 משחק סכום אפס
משחק בשני שחקנים נקרא משחק סכום אפס אם $u_1 = -u_2$.

הערה 3.7 במשחק סכום אפס המטרה של כל שחקן היא למזער את הרווח של השחקן האחר.

הערה 3.8 במשחקי סכום אפס נהוג לסמן: $u := u_1$.

במודל מטריצה של משחק סכום אפס נכתוב רק את u_1 במטריצה. לכן נקבל באבן נייר ומספריים:

	rock	paper	scissors
rock	0	-1	1
paper	1	0	-1
scissors	-1	1	0

דילמת האסיר

שני שחקנים, עם מטריצת התועלות הבאה:

Player 1/Player 2	deny	admit
deny	$-1, -1$	$-25, 0$
admit	$0, -25$	$-10, -10$

הערה 3.9 נשים לב שזהו לא משחק סכום אפס.

ג'וק, יד ופצצת אטום

	hand	bug	atomic bomb
hand	-2	-1	1
bug	0	0	-1
atomic bomb	-1	1	2

הערה 3.10 מצורת הכתיבה של הטבלה ניתן להבין שזהו משחק סכום אפס.

הגדרה 3.11 אסטרטגיה שולטת עבור שחקן 1
אסטרטגיה i (של שחקן 1) שולטת על אסטרטגיה i' (של שחקן 1) אם לכל אסטרטגיה j של שחקן 2 מתקיים:

$$u\left(i,j\right)\geq u\left(i',j\right)$$

הערה 3.12 ניתן להגדיר באופן דומה אסטרטגיית שולטת עבור שחקן 2.

הערה 3.13 נשים לב שבאבן נייר ומספריים אין שליטה, אבל בג'וק יד ופצצת אטום למשל עבור שחקן 1 פצצת אטום שולטת על יד, ועבור שחקן 2 יד שולטת על ג'וק (נזכור שכדי להבין את התועלת של שחקן 2 צריך להסתכל על הטבלה עם הסימנים ההפוכים).

הגדרה 3.14 אסטרטגיית בטחון מקסימלי לשחקן מס' 1
אסטרטגיה i (של שחקן 1) כך שלכל i' (של שחקן 1) מתקיים:

$$\min_{j}\left(u_{1}\left(i,j\right)\right)\geq\min_{j}\left(u_{1}\left(i',j\right)\right)$$

אסטרטגיה זו נקראת גם אסטרטגיה אופטימלית.

הערה 3.15 ניתן להגדיר זאת באופן דומה גם עבור שחקן 2.

הערה 3.16 ניתן לחשוב על אסטרטגיית בטחון מקסימלי באופן הבא - מהי הפעולה שאני צריך לעשות על מנת להבטיח את התועלת הכי גבוהה עבורי במקרה שהשחקן היריב נוקט במהלך שהוא הכי גרוע עבורי.

הערה 3.17 נשים לב שבאבן נייר ומספריים **כל** אסטרטגיה היא אסטרטגיית בטחון מקסימלי עבור שחקן 1, וכנ"ל עבור שחקן 2.
בג'וק יד ופצצת אטום לשחקן 1 יש שתי אסטרטגיות בטחון מקסימלי: ג'וק ופצצת אטום. עבור שחקן 2 האסטרטגיה האופטימלית היחידה היא יד.
בדילמת האסיר להודות זה אופטימלי.

הגדרה 3.18 שיווי משקל
זוג אסטרטגיות של השחקנים i_0 וj_0 יקראו שיווי משקל אם:

$$\forall i:u_{1}\left(i,j_{0}\right)\leq u_{1}\left(i_{0},j_{0}\right)$$
$$\forall j:u_{2}\left(i_{0},j\right)\leq u_{2}\left(i_{0},j_{0}\right)$$

הערה 3.19 שיווי משקל זהו מצב שבו אף שחקן לא יכול להרוויח אם הוא לבדו ישנה את האסטרטגיה שלו.

הערה 3.20 בדילמת האסיר, (להודות, להודות) הוא שיווי משקל.
באבן נייר ומספריים אין שיווי משקל.

הגדרה 3.21 ערך משחק
במשחק סכום אפס אם מתקיים

$$\max_{i\in\Sigma_1}\min_{j\in\Sigma_2} u\left(i,j\right)=\min_{j\in\Sigma_2}\max_{i\in\Sigma_1} u\left(i,j\right)$$

אז נסמן: $v:=\max_{i\in\Sigma_1}\min_{j\in\Sigma_2} u\left(i,j\right)$ ונקרא לv ערך המשחק.

הערה 3.22 ערך המשחק לא תמיד קיים.

הערה 3.23 נשים לב שבאבן נייר ומספריים מתקיים:

$$\max_{i\in\Sigma_1}\min_{j\in\Sigma_2} u\left(i,j\right)=-1\neq 1=\min_{j\in\Sigma_2}\max_{i\in\Sigma_1} u\left(i,j\right)$$

ולכן אין עבורו ערך משחק.
בג'וק, יד פצצת אטום גם אין ערך משחק כיוון שמתקיים:

$$\max_{i\in\Sigma_1}\min_{j\in\Sigma_2} u\left(i,j\right)=-1\neq 0=\min_{j\in\Sigma_2}\max_{i\in\Sigma_1} u\left(i,j\right)$$

4 תרגיל 1

4.1 ערך משחק

טענה 4.1 נתון משחק סכום אפס בשני שחקנים ותהי $\left(i_0,j_0\right)\in\Sigma_1\times\Sigma_2$ נקודת שיווי משקל במשחק, אז יש ערך משחק והוא שווה ל$u\left(i_0,j_0\right)$.

טענה 4.2 יהיו A,B שתי קבוצות סופיות ו$f:A\times B\to\mathbb{R}$ פונקציה כלשהי, אז:

$$\max_{b\in B}\min_{a\in A} f\left(a,b\right)\leq\min_{a\in A}\max_{b\in B} f\left(a,b\right)$$

5 שיעור 2

פורים.

6 תרגול 2

6.1 סגירות וקומפקטיות

הגדרה 6.1 $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid \forall i \in [n]: \ x_i \in \mathbb{R}\}$

הגדרה 6.2 סדרה מתכנסת
סדרה $\left(x^{(k)}\right)$ ב$\mathbb{R}^n$ נקראת מתכנסת אם היא מתכנסת בכל קואודרינטה. כלומר:

$$\forall i \in [n]: \ x_i^{(k)} \overset{k\to\infty}{\to} x^{(k)}$$

הגדרה 6.3 קבוצה סגורה
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ סגורה אם לכל סדרה מתכנסת של איברי A, הגבול הוא גם בA.

הערה 6.4 $\sqrt{x^2+y^2} < 1$ לא סגורה.

הגדרה 6.5 קבוצה קומפקטית
קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אם לכל סדרה של איברים בA: $\left(A^{(k)}\right)_{k\geq 1}$ יש תת סדרה מתכנסת $\left(A^{(k_j)}\right)_{j\geq 1}$ וגבולה בA.

הגדרה 6.6 קבוצה חסומה
$A \subseteq \mathbb{R}^n$ תקרא חסומה אם קיים M כך ש:

$$\forall a = [a_1, \cdots, a_n] \in A: \ \|a\| = \sqrt{\sum a_i^2} \leq M$$

משפט 6.7 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ היא קומפקטית אס"ם היא סגורה וחסומה.

הוכחה: כיוון 1: נניח שA קומפקטית. אם אינה חסומה, אז יש סדרה $a^{(k)}$ כך שלכל K קיים i כך ש $K \leq \left\|a^{(i)}\right\|$, כלומר $\left\|a^{(k)}\right\| \overset{k\to\infty}{\to} \infty$. אם כך, כל תת סדרה של $\left(a^{(k)}\right)$ עדיין שואפת לאינסוף: $\left(a^{(k)}\right) \to \infty$ ולכן אינה מתכנסת, סתירה לקומפקטיות. אם כך, A חסומה. תהי סדרה מתכנסת $a^{(k)} \to a$. מאינפי - כל תת סדרה של סדרה מתכנסת מתכנסת לאותו הגבול. אם כך, אז מקומפקטיות נובע $a \in A$, ולכן קיבלנו שA סגורה.
כיוון 2: נניח שA סגורה וחסומה. אם $n = 1$ אז הנדרש נובע מבולצאנו ויירשטראס. אם $n > 1$ אז נמצא תת סדרה עבורה הקורדינטה הראשונה מתכנסת, ואותו הדבר לשאר הקורדינטות. קיבלנו שכולן מתכנסות ולכן יש התכנסות לA. הגבול יהיה בתוך הקבוצה כי הקבוצה סגורה, וסיימנו. ■

למה 6.8 קבוצה סופית היא קומפקטית.

הוכחה: קבוצה סופית היא חסומה וסגורה, ולכן לפי המשפט הקודם היא גם קומפקטית. ■

למה 6.9 אם f פונקציה רציפה המוגדרת $f: A \to \mathbb{R}$ כש$A \subseteq \mathbb{R}^n$ קומפקטית, אז f מקבלת מינימום (מקסימום) על A.

הוכחה: נשים לב $f\left(A\right)\subseteq\mathbb{R}$. תהי סדרה $\left(x^{(k)}\right)\subseteq f\left(A\right)$. נגדיר את סדרת המקורות $x^{(k)}:=f\left(a^{(k)}\right)$. אבל A קומפקטית אז ל$\left(a^{(k)}\right)$ יש ת"ס מתכנסת:

$$\begin{aligned} & a^{(k_j)}\to a\\ & \quad\Downarrow continuity\\ & x^{(k_j)}=f\left(a^{(k_j)}\right)\to f\left(a\right)\in f\left(A\right)\end{aligned}$$

ולכן $f\left(A\right)$ הא קומפקטית. אם כך, אז לפי משפט היא סגורה וחסומה, ולכן מקבלת מינימום ומקסימום. ■

6.2 קבוצות קמורות וסימפלקסים

הגדרה 6.10 קבוצה קמורה
קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^{n}$ תקרא קמורה אם:

$$\forall a,b\in A:\ \forall p\in\left[0,1\right]:\ p\cdot a+\left(1-p\right)\cdot b\in A$$

הערה 6.11 נשים לב שכדור הוא קבוצה קמורה. נשים לב שטבעת היא לא קבוצה קמורה.

הגדרה 6.12 סימפלקס n־מימדי
לכל $n\in\mathbb{N}$, הסימפלקס הn מימדי הוא תת קבוצה של המרחק האוקלידי ה$(n+1)$־מימדי המוגדרת באופן הבא:

$$\Delta_{n}:=\left\{ \left(x_{1},\cdots,x_{n+1}\right)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x_{1},\cdots,x_{n+1}\geq0,\ \sum_{i=1}^{n+1}x_{i}=1\right\}$$

הערה 6.13 הסימפלקס ה1 מימדי הוא הקטע $\Delta_{1}:=\left\{ \left(x,1-x\right)\ \mid x\in\left[0,1\right]\right\}$, הסימפלקס הדו מימדי הוא המשולש:

$$\Delta_{2}:=\left\{ \left(x,y,z\right)\ \mid x,y,z\geq0,\ x+y+z=1\right\}$$

הגדרה 6.14 קמור
לכל $m\in\mathbb{N}$ ולכל $v_{1},\cdots,v_{m}\in\mathbb{R}^{n}$, הקמור של נקודות אלו מוגדר כך:

$$conv\left(v_{1},\cdots,v_{m}\right)=\left\{ \sum_{i=1}^{m}p_{i}v_{i}\mid0\leq p_{1},\cdots,p_{n},\ \sum_{i=1}^{n}p_{i}=1\right\}$$

הערה 6.15 הקמור של הבסיס הסטנדרטי $\left\{ e_{i}\right\} _{i=1}^{n}\in\mathbb{R}^{n}$ הוא בדיוק הסימפלקס ה$(n-1)$־מימדי.

טענה 6.16 לכל $m\in\mathbb{N}$ ולכל $v_{1},\cdots,v_{m}\in\mathbb{R}^{n}$, הקמור של נקודות אלו הוא קבוצה קמורה וקומפקטית.

מסקנה 6.17 הסימפלקס הn מימדי הוא קבוצה קמורה וקומפקטית.

6.3 משחק - להחביא כסף ביד

שחקן 2 (המחביא) מחביא ביד כסף, שחקן 1 (הבוחר) בוחר את היד:

	L_2	R_2
L_1	1	0
R_1	0	2

אסטרטגיית בטחון מקסימלי של הבוחר מבטיחה 0, ושל המחביא משלם לפחות 1.
נכניס אקראיות! הבוחר בוחר בסיכוי $1-p$ ביד ימין, וp ביד שמאל, כש $p \in [0,1]$.

	L_2	R_2
$p \cdot L_1$	1	0
$(1-p) \cdot R_1$	0	2

אסטרטגיית בטחון מקסימלי לבוחר התועלת של הבוחר אם החביאו בשמאל היא:

$$p \cdot 1 + (1-p) \cdot 0 = p$$

ואם המחביא שם בימין אז:

$$p \cdot 0 + (1-p) \cdot 2 = 2 - 2p$$

לכן אסטרטגיית בטחון מקסימלי תתן לבוחר

$$\max_{p \in [0,1]} \min{(p, 2-2p)} = p$$

באמצעות גרף של $p, 2-2p$ נקבל שחיתוך ביניהם מתקבל ב$p = \frac{2}{3}$. נשים לב שמהגרף רואים ש$\min{(p, 2-2p)}$ הוא המקסימלי ב$\frac{2}{3}$.

אסטרטגיית בטחון מקסימלי למחביא אסטרטגיה כללית (מעורבת) של המחביא תראה כך: $(q, 1-q)$ כש $q \in [0,1]$.

	$q \cdot L_2$	$(1-q) \cdot R_2$
L_1	1	0
R_1	0	2

אם הבוחר בוחר L_1 אז התשלום של המחביא הוא:

$$q \cdot (-1) + (1-q) \cdot 0 = -q$$

אם הוא בחר R_1 אז:

$$q \cdot 0 + (1-q) \cdot (-2) = 2q - 2$$

ולכן אסטרטגיית בטחון מקסימלי תשלם $\frac{2}{3}$.
יש ערך למשחק: $\frac{2}{3}$.

6.4 אסטרטגיות מעורבות

הגדרה 6.18 אסטרטגיה מעורבת
נניח Σ_j הן האסטרטגיות רגילות\טהורות של השחקן הj. אז אסטרטגיה מעורבת היא וקטור הסתברויות $\left(p_1, \cdots, p_{|\Sigma_j|}\right)$ על האסטרטגיות הטהורות של שחקן j. כלומר מתקיים:

$$\sum_{i=1}^{|\Sigma_j|} p_i = 1,\ \forall i:\ p_i \geq 0$$

הערה 6.19 נניח Σ_i הן האסטרטגיות הטהורות של שחקן i. נסמן:$m_i := |\Sigma_i| - 1$. נשים לב שהסימפלקס הm_i מימדי הוא האוסף של כלל האסטרטגיות המעורבות של השחקן הi.

הגדרה 6.20 פונקציית רווח על אסטרטגיות מעורבות
יהי משחק סכום אפס, ונניח u היא פונקציית הרווח עבורו. נזכר שמוגדר:

$$u:\ \Sigma_1 \times \Sigma_2 \to \mathbb{R}$$

נזכר שבאמצעות u ניתן לבנות מטריצה:

$$A := \begin{bmatrix} u(1,1) & \cdots & u(1,|\Sigma_2|) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u(|\Sigma_1|,1) & \cdots & u(|\Sigma_1|,|\Sigma_2|) \end{bmatrix}$$

נשים לב שניתן להרחיב את u לאוסף כל האסטרטגיות המעורבות באופן לינארי:

$$u\begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ \vdots & , \vdots \\ p_{m_1} & q_{m_2} \end{pmatrix} = (p_1, \cdots, p_{m_1})\, A \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{m_2} \end{pmatrix} = \sum_{i,j} p_i A_{i,j} q_j$$

וכך נקבל:

$$u:\ \Delta_{m_1} \times \Delta_{m_2} \to \mathbb{R}$$

7 תרגיל 2

7.1 משחקי סכום אפס

טענה 7.1 נתון משחק סכום אפס בשני שחקנים עם ערך v. נניח כי $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ נקודות שיווי משקל באסטרטגיות טהורות. אז, גם $(x_2, y_1), (x_1, y_2)$ נקודות שיווי משקל.

טענה 7.2 נתון משחק סכום אפס. לכל אסטרטגיה מעורבת x של שחקן 1, קיימת תשובה טובה ביותר של שחקן 2 שהיא אסטרטגיה טהורה. כלומר, אסטרטגיה טהורה שממזערת את פונקציית הרווח.

7.2 קבוצות קמורות

טענה 7.3 יהיו $A_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n, \alpha \in I$ קבוצות קמורות. אז $\cap_{\alpha\in I} A_\alpha$ היא גם קבוצה קמורה.

טענה 7.4 תהי $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה, אז ההגדרות הבאות של הקמור של A הן שקולות:

1. $conv\left(A\right)$ היא החיתוך של כל הקבוצות הקמורות שמכילות את A.
2. $conv\left(A\right)$ היא הקבוצה הקמורה המינימלית שמכילה את A.
3. $conv\left(A\right) = \left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot a_i \mid m \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ a_i \in A\right\}$

טענה 7.5 כל קבוצה קמורה שמכילה את A מכילה גם את $\left\{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot a_i \mid m \in \mathbb{N},\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1,\ a_i \in A\right\}$.

הגדרה 7.6 קמור

יהיו $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{R}^n$. אז $K = conv\left(v_1, \cdots, v_m\right)$ הוא הקמור של הוקטורים.

טענה 7.7 יהיו $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{R}^n$. יהי $K = conv\left(v_1, \cdots, v_m\right)$ הקמור של הוקטורים, ו$T:\ K \to \mathbb{R}$ העתקה לינארית. אז:

$$\min_{v\in K} T\left(v\right) = \min_{i=1,\cdots,m} T\left(v_i\right)$$
$$\max_{v\in K} T\left(v\right) = \max_{i=1,\cdots,m} T\left(v_i\right)$$

טענה 7.8 יהי $A_i \subseteq \mathbb{R}$ אוסף קבוצות לכל $i \in [N]$. נסמן ב$\Pi_{i=1}^{N} A_i$ את המכפלה הקרטזית שלהם, כלומר:

$$\Pi_{i=1}^{N} A_i = \left\{\left(a_1, \cdots, a_N\right)\ \mid \forall i \in [N]:\ a_i \in A_i\right\}$$

אז מתקיים:

(א) אם כל הקבוצות סגורות אז גם $\Pi_{i=1}^{N} A_i$ קבוצה סגורה.

(ב) אם כל הקבוצות קומפקטיות אז גם $\Pi_{i=1}^{N} A_i$ קבוצה קומפקטית.

8 שיעור 3

הגדרה 8.1 תוחלת הרווח

נניח נתונים n מאורעות עם ההסתברויות $p_1, \cdots, , p_n$ (כלומר מתקיים $\sum p_i = 1,\ \forall i:\ \ p_i \geq 0$). נניח הרווח למאורע ה$i$ הוא R_i. תוחלת הרווח מוגדרת כך:

$$\mathbb{E}\left[R\right] := \sum_{i=1}^{n} p_i \cdot R_i$$

8.1 נים

הגדרה 8.2 מהלך המשחק נים:

1. יש 3 ערימות של גפרורים, כאשר בכל ערימה יש מס' מסוים של גפרורים (בכל ערימה יכול להיות מספר שונה).
2. כל שחקן מוריד בתורו מס' גפרורים כרצונו מערימה לפי בחירתו. השחקן שמרים את הגפרור האחרון מנצח.

דוגמאות למצבים

1. $0\quad 0\quad 0$ - מצב הפסד עבור השחקן הראשון.
2. $x\quad 0\quad 0$ - עבור $x > 0$, זהו מצב ניצחון עבור השחקן הראשון - אם הוא ייקח את כל הגפרורים מהערימה הימנית, הוא ינצח.
3. $x\quad x\quad 0$ - עבור $x > 0$, זהו מצב ניצחון עבור השחקן השני - על ידי "גניבת אסטרטגיה" מהשחקן הראשון, הוא ינצח.

הגדרה 8.3 גניבת אסטרטגיה

כל פעולה שהשחקן הראשון מבצע על ערימה מסוימת, השחקן השני יבצע אותה על הערימה האחרת.

הגדרה 8.4 מצבי ניצחון והפסד
נגדיר באינדוקציה:
מצב הוא מצב **ניצחון** לשחקן הראשון אם יש לו צעד שמוביל למצב שהוא מצב הפסד.
מצב הוא מצב **הפסד** אם כל צעד מוביל למצב שהוא מצב ניצחון.

הערה 8.5 ניתן לתאר את המשחק על ידי עץ - השורש הוא המצב ההתחלתי. בניו הם מצבים, והצלע המחברת בין כל בן לבין השורש מסמלת את הפעולה שמובילה את מצב הפתיחה לאותו המצב של הבן. לכל קודקוד שאינו עלה יש בנים, כאשר הצלעות בינו לבין בניו הן המהלך של השחקן המתאים שמוביל מהאב אל הבן.

בוא נחזור לנים. נניח שהערמות הן בגדלים $85, 78, 47$, ונכתוב את גדלי הקבוצות בכתיב בינארי:

$$\begin{aligned} 1010101 &= 85 \\ 1001110 &= 78 \\ 0101111 &= 47 \end{aligned}$$

הגדרה 8.6 חיבור נים
מחברים עמודה עמודה בכתיב הבינארי, בלי גרירה לעמודה הבאה.

נבצע חיבור נים לערימות ונקבל:

$$0110100$$

משפט 8.7 מצב במשחק נים הוא מצב ניצחון אם סכום נים של גודלי הערימות שונה מאפס.
מצב במשחק נים הוא מצב הפסד אם סכום נים של גודלי הערימות שווה לאפס.

הוכחה: נוכיח שתי טענות עזר שיוכיחו לנו את המשפט.

טענה 8.8 כאשר סכום נים שונה מאפס, השחקן הפותח יכול להוציא גפרורים מאחת הערימות ולגרום לסכום נים להיות שווה ל0. **הוכחה:** כאשר סכום נים שונה מאפס, מביטים על הספרה הגבוהה ביותר שלגביה הסכום שונה מאפס. מחפשים ערימה שאותה ספרה בה היא גם 1. מחליפים בערימה זו את ה1 הזה ל0, ומשנים את שאר הספרות באופן שגורם לסכום נים להיות 0. השינוי הזה בהכרח מקטין את גודל הערימה, ולכן הוא אפשרי. ■

טענה 8.9 כאשר סכום נים שווה לאפס, כל צעד של השחקן הפותח יגרום לסכום נים להיות שונה מאפס.

הוכחה: נשים לב שאם סכום הנים שווה ל0, אז לא משנה איזו ערימה נשנה - נהפוך בה לפחות את אחד ה1ים ל0. אם כך, אז באותה ספרה בסכום נים, הסכום ישתנה מ0 ל1. ■

סיימנו. ■

8.2 משחקים קומבינטוריים

משחקי שחקן בודד

הגדרה 8.10 משחק של בחירה רציונלית
לשחקן יש יחס סדר על המהלכים האפשריים, והוא בוחר את המהלך הטוב ביותר לפי אותו יחס סדר.

הערה 8.11 ישנם גם משחקים של בחירה רציונלית במצב של אי ודאות. נדבר עליהם בהמשך. נניח בהם ששחקנים רוצים להגדיל את תוחלת הרווח שלהם. משחקים אלו מערבים את תורת התועלת של וון נוימן ומורגנסטרן.

משחקי סכום אפס של שני שחקנים

דוגמה - זוג או פרט.
משחקים אלו מערבים את מושג ה**ערך** של משחק.

משחקים אסטרטגיים עם שני משחקנים או יותר

משחקים אלו מערבים את מושג שיווי המשקל.
דוגמאות:

1. דילמת האסיר
2. מלחמת המינים

9 תרגול 3

9.1 תזכורת

Σ_1, Σ_2 הן קבוצות האסטרטגיות הטהורות.
$\Delta_{|\Sigma_1|-1}, \Delta_{|\Sigma_2|-1}$ הן קבוצת האסטרטגיות המעורבות. למשל:

$$\Delta_2 = \left\{ (p_1, p_2, p_3) \mid \sum_{i=1}^{3} p_i = 1,\ p_i \geq 0 \right\}$$

הערה 9.1 הסימון כולל מינוס 1 כדי לייצג את מס' דרגות החופש. למשל, בΔ_2 כל אסטרטגיה מעורבת נקבעת על ידי שתי הסתברויות (והשלישית היא המשלימה).

הגדרה 9.2 פונקציית תועלת באסטרטגיות מעורבות
עבור השחקן הi שמשחק במשחק עם שני שחקנים פונקציית תועלת היא

$$u_i : \ \Delta_{|\Sigma_1|-1} \times \Delta_{|\Sigma_2|-1} \to \mathbb{R}$$
$$u_i\left(\overline{p}, \overline{q}\right) = \overline{p}^t A \overline{q}$$

כשA היא מטריצה של תשלומים עבור אסטרטגיות טהורות.

דוגמה - שיווי משקל

$I \backslash II$	L	R
T	$1,0$	$0,3$
B	$0,1$	$2,0$

נשים לב שאין פה שיווי משקל באסטרטגיות טהורות. אם כך, נסתכל על אסטרטגיות מעורבות. נתאר אסטרטגיה מעורבת של שחקן I:

$$x = (p_1, 1-p) \in \Delta_1, \ p \in [0,1]$$

נשים לב שלכל אסטרטגיה טהורה של שחקן II, שחקן I יעדיף אסטרטגיה טהורה על פני אסטרטגיה מעורבת. באופן דומה ניתן להראות שלכל אסטרטגיה טהורה של שחקן I, שחקן II יעדיף אסטרטגיה טהורה על פני אסטרטגיה מעורבת. אם כך, אז אין נקודת שיווי משקל בה אחד השחקנים נוקט באסטרטגיה מעורבת והשני בטהורה.

הגדרה 9.3 אסטרטגיות מעורבות לגמרי (הגדרה לא פורמלית)
כל אסטרטגיה טהורה נלקחת בסיכוי חיובי.

נגדיר אסטרטגיות מעורבות לגמרי לשני השחקנים:

$$x_0 = (p, 1-p)$$
$$y_0 = (q, 1-q)$$

נניח שx_0, y_0 הם שיווי משקל.

טענה 9.4 עקרון האדישות
כל שתי אסטרטגיות טהורות שנלקחות בהסתברות חיובית בשיווי משקל נותנות אותו תשלום למול אסטרטגיית שיווי המשקל של השני, כלומר:

$$u_1\left(T, y_0\right) = u_1\left(B, y_0\right)$$
$$u_2\left(x_0, R\right) = u_2\left(x_0, L\right)$$

נשים לב שאם אסטרטגיה מסוימת הייתה נותנת תשלום גדול יותר, שחקן רציונלי היה מעדיף לשחק אותה בהסתברות 1.

נשתמש בכך כדי לבדוק מהו שיווי המשקל. נבדוק מה אומר כל ביטוי במשוואה:

$$
\begin{aligned}
u_1(T, y_0) &= q \cdot 1 + (1-q) \cdot 0 = q \\
u_1(B, y_0) &= q \cdot 0 + (1-q) \cdot 2 = 2 - 2q \\
&\Downarrow \\
q &= \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(x_0, R) &= p \cdot 3 + (1-p) \cdot 0 = 3p \\
u_2(x_0, L) &= p \cdot 0 + (1-p) \cdot 1 = 1 - p \\
&\Downarrow \\
p &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

הגדרה 9.5 שיווי משקל מעורב במשחק עם שני משחקים
זוג אסטרטגיות $x_0 \in \Delta_{|\Sigma_1|-1}, y_0 \in \Delta_{|\Sigma_2|-1}$ הוא שיווי משקל אם:

$$
\begin{aligned}
u_1(x_0, y_0) &= \max_{x \in \Delta_{|\Sigma_1|-1}} u_1(x, y_0) \\
u_2(x_0, y_0) &= \max_{y \in \Delta_{|\Sigma_2|-1}} u_2(x_0, y)
\end{aligned}
$$

9.2 משחקים קומבינטורים

9.2.1 הגדרות

הגדרה 9.6 משחק קומבינטורי

1. שני שחקנים משחקים לפי תורות.
2. אוסף (סופי) של מצבי משחק.
3. אוסף של מהלכים חוקיים לשחקנים.
4. אוסף של מצבי משחק מנצחים, נקראים גם מצבים סופיים.
5. אוסף של מצבי תיקו.
6. המשחק מתנהל לפי תורות - בכל תור נתון מצב המשחק, והשחקן שתורו לשחק בוחר מהלך חוקי שמעביר את מצב המשחק הנוכחי למצב משחק חדש.
7. השחקן הראשון שמגיע למצב מנצח נקרא השחקן המנצח.

הערה 9.7 במשחקים קומבינטוריים כל שחקן פועל בידיעה מוחלטת של כל המאורעות שקרו במשחק עד לרגע בו הוא צריך לבצע מהלך.

הגדרה 9.8 תיאור גרף של משחק קומבינטורי
תיאור גרף של משחק קומבינטורי הוא עץ עם שורש (המצב ההתחלתי של המשחק) שקודקודיו הם מצבי המשחק. העלים הם המצבים הסופיים.

הערה 9.9 למשחקים קומבינטוריים שמסתיימים בזמן סופי, גרף המשחק יהיה עץ (גרף ללא מעגלים).

הגדרה 9.10 משחק קומבינטורי מאוזן\משוחד
משחק קומבינטורי נקרא **מאוזן\בלתי־משוחד** אם לשני השחקנים יש אותו אוסף מהלכים ואותו אוסף מצבים מנצחים. אחרת, המשחק נקרא משחק **מוטה\משוחד**.

הערה 9.11 שחמט הוא לא משחק מאוזן, כי השחקן הלבן הוא היחיד שיכול להזיז את החיילים הלבנים.

הגדרה 9.12 אם X הוא אוסף מצבי המשחק, נסמן בN את קבוצת מצבי המשחק שמי שהגיע אליהם ראשון יכול להבטיח ניצחון.

הגדרה 9.13 נסמן ב$P \subseteq X$ את קבוצת המצבים, שמי שהגיע אליהם, השחקן השני יכול להבטיח ניצחון.

הגדרה 9.14 הגדרה רקורסיבית לN, P
נסמן: $N_0 = \emptyset$ ונסמן בP_0 את אוסף המצבים הסופיים.
כעת נסמן ב$N_{i+1} \subset N$ את אוסף כל המצבים שיש מהם מהלך שמוביל לP_i, וב$P_{i+1} \subset P$ את אוסף כל המצבים כך שכל מהלך מהם מוביל לN_i.
סה"כ נקבל ש$N = \cup_i N_i,\ P = \cup_i P_i$.

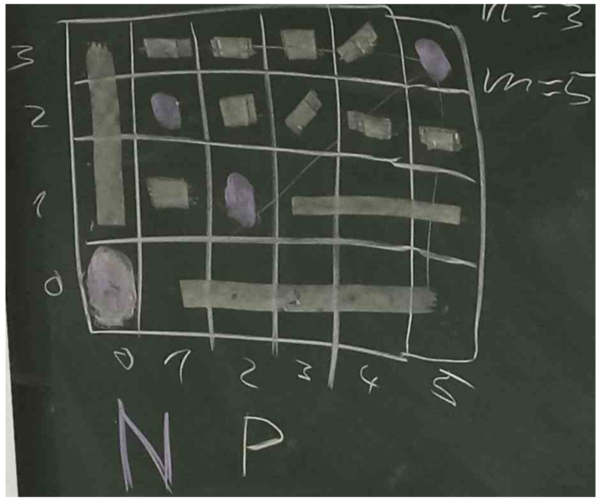
משפט 9.15 במשחק קומבינטורי מאוזן וסופי מתקיים $X = N \cup P$. כלומר - אחד השחקנים יכול לכפות נצחון או תיקו.

9.3 נים (וייטהוף)

שתי ערמות גפרורים בגדלים $n, m \in \mathbb{N}$. כל שחקן בתורו יכול לקחת גפרורים מאחת מהערימות, או אותו מס' גפרורים משתיהן. מנצח מי שלקח את הגפרור האחרון. נשים לב שניתן להציג את מצבי המשחק כך:

$$X = \{(k, l):\ k \in [m]\,,\ l \in [n]\}$$

ניתן לתאר את המשחק כלוח:



איור 1: תיאור גרפי של וייטהוף נים, כולל סוגי המצבים השונים

המשחק מתחיל מהריבוע הימני העליון.
בצורה אלגברית, המהלכים החוקיים הם:

1. $(k,l) \to (k-i,l)\,,\ i \in [k]$
2. $(k,l) \to (k,l-j)\,,\ j \in [l]$
3. $(k,l) \to (k-i,l-i)\,,\ i \in [\min(k,l)]$

בתאור הגרפי, אלכסון הוא מהלך מסוג 3, קו אופקי הוא מהלך מסוג 1, קו אנכי הוא מהלך מסוג 2.
נגדיר:

$$a_0 = 0,\ b_0 = 0$$

ולכל $i = 1, 2, \cdots$ נגדיר:

$$a_i = \min\{t \geq 0 \mid t \notin \{a_0, \cdots, a_{i-1}, b_0, \cdots, b_{i-1}\}\}$$
$$b_i = a_i + i$$

אז למשל נקבל:

$$a_1 = 1,\ b_1 = 2,\ a_2 = 3,\ b_2 = 5,\ a_3 = 4,\ b_3 = 7,\ a_4 = 6,\ b_4 = 10,\ a_5 = 8,\ b_5 = 13$$

משפט 9.16 במשחק נים של ויטהוף מתקיים:

$$P = \{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty} \cup \{(b_i,a_i)\}_{i=1}^{\infty} \cap X$$

טענה 9.17 מכל סוג מצב ניתן להגיע לסוג המצב ההופכי:

$$\begin{aligned} P &\to \not{P} \\ N = \not{P} &\to P \end{aligned}$$

משפט 9.18 הסדרות $\{a_i\}_i, \{b_i\}_i \subseteq \mathbb{N}_0$ מקיימות:

1. הסדרות עולות חזק: $\forall i: \ b_i < b_{i+1}, \ a_i < a_{i+1}$
2. הסדרות הן זרות מלבד איברי האפס: $\{a_i\}_i \cap \{b_i\}_i = \{a_0 = 0 = b_0\}$
3. מתקיים: $\forall k \in \mathbb{N}: \ [k] \subset \{a_i \mid i = 1, \cdots, k\} \cup \{b_i \mid i = 1, \cdots, k\}$
וגם: $\mathbb{N} = \{a_i \mid i = 1, \cdots, k\} \cup \{b_i \mid i = 1, \cdots, k\}$

הוכחה: נוכיח כל טענה בנפרד:

1. יהי i. נשים לב שמההגדרה:

$$\begin{aligned} a_i &= \min\{t \geq 0 \mid t \notin \{a_0, \cdots, a_{i-1}, b_0, \cdots, b_{i-1}\}\} \\ a_{i+1} &= \min\{t \geq 0 \mid t \notin \{a_0, \cdots, a_i, b_0, \cdots, b_i\}\} \end{aligned}$$

נניח בשלילה ש$a_i \leq a_{i+1}$. מההגדרה מתקיים $a_i \neq a_{i+1}$, ולכן נותרנו עם $a_i < a_{i+1}$. נשים לב שזה לא יכול להיות, כיוון ש:

$$\begin{gathered} a_{i+1} = \min\{t \geq 0 \mid t \notin \{a_0, \cdots, a_i, b_0, \cdots, b_i\}\} \\ \Downarrow \\ a_{i+1} \geq 0, \ a_{i+1} \notin \{a_0, \cdots, a_i, b_0, \cdots, b_i\} \\ \Downarrow \\ a_{i+1} \notin \{a_0, \cdots, a_{i-1}, b_0, \cdots, b_{i-1}\} \end{gathered}$$

בסתירה לכך שa_i הוא המינימלי המקיים זאת. אם כך, אז $a_i > a_{i+1}$. כעת, מההגדרה:

$$b_{i+1} = a_{i+1} + i + 1 > a_i + i + 1 > a_i + i = b_i$$

2. נניח בשלילה שקיימים $i, j > 0$ כך ש$a_i = b_j$. נניח בשלילה ש$j < i$, אז מההגדרה:

$$\begin{gathered} a_i = \min\{t \geq 0 \mid t \notin \{a_0, \cdots, a_{i-1}, b_0, \cdots, b_{i-1}\}\} \\ \Downarrow \\ a_i \neq b_j \end{gathered}$$

ולכן הגענו לסתירה. אם כך, אז $i \geq j$. נשים לב שמהטענה הקודמת:

$$b_j = a_j + j \overset{monotonicity}{>} a_i + j \overset{j>0}{>} a_i$$

ושוב קיבלנו סתירה, לכן $b_j = a_i$.

3. נוכיח באינדוקציה על k. הבסיסים $k = 0, 1$ טריוויאליים. כעת, נוכיח עבור $k > 1$. מהנחת האינדוקציה:

$$\{1, \cdots, k-1\} \subset \{a_i \mid i = 1, \cdots, k-1\} \cup \{b_i \mid i = 1, \cdots, k-1\}$$

אם $k \in \{a_i \mid i = 1, \cdots, k-1\} \cup \{b_i \mid i = 1, \cdots, k-1\}$ אז:

$$\{1, \cdots, k\} \subset \{a_i \mid i = 1, \cdots, k-1\} \cup \{b_i \mid i = 1, \cdots, k-1\} \subset \{a_i \mid i = 1, \cdots, k\} \cup \{b_i \mid i = 1, \cdots, k\}$$

אם לא, אז

$$k = \min \{t \geq 0 \mid t \notin \{a_0, \cdots, a_{k-1}, b_0, \cdots, b_{k-1}\}\}$$

ומההגדרה של a_i נקבל ש$a_k = k$, וסיימנו.

■

10 תרגיל 3

10.1 עצים

טענה 10.1 כל עץ מכיל לפחות עלה אחד.

טענה 10.2 כל עץ בעל n קודקודים מכיל בדיוק $n-1$ צלעות.

טענה 10.3 נניח עץ T מקיים כי לכל קודקוד שאיננו עלה יש לפחות 3 שכנים, אז בT יש יותר עלים מקודקודים.

10.2 נים של ויטהוף

טענה 10.4 אם $(x, y) \in P$ אז כל מהלך חוקי המתחיל ב(x, y) מסתיים במצב שאיננו בP.

טענה 10.5 אם $(x, y) \notin P$ אז קיים מהלך חוקי המתחיל ב(x, y) ומסתיים במצב שנמצא בP.

10.3 משחקים מאוזנים

הגדרה 10.6 סכום משחקים מאוזנים
יהיו G_1, G_2 שני משחקים מאוזנים. נגדיר את המשחק שהוא הסכום שלהם $G_1 + G_2$ באופן הבא: בכל תור השחקן בוחר ומבצע מהלך באחד מבין G_1 או G_2, כאשר המנצח במשחק הסכום הוא מי שמנצח במשחק האחרון מבין המשחקים G_1 או G_2.

הערה 10.7 אם X_{G_1}, X_{G_2} הם אוספי מצבי המשחק של G_1 וG_2, אז $X_{G_1+G_2}$ הוא אוסף מצבי המשחק של משחק הסכום, והוא מורכב מזוגות סדורים של מצב משחק מG_1 ומצב משחק מG_2.

טענה 10.8 יהי G משחק Nim בעל n ערימות גפרורים, יהי G_1 משחק הNim המתאים רק לm הערימות הראשונות של G, וG_2 משחק הNim המתאים רק ל$n-m$ הערימות האחרונות של G. מתקיים ש $G = G_1 \times G_2$.

טענה 10.9 אם $x \in N_{G_1},\ y \in P_{G_2}$ אז $(x,y) \in N_{G_1 \times G_2}$.

טענה 10.10 אם $x \in P_{G_1},\ y \in P_{G_2}$ אז $(x,y) \in P_{G_1 \times G_2}$.

11 שיעור 4

11.1 משחקים קומבינטוריים

11.1.1 צ'ומפס

יש לוח שכולו ריבועי שוקולד, מלבד הריבוע השמאלי התחתון ביותר שהוא ברוקולי. כל שחקן בתורו מסמן ריבוע שוקולד ואוכל את כל הריבועים שנמצאים בתוך המלבן שבין הריבוע הימני העליון ביותר ובין הריבוע המסומן.

משפט 11.1 כאשר משחקים צ'ומפס עם טבלת שוקולד מלבנית, לשחקן הפותח יש אסטרטגיה מנצחת.

הוכחה: נניח בשלילה שלשחקן השני יש אסטרטגיה מנצחת. נבחר לשחקן הראשון אסטרטגיה שבה הוא אוכל את הריבוע הימני העליון. לשחקן השני יש תשובה מנצחת לכך (מתוך ההנחה שלנו) - נניח שבתשובה המנצחת הוא בוחר בריבוע x. אבל, זה אומר שגם השחקן הראשון יכל לבחור באותו x בתורו (כי מדובר במלבן), ולנצח. סתירה. ■

הערה 11.2 ההוכחה לא קונסטרוקטיבית, ועד היום לא יודעים מהי האסטרטגיה המנצחת. שיטת הוכחה זו נקראת גניבת אסטרטגיה.

11.1.2 משחק הטבעות

יש נקודות על הלוח. כל שחקן בתורו מצייר לולאה שיכולה לעבור דרך מס' נקודות, אך אסור לה לעבור דרך לולאות אחרות. האחרון שיכול לצייר לולאה מנצח.

11.1.3 המשחק של שאנון

יש נקודה עליונה, ונקודה תחתונה, וביניהן רשת של נקודות מחוברות.
שחקן אחד מנסה לחזק שרשרת מפרקים רציפה מהנקדודה העליונה לתחתונה, והשני מנסה למנוע זאת ממנו ע"י מחיקת מפרקים. מפרק שחוזק לא יכול להמחק ולהפך.

11.1.4 הקס Hex

מטרת כל שחקן ליצור רצף בצבע שלו בין שני הקווים עם הצבע הזה. ניתן להראות שתמיד יהיה שחקן מנצח, ושלשחקן הראשון יש אסטרטגיה מנצחת.

11.2 משחק סכום אפס במטריצה

ניתן להציג משחקי סכום אפס בתור מטריצה כפי שראינו בתרגול. באיזה צעד כדאי לכל שחקן לבחור?

$$\begin{matrix} 5 & 2 & 9 \\ 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 \end{matrix}$$

שחקן 1 הוא שחקן השורות, שחקן 2 הוא שחקן העמודות. ה$\max\min$ של שחקן 1 הוא בשורה 2, ה$\min\max$ של שחקן 2 הוא בעמודה 1. אם שניהם יבחרו בכך, שחקן 2 ישלם לשחקן 1 תשלום של 6. מכיוון שה$\max\min$ וה$\min\max$ שניהם שווים ל6, ערך המשחק הוא 6.

הערה 11.3 לא לכל משחק יש ערך.

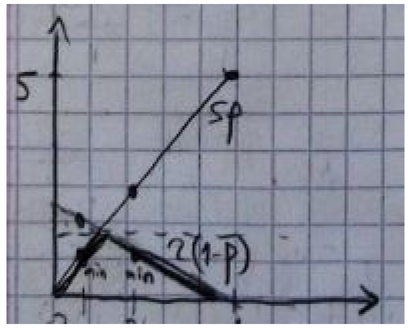
11.2.1 פדרו מול מאיול (שחקן התקפה מול שחקן הגנה בכדורגל)

Pedro\Mayul	L	R
L	0	0.2
R	0.5	0

מאפשרים אסטרטגיות מעורבות - פדרו הולך ימינה בהסתברות p ושמאלה בהסתברות $1-p$. נכפיל כל תשלום במשחק ב10 ונחשב. פדרו יכול להרוויח $5p$ או $2(1-p)$, ועל ידי חישוב ה$\max\min$ מתקבל ב:

$$\min\left(5p, 2\left(1-p\right)\right)$$
$$\Downarrow$$
$$5p = 2\left(1-p\right)$$
$$\Downarrow$$
$$p = \frac{2}{7}$$

איור 2: חישוב ה$\max\min$



נשים לב שבכל נקודה השונה מהחיתוך בין הישרים ה$\min$ הוא עם תועלת קטנה יותר.
נוכיח בהמשך שלכל משחק באסטרטגיות מעורבות יש ערך.

12 תרגול 4

12.1 תזכורות

טענה 12.1 במשחק קומבינטורי סופי ללא תיקו, לאחד השחקנים יש אסטרטגיה מנצחת.

הוכחה: הוכחנו בתרגול 0 שבמשחק קומבינטורי סופי או שלשחקן 1 יש אסטרטגיה מנצחת, או שלשחקן 2 יש אסטרטגיה מנצחת, או שיש לשניהם אסטרטגיה המבטיחה תיקו. ההוכחה תקפה למשחק הנ"ל, אבל כיוון שבמשחק הנ"ל אין תיקו, קיבלנו את הטענה. ■

הגדרה 12.2 עץ
עץ הוא גרף קשיר ללא מעגלים.

הגדרה 12.3 עץ פורש
תת גרף T של גרף G ייקרא עץ פורש אם הוא עץ והוא מכיל את כל קודקודי G.

טענה 12.4 לכל גרף קשיר יש עץ פורש.

12.2 המשחק של שאנון

הגדרה 12.5 חוקי המשחק:

1. במשחק משחקים שני שחקנים בתורות - שחקן אחד נקרא המחבר, והשני המנתק.
2. יש גרף G, שני קודקודים בתוך הגרף נקראים A, B.
3. בכל תור המחבר מחזק קשת שלא נותקה, והמנתק חותך קשת שלא חוזקה.
4. המטרה של השחקן המחזק הוא שיהיה מסלול בין A לB של צלעות מחוזקות. אם לא ניתן ליצור מסלול כזה בין A לB, המנתק ניצח.

טענה 12.6 אם בגרף G ישנם שני עצים פורשים שמשותפת להם צלע אחת בדיוק, והמחבר משחק ראשון, אז יש לו אסטרטגיה מנצחת.

הוכחה: תחילה נראה למה:

טענה 12.7 יהי G גרף, וT, S עצים פורשים שלו. אם $e \in T$ קשת שאינה בS, אז קיימת $e' \in S$ כך ש $(T \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ הוא עץ פורש. **הוכחה:** בתרגיל. ■

כעת נשתמש בלמה כדי להוכיח את הטענה באינדוקציה: נגדיר באינדוקציה על מהלך המשחק של שחקן החיזוק סדרה של זוגות עצים פורשים (T_i, S_i) המקיימים ש$T_i \cap S_i$ מכיל את כל הקשתות ששחקן החיזוק חיזק עד התור הi, ו$T_i \cup S_i$ מכיל את כל הצלעות שלא נחתכו עד התור הi. נשים לב שהבסיס עבור מצב המשחק בו אף שחקן לא שיחק מתקיים. האסטרטגיה של המחבר תיהיה בצעד הראשון לחזק את הקשת המשותפת לשני העצים הפורשים שנתונים, וניקח אותם בתור T_1, S_1. נשים לב שזהו בסיס האינדוקציה.

צעד האינדוקציה: נניח שיש T_i, S_i כמו שצריך ונוכיח עבור $i + 1$. נניח שבתור הi נותקה הקשת e, נניח בה"כ $e \in T_i$. נניח בשלילה ש$e \in S_i$, אז $e \in T_i \cap S_i$ ולכן מחוזקת, סתירה. לפי הלמה קיימת $e' \in S_i$ כך ש $T_{i+1} := (T_i \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ הוא עץ פורש. נסמן $S_{i+1} := S_i$, ונחזק את e' בתורנו. נשים לב ש(T_{i+1}, S_{i+1}) הוא כנדרש.

נשים לב שכיוון שלכל i מתקיים שT_i הוא עץ פורש המכיל את כל הi הצלעות המחוזקות, אז כאשר $i = n - 1$ (כשn הוא מס' הקודקודים בגרף) אז נקבל שכל העץ T_{n-1} הוא מחוזק. כיוון שעץ פורש הוא קשיר, קיבלנו בפרט מסלול מחוזק מA לB. ■

12.3 קמירות

טענה 12.8 יהיו $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ שתי קבוצות קמורות. נגדיר:

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

אז $A + B$ קמורה.

הוכחה: יהיו $a_1 + b_1,\ a_2 + b_2 \in A + B$. יהי $t \in [0, 1]$, אז:

$$t\left(a_1 + b_1\right) + (1 - t)\left(a_2 + b_2\right) = \left(ta_1 + (1 - t)\, a_2\right) + \left(tb_1 + (1 - t)\, b_2\right)$$

נשים לב שמהקמירות של A, B נקבל:

$$\begin{gathered}\left(ta_1 + (1 - t)\, a_2\right) \in A \\ \left(tb_1 + (1 - t)\, b_2\right) \in B \\ \Downarrow \\ \left(ta_1 + (1 - t)\, a_2\right) + \left(tb_1 + (1 - t)\, b_2\right) \in A + B \\ \Downarrow \\ A + B \text{ is convex}\end{gathered}$$

■

13 תרגיל 4

13.1 גרפים

הגדרה 13.1 רכיב קשירות
תת גרף קשיר מקסימלי.

טענה 13.2 יהי G גרף סופי. הוספת צלע חדשה לG גורמת בדיוק לאחד מבין הבאים:

1. מספר רכיבי הקשירות בG קטן.
2. מספר המעגלים בG גדל.

טענה 13.3 יהי G גרף קשיר סופי ויהיו T, T' זוג עצים פורשים. לכל צלע e בT קיימת צלע e' בT' כך ש$(T \setminus \{e\}) \cup \{e'\}$ הוא עץ פורש.

14 שיעור 5

14.1 קבוצות קמורות

הגדרה 14.1 משפטי הפרדה של קבוצות קמורות קובעים שקבוצות קמורות זרות ניתנות להפרדה על ידי מישורים.

משפט 14.2 תהי $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קמורה ונניח $0^n \notin K$. אז קיימים $z \in \mathbb{R}^n,\ c \in \mathbb{R}$ כך ש:

$$\forall x \in K:\ 0 < c < \langle z, x\rangle$$

אז העל מישור $H = \{x \mid \langle z, x\rangle = c\}$ מפריד בין האפס (הראשית) לבין הקבוצה הקמורה.

הערה 14.3 מדוע H הוא על מישור? המשפחה $\sum_i x_i z_i = c$ היא משפחה לינארית בn נעלמים ולכן מהווה תנאי שמגדיר על מישור ממימד $n-1$.

הוכחה: נבחר $u \in K$, נסמן $R = \|u\|_2$. נשים לב ש$K \cap \{x \mid \|x\| < R\}$ היא קבוצה קמורה וסגורה, ולכן יש בה נקודה עם מרחק מינימלי לראשית. נסמנה z.

נניח בשלילה שיש שתי נקודות עם מרחק מינימלי לראשית, נניח הנקודה השניה היא v. מקמירות הקבוצה נקבל שהישר המחבר בין v לz גם שייך לקבוצה. אבל אז, נוכל להעביר אנך מהישר הנ"ל שיגיע לראשית, ומשיקולים גיאומטרים האנך יותר קצר מהניצבים (הישרים שמחברים בין v לראשית ובין z לראשית), וקיבלנו סתירה.

נשים לב שלכל $v\in K$ ולכל $\epsilon\in(0,1]$ נקבל:

$$\begin{aligned}
\underbrace{\|z\|_2^2}_{\text{distance from } 0^n} &\overset{\text{minimality of z}}{\leq} \left\|\underbrace{\epsilon v+(1-\epsilon)z}_{\in K}\right\|_2^2 \\
&\Downarrow \\
\langle z,z\rangle &\leq \langle \epsilon v+(1-\epsilon)z, \epsilon v+(1-\epsilon)z\rangle = \\
&= \epsilon^2\langle v,v\rangle+(1-\epsilon)^2\langle z,z\rangle+2\epsilon(1-\epsilon)\langle v,z\rangle \\
&\Downarrow -\langle z,z\rangle \\
0 &\leq 2\epsilon\langle v,z\rangle-2\epsilon\langle z,z\rangle+\epsilon^2\langle v,v\rangle+\epsilon^2\langle z,z\rangle-2\epsilon^2\langle v,z\rangle \\
&\Downarrow \\
\epsilon^2\left(2\langle v,z\rangle-\langle v,v\rangle-\langle z,z\rangle\right) &\leq 2\epsilon\left(\langle v,z\rangle-\langle z,z\rangle\right) \\
&\Downarrow \\
\epsilon\left(2\langle v,z\rangle-\langle v,v\rangle-\langle z,z\rangle\right) &\leq 2\left(\langle v,z\rangle-\langle z,z\rangle\right) \\
&\Downarrow \epsilon\to 0 \\
0 &\leq 2\left(\langle v,z\rangle-\langle z,z\rangle\right) \\
&\Downarrow \\
\langle z,z\rangle &\leq \langle v,z\rangle
\end{aligned}$$

כיוון ש$0^n\notin K$ אז בהכרח $z\neq 0^n$. אם כך, אז $0<\langle z,z\rangle$. נבחר $c=\frac{1}{2}\langle z,z\rangle$ ולכן נקבל:

$$0<c<\langle z,z\rangle\leq\langle z,v\rangle$$

וכיוון שזהו $v\in K$ כללי, הוכחנו את המשפט. ■

למה 14.4 אם X,Y סגורות וחסומות ו$f: X\times Y\to\mathbb{R}$ רציפה בשתי הקורדינטות אז:

$$\underbrace{\max_{x\in X}\left(\underbrace{\min_{y\in Y}f(x,y)}_{\text{a function of x}}\right)}_{\text{the maximum of a function of x}} \leq \min_{y\in Y}\left(\max_{x\in X}f(x,y)\right)$$

הוכחה: בהינתן $(x^*,y^*)\in X\times Y$ אז:

$$\inf_{y\in Y}f(x^*,y)\leq f(x^*,y^*)\leq\sup_{x\in X}f(x,y^*)$$

נשים לב שלכל y^*:

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f(x,y)\leq\sup_{x\in X}f(x,y^*)$$

ובפרט ל-y שנותן את

$$\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f\left(x,y\right)$$

ולכן:

$$\sup_{x\in X}\inf_{y\in Y}f\left(x,y\right)\leq\inf_{y\in Y}\sup_{x\in X}f\left(x,y\right)$$

■

14.2 משחק סכום אפס בשני שחקנים

הגדרה 14.5 המודל הכללי עבור משחק סכום אפס בשני שחקנים
נקרא לשחקנים: שחקן השורות (שחקן 1), ושחקן העמודות (שחקן 2).
מטריצת תשלומים $A=\left[a_{i,j}\right]_{i\in[m],j\in[n]}$. כששחקן השורות בוחר באסטרטגיה i ושחקן העמודות בוחר באסטרטגיה j, שחקן העמודות משלם $a_{i,j}$ לשחקן השורות.

הגדרה 14.6 אסטרטגיה מעורבת לשחק השורות
וקטור $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_m\end{bmatrix}$ כך ש-$\forall i:\ x_i\geq0$ וגם $\sum x_i=1$.

הערה 14.7 אסטרטגיה מעורבת מוגדרת באופן דומה לשחקן העמודות.

הערה 14.8 נשים לב שאם שני השחקנים משחקים לפי אסטרטגיות מעורבות, אז נקבל את התשלום $a_{i,j}$ בהסתברות x_iy_j, ולכן תוחלת התשלום משחקן 2 לשחקן 1 תיהיה:

$$\mathbb{E}\left[payment\right]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_iy_ja_{i,j}\right)=x^tAy$$

הגדרה 14.9 Δ_m יסמן את אוסף כל האסטרטגיות המעורבות לשחקן 1. נשים לב שהוא סימפלקס:

$$\Delta_m=\left\{\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1 & \cdots & x_m\end{bmatrix}\ \mid\forall i:\ x_i\geq0,\ \sum x_i=1\right\}$$

באותו האופן נגדיר את Δ_n עבור שחקן 2.

הגדרה 14.10 אסטרטגיה $\tilde{x}\in\Delta_m$ נקראת אופטימלית לשחקן 1 אם

$$\min_{y\in\Delta_n}\tilde{x}^TAy=\max_{x\in\Delta_m}\min_{y\in\Delta_n}x^TAy$$

כלומר - $\tilde{x}$ אופטימלית אם כשאני משחק אותה אני מבטיח לעצמי לפחות את מה שהייתי מבטיח בכל אסטרטגיה אחרת.

הגדרה 14.11 אסטרטגיה $\tilde{y} \in \Delta_n$ נקראת אופטימלית לשחקן 2 אם:

$$\max_{x\in\Delta_m} x^T A\tilde{y} = \min_{y\in\Delta_n} \max_{x\in\Delta_m} x^T Ay$$

משפט 14.12 משפט פון־נוימן
לכל משחק שני שחקנים סכום אפס יש ערך באסטרטגיות מעורבות. כלומר ־ לשחקן 1 יש אסטרטגיה שתבטיח לו לקבל לפחות v, ולשחקן 2 יש אסטרטגיה שתבטיח לו לשלם לא יותר מv. בצורה מתמטית:

$$\max_{x\in\Delta_m} \min_{y\in\Delta_n} \left(x^T Ay\right) = v = \min_{y\in\Delta_n} \max_{x\in\Delta_m} \left(x^T Ay\right)$$

הגדרה 14.13 נקרא לv ערך המשחק.

הוכחה: נניח בשלילה (לאור הלמה מסוף החלק של הקמירות) ש

$$\max_{x\in\Delta_m} \min_{y\in\Delta_n} \left(x^T Ay\right) < \lambda < \min_{y\in\Delta_n} \max_{x\in\Delta_m} \left(x^T Ay\right)$$

נגדיר משחק חדש:

$$\forall i,j : \hat{a_{i,j}} = a_{i,j} - \lambda$$
$$\hat{A} = [\hat{a_{i,j}}]_{i,j}$$

נקבל במשחק החדש:

$$(*) : \max_{x\in\Delta_m} \min_{y\in\Delta_n} \left(x^T \hat{A}y\right) < 0 < \min_{y\in\Delta_n} \max_{x\in\Delta_m} \left(x^T \hat{A}y\right)$$

לכל אסטרטגיה מעורבת $y \in \Delta_n$ נקבל ש$\hat{A}y$ הוא וקטור תשלומים על פי m האסטרטגיות של השחקן הראשון. נביט על כל הוקטורים ששולטים על הוקטורים מהצורה $\hat{A}y$ עבור $y \in \Delta_n$ כלשהו:

$$K = \left\{\hat{A}y + v \mid y \in \Delta_n,\ v \in \mathbb{R}^m,\ v \geq 0\right\}$$

טענה 14.14 K היא קבוצה קמורה וסגורה.

טענה 14.15 $0 \notin K$. **הוכחה:** נניח בשלילה ש$0 \in K$. אז מהגדרת K יש אסטרטגיה מעורבת $y \in \Delta_n$ כך ש$\hat{A}y \leq \vec{0}$, כלומר נקבל עבור אותו הy:

$$0 > \max_{x\in\Delta_m} \left(x^T \hat{A}y\right) > \min_{y\in\Delta_n} \max_{x\in\Delta_m} \left(x^T \hat{A}y\right)$$

בסתירה לאגף ימין ב$(*)$. ■

לפי שתי הטענות נקבל לפי משפט ההפרדה שקיים $z \in \mathbb{R}^n$ כך שלכל $w \in K$ מתקיים:

$$0 < c < \langle z, w \rangle$$

לכן, לכל $y \in \Delta_n$ ולכל $v \geq 0$:

$$(**) : \ 0 < c < \left\langle z, \hat{A}y + v \right\rangle$$

נניח שקיימת קואורדינטה j כך ש$z_j < 0$. נבחר v_j מאוד גדול ואז הסכום באגף ימין יהיה שלילי, בסתירה ל$(**)$.
לכן $\forall j : \ 0 \leq z_j$. נגדיר: $s = \sum_{i=1}^{n} z_i$, ונביט על

$$x = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} z_1 & \cdots & z_m \end{bmatrix} = \frac{1}{s} z$$

נקבל:

$$\forall y : \ 0 < \frac{c}{s} \leq \left\langle x, \hat{A}y \right\rangle \leq x^T A y$$

כיוון שהנ"ל נכון לכל y, הוא בפרט נכון עבור הy של $\min_{y \in \Delta_n} \left(x^T \hat{A} y \right)$. נשים לב ש:

$$0 < \frac{c}{s} \leq \left\langle x, \hat{A}y \right\rangle \leq x^T A y < \max_{x \in \Delta_m} \min_{y \in \Delta_n} \left(x^T \hat{A} y \right) \overset{(*)}{<} 0$$

בסתירה ל$(*)$, וסיימנו. ■

15 תרגול 5

15.1 שיווי משקל במשחקי סכום אפס בשני שחקנים

הגדרה 15.1 שיווי משקל
זוג אסטרטגיות: x של שחקן 1 וy של שחקן 2 כך ש:

$$\forall x' \in \Delta_1 : u_1 (x, y) \geq u_1 (x', y)$$
$$\forall y' \in \Delta_2 : u_2 (x, y) \geq u_2 (x, y')$$

15.1.1 דוגמא

	O	K
N	$2,1$	$0,3$
B	$1,2$	$1,2$
A	$0,3$	$2,1$

נמצא את כל שיווי המשקל: בוחרים איזו אסטרטגיה לערב, ואז לדרוש שלא יהיה כדאי לסטות לאחרות. נבדוק שיווי משקל טהורים ־ אין. מה אם רק 2 טהור? נניח ש2 בוחר בשיווי משקל את O, אז אין שיווי משקל, כי בבירור 1 יעדיף את N, ובמצב הזה 2 יעדיף לסטות לK. נניח ש2 בוחר בK, באופן דומה שוב אין שיווי משקל. נניח ש2 מערבב את O,K באסטרטגיה $\vec{q}=(q,1-q)$. מעקרון האדישות, אם $\vec{p}=(p_1,p_2,1-p_1-p_2)$ היא אסטרטגית שיווי משקל של 1, אז:

$$
\begin{gathered}
u_2\left(\vec{p},O\right)=u_2\left(\vec{p},K\right)\\
\Downarrow\\
p_1+2p_2+3\left(1-p_1-p_2\right)=3p_1+2p_2+\left(1-p_1-p_2\right)\\
\Downarrow\\
p_1=1-p_1-p_2\\
\Downarrow\\
p_2=1-2p_1
\end{gathered}
$$

$(\vec{p},\vec{q})$ היא אסטרטגיית שיווי משקל.

אם שחקן 1 משחק טהור, אז בהכרח B ־ כי אם הוא יבחר את N או את A אז נקבל מצב של טהור מול טהור, וראינו כבר שזה לא קורה. נוודא עבור אילו ערכי q בהכרח לA אין סטיה כדאית (אחרת הוא לא היה משחק B). צריך להראות ש:

$$
\begin{gathered}
u_1\left(B,\vec{q}\right)\geq u_1\left(N,\vec{q}\right)\\
u_1\left(B,\vec{q}\right)\geq u_1\left(A,\vec{q}\right)
\end{gathered}
$$

נחשב:

$$
\begin{gathered}
1=u_1\left(B,\vec{q}\right)\geq u_1\left(N,\vec{q}\right)=2q\Rightarrow q\leq\frac{1}{2}\\
1=u_1\left(B,\vec{q}\right)\geq u_1\left(A,\vec{q}\right)=2-2q\Rightarrow q\geq\frac{1}{2}\\
\Downarrow\\
q=\frac{1}{2}
\end{gathered}
$$

נשים לב ש$\left(B,\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ הוא שיווי משקל.
נניח 1 מערבב רק את N,B. אם כך, אז אין סטייה כדאית:

$$
\begin{gathered}
2q=u_1\left(N,\vec{q}'\right)\geq u_1\left(A,\vec{q}'\right)=2-2q\Rightarrow q\geq\frac{1}{2}\\
1=u_1\left(B,\vec{q}'\right)\geq u_1\left(A,\vec{q}'\right)=2-2q\Rightarrow q\geq\frac{1}{2}
\end{gathered}
$$

ומאדישות:

$$
\begin{gathered}
u_1\left(N,\vec{q}'\right)=u_1\left(B,\vec{q}'\right)\\
\Downarrow\\
q=\frac{1}{2}
\end{gathered}
$$

נשים לב ש$\frac{1}{2}$ עונה על התנאים לכך שאין סטייה כדאית.

מסקנה 15.2 אם $1-p_1-p_2=0$ אז $p_1=0, p_2=1, q=\frac{1}{2}$.

הגדרה 15.3 אסטרטגיה שולטת
אסטרטגיה x שולטת על אסטרטגיה x' אם לכל אסטרטגיה y של 2:

$$u_1(x,y) \geq u_1(x',y)$$

הגדרה 15.4 אסטרטגיה שולטת חזק
כמו קודם רק

$$u_1(x,y) > u_1(x',y)$$

טענה 15.5 בשיווי משקל אין אסטרטגיות נשלטות חזק.

דוגמה

$$\begin{array}{ccc} & D & E \\ A & 0 & \frac{1}{4} \\ B & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ C & 1 & 0 \end{array}$$

נשים לב ששחקן 1 לעולם לא ישחק באטסטרגיה A כיוון שהיא נשלטת על ידי B, לכן בפועל המשחק הוא:

$$\begin{array}{ccc} & D & E \\ B & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ C & 1 & 0 \end{array}$$

נשים לב ששחקן 2 לעולם לא ישחק באסטרטגיה D כיוון שהיא נשלטת על ידי E, לכן בפועל המשחק הוא:

$$\begin{array}{cc} & E \\ B & \frac{1}{4} \\ C & 0 \end{array}$$

נשים לב ששחקן 1 לעולם לא ישחק באסטרטגיה C כיוון שהיא נשלטת על ידי B, לכן בפועל המשחק הוא:

$$\begin{array}{cc} & E \\ B & \frac{1}{4} \end{array}$$

ולכן (B,E) הוא שיווי משקל, וערך המשחק הוא $\frac{1}{4}$.

הערה 15.6 אסטרטגיה יכולה להשלט ע"י אסטרטגיה מעורבת, למשל:

	D	E
A	10	0
B	0	10
C	4	4

הערה 15.7 C נשלטת חזק על ידי $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$, לכן אפשר לסלקה ולקבל:

	D	E
A	10	0
B	0	10

16 תרגיל 5

16.1 אסטרטגיות מעורבות

הגדרה 16.1 בהינתן משחק סכום אפס בשני שחקנים באסטרטגיות מעורבות, נסמן בΔ^i את אוסף האסטרטגיות המעורבות של שחקן i.

הגדרה 16.2 נאמר שזוג אסטרטגיות מעורבות $(x_0,y_0)\in\Delta^1\times\Delta^2$ היא שיווי משקל אם:

$$u_1\left(x_0,y_0\right)=\max_{x\in\Delta^1}u_1\left(x,y_0\right)\ \ and\ u_2\left(x_0,y_0\right)=\max_{y\in\Delta^2}u_2\left(x_0,y\right)$$

הגדרה 16.3 נאמר שאסטרטגיה מעורבת $x_0\in\Delta^1$ היא אסטרטגיית בטחון מקסימלי עבור שחקן 1 אם:

$$\min_{y\in\Delta^2}u_1\left(x_0,y\right)=\max_{x\in\Delta^1}\min_{y\in\Delta^2}u_1\left(x,y\right)$$

הגדרה 16.4 נאמר שאסטרטגיה מעורבת $y_0\in\Delta^2$ היא אסטרטגיית בטחון מקסימלי עבור שחקן 2 אם:

$$\max_{x\in\Delta^1}u_2\left(x,y_0\right)=\min_{y\in\Delta^2}\max_{x\in\Delta^1}u_2\left(x,y\right)$$

טענה 16.5 נתון משחק סכום אפס בשני שחקנים עם פונקציית רווח u (עבור שחקן 1) ויהיו Δ_1,Δ_2 אוספי האסטרטגיות המעורבות של השחקנים, אז אם $(x_0,y_0)\in\Delta_1\times\Delta_2$ נקודת שיווי משקל, אזי $x_0\in\Delta_1$ ו$y_0\in\Delta_2$ אסטרטגיות ביטחון מקסימלי של השחקנים ו:

$$\max_{x\in\Delta_1}\min_{y\in\Delta_2}u\left(x,y\right)=u\left(x_0,y_0\right)=\min_{y\in\Delta_2}\max_{x\in\Delta_1}u\left(x,y\right)$$

טענה 16.6 נתון משחק סכום אפס בשני שחקנים עם פונקציית רווח u (עבור שחקן 1) ויהיו Δ_1, Δ_2 אוספי האסטרטגיות המעורבות של השחקנים, אז אם $x_0 \in \Delta_1,\ y_0 \in \Delta_2$ אסטרטגיות בטחון מקסימלי של השחקנים ו

$$\max_{x\in\Delta_1}\min_{y\in\Delta_2} u(x,y) = u(x_0,y_0) = \min_{y\in\Delta_2}\max_{x\in\Delta_1} u(x,y)$$

אז $(x_0,y_0) \in \Delta_1 \times \Delta_2$ נקודת שיווי משקל.

טענה 16.7 נתבונן במשחק סכום אפס בשני שחקנים. אם $(x,y)\ ,\ (v,u)$ הן שתי נקודות שיווי משקל (באסטרטגיות מעורבות),אז גם (x,u) ו(v,y) הן נקודות שיווי משקל.

הערה 16.8 הטענה אינה תמיד נכונה במשחק שאינו סכום אפס.

17 שיעור 6

17.1 צוללות ומפציצים

הגדרה 17.1 משחק צוללות ומפציצים
אלו הם חוקי המשחק:

1. הלוח הוא 3×3.
2. שחקן 1 נקרא "מפציץ", ושחקן 2 הוא צוללת בגודל של 2×1.
3. שחקן 2 שם את הצוללת איפשהו על הלוח, ושחקן 1 בוחר משבצת ומפציצה. אם הצוללת הייתה על משבצת זו, שחקן 1 מרוויח 1 ושחקן 2 מרוויח -1. אחרת, שניהם מקבלים 0.

הערה 17.2 זהו משחק סכום אפס. בנוסף, לפי חוקי המשחק למפציץ יש 9 אפשרויות, אבל לשחקן 2 יש 12 אפשרויות. כעת, נשתמש בסימטריה על מנת לפשט את המשחק. נשים לב שיש 2 סוגי מיקומים שהצוללת יכולה להתמקם בהם: מיקום התופס את המשבצת האמצעית בלוח, ומיקום התופס משבצת פינתית כלשהי. לעומת זאת, למפציץ יש 3 סוגי אסטרטגיות: להפציץ את המשבצת האמצעית, להפציץ משבצת אמצעית באחת ה"צלעות" של הלוח, או להפציץ משבצת פינתית. בסופו של דבר נקבל את המטריצה הבאה:

	$center$	$corner$
$corner$	0	$\frac{1}{4}$
$side-center$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$center$	1	0

נשים לב שעבור המפציץ, אסטרטגיה 1 נשלטת על ידי אסטרטגיה 2, אז בעצם נקבל:

	$center$	$corner$
$side-center$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$center$	1	0

כעת ניתן לראות שעבור הצוללת אסטרטגיה 1 נשלטת על ידי אסטרטגיה 2, אז בעצם נקבל:

	$corner$
$side-center$	$\frac{1}{4}$
$center$	0

עכשיו נקבל שעבור המפציץ $side-center$ שולט על $center$, ולכן נקבל:

$$\begin{array}{cc} & corner \\ side-center & \frac{1}{4} \end{array}$$

וערך המשחק הוא $\frac{1}{4}$.

17.2 משחקים בטור\מקביל

נניח יש משחק G_1 עם ערך v_1 ומשחק G_2 עם ערך v_2.

17.2.1 משחקים בטור

הגדרה 17.3 חיבור טורי של משחקים

יהיו משחקים G_1, G_1. החיבור הטורי שלהם מוגדר להיות המשחק בו קודם משחקים את G_1 (עד שהמשחק תם) ואז את G_2 (עד שהמשחק תם).

הערה 17.4 אם נשחק את G_1 וG_2 ברצף (כלומר, קודם נשחק בG_1 ואז נשחק בG_2), אז נשים לב שהאסטרטגיה האופטימלית עבור כל שחקן במשחק ה"טורי" תיהיה לשחק את האסטרטגיה האופטימלית עבור G_1 בG_1 (כאשר אסטרטגיה זו מבטיחה v_1) ואת האופטימלית עבור G_2 בG_2 (כאשר אסטרטגיה זו מבטיחה v_2), ולכן הערך של המשחק הטורי הוא $v_1 + v_2$.

17.2.2 משחקים במקביל

הגדרה 17.5 חיבור מקבילי של משחקים

יהיו משחקים G_1, G_1. החיבור המקבילי שלהם מוגדר להיות המשחק בו כל שחקן יכול לבחור לשחק או בG_1 או בG_2. אם שניהם בוחרים במשחקים שונים, הרווח לשניהם הוא 0. אם שניהם בוחרים באותו משחק, הם ישחקו בו.

הערה 17.6 נשים לב שאם למשחק G_1 יש ערך v_1 ולמשחק G_2 יש ערך v_2 אז מטריצת המשחק נראית כך:

$$\begin{array}{cc} v_1 & 0 \\ 0 & v_2 \end{array}$$

נניח $v_1, v_2 \geq 0$. מה האסטרטגיה האופטימלית של השחקנים? נתחיל משחקן 1. נניח הוא משחק לפי האסטרטגיה המעורבת $\vec{p} = (p, 1-p)$, אז:

$$u(\vec{p}, G_1) = p \cdot v_1 + (1-p) \cdot 0 = pv_1$$
$$u(\vec{p}, G_2) = p \cdot 0 + (1-p) \cdot v_2 = (1-p)\, v_2$$

מעקרון האדישות שחקן 1 ישחק באסטרטגיה מעורבת ממש רק אם:

$$pv_1 = (1-p)\,v_2$$
$$\Downarrow$$
$$p\,(v_1+v_2) = v_2$$
$$\Downarrow$$
$$p = \frac{v_2}{v_1+v_2}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{p} = \left(\frac{v_2}{v_1+v_2}, \frac{v_1}{v_1+v_2}\right)$$

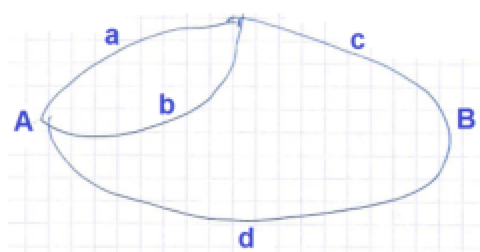
נשים לב שאם נחשב עבור אסטרטגיה מעורבת $\vec{q}$ של שחקן 2 נקבל מסימטריה בדיוק את אותה התוצאה: $\vec{q}=\vec{p}$.
אם כך,שיווי המשקל המעורב הוא $(\vec{p},\vec{q})$, וערך המשחק הוא

$$v = p\cdot v_1 = \frac{v_1 v_2}{v_1+v_2} = \frac{1}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$$

17.2.3 משחק רשת כבישים

הגדרה 17.7 חוקי המשחק
יש שני שחקנים: נוסע וטרול, והם נוסעים מעיר A לעיר B. בין הערים יש מערכת כבישים, ולכל כביש מוגדרת אגרה. אם הנוסע והטרול בוחרים לנסוע באותו הכביש, הנוסע משלם לטרול את האגרה. אחרת, הוא לא משלם בכלל. ניתן לנסוע רק בכיוון $A \to B$ ולא ההפך.

הערה 17.8 דוגמה למערכת כבישים (תודה לליאור מור):



איור 3: מערכת כבישים לדוגמה

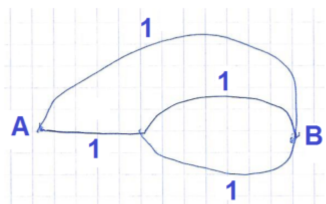
17.2.4 מעגלי זרם

הגדרה 17.9 מעגלי זרם

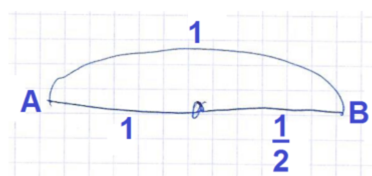
1. נניח מעגל מתחיל בA ונגמר בB, כשהפרש המתחים ביניהם הוא v. אם ההתנגדות בין A לB היא R, אז הזרם בין A לB הוא $\frac{v}{R}$.

2. נניח משרשרים שני מעגלים באופן טורי, אז ההתנגדות של המעגל הגדול היא סכום ההתנגדויות של שני המעגלים.
3. נניח משרשרים שני מעגלים באופן מקבילי כשאחד בעל התנגדות R_1 והשני בעל התנגדות R_2, אז ההתנגדות של המעגל הגדול היא $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$.

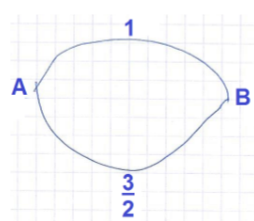
הערה 17.10 נסתכל על מעגל לדוגמה ונשים לב שבאמצעות חוקים $2,3$ ניתן לפשט את המעגל בצורה הדרגתית עד שנקבל מעגל פשוט:



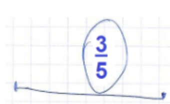
$\Downarrow$ rule 3 on the parallel lines in the bottom right



$\Downarrow$ rule 2 on the bottom line



$\Downarrow$ rule 3



איור 4: פישוט מעגל

למה 17.11 ערך משחק הנוסע והטרול על רשתות כבישים הוא ההתנגדות האפקטיבית על הרשת כאשר האגרות הן ההתנגדויות.

17.2.5 משחק מחבואים במטריצה

הגדרה 17.12 חוקי המשחק

1. לוח המשחק הוא מטריצה שיש בכל משבצת בה או 0 או 1.
2. שחקן 1 בוחר משבצת כלשהי במטריצה שיש בה 1.
3. המטרה של שחקן 2 היא לבחור שורה או עמודה של המטריצה כך שהמשבצת של שחקן 1 נמצאת בה.
4. אם שחקן 2 מצליח הוא מקבל 1, אחרת 0.

אסטרטגיה עבור המחפש - נסתכל על הסט המינימלי של שורות\עמודות ש"מכסות" את כל משבצות ה"1" על המטריצה. נניח בסט יש l שורות\עמודות. אם שחקן 2 בוחר באקראי שורה\עמודה מאותו הסט, בתוחלת הוא מבטיח לעצמו רווח של $\frac{1}{l}$.

אסטרטגיה עבור המתחבא - נסתכל על הסט המקסימלי של משבצות 1 במטריצה כך שאין זוג משבצות בסט ששוכנות על אותה עמודה\שורה. נניח בסט יש k משבצות כאלה. אם שחקן 1 בוחר באקראי משבצת מהסט, בתוחלת הוא מבטיח לעצמו לא לשלם יותר מ$\frac{1}{k}$.

משפט 17.13 משפט קוניג

$$k = l$$

הוכחה: נוכיח בשיעור הבא באמצעות משפט החתונה של Hall. ניתן גם להוכיח באמצעות משפט המינימקס. ■

מסקנה 17.14 כיוון ש$l = k$ אז $\frac{1}{l} = \frac{1}{k}$ ולכן ערך המשחק הוא $\frac{1}{k}$.

משפט 17.15 משפט החתונה של Hall
בהינתן קבוצה A של בנים וקבוצה B של בנות ויחס הכרות סימטרי ביניהם (בן a מכיר את בת $b \Leftrightarrow b$ בת b מכיר את בן a) אז אם כל קבוצה $S \subseteq A$ מכירים ביחד לפחות $|S|$ בנות, ניתן להתאים לכל בן בA בת בB באופן חח"ע.

הוכחה: נניח שתנאי החתונה של Hall מתקיים ("אם כל קבוצה $S \subseteq A$..."). נוכיח באינדוקציה על $|A| = n$:

בסיס: אם $n = 1$ אז יש רק בן אחד. כיוון שמההנחה הוא מכיר לפחות בת אחת, פשוט נתאים בינו לבין אחת הבנות שהוא מכיר.

צעד: נניח שהטענה נכונה לכל $n > m$, ונוכיח עבור n. נחלק למקרים:

1. אם לכל $S \subset A$ מתקיים שS מכירים לפחות $|S|+1$ בנות (כלומר, יותר ממש מ$|S|$), אז נקח בן אקראי $a \in S$, נתאים לו את אחת הבנות שהוא מכיר, נניח b. נשים לב שמההנחה תנאי החתונה של Hall עדיין מתקיים עבור הסטים שנותרו: $S \setminus \{a\}$ ו$B \setminus \{b\}$, ולכן ניתן להפעיל את הנחת האינדוקציה וסיימנו.
2. אם קיים $S \subset A$ כך שS מכירים בדיוק $|S|$ בנות. נסמן בT את סט הבנות שS מכירים. לפי הנחת האינדוקציה, ניתן למצוא לS התאמה. נשים לב שכל k בנים שאינם בS (כלומר, לכל k בנים שב$\overline{S} = A \setminus S$) מכירים לפחות k בנות שאינן בT (כלומר, שהן ב$\overline{T}$). נניח בשלילה שלא, אז אז לכל k בנים ב$\overline{S}$ מתקיים שהם מכירים לכל היותר $k-1$ בנות ב$\overline{T}$. כלומר, $\overline{S}$ מכירים לכל היותר $\left|\overline{S}\right| - 1$ בנות. אם כך, אז $S \cup \overline{S}$ מכירים לכל היותר $\underbrace{|S| + \left|\overline{S}\right|}_{=|A|} -1$ בנות, וקיבלנו סתירה לקיום תנאי החתונה של Hall.

■

הוכחה: כעת נוכיח את משפט קוניג. נגדיר את C, D כפי שהגדרנו קודם. נסתכל על מטריצת המשחק באופן הבא: השורות הן בנים, והעמודות הן בנות. אם בן i ובת j מכירים זה את זו אז במשבצת i, j יש את הערך 1, ו0 אחרת. נשים לב שתחת ההגדרה הזו, הסט D של המתחבא הוא התאמה מקסימלית בין הבנים לבנות (כיוון שאף בת לא מותאמת ליותר מבן אחד ולהפך). מההגדרה, לכל $d \in D$ מתקיים שהשורה\עמודה שלו "מכוסה" על ידי C. כיוון שלא קיימים $d, d' \in D$ כך שהם באותה שורה עמודה, אז בהכרח $|C| \geq |D|$.

נניח $|C| = l$. נניח בכיסוי יש r שורות וc עמודות, אז $l = r + c$. נניח S היא תת קבוצה של השורות בC. נסמן בתור T את כל העמודות שאינן בכיסוי C כך שהן מכירות לפחות שורה אחת בS (כלומר, לכל עמודה בT יש חיתוך עם שורה בS כך שהמשבצת בחיתוך מכילה 1). נשים לב שמהגדרת S, T נקבל ש$(C \setminus S) \cup T$ היא גם כיסוי של כל ה1ים במטריצה. מהמינימליות של C נקבל:

$$
\begin{gathered}
|C| \leq |(C \setminus S) \cup T| = |C| - |S| + |T| \\
\Downarrow \\
|S| \leq |T|
\end{gathered}
$$

נשים לב שהראינו שהבנים בS מכירים לפחות $|S|$ בנות. כיוון שS כללית, הראינו שתנאי החתונה של Hall מתקיים על קבוצת הבנים (כל השורות בC) וקבוצת הבנות (כל העמודות שאינן בC). אם כך, אז בתת המטריצה המוגדרת על ידי קבוצת הבנים וקבוצת הבנות יש התאמה בגודל r. באופן זהה, נקבל שיש התאמה בגודל c בתת המטריצה המוגדרת על ידי השורות מחוץ לC והעמודות בתוך C. כיוון ששתי ההתאמות הן זרות, במטריצה המלאה יש התאמה בגודל לפחות $l = c + r$. אם כך, אז $|C| \leq |D|$.

סה"כ קיבלנו $|C| = |D|$ וסיימנו. ■

18 תרגול 6

18.1 אסטרטגיות מעורבות

הגדרה 18.1 אסטרטגיות מעורבות

Σ_1, Σ_2 הן אוספי האסטרטגיות הטהורות של שחקנים 1 ו2 בהתאמה.

בעזרתם נגדיר את אוספי האסטרטגיות המעורבות שלהם: $\Delta_{\Sigma_1}, \Delta_{\Sigma_2}$.

כעת, נגדיר את פונקציות הרווח: $u_1, u_2 : \Delta_{\Sigma_1} \times \Delta_{\Sigma_2} \to \mathbb{R}$.

הערה 18.2 במשחק סכום אפס נסמן $u := u_1,\ u_2 := -u$.

למה 18.3 יהיו $v_1, \cdots, v_m \in \mathbb{R}^n$ ותהי $K = conv\left(v_1, \cdots, v_m\right)$. תהי $T:\ K \to \mathbb{R}$ העתקה לינארית, אז מתקיימים:

$$\min_{v \in K} T\left(v\right) = \min_{i \in [m]} T\left(v_i\right)\ \ and\ \ \max_{v \in K} T\left(v\right) = \max_{i \in [m]} T\left(v_i\right)$$

מסקנה 18.4 נסמן ב־$\left\{e_i\right\}_i$ את הבסיס הסטנדרטי (1 בקורדינטה i ואפסים בשאר הקורדינטות). אז לכל משחק סכום אפס מתקיים:

1. בהינתן אסטרטגיה מעורבת של שחקן 1 אז קיימת אסטרטגיה טהורה של שחקן 2 הממזערת את הרווח של שחקן 1 מקרב כל האסטרטגיות המעורבות האפשריות של שחקן 2. כלומר:

$$\forall x \in \Delta_{|\Sigma_1|}:\ \min_{y \in \Delta_{|\Sigma_2|}} u\left(x, y\right) = \min_{i \in [|\Sigma_2|]} u\left(x, e_i\right)$$

2. בהינתן אסטרטגיה מעורבת של שחקן 2 אז קיימת אסטרטגיה טהורה של שחקן 1 הממזערת את הרווח של שחקן 2 מקרב כל האסטרטגיות המעורבות האפשריות של שחקן 1. כלומר:

$$\forall y \in \Delta_{|\Sigma_2|}:\ \max_{x \in \Delta_{|\Sigma_1|}} u\left(x, y\right) = \max_{i \in [|\Sigma_1|]} u\left(e_i, y\right)$$

דוגמא

נסתכל על משחק סכום האפס הבא:

$$\begin{array}{cccc} & D & E & F \\ A & 0 & -1 & 2 \\ B & 1 & 0 & -1 \\ C & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

אז בהינתן אסטרטגיה מעורבת של שחקן 1, נניח $x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_3 \end{bmatrix} \in \Delta_2$ מתקיים:

$$\min_{y = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_3 \end{bmatrix} \in \Delta_2} u\left(x, y\right) = \min\left\{u\left(x, e_1\right), u\left(x, e_2\right), u\left(x, e_3\right)\right\} = \min\left\{x_2 - 2x_3, -x_1 + x_3, 2x_1 - x_2\right\}$$

ובהינתן אסטרטגיה מעורבת של שחקן 2, נניח $y = \begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_3 \end{bmatrix} \in \Delta_2$ מתקיים:

$$\max_{x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_3 \end{bmatrix} \in \Delta_2} u\left(x, y\right) = \max\left\{u\left(e_1, y_1\right), u\left(e_2, y_2\right), u\left(e_3, y_3\right)\right\} = \min\left\{-y_2 + 2x_3, y_1 - y_3, y_2\right\}$$

18.2 משחקי סכום אפס אנטי־סימטריים

נזכר במשפט המינימקס של וון־נוימן והלמה שבעזרתה הוכחנו אותו:

למה 18.5 לכל משחק סכום אפס מתקיים:

$$\max_{x \in \Delta_{|\Sigma_1|}} \min_{y \in \Delta_{|\Sigma_2|}} u\left(x, y\right) \leq \min_{y \in \Delta_{|\Sigma_2|}} \max_{x \in \Delta_{|\Sigma_1|}} u\left(x, y\right)$$

משפט 18.6 משפט המינימקס של וון־נוימן
לכל משחק סכום אפס מתקיים:

$$\max_{x\in\Delta_{|\Sigma_1|}} \min_{y\in\Delta_{|\Sigma_2|}} u(x,y) = v = \min_{y\in\Delta_{|\Sigma_2|}} \max_{x\in\Delta_{|\Sigma_1|}} u(x,y)$$

הגדרה 18.7 v נקרא לו **ערך המשחק**.

הגדרה 18.8 משחק סכום אפס יקרא אנטי־סימטרי אם לשני השחקנים יש את אותן האסטרטגיות, כלומר $\Sigma := \Sigma_1 = \Sigma_2$ (ולכן גם $\Delta := \Delta_1 = \Delta_2$), כך שמתקיים:

$$\forall (x,y) \in \Delta \times \Delta: \ u(x,y) = -u(y,x)$$

הערה 18.9 מספיק לבדוק את התנאי $u(x,y) = -u(y,x)$ רק על האסטרטגיות הטהורות.

מסקנה 18.10 במשחק סכום אפס אנטי סימטרי ערך המשחק הוא אפס, כלומר:

$$\max_{x\in\Delta_{|\Sigma_1|}} \min_{y\in\Delta_{|\Sigma_2|}} u(x,y) = 0 = \min_{y\in\Delta_{|\Sigma_2|}} \max_{x\in\Delta_{|\Sigma_1|}} u(x,y)$$

הוכחה: אנו יודעים שלמשחק יש ערך v. אם כך אז:

$$\begin{aligned}
v &\overset{\text{Von-Neumann}}{=} \max_{x\in\Delta_{|\Sigma_1|}} \min_{y\in\Delta_{|\Sigma_2|}} u(x,y) \overset{\text{Von-Neumann}}{=} \min_{y\in\Delta_{|\Sigma_2|}} \max_{x\in\Delta_{|\Sigma_1|}} u(x,y) \overset{\text{anti-symmetry}}{=} \\
&= \min_{y\in\Delta_{|\Sigma_2|}} \max_{x\in\Delta_{|\Sigma_1|}} -u(y,x) = -\min_{y\in\Delta_{|\Sigma_2|}} \max_{x\in\Delta_{|\Sigma_1|}} u(y,x) = -v \\
&\Downarrow \\
v &= 0
\end{aligned}$$

■

דוגמה

נזכר במשחק הקודם:

	D	E	F
A	0	-1	2
B	1	0	-1
C	-2	1	0

נשים לב שהוא משחק סכום אפס אנטי סימטרי ולכן מהמסקנה הוא בעל ערך משחק אפס.
ראינו שבהינתן אסטרטגיה מעורבת של שחקן 1, נניח $x = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_3 \end{bmatrix} \in \Delta_2$ מתקיים:

$$\min_{y=\begin{bmatrix} y_1 & \cdots & y_3 \end{bmatrix}\in\Delta_2} u(x,y) = \min\{x_2 - 2x_3, -x_1 + x_3, 2x_1 - x_2\}$$

אז:

$$\max_{x\in\Delta_2}\min_{y\in\Delta_2} u\left(x,y\right)=\max_{x\in\Delta_2}\min\left\{x_2-2x_3,-x_1+x_3,2x_1-x_2\right\}$$

אבל אנו כבר יודעים ש $\max_{x\in\Delta_2}\min_{y\in\Delta_2} u\left(x,y\right)=0$, אז עבור $\vec{x}$ שממקסם את הביטוי מתקיים:

$$\min\left\{x_2-2x_3,-x_1+x_3,2x_1-x_2\right\}=0$$

ולכן (אם כל הרווחים גדולים מהמינימלי, והמינימלי שווה ל0, אז כל הרווחים גדולים שווים ל0):

$$2x_1\geq x_2,\ x_3\geq x_1,\ \ x_2\geq 2x_3$$
$$\sum_{i=1}^{3}x_i=1$$
$$\Downarrow$$
$$2x_3\geq 2x_1\geq x_2\geq 2x_3\Rightarrow x_3=x_1=\frac{1}{2}x_2$$
$$\sum_{i=1}^{3}x_i=2x_2=1\Rightarrow x_2=\frac{1}{2},\ x_3=x_1=\frac{1}{4}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{x}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

וזו אסטרטגיית הביטחון המקסימלי של שחקן 1. באופן דומה ניתן לחשב את אסטרטגיית הביטחון המקסימלי של שחקן 2 ולהשתמש בשניהם כדי למצוא את נקודת שיווי המשקל.

הערה 18.11 אזהרה! אם המינימום בין שלושה מספרים הוא אפס זה לא מחייב שכל אחד מהם הוא אפס.

18.3 אסטרטגיות שולטות ונשלטות

הגדרה 18.12 אסטרטגיה שולטת
יהיו $x,x'\in\Delta_{|\Sigma_1|}$ שתי אסטרטגיות של שחקן 1. x תקרא **שולטת חזק** על אסטרטגיה x' אם מתקיים:

$$\forall y\in\Delta_{|\Sigma_2|}:\ \ u_1\left(x',y\right)<u_1\left(x,y\right)$$

אסטרטגיה x תקרא **שולטת חלש** על אסטרטגיה x' אם מתקיים:

$$\forall y\in\Delta_{|\Sigma_2|}:\ \ u_1\left(x',y\right)\leq u_1\left(x,y\right)\ \ and\ \exists y\in\Delta_{|\Sigma_2|}:\ \ u_1\left(x',y\right)<u_1\left(x,y\right)$$

באופן דומה מוגדרות אסטרטגיות שולטות חזק וחלש לשחקן 2.

הגדרה 18.13 אסטרטגיה נשלטת
אסטרטגיה $x\in\Delta_{|\Sigma_1|}$ של שחקן 1 תקרא **נשלטת חזק** (חלש) אם קיימת אסטרטגיה $x'\in\Delta_{|\Sigma_1|}$ השולטת חזק (חלש) על x.
באופן דומה מוגדרות אסטרטגיות נשלטות חזק וחלש לשחקן 2.

18.3.1 דוגמה (זהה לתרגול הקודם)

$$\begin{array}{ccc} & D & E \\ A & 0 & \frac{1}{4} \\ B & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ C & 1 & 0 \end{array}$$

נשים לב ששחקן 1 לעולם לא ישחק באטסטרגיה A כיוון שהיא נשלטת על ידי B, לכן בפועל המשחק הוא:

$$\begin{array}{ccc} & D & E \\ B & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ C & 1 & 0 \end{array}$$

נשים לב ששחקן 2 לעולם לא ישחק באסטרטגיה D כיוון שהיא נשלטת על ידי E, לכן בפועל המשחק הוא:

$$\begin{array}{cc} & E \\ B & \frac{1}{4} \\ C & 0 \end{array}$$

נשים לב ששחקן 1 לעולם לא ישחק באסטרטגיה C כיוון שהיא נשלטת על ידי B, לכן בפועל המשחק הוא:

$$\begin{array}{cc} & E \\ B & \frac{1}{4} \end{array}$$

ולכן (B,E) הוא שיווי משקל, וערך המשחק הוא $\frac{1}{4}$.

הערה 18.14 כשמסלקים אסטרטגיות נשלטות חלש, מסלקים איתן גם שיווי משקל אפשריים.

18.3.2 דוגמה

נתבונן במשחק סכום אפס הבא בין שני שחקנים:
כל שחקן בוחר מספר שלם בין 1 לn.
אם ההפרש בין המספרים הוא לכל היותר אחד, אז השחקן עם המספר הגבוה יותר מרוויח שקל.
אם ההפרש בין המספרים גדול מאחד, אז השחקן עם המספר הגבוה יותר מפסיד שני שקל.
נקבל את מטריצת המשחק הבאה:

player 2's number⇒ *player 1's number* ⇓	1	2	3	4	5	$\cdots$	$n-1$	n
1	0	−1	2	2	2	$\cdots$	2	2
2	1	0	−1	2	2	$\cdots$	2	2
3	−2	1	0	−1	2	$\cdots$	2	2
4	−2	−2	1	0	−1	$\cdots$	2	2
5	−2	−2	−2	1	0	$\cdots$	2	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	−2	−2	−2	−2	−2		0	−1
n	−2	−2	−2	−2	−2	$\cdots$	1	0

נשים לב שכאשר $n \geq 4$ אז השורה הn משלטת על ידי השורה הראשונה, והעמודה הn נשלטת על ידי העמודה הראשונה. לכן ניתן לצמצם את המשחק באופן אינדוקטיבי עד שנגיע ל:

player 2's number⇒ *player 1's number* ⇓	1	2	3
1	0	−1	2
2	1	0	−1
3	−2	1	0

נשים לב שהמשחק זהה לחלוטין למשחק מתחילת התרגול, ואותו כבר ניתחנו.

19 תרגיל 6

19.1 אסטרטגיות בטחון מקסימלי

הגדרה 19.1 אסטרטגיית בטחון מקסימלי עבור שחקן 1
נאמר ש $x_0 \in \Delta_{\Sigma_1}$ היא אסטרטגיית בטחון מקסימלי עבור שחקן 1 אם מתקיים:

$$\min_{y \in \Delta_{\Sigma_2}} u\left(x_0, y\right) = \max_{x \in \Delta_1} \min_{y \in \Delta_{\Sigma_2}} u\left(x, y\right)$$

טענה 19.2 נתונה מטריצת משחק סכום האפס בין שני השחקנים הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R}$$

1. אם $ab < 0$ אז ערך המשחק הוא 0.
2. אם $0 < ab$ אסטרטגיית הביטחון המקסימלי עבור שני השחקנים היא $\left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$ וערך המשחק הוא $\frac{ab}{a+b}$.

20 שיעור 7

20.1 משחקים חוזרים

20.1.1 וריאציה על זוג או פרט

הגדרה 20.1 חוקי המשחק

1. יש שני שחקנים, שחקן הזוג ושחקן הפרט.
2. בכל תור כל אחד מוציא או אצבע אחת או 2.
3. אם סכום האצבעות הוא אי זוגי, אז שחקן הפרט מקבל 1 ושחקן הזוג מפסיד 1. אם סכום האצבעות הוא זוגי, ההפך.
4. משחקים במשחק עד ששחקן הזוג משחק זוג, ואז מי שניצח בסיבוב האחרון "ממשיך" לנצח לעד.

הערה 20.2 לא ניתן להשתמש במשפט פון נוימן כדי לנתח את המשחק כי מטריצת המשחק היא אינסופית.
אם שחקן הפרט משחק זוג בהסתברות חצי ופרט בהסתברות חצי, תוחלת הרווח שלו היא 0.
לשחקן הזוג יש אסטרטגיה מחוכמת שיכולה להבטיח גם תוחלת רווח 0.

20.2 משחקים שאינם סכום אפס

הגדרה 20.3 נקודת שיווי משקל (הגדרה לא פורמלית)
נקודה שאף אחד מהשחקנים לא רוצה לסטות ממנה לבד. כלומר, לאף שחקן לא משתלם להחליף אסטרטגיה לבדו כיוון שבכל אסטרטגיה חלופית הוא ירוויח פחות.

20.2.1 דילמת האסיר

הגדרה 20.4 דילמת האסיר

1. יש שני שחקנים. אם

(א) שניהם מודים, כל אחד מקבל 8 שנים בכלא. אם שניהם מכחישים, שניהם מקבלים שנה בכלא. אם רק אחד מודה, אז מי שמודה מקבל 10 שנים בכלא והאחר מקבל 0 שנים בכלא.

הערה 20.5 מטריצת המשחק היא כזאת:

$$\begin{array}{ccc} & deny & admit \\ deny & (-1,-1) & (-10,0) \\ admit & (0,-10) & (-8,-8) \end{array}$$

עבור כל שחקן להודות היא אסטרטגיה דומיננטית. נשים לב ש$(-8,-8)$ היא נקודת שיווי משקל.

20.2.2 מלחמת המינים

הגדרה 20.6 מלחמת המינים
זוג צריך להחליט אם ללכת למופע אופרה או למשחק כדורגל, כשמטריצת המשחק היא:

$$\begin{array}{ccc} & opera & soccer \\ opera & (4,1) & (0,0) \\ soccer & (0,0) & (1,4) \end{array}$$

הערה 20.7 נשים לב ש$(1,4)$, $(4,1)$ הן נקודות שיווי משקל.
שחקן 1 יכול להבטיח לעצמו רווח של $\frac{4}{5}$. נסתכל על אסטרטגיה מעורבת $\vec{p}=(p,1-p)$, אז מעקרון האדישות:

$$u_1(\vec{p},opera)=4p+0\cdot(1-p)=0\cdot p+1\cdot(1-p)=u_1(\vec{p},soccer)$$
$$\Downarrow$$
$$p=\frac{1}{5}$$

נשים לב שעבור $p=\frac{1}{5}$ תוחלת הרווח לשחקן 1 היא $\frac{4}{5}$. באופן סימטרי נקבל שאסטרטגיה סימטרית של שחקן 2 נותנת לו תוחלת רווח זהה.

20.2.3 צ'יטות ואיילים

הגדרה 20.8 צ'יטות ואיילים

צ'יטות רודפות אחרי שני איילים, אחד גדול ששווה l, ואחד קטן ששווה s. כלומר $l > s$. מטריצת המשחק היא כזו:

$$\begin{array}{ccc} & large & small \\ large & \frac{l}{2},\frac{l}{2} & l,s \\ small & s,l & \frac{s}{2},\frac{s}{2} \end{array}$$

הערה 20.9 אם $l \geq 2s$ אז עבור שתי הצ'יטות האסטרטגיה הדומיננטית היא לרדוף אחרי האייל הגדול.

נניח$s < l < 2s$, אז (s,l) ו(l,s) הן נקודות שיווי משקל. נסתכל על צ'יטה 1, נניח היא משחקת אסטרטגיה מעורבת $\vec{p} = (p, 1-p)$, אז מעקרון האדישות:

$$\begin{aligned} u_1(\vec{p}, small) = \frac{pl}{2} + (1-p)s = pl + \frac{(1-p)s}{2} &= u_1(\vec{p}, big) \\ &\Downarrow \\ \frac{pl}{2} &= \frac{(1-p)s}{2} \\ &\Downarrow \\ p &= \frac{s}{l+s} \\ &\Downarrow \\ \mathbb{E}[u_1] &= \frac{sl}{2(l+s)} + \frac{sl}{l+s} = \frac{3}{2}\frac{sl}{l+s} \end{aligned}$$

20.2.4 צ'יקן

הגדרה 20.10 צ'יקן

שני נהגים נוסעים זה מול זה. ברגע האחרון עליהם להחליט אם לרדת מהכביש או להשאר על הכביש ולהסתכן בהתנגשות בנהג האחר.

$$\begin{array}{ccc} & drive & chicken \\ drive & (-M,-M) & (2,-1) \\ chicken & (-1,2) & (1,1) \end{array}, \ M >> 1$$

הערה 20.11 $(2,-1)$ ו$(-1,2)$ הן נקודות שיווי משקל. נניח שחקן 1 משחק אסטרטגיה מעורבת $\vec{p} = (p, 1-p)$, אז מעקרון האדישות:

$$\begin{aligned} u_1(\vec{p}, drive) = p(-M) + (1-p)(-1) = p \cdot 2 + (1-p) \cdot 1 &= u_1(\vec{p}, chicken) \\ &\Downarrow \\ p &= \frac{1}{M} \\ &\Downarrow \\ \mathbb{E}[u_1] &= 1 - \frac{2}{M} \end{aligned}$$

כלומר, ככל שההפסד (M) גדול יותר, תוחלת הרווח עולה.

האם השחקנים יכולים להבטיח לעצמם טוב יותר תוך שימוש בהסכם?

אם ההסכם הוא שתיבחרו זוג האסטרטגיות $(drive, chicken)$ בהסתברות $\frac{1}{2}$ וזוג האסטרטגיות $(chicken, drive)$ בהסתברות $\frac{1}{2}$, אז תוחלת הרווח של שני השחקנים היא $\frac{1}{2}$.

הסכם נוסף הוא שבורר יגריל בין $(chicken, chicken)$, $(chicken, drive)$, $(drive, chicken)$ בהסתברות אחידה ואח"כ יגיד לכל שחק מה האסטרטגיה שהוא צריך לבחור. זה נקרא שיווי משקל מתואם. באופן כללי הבורר יכול להגריל בין האסטרטגיות בהסתברויות הבאות:

	$drive$	$chicken$
$drive$	0	t
$chicken$	t	$1-2t$

עבור $t=0$ תוחלת התשלום הייתה מקסימלית, אבל אז זה לא היה ש"מ. ניתן לשאול - מהו הt הקטן ביותר שמאפשר ש"מ?

נניח הראשון קיבל הוראה להשתפן ($chicken$). הוא יודע שהשני ממשיך לנסוע בהסתברות $\frac{t}{1-t}$ ומשתפן גם בהסתברות המשלימה $\frac{1-2t}{1-t}$. ולכן אם שחקן 1 אכן מקשיב לבורר ומשתפן אז תוחלת התועלת היא:

$$u_1 = -\frac{t}{1-t} + \frac{1-2t}{1-t}$$

ואם הוא לא מקשיב לבורר וממשיך לנסוע אז תוחלת התועלת היא:

$$u_1 = 2\frac{t}{1-t} + \frac{1-2t}{1-t}$$

20.2.5 משחק אקולוגי

הגדרה 20.12 משחק ב3 שחקנים, כשכל אחת יכולה או לזהם או לטהר. כיוון שיש יותר משני שחקנים, נצטרך 2 מטריצות כדי לתאר את המשחק:

Third player: pollute

	$purify$	$pollute$
$purify$	$(1,1,0)$	$(4,3,3)$
$pollute$	$(3,4,3)$	$(3,3,3)$

Third player: purify

	$purify$	$pollute$
$purify$	$(1,1,1)$	$(1,0,1)$
$pollute$	$(0,1,1)$	$(3,3,4)$

המטריצות הן מטריצות **תשלומים**, לא רווחים.

הערה 20.13 יש 4 שיווייי משקל טהורים:

- כל החברות מזהמות, ואז כולן משלמות 3.
- שתי חברות מטהרות (ומשלמות 1) ואחת מזהמת (ומשלמת 0). יש 3 שיווי משקל כאלה.

שיוויי משקל מעורבים

ניתן להראות שאין ש"מ בו רק שחקן אחד או שניים משחקים באסטרטגיה טהורה. אם כך, חוץ מהש"מ הטהורים, נותר למצוא ש"מ מעורבים לחלוטין. נניח שחקן i מטהר בהסתברות p_i, ונשתמש בעקרון האדישות ע"מ למצוא את הש"מ:

$$
\begin{aligned}
u_3\left(\vec{p_1},\vec{p_2},purify\right) &= p_1\cdot p_2\cdot 1+p_1\left(1-p_2\right)\cdot 1+\left(1-p_1\right)\cdot p_2\cdot 1+\left(1-p_1\right)\left(1-p_2\right)\cdot 4 = \\
&= p_1\cdot p_2\cdot 0+p_1\cdot\left(1-p_2\right)\cdot 3+\left(1-p_1\right)\cdot p_2\cdot 3+\left(1-p_1\right)\left(1-p_2\right)\cdot 3 = u_3\left(\vec{p_1},\vec{p_2},pollute\right) \\
&\Downarrow \\
\frac{1}{3} &= p_1+p_2-2p_1p_2
\end{aligned}
$$

using principle of indifference for players 1 and 2 we get:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3} &= p_1+p_3-2p_1p_3 \\
\frac{1}{3} &= p_2+p_3-2p_2p_3
\end{aligned}
$$

$\Downarrow$ we got a system of equations. Let's solve it:

$$p_2=p_3 or\ p_1=\frac{1}{2}$$

קיבלנו 2 פתרונות. אם נבדוק את הפתרון של $p_1=\frac{1}{2}$ נקבל שאחת ההסתברויות האחרות מחוץ ל$[0,1]$ ולכן זהו פתרון לא חוקי.

אם נבדוק את הפתרון של $p_2=p_3$ נקבל בסוף $p_1=p_2=p_3$ וגם:

$$6p^2-6p+1=0$$

אם נפתור זאת נקבל שתי נקודות ש"מ:

$$\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right),\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$$

20.3 ש"מ נאש

הערה 20.14 נקודת שיווי משקל נאש היא אוסף אסטרטגיות לשחקנים שאם מסכימים עליהן באופן לא מחייב, כדאי לעמוד בהסכמה.

20.3.1 הסתייגויות מש"מ נאש

1. מניח שהשחקנים האחרים מתנהגים כמצופה
2. למה למקסם תוחלת של התשלומים?
3. הפתרון של נאש יכול להיות לא אופטימלי ואפילו גרוע לכולם (למשל דילמת האסיר)

20.3.2 נקודות לתמיכה\פתרונות להסתייגויות

1. מניח שכל השחקנים רציונליים ־ במצב נתון השחקנים ינסו להביא את התועלת שלהם למקסימום.
2. יכול להיות שהשחקנים רציונליים והתנהגות לא רציונלית מקורה בהצגה לא נכונה של התשלומים.
3. לפעמים לשחקן יש מטרה אחרת, למשל לקבל יותר משחקן אחר.

הערה 20.15 בש"מ נאש לא מספיק שכל שחקן רציונלי ורוצה למקסם את תועלתו, אלא שכל שחקן יודע שגם כל השחקנים האחרים הם רציונליים.

21 תרגול 7

21.1 סימפלקסים

הגדרה 21.1 קמור
יהיו וקטורים $v_0,\cdots,v_n$. הקמור שלהם הוא:

$$conv\left(v_0,\cdots,v_n\right):=\left\{\sum_{i=0}^{n}\alpha_iv_i\mid\ \sum_{i=0}^{n}\alpha_i=1,\ \forall i:\ \alpha_i\geq0\right\}$$

הגדרה 21.2 סימפלקס n מימדי (מצב קמור)
הקמור של $v_0,\cdots,v_n$ יקרא סימפלקס n מימדי אם אף אחד מהם אינו צירוף קמור של אחרים.

הערה 21.3 נסמן בΔ_n את הקמור של וקטורי הבסיס הסטנדרטי ב$\mathbb{R}^{n+1}$: $\Delta_n=conv\left(e_1,\cdots,e_{n+1}\right)$. סימפלקס זה נקרא הסימפלקס הn מימדי הסטנדרטי.

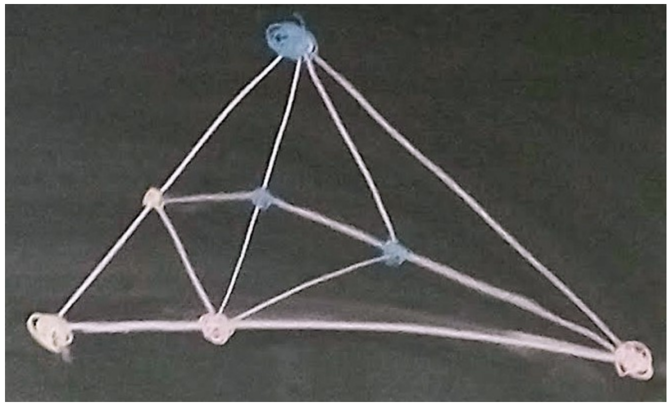
הגדרה 21.4 תומך של וקטור
יהי וקטור v, אז התומך של v מוגדר כך: $supp\left(v\right)=\left\{i:\ \alpha_i\neq0\right\}$

הגדרה 21.5 פאה
אם $T_i=conv\left\{v_1,\cdots,v_n\right\}$ אז פאה של T_i היא צרוף קמור של $\emptyset\neq C\subseteq\left\{v_1,\cdots,v_n\right\}$.

הגדרה 21.6 חלוקה סימפליציאלית
אם Δ הוא סימפלקס, אז חלוקה סימפליציאלית (חלוקה לסימפלקסים) של Δ היא אוסף סימפלקסים מאותו מימד $\left\{T_i\right\}_{i=1}^{k}$ כך ש$\Delta=\cup_{i=1}^{k}T_i$ וכך שלכל $i\neq j$ אז $T_i\cap T_j$ הוא פאה של T_i וגם של T_j.

הגדרה 21.7 צביעה חוקית
נניח נסתכל על משולש עם חלוקה סימפליציאלית. החלוקה יוצרת הרבה תתי משולשים פנימיים בתוך המשולש הגדול. כל קודקוד של המשולש הגדול צבוע בצבע כלשהו, כאשר הצבעים שונים. צביעה חוקית של המשולש תיהיה צביעה של כל קודקוד פנימי בעזרת צבעים מהתומך שלו.

איור 5: דוגמה לצביעה



טענה 21.8 הלמה של שפרנר

בכל צביעה חוקית יש סימפלקס בחלוקה שהוא צבעוני לגמרי. למעשה, יהיה מס' אי זוגי של כאלה סימפלקסים.

הוכחה: זו גרסה לא ברורה במיוחד מהתרגול למקרה **הדו מימדי** של המשפט. נבחר שני צבעים מהקודקודים של המשולש הגדול, נניח צהוב וכחול. נספור כמה זוגות של צלע כחולה־צהובה (צלע שמחברת בין קודקוד כחול וקודקוד צהוב) ומשולש שמכיל אותה יש, כאשר הצלעות והמשולשים רק מהחלוקה (כלומר ריקים, אין על צלע מהחלוקה קודקוד של משולש אחר, ואין בתוך משולש מהחלוקה משולש אחר). מצד אחד, כל משולש צבעוני (שמכיל את כל הצבעים) נותן רק צלע אחת כחולה צהובה. ולכן, רק זוג אחד לכל משולש צבעוני. אחרת, נחפש משולש שאינו צבעוני שמכיל צלע צהובה־כחולה ־ המשולש הוא או משולש עם שני קודקודים צהובים ואחד כחול, או משולש עם שני קודקודים כחולים ואחד צהוב. בכל אחד מהמשולשים הנ"ל נקבל שתי צלעות צהובות כחולות.

כל צלע נמצאת על לכל היותר שני משולשים:

1. אם הצלע בתוך המשולש ־ היא נותנת 2 זוגות (זאת קשת כחולה צהובה שמופיעה ב2 משולשים).
2. אם הצלע על השפה של המשולש הגדול, אז על הסימפלקס ה1 מימדי. בתרגיל נראה שמס' הצלעות הצהובות כחולות הללו הוא אי זוגי.

אם כך, כמות הצלעות הוא אי זוגי, ובפרט שונה מ0.

■

הוכחה: הוכחה יותר ברורה מסיכום התרגול למקרה **הדו מימדי**.

תחילה נוכיח למקרה הדו מימדי. לשם כך נגדיר סימונים: נניח $G=(V,E)$ הוא המשולש הגדול, ונסמן בT את החלוקה הסימפליציאלית שלו. כמו כן נסמן:

$$\begin{aligned} N_{ijk} &:= \#\text{ of triangles that are colored by } (i,j,k) \\ A_{ij} &:= \#\text{ of edges colored by } (i,j) \text{ that are on the edges of the big triangle} \\ B_{ij} &:= \#\text{ of edges colored by } (i,j) \text{ that are on the inside of the big triangle} \end{aligned}$$

נסתכל על קבוצת הזוגות של צלע מטיפוס $(1,2)$ ומשולש המכיל אותה:

$$Q=\{(e,t)\ \mid t\in T,\ e\in t,\ e\in E,\ type\,(e)=(1,2)\}$$

נספור את $|Q|$, פעם אחת לפי הצלעות ופעם אחת לפי המשולשים. נשים לב שמתקיים:

$$N_{123} + 2N_{112} + 2N_{122} = |Q| = A_{12} + 2B_{12}$$

נשים לב שממקרה הבסיס של $d = 1$ (שאותו נוכיח בהמשך) אז A_{12} אי זוגי. אם כך, אז בהכרח $0 < A_{12} + 2B_{12}$ הוא מס' אי זוגי, ולכן $0 < |Q|$ אי זוגי. אם כך, אז גם $0 < N_{123}$ אי זוגי, וסיימנו. ■

הוכחה: הוכחה למקרה הכללי, באינדוקציה על המימד n.

טענה 21.9 הלמה של שפרנר במקרה החד מימדי ($n = 1$)
תהי $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ חלוקה של קטע היחידה. נסמן כל x_i באחת משתי תגיות $c(x_i) \in \{1, 2\}$, כאשר יש הגבלה רק על הקצוות:

$$c(x_0) = 1,\ c(x_1) = 2$$

ובפנים הקטע מותר לסמן איך שרוצים. לכל סימון כזה יש מספר אי זוגי של קטעים קטנים מהצורה $[x_i, x_{i+1}]$ המסומנים בתגיות שונות.

הוכחה: תהי $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ חלוקה של קטע היחידה. תהי צביעה c כך ש $\forall i:\ c(x_i) \in \{1, 2\}$, וגם:

$$c(x_0) = 1,\ c(x_n) = 2$$

נוכיח את המבוקש בשאלה באמצעות הוכחה אינדוקטיבית:

בסיס: נניח $n = 1$. הקטע היחיד הוא $[x_0, x_1]$ והוא מסומן בתגיות שונות מההנחה על c.
נניח $n = 2$. יש שני קטעים: $[x_0, x_1], [x_1, x_2]$.
אם $c(x_1) = 1$ אז $[x_0, x_1]$ הוא קטע המסומן באותה תגית, ו$[x_1, x_2]$ מסומן בתגיות שונות, כלומר סה"כ קיבלנו מס' אי זוגי (1) של קטעים עם תגיות שונות.
אם $c(x_1) = 2$ אז $[x_1, x_2]$ מסומן באותה תגית, ו$[x_0, x_1]$ מסומן בתגיות שונות - שוב מס' אי זוגי.

צעד: נניח שהטענה נכונה לכל $n \geq k$ ונוכיח עבור $n + 1$.
אם $c(x_n) = 2$ אז נקבל שלפי הנחת האינדוקציה ב$[x_0, x_n]$ יש מס' אי זוגי של קטעים עם תגיות שונות, ובנוסף $[x_n, x_{n+1}]$ צבוע באותה תגית, לכן סך הכל יש בכל הקטע מס' אי זוגי של קטעים עם תגיות שונות.
אחרת, אז $c(x_n) = 1$. יהי ה$m \leq n$ המקסימלי כך ש$c(x_m) = 2$. מהנחת האינדוקציה בקטע $[x_0, x_m]$ יש מס' אי זוגי של קטעים עם תגיות שונות. מההנחה על m, בקטע $[x_m, x_{n+1}]$ יש רק שני קטעים עם תגיות שונות: $[x_m, x_{m+1}]$ (כי $c(x_m) = 2,\ c(x_{m+1}) = 1$) ו$[x_n, x_{n+1}]$ (כי $c(x_n) = 1,\ c(x_{n+1}) = 2$). סה"כ קיבלנו מס' אי זוגי של קטעים עם תגיות שונות.
בדקנו את כל המקרים, ולכן הטענה נכונה.

■

כעת, נוכיח את צעד האינדוקציה עבור המקרה הכללי. נגדיר סימונים:

$F :=$ # of n dimensional simplices colored with all $n+1$ colors

$F_{i,j} :=$ # of n dimensional simplices colored with n colors that are not i s.t. j appears twice

$E_i :=$ # of $n-1$ dimensional simplices colored with n colors that are not i that are on the inside of Δ_n

$D_i :=$ # of $n-1$ dimensional simplices colored with n colors that are not i that are on the edge of Δ_n

נתבונן בקבוצת הזוגות של סימפלקסים $(n-1)$ מימדיים הצבועים בכל n הצבעים שאינם i (ה"צלע"), וסימפלקס n מימדי המכיל אותו (ה"משולש"):

$$Q=\{(e,t)\ \mid e=(n-1)\text{-dim simplex},\ t=\text{n-dim simplex},\ e\in t,\ type\,(e)=[n]\setminus\{i\}\}$$

כמו במקרה הדו מימדי, נספור בשני אופנים את $|Q|$ ־ בפעם הראשונה לפי הצלעות, ובפעם השניה לפי המשולשים. נשים לב שמתקיים:

$$F+2F_{i,1}+2F_{i,2}+\cdots+2F_{i,n}=|Q|=D_i+2E_i$$

מהנחת האינדוקציה עבור המימד ה$n-1$ נקבל כי D_i אי־זוגי, ולכן $|Q|$ אי זוגי, ולכן F אי זוגי. ■

הגדרה 21.10 קבוצות הומיאומורפיות
נגיד שA הומיאומורפית לK אס"ם קיימת פונקציה $f:\ K\to A$ רציפה עם הופכית $f^{-1}:\ A\to K$ רציפה.

משפט 21.11 משפט נקודת שבת (של בראוור)
אם $K\subseteq\mathbb{R}^n$ קמורה וקומפקטית, ואם $f:\ K\to K$ פונקציה רציפה אז יש $x\in K$ כך ש$f(x)=x$.

הוכחה: לפי משפט מאינפי, כל קבוצה קמורה וקומקפטית $K\subseteq\mathbb{R}^{n+1}$ הומיאומורפית לתת קבוצה קמורה וקמפקטית $A\subseteq\Delta_n$ ע"י הומיאומורפיזם כלשהו $g:\ A\to K$. נסמן ב$p:\ \Delta_n\to A$ את ההטלה הרציפה. לכן כפי שנוכיח בהמשך במקרה הפרטי של משפט נקודת השבת, הפונקציה h המוגדרת כך:

$$h:=g^{-1}\circ f\circ g\circ p:\ \Delta_n\to\Delta_n$$

היא פונקציה רציפה עם נקודת שבת, כלומר $\exists x\in\Delta_n\ s.t.\ h(x)=x$. נשים לב שמהגדרת h, וספציפית מהגדרת g (אם $g:\ A\to K$ אז $g^{-1}:\ K\to A$), נקבל ש$x\in A$, ולכן $p(x)=x$. אם כך, מתקיים גם: $g^{-1}(f(g(x)))=x$, ולכן $g(x)$ היא נקודת שבת של f. ■

משפט 21.12 מקרה פרטי של משפט נקודת השבת
אם $f:\ \Delta_m\to\Delta_m$ רציפה, כש $\Delta_m=conv\,(v_1\cdots,v_m)$ אז יש $v\in\Delta_m$ כך ש$f(v)=v$.

הוכחה: יהיו Δ_m, f כמתואר במשפט. ניקח סדרת שילושים (חלוקות סימפליציאליות) $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שקוטריהם שואפים לאפס: $\delta(T_n)\to 0$, לדוגמה ־ החלוקה הבריצנטרית:

הגדרה 21.13 חלוקה בריצנטרית
חלוקה של פוליטופ קמור לסימפלקסים שווי מימד על ידי חיבור מרכזי כובד המשקל של כל פאה של הפוליטופ.

נניח בשלילה שאין נקודת שבת עבור f. לכל שילוש T_n נגדיר צביעה בn צבעים:

$$\forall v=\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{bmatrix}:\ \lambda(v):=\min\left\{i\in[m]\ \mid\ \underbrace{f(v)_i}_{\text{i-th index of f}(v)}<v_i\right\}$$

נשים לב שלכל v הצביעה הנ"ל מוגדרת היטב: מההנחה $f(v)\neq v$ ולכן קיימת לפחות קורדינטה אחת השונה בין שני הוקטורים. כיוון ש$v,f(v)\in\Delta_m$ אז סכום הקורדינטות של כל אחד הוא 1, ולכן:

$$\begin{gathered}\exists i\in[m]\ \ s.t.\ f(v)_i<v_i\\ \Downarrow\\ \{i\in[m]\ \mid f(v)_i<v_i\}\neq\emptyset\end{gathered}$$

כלומר λ מוגדרת היטב.
נשים לב גם שλ היא צביעה חוקית:

$$\forall v=\begin{bmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_m\end{bmatrix}\ \forall i\in[m]\ \ s.t.\ v_i=0:v_i=0\underset{\underset{f(v)\in\Delta_m}{\Uparrow}}{\leq}f(v)_i$$
$$\Downarrow$$
$$\lambda(v)=\min\{i\in[m]\ \mid f(v)_i<v_i\}\neq i$$

כלומר, אם $v_i=0$ אז לא יתכן ש$\lambda(v)=i$, ולכן $\lambda(v)\in supp(v)$. כעת, אנו עומדים בתנאי הלמה של שפרנר ולפי לכל n קיים סימפלקס קטן וצבעוני $t_n=\left(v^{n,1},\cdots,v^{n,m}\right)$ כך שכל קודקוד צבוע בצבע אחר, וסה"כ הסימפלקס צבעוני. בה"כ ניתן להניח שמתקיים: $\forall i\in[m]:\ \lambda\left(v^{n,i}\right)=i$.
מקומפקטיות, יש ת"ס מתכנסת $v^{n_k,1}\to x$. כיוון שהקוטר של הסימפלקס מקיים $\delta(T_n)\to0$ אז בעצם כל הקודקודים של הסימפלקס מתכנסים לנקודה אחת, ולכן כל הקודקודים שואפים לאותה הנקודה: $\forall i\in[m]:$ $v^{n_k,i}\to x=\begin{pmatrix}x_1&\cdots&x_m\end{pmatrix}$. יהי $i\in[m]$. מההנחה על הצביעה של הסימפלקסים נקבל $\lambda\left(v^{n_k,i}\right)=i$, כלומר $f\left(v^{n_k,i}\right)<v_i^{n_k,i}$. ניקח גבול, ומרציפות f נקבל $f(x)_i\leq x_i$. מכך ש$x,f(x)\in\Delta_m$ נקבל ש

$$\begin{gathered}\sum_{i=1}^m x_i=1=\sum_{i=1}^m f(x)_i\\ \Downarrow\forall i\in[m]:\ f(x)_i\leq x_i\\ \forall i\in[m]:\ x_i=f(x)_i\\ \Downarrow\\ x\text{ is a fixed point of f}\end{gathered}$$

וסיימנו. ∎

22 תרגיל 7

22.1 קמירות, סימפלקסים, פונקציות

הגדרה 22.1 קבוצה קמורה
קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תקרא קמורה אם:

$$\forall a,b\in A:\ \forall p\in[0,1]:\ p\cdot a+(1-p)\cdot b\in A$$

הגדרה 22.2 נקודת שבת
תהי $f: X \to X$, נקודה $x \in X$ נקראת נקודת שבת של f אם מתקיים $f(x) = x$.

משפט 22.3 קבוצה קומפקטית ב$\mathbb{R}^n$ אם"ם היא סגורה וחסומה.

הגדרה 22.4 תהא $C \subset \mathbb{R}^n$ קמורה, קומפקטית ולא ריקה. נגדיר פונקציה $p: \mathbb{R}^n \to C$ המתאימה לכל נק' x את הנק' בC הקרובה אליה ביותר. p מוגדרת היטב ורציפה.

משפט 22.5 פונקציה רציפה מקבלת מינימום ומקסימום על קבוצה קומפקטית.

הגדרה 22.6

$$\Delta_n := \left\{ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \forall i \in [n+1]: \ 0 \le x_i, \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$$

טענה 22.7 הלמה של שפרנר במקרה ה1 מימדי
תהי $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$ חלוקה של קטע היחידה. נסמן כל x_i באחת משתי תגיות $\{1,2\}$ $c(x_i) \in$, כאשר יש הגבלה רק על הקצוות:

$$c(x_0) = 1, \ c(x_1) = 2$$

ובפנים הקטע מותר לסמן איך שרוצים. לכל סימון כזה יש מספר אי זוגי של קטעים קטנים מהצורה $[x_i, x_{i+1}]$ המסומנים בתגיות שונות.

22.2 משחקי סכום אפס

טענה 22.8 במשחק סכום אפס סופי של שני שחקנים באסטרטגיות מעורבות, קבוצות אסטרטגיות הבטחון המקסימלי של כל שחקן הן קבוצות קמורות וקומפקטיות.

23 שיעור 8

23.1 ידיעה

23.1.1 חידה

בכפר יש 50 נערים ונערות, כולם רציונליים ובעלי כושר לוגי מושלם. בכפר אין מראות ובני הנוער לא מדברים על צבע העיניים האחד של השני. צבע העיניים של כל אחד הוא או כחול או חום. ברגע שמישהו מבין את צבע עיניו הוא הופך לבוגר ומספר את שערו בכיכר העיר למחרת בצהריים. יום אחד מגיע אורח לכפר ואמר שיש לפחות נער\נערה אחד עם עיניים כחולות. לאחר 49 יום לא קרה דבר, אבל אחרי 50 יום כולם הבינו שעיניהם כחולות.

שאלה 1:

הוכיחו שכך הדבר.

פתרון:

נניח שיש k נערים עם צבע עיניים כחול. נוכיח באינדוקציה שאחרי k ימים כולם יבינו שצבע עיניהם כחול.

בסיס: $k=1$: הנער הבודד עם העיניים הכחולות מבין שהוא בעל עיניים כחולות לאחר שהאורח מדבר.
$k=2$: שני הנערים עם העיניים הכחולות יודעים שקיים נער עם עיניים כחולות. ברגע שכל אחד מהם מבין שהאחר לא מבין שיש לו עיניים כחולות, שניהם מבינים שלשניהם יש עיניים כחולות.

צעד: נניח שהטענה נכונה ל$k-1$. אם יש k נערים עם עיניים כחולות, אז אחרי $k-1$ ימים שבהם לא קרה דבר, לפי הנחת האינדוקציה יבינו כל אחד מהם שיש להם עיניים כחולות.

שאלה 2:

מה האינפורמציה שהאורח הוסיף לנערים?

פתרון:

נניח יש 50 נערים. כל אחד מהם יודע שיש נערים עיניים כחולות, כי הוא רואה את העיניים של כל האחרים. לאחר מכן, כל אחד יודע שכל אחד יודע. צעד נוסף אחרי, כל אחד יודע שכל אחד יודע, וכך הלאה. זה נקרא ידיעה משותפת.

23.2 משחקים

23.2.1 משחק ללא שם

נסתכל על המשחק הבא ב3 שחקנים:

Third player: L

	L	R
T	$(0,1,3)$	$(0,0,0)$
B	$(1,1,1)$	$(1,0,0)$

Third player: C

	L	R
T	$(2,2,2)$	$(0,0,0)$
B	$(2,2,0)$	$(2,2,2)$

Third player: R

	L	R
T	$(0,1,0)$	$(0,0,0)$
B	$(1,1,1)$	$(1,0,3)$

אם שחקנים $1,2$ מחליטים על T,L בהסתברות $\frac{1}{2}$ או B,R בהתסברות $\frac{1}{2}$ ולא מגלים את תוצאות ההגרלה לשחקן 3, אז מנגנון התיאום הזה הופך את $(2,2,2)$ לש"מ. שיווי המשקל המתואם הזה נותן תוצאה טובה יותר מהש"מ נאש.

23.2.2 הערות על המשפטים הקשורים למשפט נאש

1. משפט נקודת השבת של בראוור לא נותן דרך יעילה למציאת נקודת השבת, וכלל לא בטוח שיש כזו.
2. במימד אחד משפט ערך הביניים מתקיים גם לסוג מסויים של פונקציות שאינן רציפות - נגזרות של פונקציות גזירות (משפט דארבו).
3. ההוכחה הראשונה של נאש השתמשה במשפט קקוטני.

משפט 23.1 משפט ערך הביניים
אם $g(x)=f(x)-x$ מקיימת $g(a)>0,\ g(b)<0$ אז יש נקודה כך ש:

$$g(x)=f(x)-x=0$$
$$\Downarrow$$
$$f(x)=x$$

משפט 23.2 משפט קקוטני
נניח $K\subseteq\mathbb{R}^{n}$ קמורה וקומפקטית, אז אם F מתאימה לכל $x\in K$ קבוצה $F\left(x\right)$ עם התכונות:

1. $F\left(x\right)$ קמורה וקומפקטית לכל x.
2. הגרף של $F\left(x\right)$ הוא סגור (כלומר $\left\{ \left(x,y\right)\mid y\in F\left(x\right)\right\}$ זו קבוצה סגורה).

אז קיים x כך ש-$x\in F\left(x\right)$.

הוכחה: נראה סקיצת הוכחה למשפט נאש באמצעות משפט קקוטני. נביט על משחק עם r שחקנים, כשלשחקן i יש n_{i} אסטרטגיות. נסמן ב-$\Delta_{n_{i}}$ את סימפלקס האסטרטגיות המעורבות של שחקן i. נשים לב שהקבוצה $K:=\Pi_{i}\Delta_{n_{i}}$ היא קמורה וקומפקטית. תהי אסטרטגיה $x=\left(x_{1},\cdots,x_{r}\right)\in K$. נסתכל על מכפלת התשובות האופטימליות של השחקנים לאסטרטגיות של כל השאר: $A:=\Pi_{i}A_{i}$. אז להעתקה $x\rightarrow A$ יש נקודת שבת על פי משפט קקוטני. ■

24 תרגול 8

24.1 משפט נאש

הגדרה 24.1 משחק סופי
משחק יקרא משחק סופי אם לכל שחקן יש מס' סופי של אסטרטגיות טהורות.

הגדרה 24.2 משחק סופי בשני שחקנים
נקרא לשחקנים $1,2$. נניח לשחקן 1 יש n אסטרטגיות טהורות, ול-2 יש m. נסמן ב-Δ_{n} את אוסף האסטרטגיות המעורבות של שחקן 1, וב-Δ_{m} את של שחקן 2. נסמן ב-u_{1},u_{2} את פונקציות הרווח שלהם.

הגדרה 24.3 פונקציה משפרת אסטרטגיות
נקרא ל-F המוגדרת באופן הבא פונקציה משפרת אסטרטגיות:

$$\begin{aligned}F:\Delta_{n}\times\Delta_{m} & \rightarrow\Delta_{n}\times\Delta_{m}\\
F\left(x,y\right) & =\left(\overline{x},\overline{y}\right)\\
 & s.t.\\
 & \overline{x_{i}}:=\frac{x_{i}+\max\left\{ u_{1}\left(e_{i}-x,y\right),0\right\} }{1+\sum_{k=1}^{n}\max\left\{ u_{1}\left(e_{k}-x,y\right),0\right\} }\\
 & \overline{y_{i}}:=\frac{y_{i}+\max\left\{ u_{2}\left(x,e_{i}-y\right),0\right\} }{1+\sum_{k=1}^{m}\max\left\{ u_{2}\left(x,e_{k}-y\right),0\right\} }\\
u_{1}\left(e_{i}-x,y\right) & :=u_{1}\left(e_{i},y\right)-u_{1}\left(x,y\right)\\
u_{2}\left(x,e_{i}-y\right) & :=u_{2}\left(x,e_{i}\right)-u_{2}\left(x,y\right)
\end{aligned}$$

הערה 24.4 F מקבלת התפלגות על אסטרטגיות, ומעבירה יותר "משקל" לאסטרטגיות המניבות תועלת גבוהה יותר.

טענה 24.5 אם $\left(x,y\right)\in\Delta_{n}\times\Delta_{m}$ נקודת שבת של הפונקציה משפרת האסטרטגיות, אז $\left(x,y\right)$ היא נקודת שיווי משקל.

הוכחה: כיוון ש(x,y) היא נקודת שבת אז:

$$\begin{gathered}\forall i\in[n]:x_i=\overline{x_i}\\ \forall i\in[m]:y_i=\overline{y_i}\\ \Downarrow\\ \forall i:\ \max\left\{u_1\left(e_i-x,y\right),0\right\}=0\\ \forall i:\ \max\left\{u_2\left(x,e_i-y\right),0\right\}=0\\ \Downarrow\\ \forall i:\ u_1\left(e_i,y\right)\le u_1\left(x,y\right)\\ \forall i:\ u_2\left(x,e_i\right)\le u_2\left(x,y\right)\end{gathered}$$

u_1,u_2 מלינאריות ומכך שכל $x'\in\Delta_n,y'\in\Delta_m$ הם צירופים קמורים של הבסיסים הסטנדרטיים של האסטרטגיות הטהורות של שחקנים 1,2, נקבל ש:

$$\begin{gathered}\forall x'\in\Delta_n:u_1\left(x',y\right)\le u_1\left(x,y\right)\\ \forall y'\in\Delta_m:u_2\left(x,y'\right)\le u_2\left(x,y\right)\end{gathered}$$

ולכן (x,y) היא נקודת שיווי משקל. ■

משפט 24.6 משפט נאש
יש שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות בכל משחק סופי.

הוכחה: ראינו בתרגיל שΔ_m,Δ_n הן קומפקטיות וקמורות, ולכן $\Delta_n\times\Delta_m$ היא קבוצה קומפקטית וקמורה בתור מכפלה של קבוצות קומפקטיות וקמורות. נשים לב שF רציפה על כל אחת מהן בנפרד (בתור הרכבה של פונקציות רציפות $u_1,u_2,\max,+,$) ולכן גם על המכפלה. אם כך, אז לפי משפט נקודת השבת קיימת לF נקודת שבת, נסמנה ב(x,y). לפי הטענה, הנקודה הזו היא נקודת שיווי משקל, וסיימנו. ■

25 תרגיל 8

25.1 נקודת שבת

טענה 25.1 כל התנאים במשפט נקודת השבת של בראור (קומפקטיות, קימרות ורציפות) הם הכרחיים.

הגדרה 25.2 קבוצות הומיאומורפיות
נגיד שA הומיאומורפית לK אס"ם קיימת פונקציה $f:\ K\to A$ רציפה עם הופכית $f^{-1}:\ A\to K$ רציפה.

טענה 25.3 תהא $K\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה קמורה וקומפקטית, ותהא A קבוצה הומיאומורפית לK, אז לכל פונקציה רציפה $g:\ A\to A$ יש נקודת שבת.

מסקנה 25.4 הכדור המלא:

$$B\left(0,1\right)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \sqrt{x^2+y^2}\le 1\right\}$$

לא הומיאומורפי למעגל:

$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \sqrt{x^2+y^2}=1\right\}$$

26 שיעור 9

26.1 שידוכים

26.1.1 הגדרות

הגדרה 26.1 בעיית השידוך
נתונות שתי קבוצות: קבוצת הבנים A, וקבוצת הבנות B.
לכל בן a יש סדר עדיפויות $<_a$ על הבנות, ולכל בת b יש סדר עדיפויות $<_b$ על הבנים.
רוצים לשדך ביניהם כך שאף אחד לא יהיה לא מרוצה.

הגדרה 26.2 שידוך
פונקציה חח"ע ועל $f:\ A\to B$. לכל $a\in A$, נאמר שa שודך ל$f\left(a\right)$.

הגדרה 26.3 שידוך לא יציב
בהינתן שידוך f בין חברי הקבוצות, הזוג $a\in A,\ b\in B$ מערער על השידוך אם הם מעדיפים אחד את השני על פני בני הזוג אליהם הם שודכו:

$$f^{-1}\left(b\right)<_b a,\ f\left(a\right)<_a b$$

הגדרה 26.4 שידוך יציב
שידוך שאינו לא יציב.

26.1.2 אלגוריתם גייל שפלי

אלגוריתם 1 גייל שפלי

קלט: A ־ רשימת בנים.

לכל $a \in A$: $<_a$ ־ יחס סדר על הבנות עבור הבן a.

B ־ רשימת בנות.

לכל $b \in B$: $<_b$ ־ יחס סדר על הבנים עבור הבת b.

נניח $|A| = |B|$.

פלט: שידוך $f: A \to B$.

1. לכל $a \in A$: ניצור עבור a רשימת העדפה שפשוט תיהיה ייצוג של $<_a$: הבת המועדפת תיהיה במקום הראשון, השניה המועדפת תיהיה במקום השני, וכו'.
2. נפעל בצורה איטרטיבית עד שלא יוותרו יותר בנים עם רשימת העדפה שאינה ריקה:
   (א) כל בן a מציע נישואים לבת המועדפת עליו לפי יחס הסדר $<_a$.
   (ב) כל בת b שומרת את ההצעה הכי טובה עבורה לפי יחס הסדר $<_b$, ודוחה את השאר.
   (ג) כל בן a מוחק מיחס הסדר שלו את הבת שדחתה אותו.
3. נחזיר את f שלכל גבר $a \in A$ מחזירה את אשתו $b \in A$ כפי שנבחרה לפי התהליך.

טענה 26.5 אלגוריתם גייל שפלי נעצר.

הוכחה: נשים לב שמס' הבנים סופי ־ n, ושכל בן יכול להדחות מס' סופי של פעמים עד שנגמרת הרשימה שלו ־ n. אם כך, האלגוריתם נעצר לאחר n^2 צעדים לכל היותר. ■

טענה 26.6 כשהאלגוריתם נעצר כולם נשואים.

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת בת $b \in B$ לא נשואה. כלומר, בסוף התהליך לא הייתה לה אף הצעה. אם כך, כיוון ש$|B| = |A|$ ונישואים מוגדרים בין בן יחיד לבת יחידה, אז קיים גם בן $a \in A$ לא נשוי (נשים לב שמהשיקול הזה היינו גם יכולים להתחיל מההנחה בשלילה שקיים $a \in A$ לא נשוי).

נשים לב שמהגדרת $<_a$ בתור יחס סדר על כל הבנות, ומהגדרת האלגוריתם, אז בהכרח a הציע לb בשלב כלשהו. כיוון שהם אינם נשואים כעת, אז הצעתו נדחתה לטובת בן $c \in A$ כלשהו, ולכן מההגדרה מתקיים $a <_b c$. נסמן בc' את הבן האחרון אותו b הסכימה לקבל. אם כך, לפי יחס הסדר ולפי הגדרת האלגוריתם נקבל: $a <_b c <_b \cdots <_b c'$.

נשים לב שמהגדרת האלגוריתם, כאשר c' הציע נישואים לb היא הייתה הבת המועדפת עליו מבין כל הבנות שהוא עדיין לא הציע להן נישואין, ולכן הוא כעת לא יציע יותר לאף אחת עד שb תדחה אותו לטובת בן אחר, דבר שהיא לא עושה (מההנחה זהו הבן האחרון שהיא הסכימה לקבל). נשים לב שבשלב זה, b תשאר בהכרח נשואה לc', והגענו לסתירה. ■

טענה 26.7 האלגוריתם מסתיים לאחר כמות סופית של צעדים.

הוכחה: אם האלגוריתם לא הסתיים, אז יש בת ולה לפחות 2 הצעות. לכן, הבת תדחה לפחות הצעה אחת. לכן, בכל שלב יש בן שנדחה. מעקרון שובך היונים, אחרי מספיק שלבים (לכל היותר n^2), יש בן שנדחה $n-1$ פעמים. הבן הציע נישואין ל$n-1$ בנות שונות ונדחה, ואז הציע נישואין לבת הn. אם הבן נדחה ע"י בת, אז לבת הייתה הצעה טובה יותר. לכן, לכל בת יש לפחות הצעה אחת. אבל כמות הבנים שווה לכמות הבנות, לכן לכל בת יש בדיוק הצעה אחת והתהליך מסתיים. ■

טענה 26.8 השידוך המתקבל מהאלגוריתם הוא יציב.

הוכחה: נניח בשלילה שלא, אז בסיום האלגוריתם קיים בן $a \in A$ ובת $b \in B$ כך שa, b מעדיפים זה את זו על פני בני זוגם הנוכחיים: $f\left(a\right) <_a b,\ f^{-1}\left(b\right) <_b a$. כיוון ש$a$ מעדיף את b על פני בת זוגו, אז לפי האלגוריתם a הציע נישואין לb לפני שהוא הציע ל$f\left(a\right)$. מכך שa לא משודך לb, נסיק כי b דחתה את a ולכן לb הייתה הצעה טובה יותר מa. לכן, בסוף התהליך לb תהיה הצעה טובה יותר מa. לכן, לא יתכן שb מעדיפה את a על פני בן זוגה, והגענו לסתירה. ■

משפט 26.9 אלגוריתם גייל שפלי מציע את הזיווג היציב הטוב ביותר לכל הבנים.

כלומר, לכל $a \in A$ ולכל שידוך יציב $f:\ A \to B$ מתקיים: אם נסמן בb את בת זוגו של a בתהליך גייל שפלי, אז או ש$f\left(a\right) = b$ או $f\left(a\right) <_a b$.

הוכחה: נניח בשלילה שלא. אז היה $x \in A$ ושידוך יציב f כך שx מעדיף את $f\left(x\right)$ על פני בת זוגו מגייל שאפלי, לכן לפי גייל שאפלי x יציע ל$f\left(x\right)$ לפני שהוא יציע לבת זוגו מגייל שאפלי, ולכן נקבל שבתהליך גייל שאפלי x נדחה על ידי $f\left(x\right)$. אם כך, אז אוסף הבנים שנדחו על ידי בנות זוגם לפי f לא ריק, כלומר יש בן שנדחה ראשון, נניח $a \in A$. אם הוא נדחה, אז $f\left(a\right)$ דחתה אותו עבור הצעה טובה יותר, נניח ע"י a'. כיוון שa הראשון שנדחה על ידי בת זוגו לפי f, אז לפני שa' הציע ל$f\left(a\right)$ הוא לא נדחה על ידי $f\left(a'\right)$. מכאן, הוא הציע ל$f\left(a\right)$ לפני שהוא הציע ל$f\left(a'\right)$, ולכן לפי האלגוריתם מתקיים: $f\left(a'\right) <_{a'} f\left(a\right)$. סה"כ קיבלנו:

$$f\left(a'\right) <_{a'} f\left(a\right)$$
$$a <_{f(a)} a'$$

כלומר, a' מעדיף את $f\left(a\right)$ על פני זוגתו $f\left(a'\right)$, ו$f\left(a\right)$ מעדיפה את a' על פני בן זוגה a, כלומר f אינו יציב, סתירה. ■

משפט 26.10 אלגוריתם גייל שאפלי הוא הגרוע ביותר עבור כל הבנות.

כלומר, לכל $b \in B$ ולכל שידוך יציב f, b מעדיפה את $f^{-1}\left(b\right)$ על פני בן זוגה מגייל שאפלי.

הוכחה: נניח בשלילה שלא, ונסמן בa את בן זוגה של b מגייל שאפלי. מההנחה, יש זיווג יציב f שנותן $f^{-1}\left(b\right)$ שפחות עדיף על a. הראינו שגייל שאפלי הוא הטוב ביותר לבנים, לכן a מעדיף את b על פני בת זוגו $f\left(a\right)$, ובנוסף b מעדיפה את a על פני $f^{-1}\left(b\right)$, בסתירה לכך שf יציב. ■

מסקנה 26.11 אם נפעיל את גייל שאפלי בצורה הפוכה (הבנות מחזרות אחרי הבנים), נקבל שידוך יציב נוסף שהוא הטוב ביותר עבור כל הבנות והגרוע ביותר עבור כל הבנים. אם זהו אותו שידוך כמו בהפעלת גייל שאפלי על הבנים (בנים מחזרים אחרי בנות), אז זהו השידוך הטוב ביותר גם עבור כל הבנים וגם עבור כל הבנות, ולכן יש שידוך יציב אחד בלבד. (הוכחה פשוטה - נסמן את השידוך של גייל שאפלי בf. מניחים בשלילה שקיים שידוך יציב נוסף f', אבל כיוון שהוא שונה מf אז יש בו לפחות זוג אחד שלא קיים בשידוך f. אבל כיוון שf הוא האופטימלי, אז אותו הזוג מעדיף שידוכים אחרים, בסתירה ליציבות של f').

26.1.3 משפט החתונה של Hall

הבעיה: אם יש n נשים וn גברים, כשיחס ההיכרות ביניהם הוא סימטרי (אם אישה מכירה גבר אז הוא מכיר אותה, ולהפך). האם אפשר להתאים בין הגברים לנשים כך שכל גבר יותאם לאישה שהוא מכיר?

הגדרה 26.12 גרף דו צדדי

גרף $G = \left(V, E\right)$ יקרא דו צדדי אם אפשר לחלק את הקודקודים V לשתי קבוצות זרות: V_1, V_2 כך שכל צלע היא בין V_1 לV_2 (אין צלעות בתוך V_1 או בתוך V_2). ניתן לסמן את הגרף באופן הבא: $G = \left(V_1, V_2, E\right)$.

הערה 26.13 בהקשר של בעיית החתונה, ניתן להתאים לכל בעיה גרף דו צדדי כך שV_1 הם הגברים, V_2הם הנשים, ו$e=(v_1,v_2)\in E$ אם v_1 מכיר את v_2.

הגדרה 26.14 זיווג

בהינתן גרף דו צדדי $G=(V_1,V_2,E)$ עם $|V_1|=|V_2|=n$, נגדיר זיווג להיות פונקציה חח"ע $\lambda:\ V_1\to V_2$.
זיווג יקרא מושלם אם $\forall v_1\in V_1:\ (v_1,\lambda(v_1))\in E$.

הגדרה 26.15 תכונת Hall

נאמר שגרף דו צדדי $G=(V_1,V_2,E)$ מקיים את תכונת Hall אם לכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $|S|\leq|\Gamma_G(S)|$ כש$\Gamma_G(S)$ היא קבוצת השכנים של S בגרף G:

$$\Gamma_G(S)=\{v_2\in V_2\mid \exists s\in S\ s.t.\ (s,v_2)\in E\}$$

משפט 26.16 בגרף דו"צ G עם $|V_1|=|V_2|=n$ יש זיווג מושלם אם"ם G מקיים את תכונת Hall.

הוכחה: נוכיח כל כיוון בנפרד.

כיוון $\Leftarrow$:

נניח שיש בגרף זיווג מושלם, כלומר יש $\lambda:\ V_1\to V_2$ חח"ע ועל כך ש:

$$\forall v_1\in V_1:\ (v_1,\lambda(v_1))\in E$$

תהי $S\subseteq V_1$. כיוון שλ הוא זיווג מושלם, התמונה של λ נמצאת ב$\Gamma_G(S)$:

$$\lambda|_S:\ S\to\Gamma_G(S)$$

כיוון ש$\lambda|_S$ היא חח"ע נקבל ש$|\Gamma_G(S)|\leq|S|$. הראנו זאת לS כללית, ולכן G מקיים את תכונת Hall.

כיוון $\Rightarrow$:

נניח שG מקיים את תכונת Hall, כלומר לכל $S\subseteq V_1$ מתקיים $|S|\leq\Gamma_G(S)$. נוכיח שקיים זיווג מושלם באינדוקציה על n:

בסיס: אם $n=1$ אז $V_1=\{v_1\},\ V_2=\{v_2\}$. מההנחה, עבור $S=V_1=\{v_1\}$ מתקיים:

$$1=|S|\leq|\Gamma_G(S)|$$

כלומר, לv_1 יש לפחות שכן אחד. השכן היחיד האפשרי הוא v_2. אם כך, ניתן להגדיר זיווג λ באופן הבא:

$$\lambda(v_1)=v_2$$

נשים לב שהוא זיווג מושלם.

צעד: נניח נכונות עבור גרפים $G' = (V_1', V_2', E')$ עם $|V_1'| = |V_2'| \leq n$ ונוכיח עבור גרפים $G = (V_1, V_2, E)$ עם $|V_1| = |V_2| = n+1$. נניח שG מקיים את תכונת Hall. נשים לב שיש שתי אפשרויות (כמו בהוכחה הקודמת של המשפט):

1. קיים $S \subset V_1$ כך ש$|S| = |\Gamma_G(S)|$.
2. לכל $S \subset V_1$ מתקיים $|S| \leq |\Gamma_G(S)| - 1$.

נניח שתכונה 2 מתקיימת

תהי קבוצה $S \subset V_1$. אז יש קודקוד $x \in S$ עם לפחות 2 שכנים y_1, y_2. נוריד מG את x, y_1 ואת כל הצלעות ביניהם ונקבל גרף $G' = (V_1', V_2', E')$. נשים לב שG' מכיל n קודקודים. נראה שהוא מקיים את תכונת Hall: יהי $S \subseteq V_1'$, אז:

$$\Gamma_{G'}(S) = \Gamma_G(S) \setminus \{y_1\}$$
$$\Downarrow$$
$$|\Gamma_{G'}(S)| \geq |\Gamma_G(S)| - 1 \overset{\text{assumption 2}}{\geq} |S|$$

זהו S כללי ולכן הראנו שG' מקיים את תכונת Hall. אם כך, אז מהנחת האינדוקציה יש זיווג מושלם בG', נסמנו בλ. נשים לב שמהגדרת G' נקבל:

$$\lambda : \; V_1 \setminus \{x\} \to V_2 \setminus \{y_1\}$$

נרחיב את λ על ידי $\lambda(x) = y_1$ ונקבל זיווג מושלם עבור G.

נניח שתכונה 1 מתקיימת

אז קיים $S \subset V_1$ כך ש$|S| = |\Gamma_G(S)|$. נסתכל על תת הגרף הנוצר על ידי $S, \Gamma_G(S)$ ונשים לב שהוא מקיים את תכונת Hall ולכן לפי הנחת האינדוקציה יש בו זיווג מושלם ונסמנו בλ. נשים לב ש: $\lambda : \; S \to \Gamma_G(S)$.
נתבונן ב$G' = (V_1', V_2', E')$ המתקבל מG על ידי הורדת $S, \Gamma_G(S)$ וכל הצלעות הרלוונטיות ונראה שהוא מקיים את תכונת Hall: יהי $T \subseteq V_1'$. נשים לב שT, S זרים ולכן $|T \cup S| = |T| + |S|$. כיוון שG מקיים את תכונת Hall נקבל:

$$|T| + |S| = |T \cup S| \overset{\text{G has Hall's property}}{\leq} |\Gamma_G(T \cup S)| = |\Gamma_G(T) \cup \Gamma_G(S)| = |\Gamma_G(T)| + |\Gamma_G(S)| - |\Gamma_G(T) \cap \Gamma_G(S)|$$
$$|S| \overset{\text{G has Hall's property}}{\leq} |\Gamma_G(S)|$$
$$\Downarrow$$
$$|T| \leq |\Gamma_G(T)| - |\Gamma_G(T) \cap \Gamma_G(S)| = |\Gamma_{G'}(T)|$$

הוכחנו זאת עבור T כללי ולכן G' מקיים את תכונת Hall. אם כך, לפי הנחת האינדוקציה יש בו זיווג מושלם, נסמנו בλ'. נשים לב ש: $\lambda' : \; V_1' = V_1 \setminus S \to V_2' = V_2 \setminus \Gamma_G(S)$. כלומר, הזיווג זר לחלוטין לλ ולכן ניתן לאחד ביניהם, ונקבל זיווג מושלם לG. ■

27 תרגול 9

לא התקיים (שבועות).

28 תרגיל 9

28.1 אסטרטגיות שולטות

טענה 28.1 בהינתן משחק אסטרטגי בשני שחקנים, ואסטרטגיות $i, i' \in \Sigma_j$ כך ש־i שולטת חזק על i', אזי בשיווי משקל שחקן j בוחר את i' בהסתברות 0.

29 שיעור 10

29.1 שידוכים

29.1.1 השמה בחדרים

במקרה זה אנו רוצים לשכן כל 2 משתתפים בחדר אחד. נסתכל על רשימת העדפות לדוגמה:

ראובן	שמעון	לוי	דן
שמעון	לוי	ראובן	ראובן
לוי	ראובן	שמעון	שמעון
דן	דן	דן	לוי

אלגוריתם גייל שאפלי לא מתאים למקרה זה כיוון שאין בו שידוך יציב.

29.1.2 שידוכים בשלושה מינים

נניח נתונות לנו 3 קבוצות זרות שצריך להתאים מהן שלשות, למשל גברים שמעדיפים נשים שמעדיפות כלבים שמעדיפים נשים. במקרה הזה אין הוכחה לקיום שידוך יציב, אך גם אין דוגמה נגדית.

29.2 משחקים שיתופיים עם תשלומי צד

29.2.1 הגדרות

הגדרה 29.1 משחקים שיתופיים עם תשלומי צד
יש קבוצה $N = [n]$ של שחקנים.
לכל $\emptyset \neq S \subset N$ (קואליציה) יש פונקציית תשלום

$$v: \text{ (non empty subset of S)} \Rightarrow \mathbb{R}_+$$

שאומרת כמה השחקנים ב־S יכולים לקבל ביחד אם הם מתאגדים. נגדיר $v(\emptyset) = 0$.

הגדרה 29.2 מבנה קואלציוני
במשחקים שיתופיים עם תשלומי צד נוצר מבנה קואליציוני - $(S_1, \cdots, S_k)$, אוסף של קואליציות כך ש:

$$\cup_{i=1}^{k} S_k = N$$
$$\forall i \neq j : S_i \cap S_j = \emptyset$$

בנוסף מוגדר וקטור תשלומים לכל השחקנים $(x_1,\cdots,x_n)$שמקיים:

$$\forall j\in[k]:\ \sum_{i\in S_j}x_i=v\left(S_j\right)$$

הערה 29.3 כל קואליציה S שתתקבל תחלק את $v\left(S\right)$ בין השחקנים בS.

הערה 29.4 הרבה פעמים מניחים שנוצרת קואליציה אחת של כל השחקנים.

הגדרה 29.5 משחק פשוט
משחק יקרא פשוט אם מתקיים $v\left(S\right)=0$ או $v\left(S\right)=1$ לכל $S\subset N$. אם קואליציה S מקיימת $v\left(S\right)=1$ אז היא תקרא קואליציה מנצחת, ואם $v\left(S\right)=0$ היא תקרא קואליציה מפסידה.

הגדרה 29.6 משחק מונוטוני
משחק יקרא מונוטוני אם לכל S,T כך ש$S\subset T$ מתקיים $v\left(S\right)\leq v\left(T\right)$.

הגדרה 29.7 משחק בחירות
משחק בחירות הוא משחק פשוט ומונוטוני המקיים $v\left(S\right)+v\left(N\setminus S\right)=1$. כלומר - רק קואליציה אחת מנצחת.

הגדרה 29.8 משחק הרוב
משחק שבו $|n|$ אי זוגי, ומתקיים $v\left(S\right)=1$ אם"ם $|S|>\frac{n}{2}$.

דוגמא למשחק שיתופי בלי תשלומי צד

$$v\left(\emptyset\right)=v\left(\{1\}\right)=v\left(\{2\}\right)=0$$
$$v\left(\{1,2\}\right)=10$$

דוגמא למשחק שיתופי עם תשלומי צד

לא ברור במיוחד.

29.2.2 קואליציה

הגדרה 29.9 קואליציה
קבוצה של שחקנים S כך שהשחקנים מחלקים ביניהם את $v\left(S\right)$.

הערה 29.10 נניח שהקואליציה שתווצר היא של כל השחקנים. כיצד צריכים השחקנים לחלק ביניהם את $v\left(N\right)$?
הצעות לדרכי מחשבה:

1. להבין מהם שיוויי המשקל - מצבים שבהם לשום שחקן לא משתלם לסטות. במקרה זה כל חלוקה של $v\left(N\right)$ היא ש"מ, כי כל פרישה של שחקן מהקואליציה תביא אותו לרווח אפס.
2. שיווי משקל מורחב - מצבים בהם אין קואליציה שיכולה להיטיב את מצבם של כל שחקני הקואליציה.

הגדרה 29.11 ליבה
(הגדרה משיעור 11) בהינתן מבנה קואליציוני $B=(S_1,\cdots,S_k)$ ווקטור תשלומים $x=(x_1,\cdots,x_n)$ כך ש:

$$\forall i\in[k]:\ x(S_i)=\sum_{j\in S_i}x_j=v(S_i)$$

אז x נמצא בליבה אם לא קיימת קואליציה $S\subset N$ ווקטור תשלומים $y=(y_i\mid i\in S)$ המקיים $y(S)=v(S)$ כך ש:

$$\forall i\in S:\ y_i>x_i$$

הערה 29.12 נשים לב שזה קונספט יותר חזק מש"מ נאש - בש"מ נאש לא משתלם לשחקן אחד לסטות, וכאן לא משתלם לקבוצה "לסטות", כלומר - להקים קואליציה אחרת עם תשלומים אחרים.

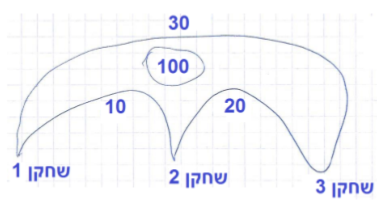
הגדרה 29.13 ליבה
(הגדרה משיעור 10) בהינתן מבנה קואליציוני B ווקטור תשלומי x אז x בליבה אם:

1. $\sum_{i=1}^{n}x_i=v(N)$
2. $\forall S\in B:\ x(S)\geq v(S)$

דוגמה

נסתכל על המשחק הבא (תודה לליאור מור על התמונה):

איור 6: משחק לדוגמה



נשים לב שהוא מונוטוני. הליבה במשחק זה מקיימת:

$$\begin{aligned}x_1+x_2+x_3&=100\\x_1+x_2&\geq10\\x_1+x_3&\geq30\\x_2+x_3&\geq20\end{aligned}$$

נשים לב שהכרח הליבה לא ריקה כיוון שהנקודה $x_1=x_2=x_3=33\frac{1}{3}$ נמצאת בליבה.

דוגמה

האם במשחק מונוטוני הליבה תמיד לא ריקה? לא, נסתכל על:

$$\begin{aligned} v(1,2)=v(2,3)=v(1,3)&=30\\ v(1,2,3)&=40\\ &\Downarrow\\ x_1+x_2&\geq 30\\ x_2+x_3&\geq 30\\ x_1+x_3&\geq 30\\ x_1+x_2+x_3&\geq 40\\ &\Downarrow \text{the first three equations give us}\\ x_1+x_2+x_3&\geq 45\\ &\Downarrow\\ &\text{the core is empty} \end{aligned}$$

29.2.3 קבוצת מיקוח

הגדרה 29.14 ערעור

נניח ש$(x_1,\cdots,x_n)$תשלומים לשחקנים כך ש$\sum_{i=1}^{n}x_i=v(N)$. ערעור של שחקן i נגד שחקן j זו קואליציה S ותשלומים עבור חברי הקואליציה $y_i\ :\ \forall i\in S$ כך שמתקיים

$$\begin{aligned} \sum_{k\in S}y_k&=v(S)\\ \forall l\in S:y_l&\geq x_l\\ \forall l\notin S:y_l&>x_l \end{aligned}$$

הגדרה 29.15 ערעור נגדי

ערעור נגדי של j נגד i זו קואליציה חדשה T ותשלומים $z_k\ :\ k\in T$ כך ש:

$$\begin{aligned} j&\in T\\ i&\notin T\\ \sum_{k\in T}z_k&=v(T)\\ \forall l\in S\cap T:z_l&\geq x_l\\ \forall l\in T:z_l&\geq x_l\\ \forall l\notin T:z_l&\geq x_l \end{aligned}$$

הערה 29.16 אם $\vec{x}$ בליבה, אז אין ערעורים.

הגדרה 29.17 קבוצת מיקוח
אוסף כל התשלומים שבהם לכל ערעור יש ערעור נגדי.

משפט 29.18 קבוצת המיקוח לא ריקה.

29.2.4 הקואליציה של שמיידלר

הגדרה 29.19 עודף של קואליציה
לכל קואליציה S ווקטור תשלומים $\vec{x}$ נגדיר:

$$x\left(S\right)=\sum_{i\in S}x_i$$
$$e\left(S,\vec{x}\right)=v\left(S\right)-x\left(S\right)$$

ונקרא ל$e\left(S,x\right)$ את העודף של קואליציה S.

טענה 29.20 $\vec{x}$ בליבה אם $\forall S\subseteq N:\ e\left(S,\vec{x}\right)\leq 0$.

הערה 29.21 ננסה למצוא $\vec{x}$ כך שהעודפים $e\left(S,\vec{x}\right)$ קטנים ככל האפשר.
אלגוריתם חמדני להקטין את העודף ־ ראשית, ננסה להקטין את העודף המקסימלי, אחר כך את השני בגודלו, וכו'.

הגדרה 29.22 גרעינון
הנקודה שנותנת מינימום לקסיקוגרפי של וקטור עודפים (מסודר באופן לא עולה) נקראת הגרעינון.

משפט 29.23 המשפט של שמיידלר

1. הגרעינון תמיד לא ריק
2. הגרעינון כולל בדיוק נקודה אחת
3. הגרעינון נמצא בגרעין, והגרעין נמצא בקבוצת המיקוח.

29.2.5 משחק המיקוח של נאש

הגדרה 29.24 משחק המיקוח של נאש

1. משחק ב2 שחקנים.
2. K קבוצה קמורה.
3. על שני השחקנים להסכים על נקודה $\left(x,y\right)\in K$. אם הם מצליחים, שחקן 1 מקבל x ושחקן 2 מקבל y. אחרת, הם מקבלים 0.

הגדרה 29.25 פארטו־יעילות
"כדאי לבחור נקודה שאי אפשר לשפר אותה"
אם $\left(x_1,y_1\right)\in K$ וגם $\left(x_2,y_2\right)\neq\left(x_1,y_1\right)$מקיים $x_2\geq x_1,\ y_2\geq y_1$ אז לא נבחר את $\left(x_1,y_1\right)$.

הערה 29.26 נאש הבחין שאם יש סימטריה בין השחקנים, אז תיהיה סימטריה בפתרון.
למשל, אם המשחק כולל את התנאי $x+y\leq 1$, אז הפתרון המומלץ יהיה $x=\frac{1}{2}=y$.

30 תרגול 10

תרגול חזרה.

31 תרגיל 10

31.1 אסטרטגיות שולטות

הגדרה 31.1 אסטרטגיה טהורה נשלטת חזק על ידי צירוף קמור של אסטרטגיות
בהינתן משחק אסטרטגי בשני שחקנים, ואסטרטגיות טהורות $i, j, k \in \Sigma_j$, נאמר שצירוף קמור של j, k שולט חזק על i אם קיים $\lambda \in [0,1]$ כך שלכל $\sigma \in \Sigma_2$ מתקיים:

$$u_1(i,\sigma) < \lambda u_1(j,\sigma) + (1-\lambda) u_1(k,\sigma)$$

הגדרה 31.2 אסטרטגיה טהורה נשלטת חלש על ידי צירוף קמור של אסטרטגיות
זהה להגדרה קודמת, רק עם $\leq$ במקום $<$.

טענה 31.3 בהינתן משחק אסטרטגי בשני שחקנים, ואסטרטגיות טהורות $i, j, k \in \Sigma_j$ כך שצירוף קמור של j, k שולט חזק על i אז בשיווי משקל באסטרטגיות מעורבות שחקן 1 משחק i בהסתברות 0.

32 שיעור 11

32.1 משחקים שיתופיים עם תשלומי צד

32.1.1 זיווג בתור משחק שיתופי

בעיית הזיווג היא משחק שיתופי שבו n גברים וn נשים, ולכל קואליציה T של גברים ונשים התוצאות האפשריות הן זיווג בין חלק מהגברים בT וחלק מהנשים בT. במשחק, $v(T)$ הינו מס' ממשי אלא קבוצת תוצאות. עבור הקואליציה המלאה של כל הנשים וכל הגברים, זיווג הוא בליבה אם לאף קבוצה של גברים ונשים לא כדאי לסטות ממנו. זה שקול לכך שלא יהיו גבר ואישה שאינם מזווגים שעדיף להם ליצור זיווג.

משפט 32.1 משפט גייל שאפלי
לכל יחסי העדפה של גברים ונשים הליבה אינה ריקה.

32.1.2 דוגמה למשחק

נניח יש 3 שחקנים: $1, 2, 3$. נניח v מוגדר על:

$$v(\{1,2,3\}), v(\{1,2\}), v(\{2,3\}), v(\{1,3\}), v(\{1\}), v(\{2\}), v(\{3\})$$

וקטור תשלומים $\vec{x}$ מקיים:

$$\sum_{i=1}^{3} x_i = v(\{1,2,3\})$$

ואם הוא בליבה הוא יקיים:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geq v\left(\{1,2\}\right) \\ x_1 + x_3 &\geq v\left(\{1,3\}\right) \\ x_2 + x_3 &\geq v\left(\{2,3\}\right) \\ x_1 &\geq v\left(\{1\}\right) \\ x_2 &\geq v\left(\{2\}\right) \\ x_3 &\geq v\left(\{3\}\right) \end{aligned}$$

תנאי הכרחי ומספיק לליבה לא ריקה הוא:

$$\begin{aligned} v\left(\{1,2,3\}\right) &\geq v\left(\{1,2\}\right) + v\left(\{3\}\right) \\ v\left(\{1,2,3\}\right) &\geq v\left(\{1,3\}\right) + v\left(\{2\}\right) \\ v\left(\{1,2,3\}\right) &\geq v\left(\{2,3\}\right) + v\left(\{1\}\right) \\ v\left(\{1,2,3\}\right) &\geq v\left(\{1\}\right) + v\left(\{2\}\right) + v\left(\{3\}\right) \\ 2v\left(\{1,2,3\}\right) &\geq v\left(\{1,2\}\right) + v\left(\{2,3\}\right) + v\left(\{1,3\}\right) \end{aligned}$$

מדוע 3 התנאים הראשונים הכרחיים?
נניח $v\left(\{1,2,3\}\right) < v\left(\{1,2\}\right) + v\left(\{3\}\right)$, אז או ל$1,2$ או ל3 משתלם לפרוש מהקואליציה.
התנאי הרביעי הכרחי כי אחרת שחקן כלשהו יעדיף להיות לבד.
התנאי החמישי נובע מכך שאם $\vec{x}$ שייך לליבה אז:

$$\forall i,j:\ x_i + x_j \geq v\left(\{i,j\}\right) \Rightarrow 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq v\left(\{1,2\}\right) + v\left(\{2,3\}\right) + v\left(\{1,3\}\right)$$

32.1.3 הגדרות

הגדרה 32.2 אוסף קואליציות מאוזן
אוסף $B = \left(S_1, \cdots, S_p\right)$ נקרא מאוזן אם קיימים מספרים חיוביים $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ כך שמתקיים:

$$\forall i \in [n]: \sum_{\{j \ | \ i \in S_j\}} \alpha_j = 1$$

הגדרה 32.3 וקטור אופייני של קואליציה
אם S קואליציה נגדיר לה וקטור אופייני:

$$\begin{aligned} 1_S &= \left(z_1, \cdots, z_n\right) \\ \forall i \in [n]: z_j &= \begin{cases} 0 & j \notin S \\ 1 & j \in S \end{cases} \end{aligned}$$

הערה 32.4 נשים לב ש:

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i 1_{S_i} = \vec{1} = (1, \cdots, 1)$$

דוגמא

נניח יש משחק ב3 שחקנים. $B = (S_1 = \{1,2\}, S_2 = \{3\})$ הוא אוסף מאוזן כי:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

ואלו הוקטורים האופייניים של הקואליציות:

$$1_{S_1} = (1,1,0)$$
$$1_{S_2} = (0,0,1)$$

ונשים לב ש:

$$\alpha_1 1_{S_1} + \alpha_2 1_{S_2} = (1,1,1)$$

דוגמא

נניח יש משחק ב3 שחקנים. $B = (S_1 = \{1,2\}, S_2 = \{1,3\}, S_3 = \{2,3\})$ הוא אוסף מאוזן כי:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{1}{2}$$

ובאמת:

$$\sum_i \alpha_i 1_{S_i} = \vec{1}$$

32.1.4 משפט בונדרבה שפלי

משפט 32.5 משפט בונדרבה שפלי

הליבה של משחק שיתופי עם n שחקנים שנתון על ידי פונקציית תשלום v איננה ריקה אם"ם לכל אוסף מאוזן $S_1, \cdots, S_p$ של קואליציות עם משקולות $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ מתקיים $v(N) \geq \sum_{i=1}^{p} \alpha_i v(S_i)$.

הוכחה: נוכיח כל כיוון בנפרד.

כיוון $\Leftarrow$:

נניח שהליבה איננה ריקה. יהי אוסף מאוזן $B=(S_1,\cdots,S_p)$ של קואליציות עם משקולות $\alpha_1,\cdots,\alpha_p$. כיוון שהאוסף מאוזן: $\sum_{i=1}^{p}\alpha_i 1_{S_i}=\vec{1}$. מההנחה שהליבה לא ריקה ידוע שקיים $\vec{x}$ בליבה. מההגדרה:

$$\begin{aligned}
&\forall i\in[p]: x(S_i)\geq v(S_i)\\
&\Downarrow \alpha_i\geq 0\\
&\forall i\in[p]: \alpha_i x(S_i)\geq \alpha_i v(S_i)\\
&\Downarrow\\
&\sum_{i=1}^{p}\alpha_i \underbrace{x(S_i)}_{=\sum_{j\in S_i}x_j}\geq\sum_{i=1}^{p}\alpha_i v(S_i)\\
&\Downarrow \text{change summation order}\\
&\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i:\ j\in S_i}\alpha_i\geq\sum_{i=1}^{p}\alpha_i v(S_i)\\
&\Downarrow \text{B is balanced, so} \sum_{i:\ j\in S_i}\alpha_i=1\\
&v(N)=\sum_{j=1}^{n}x_j\geq\sum_{i=1}^{p}\alpha_i v(S_i)
\end{aligned}$$

כיוון $\Rightarrow$:

ניתן להוכיח עם דואליות של תכנון לינארי. ■

32.1.5 הערך של שאפלי

הגדרה 32.6 הערך של שאפלי

הגדרה אקסיומטית של הדרך לחלק את $v(N)$ לשחקנים השונים באופן שישקף את כוחם. נסמן ב$\varphi_i(v)$ את ערך שאפלי של שחקן i במשחק המוגדר ע"י v. לפי ההגדרה האקסיומטית, φ מקיים את האקסיומות הבאות:

1. יעילות: $\sum_{i\in N}\varphi_i(v)=v(N)$
2. שחקן גולם: שחקן i נקרא גולם אם לכל קואליציה R כך ש$i\notin R$ מתקיים: $v(R\cup\{i\})=v(R)+v(\{i\})$, ונדרוש עבורו $\varphi_i(v)=v(i)$.
3. סימטריה: i,j נקראים סימטריים אם לכל R כך ש$i,j\notin R$ מתקיים: $v(R\cup\{i\})=v(R\cup\{j\})$. אם i,j סימטריים נדרוש $\varphi_i(v)=\varphi_j(v)$.
4. אינווריאנטיות לכפל בסקלאר חיובי: אם $w(S)=\lambda\cdot v(S)$ אז $\varphi_i(w)=\lambda\cdot\varphi_i(v)$.
5. אדיטיביות: נניח v_1,v_2 משחקים, ו$\forall S:\ v_3(S)=v_1(S)+v_2(S)$, אז $\varphi_i(v_3)=\varphi_i(v_1)+\varphi_i(v_2)$.

משפט 32.7 הערך של שאפלי

האקסיומות של הערך של שאפלי קובעות באופן יחיד ערך עבור כל שחקן שהוא הערך של שאפלי.

הגדרה 32.8 הגדרה ישירה של ערך שמקיים את האקסיומות

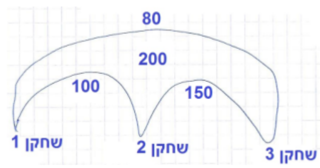
נסתכל על כל הפרמוטציות על השחקנים. פרמוטציה מגדירה "כניסה" של שחקנים לקואליציה.

1. מביטים על כל אחד מ-$n!$ הדרכים לסדר את השחקנים.
2. לכל שחקן מחשבים את התרומה שלו לקואליציה של השחקנים שקדמו לו.
3. ממצעים על פני כל $n!$ הסידורים.
4. נסמן את התוצאה בתור $\psi_i\left(v\right)$.

דוגמה

נסתכל על המשחק הבא (תודה לליאור מור על התמונה):

איור 7: משחק לדוגמה



ובנוסף נגדיר: $v\left(\{1\}\right)=v\left(\{2\}\right)=v\left(\{3\}\right)=0$. נסתכל על כל הפרמוטציות ועל התוספת של כל שחקן לקואליציה לפי סדר הכניסה של השחקנים:

$Permutation$	1's added value	2's added value	3's added value
$1,2,3$	$v(\{1\})-v(\emptyset)=$ 0	$v(\{1,2\})-v(\{1\})=100-0=$ 100	$v(\{1,2,3\})-v(\{1,2\})=200-100=$ 100
$1,3,2$	$v(\{1\})-v(\emptyset)=$ 0	$v(\{1,2,3\})-v(\{1,3\})=200-80=$ 120	$v(\{1,3\})-v(\{1\})=80-0=$ 80
$2,1,3$	$v(\{1,2\})-v(\{2\})=100-0=$ 100	$v(\{2\})-v(\emptyset)=$ 0	$v(\{1,2,3\})-v(\{1,2\})=200-100=$ 100
$2,3,1$	$v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\})=200-150=$ 50	$v(\{2\})-v(\emptyset)=$ 0	$v(\{2,3\})-v(\{2\})=150-0=$ 150
$3,1,2$	$v(\{1,3\})-v(\{3\})=80-0=$ 80	$v(\{1,2,3\})-v(\{1,3\})=200-80=$ 120	$v(\{3\})-v(\emptyset)=$ 0
$3,2,1$	$v(\{1,2,3\})-v(\{2,3\})=200-150=$ 50	$v(\{2,3\})-v(\{3\})=150-0=$ 150	$v(\{3\})-v(\emptyset)=$ 0

כעת נחשב לכל שחקן:

$$\psi_i\left(v\right)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in Permutations(N)}\left(\substack{\text{The value that player i added to the coalition when}\\ \text{added to the coalition according to the order given by }\pi}\right)$$

$$\psi_1\left(v\right)=\frac{1}{3!}\left(0+0+100+50+80+50\right)=\frac{280}{6}$$

$$\psi_2\left(v\right)=\frac{1}{6}\left(100+120+0+0+120+150\right)=\frac{490}{6}$$

$$\psi_3\left(v\right)=\frac{1}{6}\left(100+80+100+150+0+0\right)=\frac{430}{6}$$

נשים לב שאכן:

$$\sum_i \psi_i(v) = \frac{1}{6}(280+490+430) = 200 = v(\{1,2,3\})$$

משפט 32.9 משפט ערך שפלי

1. $\psi_i(v)$ מקיים את כל האקסיומות.
2. יש רק פונקציה אחת שמקיימת את כל האקסיומות.

מסקנה 32.10 $\psi_i(v)$ הוא הערך של שאפלי, כלומר $\varphi_i(v) = \psi_i(v)$.

33 תרגול 11

33.1 משחקים סימטריים

הגדרה 33.1 שיווי משקל בn שחקנים

אם במשחק יש n שחקנים כשלשחקן $i \in [n]$ יש m_i אסטרטגיות טהורות, אז Δ_i תקרא $(x^1,\cdots,x^n) \in \Pi_{i=1}^n\Delta_i$ שיווי משקל אם"ם לכל שחקן i ולכל $y \in \Delta_i$ מתקיים:

$$u_i(x^1,\cdots,x^n) \geq u_i(x^1,\cdots,x^{i-1},y,x^{i+1},\cdots,x^n)$$

הערה 33.2 נזכר שראינו פונקציה משפרת אסטרטגיות $f: \Pi_i\Delta_i \to \Pi_i\Delta_i$ וראינו שכל נקודת שבת של f היא ש"מ. נשים לב שע"מ להרחיב את f למקרה הn שחקני נגדיר אותה כך:

$$f(x^1,\cdots,x^n) = \left(x^{1'},\cdots,x^{n'}\right)$$
$$s.t.$$
$$\forall i' \in [n],\ \forall j \in [m_i] : x_j^{i'} = \frac{x_j^i + \max\left\{0, u_i\left(x^1,\cdots,x^{i-1},e_j,x^{i+1},\cdots,x^n\right) - u_i\left(x^1,\cdots,x^n\right)\right\}}{1+\sum_{k\in[m_i]}\max\left\{0,u_i(x^1,\cdots,x^{k-1},e_k,x^{k+1},\cdots,x^n) - u_i(x^1,\cdots,x^n)\right\}}$$

באמצעות f המורחבת ניתן להוכיח שבכל משחק בn שחקנים יש נקודת שיווי משקל.

הגדרה 33.3 משחק סימטרי

משחק בn שחקנים כש$\Delta_1 = \cdots = \Delta_n$, וגם לכל פרמוטציה $\pi: [n] \to [n]$ אז:

$$u_{\pi(k)}\left(x_{\pi(1)},\cdots,x_{\pi(n)}\right) = u_k(x_1,\cdots,x_n)$$

הערה 33.4 עבור $n=2$ ו$\pi(1)=2,\ \pi(2)=1$ נקבל שהתנאי של משחק סימטרי אומר בדיוק:

$$u_2(y,x) = u_1(x,y)$$

הגדרה 33.5 שיווי משקל סימטרי
שיווי משקל סימטרי הוא שיווי משקל $\left(x^1,\cdots,x^n\right)\in\Pi_i\Delta_i$ עבורו $x^1=\cdots=x^n$.

טענה 33.6 בכל משחק סימטרי יש שיווי משקל סימטרי.

הוכחה: כדי להוכיח שבכל משחק סימטרי יש שיווי משקל סימטרי, מספיק להוכיח שלf יש נקודת שבת סימטרית, כי ראינו כבר שכל נקודת שבת היא שיווי משקל. נגדיר:

$$D:=\{(x,\cdots,x)\ \mid x\in\Delta_1\}\subseteq\Pi_i\Delta_i$$

נשים לב שD היא בעצם ה"אלכסון" של $\Pi_i\Delta_i$. נסמן בf את פונקציית משפרת האסטרטגיות.

טענה 33.7 התמונה של הצמצום של f לקבוצה D מוכלת בD: $f|_D:\ D\to D$.

הוכחה: נניח $(x,\cdots,x)\in D$. נסמן: $f\left(x,x\right)=\left(x',y'\right)$, אז:

$$\begin{aligned}
x'_j&=\frac{x_j+\max\left\{0,u_1\left(e_j,x\right)-u_1\left(x,x\right)\right\}}{1+\sum_k\max\left\{0,u_1\left(e_k,x\right)-u_1\left(x,x\right)\right\}}=\\
&=\frac{x_j+\max\left\{0,u_2\left(x,e_j\right)-u_2\left(x,x\right)\right\}}{1+\sum_k\max\left\{0,u_2\left(x,e_k\right)-u_2\left(x,x\right)\right\}}=\\
&=y'_j\\
&\Downarrow\\
f\left(x,x\right)&=\left(x',x'\right)\in D\\
&\Downarrow\\
f\left(D\right)&\subseteq D
\end{aligned}$$

■

נשים לב שD היא קבוצה קמורה וקומפקטית, ו$f|_D$ היא צמצום של פונקציה רציפה ולכן גם היא רציפה. אם כך, אז לפי משפט נקודת השבת נקבל שלf יש נקודת שבת וראינו שכל נקודת שבת היא שיווי משקל, וסיימנו. ■

33.1.1 משחק הצ'יטות

בה"כ $s\leq l$ (אחרת נסתכל על המקרה הסימטרי), נגדיר את מטריצת המשחק הבאה:

$$\begin{array}{ccc}
 & L & S\\
L & \left(\frac{l}{2},\frac{l}{2}\right) & (l,s)\\
S & (s,l) & \left(\frac{s}{2},\frac{s}{2}\right)
\end{array}$$

נמצא שיווי משקל:

אם $l>2s$

אז L שולטת על S חזק ולכן שיווי המשקל היחיד הוא (L,L).

אם $l = s$

אז ישנן בדיוק שתי נקודות שיווי משקל באסטרטגיות טהורות: $(S, L)\ ,\ (L, S)$.

אם $l < 2s$

אז $\frac{l}{2} < s$ ולכן (L, S) ו-(S, L) הן שיוויי משקל.
נניח שחקן 1 משחק $(p, 1-p)$ עבור $p \in (0, 1)$, אז מעיקרון האדישות עבור שחקן 2:

$$p \cdot \frac{l}{2} + (1-p) \cdot l = u_2(x, e_1) = u_2(x, e_2) = p \cdot s + (1-p) \cdot \frac{s}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$p = \frac{2l - s}{l + s}$$

מסימטריה אם שחקן 1 משחק $(q, 1-q)$ עבור $q \in (0, 1)$ אז $q = p$, ושיווי המשקל המעורב הוא $((p, 1-p), (q, 1-q))$.
אם $p \neq \frac{2l-s}{l+s}$ אז עקרון האדישות לא מתקיים, ולכן אם שחקן 1 משחק טהור ממש אז עדיף לצ'יטה 2 לבחור באסטרטגיה טהורה. אבל אם צ'יטה 2 משחקת באסטרטגיה טהורה, עדיף לצ'יטה 1 לשחק באסטרטגיה טהורה גם, ולכן רק עבור $p = q = \frac{2l-s}{l+s}$ יש שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות.

34 תרגיל 11

34.1 משחקים סימטריים

טענה 34.1 אם F הפונקציה משפרת האסטרטגיות ו-D אוסף האסטרטגיות הסימטריות, אז $Im(F|_D) \subset D$.

מסקנה 34.2 למשחק סימטרי בשני שחקנים יש נקודת שיווי משקל סימטרית.

35 שיעור 12

35.1 משחק המיקוח של נאש

35.1.1 דוגמה של מוכר וקונה

הגדרה 35.1 משחק המוכר והקונה

1. 2 שחקנים: מוכר וקונה. שניהם רוצים למקסם את הרווח שלהם.
2. המוכר מציע בית ששווה למוכר 1, ושווה לקונה $1 + s$.
3. למוכר יש הצעה אחרת לבית על סך $1 + d_1$, ולקונה יש בית אחר ששווה לקונה $1 + s$, והוא יכול לקנות אותו בעבור $1 + s - d_2$.
4. $s, d_1, d_2 \geq 0$.
5. הידיעה מוחלטת - הקונה והמוכר יודעים כמה כל דבר שווה לכל אחד ומה הרווחיות זה של זה.
6. מטרה - למצוא תוצאה שתיהיה הטובה ביותר לשני הצדדים. התוצאה האופטימלית נקראת הערך.

נשים לב שאם הם מסכימים על מכירת הבית בתמורה לp, אז המוכר ירוויח $p-1$, והקונה ירוויח $1+s-p=s-(p-1)$.
אם הם לא מסכימים על מכירה, אז המוכר ירוויח $d_1=(1+d_1)-1$, והקונה ירוויח $d_2=(1+s)-(1+s-d_2)$.
ניתן לתאר את המשחק בצורה גרפית:

איור 8: תיאור גרפי של המשחק

35.1.2 באופן כללי

הגדרה 35.2 משחק המיקוח של נאש
משחק מיקוח הוא זוג סדור (S,d) כך ש$S\subseteq\mathbb{R}^2$ היא קבוצה קמורה וקומפקטית ו$d=(d_1,d_2)\in S$.
המשחק מתנהל בין 2 שחקנים שמחליטים על תוצאה משותפת.
S מייצגת את קבוצת תוצאות המיקוח האפשריות, כאשר אם נבחרה תוצאה משותפת $(a_1,a_2)\in S$ אז הרווח של שחקן 1 הוא a_1, והרווח של שחקן 2 הוא a_2. אם השחקנים לא החליטו על תוצאה משותפת, אז הרווח של שחקן 1 הוא d_1 ושל שחקן 2 הוא d_2.

הגדרה 35.3 פתרון לבעיית המיקוח
פתרון לבעיית המיקוח היא פונקציה $F:\ (S,d)\to S$ המקיימת את האקסיומות הבאות:

1. אופטימליות פארטו - אם $F(S,d)=a=(a_1,a_2)$ וגם $a'=(a'_1,a'_2)\in S$ וגם $a'_1\geq a_1,\ a'_2\geq a_2$, אז בהכרח $a'=a$.
2. סימטריה - אם $d=(d_1,d_2)$ כך ש$d_1=d_2$, וגם Sסימטרית (כלומר $(x_1,x_2)\in S$ אם"ם $(x_2,x_1)\in S$) אז $F(S,d)=(a,a)\in S$.
3. נירמול - אם $0<\alpha_1,\alpha_2$, $\psi(x_1,x_2)=(\alpha_1x_1+\beta_1,\alpha_2x_2+\beta_2)$ אז:
$$F(\psi(S),\psi(d))=\psi(F(S,d))$$
4. אי תלות בהצעות לא רלוונטיות - אם $S\subseteq T$ קמורה וקומפקטית וגם מתקיים $F(T,d)\in S$ אז $F(S,d)=F(T,d)$.

טענה 35.4 הפונקציה $F^N(S,d)=\arg\max_{x=(x_1,x_2)\in S}\{(x_1-d_1)(x_2-d_2)\}$ מוגדרת היטב ואופטימלית (מקיימת את האקסיומות).

הוכחה: נראה תחילה שהיא מוגדרת היטב, כלומר - המקסימום מתקבל בנקודה יחידה. תחילה נשים לב שהמקסימום מתקבל כיוון שS היא סגורה וחסומה ולכן F^N בתור פונקציה ריבועית מקבלת מקסימום עליה. נניח בה"כ $d_1=d_2=0$. נניח בשלילה ש$(x,y),(z,w)$ שניהם ממקסמים, אז:
$$(x-d_1)(y-d_2)=xy=(z-d_1)(w-d_2)zw>0$$

נסמן $\alpha := xy = wz$. נסתכל על הפונקציה $f(t) = \frac{\alpha}{t}$. היא קמורה ממש ולכן:

$$f\left(\frac{x+w}{2}\right) < \frac{f(x)+f(w)}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{\alpha}{\frac{x+w}{2}} < \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{x}+\frac{\alpha}{w}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{xy}{x}+\frac{wz}{w}\right) = \frac{y+z}{2}$$
$$\Downarrow$$
$$\alpha \overset{(*)}{<} \frac{x+w}{2}\cdot\frac{y+z}{2}$$

נסתכל על הנקודה:

$$\frac{1}{2}\left((x,y)+(z,w)\right) = \left(\frac{x+z}{2},\frac{y+w}{2}\right)$$

היא צירוף קמור של שתי נקודות בS ולכן גם שייכת לS. אבל, המכפלה שלה מקיימת את $\overset{(*)}{<}$, בסתירה למקסימליות של α.

כעת נראה אופטימליות:

1. אופטימליות פארטו ־ אם $F^N(S,d) = a = (a_1,a_2)$ וגם $a' = (a_1',a_2') \in S$ וגם $a_1' \geq a_1,\ a_2' \geq a_2$, אז:

$$(a_1'-d_1)(a_2'-d_2) \geq (a_1-d_1)(a_2-d_2)$$

וכיוון שהמקסימון של F^N הוא יחיד אז בהכרח $a = a'$.

2. סימטריה ־ אם $d = (d_1,d_2)$ כך ש$d_1 = d_2$, וגם Sסימטרית אז אם $F^N(S,d) = (a_1,a_2)$ נשים לב:

$$(a_1-d_1)(a_2-d_2) = (a_1-d_2)(a_2-d_1) = (a_2-d_1)(a_1-d_2)$$

.

וגם (a_2,a_1) הוא מקסימום של F^N. אבל מיחידות המקסימום: $(a_1,a_2) = (a_2,a_1)$ ולכן $a_1 = a_2$.

3. נירמול ־ אם $0 < \alpha_1,\alpha_2$,$\psi(x_1,x_2) = (\alpha_1x_1+\beta_1,\alpha_2x_2+\beta_2)$ אז:

$$\begin{aligned}
F^N(\psi(S),\psi(d)) &= \arg\max_{x=(x_1,x_2)\in\psi(S)}\left\{(x_1-\psi(d_1))(x_2-\psi(d_2))\right\} = \\
&= \arg\max_{x=(x_1,x_2)\in S}\left\{(\psi(x_1)-\psi(d_1))(\psi(x_2)-\psi(d_2))\right\} = \\
&= \psi\left(\arg\max_{x=(x_1,x_2)\in S}\left\{(x_1-d_1)(x_2-d_2)\right\}\right) = \\
&= \psi\left(F^N(S,d)\right)
\end{aligned}$$

4. אי תלות בהצעות לא רלוונטיות - אם $S \subseteq T$ קמורה וקומפקטית וגם מתקיים $F^N(T,d) \in S$ אז המקסימום של $F^N(T,d)$ מתקבל בS, ולכן מייחידות המקסימום לא יתכן ש$F^N(S,d)$ תקבל מקסימום אחר.

■

טענה 35.5 הפתרון של נאש הוא פתרון יחיד, כלומר כל פתרון F שמקיים את האקסיומות שווה לF^N.

הוכחה: תהי (S,d) בעיה ונניח (עד כדי נרמול, לפי אקסיומה 3) כי $F^N(S,d)=(1,1)$ וגם ש$d=(0,0)$. תהי S' הקמור של סימטריזציה של S (סימטריזציה - אם S לא סימטרית כרגע, נוסיף לה את כל הנקודות שחסרות לה כדי להיות סימטרית). נשים לב ש$S \subseteq S'$. תהי נקודה $(x_1,x_2) \in S$, אז כיוון שS קבוצה קמורה:

$$\forall\lambda \in [0,1]: \ \varphi(\lambda) := (1-\lambda)(1,1) + \lambda(x_1,x_2) = (1-\lambda+\lambda x_1, 1-\lambda+\lambda x_2) \in S$$

כיוון ש$F^N(S,d)=(1,1)$ אז אנו יודעים ש$\varphi(0)=(1,1)$ הוא המקסימום של φ. אם כך, אז מיחידות המקסימום הפונקציה יורדת חזק לאחר מכן, ולכן:

$$\begin{gathered} x_1+x_2-2=\varphi'(0) \leq 0 \\ \Downarrow \\ x_1+x_2 \leq 2 \\ \Downarrow \\ S \subseteq \{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2 \leq 2\} \end{gathered}$$

נסמן $T=\{(x_1,x_2) \mid x_1+x_2 \leq 2\}$. T סימטרית וקמורה ולכן כיוון שהיא מכילה את S היא מכילה גם את S'. מהאקסיומות הפתרון שלה $F(T,(0,0))$ חייב להיות סימטרי. אבל מאופטימליות הוא חייב להיות $(1,1)$, כלומר $F(T,(0,0))=(1,1)$. מצד שני, לפי אקסיומה 4 נקבל:

$$\begin{gathered} F(S,d)=F(T,d)=(1,1) \\ \Downarrow \\ F(S,d)=(1,1)=F^N(S,d) \end{gathered}$$

וסיימנו. ■

36 תרגול 12

36.1 שידוכים

36.1.1 הגדרות

הגדרה 36.1 שידוך

בהינתן קבוצות A,B כך ש$|A|=|B|=n<\infty$ יחס עם סדר עדיפויות מלא לכל $a \in A$ על B ולכל $b \in B$ על A אז שידוך היא פונקציה $f: A \to B$ חח"ע ועל.

הגדרה 36.2 שידוך יציב

שידוך f שאינו שידוך לא יציב. כלומר, לכל $a \in A$ ולכל $b \in B$ כך ש$f(a) \neq b$ אז לא מתקיים ש (a מעדיף את b על פני $f(a)$) וגם (b מעדיפה את a).

36.1.2 דוגמה

ההעדפות של כל גבר מיוצגות על ידי הקורדינטות השמאליות.

	אורנה	בתיה	ג'מילה
אחמד	$(1,3)$	$(2,1)$	$(3,1)$
בני	$(2,1)$	$(3,3)$	$(1,2)$
גיל	$(3,2)$	$(2,2)$	$(1,3)$

שידוך בטבלה זה לבחור משבצת אחת בכל שורה ועמודה. נשים לב שהשידוך הבא הוא יציב:
אחמד + אורנה, בני + ג'מילה, גיל + בתיה.

36.1.3 גייל שייפלי

הגדרה 36.3 אלגוריתם חיזור גברים
באלגוריתם מסוג זה הגברים מחזרים אחרי הנשים. הנשים לא מבצעות חיזור אקטיבי, ורק יכולות לדחות בקשות מצד הגברים.

אלגוריתם 2 אלגוריתם גייל־שייפלי

קלט: קבוצות A, B כך ש$|A| = |B| = n < \infty$.
פלט: שידוך חוקי ויציב $f : A \to B$.
האלגוריתם:

1. עד שאף גבר לא נדחה:

(א) כל גבר הולך לחזר אחרי האישה המועדפת עליו ביותר שעדיין לא דחתה אותו.

(ב) כל אישה דוחה את כל הגברים שפונים אליה פרט למועדף ביותר עליה, והוא מחכה אצלה.

טענה 36.4 האלגוריתם מסתיים

הוכחה: כל גבר נדחה על ידי כל אישה לכל היותר פעם אחת. נשים לב שבכל סיבוב יש דחייה אחת לפחות. לכן, יש $\geq n^2$ דחיות. אם כך, לאחר לכל היותר n^2 סיבובים אף גבר לא ידחה יותר, והאלגוריתם יסתיים. ■

טענה 36.5 האלגוריתם מפיק שידוך

הוכחה: אין גבר שנדחה ע"י כולן ־ אם גבר נדחה על ידי $(n-1)$ נשים, אז מאופן פעולת האלגוריתם כולן תפוסות. אם כך, כיוון שמס' הגברים שווה למס' הנשים אז האישה הn־ית פנויה. ■

טענה 36.6 השידוך המופק יציב

הוכחה: נניח השידוך המופק אינו יציב. אז קיימים זוג של גבר ואישה המעדיפים זה את זו אך אינם משודכים זה לזו. אבל, אם גבר ואישה מעדיפים זה את זאת, אז לפי האלגוריתם הוא הציע לה בעבר, והיא דחתה אותו. היא עשתה זאת כיוון שהיא מעדיפה אחר. ■

טענה 36.7 יש לפחות שידוך יציב אחד.

טענה 36.8 ישנם יחסי העדפות עבורם יש שידוך יציב יחיד.

הוכחה: נקח שידוך כלשהו $f: A \to B$, ונקבע שלכל $a \in A$ מעדיף ביותר את $f(a)$, וכן לכל אישה $b \in B$ נקבע שהיא מעדיפה הכי את $f^{-1}(b)$. נקבל שעבור יחסי הסדר החדשים, השידוך f הוא שידוך יציב יחיד עבור A, B. ■

טענה 36.9 יהיו f, g שידוכים. יש יחס סדר כך שגם f וגם g יהיו יציבים.

הוכחה: לכל גבר a ניקח את את $f(a)$ במקום הראשון, ולכל אישה b נקח את $g^{-1}(b)$ במקום הראשון. ■

הגדרה 36.10 עבור f, g שידוכים נאמר כי $f \overset{m}{\geq} g$ אם כל גבר $a \in A$ מעדיף את $f(a)$ על פני $g(a)$: $g(a) \leq^a f(a)$.
באופן דומה נגדיר $f \overset{w}{\geq} g$ אם לכל b מתקיים ש$f^{-1}(b)$ עדיף מ$g^{-1}(b)$: $g^{-1}(b) \leq^b f^{-1}(b)$.

טענה 36.11 עבור שידוכים יציבים f, g: $f \overset{m}{\geq} g \Leftrightarrow f \overset{w}{\leq} g$.

הוכחה: יהיו שידוכים יציבים $f \neq g$. כיוון $\Leftarrow$:
נניח $f \overset{m}{\geq} g$, אז צ"ל $g \overset{w}{\geq} f$, כלומר: כל אישה מעדיפה את מי ששודך לה בg על פני מי ששודך לה בf.
נניח בשלילה שלא, אז קיימת אישה b כך ש$a = f^{-1}(b) \leq_b g^{-1}(b) = a'$. מהנתון אנחנו יודעים ש:

$$g(a) \leq_a f(a) = b$$
$$b = g(a') \leq_{a'} f(a')$$

אבל קיבלנו שg לא יציב - a מעדיף את b על פני $g(a)$, וb מעדיפה את a על פני $g^{-1}(b) = a'$, כלומר g לא יציב, סתירה.
כיוון $\Rightarrow$:
נניח $g \overset{w}{\geq} f$, אז צ"ל $f \overset{m}{\geq} g$. נשים לב שהטענה סימטרית לחלוטין. ■

37 תרגיל 12

37.1 שידוכים

בכל הטענות נניח כי מספר הגברים שווה לn ושווה למס' הנשים.

טענה 37.1 אם לכל הגברים אותה רשימת העדפות, קיים רק שידוך יציב אחד.

טענה 37.2 אם אחת הנשים, נניח אסתר, עדיפה בעיני כל הגברים על פני יתר הנשים, אז בכל שידוך יציב אסתר משודכת לאותו הגבר - הגבר העדיף ביותר עליה.

טענה 37.3 אם אחת הנשים, נניח ושתי, האחרונה בסדר העדיפויות של כל הגברים, אז בכל שידוך יציב ושתי משודכת לאותו הגבר - הגבר שישאר רווק לו היו $n-1$ נשים (כולן פרט לושתי). זהו הגבר שנדחה $n-1$ פעמים בגייל שייפלי של חיזור הגברים.

38 שיעור 13

38.1 הערך של שאפלי

נסתכל על המשחק עם קבוצת השחקנים $N=[n]$ ופונקציית התשלום $\forall S\subset N:\ v(S)\in\mathbb{R}^{+}$.

$\varphi_i(N,v)$ הוא הכוח של שחקן i בהנחה שיש קואליציה מלאה. תמיד יש קואליציה מלאה, ולכן נכתוב בקיצור $\varphi_i(v)$.

נסמן את הכוח של כל השחקים במשחק בתור וקטור: $(\varphi_1(v),\cdots,\varphi_n(v))$.

הגדרה 38.1 5 האקסיומות של שאפלי

1. יעילות - $\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(v)=v(N)$
2. סימטריה: i,j נקראים סימטריים אם לכל R כך ש$i,j\notin R$ מתקיים: $v(R\cup\{i\})=v(R\cup\{j\})$. אם i,j סימטריים נדרוש $\varphi_i(v)=\varphi_j(v)$.
3. קווריאנטיות ביחס לשקילות אסטרטגית - אם $0<a\in\mathbb{R},\ b=(b_1,\cdots,b_n)\in\mathbb{R}_{+}^{n}$ ו$u=(av+b)$ (כלומר $u(S)=av(S)+\sum_{i\in S}b_i$) אז:
$$\varphi_i(av+b)=a\varphi_i(v)+b_i$$
4. שחקן האפס (dummy) - אם $\forall S:\ \varphi(S\cup\{i\})=v(S)$ אז $\varphi_i(v)=0$.
5. אדיטיביות: נניח v_1,v_2 משחקים, ו$\forall S:\ v_3(S)=v_1(S)+v_2(S)$, אז $\varphi_i(v_3)=\varphi_i(v_1)+\varphi_i(v_2)$.

משפט 38.2 משפט שאפלי

5 האקסיומות של שאפלי קובעות ערך שאפלי באופן יחיד.

טענה 38.3 נוסחה מפורשת לערך שאפלי

לכל תמורה π על N נגדיר את $P(i)$ ליות קבוצת השחקנים שהופיעו לפני i. נניח M היא קבוצת כל הפרמוטציות על N, אז הנוסחה המפורשת לערך שאפלי היא:

$$\psi_i(v)=\frac{1}{n!}\sum_{\pi\in M}\left(v\left(P(i)\cup\{i\}\right)-v\left(P(i)\right)\right)$$

טענה 38.4 הנוסחה המפורשת מקיימת את כל האקסיומות.

הוכחה: נראה כל אחת בנפרד:

שחקן אפס

נניח שיש $i\in N$ כך שלכל $S\subset N$ מתקיים $v(S\cup\{i\})=v(S)$. אז:

$$\begin{aligned}\psi_i(v)&=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(v\left(P_i(\pi)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i(\pi)\right)\right)\overset{assumption}{=}\\&=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(v\left(P_i(\pi)\right)-v\left(P_i(\pi)\right)\right)=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}(0)=\\&=0\end{aligned}$$

כנדרש.

אדיטיביות

יהיו v,w זוג פונקציות מציינות על N, אז:

$$\begin{aligned}\psi_i\left(v+w\right) &= \frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(\left(v+w\right)\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-\left(v+w\right)\left(P_i\left(\pi\right)\right)\right)=\\ &=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(v\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)+w\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i\left(\pi\right)\right)-w\left(P_i\left(\pi\right)\right)\right)=\\ &=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(v\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i\left(\pi\right)\right)\right)+\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(w\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-w\left(P_i\left(\pi\right)\right)\right)=\\ &=\psi_i\left(v\right)+\psi_i\left(w\right)\end{aligned}$$

כנדרש.

יעילות

$$\begin{aligned}\sum_{i\in N}\psi_i\left(v\right) &= \sum_{i\in N}\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(v\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i\left(\pi\right)\right)\right)=\\ &=\frac{1}{|N|!}\sum_{i\in N}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(v\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i\left(\pi\right)\right)\right)=\end{aligned}$$

נשים לב שסדר הסכימה לא משנה, ולכן:

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\sum_{i\in N}\left(v\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i\left(\pi\right)\right)\right)=\\ &=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(\sum_{i\in N}v\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-\sum_{i\in N}v\left(P_i\left(\pi\right)\right)\right)=\\ &=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\sum_{i\in N}v\left(P_i\left(\pi\right)\cup\{i\}\right)-\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\sum_{i\in N}v\left(P_i\left(\pi\right)\right)=\end{aligned}$$

בהינתן פרמוטציה π נסתכל על הסדר שלה ונסמן ב$\pi^{-1}\left(i\right)$ את השחקן שנכנס בשלב הi לקואליציה, כלומר:

$$\pi^{-1}\left(1\right)<\pi^{-1}\left(2\right)<\cdots<\pi^{-1}\left(|N|\right)$$

אז:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\underbrace{\left(v\left(\left\{\pi^{-1}(1)\right\}\right)+v\left(\left\{\pi^{-1}(1),\pi^{-2}(2)\right\}\right)+\cdots+v\left(\left\{\pi^{-1}(1),\cdots,\pi^{-1}(|N|-1)\right\}\right)+v(N)\right)}_{=\sum_{i\in N}v(P_i(\pi)\cup\{i\})}-\\
&-\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\underbrace{\left(v\left(\left\{\pi^{-1}(1)\right\}\right)+v\left(\left\{\pi^{-1}(1),\pi^{-2}(2)\right\}\right)+\cdots+v\left(\left\{\pi^{-1}(1),\cdots,\pi^{-1}(|N|-1)\right\}\right)\right)}_{=\sum_{i\in N}v(P_i(\pi))}=\\
&=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}(v(N))\overset{\text{there are }|N|!\text{ permutations}}{=}\frac{1}{|N|!}|N|!\,(v(N))=\\
&=v(N)
\end{aligned}
$$

כנדרש.

סימטריה

יהיו $i,j\in N$ כך ש

$$(*):\ \forall S\subset N:\ v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$$

תהי פרמוטציה π. נסמן ב־π' את הפרמוטציה שזהה ל־π רק מחליפה בין i ל־j. אם $S_{|N|}$ היא קבוצת כל הפרמוטציות על N, אז נסמן ב־$S'_{|N|}$ את קבוצת כל הפרמוטציות על N לאחר שהחלפנו בכולן בין i ל־j. נשים לב:

$$(**):\ \forall\pi\in S_{|N|}:\ P_i(\pi)=P_j(\pi')$$

אם כך, אז אם נסמן:

$$S:=P_i(\pi)=P_j(\pi')$$

אז תוך שימוש בהנחה $(*)$ נקבל:

$$v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$$

ולכן:

$$\forall\pi\in S_{|N|}:\ v(P_i(\pi)\cup\{i\})\overset{(**)}{=}v(P_j(\pi)\cup\{i\})\overset{(*)}{=}v(P_j(\pi')\cup\{j\})$$

בנוסף, נשים לב שאם נקח את **כל** הפרמוטציות, ובכולן נחליף בין i ל־j, שוב נקבל את קבוצת כל הפרמוטציות. כלומר:

$$S_{|N|}=S'_{|N|}$$

לכן סה"כ:

$$\psi_i(v)=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(v\left(P_i(\pi)\cup\{i\}\right)-v\left(P_i(\pi)\right)\right)=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(v\left(P_j(\pi')\cup\{j\}\right)-v\left(P_j(\pi')\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi'\in S'_{|N|}}\left(v\left(P_j(\pi')\cup\{j\}\right)-v\left(P_j(\pi')\right)\right)=\frac{1}{|N|!}\sum_{\pi\in S_{|N|}}\left(v\left(P_j(\pi)\cup\{j\}\right)-v\left(P_j(\pi)\right)\right)=$$
$$=\psi_j(v)$$

וסיימנו.

קווריאנטיות ביחס לשקילות אסטרטגיות

נובע מכל שאר האקסיומות. ■

טענה 38.5 הפתרון של שאפלי הוא יחיד.

הוכחה: נסתכל על משחק עם שחקנים N ופונקציית תשלום v תהי T קבוצה לא ריקה, ונגדיר את המשחק:

$$v_T(S)=\begin{cases}0 & T\not\subset S\\ \lambda & T\subset S\end{cases}$$

מאקסיומת היעילות נקבל:

$$\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(v_T)=\lambda$$

נשים לב שכל השחקנים מחוץ ל-T הם שחקני אפס, וכל השחקנים בתוך T הם סימטריים, ולכן:

$$\forall i,j\in T:\varphi_i(v_T)=\varphi_j(v_T)$$
$$\Downarrow$$
$$\varphi_i(v_T)=\begin{cases}\frac{\lambda}{T} & i\in T\\ 0 & i\notin T\end{cases}$$

קיבלנו שלמשחק N,v_T יש פתרון יחיד. נראה שניתן להציג כל משחק עם השחקנים N בתור צירוף לינארי של משחקי v_T עבור $T\subset N$ שונים. נשים לב שכל הפונקציות $v:\ \{S\subset N,\ S\neq\emptyset\}\to\mathbb{R}$ מהוות מרחב וקטורי ממימד 2^n-1.

שיטת הוכחה מהתרגול:

נניח בשלילה שהמרחב לא ב"ת, כלומר קיימים $\{a_T\}_{T\subseteq N}$ כך ש-$\sum_{T\subseteq N}a_Tv_T=0$. תהי $S_0\in\{a_T\}_{T\subseteq N}$

מינימלית כך ש$a_{S_0}\neq 0$. נשים לב שמההגדרה:

$$\sum_{T\subseteq N}a_Tv_T=0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{aligned}0&=\left(\sum_{T\subseteq N}a_Tv_T\right)(S_0)=\sum_{T\subseteq N}a_Tv_T(S_0)=\\&=\left(\sum_{T\subseteq N,\ T\subset S_0}\underbrace{a_T}_{\overset{\Uparrow}{\underset{S_0\text{ is the minimal s.t. }a_{S_0}\neq 0}{=}}0}v_T(S_0)\right)+\left(\sum_{T\subseteq N,\ T\not\subset S_0}a_T\underbrace{v_T(S_0)}_{\overset{\Uparrow}{\underset{\text{by definition of }v_T}{=}}0}\right)+a_{S_0}\underbrace{v_{S_0}(S_0)}_{\overset{\Uparrow}{\underset{\text{by definition of }v_{S_0}}{=}}1}=\\&=0+0+a_{S_0}\cdot 1=a_{S_0}\overset{S_0\text{ is the minimal s.t. }a_{S_0}\neq 0}{\neq}0\end{aligned}$$

והגענו לסתירה. כלומר, $\{v_T\}_{T\subset N}$ בת"ל. כיוון ש:

$$\left|\{v_T\}_{T\subset N}\right|=|\{S\subset N,\ S\neq\emptyset\}\to\mathbb{R}|=2^n-1$$

אז מצאנו בסיס למרחב הלינארי של הפונקציות המציינות עבור משחקים עם סט שחקנים N, כלומר ניתן לכתוב כל משחק כצירוף של משחקי $\{v_T\}$. כפי שראינו, כל משחק v_T מקבל פתרון יחיד עבור ערך שאפלי, ולכן מיחידות הייצוג בבסיס קיבלנו שלכל משחק יש פתרון יחיד שמקיים את כל האקסיומות.

שיטת הוכחה אחרת לב"ת מההרצאה:

כעת נסתכל על המטריצה הבאה: כל עמודה היא מהצורה $\begin{bmatrix}v_T(\{1\})\\ \vdots\\ v_T(\{n\})\end{bmatrix}\frac{1}{T}$, כאשר לכל $T\subset N$ יש עמודה. העמודות ממויינות משמאל לימין לפי $|T|$, כאשר אם יש T,T' כך ש$|T'|=|T|$ אז העמודה שמייצגת סט בעל האיברים הקטנים יותר תבוא קודם. נשים לב שקיבלנו מטריצה משולשית עליונה, ולכן הפיכה. אם כך, אז יש בסיס בגודל 2^n-1 למרחב. יחד עם אקסיומות $3,5$ נקבל שהבסיס מגדיר לנו באופן יחיד את ערך שאפלי. ■

39 תרגול 13

39.1 משחקים שיתופיים

39.1.1 הגדרות ודוגמאות

הגדרה 39.1 משחק שיתופי (לא פורמלית)

משחק מרובה שחקנים בו השחקנים מתאגדים כדי להגדיל את הרווח של הקבוצה.

הגדרה 39.2 משחק שיתופי (פורמלית)

משחק שיתופי הוא זוג (N,v) כך ש$N=[n]$ קבוצה סופית של שחקנים, וv היא הפונקציה המציינת הנותנת לכל תת קבוצה של N את הרווח:

$$v:P(N)\to\mathbb{R}$$

$$p(N)=\{A\mid A\subseteq N\}$$
$$P(\{0,1\})=\{\emptyset,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$$

מטרה: לבחון בכל משחק שיתופי את יחסי הכוחות בין המשתתפים.

הערה 39.3 בד"כ נניח:

1. $v(\emptyset)=0$
2. "שווה להתאגד" - v היא סופר אדיטיבית.

הגדרה 39.4 פונקציה מציינת סופר אדיטיבית
פונקציה מציינת v תקרא סופר אדיטיבית אם $S,T\subseteq N$ זרות אז $v(S\cup T)\geq v(S)+v(T)$.

דוגמה - הרכבת קואליציה

1. יש n מפלגות, אז $N=[n]$.
2. לכל מפלגה $i\in N$ יש a_i מנדטים, כש$\sum_{i\in N}a_i=120$.
3. אפשר להרכיב קואליציה אם כמות המנדטים של המפלגות שמשתתפות פעולה גדול או שווה ל61.
4. לכל $S\subseteq N$ מתקיים: $v(S)=\begin{cases}0 & \sum_{i\in S}a_i<61\\ 1 & \sum_{i\in S}a_i\geq 61\end{cases}$
5. המטרה בסיטואציה הזו היא להבין את יחסי הכוחות בין המפלגות.

דוגמה ראשונה: נניח שיש שתי מפלגות $\{1,2\}$ כך שלמפלגה 1 יש 61 מנדטים, ולמפלגה 2 יש 59 מנדטים. מפלגה 1 יכולה להרכיב בעצמה קואליציה. אם מפלגה 2 בוחרת לשחק לבד, היא מרוויחה 0. אם מפלגה 2 מתאגדת עם מפלגה 1, אז שניהם יחד מרוויחים 1. בעצם, מפלגה 2 לא תורמת לאף קבוצה. סביר לדרוש שהכוח היחסי של מפלגה 2 יהיה 0, כי היא לא תורמת לאף אחד.

דוגמה שניה: נניח שיש 6 מפלגות ושלכל מפלגה 20 מנדטים. במצב הזה, צריך 4 מפלגות כדי להרכיב קואליציה. כל 4 מפלגות יכולות להרכיב קואליציה. במקרה הזה, כל המפלגות שוות כוח, ולכן הגיוני לדרוש שהכוחות היחסיים של כולם שווים.

דוגמת המשך:

נניח שאחת המפלגות מהמקרה הקודם התפרקה למפלגה עם 19 מנדטים, ועוד מפלגה עם מנדט אחד. אז המפלגות הן:

$$[20]\,,[20]\,,[20]\,,[20]\,,[20]\,,[19]\,,[1]$$

המפלגות של $[20]$ צריכות להיות "חזקות יותר" מהמפלגות $[19]\,,[1]$. נסתכל על העובדות הבאות:

1. נניח שS קבוצה של מפלגות שמרכיבות קואליציה, אז סכום המנדטים שלהם גדול מ61. אם $[19]\in S$, אז אפשר להחליף את המפלגה $[19]$ במפלגה $[20]$, ונשאר עם קואליציה. אם כך, אז $[20]$ חזקה לפחות כמו $[19]$.
2. אי אפשר להחליף את $[20]$ ב$[19]$. יש קבוצה S של מפלגות שמרכיבות קואליציה כך ש$[20]\in S$, אבל אם נחליף את $[20]$ ב$[19]$, הקואליציה תתפרק. למשל $S=[20]\,,[20]\,,[20]\,,[1]$. נשים לב שבמקרה הזה, אם נחליף את אחד ה$[20]$ ב$[19]$, S לא תוכל להרכיב קואליציה.

נשים לב ש$[19]\,,[1]$ שווים בכוחם:

1. אם S קואליציה כך ש$[1]\in S$ ו$[19]\notin S$, אז אפשר להחליף את $[1]$ ב$[19]$ ונשאר עם קואליציה.
2. אם S קואליציה כך ש$[1]\notin S$ ו$[19]\in S$, אז אפשר להחליף את $[19]$ ב$[1]$ ונשאר עם קואליציה. נשים לב שזה נכון כיוון שאם קואליציה S לא מערבת את $[1]$, אז בהכרח $[20]\,,[20]\,,[20]\in S$, ולכן אם נחליף את $[19]$ עם $[1]$, נשאר עם קואליציה.

מסקנה 39.5 אם יש שחקן שלא תורם לאף אחת מהקבוצות, אז הכוח היחסי שלו הוא 0.

מסקנה 39.6 אם יש 2 שחקנים שתורמים אותו הדבר, אז הם צריכים להיות בעלי אותו כוח יחסי.

39.1.2 פונקציית כוח יחסי

הערה 39.7 בהינתן אוסף של שחקנים N, אפשר להגדיר פונקציה מציינת $v:\ P(N)\to\mathbb{R}$ ולקבל משחק שיתופי. אנחנו רוצים להגדיר לכל $i\in N$ פונקציה שתחזיר את הכוח היחסי של שחקן i:

$$\psi_i(v)=\text{relative power of player i}$$

נרצה לדרוש מכזו פונקציה את התכונות הבאות:

הגדרה 39.8 שחקן האפס
אם יש $i\in N$ כך שלכל $S\subset N$ מתקיים $v(S\cup\{i\})=v(S)$, אז i נקרא שחקן אפס ויתקיים $\psi_i(v)=0$.

הגדרה 39.9 סימטריה
אם יש $i,j\in N$ כך שלכל $i,j\notin S$ מתקיים $v(S\cup\{i\})=v(S\cup\{j\})$ אז i,j יקראו סימטריים ויתקיים: $\psi_i(v)=\psi_j(v)$.

הגדרה 39.10 יעילות
נדרוש $\sum_{i\in N}\psi_i(v)=v(N)$

הגדרה 39.11 אדיטיביות
אם v,w זוג פונקציות מציינות על N, אז נדרוש: $\psi_i(v+w)=\psi_i(v)+\psi_i(w)$

משפט 39.12 המשפט של שאפלי
קיימת פונקציה יחידה ψ שמקיימת את כל התכונות הנ"ל (שחקן האפס, סימטריה, יעילות, אדיטיביות).

דוגמה

נזכר בדוגמה של 6 מפלגות שכולן בעלות $[20]$ מנדטים. ראינו שבמקרה הזה כל השחקנים סימטריים, אז:

$$\forall i,j\in[6]:\ \psi_i(v)=\psi_j(v)$$

מיעילות נקבל:

$$\sum_{i\in N}\psi_i(v)=v(N)=1$$
$$\Downarrow$$
$$\forall i:\psi_i(v)=\frac{1}{6}$$

דוגמה

במקרה של מפלגה 1 עם 61 מנדטים ומפלגה 2 עם 59, מפלגה 2 היא שחקן אפס כפי שראינו, ולכן: $\psi_2(v)=0$. מיעילות נקבל $\psi_1(v)+\psi_2(v)=1$, ולכן $\psi_1(v)=1$.

39.1.3 משחק S-וטו

הגדרה 39.13 משחק S-וטו
יש n שחקנים ו $N=[n]$. נקבע $\emptyset\neq S\subseteq N$, ו:

$$v_S(T)=\begin{cases}1 & S\subseteq T\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

נחשב את $\psi_i(v_S)$ לכל i. נשים לב שכל מי שלא בS הוא שחקן 0:

$$\forall i\notin S:\ v_S(T\cup\{i\})=\begin{cases}1 & S\subseteq T\cup\{i\}\\ 0 & otherwise\end{cases}=\begin{cases}1 & S\subseteq T\\ 0 & otherwise\end{cases}=v_S(T)$$

אז אם $i\notin S$ מאקסיומת שחקן האפס נקבל $\psi_i(v_S)=0$.
בנוסף, לכל $i,j\in S$ מתקיים שהם סימטריים: $\psi_i(v_S)=\psi_j(v_S)$.
לבסוף, מיעילות נקבל:

$$1=\sum_{i\in N}\psi_i(v_S)=\sum_{i\in S}\psi_i(v_S)$$
$$\Downarrow$$
$$\psi_i(v_S)=\begin{cases}\frac{1}{|S|} & i\in S\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

39.1.4 שוק הכפפות

יש 3 סוחרים $\{1,2,3\}$. סוחר 1 מוכר רק כפפות שמאליות, סוחרים $2,3$ מוכרים רק כפפות ימניות. קונה מוכן לשלם שקל אחד עבור זוג כפפות, אבל לא מוכן לקנות אף כפפה בנפרד. הפונקציה המציינת היא:

$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{1,2,3\}) = 1$$
$$\forall S \neq \{1,2\},\{1,3\},\{1,2,3\} : v(S) = 0$$

נשים לב שאין שחקן 0. נשים לב ששחקנים $2,3$ סימטריים, ולכן $\psi_2(v) = \psi_3(v)$. מיעילות נקבל:

$$\psi_1(v) + \psi_2(v) + \psi_3(v) = 1$$

איך נשתמש באדיטיביות? טריק: נחזור למשחק S-וטו עם 3 שחקנים. נסתכל על המשחקים $\{1,2\}$-וטו ($v_{\{1,2\}}$), $\{1,3\}$-וטו ($v_{\{1,3\}}$), $\{1,2,3\}$-וטו ($v_{\{1,2,3\}}$). מתקיים:

$$v_{\{1,2\}} + v_{\{1,3\}} = v_{\{1,2,3\}} + v$$

צריך לעבור על כל האפשרויות הנ"ל ונראה שאכן מתקיים השוויון. כעת ניתן להשתמש באדיטיביות:

$$\psi_1(v) = \underbrace{\psi_1\left(v_{\{1,2\}}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\psi_1\left(v_{\{1,3\}}\right)}_{=\frac{1}{2}} - \underbrace{\psi_1\left(v_{\{1,2,3\}}\right)}_{=\frac{1}{3}} = \frac{2}{3}$$
$$\psi_3(v) \overset{symmetry}{=} \psi_2(v) = \underbrace{\psi_2\left(v_{\{1,2\}}\right)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\psi_2\left(v_{\{1,3\}}\right)}_{=0} - \underbrace{\psi_2\left(v_{\{1,2,3\}}\right)}_{=\frac{1}{3}} = \frac{1}{6}$$

39.1.5 נוסחה מפורשת לערך שאפלי

נניח שהשחקנים נכנסים לקואליציה בסדר מקרי כלשהו. שחקן מסויים יכול "להוסיף" לקואליציה ערכים שונים בהתאם לסדר הכניסה שלו. ערך שאפלי של שחקן i מודד את תרומתו של i כלשון מאזניים בקואליציות המתגבשות על ידי סדר מקרי. נסתכל על משחק (N,v), כפי שראינו בהרצאה הנוסחה המפורשת ניתנת על ידי:

$$\psi_i(v) = \frac{1}{n!}\sum_{\pi \in S_n} \left(v\left(P_i(\pi) \cup \{i\}\right) - v\left(P_i(\pi)\right)\right)$$

כש $P_i(\pi) = \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$ (כלומר - $P_i(\pi)$ היא קבוצת כל השחקנים שנכנסו לקואליציה לפני שחקן i תחת סדר הכניסה המוכתב על ידי הפרמוטציה π).

שוק הכפפות

נחשב את ערך שאפלי של סוחר הכפפות מס' 1:

1. אם הוא נכנס ראשון לקואליציה, אין לו תרומה, כי $v(\{1\}) = 0$.

2. אם הוא נכנס שני, הוא מוסיף 1 לערך הקואליציה, כי

$$v\left(\{2,1\}\right)-v\left(\{2\}\right)=1=v\left(\{3,1\}\right)-v\left(\{3\}\right)$$

יש 2 תמורות בהן הוא נכנס שני: $2,1,3$ ו$3,1,2$.

3. אם הוא נכנס שלישי, הוא מוסיף 1 לערך הקואליציה, כי:

$$v\left(\{2,3,1\}\right)-v\left(\{2,3\}\right)=1=v\left(\{3,2,1\}\right)-v\left(\{3,2\}\right)$$

יש 2 תמורות בהן הוא נכנס שלישי: $2,3,1$ ו$3,2,1$.

סה"כ קיבלנו:

$$\psi_1\left(v\right)=\frac{1}{3!}\left(2\cdot1+2\cdot1\right)=\frac{2}{3}$$

40 תרגיל 13

40.1 משחקים שיתופיים

הגדרה 40.1 משחק פשוט
$\left(N,v\right)$ נקרא משחק פשוט אם לכל קואליציה $S\subset N$ מתקיים $v\left(S\right)\in\{0,1\}$.

הגדרה 40.2 שחקן וטו
יהי משחק $\left(N,v\right)$. שחקן נקרא שחקן וטו אם $v\left(S\right)=0$לכל קואליציה S שאינה מכילה את i.

הגדרה 40.3 שחקן דיקטטור
יהי משחק $\left(N,v\right)$. שחקן נקרא שחקן דיקטטור אם $i\in S\Leftrightarrow v\left(S\right)=1$.

טענה 40.4 אם $\left(N,v\right)$ משחק פשוט המקיים $v\left(S\right)+v\left(N\setminus S\right)=1$ לכל קואליציה $S\subset N$ אז יש לכל היותר שחקן וטו אחד, ואם הוא קיים אז הוא דיקטטור.

הגדרה 40.5 משחק אדיטיבי
משחק $\left(N,v\right)$ נקרא אדיטיבי אם לכל קואליציה S מתקיים: $v\left(S\right)=\sum_{i\in S}v\left(\{i\}\right)$

טענה 40.6 אם $\left(N,v\right)$ הוא משחק אדיטיבי אז מתקיים: $\forall i\in N:\ \ \psi_i\left(v\right)=v\left(\{i\}\right)$