Лекция 7

Small string optimization

- Короткие строки храним в самой структуре

```
enum { STRING_OPT_SIZE = 8 };
struct String
{
    size_t size;
    union
    {
        char *str;
        char data[STRING_OPT_SIZE];
    };
};
```

Функция realloc

- Определена в <stdlib.h>
  void *realloc(void *ptr, size_t newsize);
- Изменяет размер ранее выделенного блока ptr, возвращает адрес нового местоположения
- ptr может остаться на своем месте, но может быть и перемещен
- Если ptr перемещен, ptr разыменовывать нельзя
- Если не хватает памяти, возвращается NULL, ptr остается сохранным
- Если ptr == NULL, работает как malloc
- Если newsize == 0, работает как free

Vector implementation

- reserved – сколько памяти выделено
- size – сколько памяти используется
- data – данные
- При полном использовании выделенной памяти она расширяется в C раз с помощью realloc: C = 2 или C = 3/2 или другое

Vector vs List

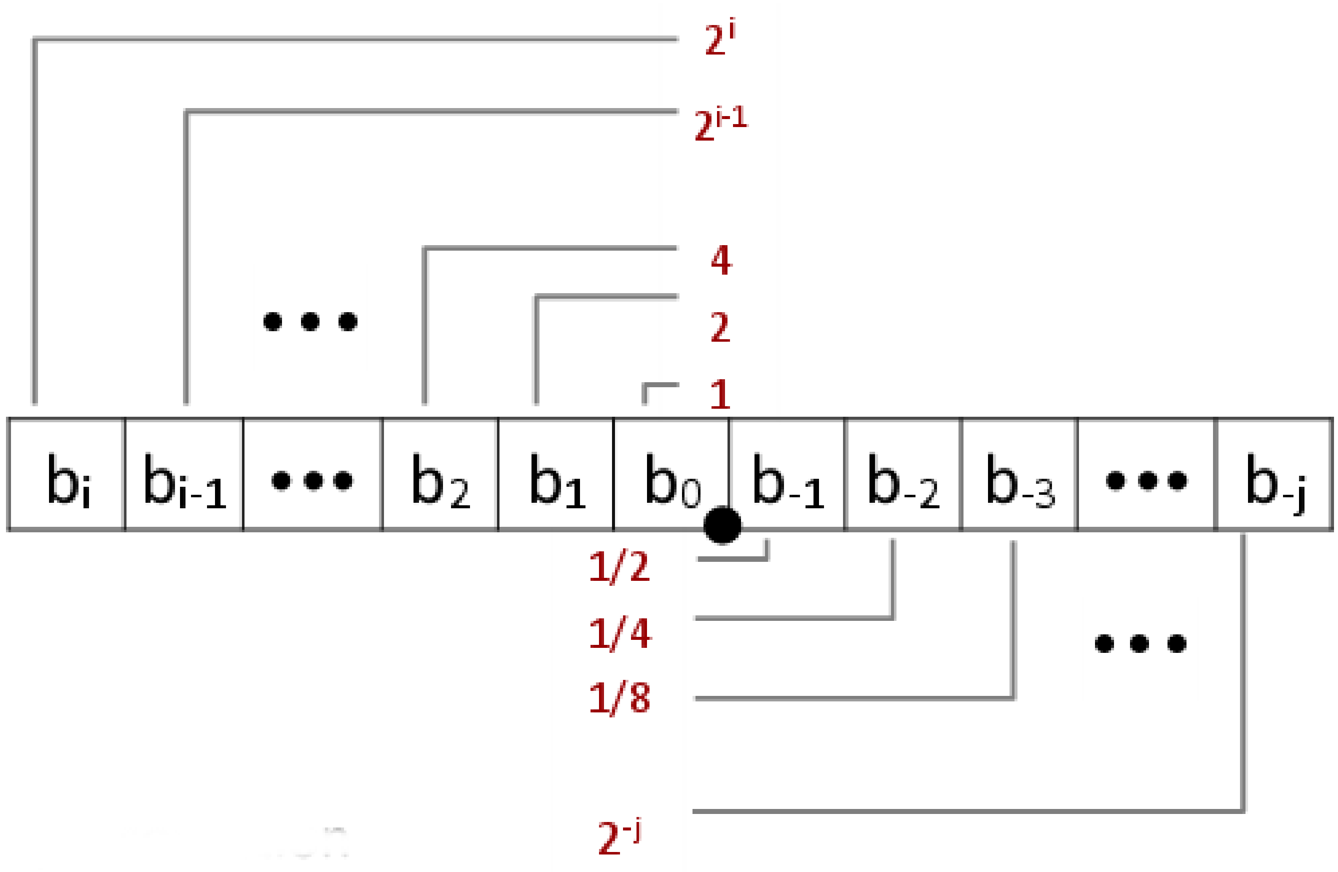
- Вектор
  - (+) расположен в памяти последовательно
  - (+) оптимальнее использует кучу
  - (?) вставка и удаление из середины за O(n)
-
- Список предпочтительнее при больших размерах одного элемента и добавлении/удалении из середины
- По умолчанию следует использовать вектор
- https://isocpp.org/blog/2014/06/stroustrup-lists

Floating Point

- Fixed point
- IEEE 754
- Операции с плавающей точкой
-
- http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/academic/class/15213-f15/www/lectures/04-float.pdf
-

Фиксированная точка (fixed point)

- Представление дробных чисел



Представление fixed point

- Фиксированное число бит для целой и дробной части
- Рассмотрим пример: 4 бита – целая часть, 4 бита – дробная часть
  - $1 \rightarrow 00010000_2$ (первые 4 бита (старшие) – целая часть, младшие 4 бита - дробная)
  - $2.5 \rightarrow 00101000_2$
  - $5.6875 \rightarrow 01011011_2$

Преобразование из десятичной записи

- Не всегда преобразование может быть выполнено точно
  - 10 = 2 * 5
  - 1/5 (0.2) – бесконечная периодичная двоичная дробь: 0.001100110011[0011]..
  - 00000011_2 → 0.1875: ошибка = 0.0125
  - 0.1_{10} = 0.0001100110011[0011]..
  - 00000010_2 → 0.125: ошибка 0.025
  - 00000001_2 → 0.0625: ошибка 0.0375 – хуже чем 0.025
  - 00000001_2 → 0.0625 – вес младшего разряда, ошибка преобразования не превышает половины веса младшего разряда (0.03125)

Операции с фиксированной точкой

- Сложение, вычитание – как целые числа
- Умножение:
  - Умножаем как целые числа, получаем 16-битный результат
  - 0010.0110 * 0100.0010 = 1001.11001100 округляем до 1001.1101
  - Точный результат: 9.796875, округленный: 9.8125, ошибка: .015625

Деление с фиксированой точкой

- 0100.0010 / 0010.0110
  - Деление как целые даст только целую часть
  - Дополняем справа 8 нулями, получаем 16-битное число 0100001000000000_2 (16896)
  - Делим как целое: 16896 / 38 = 444 = 110111100_2
  - Ставим точку на свое место и округляем 110111100_2 → 1.10111100_2 → 1.1100_2 = 1.75
  - Точные вычисления: 4.125 / 2.375 = 1.73684210…
  - Ошибка: 0.01315789...

Округление (rounding)

Значение	1.40	1.60	1.50	2.50	-1.50
К нулю (towards 0)	1	1	1	2	-1
Вниз (−∞)	1	1	1	2	-2
Вверх (+∞)	2	2	2	3	-1
К ближайшему целому вверх	1	2	2	3	-1
Ближайшее четное (умолчанию)	1	2	2	2	-2

Округление к ближайшему четному

- Статистически несмещенное (прочие способы округления статистически смещены)
  - При суммировании накапливается систематическая ошибка
- При применении к другим десятичным/битовым позициям:
  - Когда ровно между двумя возможными значениями округляем к четной последней цифре:

7.8949999	7.89(Less than half way)
7.8950001	7.90(Greater than half way)
7.8950000	7.90(Half way—round up)
7.8850000	7.88(Half way—round down)

Округление в fixed point

- Четное – младший значащий бит = 0
- “Half-Way” - биты справа от позиции округления равны 100000…
- Примеры (два знака после “.”):
  - $2.09375 = 10.00011_2 \rightarrow 10.00 = 2$ - down
  - $2.1875 = 10.00110_2 \rightarrow 10.01 = 2.25$ – up
  - $2.875 = 10.11100_2 \rightarrow 11.00 = 3$ – up
  - $2.625 = 10.10100_2 \rightarrow 10.10 = 2.5$ - down

IEEE Floating Point

- Стандарт IEEE 754
  - 1985 год, до этого – форматы производителей обрудования
  - Поддерживается в основных ЦП
- Появление обусловлено требованиями числовых расчетов
  - Стандарт для переполнений, антипереполнений, округления
  - Трудно реализуется аппаратно
    - Gcc поддерживает -ffast-math и прочие флаги

Представление чисел

- Числовая форма:

  $$(-1)^s \; M \;\; 2^E$$

  - Sign bit s определяет положительное или отрицательное число
  - Significand M мантисса определяет значение числа [1.0,2.0).
  - Exponent E порядок умножает мантиссу на степень 2

- Encoding
  - MSB s бит знака s
  - exp поле кодирует E (но не равно E)
  - frac поле кодирует M (но не равно M)

s	exp	frac

Точность

- Single precision (одиночная): 32 bits – тип float

s	exp	frac
1	8-bits	23-bits

- Double precision (двойная): 64 bits – тип double

s	exp	frac
1	11-bits	52-bits

- Extended precision (расширенная): 80 bits (Intel only)

s	exp	frac
1	15-bits	63 or 64-bits

Нормализованные значения

- exp != 0...0 && exp != 1...1 (не все нулевые и не все единичные биты)
- Порядок кодируется со смещением: E = exp – bias
  - Exp – беззнаковое значение
  - Bias = 2^{k-1}, k – число бит порядка:
    - Float: 127 (exp: 1..254, E: -126..127)
    - Double: 1023 (exp: 1..2046, E: -1022..1023)
- Мантисса кодируется со “скрытой” ведущей 1: M = $1.xxxxxx_2$
  - Xxxxxx: биты мантиссы
  - Минимальное значение: frac = 0..0 (M = 1.0)
  - Максимальное значение: frac = 1..1 (M = 2 – eps)

Пример

$v = (-1)^s\ M\ 2^E$
$E = Exp - Bias$

- Значение: float F = 15213.0
  - $15213_{10} = 11101101101101_2 = 1.1101101101101_2 \times 2^{13}$
- Мантисса:
  $M = 1.1101101101101_2$

$Frac = 11011011011010000000000_2$

- Порядок:
  $E = 13$
  $Bias = 127$
  $Exp = 140 = 10001100_2$
- Результат

```
0 10001100 11011011011010000000000
```

Денормализованные значения

$v = (-1)^s M\ 2^E$
$E = Exp - Bias$

- Условие: exp = 0..0 (все нулевые биты)
- Порядок: E = 1 – Bias
- Мантисса кодируется со “скрытым” 0: $M = 0.xxxxx_2$
  - Xxxxx – биты мантиссы
- Случаи:
  - Exp = 0..0, frac = 0.0
    - Представление 0
    - Поддерживается знак нуля (0.0 и -0.0)
    - Значение 0.0 – все нулевые биты
  - Exp = 0..0, frac != 0..0 (ненулевые биты мантиссы)
    - Самые близкие к 0 числа
    - На равном расстоянии друг от друга

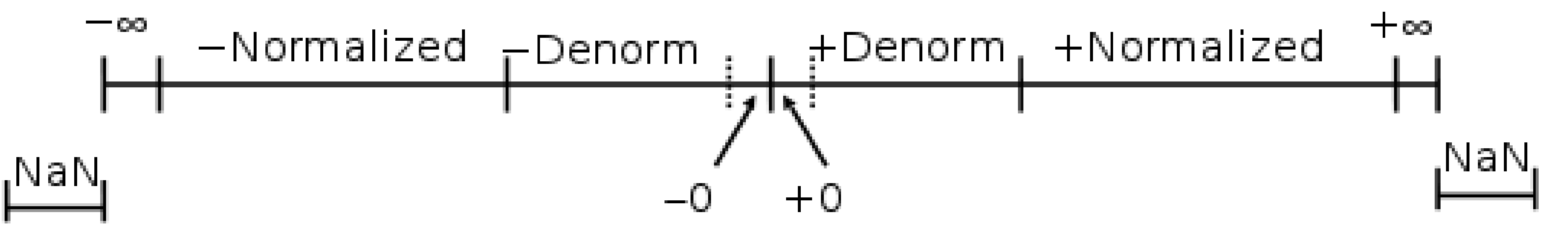
Специальные значения

$$v = (-1)^s\, M\, 2^E$$
$$E = Exp - Bias$$

- Exp = 1..1 (все единичные биты)
- Exp = 1..1, frac = 0..0 (все нулевые биты)
  - Представляет бесконечное значение
  - Для операций, результат которых переполняется
  - Сохраняет знак
  - Примеры: $1.0/0.0 = -1.0/-0.0 = +\infty$, $1.0/-0.0 = -\infty$
- Exp = 1..1, frac != 0..0 (ненулевые биты)
  - Нечисло (Not-a-number – NaN)
  - Для случаев, когда числовой результат не существует
  - Примеры: $\mathrm{sqrt}(-1)$, $\infty - \infty$, $\infty \times 0$

Визуализация значний

- Визуализация на числовой прямой

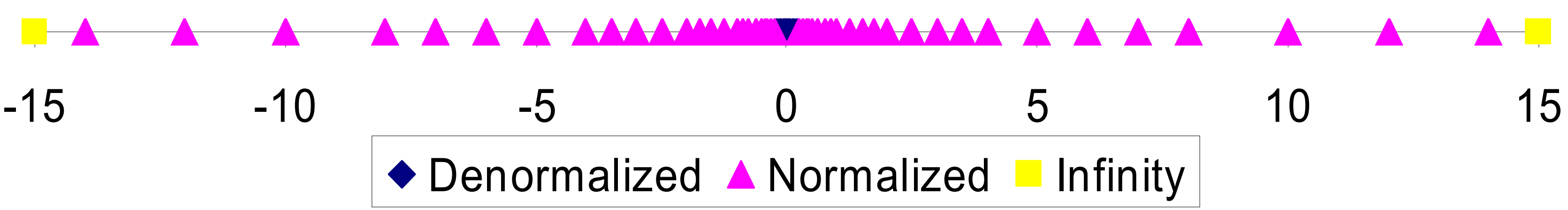


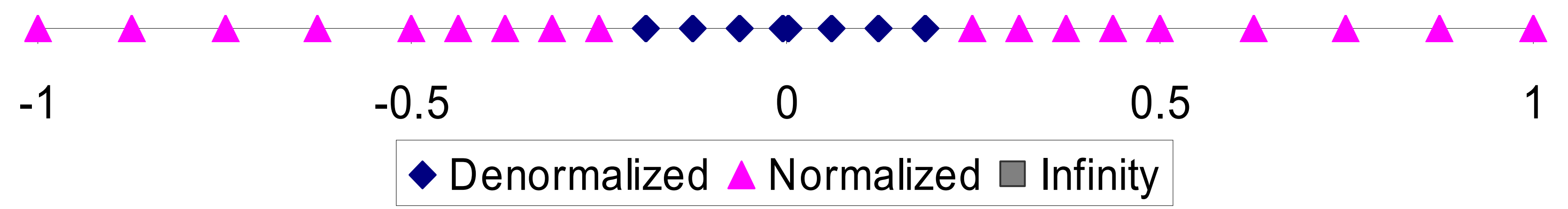
Распределение значений

- 6-битовый формат типа IEEE

s	exp	frac
1	3-bits	2-bits

- Значения “уплотняются” к нулю





Операции с плавающей точкой

- Сначала вычисляется точный результат
- Потом помещается в требуемую точность
  - Возможное переполнение (+INF или -INF) если порядок слишком велик
  - Округление чтобы поместить в мантиссу

FP Multiplication

- $(-1)^{s1}\ M1\ \ 2^{E1}\ \ \ x\ \ \ (-1)^{s2}\ M2\ \ 2^{E2}$
- Exact Result: $(-1)^{s}\ M\ \ 2^{E}$
  - Sign s: s1 ^ s2
  - Significand M: M1 x M2
  - Exponent E: E1 + E2

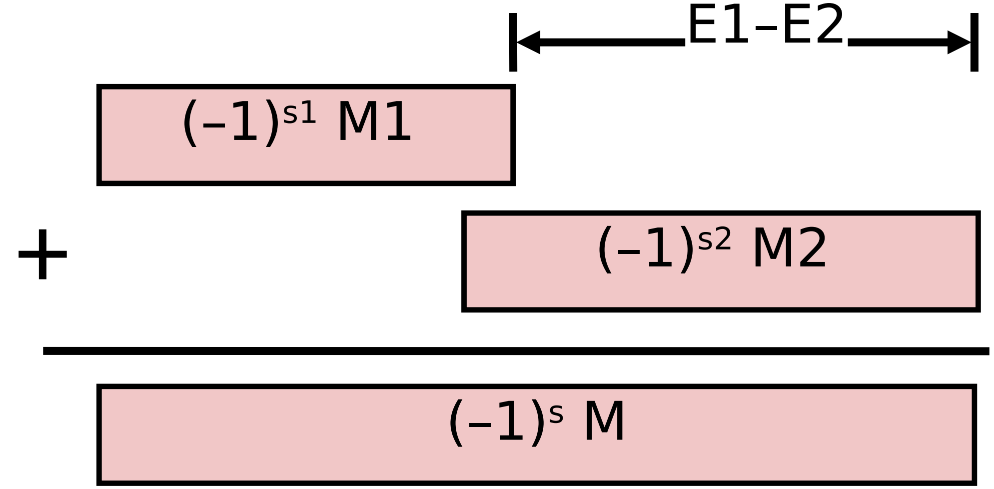
- Fixing
  - If M ≥ 2, shift M right, increment E
  - If E out of range, overflow
  - Round M to fit frac precision

- Implementation
  - Biggest chore is multiplying significands

Floating Point Addition

- $(-1)^{s1}\ M1\ \ 2^{E1}\ \ +\ \ (-1)^{s2}\ M2\ \ 2^{E2}$
  - Assume E1 > E2
- Exact Result: $(-1)^{s}\ M\ \ 2^{E}$
  - Sign s, significand M:
    - Result of signed align & add
  - Exponent E: E1
- Fixing
  - If M ≥ 2, shift M right, increment E
  - if M < 1, shift M left k positions, decrement E by k
  - Overflow if E out of range
  - Round M to fit frac precision

Get binary points lined up



Свойства операций

- Сложение неассоциативно: (a+b)+c != a+(b+c):

`(3.14+1e10)-1e10 = 0, 3.14+(1e10-1e10) = 3.14`

- Умножение неассоциативно:

`(1e20*1e20)*1e-20= inf, 1e20*(1e20*1e-20)= 1e20`

- Умножение недистрибутивно: a*(b+c) != a*b+a*c

`1e20*(1e20-1e20)= 0.0, 1e20*1e20 - 1e20*1e20 = NaN`