



**TIM TENTOR**  
Komunitas Tentor Alumni UGM & UNY



**FREE  
APPS  
ANDROID  
SIMULASI TES**

**ASYIK, KEREN, GAUL**

**COMPLETE**

# **1001 BANK SOAL MATEMATIKA**

**Top Update Bank Soal & Pembahasan**

- UN SMA • SBMPTN • UM UGM • SIMAK UI • UM Mandiri
  - UAS • Prediksi Tim Tentor

- Ringkasan Materi Dasar Lengkap
- Kupas Tuntas Semua Jenis Soal
- Metode Cerdik & Penalaran

## **SMA IPA**

**Kelas X, XI, & XII**

**TIM TENTOR**  
Komunitas Tentor Alumni UGM & UNY

COMPLETE  
**1001**  
**BANK**  
**SOAL**  
**MATEMATIKA**

**SMA IPA**  
Kelas X, XI, & XII

# Complete 1001 Bank Soal Matematika SMA/MA IPA Kelas 1, 2, 3

Penulis : Tim Tentor  
Penyunting : Tim Redaksi Bintang Wahyu  
Penata letak : Rustam setting  
Desain sampul : Oxta Estrada

**Redaksi: Bintang Wahyu**

Jl. Moh. Kahfi 2 No. 1 Cipedak Jagakarsa, Jakarta Selatan 12630; Telp: 021-786 3020  
(Ext. 102, 103); Faks. 021-787 4212; Email: bintangwahyu.redaksi@gmail.com

**Pemasaran: KawahMedia**

Jl. Kelapa Hijau No. 22, Jagakarsa, Jakarta Selatan 12620;  
Telp: 021-7888 1580; Fax: 021-7888 1860; Email: kawahmedia@gmail.com;  
Web: www.kawahditributor.com

Cetakan pertama, 2014

Hak cipta dilindungi undang-undang

---

Tim Tentor

Complete 1001 Bank Soal Matematika SMA/MA IPA Kelas X, XI, & XII; Tim Tentor;  
Penyunting: Tim Redaksi Bintang Wahyu – cet.1 – Jakarta: Bintang Wahyu, 2014.

vi + 514 hlm, 15,5 x 22,5 cm  
ISBN 979 - 795 - 930 - 9

1. Complete 1001 Bank Soal Matematika SMA/MA IPA Kelas X, XI, & XII
  - I. Judul
  - II. Tim Redaksi Bintang Wahyu

---

530



# KATA PENGANTAR

Hai teman-teman...

Masih kesulitan belajar Matematika? Setelah membaca buku "Complete 1001 Bank Soal Matematika SMA/MA IPA Kelas X, XI, & XII" ini, kalian pasti akan dapat memahami dan mengerjakan soal-soal matematika dengan mudah dan cepat.

Karena di buku ini terdapat materi-materi singkat yang akan membantu kalian memahami matematika. Dan bank soal yang diambil dari berbagai sumber yang pastinya akan membantu kalian untuk berlatih mengerjakan soal-soal. Buku ini sangat cocok untuk membantu kalian para siswa SMA/MA dalam menghadapi ulangan harian, ujian nasional (UN), dan ujian masuk perguruan tinggi (SBMPTN, SIMAK UI, UM UGM, dan lain-lain).

Untuk mendapatkan free apps android simulasi tes, kalian bisa mendownload di [www.forummedukasi.org](http://www.forummedukasi.org). Langkah-langkahnya sebagai berikut: masuk ke website [www.forummedukasi.org](http://www.forummedukasi.org), klik menu download, lalu klik link "Complete 1001 Bank Soal SMA". Kode buku "bintangwahyu379".

Penyusun



# Daftar ISI

Kata Pengantar .....	iii
Daftar Isi .....	iv
<b>Bab 1 Persamaan Kuadrat</b>	
Materi .....	1
Paket Soal Bab 1 .....	5
<b>Bab 2 Fungsi Kuadrat</b>	
Materi .....	27
Paket Soal Bab 2 .....	29
<b>Bab 3 Pertidaksamaan</b>	
Materi .....	47
Paket Soal Bab 3 .....	50
<b>Bab 4 Eksponen</b>	
Materi .....	57
Paket Soal Bab 4 .....	77
<b>Bab 5 Logaritma</b>	
Materi .....	95
Paket Soal Bab 5 .....	97
<b>Bab 6 Lingkaran</b>	
Materi .....	119
Paket Soal Bab 6 .....	123
<b>Bab 7 Matriks</b>	
Materi .....	145
Paket Soal Bab 7 .....	149



<b>Bab 8</b>	<b>Peluang</b>	
Materi .....	171	
Paket Soal Bab 8 .....	175	
<b>Bab 9</b>	<b>Trigonometri</b>	
Materi .....	195	
Paket Soal Bab 9 .....	201	
<b>Bab 10</b>	<b>Program Linier</b>	
Materi .....	223	
Paket Soal Bab 10 .....	226	
<b>Bab 11</b>	<b>Fungsi Komposisi &amp; Invers</b>	
Materi .....	253	
Paket Soal Bab 11 .....	257	
<b>Bab 12</b>	<b>Limit</b>	
Materi .....	275	
Paket Soal Bab 12 .....	279	
<b>Bab 13</b>	<b>Differensial</b>	
Materi .....	297	
Paket Soal Bab 13 .....	303	
<b>Bab 14</b>	<b>Integral</b>	
Materi .....	321	
Paket Soal Bab 14 .....	330	
<b>Bab 15</b>	<b>Dimensi Tiga</b>	
Materi .....	355	
Paket Soal Bab 15 .....	361	
<b>Bab 16</b>	<b>Polinomial</b>	
Materi .....	387	
Paket Soal Bab 16 .....	390	
<b>Bab 17</b>	<b>Transformasi</b>	
Materi .....	413	
Paket Soal Bab 17 .....	418	
<b>Bab 18</b>	<b>Vektor</b>	
Materi .....	441	
Latihan Bab 18 .....	444	



<b>Bab 19 Logika Matematika</b>	
Materi .....	469
Paket Soal Bab 19.....	472
<b>Bab 20 Barisan &amp; Deret</b>	
Materi .....	487
Latihan Bab 20 .....	490
Kunci Jawaban.....	512
Daftar Pustaka .....	513



$$a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$Ra + 40a + \dots = 0$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$

$$y = ut \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

1

# PERSAMAAN KUADRAT



## A Bentuk Umum dan Diskriminan

Bentuk umum persamaan kuadrat (PK) adalah:

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

Akar-akar suatu persamaan kuadrat dapat dilihat dari nilai Diskriminan (D)

$$D = b^2 - 4ac$$

- $D \geq 0$ , berarti PK mempunyai **dua akar nyata** (real).  
Jika:  $D = 0$ , Berarti PK mempunyai **akar kembar**.
- $D > 0$ , berarti PK mempunyai **akar-akar nyata dan berlainan**.
- $D < 0$ , berarti PK mempunyai **akar tidak nyata** (imajiner).



## B Penyelesaian Persamaan Kuadrat

Penyelesaian persamaan kuadrat dapat dicari dengan dua cara, yaitu:

- Jika  $D > 0$  dengan pemfaktoran  $a(x - x_1)(x - x_2) = 0$
- Dengan rumus:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$





## C Jumlah, Selisih, dan Hasil Kali Akar

Jika  $x_1$  dan  $x_2$  akar-akar persamaan kuadrat maka:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 - x_2 = \pm \frac{\sqrt{D}}{a}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 \cdot x_2(x_1 + x_2)$$

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$$

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1 \cdot x_2(x_1 - x_2)$$

$$x_1^4 + x_2^4 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2]^2 - 2(x_1 \cdot x_2)^2$$

$$x_1^4 - x_2^4 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2][(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)]$$

### RUMUS PRAKTIS

Jika akar-akar PK adalah  $x_1$  dan  $x_2$  dengan  $x_1 = x_2 + n$  maka:

$$D = (n \cdot a)^2$$

Jika  $x_1$  dan  $x_2$  akar-akar sebuah persamaan kuadrat, dan berlaku  $x_1 = nx_2$  maka:

$$nb^2 = (n + 1)^2 a \cdot c$$



## D Sifat-sifat Akar Persamaan Kuadrat

Perhatikan hubungan antara jenis akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$  pada persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Jenis akar	Akar-akar		
	$x_1$	$x_2$	Syarat
Kedua akar real positif	+	+	$D \geq 0$ $x_1 + x_2 > 0$ $x_1 \cdot x_2 > 0$



Kedua akar real negatif	-	-	$D \geq 0$ $x_1 + x_2 < 0$ $x_1 \cdot x_2 > 0$
Kedua akar berlawanan tanda	+	-	$D > 0$ $x_1 \cdot x_2 < 0$
Kedua akar real berlawanan		$x_1 = -x_2$	$D > 0$ $x_1 + x_2 = 0$ $x_1 \cdot x_2 < 0$

## E Menyusun Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat dengan akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$  adalah:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \text{ atau } x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$$

Diketahui  $x_1$  dan  $x_2$  adalah akar-akar dari  $ax^2 + bx + c$  maka dapat disusun persamaan kuadrat yang baru sebagai berikut:

1. Jika akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah  $nx_1$  dan  $nx_2$ , maka invers akarnya adalah  $\frac{x_1}{n}$  dan  $\frac{x_2}{n}$ . Persamaan kuadrat baru yang diperoleh adalah:

$$a\left(\frac{x}{n}\right)^2 + b\left(\frac{x}{n}\right) + c = 0$$

2. Jika akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah  $\frac{1}{x_1}$  dan  $\frac{1}{x_2}$  (berkebalikan) maka persamaan kuadrat baru yang diperoleh adalah:

$$cx^2 + bx + a = 0$$

3. Jika akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah  $-x_1$  dan  $-x_2$ , maka persamaan kuadrat baru yang diperoleh adalah:

$$ax^2 - bx + c = 0$$

4. Jika akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah  $x_1 + n$  dan  $x_2 + n$  maka invers akarnya  $x_1 - n$  dan  $x_2 - n$ . Persamaan kuadrat baru yang diperoleh adalah:

$$a(x - n)^2 + b(x - n) + c = 0$$

5. Jika akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah  $x_1 - n$  dan  $x_2 - n$  maka invers  $x_1 + n$  dan  $x_2 + n$ . Persamaan kuadrat baru yang diperoleh adalah:

$$a(x + n)^2 + b(x + n) + c = 0$$

6. Jika akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah  $x_1^2$  dan  $x_2^2$  maka persamaan kuadrat baru yang diperoleh adalah:

$$a^2x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$$

7. Jika akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah  $\frac{x_1}{x_2}$  dan  $\frac{x_2}{x_1}$  maka persamaan kuadrat baru yang diperoleh adalah:

$$acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$$

8. Jika akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah  $x_1 + x_2$  dan  $x_1 \cdot x_2$  maka persamaan kuadrat baru yang diperoleh adalah:

$$a^2x^2 + (ab - ac)x - bc = 0$$

9. Jika akar-akar persamaan kuadrat yang baru adalah  $x_1^3$  dan  $x_2^3$  maka persamaan kuadrat baru diperoleh:

$$a^3x^3 - (3abc - b^3)x + c^3 = 0$$





# PAKET SOAL

## SOAL UN

1. Diketahui persamaan kuadrat  $x^2 + (k - 3)x + 9 = 0$ . Nilai  $k$  yang menyebabkan persamaan tersebut mempunyai akar-akar kembar adalah ....
- A.  $k = 6$  atau  $k = -6$       D.  $k = 9$  atau  $k = -3$   
B.  $k = 3$  atau  $k = -3$       E.  $k = 12$  atau  $k = -3$   
C.  $k = 6$  atau  $k = 3$

Catatan

## SOAL UN SMA IPA

2. Diketahui persamaan kuadrat  $x^2 - (p-2)x - 6 = 0$  adalah  $m$  dan  $n$  yang memenuhi  $m^2 + 2mn + n^2 = 9$ . Nilai  $p$  yang memenuhi adalah ....
- A.  $p = -5$  atau  $p = 1$       D.  $p = 1$  atau  $p = 3$   
B.  $p = -1$  atau  $p = 3$       E.  $p = 1$  atau  $p = 5$   
C.  $p = -1$  atau  $p = 5$

## SOAL UN SMA IPA

3. Persamaan kuadrat  $x^2 + 4px + 4 = 0$  mempunyai akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$ . Jika  $x_1x_2^2 + x_1^2x_2 = 32$  maka nilai  $p = \dots$
- A. -4      D. 4  
B. -2      E. 8  
C. 2

## SOAL SNMPTN MATDAS

4. Jika  $p_1 + 1$  dan  $p_2 - 1$  adalah akar-akar persamaan  $x^2 - 4x + a = 0$  maka nilai  $a$  adalah ....
- A. 0      D. 3  
B. 1      E. 4  
C. 2

## SOAL UN SMA IPA

5. Jika  $p$  dan  $q$  adalah akar-akar persamaan  $x^2 - 5x - 1 = 0$  maka persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya  $2p+1$  dan  $2q+1$  adalah ....

**Catatan**

- A.  $x^2 + 10x + 11 = 0$       D.  $x^2 - 12x + 7 = 0$   
B.  $x^2 - 10x + 7 = 0$       E.  $x^2 - 10x + 11 = 0$   
C.  $x^2 - 12x - 7 = 0$

**SOAL UN SMA IPA**

6. Akar-akar persamaan kuadrat  $2x^2 + mx + 16 = 0$  adalah  $\alpha$  dan  $\beta$ . Jika  $\alpha = 2\beta$  dan  $\alpha, \beta$  positif maka  $m = \dots$
- A. -12      D. 8  
B. -6      E. 12  
C. 6

**SOAL UN**

7. Akar-akar persamaan  $x^2 + (k - 1)x + 2 = 0$  adalah  $\alpha$  dan  $\beta$ . Jika  $\alpha = 2\beta$  dan  $k > 0$  maka nilai  $k = \dots$
- A. 2      D. 6  
B. 3      E. 8  
C. 4

**SOAL UM UGM MATDAS**

8. Persamaan kuadrat

$$x^2 - (3 - 2 \log m)x - 2 \log 16m = 0$$

mempunyai akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$ .

Jika  $x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 = -6$  maka  ${}^m \log 8 = \dots$

- A. -1 atau  $\frac{3}{2}$       D.  $\frac{1}{8}$  atau 4  
B.  $-\frac{3}{4}$  atau 1      E. 4 atau 8  
C.  $\frac{1}{16}$  atau 8

**SOAL UN SMA IPA**

9. Persamaan kuadrat  $2x^2 - 2(p - 4)x + p = 0$  mempunyai dua akar real berbeda. Batas-batas nilai  $p$  yang memenuhi adalah ...
- A.  $p \leq 2$  atau  $p \geq 8$       D.  $2 \leq p \leq 8$   
B.  $p < 2$  atau  $p > 8$       E.  $-8 \leq p \leq -2$   
C.  $p < -8$  atau  $p > -2$



**SOAL SBMPTN**

10. Persamaan kuadrat  $x^2 + 2x + (c+2) = 0$  mempunyai persamaan akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$ . Jika  $x_1 > 1$  dan  $x_2 < 1$  maka ....

- A.  $c < -1$
- B.  $c < -5$
- C.  $c > -5$
- D.  $-5 < c < -1$
- E.  $c < -3$  atau  $c > -1$

**SOAL UN SMA IPA**

11. Persamaan kuadrat  $x^2 - (k-1)x - k + 4 = 0$  tidak mempunyai akar-akar real. Batas-batas nilai  $k$  yang mungkin adalah ....

- A.  $-5 < k < 3$
- B.  $-3 < k < 5$
- C.  $k < -3$  atau  $k > 5$
- D.  $k \leq -3$  atau  $k \geq 5$
- E.  $k \leq -5$  atau  $k \geq 3$

**SOAL UM UGM MATDAS**

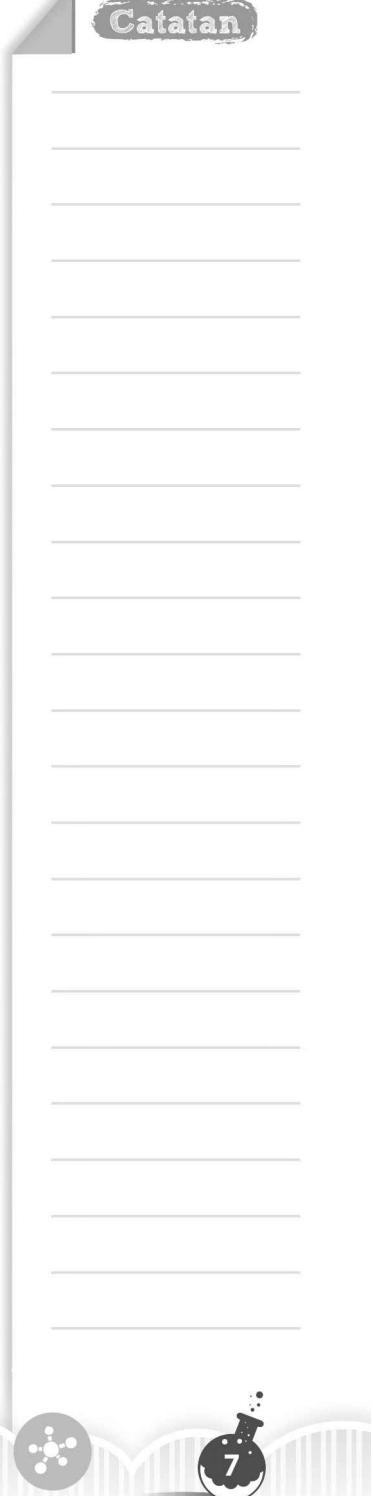
12. Jika akar-akar persamaan  $\frac{x^2 + ax}{bx - 2} = \frac{m+2}{m-2}$  berlwanan dan  $a \neq b$  maka nilai  $m$  adalah ....

- A.  $\frac{a+b}{a-b}$
- B.  $\frac{2(a+b)}{a-b}$
- C.  $a+b$
- D.  $\frac{2(b+a)}{b-a}$
- E.  $\frac{b+a}{b-a}$

**SOAL SBMPTN MATDAS**

13. Jika selisih akar-akar  $x^2 + 2cx + (19+c) = 0$  adalah

- 2 maka nilai  $30 + c - c^2$  adalah ....
- A. -20
  - B. -10
  - C. 0
  - D. 10
  - E. 20



## Catatan

### SOAL SIMAK UI MATDAS

14. Jika kedua akar persamaan  $px^2 + 8x + 3p = 0$  bernilai negatif maka jumlah kuadrat kedua akar-akar tersebut akan bernilai ....
- A. maksimum 30      D. maksimum 6  
B. minimum 30      E. minimum  $-15/2$   
C. minimum 6

### SOAL UM UGM MATDAS

15. Jika  $\alpha + 2\beta = 5$  dan  $\alpha\beta = -2$  maka persamaan kuadrat yang akar-akarnya  $\frac{\alpha}{\alpha+1}$  dan  $\frac{2\beta}{2\beta+1}$  adalah....
- A.  $x^2 - \frac{7}{2}x - 1 = 0$       D.  $2x^2 + 3x + 4 = 0$   
B.  $x^2 + \frac{7}{2}x + 3 = 0$       E.  $2x^2 + 3x - 4 = 0$   
C.  $x^2 + \frac{7}{2}x - 3 = 0$

### SOAL SIMAK UI K.IPA

16. Misalkan  $x^2 + b_1x + c_1 = 0$  mempunyai akar-akar  $\alpha$  dan  $\beta$ , dengan  $(\alpha - \beta)^2 = 4$ . Jika  $x^2 + b_2x + c_2 = 0$  mempunyai akar-akar  $\alpha + \beta$  dan  $\alpha - \beta$  maka rasio  $c_2 : b_1$  yang mungkin adalah ....
- A. 2 : 1      D. 1 : 3  
B. 1 : 2      E. 3 : 1  
C. 1 : 1

### SOAL SNMPTN MATDAS

17. Jika 2 adalah satu-satunya akar persamaan kuadrat  $\frac{1}{4}x^2 + bx + a = 0$  maka nilai  $a + b$  adalah ....
- A. 32      D. -2  
B. 2      E. -32  
C. 0



## **SOAL SNMPTN K.DASAR**

## Catatan

18. Persamaan  $x^2 + ax + (a - 1) = 0$  mempunyai akar-akar  $x_1 > 1$  dan  $x_2 < 1$  untuk ....

A.  $a \neq 2$  (D)  $a < 0$   
B.  $a > 2$  (E)  $a < 2$   
C.  $a > 0$

SOAL UM UGM MATDAS



SOAL SIMAK UI K. IPA

20. Akar-akar positif dari persamaan kuadrat

$x^2 + mx + n = 0$  adalah  $\alpha$  dan  $\beta$ .

Jika  $2\beta - \alpha = 12$  dan  $\alpha^2 = 4\beta$  maka  $m + n = \dots$

- A. -39                          D. 16  
B. -16                          E. 39  
C. 0

**SOAL UM UGM MATDAS**



SOAL SIMAK UI

22.  $x_1$  dan  $x_2$  adalah bilangan bulat yang merupakan akar-akar persamaan kuadrat  $x^2 - (2p+4)x + (3p+4) = 0$  dimana p adalah suatu konstanta. Jika  $x_1, p, x_2$  merupakan tiga suku pertama dari suatu deret geometri maka suku ke-12 dari deret geometri tersebut adalah ....

- A.  $-1$   
B.  $1$   
C.  $6+2\sqrt{5}$   
D.  $6-2\sqrt{5}$   
E.  $4$

SOAL SNMPTN K.IPA

23. Hasil kali akar-akar persamaan:

$$\begin{vmatrix} 3x-1 & 3 \\ x+1 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \text{ adalah ...}$$

- A.  $-\frac{2}{3}$

B.  $-\frac{4}{3}$

C.  $-\frac{5}{3}$

D.  $\frac{2}{3}$

E.  $\frac{4}{3}$

# Pembahasan

## 1. Pembahasan:

Syarat persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  mempunyai akar-akar kembar adalah:

$$D = 0 \text{ atau } b^2 - 4ac = 0$$

Diketahui:

Persamaan kuadrat  $x^2 + (k-3)x + 9 = 0$  agar mempunyai akar-akar kembar maka:

$$(k-3)^2 - 4 \cdot 9 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 6k + 9 - 36 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 6k - 27 = 0$$

$$\Rightarrow (k+3)(k-9) = 0$$

$$\Rightarrow k = -3 \text{ atau } k = 9$$

Jawaban: D

Catatan

## 2. Pembahasan:

Jika, persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  mempunyai akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$  maka:

- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$

- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Pengkuadratan suku dua:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$



## Catatan

Diketahui:

Persamaan kuadrat  $x^2 - (p-2)x - 6 = 0$  memiliki akar-akar  $m$  dan  $n$ .

Sehingga,

$$m+n = \frac{-(p-2)}{1} = p-2$$

$m$  dan  $n$  memenuhi  $m^2 + 2mn + n^2 = 9$

$$(m+n)^2 = m^2 + 2mn + n^2$$

$$\Rightarrow (p-2)^2 = 9$$

$$\Rightarrow p^2 - 4p + 4 = 9$$

$$\Rightarrow p^2 - 4p - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (p-5)(p+1) = 0$$

$$\Rightarrow p=5 \text{ atau } p=-1$$

**Jawaban: C**

### 3. Pembahasan:

Persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  mempunyai akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$  maka:

$$\bullet \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$\bullet \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Diketahui: persamaan kuadrat  $x^2 + 4px + 4 = 0$  mempunyai akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$ .  
Sehingga:

$$\bullet \quad x_1 + x_2 = -\frac{4p}{1} = -4p$$

$$\bullet \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{4}{1} = 4$$

**Catatan**

$$\begin{aligned} \text{Jika, } x_1x_2^2 + x_1^2x_2 &= 32 \\ \Rightarrow x_1x_2(x_2 + x_1) &= 32 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 4(-4p) = 32 \Rightarrow -16p = 32 \Rightarrow p = \frac{32}{-16} = -2$$

**Jawaban: B****4. Pembahasan:**

Persamaan kuadrat:  $ax^2 + bx + c = 0$  mempunyai akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$  maka:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Diketahui:

$p+1$  dan  $p-1$  merupakan akar-akar dari

$x^2 - 4x + a = 0$  maka:

$$\bullet \quad (p+1) + (p-1) = \frac{-(-4)}{1} = 4$$

$$\Rightarrow 2p = 4$$

$$\Rightarrow p = 2$$

$$\bullet \quad (p+1)(p-1) = \frac{a}{1} = a$$

$$\Rightarrow (2+1)(2-1) = a$$

$$\Rightarrow (3)(1) = a \Rightarrow a = 3$$

**Jawaban: D****5. Pembahasan:**

Persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  memiliki akar  $p$  dan  $q$  maka persamaan kuadrat baru yang memiliki akar-akar  $kp+n$  dan  $kq+n$  adalah:

$$a\left(\frac{x-n}{k}\right)^2 + b\left(\frac{x-n}{k}\right) + c = 0$$



## Catatan

Diketahui:

$x^2 - 5x - 1 = 0$  memiliki akar-akar p dan q maka persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya

$(2p+1)$  dan  $(2q+1)$  adalah:

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{x-1}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{4}\right) - \left(\frac{5x - 5}{2}\right) - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - 2x + 1) - 2(5x - 5) - 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 7 = 0$$

Jawaban: D

### 6. Pembahasan:

Jika  $\alpha$  dan  $\beta$  adalah akar-akar dari

$ax^2 + bx + c = 0$ , dengan  $\alpha = n\beta$  maka berlaku:

$$nb^2 = ac(n+1)^2$$

Persamaan kuadrat  $2x^2 + mx + 16 = 0$  memiliki akar-akar  $\alpha$  dan  $\beta$ , dengan  $\alpha = 2\beta$  maka:

$$2 \cdot m^2 = 2 \cdot 16(2+1)^2$$

$$\Rightarrow 2m^2 = 32 \cdot 9 = 288$$

$$\Rightarrow m^2 = 144$$

$$\Rightarrow m = \pm 12$$

Karena  $\alpha$  dan  $\beta$  positif maka  $m = -12$

Jawaban: A

### 7. Pembahasan:

Persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  dengan akar-akar  $\alpha$  dan  $\beta$  maka:

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} \text{ dan } \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a}$$

## Catatan

Diketahui:

Persamaan kuadrat  $x^2 + (k-1)x + 2 = 0$  dengan akar-akar  $\alpha$  dan  $\beta$  dimana  $\alpha = 2\beta$  maka:

$$\bullet \quad \alpha + \beta = \frac{-(k-1)}{1} = -k + 1$$

$$\Rightarrow 2\beta + \beta = -k + 1$$

$$\Rightarrow 3\beta = -k + 1 \dots (i)$$

$$\bullet \quad \alpha \cdot \beta = \frac{2}{1} = 2$$

$$\Rightarrow 2\beta \cdot \beta = 2$$

$$\Rightarrow 2\beta^2 = 2$$

$$\Rightarrow \beta^2 = 1 \Rightarrow \beta = \sqrt{1} = \pm 1 \dots (ii)$$

Dengan mensubstitusikan (ii) ke (i), diperoleh:

$$x = 1$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 1 = -k + 1$$

$$\Rightarrow k = -2$$

$$x = -1$$

$$\Rightarrow 3(-1) = -k + 1$$

$$\Rightarrow k = 4$$

### Cara Cepat:

Persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  dengan

akar-akar  $\alpha$  dan  $\beta$  dengan  $\alpha = n\beta$  maka:

$$nb^2 = a \cdot c (n+1)^2$$

Dari persamaan kuadrat  $x^2 + (k-1)x + 2 = 0$  de-

ngan akar-akar  $\alpha$  dan  $\beta$  dimana  $\alpha = 2\beta$  maka:

$$2 \cdot (k-1)^2 = 1 \cdot 2 \cdot (2+1)^2$$

$$\Rightarrow 2k^2 - 4k + 2 = 18$$

$$\Rightarrow 2k^2 - 4k - 16 = 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (k+2)(k-4) = 0$$



**Catatan**

$\Rightarrow k = -2$  atau  $k = 4$   
Karena  $k > 0$  maka  $k = 4$ .

**Jawaban: C****8. Pembahasan:**

Dari persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  dengan akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$  maka:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Bentuk logaritma:

- ${}^a \log b \cdot c = {}^a \log b + {}^a \log c$
- ${}^a \log b = c \Rightarrow {}^b \log a = \frac{1}{c}$
- ${}^a \log b^n = n \cdot {}^a \log b$

Diketahui:

$x^2 - (3 - {}^2 \log m)x - {}^2 \log 16m = 0$ , akar-akarnya  $x_1$  dan  $x_2$

$x_1 x_2 + x_1^2 x_2 = -6$  maka:

$$x_1 x_2 (x_1 + x_2) = -6$$

$$- {}^2 \log 16m \cdot [3 - {}^2 \log m] = -6$$

$$-( {}^2 \log 16 + {}^2 \log m) (3 - {}^2 \log m) = -6$$

$$-(4 + {}^2 \log m) (3 - {}^2 \log m) = -6$$

$$-12 + 4 \cdot {}^2 \log m - 3 \cdot {}^2 \log m + ({}^2 \log m)^2 = -6$$

$$({}^2 \log m)^2 + {}^2 \log m - 6 = 0$$

$$({}^2 \log m - 2)({}^2 \log m + 3) = 0$$

$${}^2 \log m = 2 \text{ atau } {}^2 \log m = -3$$

$$\begin{aligned} {}^m \log 2 &= \frac{1}{2} \quad \text{atau} \quad {}^m \log 2 = -\frac{1}{3} \\ {}^m \log 8 &= {}^m \log 2^3 \quad {}^m \log 8 = {}^m \log 2^3 \\ &= 3 \cdot {}^m \log 2 \quad = 3 \cdot {}^m \log 2 \\ &= \frac{3}{2} \quad = -1 \end{aligned}$$

### Catatan

**Jawaban: A**

#### 9. Pembahasan:

Persamaan kuadrat memiliki dua akar real yang berbeda maka:

$$D > 0 \text{ atau } b^2 - 4ac > 0$$

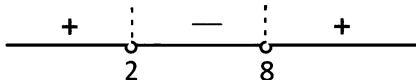
Persamaan kuadrat  $2x^2 - 2(p-4)x + p = 0$  memiliki dua akar real yang berbeda maka:

$$\Rightarrow (-2(p-4))^2 - 4 \cdot 2 \cdot p > 0 \Rightarrow (-2p+8)^2 - 8p > 0$$

$$\Rightarrow 4p^2 - 32p + 64 - 8p > 0 \Rightarrow 4p^2 - 40p + 64 > 0$$

$$\Rightarrow p^2 - 10p + 16 > 0 \Rightarrow (p-2)(p-8) > 0$$

$$p = 2 ; p = 8$$



$$p < 2 \text{ atau } p > 8$$

**Jawaban: B**

#### 10. Pembahasan:

Persamaan kuadrat  $x^2 + 2x + (c+2) = 0$  mempunyai akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$  maka:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2}{1} = -2$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c+2}{1} = c+2$$

Jika,  $x_1 > 1$  dan  $x_2 < 1$

Sehingga, untuk  $x_1 + x_2 = -2$



## Catatan

Jika diambil batas bawah untuk  $x_1$  mendekati 1 maka  $x_2$  harus bernilai mendekati -3.

Sehingga, untuk  $x_1 \cdot x_2 = c+2$ , karena  $x_1 > 1$  dan  $x_2 < 1$  dan  $x_1$  mendekati 1 dan  $x_2$  harus bernilai mendekati -3 maka:

$$x_1 \cdot x_2 > c+2$$

$$-3 > c+2$$

$$-3-2 > c$$

$$-5 > c \text{ atau } c < -5$$

**Jawaban: B**

### 11. Pembahasan:

Persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$

Nilai diskriminannya ( $D$ ) =  $b^2 - 4ac$

Jika:

- $D > 0$  maka akar-akarnya nyata berlainan
- $D = 0$  maka akar-akarnya kembar
- $D < 0$  maka akar-akarnya tidak nyata (imajiner)

Diketahui:

Persamaan kuadrat  $x^2 - (k-1)x - k + 4 = 0$  tidak mempunyai akar-akar real.

Maka:

$$D < 0$$

$$\Rightarrow(-(k-1))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-k+4) < 0$$

$$\Rightarrow -(k-1)^2 + 4k - 16 < 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 2k + 1 + 4k - 16 < 0$$

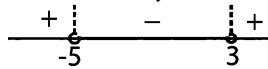
$$\Rightarrow k^2 + 2k - 15 < 0$$

$$\Rightarrow (k+5)(k-3) < 0$$

Diperoleh, pembuat nol pertidaksamaannya adalah:

$$k = -5 \text{ dan } k = 3$$

Daerah hasilnya:



Jadi, nilai  $k$  yang memenuhi adalah:  
 $-5 < k < 3$

**Jawaban: A**

### 12. Pembahasan:

$$\frac{x^2 + ax}{bx - 2} = \frac{m+2}{m-2}$$

$$\Leftrightarrow (m-2)x^2 + (ma-2a-mb-2b)x + 2m+4 = 0$$

Akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$ , dengan  $x_1 = -x_2$  (berlawanan)  
 Berlaku:  $x_1 + x_2 = 0$

$$\frac{-(ma-2a-mb-2b)}{m-2} = 0$$

$$m(a-b) = 2(a+b) \Rightarrow m = \frac{2(a+b)}{a-b}$$

**Jawaban: B**

### 13. Pembahasan:

Diketahui persamaan kuadrat

$$x^2 + 2cx + (19+c) = 0$$

Misal, akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah  $x_1$  dan  $x_2$

i.  $x_1 + x_2 = -\frac{2c}{1} = -2c$

ii.  $x_1 \cdot x_2 = \frac{(19+c)}{1} = 19+c$

iii.  $x_1 - x_2 = 2$

$$(x_1 - x_2)^2 = 2^2 = 4$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 4$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 4$$

$$(2c)^2 - 4(19+c) = 4$$

$$4c^2 - 4c - 80 = 0$$



**Catatan**

$$c^2 - c - 20 = 0$$

$$-20 = c - c^2$$

$$-20 + 30 = 30 + c - c^2$$

$$10 = 30 + c - c^2$$

**Jawaban: D**

**14. Pembahasan:**

- $px^2 + 8x + 3p = 0$ , akar-akarnya  $x_1$  dan  $x_2$  dengan

$$x_1 < 0, x_2 < 0$$

- $x_1 + x_2 < 0$

$$-\frac{8}{p} < 0$$

$$p > 0$$

- $x_1 \cdot x_2 > 0$

$$3 > 0$$

- $D \geq 0$

$$64 - 4 \cdot p \cdot 3p \geq 0$$

$$16 - 3p^2 \geq 0$$

$$3p^2 \leq 16$$

$$p^2 \leq \frac{16}{3}$$

$$y = x_1^2 + x_2^2$$

$$= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2$$

$$= \left( -\frac{8}{p} \right)^2 - 2 \cdot 3$$

$$= \frac{64}{p^2} - 6$$

$$= 64 \cdot \frac{1}{p^2} - 6 \geq 64 \cdot \frac{3}{16} - 6 = 6$$

Jadi, jumlah kuadrat kedua akar minimum = 6.

**Jawaban: C**

**15. Pembahasan:**

Diketahui:  $\alpha + 2\beta = 5$  dan  $\alpha \cdot \beta = -2$

$$y_1 = \frac{\alpha}{\alpha+1} \text{ dan } y_2 = \frac{2\beta}{2\beta+1}, \text{ maka:}$$

$$y_1 + y_2 = \frac{\alpha(2\beta+1) + 2\beta(\alpha+1)}{(\alpha+1)(2\beta+1)}$$

$$= \frac{4\alpha\beta + \alpha + 2\beta}{2\alpha\beta + \alpha + 2\beta + 1}$$

$$= \frac{4 \cdot (-2) + 5}{2 \cdot (-2) + 5 + 1} = \frac{-3}{2}$$

$$y_1 \cdot y_2 = \frac{2\alpha\beta}{2\alpha\beta + \alpha + 2\beta + 1}$$

$$= \frac{2(-2)}{2(-2) + 5 + 1} = \frac{-4}{2}$$

Ingat, persamaan kuadrat dengan akar-akar  $y_1$  dan  $y_2$  dimana:

$y_1 + y_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{2}$  dan  $y_1 \cdot y_2 = \frac{c}{a} = \frac{-4}{2}$  maka persamaan kuadratnya adalah  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Sehingga persamaan kuadratnya adalah:

$$2x^2 + 3x - 4 = 0$$

**Jawaban: E**

**16. Pembahasan:**

Persamaan kuadrat dengan akar-akar  $y_1$  dan

$y_2$  adalah  $x^2 - (y_1 + y_2)x + y_1 \cdot y_2 = 0$

- $x^2 + b_1x + c_1 = 0$  mempunyai akar-akar  $\alpha$  dan  $\beta$  dengan  $(\alpha - \beta)^2 = 4$  maka  $\alpha - \beta = 2$  atau

$$\alpha - \beta = -2$$

- Persamaan kuadrat dengan akar-akar  $\alpha + \beta = -b_1$  dan  $\alpha - \beta = -2$  adalah

$$x^2 - (-b_1 + (-2))x + (-2)(-b_1) = 0$$



**Catatan**

$$\Rightarrow x^2 - (-b_1 - 2)x + 2b_1 = 0$$

Diketahui persamaan kuadrat dengan akar-akar  $\alpha + \beta$  dan  $\alpha - \beta$  adalah  $x^2 + b_2x + c_2 = 0$

Disimpulkan  $c_2 = 2b_1$ , atau  $c_2 : b_1 = 2 : 1$

**Jawaban: A**

**17. Pembahasan:**

Ingat bahwa pada persamaan kuadrat

$ax^2 + bx + c = 0$  dengan akar-akarnya  $x_1$  dan  $x_2$ , maka

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \text{ dan } x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Dengan demikian untuk  $\frac{1}{4}x^2 + bx + a = 0$ , dengan 2 adalah satu-satunya akar persamaan maka:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{a}{\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$2 \cdot 2 = \frac{a}{\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$4 = 4a$$

$$a = 1$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$2 + 2 = \frac{-b}{\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$4 = -4b$$

$$b = -1$$

$$a + b = 1 + (-1) = 0$$

**Jawaban: C**

**18. Pembahasan:**

$$x^2 + ax + (a - 1) = 0, \text{ dengan } x_1 > 1 \text{ dan } x_2 < 1$$

- Untuk  $x_1 - 1 > 0$  dan  $x_2 - 1 < 0$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$$

$$x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$$

$$a - 1 - (-a) + 1 < 0$$

$$2a < 0$$

$$a < 0$$

**Catatan**

**Jawaban: D**

**19. Pembahasan:**

$$3^{2x} + 3^{3-2x} - 28 = 0$$

$$\Rightarrow 3^{2x} + \frac{3^3}{3^{2x}} - 28 = 0$$

Misal:  $3^{2x} = p$  maka:

$$p + \frac{27}{p} - 28 = 0 \text{ (dikali dengan } p\text{)}$$

$$\Rightarrow p^2 + 27 - 28p = 0 \text{ atau } p^2 - 28p + 27 = 0$$

$$\Rightarrow (p-1)(p-27) = 0$$

$$p_1 = 1 \text{ atau } p_2 = 27$$

$$p_1 = 1 \Rightarrow 1 = 3^{2x}$$

$$\Rightarrow 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = 0$$

$$p_2 = 27$$

$$\Rightarrow 27 = 3^{2x}$$

$$\Rightarrow 3^3 = 3^{2x}$$

$$\Rightarrow 3 = 2x$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Sehingga, jumlah akar-akarnya} = 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

**Jawaban: C**



**Catatan****20. Pembahasan:**

- $x^2 + mx + n = 0$  dengan akar-akar  $\alpha$  dan  $\beta$ ,

$$\alpha > 0, \beta > 0$$

$$\alpha^2 = 4\beta \text{ berarti } 2\beta = \frac{1}{2}\alpha^2$$

$$2\beta - \alpha = 12 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\alpha^2 - \alpha = 12$$

$$\alpha^2 - 2\alpha - 24 = 0$$

$$(\alpha + 4)(\alpha - 6) = 0$$

$$\alpha = -4 \text{ atau } \alpha = 6$$

Karena  $\alpha > 0$  maka  $\alpha = 6$  sehingga  $\beta = 9$

- Persamaan kuadrat dengan akar-akar 6 dan 9 adalah  $(x - 6)(x - 9) = 0$

$$x^2 - 15x + 54 = 0$$

Disimpulkan,  $m = -15$ ,  $n = 54$

Jadi,  $m + n = -15 + 54 = 39$

**Jawaban: E**

**21. Pembahasan:**

$$ax^2 - bx + 1 = 0, \text{ akar-akar } p \text{ dan } 2p$$

- Berlaku:  $p + 2p = \frac{b}{a}$  dan  $p \cdot 2p = \frac{1}{a}$

$$3p = \frac{b}{a} \quad \frac{1}{a} = 2p^2 \dots \text{(ii)}$$

$$3p = \frac{1}{a} \cdot b \dots \text{(i)}$$

- Dari  $3p = \frac{1}{a} \cdot b$  dengan menyubstitusikan persamaan (i) ke persamaan (ii) diperoleh  $3p = 2p^2 \cdot b$
- Barisan aritmetika: 1,  $a$ ,  $b$   
Berlaku:  $2a = b + 1$

$$b = 2a - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2p^2} - 1 = \frac{1}{p^2} - 1$$

- Substitusi ke  $3p = 2p^2 \cdot b$ , diperoleh:

$$3p = 2p^2 \left( \frac{1}{p^2} - 1 \right)$$

$$3p = 2 - 2p^2$$

$$2p^2 + 3p - 2 = 0$$

$$(2p-1)(p+2) = 0$$

$$p = \frac{1}{2} \text{ atau } p = -2$$

**Jawaban: D**

## 22. Pembahasan:

Pada barisan geometri berlaku :  $U_2^2 = U_1 \cdot U_3$

$x^2 - (2p + 4)x + (3p + 4) = 0$ , akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$  merupakan bilangan bulat.

Barisan geometri:  $x_1, p, x_2$

Berlaku:  $p^2 = x_1 \cdot x_2$

$$p^2 = 3p + 4$$

$$p^2 - 3p - 4 = 0$$

$$(p+1)(p-4) = 0$$

- Untuk  $p = -1$ :

$$x^2 - (2(-1)+4)x + (3(-1)+4) = 0$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$(x-1)(x-1) = 0$$

$$x_1 \text{ dan } x_2 = 1$$

Sehingga, barisan geometri:  $x_1, p, x_2 = 1, -1, 1$

$$\text{maka } r = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\text{Jadi, } U_{12} = a \cdot r^{11}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{11} = -1$$

**Jawaban: A**



**Catatan****23. Pembahasan:**

Jika matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  maka

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

$$\begin{vmatrix} 3x-1 & 3 \\ x+1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

Sehingga:

$$\det = (3x-1)(x+2) - 3(x+1)$$

$$\Rightarrow 0 = 3x^2 + 6x - x - 2 - 3x - 3$$

$$\Rightarrow 0 = 3x^2 + 2x - 5$$

Misal: akar-akarnya adalah  $x_1$  dan  $x_2$  maka hasil kali

$$\text{akar-akarnya} = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{5}{3}$$

**Jawaban: C**

$$2a+b=x$$

$$\pi = 3.141592654$$

$$Ra + 40a + \dots = 0$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$

$$y = ut \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

2

## FUNGSI KUADRAT

### A Rumus Umum

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Rumus Diskriminan (D):

$$D = b^2 - 4ac$$

Sumbu simetri:

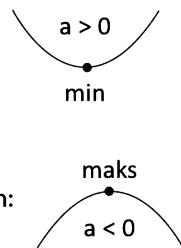
$$x = -\frac{b}{2a}$$

Titik ekstrem/puncak:

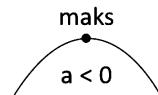
Nilai/harga ekstrem:

$$y = -\frac{D}{4a} \text{ atau } y = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

Terbuka ke atas:



Terbuka ke bawah:



$$\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a}\right) \text{ atau } \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$

### B Sifat Grafik

Parabola dan sumbu x

$D > 0 \rightarrow$  Parabola memotong sumbu x

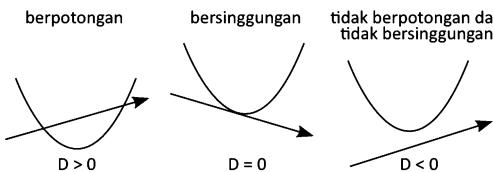
$D = 0 \rightarrow$  Parabola menyinggung sumbu x

$D < 0 \rightarrow$  Parabola tidak memotong dan tidak menyinggung sumbu x

Sehingga:

$a > 0$ $D > 0$	$a > 0$ $D = 0$	$a > 0$ $D < 0$	- selalu positif - definit positif - di atas sumbu x - $f(x) > 0$
$a < 0$ $D > 0$	$a < 0$ $D = 0$	$a < 0$ $D < 0$	- selalu negatif - definit negatif - di bawah sumbu x - $f(x) < 0$

### Parabola dan garis



#### Keterangan:

Diketahui parabola  $y = ax^2 + bx + c$  dan garis lurus  $y = mx + n$ . Jika kedua persamaan di atas disubstitusikan maka diperoleh:

$$ax^2 + bx + c = mx + n \text{ atau } ax^2 + (b-m)x + (c-n) = 0$$

Bentuk di atas merupakan persamaan kuadrat dimana hubungan sifat antara kedua kurva tersebut dapat ditentukan berdasarkan diskriminannya ( $D$ ).

- Jika  $D > 0 \rightarrow x_1 \neq x_2$  maka kedua kurva saling berpotongan pada kedua titik.
- Jika  $D = 0 \rightarrow x_1 \neq x_2$  maka kedua kurva saling bersinggungan
- Jika  $D < 0 \rightarrow x_1 \neq x_2$  maka kedua kurva tidak berpotongan

## Menentukan Fungsi Kuadrat

1. Memotong sumbu X di  $x_1$  dan  $x_2$  dan sebuah titik lain.

Gunakan rumus:  $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

2. Jika diketahui titik ekstrem  $(p, q)$  dan sebuah titik lain.

Gunakan rumus:  $y = a(x - p)^2 + q$

3. Jika diketahui tiga buah titik sebarang

Gunakan rumus:  $y = ax^2 + bx + c$



# PAKET SOAL

## SOAL UN SMA IPA

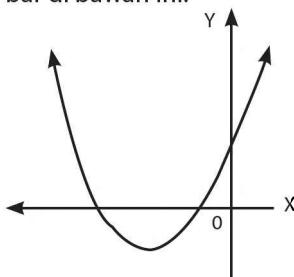
1. Grafik  $y = px^2 + (p+2)x - p + 4$  memotong sumbu X di dua titik. Batas-batas nilai  $p$  yang memenuhi adalah ....

- A.  $p < -2$  atau  $p > -\frac{2}{5}$       D.  $\frac{2}{5} < p < 2$   
B.  $p < \frac{2}{5}$  atau  $p > 2$       E.  $2 < p < 10$   
C.  $p < 2$  atau  $p > 10$

Catatan

## SOAL SNMPTN MATDAS

2. Grafik fungsi  $y = ax^2 + bx + c$  ditunjukkan gambar di bawah ini.



Pernyataan yang benar adalah ....

- A.  $ab > 0$  dan  $a+b+c > 0$   
B.  $ab < 0$  dan  $a+b+c > 0$   
C.  $ab < 0$  dan  $a+b+c \leq 0$   
D.  $ab < 0$  dan  $a+b+c < 0$   
E.  $ab < 0$  dan  $a+b+c \geq 0$

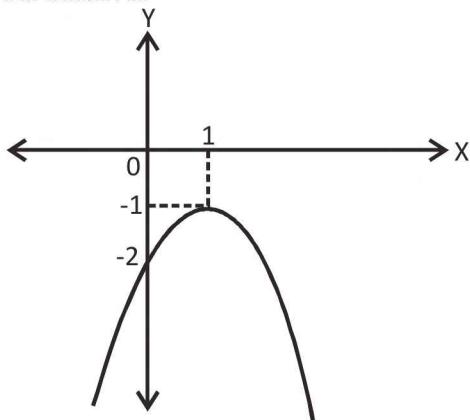
## SOAL UN

3. Interval nilai  $p$  yang menyebabkan fungsi kuadrat  $f(x) = (p-2)x^2 + 2px + p + 3$  definit positif adalah ....

- A.  $p < 2$       D.  $p > 6$   
B.  $p < 6$       E.  $2 < p < 6$   
C.  $p > 2$

**SOAL UN SMA IPS**

4. Persamaan grafik fungsi kuadrat seperti pada gambar adalah ....



- A.  $y = -x^2 - 4x - 2$       D.  $y = -x^2 + 2x + 2$   
B.  $y = -x^2 + 4x - 2$       E.  $y = -x^2 + 2x - 2$   
C.  $y = -x^2 + 4x + 2$

**SOAL UN SMA IPA**

5. Grafik fungsi kuadrat  $f(x) = x^2 + bx + 4$  menyinggung garis  $y = 3x + 4$ . Nilai b yang memenuhi adalah ....
- A. -4      D. 3  
B. -3      E. 4  
C. 0

**SOAL UM UGM MATDAS**

6. Grafik fungsi  $y = f(x)$  mempunyai titik puncak  $(-1, 8)$  dan memotong sumbu X di  $(x_1, 0)$  dan  $(x_2, 0)$ . Jika  $x_1 x_2 = -3$  maka grafik tersebut memotong sumbu Y di ...
- A.  $(0, -10)$       D.  $(0, 6)$   
B.  $(0, -2)$       E.  $(0, 10)$   
C.  $(0, 4)$

**SOAL UN SMA IPS**

7. Koordinat titik potong grafik fungsi kuadrat  $y = 3x^2 - x - 2$  dengan sumbu x dan sumbu y adalah ...

- A.  $(-1, 0); \left(\frac{2}{3}, 0\right)$ ; dan  $(0, 2)$
- B.  $\left(-\frac{2}{3}, 0\right); (1, 0)$  dan  $(0, -2)$
- C.  $\left(\frac{2}{3}, 0\right); (1, 0)$  dan  $\left(0, -\frac{2}{3}\right)$
- D.  $\left(-\frac{3}{2}, 0\right); (-1, 0)$  dan  $(0, -1)$
- E.  $\left(\frac{3}{2}, 0\right); (1, 0)$  dan  $(0, 3)$

**SOAL SNMPTN IPA**

8. Grafik fungsi  $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + 20$  naik, jika ...

- A.  $b^2 - 4ac < 0$  dan  $a > 0$
- B.  $b^2 + 4ac < 0$  dan  $a < 0$
- C.  $b^2 + 3ac > 0$  dan  $a < 0$
- D.  $b^2 + 3ac < 0$  dan  $a > 0$
- E.  $b^2 - 3ac < 0$  dan  $a < 0$

**SOAL UN SMA IPS**

9. Koordinat titik balik maksimum grafik fungsi  $y = -2x^2 + 8x - 5$  adalah ....

- A.  $(-2, -3)$
- B.  $(-4, 5)$
- C.  $(1, 11)$
- D.  $(2, -3)$
- E.  $(2, 3)$

**SOAL SIMAK UI MATDAS**

10. Diketahui  $f(x) = ax^2 + (b + 1)x - (a + b + 1)$  memotong sumbu-x di dua titik yang berbeda. Jika  $f(x)$  dibagi x mempunyai sisa  $-(a + 6)$  maka a dipenuhi oleh ....



**Catatan**

- A.  $a < -3$  atau  $a > 3$   
B.  $-3 < a < 3$   
C.  $a \neq -3$   
D.  $a < -2$  atau  $a > 8$   
E.  $-2 < a < 8$

**SOAL SBMPTN TKDU**

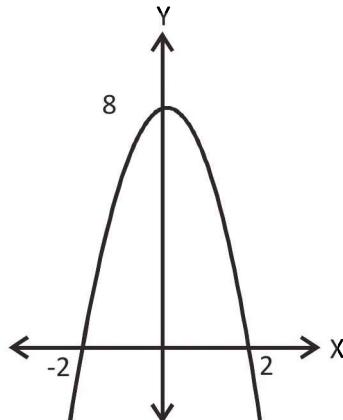
11. Jika grafik fungsi kuadrat  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mempunyai titik puncak  $(8, 4)$  dan memotong sumbu  $-X$  negatif maka ...
- A.  $a > 0, b > 0$ , dan  $c > 0$   
B.  $a < 0, b < 0$ , dan  $c > 0$   
C.  $a < 0, b > 0$ , dan  $c < 0$   
D.  $a > 0, b > 0$ , dan  $c < 0$   
E.  $a < 0, b > 0$ , dan  $c > 0$

**SOAL UM UGM TKDU**

12. Sebuah garis menyinggung grafik  $f(x) = x^2 + 3x - 1$  di titik  $(2a - 1, b)$  dan menyinggung grafik  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$  di titik  $(a, c)$ . nilai  $a + b = \dots$ .
- A. 3 atau 41  
B. 4 atau 20  
C. 4 atau 42  
D. 6 atau 29  
E. 20 atau 42

**SOAL UN SMA IPS**

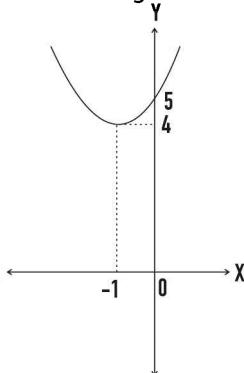
13. Persamaan grafik fungsi kuadrat pada gambar adalah ....



- A.  $y = 8 - x^2$       D.  $y = 6 - 2x^2$   
 B.  $y = 4 - x^2$       E.  $y = 4 - 2x^2$   
 C.  $y = 8 - 2x^2$

**SOAL UN SMA IPA**

14. Perhatikan gambar di bawah ini!



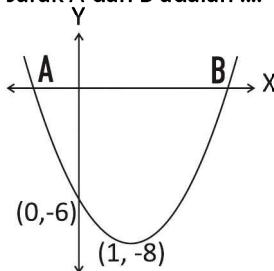
Persamaan grafik fungsi kuadrat pada gambar adalah ....

- A.  $y = 3x^2 + 4x + 5$       D.  $y = x^2 + 2x + 5$   
 B.  $y = 2x^2 + 3x + 5$       E.  $y = x^2 - 2x + 5$   
 C.  $y = 2x^2 - 3x + 5$

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

15. Parabola berikut memotong sumbu x di A dan B.

Jarak A dan B adalah ....



- A. 2      D. 5  
 B. 3      E. 6  
 C. 4



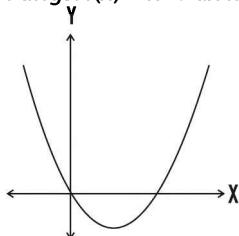
## **SOAL STANDAR SNMPTN**

16. Garis  $y = ax + b$  memotong parabola  $y = x^2 + x + 1$  di titik  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$ . Jika  $x_1 + x_2 = 2$  dan  $x_1 \cdot x_2 = -1$  maka  $a + b = \dots$

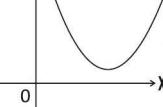
- |      |      |
|------|------|
| A. 1 | D. 6 |
| B. 3 | E. 7 |
| C. 5 |      |

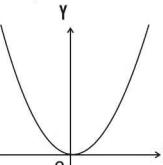
## **SOAL SNMPTN K.DASAR**

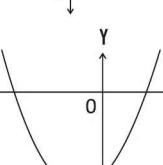
17. Fungsi  $f(x) = x^2 + ax$  mempunyai grafik berikut:

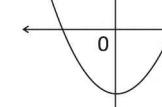


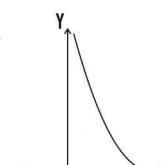
Maka grafik fungsi  $g(x) = x^2 - ax - 5$  adalah ....

- A. 

B. 

C. 

D. 

E. 

**Catatan****SOAL SNMPTN MAT.IPA**

18. Hasil kali akar-akar persamaan:

$$\begin{vmatrix} 3x-1 & 3 \\ x+1 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \text{ adalah ....}$$

A.  $-\frac{2}{3}$

D.  $\frac{2}{3}$

B.  $-\frac{4}{3}$

E.  $\frac{4}{3}$

C.  $-\frac{5}{3}$

**SOAL SNMPTN**

19. Jika P parabola  $y = x^2 - 4x + 3$  maka ....

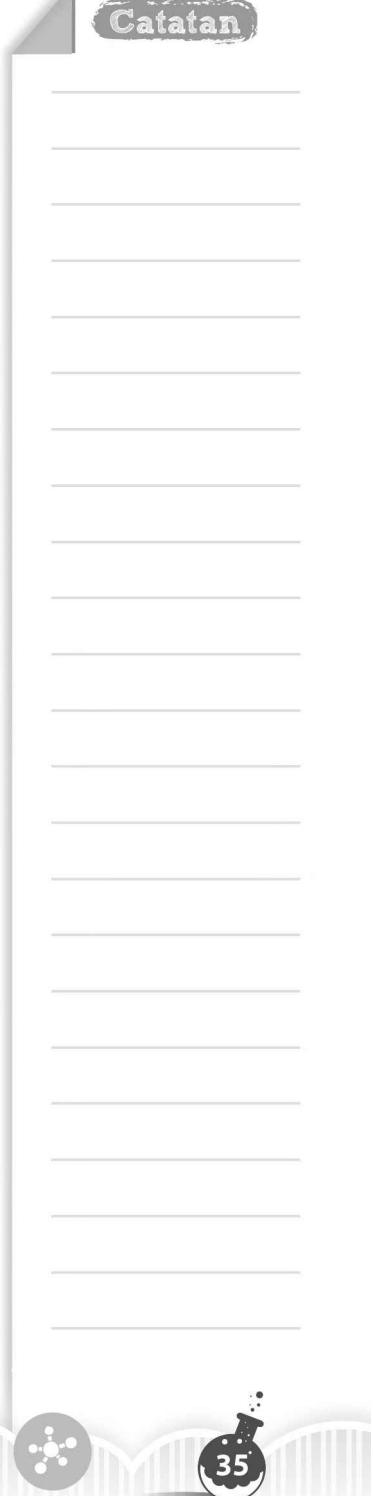
- (1). P memotong sumbu x
- (2). P terbuka ke atas
- (3). P menyinggung garis  $y = -1$
- (4). Titik  $(0, 0)$  di bawah parabola P

**SOAL SNMPTN**

20. Jika nilai-nilai a, b, c, dan d positif maka grafik fungsi

$ay - bx^2 - cx + d = 0$  akan memiliki ...

- (1). Dua titik potong dengan sumbu-X
- (2). Nilai maksimum
- (3). Nilai minimum
- (4). Titik singgung dengan sumbu-X



# Pembahasan

Catatan

## 1. Pembahasan:

Grafik persamaan kuadrat:  $ax^2 + bx + c = 0$   
memotong sumbu di dua titik jika  $D > 0$

$y = px^2 + (p+2)x - p + 4$  memotong sumbu x di  
dua titik maka:

$$D > 0$$

$$\Rightarrow b^2 - 4ac > 0$$

$$\Rightarrow (p+2)^2 - 4.p.(-p+4) > 0$$

$$\Rightarrow p^2 + 4p + 4 + 4p^2 - 16p > 0$$

$$\Rightarrow 5p^2 - 12p + 4 > 0$$

$$\Rightarrow (5p-2)(p-2) > 0$$

$$p_1 = \frac{2}{5} \text{ atau } p_2 = 2$$

Daerah penyelesaian:

Jika  $p=0$  disubstitusi ke,  $5p^2 - 12p + 4$

Menghasilkan nilai positif maka:



Jadi,  $p < \frac{2}{5}$  atau  $p > 2$

**Jawaban: B**

## 2. Pembahasan:

Karena grafik terbuka ke atas maka  $a > 0$

Karena sumbu simetri grafik terletak di sebelah kiri  
sumbu y maka  $b > 0$

Karena kurva memotong sumbu y di atas sumbu x,  
maka  $c > 0$

Dengan demikian,  $ab > 0$  dan  $a + b + c > 0$   
**Jawaban: A**

### Catatan

#### 3. Pembahasan:

Suatu fungsi kuadrat  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mempunyai nilai definit positif jika

- (i)  $D > 0$ , atau  $b^2 - 4ac > 0$  dan
- (ii)  $a > 0$ .

Diketahui:

$$f(x) = (p-2)x^2 + 2px + p + 3$$

Agar definit positif maka:

Syarat (i):  $D > 0$

$$(2p)^2 - 4 \cdot (p-2)(p+3) > 0$$

$$\Rightarrow 4p^2 - 4(p^2 + p - 6) > 0$$

$$\Rightarrow 4p^2 - 4p^2 - 4p + 24 > 0$$

$$\Rightarrow -4p + 24 > 0$$

$$\Rightarrow -4p > -24$$

$$\Rightarrow p < \frac{-24}{-6} \Rightarrow p < 6$$

Syarat (ii):  $a > 0$

$$(p-2) > 0 \Rightarrow p > 2$$

Yang memenuhi syarat (i) dan (ii) adalah:

$$2 < p < 6$$

**Jawaban: E**

#### 4. Pembahasan:

Menentukan persamaan dari grafik fungsi kuadrat jika diketahui puncak  $(p, q)$  dan melalui titik  $(x_1, y_1)$  adalah:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

Pada grafik di atas, puncak grafik di titik  $(1, -1)$  maka:



## Catatan

$$f(x) = a(x-1)^2 - 1 \text{ atau } y = a(x-1)^2 - 1$$

Grafik melalui titik  $(0, -2)$  maka:

$$-2 = a(0-1)^2 - 1$$

$$\Rightarrow -2 = a - 1$$

$$\Rightarrow a = -1$$

Sehingga, persamaan grafik fungsinya adalah:

$$y = -1 \cdot (x-1)^2 - 1$$

$$= -1(x^2 - 2x + 1) - 1$$

$$= -x^2 + 2x - 2$$

**Jawaban: E**

### 5. Pembahasan:

Syarat suatu persamaan kuadrat dan persamaan linear saling bersinggungan adalah:

$$D = 0 \text{ atau } b^2 - 4ac = 0$$

Diketahui:  $f(x) = x^2 + bx + 4$  menyentuh garis  $y = 3x + 4$ .

$$\Leftrightarrow x^2 + bx + 4 = 3x + 4$$

$$\Leftrightarrow x^2 + bx + 4 - 3x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (b-3)x = 0$$

$$D = 0 \Rightarrow (b-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow (b-3)^2 = 0$$

$$b = 3$$

**Jawaban: D**

### 6. Pembahasan:

Fungsi kuadrat dengan puncak  $(x_p, y_p)$  adalah:

$$y - y_p = a(x - x_p)^2$$

- Puncak  $(-1, 8) \Rightarrow FK = y - 8 = a(x + 1)^2$   
 $y = ax^2 + 2ax + a + 8$
- Memotong sumbu X di  $x_1$  dan  $x_2$  dengan

$$x_1 \cdot x_2 = -3$$

$$\frac{a+8}{a} = -3$$

$$a+8 = -3a$$

$$a = -2$$

- FK =  $y = -2x^2 - 4x + 6$
- Memotong sumbu Y di (0, 6)

**Jawaban: D****7. Pembahasan:**

Diketahui:

Grafik fungsi kuadrat  $y = 3x^2 - x - 2$

- Titik potong pada sumbu x ( $y = 0$ )

$$y = 3x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow 0 = 3x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow 0 = (3x+2)(x-1)$$

$$x_1 = -\frac{2}{3} \text{ dan } x_2 = 1$$

Jadi, titik potongnya  $\left(-\frac{2}{3}, 0\right)$  dan  $(1, 0)$

- Titik potong pada sumbu y ( $x = 0$ )

$$y = 3x^2 - x - 2$$

$$\Rightarrow y = 3.0 - 0 - 2 = -2$$

Jadi, titik potongnya  $(0, -2)$

**Jawaban: B****8. Pembahasan:**

Grafik fungsi  $f(x) = ax^3 + bx^2 - cx + 20$  akan naik

jika:  $f'(x) > 0$

$$\Rightarrow 3ax^2 + 2bx - c > 0 ; a > 0 ; D < 0$$

$$D < 0 \Rightarrow (2b)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (-c) < 0$$

$$\Rightarrow 4b^2 + 12ac < 0$$

$$\Rightarrow b^2 + 3ac < 0$$

**Jawaban: D**

## Catatan

### 9. Pembahasan:

Koordinat titik balik maksimum diperoleh

$$\text{ketika absisnya} = \frac{-b}{2a}$$

Sehingga, absis titik balik maksimum pada grafik fungsi  $y = -2x^2 + 8x - 5$  adalah:

$$\frac{-8}{2(-2)} = 2 \text{ atau } x = 2$$

Ketika  $x = 2$  maka:

$$\begin{aligned}y &= -2(2)^2 + 8(2) - 5 \\&= -8 + 16 - 5 \\&= 3\end{aligned}$$

Jadi, koordinat titik balik maksimumnya adalah  $(2, 3)$

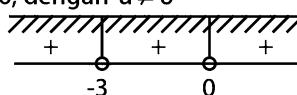
**Jawaban: E**

### 10. Pembahasan:

$F(x)$  dibagi  $(x - a)$  sisa  $f(a)$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$

memotong sumbu x bila  $D > 0$ , dengan  $a \neq 0$

- $f(x) = ax^2 + (b+1)x - (a+b+1)$
- $f(x)$  dibagi  $x$  sisa  $-(a+6)$ , berarti  $f(0) = -(a+6)$  diperoleh  $a+b+1 = a+6$ , atau  $b = 5$
- Jadi,  $f(x) = ax^2 + 6x - (a+6)$
- memotong sumbu x :  $D > 0$ , dengan  $a \neq 0$   
 $36 - 4a [-(a+6)] > 0$ , dengan  $a \neq 0$   
 $a^2 + 6a + 9 > 0$ , dengan  $a \neq 0$   
 $(a+3)^2 > 0$ , dengan  $a \neq 0$



Dimana,  $a \neq -3$  dan  $a \neq 0$

Jadi,  $a < -3$  atau  $a > 3$  memenuhi  $a \neq -3$  dan  $a \neq 0$

**Jawaban: A**

### 11. Pembahasan:

Grafik fungsi kuadrat  $f(x) = ax^2 + bx + c$  mempunyai titik puncak  $(8, 4)$  dan memotong sumbu-X negatif sehingga dapat disimpulkan:

- Titik puncak berada di sebelah kanan sumbu y maka  $a < 0$  dan  $b > 0$  atau  $a > 0$  dan  $b < 0$
- Grafik memotong sumbu X negatif, dan titik puncaknya  $(8, 4)$  maka  $a < 0$ , dan mengakibatkan  $b > 0$ .
- Grafik memotong sumbu X negatif dan titik puncaknya  $(8, 4)$  sehingga titik potong yang lain terletak pada sumbu X positif. Artinya, jika  $x_1$  dan  $x_2$  merupakan absis titik-titik potong grafik pada sumbu X, maka  $x_1 \cdot x_2 < 0$ .

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0, \text{ karena } a < 0 \text{ maka } c > 0$$

Jadi, diperoleh  $a < 0, b > 0, c > 0$

**Jawaban: E**

### 12. Pembahasan:

Garis  $g$  menyentuh kurva  $f$ , berlaku  $m_g = m_f$  di titik singgung, dengan  $m_g$  berarti gradien  $g$ .

-  $m_f = 2x + 3, m_g = x^2 + 4$

Di masing-masing titik singgung:

$$2(2a-1) + 3 = a^2 + 4$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

$$(a-1)(a-3) = 0$$

$$a = 1 \text{ atau } a = 3$$

- Titik  $(2a - 1, b)$  terletak pada  $f(x) = x^2 + 3x - 1$

$$\text{Berlaku: } b = (2a-1)^2 + 3(2a-1) - 1$$

Untuk  $a = 1$  maka  $b = 1 + 3 - 1 = 3$  sehingga

$$a + b = 1 + 3 = 4$$

Untuk  $a = 3$  maka  $b = 25 + 15 - 1 = 39$  sehingga

$$a + b = 3 + 39 = 42$$

**Jawaban: C**

### 13. Pembahasan:

Menentukan persamaan persamaan grafik fungsi kuadrat jika diketahui titik potong pada sumbu X di  $x_1$  dan  $x_2$  dan sebuah titik lain adalah:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$



## Catatan

Dari grafik pada soal diketahui titik potong pada sumbu X di  $-2$  dan  $2$  maka:

$$y = a(x+2)(x-2)$$

Grafik melalui titik  $(0, 8)$  maka:

$$8 = a(0+2)(0-2)$$

$$\Rightarrow 8 = -4a \Rightarrow a = -2$$

Sehingga, persamaan grafiknya adalah:

$$y = -2(x+2)(x-2)$$

$$= -2(x^2 - 4)$$

$$= -2x^2 + 8$$

$$= 8 - 2x^2$$

**Jawaban: C**

### 14. Pembahasan:

Grafik fungsi kuadrat dengan puncak  $(p, q)$  dan melalui titik  $(x_1, y_1)$  adalah:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

Diketahui:

Grafik dengan puncak  $(-1, 4)$  maka:

$$f(x) = a(x+1)^2 + 4$$

Dan melalui titik  $(0, 5)$ , dimana  $x = 0$  dan  $y = 5 = f(x)$ .  
Sehingga, dengan menyubstitusikannya pada persamaan  $f(x)$  diperoleh:

$$5 = a(0+1)^2 + 4$$

$$\Rightarrow 5 - 4 = a \Rightarrow a = 1$$

Jadi, persamaan kuadratnya adalah:

$$f(x) = (x+1)^2 + 4$$

$$= x^2 + 2x + 1 + 4$$

$$= x^2 + 2x + 5$$

**Jawaban: D**

**Catatan****15. Pembahasan:**

Persamaan dari kurva dengan titik puncak  $(1, -8)$  adalah:

$$y = a(x-1)^2 - 8$$

Kurva melalui titik  $(0, -6)$  sehingga:

$$-6 = a(0-1)^2 - 8 \Rightarrow a = 2$$

Jadi, persamaan kurvanya:

$$y = 2(x-1)^2 - 8$$

$$\Rightarrow y = 2x^2 - 4x + 2 - 8$$

$$\Rightarrow y = 2x^2 - 4x - 6$$

$$\Rightarrow y = x^2 - 2x - 3$$

Titik A dan B merupakan titik potong kurva pada sumbu x maka  $y = 0$

$$\Rightarrow 0 = x^2 - 2x - 3$$

$$\Rightarrow 0 = (x+1)(x-3)$$

$$x_A = -1 \text{ atau } x_B = 3$$

Jadi, jarak A dan B adalah  $3 - (-1) = 4$ .

**Jawaban: C**

**16. Pembahasan:**

Diketahui:

Garis  $y = ax + b$  dan parabola  $y = x^2 + x + 1$  saling berpotongan di titik  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$  maka:

$$ax + b = x^2 + x + 1$$

$$\Rightarrow x^2 + (1-a)x + (1-b) = 0$$

Sehingga:

$$\bullet \quad x_1 + x_2 = \frac{-(1-a)}{1} = a - 1$$

$$\Rightarrow 2 = a - 1 \Rightarrow a = 3$$

$$\bullet \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{(1-b)}{1} = 1 - b$$

$$\Rightarrow -1 = 1 - b \Rightarrow b = 2$$

Jadi, nilai dari  $a + b = 3 + 2 = 5$

**Jawaban: C**



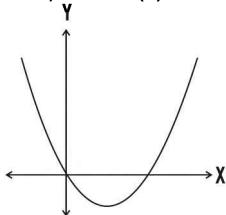
## Catatan

### 17. Pembahasan:

Grafik fungsi kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$

Jika  $c = 0$  maka kurva melalui titik  $(0, 0)$

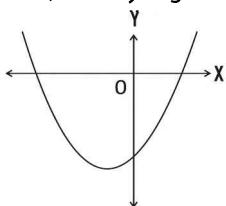
Jadi, kurva  $f(x) = x^2 + ax$  adalah:



Maka, kurva  $g(x) = x^2 - ax - 5$ :

- Titik puncak bergeser ke kuadran III.
- Kurva turun 5 satuan.

Jadi, kurva yang sesuai adalah:



**Jawaban: C**

### 18. Pembahasan:

$$\begin{vmatrix} 3x-1 & 3 \\ x+1 & x+2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3x-1)(x+2) - 3(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x - x - 2 - 3x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0$$

Misal: akar-akarnya adalah  $x_1$  dan  $x_2$  maka hasil kali

$$\text{akar-akarnya adalah } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{3}$$

**Jawaban: C**

### 19. Pembahasan:

Diketahui:

$y = x^2 - 4x + 3$  sehingga:

- $D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$

Karena  $D > 0$  maka grafik memotong sumbu x di dua titik.

**Pernyataan (1) benar.**

- Koefisien dari  $x^2$  bernilai positif maka grafik terbuka ke atas.

**Pernyataan (2) benar.**

- Garis  $y = -1$  merupakan garis singgung kurva, karena melalui titik puncak  $(2, -1)$

**Pernyataan (3) benar.**

- Titik puncak:

$$\left( -\frac{b}{2a}, \frac{D}{-4a} \right) = \left( -\frac{-4}{2 \cdot 1}, \frac{4}{-4 \cdot 1} \right) = (2, -1)$$

Maka, titik  $(0, 0)$  tidak berada di bawah parabola.

**Pernyataan (4) salah.**

**Jawaban: A**

## 20. Pembahasan:

Grafik fungsi  $ay - bx^2 - cx + d = 0$ , dengan  $a, b, c$  dan  $d$  positif:

$$\Rightarrow ay = bx^2 + cx - d$$

$$\Rightarrow y = \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x - \frac{d}{a}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad D &= \left( \frac{c}{a} \right)^2 - 4 \cdot \left( \frac{b}{a} \right) \cdot \left( -\frac{d}{a} \right) \\ &= \frac{c^2}{a^2} + \frac{4bd}{a^2} \text{ (selalu bernilai positif)} \end{aligned}$$

Karena  $D$  positif maka grafik memotong sumbu  $x$  di dua titik.

**Pernyataan (1) benar.**

- Koefisien dari variabel  $x^2$  adalah  $\frac{b}{a}$  positif maka grafik memiliki nilai minimum dan tidak memiliki nilai maksimum.

**Pernyataan (2) salah.**

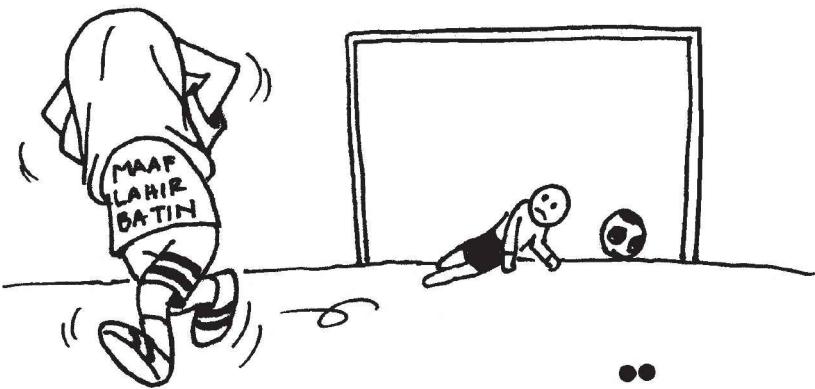
**Pernyataan (3) benar.**

- Karena grafik memotong sumbu  $x$  di dua titik maka titik singgung tidak berada pada sumbu  $x$ .

**Pernyataan (4) salah.**

**Jawaban: C**





# 3

## PERTIDAKSAMAAN

**A**

### Sifat-Sifat Pertidaksamaan

Berikut adalah sifat-sifat umum operasi pertidaksamaan.

Untuk  $a, b, c, d \in \text{real}$  maka berlaku:

- $a > b$  maka  $a + c > b + c$
- $a > b, c > d$  maka  $a + c > b + d$
- $a > b, b > c$  maka  $a > c$
- $a > b, c > 0$  maka  $ac > bc$
- $a > b, c < 0$  maka  $ac < bc$
- $\frac{a}{b} > 0$  maka  $a$  dan  $b > 0$  atau  $a$  dan  $b < 0$
- $a > b, a > 0, b > 0$  maka  $a^2 > b^2$   $a > b, a < 0, b < 0$  maka  $a^2 < b^2$

**B**

### Sifat Harga Mutlak

Berikut adalah sifat-sifat umum harga mutlak yang perlu dipahami.

- $|x| = \begin{cases} -x, & \text{untuk } x < 0 \\ x, & \text{untuk } x \geq 0 \end{cases}$
- $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$
- $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \text{ atau } x > a, a > 0$

## Sifat Akar

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} -x, & \text{untuk } x < 0 \\ x, & \text{untuk } x \geq 0 \end{cases}$$

## D. Trik Menentukan Garis Bilangan

## **Trik Praktis Menentukan Garis Bilangan:**

1. Jadikan soal dalam bentuk perkalian pemfaktoran. Langkah ini bisa diabaikan jika soal sudah dalam bentuk perkalian pemfaktoran.
  2. Tentukan pembuat nol-nya, dan masukkan ke garis bilangan
  3. Tanda koefisien pangkat tertinggi sama dengan tanda pada ruas yang paling kanan
  4. GENAP – TETAP, artinya pangkat genap sama tanda
  5. Pangkat ganjil berlawanan tanda

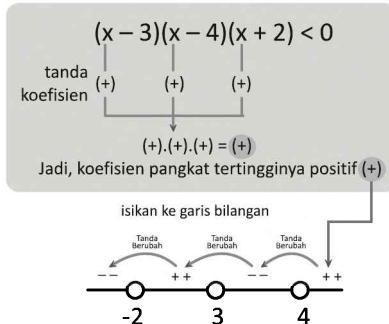
## Contoh:

$$1. \quad (x - 3)(x - 4)(x + 2) < 0$$

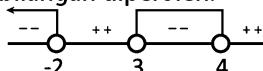
### **Penyelesaian:**

Pembuat nolnya adalah:  $x = 3$ ,  $x = 4$  dan  $x = -2$

Pangkat tertinginya positif maka ruas kanan diisi tanda positif.



Selanjutnya dalam qaris bilangan diperoleh:



Jadi himpunan penyelesaiannya adalah:

$$HP \equiv \{x \leq -2 \text{ atau } 3 \leq x \leq 4\}$$



## Metode Penyelesaian Pertidaksamaan Lanjutan.

a.  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$

**Penyelesaian:**

- (1) Tidak berlaku perkalian silang
- (2) Penyelesaian:  $f(x).g(x) > 0, g(x) \neq 0$

b.  $\sqrt{f(x)} > c$

**Penyelesaian:**

- (1)  $f(x) \geq 0$
- (2) Kedua ruas dikuadratkan
- Penyelesaiannya irisan (1) dan (2)
- Atau:

$\sqrt{f(x)} < c$  diselesaikan dengan cara  $0 \leq f(x) < c^2$

$\sqrt{f(x)} > c$  diselesaikan dengan cara  $f(x) > c^2$



## Trik Menyelesaikan Pertidaksamaan Mutlak.

**Langkah penyelesaian:**

Penyelesaian bentuk:

$$\frac{|a|}{|b|} (><) k$$

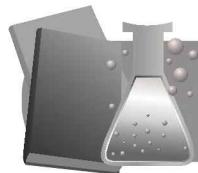
$$|a|(><) k |b|$$

$$|a| - k |b| (><) 0$$

adalah sama dengan penyelesaian

$$(a - kb)(a + kb) (><) 0$$

**Catatan:** Untuk yang berbentuk pecahan maka ditambah syarat penyebut tidak boleh sama dengan nol.



# PAKET SOAL

## Catatan

### SOAL UN SMA IPA

1. Nilai  $x$  yang memenuhi pertidaksamaan

$$3^{2x+1} + 9 - 28 \cdot 3^x > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$
 adalah ....

- A.  $x > -1$  atau  $x > 2$       D.  $x < -1$  atau  $x > 2$   
B.  $x < -1$  atau  $x < 2$       E.  $x > -1$  atau  $x < -2$   
C.  $x < 1$  atau  $x > 2$

### SOAL UN SMA IPA

2. Himpunan penyelesaian dari  $2^{2x} - 7 \cdot 2^x > 8$  adalah

....

- A.  $\{x | x < -1, x \in \mathbb{R}\}$       D.  $\{x | x > 4, x \in \mathbb{R}\}$   
B.  $\{x | x < -2, x \in \mathbb{R}\}$       E.  $\{x | x > 8, x \in \mathbb{R}\}$   
C.  $\{x | x > 3, x \in \mathbb{R}\}$

### SOAL SNMPTN TKDU

3. Jika  $-2 < a < -1$ , maka semua nilai  $x$  yang mem-

nuhi pertidaksamaan  $\frac{x^2 - 3x - 3a}{(2-x)(x+3)} \leq 0$  adalah ....

- A.  $x < -2$  atau  $x > 3$       D.  $-3 < x < 2$   
B.  $x < -3$  atau  $x > 2$       E.  $-2 < x < 3$   
C.  $-3 < x < -2$

### SOAL UM UGM MATDAS

4. Himpunan penyelesaian dari  $\sqrt{2x+2} - \sqrt{6x-8} \geq 0$  adalah ....

- A.  $\{x | x \geq -1\}$       D.  $\left\{x | x \geq \frac{5}{2}\right\}$   
B.  $\left\{x | x \geq \frac{4}{3}\right\}$       E.  $\left\{x | \frac{4}{3} \leq x \geq \frac{5}{2}\right\}$   
C.  $\left\{x | x \leq \frac{5}{2}\right\}$

**SOAL SNMPTN MATDAS**

5. Bentuk persamaan yang ekivalen dengan  $|5 - 5x| < 5$  adalah ....
- A.  $-5 < |5x - 5|$       D.  $5x - 5 > -5$   
B.  $|x - 1| < 1$       E.  $0 < 5 - 5x < 5$   
C.  $5x - 5 < 5$

**SOAL SIMAK UI MATDAS**

6. Banyaknya bilangan bulat lebih kecil dari 8 yang memenuhi pertidaksamaan:

$$\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x+7} \geq 0 \text{ adalah ....}$$

- A. 1      D. 6  
B. 2      E. 7  
C. 5

**SOAL UM UGM MATDAS**

7. Jika  $m > 0$  maka himpunan semua penyelesaian

pertidaksamaan  $\sqrt{m^2 - x^2} \leq x$  adalah ....

- A.  $\left\{ x \mid 0 \leq x \leq \frac{m}{2} \right\}$   
B.  $\left\{ x \mid \frac{m}{2} \leq x \right\}$   
C.  $\left\{ x \mid x \leq -\frac{m}{2} \text{ atau } x \leq \frac{m}{2} \right\}$   
D.  $\left\{ x \mid -m \leq x \leq -\frac{m}{2} \text{ atau } \frac{m}{2} \leq x \leq m \right\}$   
E.  $\left\{ x \mid \frac{m}{\sqrt{2}} \leq x \leq m \right\}$

**SOAL SNMPTN TKDU**

8. Jika  $1 < a < 2$  maka semua nilai  $x$  yang memenuhi

pertidaksamaan  $\frac{x^2 - 6x}{-x^2 + 2ax - 5} > 0$  adalah ....

- A.  $x < 2$  atau  $x > 3$       D.  $0 < x < 6$   
B.  $x < 5$  atau  $x > 6$       E.  $-1 < x < 5$   
C.  $x < 0$  atau  $x > 6$

**SOAL UN SMA IPA**

9. Nilai  $x$  yang memenuhi  $2^{2x+2} - 3 \cdot 2^{x+2} + 8 < 0$  adalah ....
- A.  $0 < x < 1$       D.  $x < 0$  atau  $x > 2$   
B.  $0 < x < 2$       E.  $x < 1$  atau  $x > 2$   
C.  $1 < x < 2$

**SOAL UM UGM SAINTEK**

10. Nilai  $x$  yang memenuhi pertaksamaan

$$\sqrt{(625)^{x-2}} > \left( \sqrt{(125)^x} \right) \left( \sqrt[3]{(25)^{6x}} \right)$$
 adalah ....

- A.  $x > -\frac{8}{3}$       D.  $x > -\frac{8}{7}$   
B.  $x < -\frac{8}{3}$       E.  $x < -\frac{12}{5}$   
C.  $x < -\frac{8}{7}$

**SOAL SNMPTN TKDU**

11. Jika  $3 < a < 4$  maka semua nilai  $x$  yang memenuhi

$$\text{pertidaksamaan } \frac{ax^2 + 2x + 4}{(1-x)(x+2)} \leq 0 \text{ adalah ....}$$

- A.  $x < -2$  atau  $x < 1$       D.  $-2 < x < 1$   
B.  $x < -1$  atau  $x > 2$       E.  $-1 < x < 2$   
C.  $-2 < x < -1$

**SOAL UM UGM MATDAS**

12. Semua nilai  $x$  yang memenuhi  $\frac{3\sqrt{2-x}}{x-1} < 2$  adalah ....

- A.  $x \leq \frac{7}{4}$       D.  $x \leq \frac{7}{4}$  atau  $1 < x \leq 2$   
B.  $1 < x \leq \frac{7}{4}$       E.  $x < 1$   
C.  $x < 1$  atau  $\frac{7}{4} < x \leq 2$

### SOAL SNMPTN MATDAS

13. Solusi pertidaksamaan  $\frac{(x-2)(x^2+x-6)}{x^2+x-20} > 0$  adalah ....

- A.  $x < -5$  atau  $-3 < x < 2$
- B.  $x < -3$  atau  $2 < x < 4$
- C.  $-5 < x < -3$  atau  $x > 2$
- D.  $-5 < x < -3$  atau  $x > 4$
- E.  $-3 < x < 2$  atau  $x > 4$

### Catatan

### SOAL SIMAK UI MATDAS

14. Misalkan,  $a$  adalah banyaknya faktor prima dari 42 dan  $b$  adalah akar bilangan bulat dari  $3x^2 - 5x + 2 = 0$ .

Nilai-nilai  $y$  yang memenuhi  $\frac{b}{2} \log(y^2 - a) > 0$  adalah ....

- A.  $-2 < y < -\sqrt{3}$  atau  $\sqrt{3} < y < 2$
- B.  $-2 < y < \sqrt{3}$  atau  $y > 2$
- C.  $-\sqrt{3} < y < \sqrt{3}$  atau  $y < -2$  atau  $y > 2$
- D.  $y < -2$  atau  $y > 2$
- E.  $-2 < y < 2$

### SOAL SIMAK UI MATDAS

15. Nilai  $x$  yang memenuhi

$2 \log x \leq \log(3x+7) + 2 \log 2$  adalah ....

- A.  $-2 \leq x \leq 14$
- B.  $-2 \leq x \leq 0$
- C.  $0 < x \leq 14$
- D.  $-2 < x < 0$
- E.  $0 \leq x \leq 14$

### SOAL UN SMA IPA

16. Penyelesaian pertidaksamaan

${}^2 \log(x-1) \cdot {}^{4+x} \log 4 < 2 - {}^{4+x} \log 4$  adalah ....

- A.  $2 < x < 6$
- B.  $1 < x < 2$
- C.  $1 < x < 6$
- D.  $x > 2$
- E.  $x > 6$

**SOAL UN SMA IPS**

17. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan

$$3x^2 + 11x - 4 \geq 0 \text{ untuk } x \in R \text{ adalah ....}$$

- A.  $\left\{ x \mid -4 \leq x \leq \frac{1}{3}, x \in R \right\}$
- B.  $\left\{ x \mid -\frac{1}{3} \leq x \leq 4, x \in R \right\}$
- C.  $\left\{ x \mid -4 \leq x \leq -\frac{1}{3}, x \in R \right\}$
- D.  $\left\{ x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{1}{3}, x \in R \right\}$
- E.  $\left\{ x \mid x \leq -\frac{1}{3} \text{ atau } x \geq 4, x \in R \right\}$

**SOAL SIMAK UI MATDAS**18. Diberikan  $(x-1)^2(x-4)^2 < (x-2)^2$ . Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah ....

- (1)  $\left\{ x \mid 2 - \sqrt{2} < x < 3 - \sqrt{3} \right\}$
- (2)  $\left\{ x \mid 3 - \sqrt{3} < x < 3 + \sqrt{3} \right\}$
- (3)  $\left\{ x \mid 2 + \sqrt{2} < x < 3 + \sqrt{3} \right\}$
- (4)  $\left\{ x \mid x < 2 - \sqrt{2} \text{ atau } x > 3 + \sqrt{3} \right\}$

**SOAL SNMPTN K.DASAR**19. Nilai-nilai  $x$  yang memenuhi

$$|x-2|^2 < 4|x-2| + 12 \text{ adalah ....}$$

- A.  $x > 8 \text{ atau } x < -4$       D.  $x < -8 \text{ atau } x > 0$
- B.  $-4 < x < 8$       E.  $x > 4$
- C.  $-8 < x < 4$

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

20. Himpunan penyelesaian dari  $\sqrt{-1-x} \geq x+3$  adalah ....

- A.  $\{x | x \leq 1\}$       D.  $\{x | x \leq 2\}$   
B.  $\{x | -5 \leq x \leq -2\}$       E.  $\{x | -3 \leq x \leq -2\}$   
C.  $\{x | x \leq -1\}$

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

21. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan

$$\frac{x^2 - 3|x| + 2}{x + 1} \geq 0 \text{ adalah ....}$$

- A.  $\{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 1 \text{ atau } x \geq 2\}$   
B.  $\{x \in \mathbb{R} | -2 < x < -1 \text{ atau } x \geq 2\}$   
C.  $\{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < -1 \text{ atau } -1 \leq x < 1\}$   
D.  $\{x \in \mathbb{R} | -2 \leq x < -1 \text{ atau } -1 \leq x < 1 \text{ atau } x \geq 2\}$   
E.  $\{x \in \mathbb{R} | x < -1 \text{ atau } -1 < x \leq 1 \text{ atau } x \geq 2\}$

**SOAL UN SMA IPA**

22. Penyelesaian pertidaksamaan

$${}^3\log x \cdot {}^{1-2x}\log 9 > 2 - {}^{1-2x}\log 9 \text{ adalah ....}$$

- A.  $0 < x < \frac{1}{5}$       D.  $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2}$   
B.  $0 < x < \frac{1}{2}$       E.  $\frac{2}{5} < x < \frac{1}{2}$   
C.  $0 < x < \frac{2}{5}$

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

23. Nilai  $x$  yang memenuhi  $|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 6$  adalah....

- A.  $0 \leq x \leq 4$       D.  $x \leq 1 \text{ atau } x > 3$   
B.  $x \leq -2 \text{ atau } x \leq 4$       E.  $x < 1 \text{ atau } x \geq 4$   
C.  $x \leq 0 \text{ atau } x \geq 4$



**SOAL SIMAK UI K.IPA**

#### 24. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan

$$\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0 \text{ adalah ....}$$

- A.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\}$

B.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\}$

C.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} < x < 0 \text{ atau } 0 < x < 2\}$

D.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq \sqrt{3}\}$

E.  $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\}$

SOAL UN SMA IPA

### 25. Penyelesaian pertidaksamaan

${}^2 \log(x-1) \cdot {}^{4+x} \log 4 < 2 - {}^{4+x} \log 4$  adalah ....

- A.  $2 < x < 6$       D.  $x > 2$   
B.  $1 < x < 2$       E.  $x > 6$   
C.  $1 \leq x \leq 6$

# Pembahasan

## 1. Pembahasan:

$$\begin{aligned}\text{Pertidaksamaan } & 3^{2x+1} + 9 - 28 \cdot 3^x > 0 \\ \Rightarrow & 3^{2x} \cdot 3 + 9 - 28 \cdot 3^x > 0\end{aligned}$$

$$\text{Misal: } 3^x = p$$

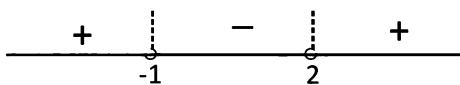
$$\Rightarrow 3p^2 + 9 - 28p > 0$$

$$\Rightarrow 3p^2 - 28p + 9 > 0$$

$$(3p-1)(p-9) = 0$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{3} \text{ atau } p = 9$$

$$\begin{array}{c|c} p = \frac{1}{3} & p = 9 \\ \Rightarrow 3^x = 3^{-1} & \Rightarrow 3^x = 3^2 \\ \Rightarrow x = -1 & \Rightarrow x = 2 \end{array}$$



$$\text{HP} = \{x < -1 \text{ atau } x > 2\}$$

Jawaban: D

Catatan

## 2. Pembahasan:

Pertidaksamaan

$$2^{2x} - 7 \cdot 2^x > 8 \Rightarrow (2^x)^2 - 7 \cdot 2^x - 8 > 0$$

$$\text{Misal: } 2^x = p$$

Sehingga, pertidaksamaan menjadi:

$$p^2 - 7p - 8 > 0$$

$$\Rightarrow (p-8)(p+1) > 0$$

Diperoleh pembuat nol adalah:

$$p = 8 \text{ dan } p = -1$$

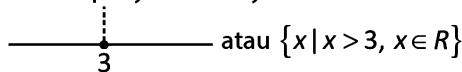
- Ketika  $p = 8$

$$2^x = 8 \Rightarrow x = 3$$



## Catatan

- Ketika  $p = -1$   
 $2^x = -1$  (tidak memenuhi)  
Daerah penyelesaiannya:



Jawaban: C

### 3. Pembahasan:

$$\frac{x^2 - 3x - 3a}{(2-x)(x+3)} \leq 0 ; -2 < a < -1$$

- Untuk batas atas  $a$  mendekati  $-1$  maka:

$$\frac{x^2 - 3x - 3(-1)}{(2-x)(x+3)} \leq 0$$

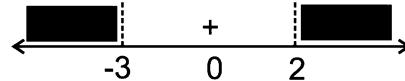
$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 3}{(2-x)(x+3)} \leq 0$$

Pembilang  $x^2 - 3x + 3$  merupakan definit positif, karena  $D < 0$ , yaitu:

$(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 < 0$  sehingga:

$$\frac{\oplus}{(2-x)(x+3)} \leq 0$$

Pembuat nolnya:  $x = 2$  dan  $x = -3$



- Untuk batas bawah  $a$  mendekati  $-2$  maka:

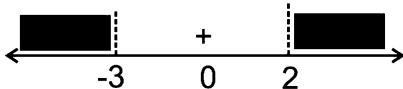
$$\frac{x^2 - 3x - 3(-2)}{(2-x)(x+3)} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 6}{(2-x)(x+3)} \leq 0$$

Pembilang  $x^2 - 3x + 6$  definit positif, karena  
 $(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 < 0$  sehingga:

$$\frac{\oplus}{(2-x)(x+3)} \leq 0$$

Pembuat nol  $x = 2$  dan  $x = -3$



Dari dua kemungkinan di atas maka daerah penyelesaiannya adalah:

$$x < -3 \text{ atau } x > 2$$

**Jawaban: B**

**4. Pembahasan:**

$$\sqrt{2x+2} - \sqrt{6x-8} \geq 0$$

$$\sqrt{2x+2} \geq \sqrt{6x-8}$$

$$2x+2 \geq 6x-8$$

$$-4x \geq -10$$

$$x \leq \frac{5}{2}$$

- Syarat:  $2x+2 \geq 0$  dan  $6x-8 \geq 0$

$$x \geq -1 \text{ dan } x \geq \frac{4}{3}$$

$$\text{Jadi, HP} = \left\{ x \mid \frac{4}{3} \leq x \leq \frac{5}{2} \right\}$$

**Jawaban: E**

**5. Pembahasan:**

$$|5-5x| < 5 \text{ ekuivalen dengan}$$

$$-5 < 5-5x < 5 \quad (\text{dibagi } 5)$$

$$\Rightarrow -1 < 1-x < 1$$

$$\Rightarrow |1-x| < 1$$

$$\text{atau } |x-1| < 1$$

**Jawaban: B**

**6. Pembahasan:**

$$\frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x+7} \geq 0$$

$$\frac{x-5+x+5}{(x+5)(x-5)} + \frac{x+7+x-7}{(x+7)(x-7)} \geq 0$$

$$\frac{2x}{(x+5)(x-5)} + \frac{2x}{(x+7)(x-7)} \geq 0$$

**Catatan**

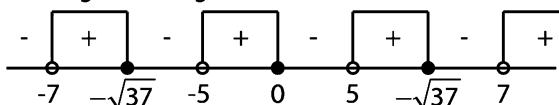
## Catatan

$$\frac{2x(x^2 - 49) + 2x(x^2 - 25)}{(x+5)(x-5)(x+7)(x-7)} \geq 0$$

$$\frac{2x(2x^2 - 74)}{(x+5)(x-5)(x+7)(x-7)} \geq 0$$

$$\frac{4x(x+\sqrt{37})(x-\sqrt{37})}{(x+5)(x-5)(x+7)(x-7)} \geq 0$$

Dalam garis bilangan :



Bilangan bulat lebih kecil dari 8 yang memenuhi adalah  $\{-4, -3, -2, -1, 0, 6\}$

Jadi, banyaknya ada 6.

Jawaban: D

## **7. Pembahasan:**

$$\sqrt{m^2 - x^2} \leq x$$

$$m^2 - x^2 \leq x^2$$

$$m^2 \leq 2x^2$$

$$x^2 \geq \frac{1}{2}m^2$$

$$m^2 - x^2 \geq 0$$

Syarat:  $(m+x)(m-x) \geq 0$

Dari (i) dan (ii) diperoleh:  $-m \leq x \leq -\frac{m}{\sqrt{2}}$  atau

$$\frac{m}{\sqrt{2}} \leq x \leq m$$

**Jawaban: D**

## 8. Pembahasan:

### Catatan

Persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  definit positif (bernilai positif untuk semua nilai x), jika:

$$b^2 - 4ac < 0$$

Diketahui:

$$\frac{x^2 - 6x}{-x^2 + 2ax - 5} > 0$$

Dengan  $1 < a < 2$  maka:

- Untuk  $a$  mendekati 1:

$$-x^2 + 2ax - 5 \approx -x^2 + 2x - 5$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 2^2 - 4(-1)(-5) \\ &= 4 - 20 = -16 \end{aligned}$$

$$b^2 - 4ac < 0 \text{ (definit positif)}$$

- Untuk  $a$  mendekati 2:

$$-x^2 + 2ax - 5 \approx -x^2 + 4x - 5$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac &= 4^2 - 4(-1)(-5) \\ &= 16 - 2 = -4 \end{aligned}$$

$$b^2 - 4ac < 0 \text{ (definit positif)}$$

Oleh karena itu,  $-x^2 + 2ax - 5$  definit positif.

Maka:

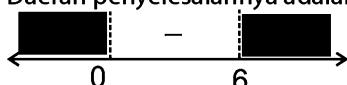
$$\frac{x^2 - 6x}{\oplus} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x(x-6)}{\oplus} > 0$$

Pembuat nol-nya adalah:

$$x = 0 \text{ atau } x = 6$$

Daerah penyelesaiannya adalah:



$$HP = \{x < 0 \text{ atau } x > 6\}$$

Jawaban: C



## Catatan

### 9. Pembahasan:

Dari pertidaksamaan  $2^{2x+2} - 3 \cdot 2^{x+2} + 8 < 0$   
 $\Rightarrow 2^2 \cdot (2^x)^2 - 3 \cdot 2^2 \cdot 2^x + 8 < 0$

Misal:  $2^x = p$

Sehingga, pertidaksamaan di atas menjadi:

$$4p^2 - 12p + 8 < 0 \text{ atau } p^2 - 3p + 2 < 0  
⇒ (p-1)(p-2) < 0$$

Diperoleh pembuat nol-nya adalah:

$$p = 1 \text{ dan } p = 2$$

- Ketika  $p = 1$  maka:

$$2^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

- Ketika  $p = 2$  maka:

$$2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$

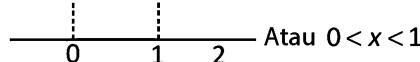
Daerah penyelesaiannya, dapat ditentukan dengan mensubstitusikan nilai  $x$  sembarang (misal  $x = 2$ ) pada pertidaksamaan  $2^{2x+2} - 3 \cdot 2^{x+2} + 8 < 0$ , diperoleh:

$$2^{2 \cdot 2+2} - 3 \cdot 2^{2+2} + 8 < 0$$

$$\Rightarrow 64 - 48 + 8 < 0$$

$$\Rightarrow 28 < 0 \text{ (salah)}$$

Sehingga, daerah penyelesaiannya:



Jawaban: A

### 10. Pembahasan:

$$\sqrt{625^{x-2}} > \sqrt{125^x} \cdot \sqrt[3]{25^{6x}}$$

$$\frac{4(x-2)}{5^2} > \frac{3x}{5^2} \cdot \frac{2 \cdot 6x}{5^3}$$

$$2(x-2) > \frac{3x}{2} + 4x$$

$$4x - 8 > 3x + 8x$$

$$-7x > 8 \Rightarrow x < -\frac{8}{7}$$

Jawaban: C

## 11. Pembahasan:

Persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  akan definit positif, jika  $D < 0$  atau  $b^2 - 4.a.c < 0$

Diketahui:

$$\frac{ax^2 + 2x + 4}{(1-x)(x+2)} \leq 0; \quad 3 < a < 4$$

Untuk nilai  $3 < a < 4$  pada  $ax^2 + 2x + 4$  maka akan menghasilkan persamaan kuadrat yang memiliki definit positif, karena  $D < 0$ .

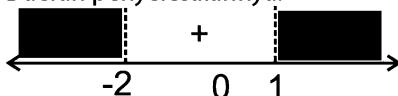
Sehingga:

$$\frac{\oplus}{(1-x)(x+2)} \leq 0$$

Pembuat nol yang diperoleh:

$$x = 1 \text{ atau } x = -2$$

Daerah penyelesaiannya:



Jadi, daerah penyelesaiannya adalah:

$$x < -2 \text{ atau } x > 1$$

**Jawaban: A**

## 12. Pembahasan:

$$\frac{3\sqrt{2-x}}{x-1} < 2$$

- Untuk  $x < 1$ ,  $x - 1 < 0$  dan  $3\sqrt{2-x} > 0$ .

Akibatnya  $\frac{3\sqrt{2-x}}{x-1} < 0$ . Jelas kondisi

$$\frac{3\sqrt{2-x}}{x-1} < 2 \text{ terpenuhi}$$

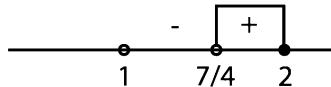
- Untuk  $1 < x \leq 2$ :  $3\sqrt{2-x} < 2(x-1)$

$$9(2-x) < 4(x^2 - 2x + 1)$$

$$4x^2 + x - 14 > 0$$

$$(4x-7)(x+2) > 0$$

**Catatan**

**Catatan**

$$\frac{7}{4} < x \leq 2$$

$$\text{Jadi, HP } \{x < 1 \text{ atau } \frac{7}{4} < x \leq 2\}$$

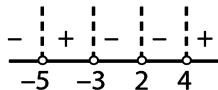
**Jawaban: C****13. Pembahasan:**

$$\frac{(x-2)(x^2+x-6)}{x^2+x-20} > 0$$

$$\frac{(x-2)(x+3)(x-2)}{(x+5)(x-4)} > 0$$

Titik-titik kritisnya, yaitu:

$$x = 2, x = -3, x = -5, x = 4$$



$$\text{Jadi, HP } \{-5 < x < -3 \text{ atau } x > 4\}$$

**Jawaban: D****14. Pembahasan:**

- Faktor prima dari 42 = {2, 3, 7}
- Banyak faktor prima = a = 3
- $3x^2 - 5x + 2 = 0$   
 $(3x - 2)(x - 1) = 0$

$$x = \frac{3}{2} \text{ atau } x = 1$$

Akar bulat = b = 1

$$\frac{b}{2} \log(y^2 - a) > 0$$

$$\frac{1}{2} \log(y^2 - 3) > 0$$

$$2^{-1} \log(y^2 - 3) > 0$$

$$-2 \log(y^2 - 3) > 0$$

$${}^2 \log(y^2 - 3) < 0$$

$${}^2\log(y^2 - 3) < {}^2\log 1$$

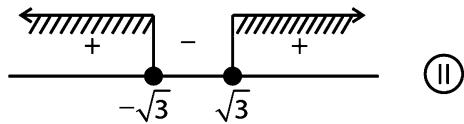
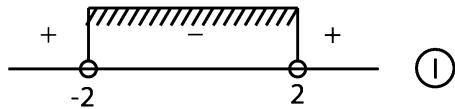
$$y^2 - 3 < 1$$

$$(y+2)(y-2) < 0 \quad (\text{I})$$

- Syarat:  $y^2 - 3 > 0$

$$(y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) > 0 \quad (\text{II})$$

- Dalam garis bilangan:



Yang memenuhi:  $-2 < y < -\sqrt{3}$  atau  $\sqrt{3} < y < 2$

Jawaban: A

### 15. Pembahasan:

$$2\log x \leq \log(3x+7) + 2\log 2$$

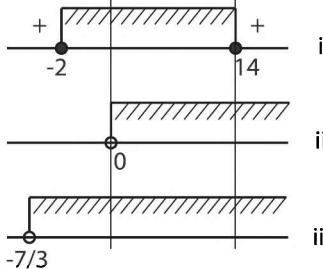
-  $\log x^2 \leq \log[(3x+7) \cdot 2^2]$   
 $x^2 \leq 12x + 28$

$$x^2 - 12x - 28 \leq 0$$

$$(x+2)(x-14) \leq 0 \quad \dots \dots \text{(i)}$$

- Syarat numeros:  $x > 0$  ... (ii) dan  $3x + 7 > 0$  ... (iii)

- Dalam garis bilangan:



$$\text{HP} = \{x \mid 0 < x \leq 14\}$$

Jawaban: C

## Catatan

### 16. Pembahasan:

Beberapa sifat logaritma:

- ${}^a \log b \cdot {}^b \log c = {}^a \log c$
- ${}^a \log b + {}^a \log c = {}^a \log bc$
- ${}^a \log a = 1$
- ${}^a \log a^n = n$

$$\begin{aligned} & {}^2 \log(x-1) \cdot {}^{4+x} \log 4 < 2 - {}^{4+x} \log 4 \\ \Rightarrow & {}^{4+x} \log 4 \cdot {}^2 \log(x-1) + {}^{4+x} \log 4 < 2 \\ \Rightarrow & {}^{4+x} \log 2^2 \cdot {}^2 \log(x-1) + {}^{4+x} \log 4 < 2 \\ \Rightarrow & 2 \cdot {}^{4+x} \log 2 \cdot {}^2 \log(x-1) + {}^{4+x} \log 4 < 2 \\ \Rightarrow & 2 \cdot {}^{4+x} \log(x-1) + {}^{4+x} \log 4 < 2 \\ \Rightarrow & {}^{4+x} \log(x-1)^2 \cdot 4 < {}^{4+x} \log(4+x)^2 \\ \Rightarrow & 4x^2 - 8x + 4 < 16 + 8x + x^2 \\ \Rightarrow & 3x^2 - 16x - 12 < 0 \\ \Rightarrow & (3x+2)(x-6) < 0 \end{aligned}$$

Daerah penyelesaiannya:

$$-\frac{2}{3} < x < 6 \quad \dots \text{(i)}$$

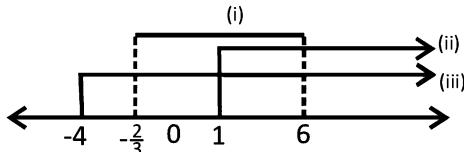
Bilangan numerus dari logaritma adalah bilangan positif maka:

$$x-1 > 0 \Rightarrow x > 1$$

Bilangan basis dari logaritma > 0 maka:

$$4+x > 0 \Rightarrow x > -4 \quad \dots \text{(iii)}$$

Dari (i), (ii), dan (iii) maka daerah penyelesaiannya adalah:



$$\text{HP} = \{1 < x < 6\}$$

Jawaban: C

**17. Pembahasan:**

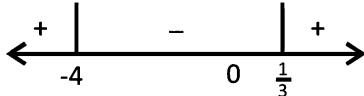
Dari pertidaksamaan  $3x^2 + 11x - 4 \geq 0$  maka dengan difaktorkan, diperoleh:

$$(3x-1)(x+4) \geq 0$$

Pembuat nolnya adalah:

$$x = \frac{1}{3} \text{ atau } x = -4$$

Daerah penyelesaiannya:



$$\text{HP} = \left\{ x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq \frac{1}{3}, x \in \mathbb{R} \right\}$$

**Jawaban: D**

**18. Pembahasan:**

$$(x-1)^2 (x-4)^2 < (x-2)^2$$

$$[(x-1)(x-4)]^2 - (x-2)^2 < 0$$

$$(x^2 - 5x + 4)^2 - (x-2)^2 < 0$$

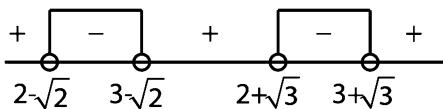
$$(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 6x + 8) < 0$$

Pembuat nol:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2} \text{ dan } x = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{2} \quad \text{dan } x = 3 \pm \sqrt{3}$$

Dalam garis bilangan:



$$2-\sqrt{2} < x < 3-\sqrt{3} \text{ atau } 2+\sqrt{2} < x < 3+\sqrt{3}$$

Pernyataan (1) dan (3) benar.

**Jawaban: B**

**19. Pembahasan:**

Diketahui:

$$|x-2|^2 < 4|x-2| + 12$$

$$\Rightarrow |x-2|^2 - 4|x-2| - 12 < 0$$

Misal:  $|x-2| = p$  maka:

$$\Rightarrow p^2 - 4p - 12 < 0$$

## Catatan

$$\Rightarrow (p-6)(p+2) < 0$$
$$\Rightarrow (|x-2|-6)(|x-2|+2) < 0$$

Karena  $|x-2|+2$  adalah definit positif, atau selalu bernilai positif untuk setiap  $x$  real maka haruslah:

$$|x-2|-6 < 0$$
$$\Rightarrow (x-2-6)(x-2+6) < 0$$
$$\Rightarrow (x-8)(x+4) < 0$$

Sehingga, harga  $x$  yang memenuhi adalah:

$$-8 < x < 4$$

**Jawaban: C**

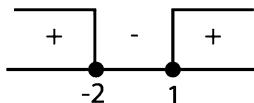
### 20. Pembahasan:

$$\sqrt{-1-x} \geq x+3$$
$$-(x+1) + \sqrt{-x-1} - 2 \geq 0$$

misal  $\sqrt{-x-1} = a$

maka:  $a^2 + a - 2 \geq 0$

$$(a-1)(a+2) \geq 0$$



$$a \leq -2 \quad \text{atau} \quad a \geq 1$$

$$\sqrt{-x-1} \leq -2 \quad \text{atau} \quad \sqrt{-x-1} \geq 1$$

$$\text{tidak memenuhi} \quad -x-1 \geq 1$$

$$-x \geq 2$$

$$x \leq -2$$

- Syarat:  $-1-x \geq 0$

$$-x \geq 1$$

$$x \leq -1$$

- Irisan  $x \leq -1$  dengan  $x \leq -2$  adalah  $x \leq -2$

**Jawaban: D**

### 21. Pembahasan:

Diketahui:

$$\frac{x^2 - 3|x| + 2}{x+1} \geq 0$$

- Jika  $|x| = -x$  maka:

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+2)(x+1)}{x+1} \geq 0$$

Diperoleh, batas nilainya  $x = -2; x = -1 \dots$  (i)

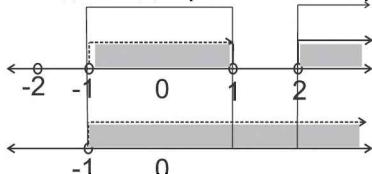
- Jika  $|x| = x$  maka:

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)(x-1)}{x+1} \geq 0$$

Diperoleh batas nialainya  $x = 2; x = 1$ ; dan  $x = -1 \dots$  (ii)

Dari (i) dan (ii) diperoleh daerah penyelesaiannya:



Jadi, daerah penyelesaiannya adalah:

$$\{x \in \mathbb{R} | -1 < x \leq 1 \text{ atau } x \geq 2\}$$

**Jawaban: A**

## 22. Pembahasan:

Beberapa sifat logaritma:

$${}^a \log b^n = n \cdot {}^a \log b$$

$${}^a \log b \cdot {}^b \log c = {}^a \log c$$

$${}^a \log b + {}^a \log c = {}^a \log bc$$

Diketahui:

$${}^3 \log x \cdot {}^{1-2x} \log 9 > 2 - {}^{1-2x} \log 9$$

$$\Rightarrow {}^{1-2x} \log 9 \cdot {}^3 \log x > 2 - {}^{1-2x} \log 9$$

$$\Rightarrow {}^{1-2x} \log 3^2 \cdot {}^3 \log x > 2 - {}^{1-2x} \log 9$$

$$\Rightarrow 2 \cdot {}^{1-2x} \log 3 \cdot {}^3 \log x > 2 - {}^{1-2x} \log 9$$

$$\Rightarrow 2 \cdot {}^{1-2x} \log x > 2 - {}^{1-2x} \log 9$$

## Catatan

$$\begin{aligned}\Rightarrow & ^{1-2x} \log x^2 + ^{1-2x} \log 9 > 2 \\ \Rightarrow & ^{1-2x} \log 9x^2 > ^{1-2x} \log (1-2x)^2 \\ \Rightarrow & 9x^2 > (1-2x)^2 \\ \Rightarrow & 9x^2 > 1 - 4x + 4x^2 \\ \Rightarrow & 5x^2 + 4x - 1 > 0 \\ \Rightarrow & (5x-1)(x+1) > 0\end{aligned}$$

Diperoleh pembuat nol-nya adalah:

$$x = \frac{1}{5} \text{ atau } x = -1$$

Dan nilai x yang memenuhi adalah:

$$x > \frac{1}{5} \text{ atau } x < -1 \dots \text{(i)}$$

Syarat numerus logaritma  $x > 0 \dots \text{(ii)}$

Syarat bilangan basisi logaritma > 0 maka:

$$1-2x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \dots \text{(iii)}$$

Dari (i), (ii), dan (iii) maka daerah penyelesaiannya adalah:



$$\text{HP} = \left\{ \frac{1}{5} < x < \frac{1}{2} \right\}$$

**Jawaban: D**

## 23. Pembahasan:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{untuk } x \geq 0 \\ -x, & \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

$$|x-1| + |x-2| + |x-3| \geq 6$$

- Untuk  $x < 1$ :  $|x-1| = -(x-1)$ ,  $|x-2| = -(x-2)$ ,  $|x-3| = -(x-3)$

$$-(x-1)-(x-2)-(x-3) \geq 6$$

$$-3x + 6 \geq 6$$

Diperoleh:

$$-3x \geq 0$$

$$x \leq 0$$

Diiris dengan  $x < 1$ , diperoleh  $x \leq 0$

- Untuk  $1 \leq x < 2$ :  $|x-1| = (x-1)$ ,  $|x-2| = -(x-2)$ ,  $|x-3| = -(x-3)$

$$x-1-(x-2)-(x-3) \geq 6$$

$$-x + 4 \geq 6$$

Diperoleh:

$$-x \geq 2$$

$$x \leq -2$$

Irisan  $1 \leq x < 2$  dengan  $x \leq -2$ , diperoleh tidak ada  $x$  yang memenuhi.

- Untuk  $2 \leq x < 3$ :  $|x-1| = (x-1)$ ,  $|x-2| = (x-2)$ ,  $|x-3| = -(x-3)$

$$x-1+x-2-(x-3) \geq 6$$

Diperoleh:

$$x \geq 6$$

Irisan  $2 \leq x < 3$  dengan  $x \geq 6$ , diperoleh tidak ada  $x$  yang memenuhi.

- Untuk  $x \geq 3$ :  $|x-1| = (x-1)$ ,  $|x-2| = (x-2)$ ,  $|x-3| = (x-3)$

Diperoleh:  $x-1+x-2+x-3 \geq 6$

$$3x - 6 \geq 6$$

$$3x \geq 12$$

$$x \geq 4$$

Diiriskan dengan  $x \geq 3$ , diperoleh  $x \geq 4$

Jadi,  $x$  yang memenuhi adalah  $x \leq 0$  atau  $x \geq 4$

**Jawaban: C**

#### 24. Pembahasan:

$$\sqrt{4-x^2} + \frac{|x|}{x} \geq 0$$

- Domain =  $\{x \mid 4-x^2 \geq 0, x \neq 0\}$

$$= \{x \mid x^2 \leq 4, x \neq 0\}$$

$$= \{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \neq 0\}$$

## Catatan

- Untuk  $-2 \leq x < 0, |x| = -x$

$$\sqrt{4-x^2} + \frac{-x}{x} \geq 0$$

$$\sqrt{4-x^2} \geq 1$$

Akibatnya:  $4-x^2 \geq 1$

$$x^2 \leq 3$$

$$-\sqrt{3} \leq x \leq 3$$

Diiriskan dengan  $-2 \leq x < 0$ , diperoleh:

$$-\sqrt{3} \leq x < 0$$

- Untuk  $0 < x \leq 2, |x| = x$

Akibatnya:

$$\sqrt{4-x^2} + \frac{x}{x} \geq 0$$

$$\sqrt{4-x^2} \geq -1, \text{ dipenuhi untuk semua } x.$$

Diiriskan dengan  $0 < x \leq 2$ , diperoleh:

$$0 < x \leq 2.$$

Jadi, HP =  $\{-\sqrt{3} \leq x < 0 \text{ atau } 0 < x \leq 2\}$

**Jawaban: A**

## 25. Pembahasan:

Beberapa sifat logaritma:

$${}^a \log b^n = n \cdot {}^a \log b$$

$${}^a \log b \cdot {}^b \log c = {}^a \log c$$

$${}^a \log b + {}^a \log c = {}^a \log bc$$

Diketahui:

$${}^2 \log(x-1) \cdot {}^{4+x} \log 4 < 2 - {}^{4+x} \log 4$$

$$\Rightarrow {}^{4+x} \log 4 \cdot {}^2 \log(x-1) + {}^{4+x} \log 4 < 2$$

$$\Rightarrow {}^{4+x} \log 2^2 \cdot {}^2 \log(x-1) + {}^{4+x} \log 4 < 2$$

$$\Rightarrow 2 \cdot {}^{4+x} \log(x-1) + {}^{4+x} \log 4 < 2$$

$$\Rightarrow {}^{4+x} \log(x-1)^2 \cdot 4 < {}^{4+x} \log(4+x)^2$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 \cdot 4 < (4+x)^2$$

**Catatan**

$$\Rightarrow 4x^2 - 8x + 4 < 16 + 8x + x^2$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 16x - 12 < 0$$

$$\Rightarrow (3x+2)(x-6) < 0$$

Diperoleh pembuat nol nya:

$$x = -\frac{2}{3} \text{ atau } x = 6$$

Dan nilai  $x$  yang memenuhi  $3x^2 - 16x - 12 < 0$  adalah:

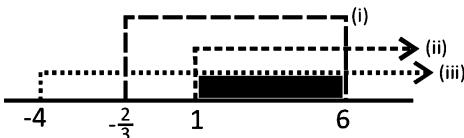
$$\frac{-2}{3} < x < 6 \dots \text{(i)}$$

Syarat numerus logaritma  $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \dots \text{(ii)}$

Syarat bilangan basis logaritma adalah positif maka:

$$4 + x > 0 \Rightarrow x > -4 \dots \text{(iii)}$$

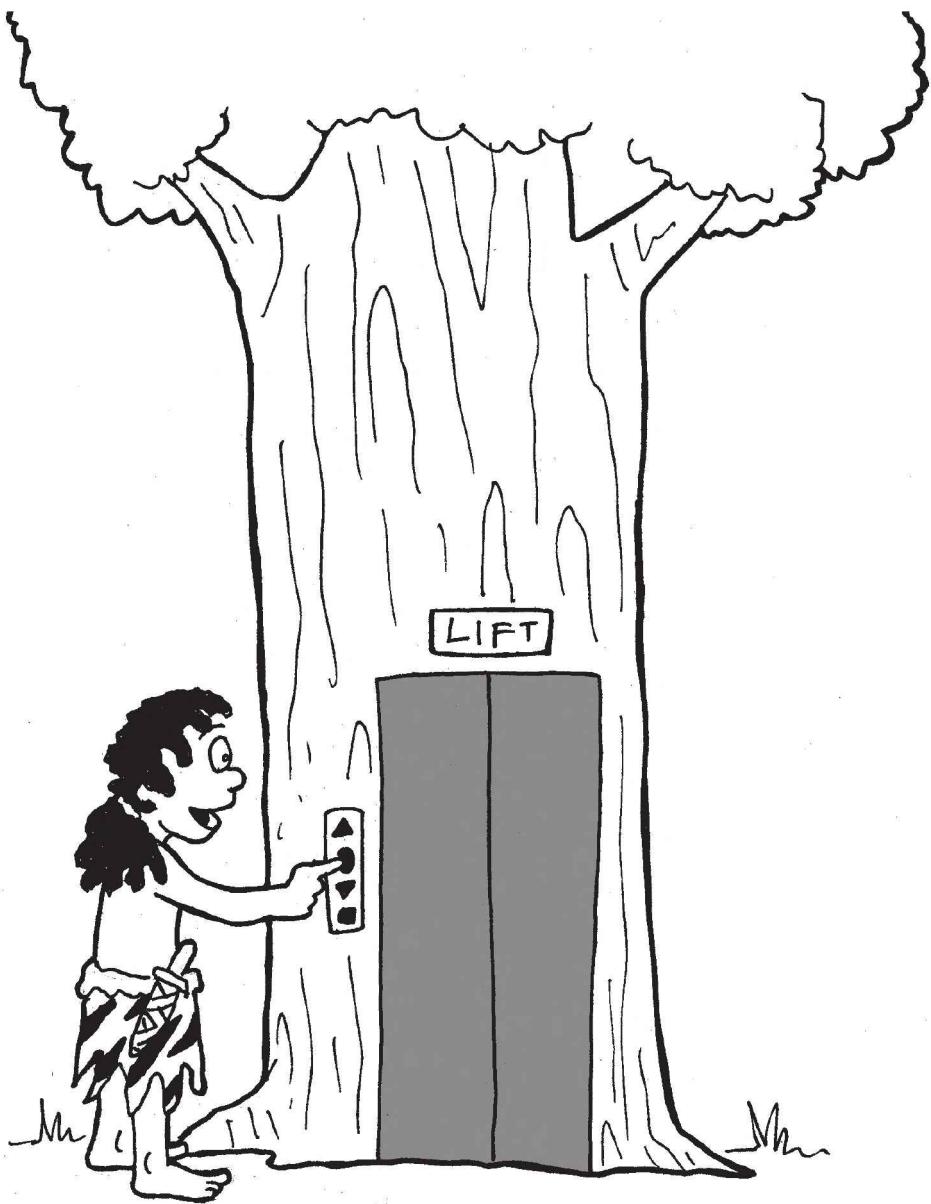
Dari (i), (ii), dan (iii) maka daerah penyelesaiannya adalah:



Atau, HP =  $\{1 < x < 6\}$

**Jawaban: C**



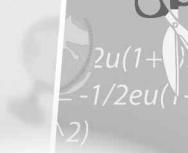
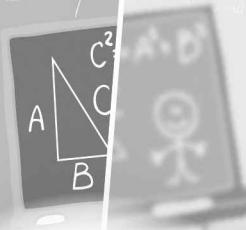


$$2a+b=x$$

$$Ra + 40a +$$

4

# EKSPONEN



## A Sifat Eksponen

Eksponen adalah bilangan berpangkat

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ times}}$$

sebanyak n kali

a = bilangan pokok

$n$  = bilangan pangkat

Untuk setiap  $a, b$  bilangan real dan  $n, m$  bilangan bulat, berlaku aturan berikut:

- $a^n \cdot a^m = a^{(n+m)}$
  - $\frac{a^n}{a^m} = a^{(n-m)}$
  - $(a^n)^m = a^{(n.m)}$
  - $\sqrt[m]{a^n} = a^{(n/m)}$
  - $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$
  - $(ab)^n = a^n \cdot b^n$
  - $a^0 = 1, a \neq 0$
  - $0^n = 0, n > 0$

## B Pertidaksamaan Eksponen

Jika  $c^{f(x)} > c^{g(x)}$  maka berlaku aturan-aturan berikut:

$$c^{f(x)} > c^{g(x)} \begin{cases} \text{Jika } 0 < c < 1 \rightarrow f(x) < g(x) \\ \text{Jika } c > 1 \rightarrow f(x) > g(x) \end{cases}$$



## Persamaan Eksponen

1.  $a^{f(x)} = a^{g(x)} \rightarrow f(x) = g(x)$
2.  $a^{f(x)} = b^{f(x)} \rightarrow f(x) = 0$
3.  $a^{f(x)} = b^{g(x)} \rightarrow \log a^{f(x)} = \log b^{g(x)}$
4.  $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ 
  - $f(x) = g(x)$
  - $a = 1$
  - $a = 0$ , jika  $f(x)$  dan  $g(x)$  memuat suku konstan positif
  - $a = -1$ , jika  $f(-1)$  dan  $g(-1)$  bersama-sama genap atau bersama-sama ganjil
5.  $a^{2f(x)} \pm a^{f(x)} \pm b = 0 \rightarrow$  persamaan kuadrat  
 $(a^{f(x)})^2 \pm (a^{f(x)}) \pm b = 0 \Rightarrow p^2 \pm p \pm b = 0,$   
dengan  $p = a^{f(x)}$

Trik .. !

$$(i) \quad a^{px+q} = b^{rx+s} \Rightarrow {}^{a^p/b^r} \log \frac{b^s}{a^q}$$

$$(ii) \quad a \cdot p^{2x} + b \cdot p^x + c = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = {}^p \log \frac{c}{a}$$

$$(iii) \quad p^{x+a} + p^{b-x} = k \Rightarrow x_1 + x_2 = b - a$$



# PAKET SOAL

## SOAL UN SMA IPA

1. Diketahui  $a = 4$ ,  $b = 2$ , dan  $c = \frac{1}{2}$ . Nilai  $(a^{-1})^2 \times \frac{b^4}{c^{-3}} = \dots$

A.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{16}$

B.  $\frac{1}{4}$

E.  $\frac{1}{32}$

C.  $\frac{1}{8}$

## Catatan

## SOAL UN SMA IPA

2. Bentuk sederhana dari  $\frac{3^{\frac{5}{6}} 12^{\frac{7}{12}}}{6^{\frac{2}{3}} 2^{\frac{1}{4}}}$  adalah ....

A.  $6^{\frac{1}{4}}$

D.  $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$

B.  $6^{\frac{3}{4}}$

E.  $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

C.  $6^{\frac{2}{3}}$

## SOAL SNMPTN TKDU

3. Jika  $9^{m+1} - 2 \cdot 9^m = 14$  maka  $27^m = \dots$

A.  $\sqrt{2}$

D. 4

B. 2

E. 6

C.  $2\sqrt{2}$

## SOAL UN SMA IPA

4. Bentuk sederhana dari  $\frac{\sqrt{5} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - 3\sqrt{3}} = \dots$

A.  $\frac{20 + 5\sqrt{15}}{22}$

**Catatan**

- B.  $\frac{23-5\sqrt{15}}{22}$       D.  $\frac{20+5\sqrt{15}}{-22}$   
C.  $\frac{20-5\sqrt{15}}{22}$       E.  $\frac{23+5\sqrt{15}}{-22}$

**SOAL UN SMA IPA**

5. Bentuk sederhana dari  $\left(\frac{9a^2b^{-1}c^3}{27a^{-1}b^2c^2}\right)^{-1}$  adalah ....
- A.  $\frac{3b^2}{a^3c}$       D.  $\frac{a^3c}{3b^3}$   
B.  $\frac{3b}{ac^5}$       E.  $\frac{a^3c^5}{3b^3}$   
C.  $\frac{3b^3}{a^3c^5}$

**SOAL SNMPTN K.DASAR**

6. Nilai  $a+b$ , jika  $\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}} = a+b\sqrt{3}$  adalah...
- A. 1      D. 4  
B. 2      E. 5  
C. 3

**SOAL UN SMA IPA**

7. Bentuk sederhana dari  $\left(\frac{a^3b^{-2}c}{ab^{-4}c^2}\right)^{-1} = \dots$
- A.  $a^2 b^3 c$       D.  $\frac{b}{a^2 c}$   
B.  $a^2 b^2 c$       E.  $\frac{c}{a^2 b^2}$   
C.  $\frac{b^2 c^2}{a^2}$

**SOAL SNMPTN TKDU**8. Jika  $4^{m+1} + 4^m = 15$  maka  $8^m = \dots$ 

- A.  $3\sqrt{3}$       D. 3  
B.  $2\sqrt{3}$       E. 6  
C.  $\sqrt{3}$

**SOAL UN SMA IPA**9. Bentuk sederhana dari  $\frac{7x^3 y^{-4} z^{-6}}{84x^{-7} y^{-1} z^{-4}} = \dots$ 

- A.  $\frac{x^{10} z^{10}}{12y^3}$       D.  $\frac{y^3 z^2}{12x^4}$   
B.  $\frac{z^2}{12x^4 y^3}$       E.  $\frac{x^{10}}{12y^3 z^2}$   
C.  $\frac{x^{10} y^5}{12z^2}$

**SOAL SNMPTN MATDAS**10. Jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan bulat positif yang memenuhi  $a^b = 2^{20} - 2^{19}$  maka nilai  $a + b$  adalah ....

- A. 3      D. 21  
B. 7      E. 23  
C. 19

**SOAL UN SMA IPA**11. Bentuk sederhana dari  $\frac{9}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}} = \dots$ 

- A.  $6\sqrt{2} + 3\sqrt{5}$       D.  $18\sqrt{2} + \sqrt{5}$   
B.  $9\sqrt{2} - 9\sqrt{5}$       E.  $18\sqrt{2} + 9\sqrt{5}$   
C.  $12\sqrt{2} + \sqrt{5}$

## **SOAL STANDAR UN SMA IPA**

12. Jika anggota himpunan penyelesaian dari persamaan  $(x+1)^{x^2+7x+10} = (2x+3)^{x^2+7x+10}$  dijumlahkan, hasilnya adalah ....



SOAL UM UGM TKDU

13. Nilai  $1 - x$  yang memenuhi persamaan  $\sqrt{8^{3-x}} = 4^{2^{1-2x}}$   
adalah

- A. -4      D. 3  
B. -3      E. 4  
C. -2

**SOAL UM UGM MATDAS**

$$14. \left( x^{-4} y^{\frac{2}{3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( x^{-\frac{7}{3}} y^{-1} \right)^{\frac{1}{2}} = \dots$$

$$\left( x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{3}} \right)^{-\frac{1}{6}} \left( x^{-\frac{1}{4}} y^{-1} \right)^{\frac{1}{3}} = \dots$$

- A.  $y$       D.  $\frac{x}{y}$   
B.  $x$       E.  $\frac{y}{x}$   
C.  $xy$

## **SOAL UN SMA IPA**

15. Bentuk sederhana dari  $\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$  adalah ...

- A.  $-4 - 3\sqrt{6}$       D.  $4 - \sqrt{6}$   
B.  $-4 - \sqrt{6}$       E.  $4 + \sqrt{6}$   
C.  $-4 + \sqrt{6}$

**SOAL UN SMA IPA**

16. Bentuk rasional dari  $\frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$  adalah ....

A.  $\frac{5}{4}(\sqrt{3} - \sqrt{7})$

D.  $\sqrt{7} + \sqrt{3}$

B.  $\sqrt{7} - \sqrt{3}$

E.  $\frac{5}{4}(\sqrt{7} + \sqrt{3})$

C.  $\frac{5}{4}(\sqrt{7} - \sqrt{3})$

**SOAL STANDAR SBMPTN TKDU**

17. Dalam bentuk pangkat rasional

$$\sqrt[3]{x^3} \sqrt[5]{x^3} \sqrt{x^3} = \dots$$

A.  $x^{\frac{13}{30}}$

D.  $x^{\frac{31}{10}}$

B.  $x^{\frac{31}{30}}$

E.  $x^{\frac{39}{10}}$

C.  $x^{\frac{13}{10}}$

**SOAL UM UGM TKDU**

18.  $\frac{\sqrt{18} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} + \sqrt{12}} + \frac{5}{1 + \sqrt{6}} = \dots$

A.  $\sqrt{6}$

D.  $4 - \sqrt{6}$

B.  $1 - \sqrt{6}$

E.  $5 - 2\sqrt{6}$

C.  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$

**SOAL UN SMA IPA**

19. Diketahui  $a=4$ ,  $b=2$ , dan  $c=\frac{1}{2}$ . Nilai  $(a^{-1})^2 \times \frac{b^4}{c^{-3}} = \dots$

A.  $\frac{1}{2}$

D.  $\frac{1}{16}$

B.  $-$

E.  $\frac{1}{32}$

C.  $\frac{1}{8}$



**SOAL UN SMA IPS**

20. Bentuk sederhana dari  $\left( \frac{8p^{-3} \cdot q^{-2}}{16p^{-1} \cdot q^{-4}} \right)^{-2}$  adalah ....

A.  $\frac{p^4}{4q^4}$

D.  $2p^4q^2$

B.  $4(pq)^4$

E.  $\left( \frac{2p}{q} \right)^4$

C.  $4\left( \frac{p}{q} \right)^4$

**SOAL STANDAR UN**

21. Untuk x dan y yang memenuhi sistem persamaan

$$5^{x-2y+1} = 25^{x-2y} \text{ dan } 4^{x-y+2} = 32^{x-2y+1} \text{ maka nilai } x.$$

y = ....

A. 6

D. 15

B. 8

E. 20

C. 10

**SOAL STANDAR SNMPTN MATDAS**

22. Jika  $\sqrt{0,3 + \sqrt{0,08}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

maka  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \dots$

A. 25

D. 20

B. 15

E. 10

C. 5

**SOAL SNMPTN**

23. Nilai k yang memenuhi persamaan

$$x^a \left( x^{a+1} \right)^a \left( x^a \right)^{1-a} = x^{k-1} \text{ adalah ....}$$

A. a

D.  $a^2 + a$

B.  $3a + 1$

E.  $2a + 1$

C.  $3a$

**SOAL SNMPTN K.DASAR**

24. Jika  $f(x) = 3^x$  maka  $f(a+2b-c) = \dots$

- A.  $f(a)+2f(b)-f(c)$       D.  $\frac{2f(a)+(f(b))^2}{f(c)}$
- B.  $\frac{2f(a).f(b)}{f(c)}$       E.  $f(a+2b)-f(c)$
- C.  $\frac{2f(a).(f(b))^2}{f(c)}$

**SOAL SNMPTN**

25. Panjang sisi miring suatu segitiga siku-siku adalah  $2^{x+2}$ . Jika panjang dua sisi yang lain adalah 4 dan  $2^{2x+1}$  maka nilai  $x$  yang memenuhi terletak pada interval ...

- A.  $-1 < x < 0$       D.  $1 < x < 3$
- B.  $\frac{2}{3} < x < 2$       E.  $0 < x < 1$
- C.  $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$

# Pembahasan

Catatan

## 1. Pembahasan:

$$\text{Diketahui: } a = 4, b = 2 \text{ dan } c = \frac{1}{2}$$

$$\text{Maka, nilai dari } (a^{-1})^2 \times \frac{b^4}{c^{-3}} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 \times b^4 \cdot c^3$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times 2^4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^{2 \cdot 2}} \times 2^4 \times \frac{1}{2^3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

Jawaban: C

## 2. Pembahasan:

$$\frac{\frac{5}{3^6} \frac{7}{12^{12}}}{\frac{2}{6^3} \frac{1}{2^4}} = \frac{\frac{5}{3^6} \frac{7}{2^{12}} \frac{7}{2^{12}} \frac{7}{3^{12}}}{\frac{2}{3^3} \frac{2}{2^3} \frac{1}{2^4}}$$
$$= 3^{\frac{5}{6} + \frac{7}{12} - \frac{2}{3}} \frac{7}{2^{12}} + \frac{7}{12} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}$$

$$= 3^{\frac{10+7-8}{12}} \frac{14-8+3}{2^{12}}$$

$$= 3^{\frac{9}{12}} \frac{9}{2^{12}} = (3 \cdot 2)^{\frac{9}{12}} = 6^{\frac{3}{4}}$$

Jawaban: B

## 3. Pembahasan:

$$9^{m+1} - 2 \cdot 9^m = 14$$

$$\Rightarrow 9 \cdot 9^m - 2 \cdot 9^m = 14$$

$$\Rightarrow (9-2) \cdot 9^m = 14 \text{ (sifat distributif)}$$

$$\Rightarrow 7 \cdot 9^m = 14$$

$$\Rightarrow 9^m = \frac{14}{7} = 2$$

Sifat logaritma:

$$a^c = b \Rightarrow {}^a \log b = c$$

$$a^{^{\log b}} = b$$

Sehingga,

$$9^m = 2 \Rightarrow m = {}^9\log 2$$

$$\text{Maka, } 27^m = 27^{{}^9\log 2}$$

$$= 3^{3 \cdot {}^3\log 2}$$

$$= 3^{\frac{3}{2} {}^3\log 2}$$

$$= 3^{\frac{3}{2} {}^3\log 2^{\frac{3}{2}}}$$

$$= 2^{\frac{3}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

**Jawaban: C**

#### 4. Pembahasan:

Bentuk sederhana dari:  $\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-3\sqrt{3}}$  dengan dikali-

kan dengan sekawannya maka:

$$\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}}{\sqrt{5}-3\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{5}+3\sqrt{3}}{\sqrt{5}+3\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(\sqrt{5}+3\sqrt{3})}{5-27}$$

$$= \frac{5+3\sqrt{15}+2\sqrt{15}+18}{-22}$$

$$= \frac{23+5\sqrt{15}}{-22}$$

**Jawaban: E**

#### 5. Pembahasan:

- $(a^n)^m = a^{n \times m}$

- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

Sehingga:

$$\left( \frac{9a^2b^{-1}c^3}{27a^{-1}b^2c^2} \right)^{-1} = \left( \frac{3^2a^2b^{-1}c^3}{3^3a^{-1}b^2c^2} \right)^{-1}$$

**Catatan**

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3^{-2} a^{-2} b c^{-3}}{3^{-3} a b^{-2} c^{-2}} = 3^{-2-(-3)} a^{-2-1} b^{1-(-2)} c^{-3-(-2)} \\
 &= 3 a^{-3} b^3 c^{-1} \\
 &= \frac{3 b^3}{a^3 c}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: A****6. Pembahasan:**

$$\sqrt{8+4\sqrt{3}} = \sqrt{8+2\sqrt{12}} = \sqrt{6+\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{8-4\sqrt{3}} = \sqrt{8-2\sqrt{12}} = \sqrt{6-\sqrt{2}}$$

Sehingga:

$$\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}} = a+b\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}{\sqrt{8-4\sqrt{3}}} = a+b\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = a+b\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \cdot \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{(\sqrt{6}+\sqrt{2})} = a+b\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{6-2} = a+b\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{(8+2\sqrt{12})}{4} = a+b\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 2+\sqrt{3} = a+b\sqrt{3}$$

Maka,  $a = 3$  dan  $b = 1$ , jadi  $a + b = 3 + 1 = 4$ .**Jawaban: D****7. Pembahasan:**

Beberapa sifat eksponen:

- $a^n \times a^m = a^{n+m}$

- $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$$\bullet \quad (a^n)^m = a^{n \times m}$$

$$\bullet \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Bentuk sederhana dari:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{a^3 b^{-2} c}{a b^{-4} c^2} \right)^{-1} = \frac{a^{-3} b^2 c^{-1}}{a^{-1} b^4 c^{-2}} \\ & = a^{-3-(-1)} b^{2-4} c^{-1-(-2)} \\ & = a^{-2} b^{-2} c^1 \\ & = \frac{c}{a^2 b^2} \end{aligned}$$

**Jawaban: E**

**8. Pembahasan:**

$$4^{m+1} + 4^m = 15$$

$$\Rightarrow 2^{2(m+1)} + 2^{2m} = 15$$

$$\Rightarrow 2^{2m+2} + 2^{2m} = 15$$

$$\Rightarrow 2^2 \cdot 2^{2m} + 2^{2m} = 15$$

$$\Rightarrow 4 \cdot 2^{2m} + 2^{2m} = 15$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 2^{2m} = 15$$

$$\Rightarrow 2^{2m} = \frac{15}{5} = 3 \quad \dots(i)$$

Dari persamaan (i):

$$\Rightarrow (2^m)^2 = 3$$

$$\Rightarrow 2^m = \sqrt{3}$$

Sehingga, nilai dari  $8^m$  adalah:

$$(4 \cdot 2)^m = (2^2 \cdot 2)^m$$

$$= 2^{2m} \cdot 2^m$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (i) dan (ii), diperoleh:

$$8^m = 2^{2m} \cdot 2^m = 3\sqrt{3}$$

**Jawaban: A**



## Catatan

### 9. Pembahasan:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\begin{aligned}\frac{7x^3y^{-4}z^{-6}}{84x^{-4}y^{-1}z^{-4}} &= \frac{7}{84} \cdot x^{3-(-7)} \cdot y^{-4-(-1)} \cdot z^{-6-(-4)} \\ &= \frac{1}{12} \cdot x^{10} \cdot y^{-3} \cdot z^{-2} = \frac{x^{10}}{12y^3z^2}\end{aligned}$$

Jawaban: E

### 10. Pembahasan:

Jika  $a$  dan  $b$  merupakan bilangan bulat positif yang memenuhi:

$$a^b = 2^{20} - 2^{19}$$

$$\Rightarrow a^b = 2^{19}(2-1)$$

$$\Rightarrow a^b = 2^{19}$$

Maka,  $a = 2$  dan  $b = 19$ .

Jadi, nilai dari  $a + b = 2 + 19 = 21$

Jawaban: D

### 11. Pembahasan:

- Merasionalkan suatu pecahan adalah dengan mengalikan sekawan dari penyebutnya.

$$\bullet \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Bentuk sederhana dari  $\frac{9}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$  adalah dengan

mengalikan sekawan dari penyebutnya, yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{9}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}} \times \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}} &= \frac{9(2\sqrt{2}+\sqrt{5})}{8-5} \\ &= 3(2\sqrt{2}+\sqrt{5}) \\ &= 6\sqrt{2}+3\sqrt{5}\end{aligned}$$

Jawaban: A

**12. Pembahasan:**

$$(x+1)^{x^2+7x+10} = (2x+3)^{x^2+7x+10}$$

- $\Rightarrow (x+1) = (2x+3)$

$$-x = 2 \Rightarrow x = -2$$

- Dari  $x^2 + 7x + 10$  dengan  $x = -2$  sehingga  $(-2)^2$

$$+ 7(-2) + 10 = 0$$

$$\text{Maka, } x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x+5) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \text{ dan } x_2 = -5$$

Jadi, jumlah akar-akarnya  $= -2 + (-5) = -7$

**Jawaban: D**

**13. Pembahasan:**

$$8^{\frac{3-x}{2}} = 2^{2+1-2x}$$

$$2^{\left(\frac{3-x}{2}\right)} = 2^{2+1-2x}$$

$$\frac{9-3x}{2} = 3-2x$$

$$9-3x = 6-4x$$

$$x = -3$$

Sehingga, nilai dari  $1-x = 1-(-3) = 4$

**Jawaban: E**

**14. Pembahasan:**

$$\left(x^{-4}y^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(x^{-\frac{7}{3}}y^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{5}{3}}\right)^{-\frac{1}{6}} \left(x^{-\frac{1}{4}}y^{-1}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{12}}y^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{5}{6}}}{x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{6}}} = x^1y^0 \Rightarrow x$$

**Jawaban: B**

**15. Pembahasan:**

Bentuk sederhana dari  $\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ,

**Catatan**

Dikalikan dengan sekawan penyebut maka:

$$\frac{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2-3}$$

$$= \frac{2+\sqrt{6}-2\sqrt{6}-2.3}{-1}$$

$$= -(-4-\sqrt{6}) = 4+\sqrt{6}$$

**Jawaban: E**

**16. Pembahasan:**

Merasionalkan suatu pecahan adalah dengan mengalikan sekawan dari penyebutnya.

Sekawan dari  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  adalah  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

Sekawan dari  $\sqrt{a} - \sqrt{b}$  adalah  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$

Dan,

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$$

Bentuk rasional dari  $\frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{7}}$  adalah:

$$\frac{5}{\sqrt{3} + \sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{3} - \sqrt{7}}{\sqrt{3} - \sqrt{7}} = \frac{5(\sqrt{3} - \sqrt{7})}{3 - 7}$$

$$= \frac{5}{-4}(\sqrt{3} - \sqrt{7})$$

$$= -\frac{5}{4}\sqrt{3} + \frac{5}{4}\sqrt{7}$$

$$= \frac{5}{4}\sqrt{7} - \frac{5}{4}\sqrt{3}$$

$$= \frac{5}{4}(\sqrt{7} - \sqrt{3})$$

**Jawaban: C**

**17. Pembahasan:**

$$\sqrt[3]{x^3 \sqrt[5]{x^3 \sqrt{x^3}}} = \sqrt[3]{x^3 \sqrt[5]{x^3 \cdot x^{\frac{3}{2}}}}$$

$$= \sqrt[3]{x^3 \left( x^{\frac{9}{2}} \right)^{\frac{1}{5}}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt[3]{x^3 \cdot x^{10}} \\
 &= \sqrt[3]{x^{3+\frac{9}{10}}} = \left( x^{\frac{39}{10}} \right)^{\frac{1}{3}} \\
 &= x^{\frac{13}{10}}
 \end{aligned}$$

### Catatan

**Jawaban: C**

#### 18. Pembahasan:

$$\begin{aligned}
 &\frac{\sqrt{18} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} + \sqrt{12}} + \frac{5}{1 + \sqrt{6}} \\
 &= \frac{\sqrt{18} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} + \sqrt{12}} \cdot \frac{\sqrt{18} - \sqrt{12}}{\sqrt{18} - \sqrt{12}} + \frac{5}{1 + \sqrt{6}} \cdot \frac{1 - \sqrt{6}}{1 - \sqrt{6}} \\
 &= \frac{18 + 12 - 2\sqrt{18 \cdot 12}}{18 - 12} + \frac{5 - 5\sqrt{6}}{1 - 6} \\
 &= \frac{30 - 2\sqrt{9 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3}}{6} - 1 + \sqrt{6} \\
 &= 5 - 2\sqrt{6} - 1 + \sqrt{6} \\
 &= 4 - \sqrt{6}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: D**

#### 19. Pembahasan:

Diketahui:  $a = 4$ ,  $b = 2$  dan  $c = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 &\text{Maka, nilai dari } (a^{-1})^2 \times \frac{b^4}{c^{-3}} = \left( \frac{1}{a} \right)^2 \times b^4 \cdot c^3 \\
 &\Rightarrow \left( \frac{1}{4} \right)^2 \times 2^4 \times \left( \frac{1}{2} \right)^3 \\
 &\Rightarrow \frac{1}{2^{2.2}} \times 2^4 \times \frac{1}{2^3} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: C**

**Catatan****20. Pembahasan:**

$$\begin{aligned} \left( \frac{8p^{-3} \cdot q^{-2}}{16p^{-1} \cdot q^{-4}} \right)^{-2} &= \left( \frac{2^3 \cdot p^{-3} \cdot q^{-2}}{2^4 p^{-1} \cdot q^{-4}} \right)^{-2} \\ &= \frac{2^{-6} \cdot p^6 \cdot q^4}{2^{-8} \cdot p^2 \cdot q^8} \\ &= 2^{-6-(-8)} \cdot p^{6-2} \cdot q^{4-8} \\ &= 2^2 \cdot p^4 \cdot q^{-4} \\ &= \frac{4p^4}{q^4} = 4 \left( \frac{p}{q} \right)^4 \end{aligned}$$

**Jawaban: C****21. Pembahasan:**Dari persamaan  $5^{x-2y+1} = 25^{x-2y}$  maka:

$$5^{x-2y+1} = (5^2)^{x-2y}$$

$$\Rightarrow 5^{x-2y+1} = 5^{2x-4y}$$

$$\Rightarrow x - 2y + 1 = 2x - 4y$$

$$\Rightarrow -x + 2y = -1 \quad \dots(i)$$

Dari persamaan  $4^{x-y+2} = 32^{x-2y+1}$  maka:

$$(2^2)^{x-y+2} = (2^5)^{x-2y+1}$$

$$\Rightarrow 2^{2x-2y+4} = 2^{5x-10y+5}$$

$$\Rightarrow 2x - 2y + 4 = 5x - 10y + 5$$

$$\Rightarrow -3x + 8y = 1 \quad \dots(ii)$$

Dari persamaan (i) dan (ii), dengan metode eliminasi, diperoleh:

$$\begin{array}{rcl} -x + 2y = -1 & | \times 4 & -4x + 8y = -4 \\ -3x + 8y = 1 & | \times 1 & \underline{-3x + 8y = 1} \\ & & -x = -5 \\ & & \Rightarrow x = 5 \end{array}$$

Dengan menyubstitusikan nilai  $x = 5$  ke salah satupersamaan (misal  $-x + 2y = -1$ ), maka diperoleh:

$$-5 + 2y = -1$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1+5}{2} = 2$$

Jadi, nilai dari  $x \cdot y = 5.2 = 10$

**Jawaban: C**

**Catatan**

**22. Pembahasan:**

$$\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{0,3+\sqrt{0,08}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\sqrt{0,3+2\sqrt{0,02}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$0,3+2\sqrt{0,02} = a+b+2\sqrt{ab}$$

(dikuadratkan)

akibatnya  $a+b=0,3$  dan  $ab=0,02$

$$\text{Jadi } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{0,3}{0,02} = 15$$

**Jawaban B**

**23. Pembahasan:**

Diketahui:

$$x^a (x^{a+1})^a (x^a)^{1-a} = x^{k-1}$$

$$\Rightarrow x^a \cdot x^{a^2+a} \cdot x^{a-a^2} = x^{k-1}$$

$$\Rightarrow x^{a+a^2+a-a^2} = x^{k-1}$$

$$\Rightarrow x^{3a} = x^{k-1}$$

$$\Rightarrow 3a = k-1 \Rightarrow k = 3a+1$$

**Jawaban: B**

**24. Pembahasan:**

Diketahui:  $f(x) = 3^x$

$$\Rightarrow f(a+2b-c) = 3^{a+2b-c}$$

$$= \frac{3^a \cdot 3^{2b}}{3^c} = \frac{f(a) \cdot f(2b)}{f(c)}$$

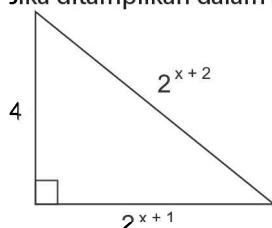
$$= \frac{f(a) \cdot (f(b))^2}{f(c)}$$

**Jawaban: C**



**Catatan****25. Pembahasan:**

Jika ditampilkan dalam gambar:



Dari aturan Pythagoras maka:

$$(2^{x+2})^2 = 4^2 + (2^{x+1})^2$$

$$2^{2x+4} = 16 + 2^{4x+2}$$

$$4(2^{2x})^2 - 16 \cdot (2^{2x}) + 16 = 0$$

$$(2^{2x})^2 - 4 \cdot (2^{2x}) + 4 = 0$$

$$(2^{2x} - 2)^2 = 0 \text{ berarti } 2^{2x} - 2 = 0 \text{ atau } 2^{2x} = 2,$$

$$\text{diperoleh } 2x = 1 \text{ atau } x = \frac{1}{2}, \text{ akibatnya } x = \frac{1}{2} \text{ ter-}$$

letak pada daerah  $0 < x < 1$

**Jawaban: E**



# C Penyelesaian Logaritma

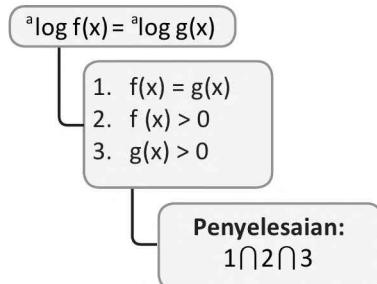
Teknik umum penyelesaian logaritma adalah sebagai berikut:

## 1. Bentuk Umum

$${}^a \log f(x) = k \text{ penyelesaian} \Rightarrow f(x) = a^k \\ \text{dengan } f(x) > 0$$

## 2. Persamaan Logaritma

Bilangan pokok disamakan



## 3. Bentuk: $a^p \log^2 x + b \log x + c = 0$

**Penyelesaian:**

Persamaan dimisalkan  $\log x = y$

Kemudian persamaan diselesaikan dengan difaktorkan

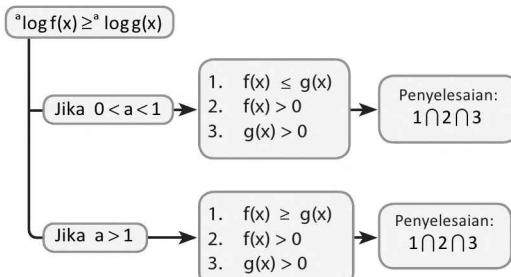
**Catatan:**

$$a^p \log^2 x + b \log x + c = 0$$

$$\text{penyelesaian} \Rightarrow x_1 \cdot x_2 = p^{-\frac{b}{a}}$$

## 4. Pertidaksamaan Logaritma

Langkah pertama adalah samakan bilangan pokok, selanjutnya ikuti aturan di bawah ini!





# PAKET SOAL

## SOAL UN SMA IPA

1. Hasil dari  $\frac{^3\log 25 \cdot ^5\log 81 - ^4\log 2}{^3\log 36 - ^3\log 4}$  adalah ....

A.  $\frac{11}{4}$

D. 11

B.  $\frac{15}{4}$

E. 15

C.  $\frac{17}{4}$

Catatan

## SOAL UM UGM MATDAS

2. Jika  $2^x = 2 - \sqrt{3}$ , maka  $^{2+\sqrt{3}}\log 4^x = \dots$

A. -2

D.  $\frac{1}{2}$

B.  $-\frac{1}{2}$

E. 2

C. 1

## SOAL UN SMA IPA

3. Diketahui  $^2\log 3 = x$  dan  $^2\log 10 = y$ .

Nilai  $^6\log 120 = \dots$

A.  $\frac{x+y+2}{x+1}$

D.  $\frac{xy+2}{x}$

B.  $\frac{x+1}{x+y+2}$

E.  $\frac{2xy}{x+1}$

C.  $\frac{x}{xy+2}$

## SOAL SNMPTN MATDAS

4. Jika  $^3\log 5 = x$  dan  $^2\log 3 = y$  maka nilai  $^3\log 10$  adalah....

(A)  $\frac{xy+1}{y}$

(B)  $\frac{xy+1}{x}$

**Catatan**

- (C)  $\frac{xy}{y+1}$       (D)  $\frac{xy}{x+1}$   
(E)  $\frac{xy+1}{y+1}$

**SOAL UN SMA IPA**

5. Bentuk sederhana dari  $\frac{^2\log^2 a - ^2\log^2 b}{^2\log ab}$  adalah ....

- A.  $^2\log\left(\frac{a}{b}\right)$       D.  $^2\log(a+b)$   
B.  $^2\log(ab)$       E.  $^2\log(a+b)^2$   
C.  $^2\log(a-b)$

**SOAL SNMPTN MATDAS**

6. Nilai  $\left(^a\log \frac{1}{b^2}\right)\left(^b\log \frac{1}{c^2}\right)\left(^c\log \frac{1}{a^3}\right) = \dots$

- A. -14      (D) -8  
B. -12      (E) -6  
C. -10

**SOAL SNMPTN MATDAS**

7. Jika  $6(3^{40})(^2\log a) + 3^{41} (^2\log a) = 3^{34}$  maka nilai a adalah ....

- A.  $\frac{1}{8}$       D. 8  
B.  $\frac{1}{4}$       E. 16  
C. 4

**SOAL UN SMA IPA**

8. Nilai x yang memenuhi persamaan

$$\frac{1}{2}\log(x^2 - 3) - \frac{1}{2}\log x = -1$$

- A.  $x = -1$  atau  $x = 3$       D.  $x = 1$  saja  
B.  $x = 1$  atau  $x = -3$       E.  $x = 3$  saja  
C.  $x = 1$  atau  $x = 3$

**SOAL UM UGM MATDAS**9. Jika  $x+y \log 2 = a$  dan  $x-y \log 8 = b$ , dengan $0 < y < x$ , maka  ${}^4 \log(x^2 - y^2) = \dots$ 

A.  $\frac{a+3b}{ab}$

D.  $\frac{3a+b}{2ab}$

B.  $\frac{a+b}{2ab}$

E.  $\frac{3a-b}{4ab}$

C.  $\frac{a+b}{4ab}$

**SOAL UN SMA IPA**10. Diketahui  ${}^{64} \log \sqrt{16^{x-4}} = \frac{1}{2}$ . Nilai  $x$  yang memenuhi

persamaan itu adalah ....

A.  $-5\frac{1}{2}$

D.  $5\frac{1}{2}$

B.  $-4\frac{3}{4}$

E.  $9\frac{1}{2}$

C. 4

**SOAL SNMPTN MATDAS**11. Jika  ${}^2 \log a - 2({}^2 \log b) = 2$  dan ${}^2 \log b - 2({}^2 \log a) = -1$  maka nilai  $ab$  adalah ....

A.  $\frac{1}{4}$

D. 2

B.  $\frac{1}{2}$

E. 4

C. 1

**SOAL UM UGM**

12. Persamaan

$${}^{(x^2-6x+14)} \log(x+3) = {}^{(4x^2-4x+1)} \log(x^2 - 6x + 9), x = \dots$$

A. 6

D. 5

B. 3 atau 5

E. -6

C. 3



**Catatan****SOAL SNMPTN MATDAS**

13. Jika  $16^m = 9$  maka  $2 \cdot 4^{m-2} - \frac{3}{4^{1+m}} = \dots$

A.  $-\frac{1}{4}$

D.  $\frac{1}{8}$

B.  $-\frac{1}{8}$

E.  $\frac{1}{4}$

C. 0

**SOAL SNMPTN MATDAS**

14.  $\log b + \log ab^2 + \log a^2 b^3 + \dots + \log a^9 b^{10} = \dots$

A.  $\log 45a + \log 55b$

B.  $(\log a)^{45} + (\log b)^{55}$

C.  $45 \log a + 55 \log b$

D.  $(91)\log a + (101)\log b$

E.  $45 \log(ab)$

**SOAL SIMAK UI MATDAS**

15. Jika  $f(x) = {}^5 \log(x+1) + {}^5 \log\left(\frac{1}{x-2}\right)$  maka  $f^{-1}({}^5 \log 2) = \dots$

A. 3

D. 6

B. 4

E. 7

C. 5

**SOAL SNMPTN MATDAS**

16. Jika  $\frac{{}^3 \log x}{{}^3 \log w} = 2$  dan  ${}^{xy} \log w = \frac{2}{5}$  maka nilai  $\frac{{}^2 \log w}{{}^2 \log y}$

adalah ....

A. 8

D. 2

B. 6

E. 1

C. 4

**SOAL SNMPTN MATDAS**

17. Jika  $\frac{{}^2 \log ab}{{}^2 \log a} = 3$  dan  ${}^{bc} \log a = \frac{2}{3}$  maka nilai  ${}^c \log a$

adalah ....

A. -2

D. 1

B.  $-\frac{1}{2}$

E. 2

C.  $\frac{1}{2}$

**SOAL SIMAK UI MATDAS**18. Nilai  $x$  yang memenuhi $2 \log x \leq \log(3x + 7) + 2 \log 2$  adalah ....

- A.  $-2 \leq x \leq 14$       D.  $-2 < x < 0$   
B.  $-2 \leq x \leq 0$       E.  $0 \leq x \leq 14$   
C.  $0 \leq x \leq 14$

**SOAL SNMPTN MATDAS**

19. Penyelesaian pertidaksamaan dari

 $2 \log(x - 2) \leq \log(2x - 1)$  adalah ....

- A.  $x > 4$       D.  $2 < x \leq 5$   
B.  $x > 5$       E.  $x < -3$  atau  $x > 5$   
C.  $-2 < x < 4$

**SOAL SIMAK UI TKD**20. Misalkan  $a$  adalah banyaknya faktor prima dari 42 dan  $b$  adalah akar bilangan bulat dari  $3x^2 - 5x + = 0$ .Nilai-nilai  $y$  yang memenuhi  $\frac{b}{2} \log(y^2 - a) > 0$  adalah ....

- A.  $-2 < y < -\sqrt{3}$  atau  $\sqrt{3} < y < 2$   
B.  $-2 < y < -\sqrt{3}$  atau  $y > 2$   
C.  $-\sqrt{3} < y < \sqrt{3}$  atau  $y < -2$  atau  $y > 2$   
D.  $y < -2$  atau  $y > 2$   
E.  $-2 < y < 2$

**SOAL SIMAK UI MATDAS**21. Jika  ${}^4 \log({}^2 \log x) + {}^2 \log({}^4 \log x) = 2$  maka ${}^5 \log \sqrt{x + \sqrt{2}} + 5 = \dots$ 

- A. 1      D. 5  
B. 2      E. 16  
C. 4

**SOAL SNMPTN MATDAS**22. Jika  ${}^2 \log \sqrt{3} = a$  maka nilai dari  ${}^4 \log 27$  adalah ....

- A. 6a      D. 3a  
B. 5a      E. a  
C. 4a

**SOAL SIMAK UI TKD**

23. Diketahui bahwa

$${}^3\log x \cdot {}^6\log x \cdot {}^9\log x =$$

$${}^3\log x \cdot {}^6\log x + {}^3\log x \cdot {}^9\log x + {}^6\log x \cdot {}^9\log x$$

maka nilai x adalah ....

(1)  $\frac{1}{3}$

(3) 48

(2) 1

(4) 162

**SOAL UN SMA IPA**

24. Penyelesaian pertidaksamaan

$${}^2\log x + {}^2\log(x-1) < 1$$
 adalah ....

A.  $-1 < x < 2$

D.  $1 \leq x < 2$

B.  $0 < x < 1$

E.  $0 < x < 2$

C.  $1 < x < 2$

**SOAL SNMPTN MAT. IPA**

25. Semua nilai-nilai x yang memenuhi:

$$2^{-x^2+3x+6} > \frac{{}^a\log b}{{}^c\log b}$$
 adalah ....

A.  $-2 < x < 3$

B.  $x < -2$  atau  $x > 3$

C.  $\frac{1-\sqrt{17}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

D.  $x < \frac{1-\sqrt{17}}{2}$  atau  $x > \frac{1+\sqrt{17}}{2}$

E. Semua bilangan real



# Pembahasan

## 1. Pembahasan:

Beberapa sifat logaritma:

- ${}^a \log b^n = n \cdot {}^a \log b$
- ${}^a \log b \cdot {}^b \log c$
- ${}^a \log b - {}^a \log c = {}^a \log \frac{b}{c}$
- ${}^a \log b^m = \frac{m}{n} \cdot {}^a \log b$

Catatan

Sehingga, hasil dari  $\frac{{}^3 \log 25 \cdot {}^5 \log 81 - {}^4 \log 2}{{}^3 \log 36 - {}^3 \log 4}$  adalah:

$$= \frac{{}^3 \log 5^2 \cdot {}^5 \log 3^4 - {}^2 \log 2}{{}^3 \log \frac{36}{4}}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot {}^3 \log 5 \cdot {}^5 \log 3 - \frac{1}{2} \cdot {}^2 \log 2}{{}^3 \log 9}$$

$$= \frac{8 \cdot {}^3 \log 3 - \frac{1}{2} \cdot 1}{{}^3 \log 3^2}$$

$$= \frac{8 \cdot 1 - \frac{1}{2}}{2}$$

$$= \frac{\frac{15}{2}}{2} = \frac{15}{4}$$

Jawaban: B

## 2. Pembahasan:

$$2^x = 2 - \sqrt{3} = 2 - \sqrt{3} \cdot \frac{2 + \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \frac{4 - 3}{2 + \sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})^{-1}$$

$${}^{2+\sqrt{3}} \log 4^x = {}^{2+\sqrt{3}} \log (2^x)^2 = 2 \cdot {}^{2+\sqrt{3}} \log 2^x$$



## Catatan

$$= 2 \cdot {}^{2+\sqrt{3}} \log(2 + \sqrt{3})^{-1}$$
$$= -2$$

Jawaban: A

### 3. Pembahasan:

Beberapa sifat logaritma:

- ${}^a \log b = \frac{\log b}{\log a}$
- ${}^a \log b \cdot c = {}^a \log b + {}^a \log c$

Diketahui:

$${}^2 \log 3 = x; {}^2 \log 10 = y$$

$$\text{Maka, } {}^6 \log 120 = \frac{{}^2 \log 120}{{}^2 \log 6}$$
$$= \frac{{}^2 \log 2^2 \cdot 3 \cdot 10}{{}^2 \log 2 \cdot 3}$$
$$= \frac{{}^2 \log 2^2 + {}^2 \log 3 + {}^2 \log 10}{{}^2 \log 2 + {}^2 \log 3}$$
$$= \frac{2+x+y}{1+x} = \frac{x+y+2}{x+1}$$

Jawaban: A

### 4. Pembahasan:

Beberapa sifat logaritma:

- ${}^a \log b = \frac{\log b}{\log a}$
- ${}^a \log b^m = \frac{m}{n} \cdot {}^a \log b$
- ${}^a \log b + {}^a \log c = {}^a \log b \cdot c$
- ${}^a \log b = \frac{1}{b} \log a$

Diketahui:

$${}^3 \log 5 = x$$

$${}^2 \log 3 = y \Rightarrow {}^3 \log 2 = \frac{1}{y}$$



Maka, nilai dari:

$${}^3\log 10 = \frac{\log 10}{\log 3}$$

$$= \frac{\log 5.2}{\log 3} = \frac{\log 5 + \log 2}{\log 3} \text{ (dipakai } {}^3\log \dots \text{ )}$$

$$= \frac{{}^3\log 5 + {}^3\log 2}{{}^3\log 3} = \frac{x + \frac{1}{y}}{1} = \frac{xy + 1}{y}$$

**Jawaban: A**

### 5. Pembahasan:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Beberapa sifat logaritma:

- ${}^n\log a + {}^n\log b = {}^n\log ab$
- ${}^n\log a - {}^n\log b = {}^n\log \frac{a}{b}$

Bentuk sederhana dari:

$$\begin{aligned} & \frac{{}^2\log^2 a - {}^2\log^2 b}{{}^2\log ab} \\ &= \frac{({}^2\log a + {}^2\log b)({}^2\log a - {}^2\log b)}{{}^2\log ab} \\ &= \frac{({}^2\log ab)\left({}^2\log\left(\frac{a}{b}\right)\right)}{{}^2\log ab} \\ &= {}^2\log\left(\frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

**Jawaban: A**

### 6. Pembahasan:

$$\begin{aligned} & \left( {}^a\log \frac{1}{b^2} \right) \left( {}^b\log \frac{1}{c^2} \right) \left( {}^c\log \frac{1}{a^3} \right) \\ &= {}^a\log b^{-2} \cdot {}^b\log c^{-2} \cdot {}^c\log a^{-3} \\ &= -2 \cdot -2 \cdot -3 \cdot {}^a\log b \cdot {}^b\log c \cdot {}^c\log a \\ &= -12 \end{aligned}$$

**Jawaban: B**

**Catatan****7. Pembahasan:**

$$\begin{aligned} 6(3^{40})(^2\log a) + 3^{41}(^2\log a) &= 3^{43} \\ (^2\log a)(6 \cdot 3^{40} + 3^{41}) &= 3^{43} \\ ^2\log a(2 \cdot 3^{41} + 3^{41}) &= 3^{43} \\ ^2\log a(3^{42}) &= 3^{43} \\ ^2\log a &= 3 \\ a &= 8 \end{aligned}$$

**Jawaban: D****8. Pembahasan:**

$${}^a m \log b = \frac{1}{m} \cdot {}^a \log b$$

$${}^a \log b^n = n \cdot {}^a \log b$$

$${}^a \log b - {}^a \log c = {}^a \log \frac{b}{c}$$

$$\frac{1}{2} \log(x^2 - 3) - \frac{1}{2} \log x = -1$$

$$\Rightarrow {}^{2^{-1}} \log(x^2 - 3) - {}^{2^{-1}} \log x = {}^2 \log 2^{-1}$$

$$\Rightarrow -1 \cdot {}^2 \log(x^2 - 3) - (-1) {}^2 \log x = {}^2 \log \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -{}^2 \log(x^2 - 3) + {}^2 \log x = {}^2 \log \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow {}^2 \log \frac{x}{x^2 - 3} = {}^2 \log \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^2 - 3} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - 3 = 2x$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \text{ atau } x = 3$$

Untuk  $x = -1$  tidak memenuhi

Jadi,  $x = 3$ .

**Jawaban: E**

**9. Pembahasan:**

$${}^{x+y} \log 2 = a \Rightarrow {}^2 \log(x+y) = \frac{1}{a}$$

$${}^{x-y} \log 8 = b \Rightarrow {}^{x-y} \log 2^3 = b$$

$$3 \cdot {}^{x-y} \log 2 = b$$

$${}^{x-y} \log 2 = \frac{b}{3} \Rightarrow {}^2 \log(x-y) = \frac{3}{b}$$

$${}^4 \log(x^2 - y^2) = {}^2 \log(x+y)(x-y)$$

$$= \frac{1}{2} [ {}^2 \log(x+y) + {}^2 \log(x-y) ]$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{a} + \frac{3}{b} \right]$$

$$= \frac{3a+b}{2ab}$$

**Catatan****Jawaban: D****10. Pembahasan:**

$${}^{64} \log \sqrt{64^{x-4}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow {}^{64} \log \sqrt{(2^4)^{x-4}} = {}^{64} \log \sqrt{64}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2^{4x-16}} = \sqrt{64}$$

$$\Rightarrow 2^{4x-16} = 64$$

$$\Rightarrow 2^{4x-16} = 2^6$$

$$\Rightarrow 4x - 16 = 6$$

$$\Rightarrow 4x = 22$$

$$\Rightarrow x = \frac{22}{4} = 5\frac{1}{2}$$

**Jawaban: D****11. Pembahasan:**

Beberapa sifat logaritma:

- ${}^a \log b - {}^a \log c = {}^a \log \frac{b}{c}$
- $n \cdot {}^a \log b = {}^a \log b^n$

## Catatan

$$\begin{aligned} {}^2 \log a - 2({}^2 \log b) &= 2, \\ \Rightarrow {}^2 \log a - {}^2 \log b^2 &= {}^2 \log 2^2 \\ \Rightarrow {}^2 \log \frac{a}{b^2} &= {}^2 \log 4 \\ \Rightarrow \frac{a}{b^2} &= 4 \\ \Rightarrow a &= 4b^2 \dots \text{(i)} \\ {}^2 \log b - 2({}^2 \log a) &= -1 \\ \Rightarrow {}^2 \log b - {}^2 \log a^2 &= {}^2 \log 2^{-1} \\ \Rightarrow {}^2 \log \frac{b}{a^2} &= {}^2 \log 2^{-1} \\ \Rightarrow \frac{b}{a^2} &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow 2b &= a^2 \\ \Rightarrow b &= \frac{1}{2}a^2 \dots \text{(ii)} \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (ii) ke (i), maka:

$$\begin{aligned} a &= 4\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2 \\ \Rightarrow a &= 4\left(\frac{1}{4}a^4\right) \\ \Rightarrow a &= a^4 \\ \Rightarrow a^4 - a &= 0 \\ \Rightarrow a(a^3 - 1) &= 0 \\ \Rightarrow a = 0 \text{ atau } a^3 &= 1 \Rightarrow a = \sqrt[3]{1} = 1 \end{aligned}$$

Untuk  $a = 0$  (tidak memenuhi) maka  $a = 1$

Sehingga, dari  $a = 4b^2$

$$\Rightarrow 1 = 4b^2 \Rightarrow \frac{1}{4} = b^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4}} = b \Rightarrow \pm \frac{1}{2} = b$$

- Untuk  $b = -\frac{1}{2}$  maka:

$$ab = 1 \left( -\frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

- Untuk  $b = \frac{1}{2}$  maka:

$$ab = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

**Jawaban: B**

### 12. Pembahasan:

$$\log(x^2 - 6x + 14) = \log(x^2 - 6x + 9)$$

$$\log(x^2 - 6x + 14) = \log(x - 3)^2$$

$$\log(x^2 - 6x + 14) = \log(x - 3)^2$$

$$x^2 - 6x + 14 = 2x - 1$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$(x - 3)(x - 5) = 0$$

$$x = 3 \text{ atau } x = 5$$

Syarat domain  $x - 3 > 0$  maka HP: {5}

**Jawaban: D**

### 13. Pembahasan:

Beberapa sifat logaritma:

- $a^c = b \Rightarrow {}^a \log b = c$

- $x^{\log y} = y$

- ${}^x \log y + {}^x \log z = {}^x \log yz$

- ${}^x \log y - {}^x \log z = {}^x \log \frac{y}{z}$

Diketahui:  $16^m = 9$

$$\Rightarrow {}^{16} \log 9 = m$$

$$\Rightarrow {}^{2^4} \log 9 = m$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \cdot {}^2 \log 9 = m$$

**Catatan**

$$\begin{aligned} \text{Maka, } & 2 \cdot 4^{m-2} - \frac{3}{4^{1+m}} \\ & = 2 \cdot 2^{2(m-2)} - \frac{3}{2^{2(1+m)}} \\ & = 2^{2m-4+1} - \frac{3}{2^{2+2m}} \\ & = 2^{2m-3} - \frac{3}{2^{2+2m}} \\ & = 2^{2\left(\frac{1}{4}^2 \log 9\right)-3} - \frac{3}{2^{2+2\left(\frac{1}{4}^2 \log 9\right)}} \\ & = 2^{\frac{1}{4}^2 \log 9 - 3} - \frac{3}{2^{2+\frac{1}{4}^2 \log 9}} \\ & = 2^{\frac{1}{2}^2 \log 9 - 2 \log 2^3} - \frac{3}{2^{2 \log 2^2 + \frac{1}{2}^2 \log 9}} \\ & = 2^{\frac{1}{2}^2 \log \frac{9^{\frac{1}{2}}}{2^3}} - \frac{3}{2^{2 \log 2^2 \cdot 9^{\frac{1}{2}}}} \\ & = 2^{\frac{1}{2}^2 \log \frac{\sqrt{9}}{8}} - \frac{3}{2^{2 \log 4 \cdot \sqrt{9}}} \\ & = 2^{\frac{1}{2}^2 \log \frac{3}{8}} - \frac{3}{2^{2 \log 12}} \\ & = \frac{3}{8} - \frac{3}{12} = \frac{9-6}{24} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

**Jawaban: D**

**14. Pembahasan:**

$$\begin{aligned}
 & \log b + \log ab^2 + \log a^2 b^3 + \dots + \log a^9 b^{10} \\
 &= \log b \cdot (ab^2) \cdot (a^2 b^3) \cdot \dots \cdot (a^9 b^{10}) \\
 &= \log a^{1+2+3+\dots+9} \cdot b^{1+2+3+\dots+10} \\
 &= \log a^{45} \cdot b^{55} \\
 &= \log a^{45} + \log b^{55} = 45 \log a + 55 \log b
 \end{aligned}$$

**Catatan****Jawaban: C****15. Pembahasan:**

$$f^{-1}(a) = b \Leftrightarrow f(b) = a$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= {}^5 \log(x+1) + {}^5 \log \frac{1}{x-2} \\
 &= {}^5 \log \frac{(x+1)}{(x-2)}
 \end{aligned}$$

Misal:  $f^{-1}({}^5 \log 2) = a$ Maka  $f(a) = {}^5 \log 2$ 

$${}^5 \log \frac{a+1}{a-2} = {}^5 \log 2$$

$$\frac{a+1}{a-2} = 2$$

$$a+1 = 2a - 4$$

$$a = 5$$

**Jawaban: C****16. Pembahasan:**

Beberapa sifat logaritma:

- $\frac{{}^a \log b}{{}^a \log c} = {}^c \log b$
- ${}^a \log b = \frac{1}{{}^b \log c}$
- ${}^a \log bc = {}^a \log b + {}^a \log c$

Diketahui:

$$\frac{{}^3 \log x}{{}^3 \log w} = 2 \Rightarrow {}^w \log x = 2 \dots (i)$$



**Catatan**

Dan,

$${}_{xy} \log w = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1}{{}^w \log xy} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow {}^w \log xy = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow {}^w \log x + {}^w \log y = \frac{5}{2} \dots \text{(ii)}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (i) ke persamaan (ii), diperoleh:

$$2 + {}^w \log y = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow {}^w \log y = \frac{5}{2} - 2$$

$$\Rightarrow {}^w \log y = \frac{5}{2} - \frac{4}{2} = \frac{1}{2}$$

Jadi, nilai dari :

$$\frac{{}^2 \log w}{{}^2 \log y} = {}^y \log w = \frac{1}{{}^w \log y} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

**Jawaban: D****17. Pembahasan:**

Beberapa sifat logaritma:

- ${}^x \log y = \frac{\log y}{\log x}$

- ${}^x \log yz = {}^x \log y + {}^x \log z$

Diketahui:  $\frac{{}^2 \log ab}{{}^2 \log a} = 3$

$$\Rightarrow {}^a \log ab = 3$$

$$\Rightarrow {}^a \log a + {}^a \log b = 3$$

$$\Rightarrow 1 + {}^a \log b = 3$$

$$\Rightarrow {}^a \log b = 2 \dots \text{(i)}$$



$$\begin{aligned} \text{dan } {}^{bc} \log a = \frac{2}{3} &\Rightarrow {}^a \log bc = \frac{2}{3} \\ &\Rightarrow {}^a \log bc = \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow {}^a \log b + {}^a \log c = \frac{3}{2} \dots (\text{ii}) \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (i) pada (ii), maka:

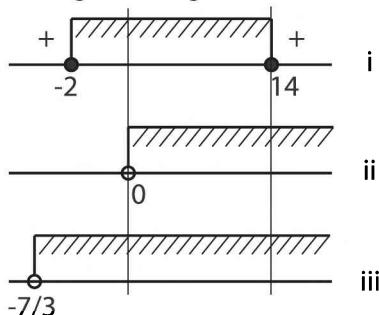
$$\begin{aligned} 2 + {}^a \log c = \frac{3}{2} &\Rightarrow {}^a \log c = \frac{3}{2} - 2 \\ &\Rightarrow {}^a \log c = -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow {}^c \log a = -2 \end{aligned}$$

**Jawaban: A**

### 18. Pembahasan:

$$2 \log x \leq \log(3x+7) + 2 \log 2$$

- $\log x^2 \leq \log[(3x+7) \cdot 2^2]$   
 $x^2 \leq 12x + 28$   
 $x^2 - 12x - 28 \leq 0$   
 $(x+2)(x-14) \leq 0 \dots \text{(i)}$
- Syarat numeros:  $x > 0 \dots \text{(ii)}$  dan  $3x + 7 > 0 \dots \text{(iii)}$
- Dalam garis bilangan:



$$\text{HP} = \{x | 0 < x \leq 14\}$$

**Jawaban: C**

**19. Pembahasan:**

Dari pertidaksamaan  $2\log(x-2) \leq \log(2x-1)$  diperoleh

$$\text{i. } \log(x-2)^2 \leq \log(2x-1)$$

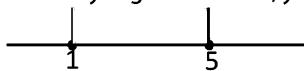
$$(x-2)^2 \leq (2x-1)$$

$$x^2 - 4x + 4 \leq (2x-1)$$

$$x^2 - 6x + 5 \leq 0$$

$$(x-1)(x-5) \leq 0$$

Daerah yang memenuhi, yaitu:



$$1 \leq x \leq 5$$

$$\text{ii. } x-2 > 0$$

$$x > 2$$

$$\text{iii. } 2x-1 > 0$$

$$x > \frac{1}{2}$$

Jadi, penyelesaian dari pertidaksamaan di atas yaitu  $2 < x \leq 5$

**Jawaban: D**

**20. Pembahasan:**

- Faktor prima dari  $42 = \{2, 3, 7\}$

Banyak faktor prima =  $a = 3$ .

- $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$$(3x-2)(x-1) = 0$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ atau } x = 1$$

Akar bulat =  $b = 1$

- $\frac{b}{2} \log(y^2 - a) > 0$

$$\frac{1}{2} \log(y^2 - 3) > 0$$

$${}^{2^{-1}} \log(y^2 - 3) > 0$$

- ${}^2 \log(y^2 - 3) > 0$

$${}^2 \log(y^2 - 3) < 0$$

$${}^2 \log(y^2 - 3) < {}^2 \log 1$$

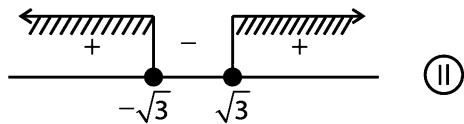
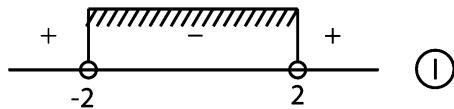
$$y^2 - 3 < 1$$

$$(y+2)(y-2) < 0 \quad (\text{I})$$

- Syarat:  $y^2 - 3 > 0$

$$(y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) > 0 \quad (\text{II})$$

- Dalam garis bilangan:



Yang memenuhi:  $-2 < y < -\sqrt{3}$  atau  $\sqrt{3} < y < 2$

**Jawaban: A**

## 21. Pembahasan:

$${}^a \log b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$${}^{a^n} \log b^m = \frac{m}{n} \cdot {}^a \log b$$

$${}^a \log b + {}^a \log c = {}^a \log (b \cdot c)$$

$${}^a \log b = {}^{a^2} \log b^2 = {}^{a^n} \log b^n$$

$${}^4 \log({}^2 \log x) + {}^2 \log({}^4 \log x) = 2$$

$${}^4 \log({}^2 \log x) + {}^4 \log({}^4 \log x)^2 = 2$$

$${}^4 \log \left[ {}^2 \log x \cdot ({}^4 \log x)^2 \right] = 2$$

$${}^4 \log \left[ {}^2 \log x \cdot ({}^4 \log x)^2 \right] = {}^4 \log 4^2$$

$${}^2 \log x \cdot ({}^4 \log x)^2 = 4^2$$

**Catatan**

$$\begin{aligned} {}^4 \log x^2 \cdot ({}^4 \log x)^2 &= 16 \\ 2 \cdot {}^4 \log x \cdot ({}^4 \log x)^2 &= 16 \\ ({}^4 \log x)^3 &= 8 \\ {}^4 \log x = 2 &\Leftrightarrow x = 4^2 = 16 \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} {}^5 \log \sqrt{x + \sqrt{x + 5}} &= {}^5 \log \sqrt{16 + 4 + 5} \\ &= {}^5 \log 5 \\ &= 1 \end{aligned}$$

**Jawaban: A**

**22. Pembahasan:**

$$\text{Diketahui: } {}^2 \log \sqrt{3} = a \Rightarrow \sqrt{3} = 2^a$$

$$\text{Nilai dari, } {}^4 \log 27 = {}^4 \log (\sqrt{3})^6$$

$${}^4 \log 27 = {}^4 \log (2^a)^6$$

$${}^4 \log 27 = 6 \cdot {}^4 \log (2^a)$$

$${}^4 \log 27 = 6 \cdot {}^2 \log (2^a)$$

$${}^4 \log 27 = 6 \cdot \frac{a}{2} = 3a$$

**Jawaban: D**

**23. Pembahasan:**

$$\begin{aligned} {}^3 \log x \cdot {}^6 \log x \cdot {}^9 \log x &= {}^3 \log x \cdot {}^6 \log x + {}^3 \log x \cdot {}^9 \log x \\ &+ {}^6 \log x \cdot {}^9 \log x \end{aligned}$$

- Jelas  $x = 1$  memenuhi persamaan
- Kedua ruas dikalikan dengan  ${}^x \log 3$ , diperoleh:  

$${}^6 \log x \cdot {}^9 \log x = {}^6 \log x + {}^9 \log x + {}^6 \log x \cdot {}^9 \log x$$

Kedua ruas dikalikan  ${}^x \log 6$ , diperoleh :

$${}^9 \log x = 1 + {}^9 \log 6 + {}^9 \log 3$$

$${}^9 \log x = {}^9 \log 9 + {}^9 \log 6 + {}^9 \log 3$$

$${}^9 \log x = {}^9 \log (9 \cdot 6 \cdot 3)$$

$$x = 162$$

Pernyataan 2 dan 4 benar.

**Jawaban: C**

**24. Pembahasan:**

Diketahui:

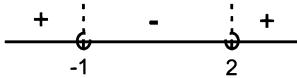
$$\text{Pertidaksamaan } {}^2\log x + {}^2\log(x-1) < 1$$

$$\Rightarrow {}^2\log x(x-1) < {}^2\log 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x < 2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+1) < 0$$

Jadi,  $-1 < x < 2$ **Jawaban: A****25. Pembahasan:**

Diketahui:

$$2^{-x^2+x+6} > \frac{{}^a\log b \cdot {}^c\log a}{{}^c\log b}$$

$$\Rightarrow 2^{-x^2+x+6} > {}^a\log b \cdot {}^c\log a \cdot {}^b\log c$$

$$\Rightarrow 2^{-x^2+x+6} > {}^a\log b \cdot {}^b\log c \cdot {}^c\log a$$

$$\Rightarrow 2^{-x^2+x+6} > 1$$

Kita asumsikan sementara menjadi sebuah persamaan:

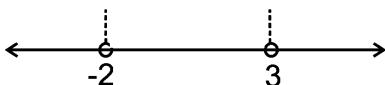
$$2^{-x^2+x+6} = 1$$

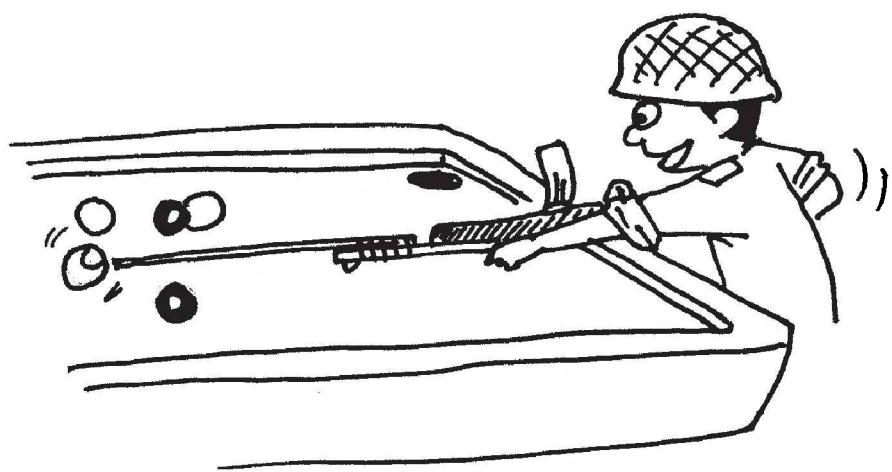
$$\Rightarrow {}^2\log 1 = -x^2 + x + 6$$

$$\Rightarrow 0 = -x^2 + x + 6$$

$$\Rightarrow (-x-2)(x-3) = 0$$

$$x = -2 \text{ atau } x = 3$$

Daerah penyelesaian, dengan mensubstitusikan  $x = 0$  pada  $2^{-x^2+x+6} > 1$ , diperoleh nilai benar maka:Jadi, nilai  $x$  yang memenuhi adalah  $-2 < x < 3$ **Jawaban: A**



$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$Ra + 40a + \dots = 0$$

$$x = ut \cos(a)$$
$$y = ut \sin(a) - 1/2 gt^2$$

6

$$va + vb = u$$

$$va = u - vb$$

$$r \sqrt{a} = \sqrt{1/2u(1-e)}$$

$$vb = 1/2u(1+e)$$

$$2u(1+e) - 1/2eu(1+e)$$

$$(1-e^2)^{1/2}$$

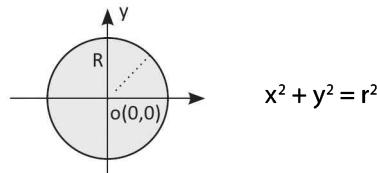
# LINGKARAN

## A Definisi

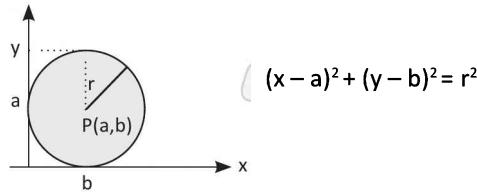
Lingkaran adalah tempat kedudukan atau himpunan semua titik yang berjarak sama ( $r$ ) terhadap sebuah titik (Misalkan titik  $O$ ). Titik  $O$  disebut **titik pusat** dan  $r$  disebut **jari-jari** (radius).

## B Persamaan Lingkaran

- Persamaan lingkaran dengan pusat  $(0, 0)$  dan jari-jari  $= r$ .



- Persamaan lingkaran dengan pusat  $(a, b)$  dan jari-jari  $= r$ .



- Bentuk umum persamaan lingkaran

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

119

**Syarat:**

Koefisien  $x^2$  dan  $y^2$  harus sama dan tidak sama dengan nol.

**Persamaan tersebut mempunyai:**

- Pusat ( $P$ ) =  $(-a, -b)$
- Jari-jari ( $r$ ) =  $\sqrt{(-a)^2 + (-b)^2 - c}$

## C Posisi Titik Terhadap Lingkaran

Diketahui sebuah lingkaran dengan persamaan

$L: x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$  dan sebuah titik  $A(x_1, y_1)$ . Kedudukan titik  $A(x_1, y_1)$  terhadap lingkaran  $L$  adalah:  $K_p = x_1^2 + y_1^2 + 2ax_1 + 2by_1 + c$

Keterangan:

- Jika  $K_p > 0$  maka titik  $A(x_1, y_1)$  berada di luar lingkaran
- $K_p < 0$  maka titik  $A(x_1, y_1)$  berada di dalam lingkaran
- $K_p = 0$  maka titik  $A(x_1, y_1)$  berada pada lingkaran

Jika dibuat garis singgung pada lingkaran yang melalui  $A(x_1, y_1)$  maka jarak dari titik  $A(x_1, y_1)$  ke titik singgungnya adalah  $d = \sqrt{K_p}$  dengan  $A(x_1, y_1)$  berada di luar lingkaran.

## D Hubungan Garis dengan Lingkaran

Diberikan garis  $g: y = mx + n$  dan lingkaran:  $L \equiv x^2 + y^2 = r^2$  hubungan antara garis  $g$  dan lingkaran  $L$  dapat diselidiki dengan cara menyubtitusikan garis  $g$  ke  $L$ .

$$L \equiv x^2 + y^2 = R^2 \text{ dan } g \equiv y = mx + n$$

$$x^2 + (mx + n)^2 - R^2 = 0$$

$$x^2 + m^2x^2 + 2mnx + n^2 - R^2 = 0$$

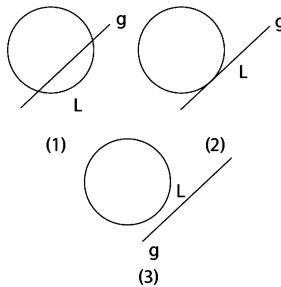
$$(1+m^2)x^2 + 2mnx + n^2 - R^2 = 0$$

Persamaan di atas merupakan persamaan kuadrat dengan diskriminan:

$$D = 4m^2n^2 - 4(1 + m^2)(n^2 - R^2)$$

Selanjutnya, ada 3 kemungkinan yang terjadi, yaitu:

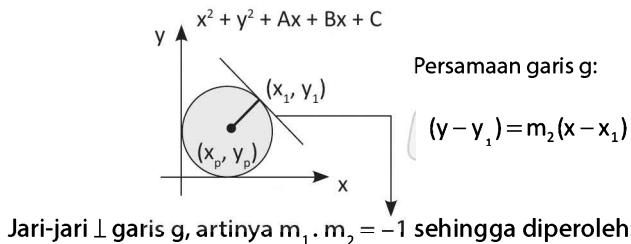
- (1)  $D > 0$  maka garis memotong lingkaran pada dua titik
- (2)  $D = 0$  maka garis memotong lingkaran pada satu titik (garis menyentuh lingkaran)
- (3)  $D < 0$  maka garis tidak menyentuh lingkaran



## E Persamaan Garis Singgung Lingkaran.

Ada beberapa cara untuk menentukannya:

- Persamaan garis singgung di titik  $P(x_1, y_1)$



Jari-jari  $\perp$  garis g, artinya  $m_1 \cdot m_2 = -1$  sehingga diperoleh:

$$m_1 = \frac{y_1 - y_p}{x_1 - x_p}$$

- Persamaan garis singgung pada lingkaran  
 $x^2 + y^2 = r^2$  di titik  $(x_1, y_1)$

Rumus:

$$x_1 x + y_1 y = r^2$$

- Persamaan garis singgung di titik  $P(x_1, y_1)$  pada lingkaran:  
 $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

Rumus:

$$x_1 x + y_1 y + a(x_1 + x) + b(y_1 + y) + c = 0$$

- Persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran yang berpusat di titik  $O(0,0)$  dan jari-jari r.  
Rumus:

$$y = mx \pm r \sqrt{1+m^2}$$

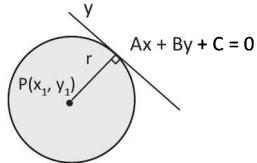
- Persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Rumus:

$$y - b = m(x - a) \pm r \sqrt{1+m^2}$$

Menentukan jari-jari ( $r$ ).



Jari-jari ( $r$ ):

$$\left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$



# PAKET SOAL

## SOAL UN SMA IPA

1. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik  $(4, -3)$

dan berdiameter  $4\sqrt{17}$  adalah ....

- A.  $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 57 = 0$
- B.  $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 43 = 0$
- C.  $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 43 = 0$
- D.  $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 15 = 0$
- E.  $x^2 + y^2 + 8x - 6y - 11 = 0$

## Catatan

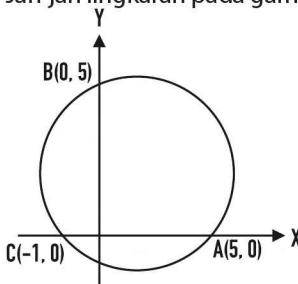
## SOAL UN SMA IPA

2. Persamaan garis singgung pada lingkaran  $2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 8 = 0$  yang sejajar dengan garis  $5x + 12y - 15 = 0$  adalah ....

- A.  $5x + 12y - 20 = 0$  dan  $5x + 12y + 58 = 0$
- B.  $5x + 12y - 20 = 0$  dan  $5x + 12y + 20 = 0$
- C.  $12x + 5y - 20 = 0$  dan  $12x + 5y + 20 = 0$
- D.  $12x + 5y = -20$  dan  $5x + 12y = 58$
- E.  $5x + 12y = -20$  dan  $5x + 12y = 58$

## SOAL STANDAR UN SMA IPA

3. Jari-jari lingkaran pada gambar di bawah ini adalah ....



- A.  $\sqrt{3}$
- B. 3
- C.  $\sqrt{13}$
- D.  $3\sqrt{3}$
- E.  $\sqrt{37}$



**SOAL UN SMA IPA**

4. Lingkaran  $L = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 9$  memotong garis  $y = 3$ . Garis singgung lingkaran yang melalui titik potong antara lingkaran garis tersebut adalah ...
- A.  $x = 2$  dan  $x = -4$       D.  $x = -2$  dan  $x = -4$   
B.  $x = 2$  dan  $x = -2$       E.  $x = 8$  dan  $x = -10$   
C.  $x = -2$  dan  $x = 4$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

5. Lingkaran  $(x + 6)^2 + (y + 1)^2 = 4$  menyinggung garis  $x = -4$  di titik ...
- (A) (-4, 6)      (D) (-4, -1)  
(B) (-4, -6)      (E) (-4, 1)  
(C) (-4, 10)

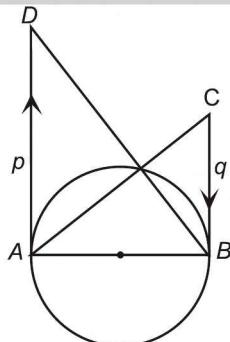
**SOAL UN SMA IPA**

6. Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$  dititik (7, 1) adalah ....
- A.  $3x - 4y - 41 = 0$       D.  $4x + 3y - 31 = 0$   
B.  $4x + 3y - 55 = 0$       E.  $4x - 3y - 40 = 0$   
C.  $4x - 5y - 53 = 0$

**SOAL UN SMA IPA**

7. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$  yang tegak lurus garis  $3x - 4y + 8 = 0$  adalah ....
- A.  $3x + 4y - 15 = 0$       D.  $4x + 3y + 29 = 0$   
B.  $3x + 4y - 35 = 0$       E.  $4x + 3y + 21 = 0$   
C.  $4x + 3y - 29 = 0$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

- 8.
- 

Lingkaran berikut diameternya AB. AD dan BC garis singgung sejajar, BD dan AC berpotongan pada lingkaran.

Jika panjang  $AD = p$  dan  $BC = q$ , maka panjang AB adalah ....

- A.  $pq$       D.  $\frac{1}{2}\sqrt{pq}$   
B.  $\sqrt{pq}$       E.  $\frac{1}{3}\sqrt{pq}$   
C.  $\sqrt{p+q}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

9. Lingkaran  $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$  memotong sumbu-x di titik A dan B. Jika P adalah titik pusat lingkaran tersebut maka  $\cos \angle APB = \dots$
- (A)  $\frac{7}{25}$       (D)  $\frac{16}{25}$   
(B)  $\frac{8}{25}$       (E)  $\frac{18}{25}$   
(C)  $\frac{12}{25}$

**SOAL STANDAR UN**

10. Persamaan lingkaran yang mempunyai diameter AB dengan A(-2, 2) dan B(2, -2) adalah ...  
A.  $x^2 + y^2 - 2 = 0$       D.  $x^2 + y^2 - 9 = 0$   
B.  $x^2 + y^2 - 4 = 0$       E.  $x^2 + y^2 - 16 = 0$   
C.  $x^2 + y^2 - 8 = 0$

**SOAL UM UGM SAINTEK**

11. Titik pusat lingkaran yang menyentuh garis  $y = 2$  di (3,2) dan menyentuh garis  $y = x\sqrt{3} + 2$  adalah ....  
A.  $(3, \sqrt{3})$       D.  $(3, 2 + 2\sqrt{3})$   
B.  $(3, 3\sqrt{3})$       E.  $(3, 2 + 3\sqrt{3})$   
C.  $(3, 2 + \sqrt{3})$



**SOAL UN SMA IPA**

12. Persamaan garis singgung lingkaran  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$  di titik (7, 1) adalah ....

- A.  $3x - 4y - 41 = 0$       D.  $4x + 3y - 31 = 0$   
B.  $4x + 3y - 55 = 0$       E.  $4x - 3y - 40 = 0$   
C.  $4x - 5y - 53 = 0$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

13. Lingkaran yang sepusat dengan lingkaran

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0 \text{ dan menyinggung garis}$$

$3x - 4y + 7 = 0$  mempunyai persamaan ....

- A.  $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$   
B.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$   
C.  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$   
D.  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$   
E.  $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 25$

**SOAL UGM K.IPA**

14. Syarat agar garis  $ax + y = 0$  menyinggung lingkaran dengan pusat (-1, 3) dan jari-jari 1 adalah  $a = \dots$

- A.  $\frac{3}{2}$       D.  $\frac{2}{3}$   
B.  $\frac{4}{3}$       E.  $\frac{1}{4}$   
C.  $\frac{3}{4}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

15. Syarat-syarat agar lingkaran:

$$x^2 + y^2 + 2(Ax + By + C) = 0$$

menyinggung sumbu x dan juga sumbu y adalah ....

- A.  $A = B$   
B.  $-A = B$   
C.  $|A| = |B|$   
D.  $|A| = |B| = \sqrt{2(A^2 - C)}$   
E.  $-A = -B = \sqrt{A^2 + B^2 - 2C}$

**SOAL SNMPTN SAINTEK**

16. Persamaan lingkaran dengan pusat  $(-1, 1)$  dan menyinggung garis  $3x - 4y + 12 = 0$  adalah ....
- A.  $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$
  - B.  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$
  - C.  $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 17 = 0$
  - D.  $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$
  - E.  $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 1 = 0$

**SOAL UN SMA IPA**

17. Lingkaran  $L \equiv (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 1$  memotong garis  $y = 1$ . Persamaan garis singgung di titik potong lingkaran dan garis  $y = 1$  adalah ...
- A.  $x = 2$  dan  $x = 4$
  - B.  $x = 3$  dan  $x = 1$
  - C.  $x = 1$  dan  $x = 5$
  - D.  $x = 2$  dan  $x = 3$
  - E.  $x = 3$  dan  $x = 4$

**SOAL STANDAR UN**

18. Persamaan garis singgung lingkaran  $(x + 3)^2 + (y - 8)^2 = 25$  di titik  $(1, 5)$  adalah ...
- A.  $3x - 4y + 17 = 0$
  - B.  $3x - 8y - 37 = 0$
  - C.  $4x - 3y + 11 = 0$
  - D.  $4x - 7y + 31 = 0$
  - E.  $5x - 11y + 50 = 0$

**SOAL UN SMA IPA**

19. Agar garis  $y = x + c$  menyinggung lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$  maka nilai  $c$  adalah ....
- A.  $\pm 1$
  - B.  $\pm 2\sqrt{2}$
  - C.  $\pm 3\sqrt{2}$
  - D.  $\pm 5\sqrt{2}$
  - E.  $\pm 6\sqrt{2}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

20. Jika  $a < 0$  dan lingkaran  $x^2 + y^2 - ax + 2ay = 0$  mempunyai jari-jari 2 maka koordinat pusat lingkaran terebut adalah ...



**Catatan**

- A.  $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$       D. (-1, 2)  
B.  $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$       E. (-1, -2)  
C. (1, -2)

**SOAL STANDAR UN**

21. Persamaan lingkaran dengan pusat (2, -3) dan menyinggung garis  $3x - 4y + 2 = 0$  adalah ...  
A.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$   
B.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$   
C.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 24$   
D.  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$   
E.  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$

**SOAL STANDAR SBMPTN SAINTEK**

22. Jika lingkaran  $x^2 + y^2 + 6x + 6y + c = 0$  menyinggung garis  $x = 2$ , maka nilai c adalah ....  
A. -7      D. 6  
B. -6      E. 12  
C. 0

**SOAL STANDAR UN SMA IPA**

23. Salah satu garis singgung yang bersudut  $120^\circ$  terhadap sumbu x positif pada lingkaran dengan ujung diameter di titik (7, 6) dan (1, -2) adalah ....  
A.  $y = -x\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 12$   
B.  $y = -x\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 8$   
C.  $y = -x\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 8$   
D.  $y = -x\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 8$   
E.  $y = -x\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 22$

# Pembahasan

## 1. Pembahasan:

Persamaan lingkaran dengan pusat  $(a, b)$  dan berjari-jari  $R$  adalah:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

Diketahui:

Pusat lingkaran  $(4, -3)$  dan berdiameter  $4\sqrt{17}$ ,  
maka jari-jari  $= 2\sqrt{17}$ .

Sehingga, persamaan lingkarannya adalah:

$$(x-4)^2 + (y+3)^2 = (2\sqrt{17})^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x + 16 + y^2 + 6y + 9 = 68$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 6y - 43 = 0$$

Catatan

Jawaban: B

## 2. Pembahasan:

- Dua persamaan garis yang saling sejajar, maka gradiennya sama.

$$m_1 = m_2$$

- Lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  memiliki

$$\text{pusat} = \left( -\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B \right) \text{ dan}$$

$$\text{jari-jari} = r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

- Lingkaran dengan pusat  $(a, b)$  dan jari-jari  $r$  adalah:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

- Persamaan garis singgung dengan gradien  $m$  pada lingkaran  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$  adalah:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$



## Catatan

Diketahui:

$$\text{Persamaan lingkaran } 2x^2 + 2y^2 - 4x + 8y - 8 = 0$$

$$\text{Atau } x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$$

Sehingga,

Titik pusat lingkaran adalah:

$$\left( -\frac{1}{2} \cdot (-2), -\frac{1}{2} \cdot (4) \right) = (1, -2)$$

Jari-jarinya:

$$\sqrt{\frac{1}{4} \cdot (-2)^2 + \frac{1}{4} \cdot (4)^2 - (-4)} = \sqrt{1+4+4} = 3$$

Maka, bentuk lain dari persamaan lingkaran tersebut adalah:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3^2$$

Garis singgung pada lingkaran tersebut sejajar dengan garis

$$5x + 12y - 15 = 0 \Rightarrow m = -\frac{5}{12}$$

Persamaan garis singgungnya:

$$y + 2 = -\frac{5}{12}(x-1) \pm 3\sqrt{1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y + 2 = -\frac{5}{12}(x-1) \pm 3\sqrt{\frac{144}{144} + \frac{25}{144}}$$

$$\Rightarrow y + 2 = -\frac{5}{12}(x-1) \pm 3\sqrt{\frac{169}{144}}$$

$$\Rightarrow y + 2 = -\frac{5}{12}(x-1) \pm 3 \cdot \frac{13}{12} \quad (\text{dikali 12})$$

$$\Rightarrow 12y + 24 = -5(x-1) \pm 3 \cdot 13$$

$$\Rightarrow 12y + 24 = -5x + 5 \pm 39$$

$$\Rightarrow 12y + 5x = 5 - 24 \pm 39$$

$$\Rightarrow 12y + 5x = -19 \pm 39$$

Persamaan garis l:

$$12y + 5x = -19 + 39$$

$$12y + 5x = 20$$
$$12y + 5x - 20 = 0$$

Persamaan garis II

$$12y + 5x = -19 - 39$$
$$12y + 5x = -58$$
$$12y + 5x + 58 = 0$$

### Catatan

### Jawaban: A

#### 3. Pembahasan:

Bentuk umum persamaan lingkaran:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Lingkaran melalui :

- $A(5, 0)$ , maka:  
 $25 + 0 + 5A + 0 + C = 0$   
 $\Rightarrow 5A + C = -25 \dots (i)$
- $B(0, 5)$ , maka:  
 $0 + 25 + 0 + 5B + C = 0$   
 $\Rightarrow 5B + C = -25 \dots (ii)$
- $C(-1, 0)$ , maka:  
 $1 + 0 - A + 0 + C = 0$   
 $\Rightarrow -A + C = -1 \dots (iii)$

Dari (i) dan (ii):

$$\begin{aligned} 5A + C &= -25 \\ -A + C &= -1 \\ 6A &= -24 \Rightarrow A = -4 \end{aligned}$$

Maka,  $C = -5$

Dari (ii), diperoleh:  $5B - 5 = -25$

$$\Rightarrow B = -4$$

Sehingga, persamaan lingkarannya adalah

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0.$$

Jadi, jari-jari lingkaran:

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{4}(-4)^2 - (-5)} \\ &= \sqrt{4+4+5} = \sqrt{13} \end{aligned}$$

### Jawaban: C

#### 4. Pembahasan:

Lingkaran  $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$  memotong garis  $y = 3$



## Catatan

Sehingga,  $(x+1)^2 + (3-3)^2 = 9$

$x+1 = \sqrt{9}$ , maka  $x+1 = \pm 3$

- $x+1 = 3$

maka,  $x = 3 - 1 = 2$

- $x+1 = -3$

maka,  $x = -3 - 1 = -4$

Jadi, titik potong antara lingkaran dan garis  $y = 3$  ketika  $x = 2$  dan  $x = -4$

**Jawaban: A**

### 5. Pembahasan:

Persamaan lingkaran

$$(x+6)^2 + (y+1)^2 = 4, \text{ artinya:}$$

Ketika  $x = -4$ , maka:

$$(-4+6)^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow 2^2 + (y+1)^2 = 4$$

$$\Rightarrow (y+1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = -1$$

Jadi, garis singgung lingkaran pada garis  $x = -4$ , berada di titik  $(4, -1)$ .

**Jawaban: D**

### 6. Pembahasan:

Persamaan garis singgung lingkaran

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  melalui titik  $(x_1, y_1)$  adalah:

$$xx_1 + yy_1 + \frac{1}{2}A(x+x_1) + \frac{1}{2}B(y+y_1) + C = 0$$

Persamaan garis singgung lingkaran

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$  melalui titik  $(7, 1)$

adalah:

$$7x + y + \frac{1}{2}(-6)(x+7) + \frac{1}{2}(4)(y+1) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 7x + y - 3(x+7) + 2(y+1) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 7x + y - 3x - 21 + 2y + 2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 31 = 0$$

**Jawaban: D**

## 7. Pembahasan:

- Dua persamaan garis yang saling tegak lurus, maka gradiennya saling berlawanan.

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

- Lingkaran  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$  memiliki

$$\text{pusat} = \left( -\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B \right) \text{ dan}$$

$$\text{jari-jari } r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$

- Lingkaran dengan pusat  $(a, b)$  dan jari-jari  $r$  adalah:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Persamaan garis singgung dengan gradien  $m$  pada lingkaran  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$  adalah:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

Persamaan garis  $3x - 4y + 8 = 0$ , maka  $m = \frac{3}{4}$ .

Sehingga, gradien garis yang tegak lurus dengan garis  $3x - 4y + 8 = 0$  adalah  $-\frac{4}{3}$

Dari persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$  maka:

$$\text{Pusat lingkaran} = \left( -\frac{1}{2}(-4), -\frac{1}{2}.8 \right) = (2, -4)$$

$$\begin{aligned}\text{Jari-jari lingkaran} &= r = \sqrt{\frac{1}{4}(-4)^2 + \frac{1}{4}(8)^2 - (-5)} \\ &= \sqrt{4 + 16 + 5} = \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

Sehingga, persamaan lingkaran di atas sama dengan:

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

## Catatan



**Catatan**

Maka, persamaan garis singgung lingkaran pada lingkaran  $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 25$  dengan gradien  $-\frac{4}{3}$  adalah:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1+m^2}$$

$$\Rightarrow y + 4 = -\frac{4}{3}(x - 2) \pm 5\sqrt{1+\left(-\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow y + 4 = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \pm 5\sqrt{\frac{9}{9} + \frac{16}{9}}$$

$$\Rightarrow y + 4 = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \pm 5\sqrt{\frac{25}{9}}$$

$$\Rightarrow y + 4 = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \pm 5 \cdot \frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow y + 4 = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{3} \pm \frac{25}{3} \quad (\text{dikali } 3)$$

$$\Rightarrow 3y + 12 = -4x + 8 \pm 25$$

$$\Rightarrow 4x + 3y + 4 \pm 25 = 0$$

Persamaan I:

$$4x + 3y + 4 + 25 = 0$$

$$4x + 3y + 29 = 0$$

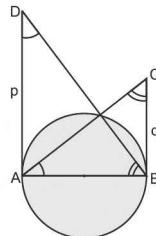
Persamaan II:

$$4x + 3y + 4 - 25 = 0$$

$$4x + 3y - 21 = 0$$

**Jawaban: D**

### 8. Pembahasan:



Panjang AB?

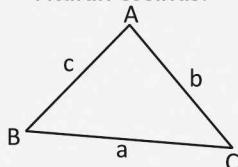
$$\begin{aligned}\frac{AB}{BC} &= \frac{AD}{AB} \\ \Rightarrow AB^2 &= AD \cdot BC \\ \Rightarrow AB^2 &= p \cdot q \\ \Rightarrow AB &= \sqrt{pq}\end{aligned}$$

**Jawaban: B****9. Pembahasan:**

Persamaan lingkaran dengan pusat  $(a, b)$  dan memiliki jari-jari  $r$  adalah:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Aturan cosinus:



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2 \cdot b \cdot c}$$

Diketahui:

Lingkaran dengan persamaan

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$$

Maka, pusat lingkaran  $(3, 4)$  dan berjari-jari 5.

Titik potong pada sumbu x ( $y=0$ ), maka:

$$(x-3)^2 + (0-4)^2 = 25$$

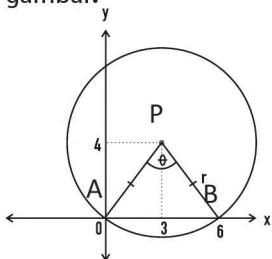
$$\Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 16 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-6) = 0$$

$x = 0$  atau  $x = 6$

gambar:



## Catatan

Sehingga,

$$\cos \theta = \frac{r^2 + r^2 - AB^2}{2.r.r} = \frac{5^2 + 5^2 - 6^2}{2.5.5} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$$

Jawaban: A

### 10. Pembahasan:

Diketahui:

Diameter suatu lingkaran adalah AB dengan titik A(-2, 2) dan B(2, -2), maka:

$$\text{Jari-jari} = \frac{1}{2} \text{ diameter}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(2 - (-2))^2 + (-2 - 2)^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{32} = 2\sqrt{2}$$

Pusat lingkaran:

$$\left( \frac{(2-2),(-2+2)}{2} \right) = (0,0)$$

Sehingga, persamaan lingkarannya:

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8 = 0$$

Jawaban: C

### 11. Pembahasan:

Lingkaran menyentuh  $y = 2$  di (3, 2), maka pusat lingkaran (3, a).

Karena  $y = 2$  dan  $y = -x\sqrt{3} + 2$  adalah garis singgung, maka

$$d[(3, a), y - 2 = 0] = d[(3, a), x\sqrt{3} + y - 2 = 0],$$

dengan  $d = \text{jarak}$ .

$$d[(x_1, y_1), ax + by + c = 0] = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$d[(3, a), y - 2 = 0] = d[(3, a), x\sqrt{3} + y - 2 = 0]$$

$$\left| \frac{a-2}{\sqrt{1}} \right| = \left| \frac{3\sqrt{3} + a - 2}{\sqrt{3+1}} \right|$$

$$a-2 = \frac{3\sqrt{3} + a - 2}{2}$$

$$2a - 4 = 3\sqrt{3} + a - 2$$

$$a = 3\sqrt{3} + 2$$

Pusat lingkaran :  $(3, 3\sqrt{3} + 2)$

**Jawaban: E**

### 12. Pembahasan:

Persamaan garis singgung lingkaran

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$  di titik  $(7, 1)$  adalah:

$$x \cdot x_1 + y \cdot y_1 - \frac{1}{2} \cdot 6(x + x_1) + \frac{1}{2} \cdot 4(y + y_1) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 7x + y - 3(x + 7) + 2(y + 1) - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 7x + y - 3x - 21 + 2y + 2 - 12 = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 3y - 31 = 0$$

**Jawaban: D**

### 13. Pembahasan:

- Jarak antara titik pusat dengan garis singgung lingkaran merupakan panjang jari-jari lingkaran.

- Jarak titik  $(x_1, y_1)$  dengan garis

$Ax^2 + By^2 + C = 0$  adalah:

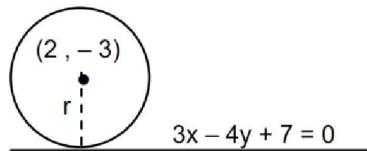
$$\left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$$

Dengan pusat :  $\left( \frac{-(-4)}{2}, \frac{-6}{2} \right) = (2, 3)$



## Catatan



$$\begin{aligned} r &= \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \\ &= \left| \frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 7}{\sqrt{25}} \right| \\ &= \left| \frac{25}{\sqrt{25}} \right| = 5 \end{aligned}$$

Jadi persamaan lingkarannya:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

**Jawaban: A**

### 14. Pembahasan:

Garis g menyentuh lingkaran, berlaku:  
 $d[\text{pusat lingkaran}, g] = r$ , dengan  $d = \text{jarak}$

$$d[(x_1, y_1), Ax + By + C = 0] = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

$$d[(-1, 3), ax + y = 0] = 1$$

$$\left| \frac{a(-1) + 3}{\sqrt{a^2 + 1^2}} \right| = 1$$

$$|3 - a| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$(3 - a)^2 = a^2 + 1$$

$$a^2 - 6a + 9 = a^2 + 1$$

$$-6a = -8$$

$$a = \frac{4}{3}$$

**Jawaban: B**

**15. Pembahasan:**

$x^2 + y^2 + 2(Ax + By + C) = 0$  atau  $x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + 2C$ , mempunyai pusat  $P(-A, -B)$  dan jari-jari  $r =$

$$\sqrt{A^2 + B^2 - 2C}$$

karena lingkaran menyentuh sumbu x dan sumbu y, maka:

$$|A| = |B| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2C}$$

$$\Rightarrow |A| = |B| = \sqrt{2(A^2 - C)}$$

**Jawaban: D****16. Pembahasan:**

- Jarak titik  $(x_1, y_1)$  dengan garis

$Ax^2 + By^2 + C = 0$  adalah:

$$\left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

- Persamaan lingkaran dengan pusat

$(x_1, y_1)$  dengan jari-jari  $r$  adalah:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = r^2$$

Ditanya:

Persamaan lingkaran dengan pusat  $(-1, 1)$  dan menyentuh garis  $3x - 4y + 12 = 0$ .

Maka, jari-jari lingkaran ( $r$ ) = jarak titik  $(-1, 1)$  dengan garis  $3x - 4y + 12 = 0$ , yaitu:

$$\left| \frac{3(-1) + (-4).1 + 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| = \left| \frac{5}{\sqrt{25}} \right| = 1$$

Sehingga, persamaan lingkaran dengan titik pusat  $(-1, 1)$  dan berjari-jari 1 adalah:

$$(x - (-1))^2 + (y - 1)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = 1$$



**Catatan**

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$$

**Jawaban: A****17. Pembahasan:**

Lingkaran  $L \equiv (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$  memotong

garis  $y = 1$  di titik:

$$(x-3)^2 + (1-1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x-3)^2 + 0 = 1 \Rightarrow x = 2 \text{ atau } x = 4$$

Jadi, titik potongnya adalah  $(2, 1)$  dan  $(4, 1)$

$$\text{Persamaan } L \equiv (x-3)^2 + (y-1)^2 = 1$$

$$L \equiv x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$$

Sehingga,

- Persamaan garis singgung pada lingkaran  $L$  pada titik  $(2, 1)$ :

$$\Rightarrow 2x + y - \frac{1}{2} \cdot 6(2+x) - \frac{1}{2} \cdot 2(1+y) + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 2x + y - 6 - 3x - 1 - y + 9 = 0$$

$$\Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

- Persamaan garis singgung pada lingkaran  $L$  pada titik  $(4, 1)$ :

$$\Rightarrow 4x + y - \frac{1}{2} \cdot 6(4+x) - \frac{1}{2} \cdot 2(1+y) + 9 = 0$$

$$\Rightarrow 4x + y - 12 - 3x - 1 - y + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

**Jawaban: A****18. Pembahasan:**

Persamaan garis singgung pada lingkaran

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \text{ dan melalui titik}$$

$(x_1, y_1)$  adalah:

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

Persamaan garis singgung pada lingkaran:

$$(x+3)^2 + (y-8)^2 = 25 \text{ di titik: } (1, 5)$$

$$a = -3; b = 8; r = 5; x_1 = 1; x_2 = 5$$

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = r^2$$

$$(1+3)(x+3) + (5-8)(y-8) = 5^2$$

$$4x + 12 - 3y + 24 - 25 = 0$$

$$4x - 3y + 11 = 0$$

**Catatan**

**Jawaban: C**

**19. Pembahasan:**

Diketahui:

Persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 = 25$  dan garis  $y = x + c$  menyentuh lingkaran, maka:

$$x^2 + (x+c)^2 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2cx + c^2 = 25$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2cx + c^2 - 25 = 0$$

Karena menyentuh, maka  $D = 0$

Sehingga,

$$(2c)^2 - 4 \cdot (2) \cdot (c^2 - 25) = 0$$

$$\Rightarrow 4c^2 - 8c^2 + 200 = 0$$

$$\Rightarrow 200 = 4c^2$$

$$\Rightarrow 50 = c^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{50} = c \Rightarrow c = \pm 5\sqrt{2}$$

**Jawaban: D**

**20. Pembahasan:**

Diketahui:

$L \equiv x^2 + y^2 - ax + 2ay = 0$ , maka:

$$R = \sqrt{\frac{1}{4}(-a)^2 + \frac{1}{4}(2a)^2 - 0}$$

$$\Rightarrow 2 = \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{a^2}{4} + a^2$$

$$\Rightarrow 4 = \frac{5a^2}{4}$$



**Catatan**

$$\Rightarrow 16 = 5a^2 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{16}{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

$$\text{Sehingga, } L \equiv x^2 + y^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}x + \frac{8}{\sqrt{5}}y = 0$$

Jadi, pusat lingkaran:

$$\left( -\frac{1}{2} \left( -\frac{4}{\sqrt{5}} \right), -\frac{1}{2} \left( \frac{8}{\sqrt{5}} \right) \right) = \left( \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-4}{\sqrt{5}} \right)$$

**Jawaban: B**

**21. Pembahasan:**

Jarak titik  $A(x_1, y_1)$  terhadap garis

$ax + by + c = 0$  adalah:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Jarak pusat lingkaran  $(2, -3)$  dengan garis

$3x - 4y + 2 = 0$  merupakan jari-jari lingkaran.

Maka,

$$r = \frac{|3.(2) - 4.(-3) + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}}$$

$$= \frac{|6 + 12 + 2|}{\sqrt{25}} = \frac{|20|}{5} = 4$$

Sehingga,

Persamaan lingkaran dengan pusat  $(2, -3)$  dan ber-jari-jari 4 adalah:

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4^2$$

$$\text{atau } (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$$

**Jawaban: A**

## 22. Pembahasan:

Jika suatu titik  $(x_1, y_1)$  dilalui oleh lingkaran

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ , maka berlaku:

$x_1^2 + y_1^2 + Ax_1 + By_1 + C = 0$  dan nilai

diskriminannya ( $D$ ) = 0, atau  $b^2 - 4ac = 0$

$$(2)^2 + y^2 + 6(2) + 6y + c = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y + 16 + c = 0$$

Diskriminan ( $D$ ) = 0, maka:

$$(6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (16 + c) = 0$$

$$\Rightarrow 36 - 64 - 4c = 0$$

$$\Rightarrow c = \frac{-28}{4} = -7$$

### Jawaban: A

## 23. Pembahasan:

Lingkaran dengan diameter di titik  $(7, 6)$  dan  $(1, -2)$ , maka:

memiliki jari-jari

$$= \frac{\sqrt{(1-7)^2 + (-2-6)^2}}{2} = \frac{\sqrt{36+64}}{2} = 5$$

Pusat:

$$\left( 7 - \left( \frac{7-1}{2} \right), 6 - \left( \frac{6-(-2)}{2} \right) \right) = (4, 2)$$

Sehingga, persamaan lingkarannya:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 25$$

Dan persamaan garis singgung dengan gradien  $m$  adalah:

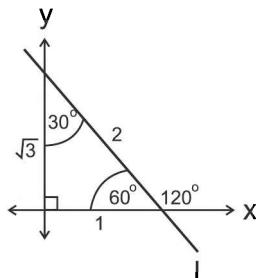
$$(y-2) = m(x-4) \pm 5\sqrt{1+m^2} \dots (i)$$

Garis singgung pada lingkaran membentuk sudut  $120^\circ$  dengan sumbu x positif.

Sebagai ilustrasi:

### Catatan



**Catatan**

Dan mengingat kembali perbandingan panjang sisi dari segitiga istimewa dengan sudut  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ , dan  $90^\circ$  yaitu,  $1 : \sqrt{3} : 2$ .

Sehingga, gradien dari garis singgung (l) adalah:

$$\frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

Jadi, persamaan garis singgungnya dari (i) dan  $m = -\sqrt{3}$ , diperoleh:

$$(y - 2) = -\sqrt{3}(x - 4) \pm 5\sqrt{1 + (-\sqrt{3})^2}$$

$$\Rightarrow y = -x\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \pm 5\sqrt{4} + 2$$

$$\Rightarrow y = -x\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \pm 10 + 2$$

Diperoleh:

$$y = -x\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 12$$

Atau

$$y = -x\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 8$$

**Jawaban: A**

$$2a+b=x$$

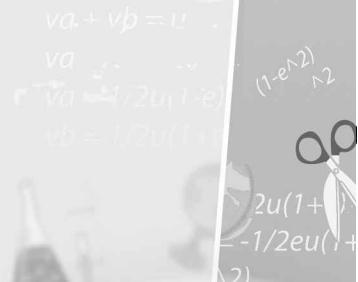
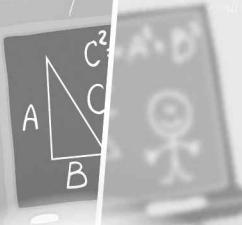
$$\pi=3.141592654$$

$$Ra + 40a + \dots = 0$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$
$$y = ut \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

7

# MATRIKS



## A Pengertian Matriks

Matriks adalah suatu susunan bilangan berbentuk segi empat. Bilangan-bilangan dalam susunan itu disebut **anggota matriks**.

Ukuran matriks dinyatakan dalam (Baris x Kolumn)

Contoh:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A \text{ adalah matriks ukuran } 2 \times 2$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow B \text{ adalah matriks ukuran } 3 \times 2$$

Bentuk umum matriks berordo  $i \times j$  dengan  $i, j$  bilangan asli adalah sebagai berikut:

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} \end{bmatrix}$$



## B Jenis-Jenis Matriks

### 1. Matriks bujur sangkar

Yaitu matriks yang jumlah baris dan kolomnya sama.

Contoh:

$$P = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

## 2. Matriks identitas

Yaitu matriks yang dikalikan dengan suatu matriks maka hasilnya adalah matriks itu sendiri. Bentuk matriks indentitas berupa matriks bujur sangkar.

Contoh:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## 3. Matriks konstanta

$$K = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = 4$$

## 4. Matriks segitiga

Yaitu matriks yang elemen di atas atau di bawah diagonal utamanya adalah nol semua. A matriks segitiga atas, sedangkan P matriks segitiga bawah.

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

# Operasi Matriks

Penjumlahan dan pengurangan

Sifat-sifat:

$$\begin{aligned} A + B &= B + A \\ A - B &\neq B - A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \end{aligned}$$

## Perkalian Matriks

Matriks A dapat dikalikan dengan matriks B bila terpenuhi:

- Syarat: banyak kolom A = banyak baris B
- Hasil: matriks C dengan ordo sama dengan jumlah baris matriks A x jumlah kolom matriks B
- Pola perkalian: kalikan elemen-elemen baris A dengan elemen-elemen kolom B yang sekawan, kemudian jumlahkan hasilnya sebagai elemen baru bagi C.

### Perkalian Matriks

$$A_{k \times l} \cdot B_{l \times n} = C_{k \times n}$$

(jumlah kolom A = jumlah baris B)

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & l \\ m & n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.k + b.m & a.l + b.n \\ c.k + d.m & c.l + d.n \end{bmatrix}$$

Perkalian matriks tidak berlaku sifat komutatif.

Sehingga:  $A \cdot B \neq B \cdot A$



### Transpose Matriks

Yaitu matriks yang elemen barisnya adalah elemen kolom matriks A dan elemen kolomnya adalah baris matriks A (Baris  $\rightarrow$  Kolom). Matriks transpose dinotasikan dengan  $A^t$  atau  $\bar{A}$ .

Contoh:  $A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$        $A^t_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$

Sifat:  $(AB)^t = B^t \cdot A^t$



### Operasi Matriks

Merupakan suatu skalar yang berkaitan dengan matriks bujur sangkar. Determinan matriks A ditulis  $\det(A)$  atau  $|A|$ .

- Determinan matriks bujur sangkar ordo 2 (2x2)

Jika  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  maka  $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a.d - b.c$

- Determinan matriks bujur sangkar ordo 3 (3x3)  
Jika:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Maka,  $\det(A)$

$$= (a.e.i + b.f.g + c.d.h) - (c.e.g + a.f.h + b.d.i)$$

- Sifat-sifat determinan matriks
  1. Matriks singular jika dan hanya jika determinan matriks = nol
  2. Jika A, B, dan C matriks bujur sangkar yang memenuhi  $A \cdot B = C$  maka:  $\det(A) \cdot \det(B) = \det(C)$
  3.  $\det(A) = \det(A^t)$  dan  $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

## F Struktur Atom

Apabila determinan matriks berordo 2 tidak sama dengan nol maka rumus untuk mencari matriks invers sebagai berikut.

Jika matriks:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ maka } A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Matriks:

1.  $A \cdot B = C \rightarrow B = ? \Rightarrow B = A^{-1} \cdot C$
2.  $A \cdot B = C \rightarrow A = ? \Rightarrow A = C \cdot B^{-1}$
3.  $A \cdot B = I$   
 $B = A^{-1}$   
 $A = B^{-1}$

### Sifat-sifat matrik invers:

1.  $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
2.  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3.  $(A^{-1})^{-1} = A$



# PAKET SOAL

## SOAL SIMAK UI MATDAS

1. Jika matriks  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$  maka matriks B yang memenuhi  $A + B^T = (A - B)^T$  adalah ....

A.  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

D.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

B.  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

E.  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

C.  $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Catatan

## SOAL UN

2. Diketahui matriks  $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ c & -7 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

dan  $C = \begin{pmatrix} 4 & b \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$ . Jika  $A = B + C$  maka nilai

$a + b + c = \dots$

A. -2

D. -10

B. -3

E. -12

C. -8

## SOAL UN SMA IPA

3. Diketahui matriks  $A = \begin{pmatrix} 3 & w \\ x & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} y & -3 \\ 5 & z \end{pmatrix}$ ,

dan  $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$ . Jika  $B^T$  adalah transpose dari

matriks B dan  $A + B^T - C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$  maka nilai

$w + x + y + z$  adalah ....

**Catatan**

- A. 8  
B. 9  
C. 11

- D. 14  
E. 17

**SOAL SIMAK UI MATDAS**

4. Jika  $3\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3c & c \\ -6 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4a \\ 2b & d \end{pmatrix}$  maka

nilai dari  $a + b + c + d$  adalah ....

- A. 47 D. 17  
B. 37 E. 7  
C. 27

**SOAL UM UGM MATDAS**

5. Jika matriks  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  dan  $I$  matriks identitas yang berorde sama dengan  $P$  maka hasil kali akar persamaan  $\det(P - xI) = 0$  adalah ....  
A. -1 D. 3  
B. -4 E. 4  
C. -3

**SOAL UN SMA IPA**

6. Diketahui matriks  $A = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} x & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$  dan  $C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ y & 9 \end{pmatrix}$ . Jika  $A + B - C = \begin{pmatrix} 8 & 5x \\ -x & -4 \end{pmatrix}$  maka

nilai  $x + 2xy + y$  adalah ...

- A. 8 D. 20  
B. 12 E. 22  
C. 18

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

7. Diberikan matriks  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Jika  $2A = A^{-1}$  maka

$$ad - bc = \dots$$

- |  |   |
|--|---|
| A. $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ atau $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | D. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ atau $\frac{-1}{2}$ |
| B. $\frac{-1}{2}$ atau $\frac{1}{2}$               | E. $\frac{1}{2}$ atau 1                     |
| C. $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ atau $\frac{1}{2}$        |   |

Catatan

SOAL UN SMA IPA



SOAL UM UGM TKDU

9. Jika matriks  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  dan  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  serta  $P^{-1}$  invers matriks  $P$  maka determinan untuk matriks  $QP^{-1}$  adalah ....

A.  $\frac{3}{2}$       D.  $\frac{19}{2}$   
 B. 3      E. 19  
 C. 6

SOAL UN SMA IPA



SOAL SNMPTN TKDU



**Catatan****SOAL UM UGM K.IPA**

12. Diketahui matriks  $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  dan  $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ , serta  $PX = P^{-1}$ . Nilai  $a + b + c + d = \dots$

- A.  $\frac{11}{4}$       D.  $-\frac{95}{4}$   
B. 95      E.  $-\frac{11}{4}$   
C.  $\frac{95}{4}$

**SOAL SNMPTN MATDAS**

13. Jika matriks  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ , dan  $C = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ , maka determinan matriks  $AB + C$

adalah ....

- A. 2      D. 5  
B. 3      E. 6  
C. 4

**SOAL SNMPTN TKDU**

14. Jika  $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , dan determinan matriks  $AB$  adalah 10 maka nilai  $2b - a$  adalah

- ....  
A. -2      D. 1  
B. -1      E. 2  
C. 0

**SOAL SNMPTN MATDAS**

15. Jika  $A$  adalah matriks  $2 \times 2$  yang memenuhi  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  dan  $A \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$  maka hasil kali  $A \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  adalah...

A.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

D.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

B.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

E.  $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

C.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

**SOAL SPMB**16. Nilai  $x$  yang memenuhi persamaan

$$\begin{pmatrix} {}^x \log y & {}^2 \log z \\ 1 & {}^3 \log y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^4 \log z & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ adalah ....}$$

A.  $\sqrt{3}$

D.  $-3$

B.  $3$

E.  $0$

C.  $\sqrt{2}$

**SOAL SNMPTN TKDU**17. Jika  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 2 \\ c & 2 \end{pmatrix}$ , dan determinanmatriks  $AB$  adalah 3 maka nilai  $c - b$  adalah ....

A.  $-2$

D.  $1$

B.  $-1$

E.  $2$

C.  $0$

**SOAL UM UGM K.IPA**18. Jika matriks  $V = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^p & 2^p - 4 \\ 2 & -2^p \end{pmatrix}$ tidak mempunyai invers maka nilai  $2p^2 - 18 = ....$ 

A.  $-10$

D.  $18$

B.  $14$

E.  $0$

C.  $-16$

**SOAL SNMPTN**19. Jika  $M$  adalah matriks sehingga

$$M \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

maka determinan matriks  $M$  adalah ....

SOAL SPMB/SNMPTN

20. Jika  $(x \ y) \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix} = (\sin\alpha \ \cos\alpha)$  dan

$\alpha$  suatu konstanta maka  $x + y = \dots$



SOAL SPMB/SNMPTN

21. Persamaan garis  $g$  dan  $h$  berturut-turut adalah

$$\det \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \text{ dan } \det \begin{pmatrix} x+y & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Garis g dan h berpotongan di titik A, titik B(p, 1) terletak pada g, dan titik C(2, q) terletak pada h. Persamaan garis k yang melalui A dan sejajar BC adalah ....

- A.  $y = 2x - 1\frac{1}{2}$

B.  $y = 2x + 1\frac{1}{2}$

C.  $y = -2x - 1\frac{1}{2}$

D.  $y = -2x + \frac{1}{2}$

E.  $y = -2x + 1\frac{1}{2}$

SOAL SIMAK UI TKDU

22. Sebuah matriks persegi disebut matriks segitiga atas jika semua entri di bawah diagonal utama-

nya bernilai 0, contoh  $B = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 14 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix}$ . Diketahui

A matriks segitiga atas dengan entri-entri diagonal positif sehingga  $A^2 = B$  maka  $A = \dots$

- A.  $\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

C.  $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

D.  $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

E.  $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

### SOAL UM UGM

23. Untuk suatu  $\alpha$ , nilai  $x$  dan  $y$  yang memenuhi

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \text{ adalah....}$$

A.  $x = \sin \alpha, y = \cos \alpha$       D.  $x = 1, y = 0$

B.  $x = \cos \alpha, y = \sin \alpha$       E.  $x = 1, y = 1$

C.  $x = 0, y = 1$

### SOAL SIMAK UI K.IPA

24. Jika  $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \sin x & -1 \\ \sin^2 x & \cos x \end{bmatrix}$  untuk  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  dan

$\det(A) = 1$  maka  $x$  mempunyai nilai ....

1)  $\frac{\pi}{2}$

3)  $\frac{3\pi}{2}$

2)  $\frac{5\pi}{6}$

4)  $\frac{7\pi}{6}$

### SOAL SIMAK UI TKDU

25. Jika matriks A memenuhi persamaan

$$\left( 2A^T - 5 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)^T = 4A - 9 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

pernyataan-pernyataan berikut yang BENAR adalah

....

- (1) Terdapat satu entri matriks A yang bernilai negatif.
- (2)  $\det(A)$  bernilai positif.
- (3) Jumlah entri-entri pada diagonal utama matriks A bernilai positif.
- (4) Jumlah entri-entri pada matriks A bernilai negatif.

### Catatan

# Pembahasan

## Catatan

### 1. Pembahasan:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A + B^T = (A - B)^T$$

$$A^T + B = A - B$$

$$2B = A - A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jawaban: E

### 2. Pembahasan:

Jika matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  maka:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a \pm p & b \pm q \\ c \pm r & d \pm s \end{pmatrix}$$

Diketahui:

$$\text{Matriks } A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ c & -7 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{dan } C = \begin{pmatrix} 4 & b \\ -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Jika  $A = B + C$  maka:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ c & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & b \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ c & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+4 & 1+b \\ -3-2 & 0-7 \end{pmatrix}$$

Dari baris pertama kolom pertama:

$$2 = a + 4 \Rightarrow a = -2$$

Dari baris pertama kolom kedua:

$$-4 = 1 + b \Rightarrow b = -5$$

Dari baris kedua kolom pertama:

$$c = -3 - 2 \Rightarrow c = -5$$

Sehingga, nilai dari  $a + b + c = -2 + (-5) + (-5) = -12$

**Jawaban: E**

### 3. Pembahasan:

Jika matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$

Maka:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a \pm p & b \pm q \\ c \pm r & d \pm s \end{pmatrix}$$

Matriks transpose dari  $A = A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

Diketahui:

Matriks  $A = \begin{pmatrix} 3 & w \\ x & -1 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} y & -3 \\ 5 & z \end{pmatrix}$ ,

dan  $C = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$

Maka,

$$B^T = \begin{pmatrix} y & 5 \\ -3 & z \end{pmatrix}$$

Dari persamaan:

$$A + B^T - C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & w \\ x & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 5 \\ -3 & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3+y-5 & w+5-5 \\ x-3-5 & -1+z-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y-2 & w \\ x-8 & z-11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Sehingga, diperoleh:

$$y-2=0 \Rightarrow y=2$$

$$w=4$$

**Catatan**

$$x - 8 = -3 \Rightarrow x = 5$$

$$z - 11 = -5 \Rightarrow z = 6$$

Jadi, nilai dari  $w + x + y + z = 4 + 5 + 2 + 6 = 17$

**Jawaban: E**

**4. Pembahasan:**

$$3 \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3c & 3 \\ -6 & 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4a \\ 2b & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 12 - c & 9 - 1 \\ 6 + 2 & 3 - 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4a \\ 2b & d \end{pmatrix}$$

Diperoleh:  $a = 2$ ,  $b = 4$ ,  $c = 15$ ,  $d = -4$

Dengan demikian,  $a + b + c + d = 17$

**Jawaban: D**

**5. Pembahasan:**

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P - xI = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 2-x \end{pmatrix}$$

$$\text{Det}(P - xI) = 0 \Leftrightarrow 2 - 3x + x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

Akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$ , diperoleh  $x_1 \cdot x_2 = -4$

**Jawaban: B**

**6. Pembahasan:**

$$A + B - C = \begin{pmatrix} 3 & y \\ 5 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & 5 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ y & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5x \\ -x & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3+x+3 & y+5+1 \\ 5-3-y & -1+6-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5x \\ -x & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x+6 & y+6 \\ 2-y & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 5x \\ -x & -4 \end{pmatrix}$$

$$x + 6 = 8 \Rightarrow x = 2$$

$$y + 6 = 5x \Rightarrow y = 5 \cdot 2 - 6 = 10 - 6 = 4$$

$$\text{Jadi, nilai dari } x + 2xy + y = 2 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 4 \\ = 2 + 16 + 4 = 22$$

**Jawaban: E**

### 7. Pembahasan:

Diketahui  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Dari  $2A = A^{-1}$  diperoleh:  $\text{Det}(2A) = \text{Det}(A^{-1})$

$$2^2 \cdot \text{Det}(A) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$$

$$(\text{Det}(A))^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{Det}(A) = \pm \frac{1}{2}, \text{ atau } ad - bc = \pm \frac{1}{2}.$$

- $\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$
- $\text{Det}(k \cdot A) = k^n \cdot \text{Det}(A)$ , jika A matriks  $n \times n$
- $\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$

**Jawaban: B**

### 8. Pembahasan:

Jika A dan B adalah matriks:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

$$XA = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$$

Jika,  $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  maka:

$$\text{Det } A = ad - bc$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -17 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{15 - 0} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Catatan**

**Catatan**

$$AX = B + A^T \Rightarrow X = A^{-1}(B + A^T)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X &= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -17 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -15 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 30 & -15 \\ -45 & 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi,  $\det A = 2 \cdot 1 - (-3)(-1) = -1$

**Jawaban: B**

**9. Pembahasan:**

- Matriks  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ,

maka  $\det A = ad - bc$

- $\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$

- $\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$

Diketahui  $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ , dan  $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$  maka:

$$\det Q \cdot P^{-1} = \det Q \cdot \det P^{-1}$$

$$= (1 \cdot 3 - (0)(-2)) \cdot \frac{1}{(3 \cdot 2 - 1 \cdot 4)}$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

**Jawaban: A**

**10. Pembahasan:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & a \\ 3c & 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8a & 4 \\ 16b & 9c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & -6 \\ 2b & 5c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 7c & 5a \\ 7c & 4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7a & 10 \\ 14b & 4c \end{pmatrix}$$

- $5a = 10 \Rightarrow a = 2$
- $4a = 4c \Rightarrow a = c = 2$
- $7c = 14b \Rightarrow 7 \cdot 2 = 14b \Rightarrow b = 1$

Jadi,  $a+b+c = 2+1+2 = 5$

**Jawaban: D**

### 11. Pembahasan:

Perkalian matriks berordo  $m \times n$  di kali matriks berordo  $n \times m$  akan menghasilkan matriks berordo  $m \times m$ .

Jika matriks  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  maka determinannya =  $ad - bc$ .

Diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3a+1+2 & 9+1+1 \\ 2a+1+2a & 6+1+a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3a+3 & 11 \\ 4a+1 & 7+a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diketahui, determinan dari  $AB = 0$  maka:

$$(3a+3)(7+a) - (4a+1) \cdot 11 = 0$$

$$\Rightarrow 21a + 3a^2 + 21 + 3a - 44a - 11 = 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 20a + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 20a = -10$$

**Catatan**

**Jawaban: A**

**Catatan****12. Pembahasan:**

$$P \cdot X = P^{-1}$$

$$\begin{aligned} X &= P^{-1} \cdot P^{-1} \\ &= \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 44 & -28 \\ -14 & 9 \end{pmatrix} \\ a+b+c+d &= \frac{44-28-14+9}{4} = \frac{11}{4} \end{aligned}$$

**Jawaban: A****13. Pembahasan:**

Penjumlahan dan pengurangan matrik

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm p & b \pm q \\ c \pm r & d \pm s \end{pmatrix}$$

Perkalian matrik

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}$$

Jika diketahui  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

maka determinan dari matrik  $A = ad - bc$ 

Diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} AB + C &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, determinan dari

$$AB + C = 2.8 - 4.3 = 16 - 12 = 4$$

**Jawaban: C**

**14. Pembahasan:**

Diketahui:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Maka:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2-1-2 & -2+2+0 \\ a+b-c & a-2b+0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ a+b-c & a-2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Determinan matriks  $AB = 10$  maka:

$$(-5)(a-2b) - (a+b-c)(0) = 10$$

$$\Rightarrow -5a + 10b - 0 = 10$$

$$\Rightarrow -5a + 10b = 10 \text{ (dibagi 5)}$$

$$\Rightarrow -a + 2b = 2$$

$$\Rightarrow 2b - a = 2$$

**Jawaban: E**

**15. Pembahasan:**

- $A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- $A \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Maka hasil kali  $A \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$  adalah...?

Jawab:

Misal  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

**Catatan**

- $$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a+2b \\ c+2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a+2b = 1$$

$$c+2d = 0$$
- $$A \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4a+6b \\ 4c+6d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$4a+6b = 0$$

$$4c+6d = 2$$
- $$4a+6b = 0 \mid .1 \quad | \quad 4a+6b = 0$$

$$a+2b = 1 \mid .3 \quad | \quad 3a+6b = 3$$

$$\begin{array}{r} a = -3 \\ b = 2 \end{array}$$

$$4c+6d = 2 \mid \times 1 \quad | \quad 4c+6d = 2$$

$$c+2d = 1 \mid \times 3 \quad | \quad \underline{3c+6d=0}$$

$$\begin{array}{r} c = 2 \\ d = -1 \end{array}$$
- $$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Jawaban: C****16. Pembahasan:**

Diketahui:

$$\begin{pmatrix} {}^x \log y & {}^2 \log z \\ 1 & {}^3 \log y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^4 \log z & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dari baris pertama kolom pertama:

$${}^x \log y = {}^4 \log z \dots \text{(i)}$$

Dari baris pertama kolom kedua:

$${}^2 \log z = 2 \Rightarrow z = 2^2 = 4$$

Dari baris kedua kolom kedua:

$${}^3 \log y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

Sehingga, dari persamaan (i) diperoleh:

$${}^x \log \sqrt{3} = {}^4 \log 4$$

$$\Rightarrow {}^x \log \sqrt{3} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{3}$$

**Jawaban: A**

### 17. Pembahasan:

Diketahui:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 2 \\ c & 2 \end{pmatrix}$

Maka:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 2 \\ c & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+b-c & 3+2-2 \\ -b+c & -2+2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a+b-c & 3 \\ -b+c & 0 \end{pmatrix}$$

Determinan matriks  $AB$  adalah 3 sehingga:

$$(a+b-c) \cdot 0 - 3(-b+c) = 3$$

$$\Rightarrow 0 - 3(-b+c) = 3$$

$$\Rightarrow -3(-b+c) = 3$$

$$\Rightarrow -b+c = \frac{3}{-3}$$

$$\Rightarrow c-b = -1$$

**Jawaban: B**

**18. Pembahasan:**

- Matriks A tidak punya invers jika  $\text{Det}(A) = 0$
- $\text{Det}(A \cdot B) = \text{Det}(A) \cdot \text{Det}(B)$

$$V = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2^p & 2^p - 4 \\ 2 & -2^p \end{pmatrix} \text{ tidak punya invers}$$

Berlaku,  $\text{Det}(V) = -7 \cdot [-(2^p)^2 - 2 \cdot 2^p + 8] = 0$

$$-(2^p)^2 - 2 \cdot 2^p + 8 = 0$$

$$(2^p)^2 + 2 \cdot 2^p - 8 = 0$$

$$(2^p - 2)(2^p + 4) = 0$$

$$2^p = 2 \text{ atau } 2^p = -4$$

$2^p = 2$  maka  $p = 1$  untuk  $2^p = -4$  (tidak memenuhi)

$$\text{Sehingga: } 2p^2 - 18 = 2 \cdot 1^2 - 18 = -16$$

**Jawaban: C**

**19. Pembahasan:**

$$M \times \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ -c & -d \end{bmatrix}$$

$$\det M = \dots$$

Jawab:

$$\det M (ad - bc) = -d(a+c) + c(b+d)$$

$$\det M (ad - bc) = -ad - dc + cb + cd$$

$$\det M = \frac{-(ad - bc)}{(ad - bc)} = -1$$

**Jawaban: B**

**20. Pembahasan:**

Diketahui:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} = (\sin \alpha \quad \cos \alpha)$$

$$\Rightarrow (x \sin \alpha - y \cos \alpha \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ = (\sin \alpha \quad \cos \alpha)$$

Sehingga:

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha = \sin \alpha \text{ dan}$$

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = \cos \alpha$$

Diperoleh nilai  $x = 1$  dan  $y = 0$

Jadi, nilai dari  $x + y = 1$

Jawaban: D

Catatan

## 21. Pembahasan:

Diketahui:

Persamaan garis g:  $\det \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

Maka, g:  $y - x = 0$

Persamaan garis h:  $\det \begin{pmatrix} x+y & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$

Maka, h:  $x + y - 1 = 0$  atau  $y + x = 1$

Garis g dan h berpotongan di A maka titik A adalah:

$$y - x = 0$$

$$y + x = 1$$

$$\begin{array}{r} \\ -2x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Sehingga, titik potong A  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Titik B(p, 1) pada garis g maka:

$$y - x = 0 \Rightarrow 1 - p = 0 \Rightarrow p = 1$$

Jadi, titik B(1, 1)

Titik C(2, q) pada garis h maka:

$$y + x = 1 \Rightarrow q + 2 = 1 \Rightarrow q = -1$$

Jadi, titik C(2, -1)

Sehingga, persamaan garis yang melalui BC adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

$$\Rightarrow \frac{y - 1}{-1 - 1} = \frac{x - 1}{2 - 1}$$

$$\Rightarrow 1(y - 1) = -2(x - 1)$$

$$\Rightarrow y - 1 = -2x + 2$$

$$\Rightarrow y = -2x + 3$$

Memiliki gradien(m) = -2

Sehingga, persamaan garis k yang melalui A  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

**Catatan**

dan sejajar garis  $y = -2x + 3$  adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{2} = -2\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = -2x + 1\frac{1}{2}$$

**Jawaban: E**

**22. Pembahasan:**

$$\text{Misal, } A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5a & 6b & ac \\ 0 & 9 & 7c \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\text{Diketahui } A^2 = B = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 14 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Kesimpulan:  $a = 2, c = 1, b = 2$

$$\text{Jadi, } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

**Jawaban: E**

**23. Pembahasan:**

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}A \cdot X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{-\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} \begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{1}{1} \begin{pmatrix} -\cos \alpha & -\sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \cos \alpha \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi,  $x = 1$  dan  $y = 0$

**Jawaban: D**

#### 24. Pembahasan:

$$\text{Det}A = 1$$

$$\text{Diketahui } A = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \sin x & -1 \\ \sin^2 x & \cos x \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 1$$

$$\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = 1$$

$$\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x + \sin^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x$$

$$\sqrt{3} \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x = 0$$

$$\cos x (\sqrt{3} \sin x - \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \text{ atau } \sqrt{3} \sin x = \cos x$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Dengan } x \in \left( \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right),$$

- untuk  $\cos x = 0$ , HP = {}

$$- \text{ untuk } \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ HP} = \left\{ \frac{7\pi}{6} \right\}$$

$$\text{Jadi, HP} = \left\{ \frac{7\pi}{6} \right\}$$

Pernyataan 4 saja yang benar.

**Jawaban: D**

**Catatan**

**Catatan****25. Pembahasan:**

$$\left( 2A^T - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right)^T = 4A - 9 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A - 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 4A - \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A - \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = 4A - \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$2A = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ -9 & -10 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}$$

Diperoleh,

$$\det A = -10 - \left( \frac{-63}{2} \right) = \frac{-20}{2} + \frac{63}{2} = \frac{43}{2} \text{ (positif)}$$

Jumlah entri-entrianya:

$$2 + 7 - \frac{9}{2} - 5 = -\frac{1}{2} \text{ (negatif)}$$

Pernyataan 2 dan 4 benar.

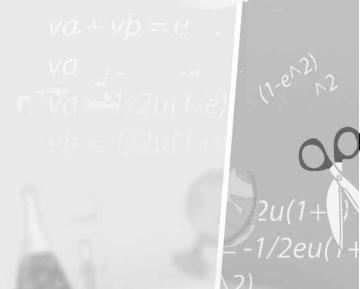
**Jawaban: C**

$$2a+b=x$$

$$Ra + 40a +$$

8

# PELUANG



## A. Kaidah Pencacahan

Jika suatu kejadian I dapat terjadi dengan  $n_1$  cara yang berlainan, kejadian II dapat terjadi dengan  $n_2$  cara berlainan, kejadian III dapat terjadi dengan  $n_3$  cara yang berlainan, dan demikian seterusnya (untuk jumlah yang tidak terbatas) maka seluruh kejadian tersebut dapat terjadi dengan:

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots$$

## B Permutasi

Permutasi ( $P$ ) adalah suatu susunan yang dapat dibentuk dari suatu kumpulan objek yang diambil sebagian atau seluruhnya dengan memerhatikan urutan. Dimana ( $AB \neq BA, ABC \neq BAC$ ). Adapun rumus dan notasi yang digunakan dalam permutasi adalah:

Banyaknya permutasi  $n$  unsur yang diambil dari  $n$  unsur adalah  $P_n = n!$

Banyaknya permutasi  $k$  unsur yang diambil dari  $n$  unsur adalah  $P_k^n = \frac{n!}{(n - k)!}$

Permutasi k unsur dengan terdapat a unsur yang sama, b unsur yang sama dan c unsur yang sama adalah:

$$\frac{k!}{a!b!c!} \text{ cara}$$

Banyaknya permutasi siklis (melingkar) dari n unsur adalah:  $P = (n - 1)!$

## B Permutasi

Kombinasi adalah suatu susunan yang dapat dibentuk dari suatu kumpulan objek yang diambil sebagian atau seluruhnya dengan tidak memerhatikan urutan. Dinotasikan dengan:

${}_n C_k$  atau  $C_n^k$  atau urutan: ( $AB = BA$ ,  $ABC = BAC$ , dan lain-lain).

Banyaknya kombinasi k unsur yang diambil dari

$$n \text{ unsur adalah } {}_n C_k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

## D Permutasi

Bila n suatu bilangan bulat positif maka n faktorial ditulis  $n!$ . Didefinisikan sebagai:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

## E Peluang Kejadian

Pada suatu percobaan terdapat n hasil yang mungkin dan masing-masing berkesempatan sama untuk muncul. Jika di antara n hasil itu ada k yang merupakan kejadian E maka peluang kejadian E ditulis  $P(E)$  adalah:

$$P(E) = \frac{k}{n}$$

Secara umum:

S = ruang sampel

E = kejadian

$E \subset S$

$n(S)$  = banyaknya anggota S

$n(E)$  = banyaknya anggota E

$P(E)$  = peluang kejadian E

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$



## Frekuensi Harapan Suatu Kejadian

Misalkan, sebuah percobaan dilakukan n kali dengan keadaan yang sama dan dari n percobaan itu peluang munculnya kejadian E katakan P(E). Maka, frekuensi harapan F(n) kemunculan kejadian E adalah:

$$F(n) = n \times P(E)$$



## Kaidah Pencacahan

Yaitu gabungan dari 2 kejadian atau lebih.

Contoh: Suatu kejadian  $A \cap B$  dan  $A \cup B$ .

### 1. Peluang irisan dua kejadian (dan)

Peluang kejadian yang mengandung semua elemen persekutuan kejadian A dan B.

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)}$$

### 2. Peluang gabungan dua kejadian (atau)

Peluang kejadian yang mencakup semua titik sampel A dan titik sampel B maupun keduanya.

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)}$$

$$P(A) \cup P(B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

### 3. Peluang komplemen suatu kejadian $P(A')$ merupakan peluang kejadian yang bukan A tidak terjadi.

$$P(A') = 1 - P(A)$$

**4. Kejadian saling lepas**

Jika  $A \cap B = \emptyset$  maka:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{n(A) + n(B)}{n(S)}$$

**5. Kejadian bersyarat**

Peluang terjadinya kejadian A bila kejadian B terjadi, yaitu:

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \text{ dengan } P(B) > 0$$

**6. Kejadian bebas**

Kejadian A dan B disebut saling bebas jika  $P(B \cap A) = P(B)$  dan  $P(A \cap B) = P(A)$ .

Bila suatu percobaan kejadian A dan B keduanya dapat terjadi sekaligus:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B | A)$$

Bila A dan B saling bebas:

$$P(A \cap B) = P(A) P(B)$$



# PAKET SOAL

SOAL UN SMA IPA



Catatan

SOAL UN SMA IPA



## **SOAL UN SMA IPA**

3. Sebuah kotak berisi 4 bola kuning dan 6 bola merah. Jika diambil 2 bola sekaligus secara acak maka peluang terambil kedua bola berwarna sama adalah ....

A.  $\frac{2}{15}$       D.  $\frac{7}{15}$   
B.  $\frac{3}{15}$       E.  $\frac{8}{15}$   
C.  $\frac{5}{15}$

SOAL SNMPTN K.IPA

4. Di dalam kotak terdapat 2 bola biru, 6 bola merah, dan 2 bola putih. Jika diambil 8 bola tanpa pengembalian maka peluang banyak bola merah yang terambil tiga kali banyak bola putih yang terambil adalah ...

# Catatan

- (A)  $\frac{1}{15}$       (B)  $\frac{1}{30}$       (C)  $\frac{1}{45}$       (D)  $\frac{1}{60}$       (E)  $\frac{1}{75}$

SOAL UN SMA IPA

5. Dalam kotak terdapat 3 kelereng merah dan 4 kelereng putih, kemudian diambil 3 kelereng sekaligus secara acak. Peluang terambil paling sedikit 2 kelereng putih adalah ...

A.  $\frac{3}{35}$       D.  $\frac{12}{35}$   
B.  $\frac{4}{35}$       E.  $\frac{22}{35}$   
C.  $\frac{7}{35}$

**SOAL SNMPTN TKDU**



SOAL UN SMA IPA



SOAL UN SMA IPA

8. Banyak susunan kata yang dapat dibentuk dari kata "WIYATA" adalah ...

  - A. 360 kata
  - B. 180 kata
  - C. 90 kata
  - D. 60 kata
  - E. 30 kata

## **SOAL UN SMA IPA**



Catatan

- SOAL SNMPTN TKDU



## SOAL SBMPTN SAINTEK

11. Enam anak, 3 laki-laki dan 3 perempuan duduk berjajar. Peluang 3 perempuan duduk berdampingan adalah ....

- A.  $\frac{1}{60}$       D.  $\frac{1}{10}$   
B.  $\frac{1}{30}$       E.  $\frac{1}{5}$   
C.  $\frac{1}{15}$

## **SOAL SNMPTN TKDU**



SOAL SNMPTN K.IPA



SOAL UN SMA IPA



SOAL UM UGM TKDU



**SOAL SNMPTN K.IPA**

16. Suatu kelas terdiri atas 10 pelajar pria dan 20 pelajar wanita. separuh pelajar pria memakai arloji dan separuh pelajar wanita juga memakai arloji. Jika dipilih satu pelajar maka peluang yang terpilih wanita atau memakai arloji adalah ....

- A.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{3}$

C.  $\frac{3}{4}$

D.  $\frac{2}{3}$

E.  $\frac{5}{6}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

17. Delapan titik terletak pada bidang datar sehingga tidak ada titik yang segaris. Banyak segitiga yang dapat dibuat dengan titik-titik sudut dari titik-titik tersebut adalah ....

- A. 56  
B. 58  
C. 64

- D. 84  
E. 96

**SOAL SIMAK UI TKDU**

18. Dari 26 huruf alfabet dipilih satu per satu 8 huruf sembarang dengan cara pengembalian dan disusun sehingga membentuk kata. Probabilitas bahwa di antara kata-kata yang terbentuk mengandung subkata "SIMAKUI" dalam satu rangkaian kata yang tidak terpisah adalah ....

A.  $\frac{26}{26^8}$

D.  $\frac{52}{\binom{26}{8}}$

B.  $\frac{52}{26^8}$

E.  $\frac{1}{8}$

C.  $\frac{26}{\binom{26}{8}}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

19. Rumah di Jalan Veteran dinomori secara urut mulai 1 sampai dengan 150. Berapa banyak rumah yang nomornya menggunakan angka 8 sekurang-kurangnya satu kali?

- A. 14  
B. 15  
C. 21

- D. 24  
E. 30

**SOAL SNMPTN K.IPA**

20. Diketahui segilima ABCDE, dengan  $A(0, 2)$ ,  $B(4, 0)$ ,  $C(2\pi+1, 0)$ ,  $D(2\pi+1, 4)$ , dan  $E(0, 4)$ . Titik P dipilih secara acak dari titik di dalam segilima tersebut. Peluang sudut APB berukuran tumpul adalah ....

- |                  |                   |
|------------------|-------------------|
| A. $\frac{3}{8}$ | D. $\frac{5}{16}$ |
| B. $\frac{1}{4}$ | E. $\frac{5}{8}$  |
| C. $\frac{1}{2}$ |                   |

**SOAL SNMPTN K.IPA**

21. Enam orang bepergian dengan dua mobil milik dua orang diantara mereka. Masing-masing mobil dikemudikan oleh pemiliknya dan kapasitas mobil masing-masing adalah 5 orang termasuk penempat. Banyak cara menyusun penumpang di kedua mobil tersebut adalah ....

- |       |       |
|-------|-------|
| A. 10 | D. 16 |
| B. 12 | E. 18 |
| C. 14 |       |

**SOAL UN SMA IPA**

22. Dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7 akan disusun suatu bilangan terdiri dari 3 angka berbeda yang kurang dari 500. Banyak cara menyusun bilangan tersebut adalah ....

- |        |        |
|--------|--------|
| A. 120 | D. 210 |
| B. 140 | E. 240 |
| C. 160 |        |

**SOAL SNMPTN K.IPA**

23. Sepuluh titik terletak pada bidang datar sehingga tidak ada titik yang segaris. Banyak segitiga yang dapat dibuat dengan titik-titik sudut dari titik-titik tersebut adalah ....

- |        |        |
|--------|--------|
| A. 30  | D. 150 |
| B. 60  | E. 300 |
| C. 120 |        |

**SOAL SNMPTN K.IPA**

24. Di dalam kotak terdapat 3 bola biru, 6 bola merah, dan 2 bola putih. Jika diambil 7 bola tanpa pengembalian maka peluang banyak bola merah yang terambil tiga kali banyak bola putih yang terambil adalah ....

A.  $\frac{7}{12}$

D.  $\frac{2}{33}$

B.  $\frac{4}{33}$

E.  $\frac{1}{12}$

C.  $\frac{3}{30}$

**SOAL STANDAR SBMPTN TKDU**

25. Di suatu perkumpulan akan dipilih perwakilan yang terdiri dari 6 orang. Calon yang tersedia ada 5 pria dan 4 wanita. Banyaknya susunan perwakilan yang dapat dibentuk jika sekurang-kurangnya terpilih 3 pria adalah ...

A. 84

D. 74

B. 82

E. 72

C. 76

# Pembahasan

## Catatan

### 1. Pembahasan:

Banyak bilangan yang terdiri atas 3 angka berbeda yang nilainya lebih dari 400 yang disusun dari angka 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 adalah:

Menggunakan kaidah perkalian:

Ratusan	Puluhan	Satuan
3 angka	5 angka	4 angka

→ Angka yang dapat dipilih pada ratusan hanya 4, 5 dan 6

Sehingga, banyaknya bilangan yang dapat disusun adalah:

$$3 \times 5 \times 4 = 60 \text{ bilangan.}$$

Jawaban: B

### 2. Pembahasan:

Dari 14 soal yang ada, nomor 1 – 3 harus dikerjakan. Artinya, ada 1 cara untuk memilih 3 butir soal. ...(i) Seorang pegawai harus mengerjakan 6 soal, sehingga masih tersisa 3 soal yang harus dikerjakan dengan memilih soal dari nomor 4 – 14 (11 butir soal).

Karena tidak ada aturan mengenai penggerjaan soal yang harus urut atau tidak maka bisa dianggap bahwa pemilihan soal bisa acak atau urutan tidak diperhatikan.

Maka, banyak cara memilih 3 butir soal dari 11 butir soal yang tersedia tanpa memerhatikan urutannya adalah:

$${}_{11}C_3 = \frac{11!}{3!(11-3)!}$$

$$= \frac{11!}{3!.8!}$$

$$= \frac{8!.(9 \times 10 \times 11)}{(1 \times 2 \times 3).8!}$$

$$= \frac{9 \times 10 \times 11}{1 \times 2 \times 3} = 165 \text{ cara} \dots \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) maka banyak cara seluruhnya adalah;

$$1 \times 165 = 165 \text{ cara.}$$

**Jawaban: D**

### 3. Pembahasan:

Peluang terambilnya bola sama = peluang terambil keduanya kuning atau keduanya merah.

Peluang keduanya kuning:

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{\frac{4!}{2!2!}}{\frac{10!}{2!8!}} = \frac{6}{45}$$

Peluang keduanya merah:

$$\frac{{}_6C_2}{{}_{10}C_2} = \frac{\frac{6!}{2!4!}}{\frac{10!}{2!8!}} = \frac{15}{45}$$

Jadi, peluang terambilnya bola sama adalah:

$$\frac{6}{45} + \frac{15}{45} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

**Jawaban: D**

### 4. Pembahasan:

$$n(P) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{{}_2C_2 \times {}_6C_6}{{}_{10}C_8} = \frac{\frac{1 \times 1}{10!}}{(10-8)!8!} = \frac{1}{45}$$

**Jawaban : C**

### 5. Pembahasan:

Terdapat 3 kelereng merah dan 4 kelereng putih.

Peluang terambilnya paling sedikit 2 kelereng putih, jika diambil 3 bola sekaligus adalah:

- Peluang terambil 2 bola putih:

$$\frac{{}_4C_2 \cdot {}_3C_1}{{}_7C_3} = \frac{\frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{3!}{2!1!}}{\frac{7!}{4!3!}} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 3}{35} = \frac{18}{35}$$

**Catatan**

## Catatan

- Peluang terambil 3 bola putih:

$$\frac{C_3^4 \cdot C_0^3}{C_3^7} = \frac{\frac{4!}{1!3!} \cdot 1}{\frac{7!}{4!3!}} = \frac{4}{35}$$

Jadi, peluang terambilnya paling sedikit 2 bola pu-

$$\text{tih adalah: } \frac{18}{35} + \frac{4}{35} = \frac{22}{35}$$

**Jawaban: E**

### 6. Pembahasan:

Dari bilangan 1, 2, 2, 6, dan 8 disusun kode kupon yang lebih besar dari 62000 maka banyaknya kupon:

- Untuk bilangan 62 \_\_\_

Terdapat sisa 3 pilihan dengan 3 angka berbeda (1, 2, 8)

Permutasi 3 bilangan berbeda:

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

- Untuk bilangan 68 \_\_\_

Terdapat sisa 3 pilihan dengan 2 angka yang sama (1, 2, 2)

Permutasi 3 bilangan dengan 2 bilangan yang sama:

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

- Untuk bilangan 8 \_\_\_

Terdapat 4 pilihan dengan 2 angka yang sama (1, 2, 2, 6)

Permutasi 4 bilangan dengan 2 bilangan yang sama:

$$\frac{4!}{2!} = 3 \times 4 = 12$$

Sehingga, banyaknya bilangan yang dapat dibuat adalah:

$$6 + 3 + 12 = 21$$

**Jawaban: C**

### 7. Pembahasan:

Permutasi n elemen yang berlainan diambil atau disusun secara bersama-sama.

$${}_n P_n = n!$$

Dari enam orang anak A, B, C, D, E dan F akan berfoto dalam satu baris. B, C, dan D harus selalu berdampingan (dianggap sebagai satu kelompok) maka banyaknya susunan yang dapat dibuat adalah:  
Permutasi dari A, (B, C, D), E, F (ada 4) dikali permutasi B, C, D (ada 3) =  
$${}_4P_4 \times {}_3P_3 = 4! \times 3!$$
$$= 24 \times 6 = 144 \text{ cara.}$$

### Catatan

**Jawaban: A**

**8. Pembahasan:**

Permutasi n unsur dengan k unsur yang sama adalah:  $\frac{n!}{k!}$

Dari kata "WIYATA" terdiri 6 huruf dan terdapat 2 huruf "A" yang sama maka banyak susunan kata yang dapat dibentuk adalah:

$$\frac{6!}{2!} = 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 360$$

**Jawaban: A**

**9. Pembahasan:**

Banyak cara yang dapat disusun dari 5 orang pemain dan satu orang pelatih, dimana pelatih berada di kanan atau kiri pemain adalah:

$$2! \times 5! = 1 \times 2 \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$$

$$= 240 \text{ cara}$$

**Jawaban: E**

**10. Pembahasan:**

Banyaknya kupon undian, yaitu:

- i. Nomor kupon undian yang diawali 24... terdapat 6 kemungkinan
- ii. Nomor kupon undian yang diawali 26 ... terdapat 3 kemungkinan, yaitu 26448, 26484, 26844.
- iii. Nomor kupon undian yang diawali 28 ... terdapat 3 kemungkinan yaitu 28446, 28464, 28644
- iv. Nomor kupon undian 40-ribuan terdapat  $1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  kemungkinan.

- v. Nomor kupon undian 62-ribuan terdapat 3 kemungkinan yaitu 62448, 62484, 62844.

Dengan demikian nomor undian dari 24-ribuan sampai nomor 62844 terdapat 38 kupon sehingga kupon undian nomor 64248 terdapat pada urutan ke 39.

**Jawaban: C**

**11. Pembahasan:**

3 perempuan selalu duduk berdampingan bisa terjadi jika:

- a. P1, P2, P3 duduk paling kiri seperti:

P1	P2	P3	L1	L2	L3
----	----	----	----	----	----

- b. duduk antara L1 dan L2 seperti:

L1	P1	P2	P3	L2	L3
----	----	----	----	----	----

- c. duduk antara L2 dan L3 seperti :

L1	L2	P1	P2	P3	L3
----	----	----	----	----	----

- d. duduk paling kanan, seperti :

L1	L2	L3	P1	P2	P3
----	----	----	----	----	----

Jadi banyaknya kombinasi adalah  $4!$ .

Sedangkan posisi 3 perempuan bisa saja berubah-ubah, seperti

P1	P2	P3
----	----	----

dan

P2	P3	P1
----	----	----

Jadi banyak kombinasi perempuan bertukar posisi adalah  $3!$ .

Sehingga peluang 3 perempuan duduk berdampingan adalah:

$$\frac{4!3!}{6!} = \frac{3!}{6 \cdot 5} = \frac{1}{5}$$

**Jawaban: E**

**12. Pembahasan:**

Dari bilangan 1, 3, 3, 5, dan 7 disusun kode kupon yang lebih besar dari 53000 maka banyaknya kupon:

- Untuk bilangan 53 \_\_\_

Terdapat sisa 3 pilihan dengan 3 angka berbeda (1, 3, 7)

Permutasi 3 bilangan berbeda:

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

- Untuk bilangan 5  $\underline{\quad \quad}$   
Terdapat sisa 3 pilihan dengan 2 angka yang sama (1, 3, 3)  
Permutasi 3 bilangan dengan 2 bilangan yang sama:

$$\frac{3!}{2!} = 3$$

- Untuk bilangan 7  $\underline{\quad \quad \quad}$   
Terdapat 4 pilihan dengan 2 angka yang sama (1, 3, 3, 5)  
Permutasi 4 bilangan dengan 2 bilangan yang sama:

$$\frac{4!}{2!} = 3 \times 4 = 12$$

Sehingga, banyaknya bilangan yang dapat dibuat adalah:

$$6 + 3 + 12 = 21$$

**Jawaban: C**

### 13. Pembahasan:

Misal, P adalah kejadian dimana angka pertama atau terakhir tidak 0 maka  $P^c$  adalah kejadian angka pertama dan terakhir 0.

Karena tidak ada keterangan mengenai angka boleh berulang atau tidak maka dapat diasumsikan bahwa angka penyusunnya boleh berulang.

Dengan kaidah perkalian:

$$P^c = 1 \times 5 \times 5 \times 1 = 25$$

$$A = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

$$\text{Maka, } P = A - P^c$$

$$= 625 - 25 = 600$$

**Jawaban : (A)**

### 14. Pembahasan:

Susunan tanpa memperhatikan urutannya:

$${}^n C_r = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}$$

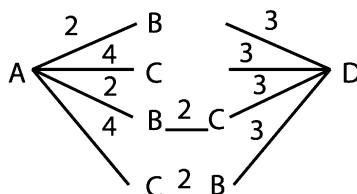
$${}^{12} C_5 = \frac{12!}{(12-5)! \cdot 5!}$$

**Catatan**

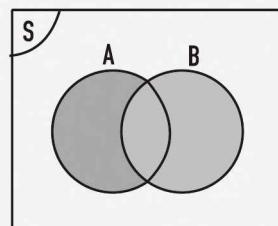
$$= \frac{12!}{7! \cdot 5!} = \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 729 \text{ cara}$$

**Jawaban: E****15. Pembahasan:**

A  $\xrightarrow{2 \text{ jalan}}$  B, A  $\xrightarrow{4 \text{ jalan}}$  C, B  $\xrightarrow{2 \text{ jalan}}$  C, B  $\xrightarrow{3 \text{ jalan}}$  D,  
 C  $\xrightarrow{3 \text{ jalan}}$  D,



- Lewat B =  $2 \times 3 = 6$  cara
  - Lewat C =  $4 \times 3 = 12$  cara
  - Lewat B kemudian C =  $2 \times 2 \times 3 = 12$  cara
  - Lewat C kemudian B =  $4 \times 2 \times 3 = 24$  cara
- Jadi, banyak jalan =  $6 + 12 + 12 + 24 = 54$  cara

**Jawaban: D****16. Pembahasan:**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Banyak pelajar seluruhnya  $n(S) = 30$

Banyak pelajar pria = 10

Banyak pelajar pria memakai arloji = 5

Banyak pelajar wanita  $n(A) = 20$

Banyak pelajar wanita tidak memakai arloji

$$n(A \cap B) = 10$$

Banyak pelajar yang memakai arloji  $n(B) = 15$

Peluang terpilih wanita atau memakai arloji =  
Peluang wanita + peluang memakai arloji – pe-  
luang wanita tidak memakai arloji  
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$= \frac{20}{30} + \frac{15}{30} - \frac{10}{30} = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

**Jawaban: E**

**17. Pembahasan:**

Untuk membuat segitiga, harus menghubungkan tiga titik sembarang. Jika terdapat delapan titik pada bidang datar maka banyak segitiga yang dapat dibuat adalah:

$$C_3^8 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3! 5!} = 56$$

**Jawaban : A**

**18. Pembahasan:**

Dari 26 huruf alfabet dipilih satu per satu 8 huruf sembarang dengan cara pengambilan.

- Banyak cara SIMAKUI terbentuk dari 7 huruf S I M A K U I pertama:  $\boxed{I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad 26} = 26$
- Banyak cara SIMAKUI terbentuk dari 7 huruf terakhir:  $\boxed{26 \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I \quad I} = 26$
- Total cara terbentuk SIMAKUI dalam satu rangkaian tidak terpisah dari 8 pengambilan  
 $= 26 + 26 = 52$
- $n(s) = 26^8$
- $P(A) = \frac{n(A)}{n(s)} = \frac{52}{26^8}$

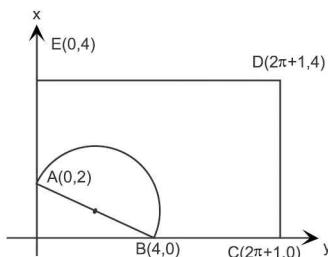
**Jawaban: B**

**19. Pembahasan:**

Dari rumah nomor 1 sampai 150 terdapat rumah yang menggunakan angka 8,  
8, 18, 28, ....78 = ada 8 angka  
80, 81, 82, ...89 = ada 10 angka  
98, 108, 118, ... 148 = ada 6

Sehingga, banyak rumah seluruhnya,  $8 + 10 + 6 = 24$

**Jawaban: D**

**Catatan****20. Pembahasan:**

Peluang sudut APB berukuran tumpul?

$$P = \frac{L_{\frac{1}{2}} \odot}{LABCDE} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \pi (\sqrt{5})^2}{(2\pi+1)4 - 4} = \frac{\frac{1}{2}\pi \cdot 5}{8\pi} = \frac{5}{16}$$

**Jawaban: D**

**21. Pembahasan:**

Diketahui:

Enam orang bepergian dengan dua mobil yang dikendarai oleh pemiliknya dua orang di antaranya, masing-masing mobil berkapasitas 5 orang.

Banyak kemungkinan cara menyusun penumpang adalah:

- Mobil A berisi 1 orang dan mobil B berisi 5 orang:  
1 kemungkinan.
- Mobil A berisi 2 orang dan mobil B berisi 4 orang:

$${}_4 C_1 = \frac{4!}{1!(4-1)!} = 4$$

- Mobil A berisi 3 orang dan mobil B berisi 3 orang:

$${}_4 C_2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{3 \times 4}{1 \times 2} = 6$$

- Mobil A berisi 4 orang dan mobil B berisi 2 orang:

$${}_4 C_3 = \frac{4!}{3!(4-3)!} = 4$$

- Mobil A berisi 5 orang dan mobil B berisi 1 orang:  
1 kemungkinan

Banyak seluruh kemungkinan:

$$1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$$

**Jawaban: D**

**22. Pembahasan:**

Dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, dan 7 disusun bilangan yang terdiri atas 3 angka berbeda yang kurang dari 500.

Dengan kaidah pencacahan maka:

Pada digit ratusan: angka yang dapat dipilih adalah angka 1, 2, 3, 4 (ada 4 pilihan).

Pada digit puluhan: angka yang dapat dipilih, yaitu semua angka berkurang satu, karena satu angka sudah dipilih pada digit ratusan (ada 6 pilihan).

Pada digit satuan: angka yang dapat dipilih adalah dari semua angka berkurang dua, karena sudah digunakan pada digit ratusan dan puluhan (ada 5 pilihan).

Jadi, banyak cara seluruhnya adalah:  $4 \times 6 \times 5 = 120$  cara.

**Jawaban: A**

**23. Pembahasan:**

Suatu susunan tanpa memperhatikan urutannya merupakan suatu **kombinasi**.

Kombinasi  $k$  unsur dari  $n$  unsur dirumuskan:

$${}^n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Banyak segitiga yang dapat dibuat dari sepuluh titik yang terdapat pada bidang datar dan tidak ada tiga titik yang segaris adalah:

$${}^{10} C_3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3!.7!}$$

$$= \frac{8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 120$$

**Jawaban: C**

**Catatan****24. Pembahasan:**

$$\text{Peluang kejadian A} = \frac{\text{banyak kejadian A}}{\text{ruang sampel}}$$

Diketahui:

Di dalam sebuah kotak terdapat 11 bola yang terdiri atas:

3 bola biru

6 bola merah

2 bola putih

Diambil 7 bola tanpa pengembalian maka:

Banyak semua kejadian yang mungkin (ruang sampel) =

$${}_{11}C_7 = \frac{11!}{7!(11-7)!}$$

$$= \frac{8 \times 9 \times 10 \times 11}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 330$$

Banyak kemungkinan terambil satu bola putih:

$${}_2C_1 = \frac{2!}{1!(2-1)!} = 2$$

Banyak kemungkinan terambil tiga bola merah:

$${}_6C_3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{4 \times 5 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 20$$

Banyak kemungkinan terambil tiga bola biru:

$${}_3C_3 = 1$$

Jadi, peluang terambilnya bola merah tiga kali banyak bola putih adalah:

banyak seluruh kemungkinan

ruang sampel

$$= \frac{{}_2C_1 \cdot {}_6C_3 \cdot {}_3C_3}{{}_{11}C_7} = \frac{2 \times 20 \times 1}{330} = \frac{4}{33}$$

**Jawaban: B**

**25. Pembahasan:**

Dipilih 6 orang dari 5 pria dan 4 wanita:

- 3 pria 3 wanita:

$$C_3^5 \cdot C_3^4 = \frac{5!}{2!3!} \cdot \frac{4!}{3!1!} = 10 \times 4 = 40$$

- 4 pria dan 2 wanita:

$$C_4^5 \cdot C_2^4 = \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = 5 \times 6 = 30$$

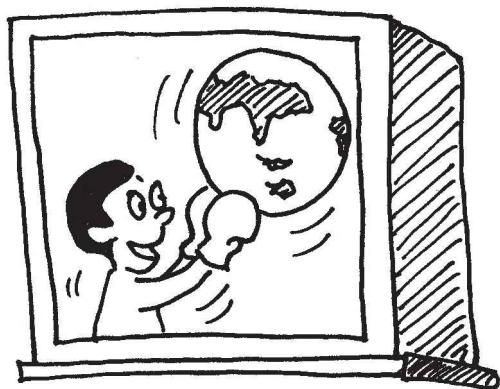
- 5 pria dan 1 wanita:

$$C_5^5 \cdot C_1^4 = 1 \cdot \frac{4!}{1!3!} = 1 \times 4 = 4$$

Jadi, banyak susunan perwakilan dengan se-kurang-kurangnya terpilih 3 pria adalah:

$$40 + 30 + 4 = 74$$

**Jawaban: D**



$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$
$$y = ut \sin(\alpha) - 1/2 gt^2$$

$$Ra + 40a + 0 = 0$$

9

$$va + vb = u$$

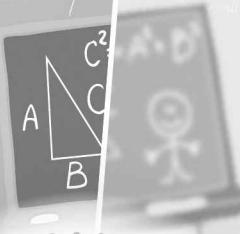
$$(1-e^{t/2})^2$$

$$ab = 1/2 u(1-e^{-t/2})$$

$$2u(1+e^{-t/2})$$

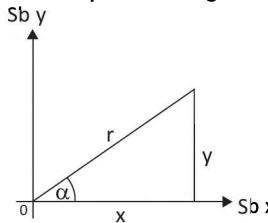
$$-1/2eu(1+e^{-t/2})$$

# TRIGONOMETRI



## A Rumus Perbandingan Trigonometri

Rumus perbandingan trigonometri adalah sebagai berikut:



- $\sin \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi miring}} = \frac{y}{r}$
- $\cos \alpha = \frac{\text{sisi samping}}{\text{sisi miring}} = \frac{x}{r}$
- $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{sisi depan}}{\text{sisi samping}} = \frac{y}{x}$

$$\bullet \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{r}{y}$$

$$\bullet \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{r}{x}$$

$$\bullet \cotan \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{x}{y}$$

dan berlaku teorema Pythagoras, yaitu:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Dengan menggunakan hubungan Pythagoras:  
 $r^2 = x^2 + y^2$  diperoleh:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cotan^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

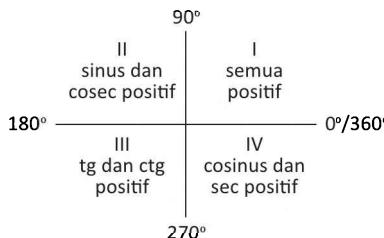
**B**

## Nilai-nilai Sudut Istimewa

Nilai fungsi trigonometri untuk sudut-sudut istimewa adalah sebagai berikut:

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
<b>sin</b>	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
<b>cos</b>	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
<b>tan</b>	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$

### KUADRAN



Untuk menentukan nilai fungsi trigonometri sudut istimewa yang lebih dari  $90^\circ$  dapat digunakan rumusan relasi kuadran di bawah ini!

$$\text{Sudut} = (\alpha \pm k \cdot 90^\circ)$$

Dengan ketentuan:

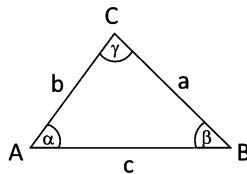
- $k$  genap maka fungsi tetap:
  - $\sin \Rightarrow \sin$
  - $\cos \Rightarrow \cos$
  - $\tan \Rightarrow \tan$
- $k$  ganjil maka fungsi berubah:
  - $\sin \Rightarrow \cos$
  - $\cos \Rightarrow \sin$
  - $\tan \Rightarrow \cotan$

**Tanda negatif dan positif tergantung kuadran fungsi asal.**



## Dalil-dalil dalam Segitiga

Perhatikan gambar berikut!



- Dalil Sinus

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

- Dalil Kosinus

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

- Luas Segitiga ABC

$$L = \frac{1}{2} b.c.\sin \alpha = \frac{1}{2} a.c.\sin \beta = \frac{1}{2} a.b.\sin \gamma$$



## Rumus Penjumlahan Sudut

$$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$$

$$\tan(a \pm b) = \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \cdot \tan b}$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\cos 2a = 2 \cos^2 a - 1$$

$$\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$1 + \tan^2 a = \sec^2 a$$

## E

# Rumus Jumlah, Selisih, Kali, dan Bagi.

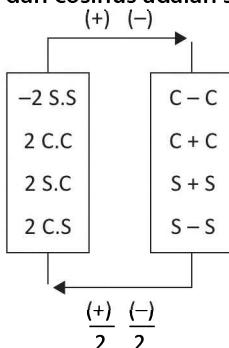
- $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$
- $\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$
- $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)$
- $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$
- $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2 \cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $-2 \sin A \sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

## F

# Rumus-rumus Praktis

### Hubungan perkalian dan penjumlahan

Cara praktis menghafal rumus perkalian, penjumlahan, dan pengurangan sinus dan cosinus adalah sebagai berikut:



Contoh:

- $2 \sin A \cdot \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{(A+B)}{2} \cdot \cos \frac{(A-B)}{2}$

### Catatan:

1. Perkalian antara dua fungsi yang sama menjadi penjumlahan/pengurangan fungsi kosinus.
2. Perkalian dua fungsi yang berbeda menjadi penjumlahan/pengurangan fungsi sinus.



## Persamaan Trigonometri

$$\sin x^\circ = \sin p^\circ \rightarrow \begin{cases} x_1^\circ = p^\circ + n \cdot 360^\circ \\ x_2^\circ = (180 - p)^\circ + n \cdot 360^\circ \end{cases}$$

$$\cos x^\circ = \cos p^\circ \rightarrow x^\circ = \pm p^\circ + n \cdot 360^\circ$$

$$\operatorname{tg} x^\circ = \operatorname{tg} p^\circ \rightarrow x^\circ = p^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$$\operatorname{cotan} x^\circ = \operatorname{cotan} p^\circ \rightarrow x^\circ = p^\circ + n \cdot 180^\circ$$

$x \in \mathbb{R}$ (bilangan nyata),  $n \in \mathbb{B}$ (bilangan bulat  $+, -, 0$ )



## Persamaan $A \sin x + B \cos x$

1. Bentuk  $a \sin x + b \cos x = k \cos(x - A)$

Maka akan dipenuhi:

$$k = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dan } \operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$$

2. Maksimum dan minimum  $a \sin x + b \cos x$

$$\text{Nilai maks} = |k|$$

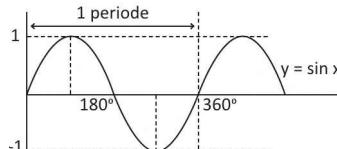
$$\text{Nilai min} = -|k|$$



## Fungsi Trigonometri dan Grafiknya

Grafik dari fungsi dasar trigonometri adalah sebagai berikut:

- $y = \sin x$

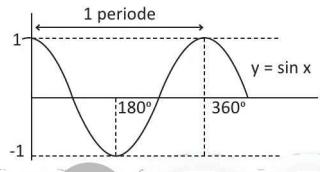


$$y \text{ maksimum} = 1$$

$$y \text{ minimum} = -1$$

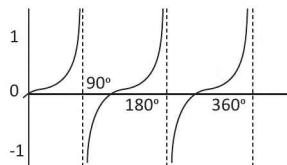
$$\text{satu periode} = 360^\circ$$

- $y = \cos x$



$y$  maksimum = 1  
 $y$  minimum = -1  
 satu periode =  $360^\circ$

- $y = \tan x$



$y$  maksimum =  $\infty$   
 $y$  minimum =  $-\infty$   
 satu periode =  $180^\circ$

Fungsi:

$$\begin{aligned}
 y &= k \sin r(x \pm \theta) + c \\
 y &= k \cos r(x \pm \theta) + c \\
 y &= k \operatorname{tg} r(x \pm \theta) + c \\
 y &= k \operatorname{ctg} r(x \pm \theta) + c
 \end{aligned}$$

- Untuk semua sinus dan kosinus

- Periode  $P = \frac{360^\circ}{|r|}$  atau  $P = \frac{2\pi}{|r|}$
- Nilai maksimum  $y = |k| + c$
- Nila minimum  $y = -|k| + c$
- Nilai belok  $y = c$

- Untuk tangen dan cotangen

- Periode  $P = \frac{180^\circ}{|r|}$  atau  $P = \frac{\pi}{|r|}$

Pertidaksamaan trigonometri:

Bentuk dasar:	$\sin x \geq a$	$\sin x \leq a$
	$\cos x \geq a$	$\cos x \leq a$
	$\operatorname{tg} x \geq a$	$\operatorname{tg} x \leq a$

Untuk menyelesaikan soal model pertidaksamaan trigonometri paling mudah menggunakan bantuan grafik fungsi trigonometri.

Pertidaksamaan trigonometri umumnya dibatasi  $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ .





# PAKET SOAL

## SOAL UM UGM TKDU

1. Jika  $1 - \cot \alpha = -\frac{1}{3}$  maka nilai  $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \dots$
- A.  $\frac{17}{25}$       D.  $\frac{31}{25}$   
B. 1      E.  $\frac{7}{5}$   
C.  $\frac{6}{5}$

Catatan

## SOAL SNMPTN SAINTEK

2.  $\cot 105^\circ \tan 15^\circ = \dots$
- A.  $-7 + 4\sqrt{3}$       D.  $-7 - 4\sqrt{3}$   
B.  $7 + 4\sqrt{3}$       E.  $-7 + 2\sqrt{3}$   
C.  $7 - 4\sqrt{3}$

## SOAL UN SMA IPA

3. Diketahui nilai  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{5}$  dan  
 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5}$  untuk  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  dan  
 $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ . Nilai  $\sin(\alpha + \beta) = \dots$
- A.  $-\frac{3}{5}$       D.  $\frac{1}{5}$   
B.  $-\frac{2}{5}$       E.  $\frac{3}{5}$   
C.  $-\frac{1}{5}$

**Catatan****SOAL SIMAK UI MATDAS**

4. Jika diketahui bahwa  $\cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{x+1}{2x}}$  maka

$$x^2 = \frac{1}{x^2} = \dots$$

- A.  $\tan^2 \theta + \sin^2 \theta$       D.  $\cos^2 \frac{1}{2}\theta + \tan^2 \frac{1}{2}\theta$   
B.  $\tan^2 \theta - \sin^2 \theta$       E.  $\sin^2 \frac{1}{2}\theta + \tan^2 \frac{1}{2}\theta$   
C.  $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

**SOAL SNMPTN SAINTEK**

5. Diketahui  $\sin A + \sin B = 1$  dan  $\cos A + \cos B = \sqrt{\frac{5}{3}}$ .

Nilai  $(A - B) = \dots$

- A.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$   
B.  $\frac{1}{2}$       E. 1  
C.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

**SOAL UN SMA IPA**

6. Nilai dari  $\sin 145^\circ - \sin 35^\circ - \sin 45^\circ = \dots$

- A.  $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$       D.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$   
B.  $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$       E.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$   
C.  $\frac{1}{2}$

**SOAL SNMPTN SAINTEK**

7. Jika  $\sin \alpha - \sin \beta = \sqrt{A}$  dan  
 $\cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{B}$  maka  $\cos(\alpha + \beta) = \dots$

A.  $A+B-1$

D.  $\frac{A+B-2}{2}$

B.  $\frac{A+B-1}{2}$

E.  $\frac{A+B-2}{4}$

C.  $A+B-2$

**Catatan**

**SOAL UN SMA IPA**

8. Nilai dari  $\frac{\sin 125^\circ + \sin 35^\circ}{\cos 125^\circ - \cos 35^\circ} = \dots$

A.  $-1$

D.  $1$

B.  $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E.  $2$

C.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

**SOAL UN SMA IPA**

9. Nilai  $\frac{\cos 140^\circ - \cos 100^\circ}{\sin 140^\circ - \sin 100^\circ} = \dots$

A.  $-\sqrt{3}$

D.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

B.  $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

E.  $\sqrt{3}$

C.  $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

**SOAL UM UGM MATDAS**

10. Nilai  $x$  yang memenuhi  $\cos 3x > \frac{1}{2}$  untuk

$0^\circ \leq x \leq 180^\circ$  adalah ....

A.  $0^\circ < x < 20^\circ$  atau  $90^\circ < x < 140^\circ$

B.  $0^\circ \leq x < 20^\circ$  atau  $100^\circ < x < 140^\circ$

C.  $0^\circ \leq x \leq 20^\circ$  atau  $100^\circ < x < 140^\circ$

D.  $20^\circ < x < 100^\circ$  atau  $140^\circ < x < 180^\circ$

E.  $30^\circ < x < 100^\circ$  atau  $140^\circ < x < 180^\circ$

**SOAL UN SMA IPA**

11. Himpunan penyelesaian persamaan  $\cos 2x^\circ - \sin x^\circ - 1 = 0$  untuk  $0 < x < 360$  adalah ....
- A.  $\{180, 210, 330\}$       D.  $\{60, 120, 180\}$   
B.  $\{30, 150, 180\}$       E.  $\{120, 240, 300\}$   
C.  $\{150, 180, 330\}$

**SOAL UM UGM K.IPA**

12. Jika  $\tan 2a = 4 \sin a \cos a$  untuk  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$  maka  $\cos a =$  ....
- A.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$       D.  $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$   
B.  $\frac{1}{2}$       E.  $-\frac{1}{2}$   
C. 0

**SOAL SIMAK UI SAINTEK**

13. Nilai dari  $\sin 6^\circ - \sin 42^\circ - \sin 66^\circ + \sin 78^\circ$  adalah ....
- A. -1      D.  $\frac{1}{2}$   
B.  $-\frac{1}{2}$       E. 1  
C. 0

**SOAL SNMPTN SAINTEK**

14. Jika dalam segitiga ABC diketahui
- $5 \sin A + 12 \cos B = 13$  dan  $5 \cos A + 12 \sin B = 6\sqrt{2}$ ,  
maka  $\sin C =$  ....
- A.  $\frac{1}{2}$       D.  $\sqrt{3}$   
B.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$       E.  $\frac{3}{5}$   
C.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

**SOAL SNMPTN MAT.IPA**

15. 
$$\frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)^2} = \dots$$

A.  $\frac{1}{1-\cos 2x}$

D.  $\frac{1+2\sin x}{1-2\sin x}$

B.  $\frac{1}{1-\sin 2x}$

E.  $\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$

C.  $\frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$

**SOAL SIMAK UI MATDAS**16. Jika  $\cos(2x) + \cos(4x) = \frac{1}{2}$  maka

$$\sin(4x) + 2\sin(6x) + \sin(8x) = \dots$$

- A.  $\sin(2x) + \sin(4x)$       D.  $\cos(2x) + \cos(4x)$   
B.  $\sin(x) + \sin(2x)$       E.  $\sin(2x) + \cos(4x)$   
C.  $\cos(x) + \cos(2x)$

**SOAL SIMAK UI MATDAS**17. Persamaan  $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 - p$  dapat dicari penyelesaiannya apabila  $p$  memenuhi....

- A.  $-4 \leq p \leq 0$       D.  $p \leq -2$  atau  $p \geq 2$   
B.  $0 \leq p \leq 4$       E.  $-2 \leq p \leq 0$   
C.  $-4 \leq p \leq 2$

**SOAL SIMAK UI SAINTEK**18. Untuk  $-2\pi < x \leq \pi$ , banyaknya nilai  $x$  yang memenuhi persamaan  $\cos(1,5\pi + \pi) = \sqrt{2} \sin(x + \pi) \cdot \cos x$  adalah ....

- A. 8      D. 2  
B. 6      E. 1  
C. 3

**SOAL UN SMA IPA**19. Diketahui  $(A + B) = \frac{\pi}{2}$  dan  $\sin A \sin B = \frac{1}{4}$ . Nilai dari

$$\cos(A - B) = \dots$$

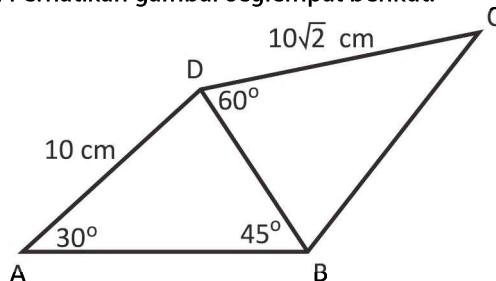
- A. 1      D.  $\frac{3}{4}$   
B.  $-\frac{1}{2}$       E. 1  
C.  $\frac{1}{2}$

**SOAL UN SMA IPA**20. Nilai dari  $\sin 75^\circ - \sin 165^\circ$  adalah ...

- A.  $\frac{1}{4}\sqrt{2}$       D.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$   
B.  $\frac{1}{4}\sqrt{3}$       E.  $\frac{1}{2}\sqrt{6}$   
C.  $\frac{1}{4}\sqrt{6}$

**SOAL UN SMA IPA**

21. Perhatikan gambar segiempat berikut!



Panjang BC adalah ....

- A.  $4\sqrt{2}$  cm      D.  $5\sqrt{6}$  cm  
B.  $6\sqrt{2}$  cm      E.  $7\sqrt{6}$  cm  
C.  $7\sqrt{3}$  cm

**SOAL UN SMA IPA**

22. Luas segi dua belas beraturan dengan panjang jari-jari lingkaran luar 12 cm adalah ...

- A.  $36 \text{ cm}^2$       D.  $432 \text{ cm}^2$   
B.  $36\sqrt{3} \text{ cm}^2$       E.  $432\sqrt{3} \text{ cm}^2$   
C.  $144 \text{ cm}^2$

**SOAL SNMPTN MAT IPA**23. Nilai  $\sqrt{3} \sin x - \cos x < 0$ , jika ...

- A.  $\frac{7\pi}{6} < x < \frac{11\pi}{7}$       D.  $\frac{\pi}{6} < x < \frac{9\pi}{6}$   
B.  $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{7\pi}{6}$       E.  $\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{4}$   
C.  $\frac{5\pi}{6} < x < \frac{10\pi}{7}$

## **SOAL SIMAK UI MAT IPA**

24. Jika nilai maksimum dari  $\frac{m}{15 \sin x - 8 \cos x + 25}$

adalah 2 maka nilai  $m$  adalah ....



## **SOAL UN SMA IPA**

25. Nilai  $x$  yang memenuhi persamaan

$2\cos(2x - 60)^\circ = \sqrt{3}$  untuk  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$  adalah

•

- A.  $20^\circ$       D.  $60^\circ$   
B.  $30^\circ$       E.  $90^\circ$   
C.  $45^\circ$

Catatan



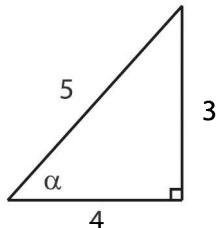
# Pembahasan

Catatan

## 1. Pembahasan:

$$1 - \cot \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{4}{3}$$

Segitiga bantu:



$$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1$$

$$\begin{aligned}&= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} + 2 \cdot \frac{16}{25} - 1 \\&= \frac{24 + 32 - 25}{25} \\&= \frac{31}{25}\end{aligned}$$

Jawaban: D

## 2. Pembahasan:

$$2 \cos A \cdot \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

$$2 \sin A \cdot \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

Nilai dari:  $\cot 105^\circ \cdot \tan 15^\circ$

$$= \frac{\cos 105^\circ}{\sin 105^\circ} \cdot \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} (\sin(105^\circ + 15^\circ) - \sin(105^\circ - 15^\circ))}{\frac{1}{2} (\sin(105^\circ + 15^\circ) + \sin(105^\circ - 15^\circ))}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}-1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}+1} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}-2}{\frac{1}{2}\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} \\
 &= \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2} \cdot \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-2} \\
 &= \frac{3-4\sqrt{3}+4}{3-4} = \frac{7-4\sqrt{3}}{-1} = -7+4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: A****3. Pembahasan:**

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

Diketahui:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{5};$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{3}{5},$$

$$\Rightarrow \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} - \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{5} - \frac{3}{5} = -\frac{2}{5}$$

Jadi, nilai dari

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \frac{1}{5} + \left( -\frac{2}{5} \right) = -\frac{1}{5}$$

**Jawaban: C**

## Catatan

### 4. Pembahasan:

$$\cos \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos A)} \text{ dan}$$

$$\sin \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos A)}$$

$$\text{Diketahui: } \cos \frac{1}{2}\theta = \sqrt{\frac{x+1}{2x}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\text{Sehingga, } \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos \theta)}$$

$$\text{Kesimpulan: } \cos \theta = \frac{1}{x}, \text{ atau } x = \sec \theta$$

$$x^2 - \frac{1}{x^2} = \sec^2 \theta - \cos^2 \theta$$

$$= \tan^2 \theta + 1 - \cos^2 \theta \quad \left\{ \sec^2 \theta = \tan^2 \theta + 1 \right\}$$

$$= \tan^2 \theta + \sin^2 \theta \quad \left\{ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \right\}$$

Jawaban: A

### 5. Pembahasan:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\cos(A - B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

Diketahui:

- $\sin A + \sin B = 1$

$$\Rightarrow (\sin A + \sin B)^2 = \sin^2 A + \sin^2 B + 2 \sin A \cdot \sin B$$

$$\Rightarrow 1 = \sin^2 A + \sin^2 B + 2 \sin A \cdot \sin B$$

- $\cos A + \cos B = \sqrt{\frac{5}{3}}$

$$\Rightarrow (\cos A + \cos B)^2 = \cos^2 A + \cos^2 B + 2 \cos A \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} = \cos^2 A + \cos^2 B + 2 \cos A \cdot \cos B$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \sin^2 B + 2\sin A \cdot \sin B &= 1 \\ \cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A \cdot \cos B &= \frac{5}{3} \\ \hline 1+1+2(\sin A \cdot \sin B + \cos A \cdot \cos B) &= 1\frac{5}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2(\cos(A-B)) = 2\frac{2}{3} - 2$$

$$\Rightarrow \cos(A-B) = \frac{2}{3} : 2$$

$$\Rightarrow \cos(A-B) = \frac{1}{3}$$

**Jawaban: A**

**6. Pembahasan:**

$$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\sin\frac{1}{2}(A-B)$$

$$\text{Hasil dari } \sin 145^\circ - \sin 35^\circ - \sin 45^\circ$$

$$= 2\cos\frac{1}{2}(145^\circ + 35^\circ)\sin\frac{1}{2}(145^\circ - 35^\circ) - \sin 45^\circ$$

$$= 2\cos 90^\circ \cdot \sin 55^\circ - \sin 45^\circ$$

$$= 2 \cdot 0 \cdot \sin 55^\circ - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$= 0 - \frac{1}{2}\sqrt{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

**Jawaban: B**

**7. Pembahasan:**

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B$$

## Catatan

- $\sin \alpha - \sin \beta = \sqrt{A}$   
 $\Rightarrow (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = (\sqrt{A})^2$   
 $\Rightarrow \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = A \dots \text{(i)}$
- $\cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{B}$   
 $\Rightarrow (\cos \alpha + \cos \beta)^2 = (\sqrt{B})^2$   
 $\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = B \dots \text{(ii)}$

Dari persamaan (i) dan (ii):

$$\begin{array}{r} \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta = A \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = B \\ \hline \end{array} +$$

$$1 + 1 - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta + 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta = A + B$$

$$\Rightarrow 2 + 2(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) = A + B$$

$$\Rightarrow 2(\cos(\alpha + \beta)) = A + B - 2$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = \frac{A + B - 2}{2}$$

**Jawaban: D**

### 8. Pembahasan:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

Nilai dari  $\frac{\sin 125^\circ + \sin 35^\circ}{\cos 125^\circ - \cos 35^\circ}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2 \sin \frac{1}{2}(125^\circ + 35^\circ) \cos \frac{1}{2}(125^\circ - 35^\circ)}{-2 \sin \frac{1}{2}(125^\circ + 35^\circ) \sin \frac{1}{2}(125^\circ - 35^\circ)} \\
 &= \frac{2 \sin 80^\circ \cos 45^\circ}{-2 \sin 80^\circ \sin 45^\circ} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{-\frac{1}{2}\sqrt{2}} = -1
 \end{aligned}$$

**Jawaban: A****9. Pembahasan:**

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$$

$$\frac{\cos 140^\circ - \cos 100^\circ}{\sin 140^\circ - \sin 100^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(140^\circ + 100^\circ) \sin \frac{1}{2}(140^\circ - 100^\circ)}{2 \cos \frac{1}{2}(140^\circ + 100^\circ) \sin \frac{1}{2}(140^\circ - 100^\circ)} \\
 &= \frac{-2 \sin \frac{1}{2}(240^\circ)}{2 \cos \frac{1}{2}(240^\circ)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ}$$

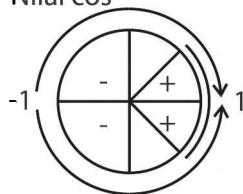
$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \times \left(-\frac{2}{1}\right) = \sqrt{3}$$

**Jawaban: E**

## Catatan

### 10. Pembahasan:

Nilai cos



$$0^\circ \leq x \leq 180^\circ$$

$$\cos 3x > \frac{1}{2}$$

$$0 \leq 3x < 60^\circ \text{ atau } 300^\circ < 3x < 420^\circ$$

$$0^\circ \leq x < 20^\circ \text{ atau } 100^\circ < x < 140^\circ$$

Jawaban: B

### 11. Pembahasan:

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

Diketahui:

$$\text{Persamaan } \cos 2x - \sin x - 1 = 0 ; 0 < x < 360^\circ$$

$$\Rightarrow (1 - 2\sin^2 x) - \sin x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow -2\sin^2 x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow -\sin x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow -\sin x = 0 \text{ atau } 2\sin x + 1 = 0$$

$$x = 180^\circ \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 210^\circ, 330^\circ$$

$$\text{Jadi, HP} = \{180^\circ, 210^\circ, 330^\circ\}$$

Jawaban: A

### 12. Pembahasan:

$$\tan 2\alpha = 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{2 \cos^2 \alpha - 1} = 4 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{1}{2\cos^2 \alpha - 1} = 2$$

$$4\cos^2 \alpha - 2 = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Karena

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \text{ [di kuadran II]}, \text{ dipilih } \cos \alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

**Jawaban: D**

### 13. Pembahasan:

$$\begin{aligned} \square \quad & \sin 6^\circ - \sin 42^\circ - \sin 66^\circ + \sin 78^\circ \\ &= -[\sin 66^\circ - \sin 6^\circ] + \sin 78^\circ - \sin 42^\circ \\ &= -2 \cdot \cos 36^\circ \sin 30^\circ + 2 \cos 60^\circ \sin 18^\circ \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 36^\circ + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 18^\circ \\ &= -\cos 36^\circ + \sin 18^\circ \\ &= -[1 - 2 \sin^2 18^\circ] + \sin 18^\circ \\ &= 2 \sin^2 18^\circ + \sin 18^\circ - 1 \end{aligned}$$

Bila  $x = 18^\circ$  maka  $5x = 90^\circ$

Berlaku:  $\sin 3x = \cos 2x$

$$\sin(2x + x) = \cos 2x$$

$$\sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = \cos 2x$$

$$\sin 2x \cdot \cos x = \cos 2x [1 - \sin x]$$

$$\frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

$$\frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 - \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \sin x}{1 + \sin x}$$

$$\frac{2\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos x (1 + \sin x)}$$

$$\frac{2\sin x \cdot \cancel{\cos x}}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos x} (1 + \sin x)}$$

$$2\sin x + 2\sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$3\sin^2 x + 2\sin x = \cos^2 x$$

$$3\sin^2 x + 2\sin x = 1 - \sin^2 x$$

$$4\sin^2 x + 2\sin x - 1 = 0$$

## Catatan

Dengan rumus abc:

$$\sin x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-1)}}{2 \cdot 4} = \frac{-1 \pm 2\sqrt{5}}{2 \cdot 4}$$

Karena  $x = 18^\circ$  di kuadran I maka:

$$\sin x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}$$

□ Dengan demikian:

$$\begin{aligned} & 2\sin^2 18^\circ + \sin 18^\circ - 1 \\ &= 2 \cdot \left[ -\frac{1}{4}(1 - \sqrt{5}) \right]^2 + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} - 1 \\ &= \frac{2}{16}(1 - 2\sqrt{5} + 5) + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} - 1 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4} - 1 \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jawaban: B

### 14. Pembahasan:

- $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
- Pada sebuah segitiga ABC, maka:  
$$\begin{aligned} \sin C &= \sin(A + B) \\ &= \sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B \end{aligned}$$

Pada sebuah segitiga ABC, dengan:

- $5\sin A + 12\cos B = 13$   
$$\Rightarrow (5\sin A + 12\cos B)^2 = 13^2$$
  
$$\Rightarrow 25\sin^2 A + 144\cos^2 B + 120\sin A \cdot \cos B = 169$$
  
... (i)
- $5\cos A + 12\sin B = 6\sqrt{2}$   
$$\Rightarrow (5\cos A + 12\sin B)^2 = (6\sqrt{2})^2$$
  
$$\Rightarrow 25\cos^2 A + 144\sin^2 B + 120\cos A \cdot \sin B = 72$$
  
... (ii)



Dari (i) dan (ii) jika dijumlahkan, maka:

$$25\sin^2 A + 144\cos^2 B + 120\sin A \cdot \cos B = 169$$

$$\frac{25\cos^2 A + 144\sin^2 B + 120\cos A \cdot \sin B = 72}{25(\sin^2 A + \cos^2 A) + 144(\cos^2 B + \sin^2 B)} +$$

$$+ 120(\sin A \cdot \cos B + \cos A \cdot \sin B) = 241$$

$$\Rightarrow 25(1) + 144(1) + 120(\sin(A+B)) = 241$$

$$\Rightarrow 25 + 144 + 120(\sin C) = 241$$

$$\Rightarrow 120(\sin C) = 241 - 25 - 144$$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$$

**Jawaban: E**

**15. Pembahasan:**

$$\begin{aligned} \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)^2} &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x} \\ &= \frac{1 + 2\sin x \cos x}{1 - 2\sin x \cos x} \\ &= \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} \end{aligned}$$

**Jawaban : E**

**16. Pembahasan:**

$$2\sin A \cdot \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2\cos A \cdot \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

- $\frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2}$  (dikali)  $2\sin 4x$

$$2\sin 4x \cdot \cos 2x + 2\sin 4x \cdot \cos 4x = \sin 4x$$

$$\sin(4x+2x) + \sin(4x-2x) + \sin(4x+4x)$$

$$+ \sin(4x-4x) = \sin 4x$$

$$\sin 6x + \sin 2x + \sin 8x + \sin 0 = \sin 4x$$

$$\sin 6x + \sin 2x + \sin 8x = \sin 4x$$

- $\frac{\cos 2x + \cos 4x}{2} = \frac{1}{2}$  (dikali)  $2\sin 2x$

## Catatan

$$\begin{aligned}2\sin 2x \cdot \cos 2x + 2\cos 4x \cdot \sin 2x &= \sin 2x \\ \sin(2x+2x) + \sin(2x-2x) + \sin(4x+2x) \\ -\sin(4x-2x) &= \sin 2x\end{aligned}$$

$$\sin 4x + \sin 0 + \sin 6x - \sin 2x = \sin 2x$$

$$\sin 4x + \sin 6x - \sin 2x = \sin 2x$$

- Dengan metode eliminasi maka:

$$\begin{array}{rcl}\sin 6x + \sin 2x + \sin 8x & = & \sin 4x \\ \hline \sin 4x + \sin 6x - \sin 2x & = & \sin 2x \\ \hline \sin 4x + 2\sin 6x + \sin 8x & = & \sin 2x + \sin 4x\end{array} +$$

**Jawaban: A**

### 17. Pembahasan:

$$a \sin x + b \cos x = k \cos(x - \alpha),$$

Dengan:

$$\bullet \quad k = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\bullet \quad \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x = 2 - p \Rightarrow k = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$2 \cos(x - \alpha) = 2 - p$$

Karena  $-1 \leq \cos(x - \alpha) \leq 1$ , diperoleh

$$-2 \leq 2 \cos(x - \alpha) \leq 2$$

$$-2 \leq 2 - p \leq 2$$

$$-4 \leq -p \leq 0$$

$$0 \leq p \leq 4$$

**Jawaban: B**

### 18. Pembahasan:

$$-2\pi < x \leq \pi$$

$$\cos(1,5\pi + x) = \sqrt{2} \sin(x + \pi) \cdot \cos x$$

$$\sin x = -\sqrt{2} \sin x \cos x$$

$$\sin x [1 + \sqrt{2} \cos x] = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ atau } \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$



$$x = \{-\pi, 0, \pi\} \text{ atau } x = \left\{ \frac{-5\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$$

Banyaknya nilai  $x$  yang memenuhi = 6

**Jawaban: B**

**19. Pembahasan:**

$$\text{Diketahui: } (A+B) = \frac{\pi}{3}; \sin A \cdot \sin B = \frac{1}{4}$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cdot \cos B \mp \sin A \cdot \sin B$$

Maka:

$$\cos(A+B) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \cos A \cdot \cos B - \sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos A \cdot \cos B - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Jadi,

$$\cos(A-B) = \cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

**Jawaban: E**

**20. Pembahasan:**

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\sin 75^\circ - \sin 165^\circ$$

$$= 2 \cos \frac{1}{2}(75^\circ + 165^\circ) \sin \frac{1}{2}(75^\circ - 165^\circ)$$

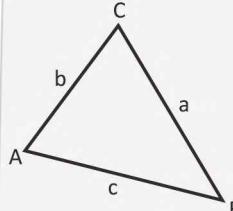
$$= 2 \cos 120^\circ \cdot \sin(-45^\circ)$$

$$= 2 \left( -\frac{1}{2} \right) \left( -\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

**Jawaban: D**

**Catatan****21. Pembahasan:**

Pada segitiga ABC sembarang, berlaku:

**Aturan sinus:**

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

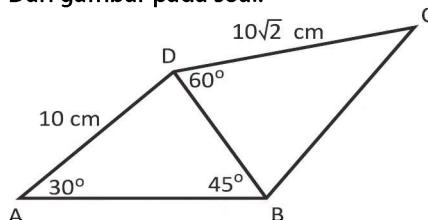
**Aturan cosinus:**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Dari gambar pada soal:



Perhatikan segitiga ABD! Dengan aturan sinus maka:

$$\frac{BD}{\sin 30} = \frac{10}{\sin 45}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{\frac{1}{2}} = \frac{10}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{1} = \frac{10}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow BD = 5\sqrt{2}$$

Perhatikan segitiga BCD, dengan panjang sisi

$$BD = 5\sqrt{2}$$

Dengan aturan cosinus maka:

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2.BD.CD \cos D$$

$$= (5\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2 - 2.5\sqrt{2}.10\sqrt{2}.\cos 60^\circ$$

$$= 50 + 200 - 200 \cdot \frac{1}{2} = 150$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{150} \text{ cm} = 5\sqrt{6} \text{ cm}$$

**Jawaban: D**

## 22. Pembahasan:

Luas segi-n dengan panjang jari-jari lingkaran luarnya r adalah:

$$n \times \frac{1}{2} r^2 \times \sin \frac{360^\circ}{n}$$

### Catatan

Diketahui:

Segi duabelas dengan jari-jari lingkaran luar 12 cm maka:

$$n = 12 \text{ dan } r = 12$$

Sehingga:

$$L = 12 \times \frac{1}{2} (12)^2 \times \sin \frac{360^\circ}{12}$$

$$= 12 \times 72 \times \sin 30^\circ$$

$$= 12 \times 72 \times \frac{1}{2} = 432 \text{ cm}^2$$

Jawaban: D

## 23. Pembahasan:

$$\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$$

$$\sqrt{3} \sin x = \cos x$$

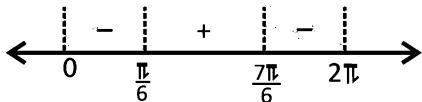
$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{\pi}{6} \text{ atau } x = \frac{7\pi}{6}$$

Jadi, penyelesaian yang memenuhi adalah

$$\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right\}$$



$$0 < x < \frac{\pi}{6} \text{ atau } \frac{7\pi}{6} < x < 2\pi$$

Jadi, jawaban yang memenuhi adalah A.

Jawaban : A

**Catatan****24. Pembahasan:**

$$a \sin x + b \cos x = k \cos(x - \alpha),$$

$$\text{dengan } k = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ dan } \tan \alpha = \frac{a}{b}$$

- $15 \sin x - 8 \cos x = \sqrt{15^2 + (-8)^2} \cos(x - \alpha)$   
 $= 17 \cos(x - \alpha)$

- Akibatnya,

$$\frac{m}{15 \sin x - 8 \cos x + 25} = \frac{m}{17 \cos(x - \alpha) + 25}$$

- Agar maksimum,  $\cos(x - \alpha) = -1$   
Karena nilai maksimum adalah 2, berlaku:

$$\frac{m}{17 \cdot (-1) + 25} = 2 \Leftrightarrow m = 2 \cdot 8 = 16$$

**Jawaban: B**

**25. Pembahasan:**

$$2 \cos(2x - 60)^\circ = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos(2x - 60)^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Karena  $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ , nilai cosinus di kuadran II negatif maka:

$$\cos(2x - 60)^\circ = \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow (2x - 60) = 30$$

$$\Rightarrow x = \frac{30^\circ + 60^\circ}{2} = 45^\circ$$

Jadi, himpunan penyelesaiannya  $45^\circ$ .

**Jawaban: C**

$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$
$$y = ut \sin(\alpha) - 1/2 gt^2$$

$$Ra + 40a + 0 = 0$$

10

$$va + vb = u$$

# PROGRAM LINEAR

$$(1-e^{1/2})^{1/2}$$

$$ab = 1/2(1+e)$$

$$2u(1+e)$$

$$-1/2eu(1+e)$$

$$1/2$$



## A Persamaan Garis

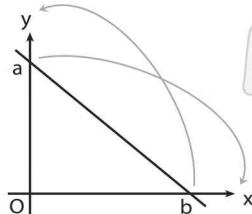
1. Melalui titik  $(x_1, y_1)$  dengan gradien m, berlaku:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

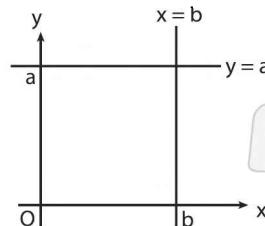
2. Garis yang melalui  $(x_1, y_1)$  dan  $(x_2, y_2)$ , berlaku:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

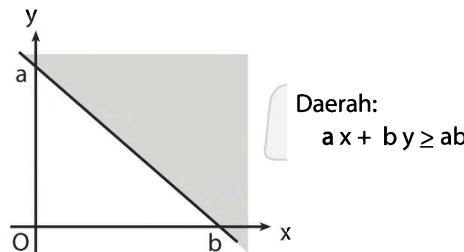
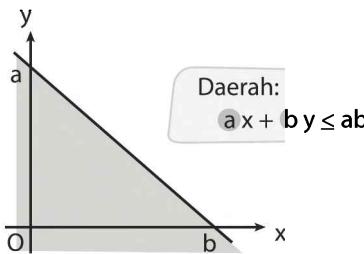
3. Memotong sumbu x dan sumbu y



Persamaannya:  
 $a x + b y = ab$



Persamaannya:  
 $x = b$  dan  $y = a$



Sumbu  $x \rightarrow$  garis  $y = 0$

Sumbu  $y \rightarrow$  garis  $x = 0$

## B

## Daerah Penyelesaian (DP)

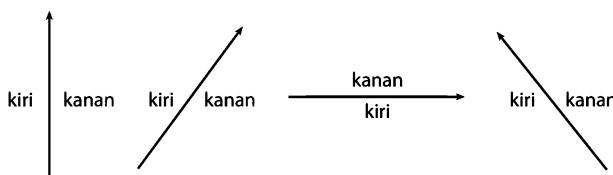
Langkah menentukan daerah penyelesaian

(DP) dari sistem pertidaksamaan linear  $Ax + By \geq C$  atau  $Ax + By \leq C$  adalah:

### Langkah Praktis

- 1) Gambar garis  $Ax + By = C$
- 2) Jika  $A > 0$  maka
  - Jika tandanya  $\geq$  maka DP-nya adalah sebelah **kanan garis**.
  - Jika tandanya  $\leq$  maka DP-nya adalah sebelah **kiri garis**.
- 3) Jika  $A < 0$ , maka
  - Jika tandanya  $\geq$  maka DP-nya adalah sebelah **kiri garis**.
  - Jika tandanya  $\leq$  maka DP-nya adalah sebelah **kanan garis**.

Yang dimaksud daerah **kanan** atau **kiri** dari sebuah garis adalah sebagai berikut:



### **Langkah Pengerjaan Soal**

1. Gambar garis-garis batasnya dan tentukan daerah penyelesaian (DP)-nya  
**(Lihat Langkah Praktis).**
2. Arsir yang **merupakan** daerah penyelesaian.
3. Daerah penyelesaian adalah daerah yang **dilalui oleh semua arsiran**.



## **Menentukan Nilai Optimum**

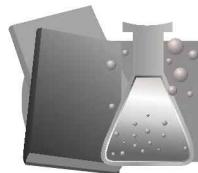


Langkah-langkah penyelesaian **model soal biasa**:

1. Gambar daerah himpunan penyelesaian
2. Tentukan titik pojoknya
3. Lakukan pengujian titik pojok untuk menentukan hasil optimum (maksimum atau minimum)

Langkah-langkah penyelesaian **model soal cerita**:

1. Tetapkan apa yang dianggap sebagai **variabel x dan y**.
2. Buatlah **model matematika** pembatasan masalah.
3. **Gambar** daerah himpunan penyelesaian.
4. Tentukan **titik pojoknya**.
5. Lakukan **pengujian titik pojok** untuk menentukan hasil optimum (maksimum atau minimum).



# PAKET SOAL

## Catatan

### SOAL UN SMA IPA

1. Luas daerah parkir  $1.760 \text{ m}^2$ . Luas rata-rata untuk mobil kecil  $4 \text{ m}^2$  dan mobil besar  $20 \text{ m}^2$ . Daya tampung maksimum hanya 200 kendaraan. Biaya parkir mobil kecil Rp1.000,00/jam dan mobil besar Rp2.000,00/jam. Jika dalam satu jam terisi penuh dan tidak ada kendaraan yang pergi dan datang, penghasilan maksimum tempat parkir adalah ....  
A. Rp176.000,00      D. Rp300.000,00  
B. Rp200.000,00      E. Rp340.000,00  
C. Rp260.000,00

### SOAL UN SMA IPA

2. Seorang pedagang sepeda ingin membeli 25 sepeda untuk persediaan. Ia ingin membeli sepeda gunung dengan harga Rp1.500.000,00 per buah dan sepeda balap dengan harga Rp2.000.000,00 per buah. Ia merencanakan tidak akan mengeluarkan uang lebih dari Rp42.000.000,00. Jika keuntungan sebuah sepeda gunung Rp500.000,00 dan sebuah sepeda balap Rp600.000,00 maka keuntungan maksimum yang diterima pedagang adalah ...  
A. Rp13.400.000,00      D. Rp10.400.000,00  
B. Rp12.600.000,00      E. Rp8.400.000,00  
C. Rp12.500.000,00

### SOAL UM UGM

3. Nilai minimum  $f(x, y) = 3 + 4x - 5y$  untuk  $x$  dan  $y$  yang memenuhi  $-x+y \leq 1$ ,  $x+2y \geq 5$  dan  $2x+y \leq 10$  adalah ....  
A. -19      D. -3  
B. -6      E. 23  
C. -5

### SOAL UN SMA IPS

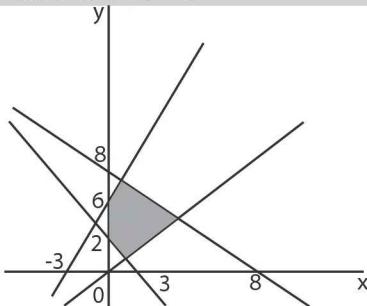
4. Tempat parkir seluas  $600 \text{ m}^2$  hanya mampu menampung 58 bus dan mobil. Tiap mobil membutuhkan tempat seluas  $6 \text{ m}^2$  dan bus menempati  $24 \text{ m}^2$ .

Model matematika yang memenuhi persamaan tersebut adalah ....

- A.  $x+y \leq 58$ ,  $x+4y \leq 100$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$
- B.  $x-y \leq 58$ ,  $x+4y \leq 100$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$
- C.  $x+y \leq 58$ ,  $x-4y \leq 100$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$
- D.  $x+y \leq 58$ ,  $x+4y \geq 100$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$
- E.  $x+y \geq 58$ ,  $x+4y \leq 100$ ,  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$

**SOAL SIMAK UI TKDU**

5.



Sistem pertidaksamaan yang himpunan penyelesaiannya merupakan daerah yang diarsir pada gambar di atas adalah ....

- A.  $x+y \leq 8$ ,  $2x+3y \geq 6$ ,  $y-2x \leq 6$ ,  
 $7x-8y \leq 0$ ,  $x \geq 0$
- B.  $x+y \leq 8$ ,  $2x+3y \geq 6$ ,  $y-2x \leq 6$ ,  
 $7x-8y \geq 0$ ,  $x \geq 0$
- C.  $x+y \leq 8$ ,  $2x+3y \leq 6$ ,  $y-2x \leq 6$ ,  
 $7x-8y \geq 0$ ,  $x \geq 0$
- D.  $x+y \geq 8$ ,  $2x+3y \leq 6$ ,  $y-2x \geq 6$ ,  
 $7x-8y \geq 0$ ,  $x \geq 0$
- E.  $x+y \geq 8$ ,  $2x+3y \geq 6$ ,  $y-2x \leq 6$ ,  
 $7x-8y \geq 0$ ,  $x \geq 0$

**SOAL UM UGM K.DASAR**

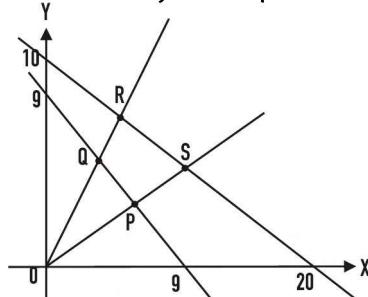
6. Nilai minimum  $f(x, y) = 3 + 4x - 5y$  untuk  $x$  dan  $y$  yang memenuhi:
- $-x+y \leq 1$
  - $x+2y \geq 5$
  - $2x+y \leq 10$

adalah ....



## SOAL STANDAR SBMPTN K.DASAR

7. Dalam sistem pertidaksamaan:  
 $2y \geq x$ ;  $y \leq 2x$ ;  $2y + x \leq 20$ ;  $x + y \geq 9$ . Nilai maksimum untuk  $3y - x$  dicapai di titik ....



- |      |      |
|------|------|
| A. P | D. S |
| B. Q | E. T |
| C. R |      |

SOAL UN SMA IPA

8. Seorang diharuskan minum dua jenis tablet setiap hari. Tablet jenis I mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B. Tablet jenis II mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam 1 hari anak tersebut memerlukan 25 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Jika harga tablet I Rp4.000,00 per biji dan tablet II Rp8.000,00 per biji, pengeluaran minimum untuk pembelian tablet per hari adalah ....

A. Rp12.000,00                      D. Rp18.000,00  
B. Rp14.000,00                      E. Rp20.000,00  
C. Rp16.000,00

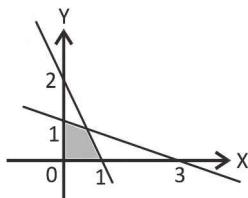
SOAL SNMPTN K.DASAR

9. Fungsi  $F = 10x + 15y$  dengan syarat  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$   
 $x \leq 800$ ,  $y \leq 600$  dan  $x + y \leq 1000$  mempunyai nilai maksimum ....

A. 9.000                      D. 15.000  
B. 11.000                      E. 16.000  
C. 13.000

## **SOAL UN SMA IPA**

10. Daerah yang diarsir pada gambar merupakan himpunan sistem pertidaksamaan. Nilai maksimum bentuk objektif  $3x + 4y$  adalah ....






Catatan

- SOAL UM UGM

11. Di sebuah kantin, Ani dan kawan-kawan membayar tidak lebih dari Rp35.000,00 untuk 4 mangkok bakso dan 6 gelas es yang dipesannya, sedang Adi dan kawan-kawan membayar tidak lebih dari Rp50.000,00 untuk 8 mangkok bakso dan 4 gelas es. Jika kita memesan 5 mangkok bakso dan 3 gelas es maka maksimum yang harus kita bayar adalah ....

A. Rp27.500,00      D. Rp35.000,00  
B. Rp30.000,00      E. Rp37.500,00  
C. Rp32.500,00

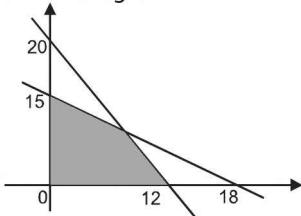
SOAL UN SMA IPS

12. Nilai maksimum dari fungsi objektif  $2x + 3y$  yang memenuhi sistem pertidaksamaan  $3x + 2y \geq 12$ ;  $x + y \leq 5$ ;  $x \geq 0$ ;  $y \geq 0$  adalah ....



SOAL UN SMA IPS

13. Perhatikan gambar!



Daerah yang diarsir pada gambar merupakan him-punan penyelesaian suatu sistem pertidaksamaan linear. Nilai maksimum dari  $f(x, y) = 7x + 6y$  adalah = ...



## SOAL SIMAK UI K.DASAR

14. Titik yang memaksimumkan  $3x + 3y$  yang memenuhi sistem pertidaksamaan linier  
 $y \leq 2x$ ,  $y \geq 20$ ,  $x + y \leq 60$  adalah ....

A. (10, 20)                              D. (60, 0)  
B. (40, 20)                              E. (0, 60)  
C. (20, 40)

SOAL UN SMA IPS

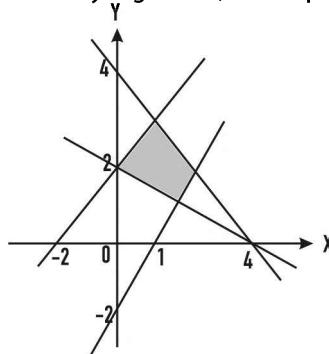
15. Seseorang akan membuka usaha dengan berjualan anggrek dan tanaman hias di kiosnya dengan isi paling sedikit 30 pot anggrek dan paling sedikit 40 pot tanaman hias.

Kios tersebut dapat menampung 120 pot. Bila keuntungan untuk setiap pot anggrek dan setiap tanaman hias masing-masing adalah Rp10.000,00 dan Rp15.000,00, keuntungan terbesar yang dapat diperoleh adalah ....

A. Rp1.400.000,00      D. Rp1.800.000,00  
B. Rp1.600.000,00      E. Rp2.100.000,00  
C. Rp1.650.000,00

## SOAL STANDAR SBMPTN

16. Fungsi  $f(x, y) = 2x + 2y - 5$  yang didefinisikan pada daerah yang diarsir, mencapai maksimum pada ....



- A.  $\{(x, y) | x = 1, y = 3\}$       D.  $\{(x, y) | y - x = 2\}$   
 B.  $\{(x, y) | x = 2, y = 3\}$       E.  $\{(x, y) | x + y = 4\}$   
 C.  $\{(x, y) | x = 0, y = 2\}$

Catatan

## **SOAL UN SMA IPS**

17. Seorang Ibu memproduksi dua jenis keripik pisang, yaitu rasa cokelat dan rasa keju. Setiap kilogram keripik pisang rasa cokelat membutuhkan modal Rp10.000,00 sedangkan keripik rasa keju membutuhkan modal Rp15.000,00 per kilogram dan maksimum modal adalah Rp500.000. Tiap hari hanya bisa memproduksi paling banyak 40 kilogram. Keuntungan tiap kilogram keripik pisang rasa cokelat Rp2.500,00 dan keripik pisang rasa keju Rp3.000,00 per kilogram. Keuntungan terbesar yang dapat diperoleh Ibu terbesar adalah ....

- A. Rp110.000,00      D. Rp89.000,00  
B. Rp100.000,00      E. Rp85.000,00  
C. Rp99.000,00

## **SOAL SNMPTN K.DASAR**

COAL STANDARD REPORT

19. Nilai minimal dari  $z = 3x + 6y$  yang memenuhi persyaratan

syarat:  
 $4x + y \geq 20$ ,  $x + y \leq 20$ ,  $x + y \geq 10$ ,  $x \geq 0$ , dan  
 $y \geq 0$  adalah ....

- A. 50
  - B. 40
  - C. 30
  - D. 20
  - E. 10

SOAL SNMPTN K.DASAR

20. Fungsi  $f(x, y) = cx + 4y$  kedua kendala:

$$3x + y \leq 9, x + 2y \leq 8, x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0$$

mencapai maksimum di  $(2, 3)$ , jika...

**Catatan**

- A.  $c \leq 2$  atau  $c \geq 12$       D.  $-2 \leq x \leq 12$   
B.  $c \leq -2$  atau  $c \geq 12$       E.  $-12 \leq x \leq 2$   
C.  $2 \leq x \leq 12$

**SOAL STANDAR UN SMA IPA**

21. Sebuah kapal pesiar dapat menampung 150 orang penumpang. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa 60 kg bagasi dan penumpang kelas ekonomi 40 kg. kapal itu hanya dapat membawa 800kg bagasi. Jika banyak penumpang kelas utama  $x$  orang dan kelas ekonomi  $y$  orang maka sistem pertidaksamaan yang harus dipenuhi adalah ....
- A.  $x + y \leq 150; 3x + 2y \leq 80; x \geq 0; y \geq 0$   
B.  $x + y \leq 150; 3x + 2y \leq 40; x \geq 0; y \geq 0$   
C.  $x + y \geq 150; 3x + 2y \leq 40; x \geq 0; y \geq 0$   
D.  $x + y \leq 150; 3x + 3y \leq 40; x \geq 0; y \geq 0$   
E.  $x + y \leq 150; 3x + 3y \leq 80; x \geq 0; y \geq 0$

**SOAL UM UGM**

22. Seorang pemilik toko sepatu ingin mengisi tokonya dengan sepatu laki-laki paling sedikit 100 pasang, dan sepatu wanita paling sedikit 150 pasang. Toko tersebut dapat memuat 400 pasang sepatu. Keuntungan setiap sepatu laki-laki Rp1.000,00 dan setiap pasang sepatu wanita Rp500,00. Jika banyaknya sepatu laki-laki tidak boleh melebihi 150 pasang maka keuntungan terbesar yang dapat diperoleh adalah ....
- A. Rp275.000,00      D. Rp350.000,00  
B. Rp300.000,00      E. Rp375.000,00  
C. Rp325.000,00

**SOAL SNMPTN K.DASAR**

23. Jika fungsi  $f(x, y) = 500 + x + y$ , dengan syarat  $x \geq 0, y \geq 0, 2x - y - 2 \geq 0$ , dan  $x + 2y - 6 \geq 0$ , maka ....
- A. Fungsi  $f$  mempunyai nilai maksimum dan tidak mempunyai nilai minimum  
B. Nilai maksimum atau nilai minimum fungsi  $f$  tidak dapat ditentukan  
C. Fungsi  $f$  mempunyai nilai minimum dan tidak mempunyai nilai maksimum

- D. Fungsi  $f$  tidak mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum
- E. Fungsi  $f$  mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum

**SOAL STANDAR SBMPTN**

24. Nilai minimum dari  $-2x + 4y + 6$  untuk  $x$  dan  $y$  yang memenuhi  $2x+y-20 \leq 0$ ,  $2x-y+10 \geq 0$ ,  $x+y-5 \geq 0$ ,  $x-2y-5 \leq 0$ ,  $x \geq 0$ , dan  $y \geq 0$  adalah ....

- A. -14
- B. -11
- C. -9
- D. -6
- E. -4

**SOAL UN SMA IPS**

25. Perusahaan pengiriman barang mempunyai dua jenis mobil yaitu jenis I dan II. Mobil jenis I daya muatnya  $12 \text{ m}^3$ , sedangkan mobil jenis II daya muatnya  $36 \text{ m}^3$ . Order tiap bulan rata-rata mencapai lebih dari  $7.200 \text{ m}^3$ , sedangkan biaya per pengiriman untuk mobil jenis I Rp400.000,00 dan mobil jenis II Rp600.000,00. Dari biaya yang telah ditetapkan tersebut pendapatan perusahaan rata-rata sebulan tidak kurang dari Rp200.000.000,00. Model matematika yang tepat dari masalah tersebut adalah ....

- A.  $x + 3y \geq 600; 2x + 3y \geq 1000; x \geq 0; y \geq 0$
- B.  $x + 3y \geq 600; 2x + 3y \leq 1000; x \geq 0; y \geq 0$
- C.  $x + 3y \geq 400; 2x + 3y \leq 2000; x \geq 0; y \geq 0$
- D.  $x + 3y \leq 400; 2x + 3y \leq 2000; x \geq 0; y \geq 0$
- E.  $x + 3y \geq 800; 2x + 3y \geq 1000; x \geq 0; y \geq 0$

# Pembahasan

## Catatan

### 1. Pembahasan:

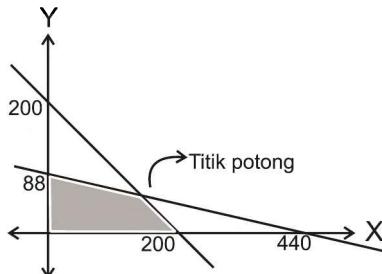
Misal: mobil kecil =  $x$

mobil besar =  $y$

Model matematikanya:

- Luas daerah  
 $4x + 20y \leq 1.760 \dots \text{(i)}$
- Daya tampung  
 $x + y \leq 200 \dots \text{(ii)}$
- Biaya (fungsi objektif)  
 $f(x, y) = 1.000x + 2.000y$

Daerah hasil:



Titik potong:

$$\begin{aligned} 4x + 20y &= 1.760 \rightarrow x + 5y = 440 \\ x + y &= 200 \\ \hline 4y &= 240 \\ \Rightarrow y &= 60 \end{aligned}$$

Sehingga,  $x = 140$

Jadi, titik potongnya (140, 60)

Nilai titik kritis pada fungsi objektif:

- $(0, 88) \Rightarrow 0 + 2.000(88) = 176.000$
- $(140, 60) \Rightarrow 1.000(140) + 2.000(60) = 260.000 \text{ (Maksimum)}$
- $(200, 0) \Rightarrow 1.000(200) + 0 = 200.000$

Sehingga, pendapatan maksimum dari parkir adalah Rp260.000,00

**Jawaban: C**

## 2. Pembahasan:

Misal:

Sepeda gunung =  $x$ ; sepeda balap =  $y$

Model matematika yang dapat dibuat dari

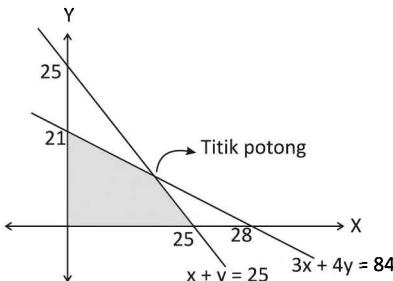
Banyak sepeda:  $x + y \leq 25$

Banyak uang:  $15x + 20y \leq 420$  (dalam ratusan ribu)

atau  $3x + 4y \leq 84$

Fungsi objektif: (keuntungan)

$$f(x, y) = 500.000x + 600.000y$$



**Titik potong:**

$$\begin{array}{rcl} x + y = 25 & | \times 3 & 3x + 3y = 75 \\ 3x + 4y = 84 & | \times 1 & 3x + 4y = 84 \\ & & -y = -9 \Rightarrow y = 9 \end{array}$$

$$x + y = 25 \text{ maka } x = 25 - y = 25 - 9 = 16$$

Sehingga, titik potongnya (16, 9)

Nilai titik kritis pada fungsi objektif:

$$(0, 21) \Rightarrow 0 + 600.000(21) = 12.600.000$$

$$(16, 9) \Rightarrow 500.000(16) + 600.000(9)$$

$$= 8.000.000 + 5.400.000$$

$$= 13.400.000 \text{ (maksimum)}$$

$$(25, 0) \Rightarrow 500.000(25) + 0 = 12.500.000$$

Jadi, keuntungan maksimal yang dapat diperoleh adalah Rp13.400.000,00.

**Jawaban: A**

## 3. Pembahasan:

Misal:

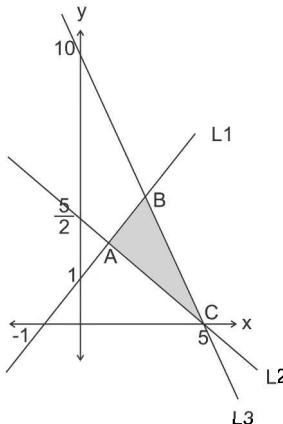
$$L_1 = -x + y \leq 1$$

$$L_2 = x + 2y \geq 5$$

$$L_3 = 2x + y \leq 10$$

Daerah penyelesaiannya:

## Catatan



Titik A, diperoleh dari perpotongan  $L_1$  dan  $L_2$ , yaitu:

$$-x + y = 1$$

$$\underline{x + 2y = 5} \quad +$$

$$3y = 6 \Rightarrow y = 2 \text{ dan } x = 1$$

Sehingga, A(1, 2)

Titik B, diperoleh dari perpotongan  $L_1$  dan  $L_2$ , yaitu:

$$-x + y = 1$$

$$\underline{2x + y = 10} \quad -$$

$$-3x = -9 \Rightarrow x = 3 \text{ dan } y = 4$$

Sehingga, B(3, 4)

Titik C(5, 0)

Nilai titik A, B, dan C pada fungsi

$$f(x, y) = 3 + 4x - 5y \text{ adalah:}$$

- Titik A(1, 2)  $\Rightarrow f(1, 2) = 3 + 4 - 10 = -3$
- Titik B(3, 4)  $\Rightarrow f(3, 4) = 3 + 12 - 20 = -5$
- Titik C(5, 0)  $\Rightarrow f(5, 0) = 3 + 20 - 0 = 23$

Jadi, diperoleh nilai minimumnya adalah -5.

**Jawaban: C**

### 4. Pembahasan:

Misal:  $x$  = mobil; dan  $y$  = bus

Sehingga, bentuk pertidaksamaan matematika yang dapat dibuat adalah:

- Banyaknya kendaraan:

$$x + y \leq 58$$

- Luas lahan parkir:  
 $6x + 24y \leq 600$  atau  $x + 4y \leq 100$
- Banyak bus dan mobil tidak negatif maka:  
 $x \geq 0; y \geq 0$

**Jawaban: A**

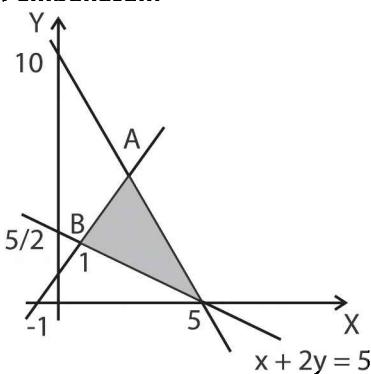
**5. Pembahasan:**

- Garis melalui  $(-3, 0)$  dan  $(0, 6)$  adalah  
 $6x - 3y = -18$ , atau  $y - 2x = 6$ .  
Daerah arsiran, karena ke bawah ( $y$  mengecil),  
adalah  $y - 2x \leq 6$
- Garis melalui  $(0, 8)$  dan  $(8, 0)$  adalah  $x + y = 8$ .  
Karena ke kiri ( $x$  mengecil), daerah arsiran:  
 $x + y \leq 8$
- Garis melalui  $(0, 2)$  dan  $(3, 0)$  adalah  $2x + 3y = 6$   
Karena ke kanan ( $x$  membesar), daerah arsiran:  
 $2x + 3y \geq 6$
- Garis melalui  $(0, 0)$  adalah  $7x = 8y$ , atau  $7x - 8y = 0$ .  
Karena ke kiri ( $x$  mengecil), daerah arsiran:  
 $7x - 8y \leq 0$
- Daerah arsiran adalah sumbu Y (atau  $x = 0$ )  
ke kanan ( $x$  membesar) sehingga memenuhi  
 $x \geq 0$

Dengan demikian, jawaban benar adalah A.

**Jawaban: A**

**6. Pembahasan:**



## Catatan

$$\begin{array}{r} 2x + y = 10 \\ -x + y = 1 \\ \hline 3x = 9 \Rightarrow x = 3, y = 4 \quad A(3, 4) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x + 2y = 5 \\ -x + y = 1 \\ \hline 3y = 6 \Rightarrow y = 2, x = 1 \quad B(1, 2) \end{array}$$

- Uji titik sudut:

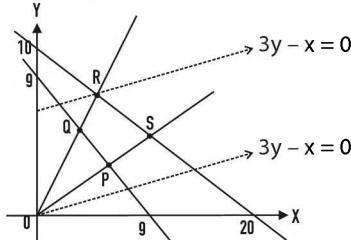
Titik	$f = 3 + 4x - 5y$
(5, 0)	$f = 3 + 20 - 0 = 23$
(1, 2)	$f = 3 + 4 - 10 = -3$
(3, 4)	$f = 3 + 12 - 20 = -5$

Jadi, nilai minimum  $f = 3 + 4x - 5y$  adalah  $-5$ .

**Jawaban: C**

## 7. Pembahasan:

Diketahui:



Dengan membuat garis dari  $f(x, y) = 3y - x$ , misalkan  $3y - x = 0$ .

Kemudian jika garis tersebut di geser ke daerah jawab maka garis yang melalui titik R adalah garis yang tertinggi.

Jadi, nilai maksimum untuk  $3y - x$  adalah di titik R.

**Jawaban: C**

## 8. Pembahasan:

Misal:  $x$  tablet jenis I,  $y$  tablet jenis II

Fungsi tujuan  $f(x, y) = 4000x + 8000y$

Fungsi untuk Vitamin A:  $5x + 10y \geq 25$

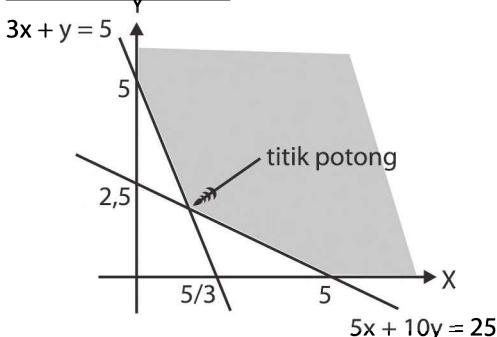
Fungsi untuk Vitamin B:  $3x + y \geq 5$

$$5x + 10y = 25$$

$x$	0	5
$y$	2,5	0

$$3x + y = 5$$

<b>x</b>	0	5/3
<b>y</b>	5	0



**Titik potong:**

$$\begin{array}{rcl} 5x+10y=25 & | \times 3 & 15x+30y=75 \\ 3x+y=5 & | \times 5 & 15x+5y=25 \\ \hline & & 25y=50 \\ & & y=2 \\ & & x=1 \end{array}$$

Berdasarkan fungsi tujuan:

$$f(x, y) = 4.000x + 8.000y$$

$$f(5, 0) = 4.000 \times 5 + 0 = 20.000$$

$$f(1, 2) = 4.000 \times 1 + 8.000 \times 2 = 20.000$$

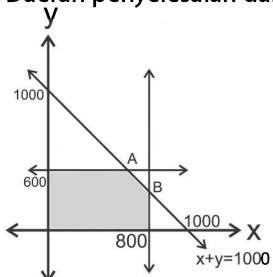
$$f(0, 5) = 0 + 8.000 \times 5 = 40.000$$

Pengeluaran minimal Rp20.000,00

**Jawaban: E**

## 9. Pembahasan:

Daerah penyelesaian dari soal:



## Catatan

Titik A merupakan titik potong antara garis  $x+y=1000$  dan  $y=600$  maka:

$$A(400, 600)$$

Titik B merupakan titik potong antara garis  $x+y=1000$  dan  $x=800$  maka:

$$B(800, 200)$$

Nilai titik kritis pada fungsi objektif

$$F = 10x + 15y$$

- $(800, 0) \Rightarrow F = 8.000$
- $(800, 200) \Rightarrow F = 8.000 + 3.000 = 11.000$
- $(400, 600) \Rightarrow F = 4.000 + 9.000 = 13.000$
- $(0, 600) \Rightarrow F = 9.000$

Jadi, nilai maksimumnya adalah 13.000.

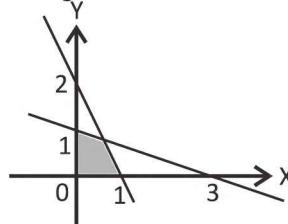
**Jawaban: C**

### 10. Pembahasan:

Mencari persamaan garis lurus jika diketahui garis memotong sumbu X di  $x_1$  dan sumbu Y di  $y_1$  adalah:

$$y_1 X + x_1 Y = x_1 \cdot y_1$$

Dari grafik:



Persamaan garisnya adalah:

$$x + 3y = 3 \text{ dan } 2x + y = 2$$

Sehingga, titik potong antara dua garis tersebut adalah:

$$\begin{array}{r} x + 3y = 3 \\ 2x + y = 2 \\ \hline 5y = 4 \end{array} \Rightarrow y = \frac{4}{5}$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $y = \frac{4}{5}$  ke salah satu

persamaan (misal, persamaan  $2x + y = 2$ ) maka diperoleh:

$$2x + \frac{4}{5} = 2$$

$$\Rightarrow 2x = 2 - \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{10}{5} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{5}$$

Sehingga nilai dari tiga titik kritis pada bentuk objektif  $3x + 4y$  adalah:

- $(1, 0) \Rightarrow 3 \cdot 1 + 0 = 3$
- $(0, 1) \Rightarrow 0 + 1 \cdot 4 = 4$
- $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right) \Rightarrow 3 \cdot \frac{3}{5} + 4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{9}{5} + \frac{16}{5} = 5$

Jadi, nilai maksimumnya 5.

**Jawaban: C**

### 11. Pembahasan:

Misalkan: harga 1 mangkuk bakso =  $x$   
harga 1 gelas es =  $y$

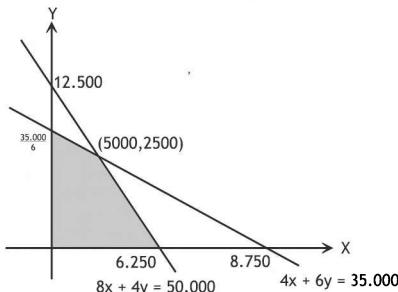
Selanjutnya, berdasarkan soal didapatkan sistem pertaksamaan berikut:

$$4x + 6y \leq 35.000$$

$$8x + 4y \leq 50.000$$

$$x, y \geq 0$$

Gambar grafik yang memenuhi



Titik potong kedua garis diperoleh dengan cara eliminasi. Selanjutnya kita lakukan uji titik pojok ke  $5x + 3y$ . Dapat disimpulkan bahwa harga

## Catatan

maksimum yang harus dibayar untuk 5 mangkok bakso dan 3 gelas es adalah

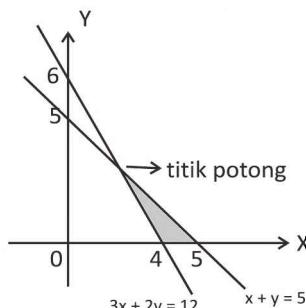
$$5y + 3x = 5(5.000) + 3(2.500) = 32.500$$

**Jawaban C**

### 12. Pembahasan:

Daerah sistem pertidaksamaan  $3x+2y \geq 12$ ;

$$x+y \leq 5; x \geq 0; y \geq 0$$



Titik potongnya:

$$\begin{array}{r} 3x + 2y = 12 \\ x + y = 5 \end{array} \left| \begin{array}{l} \times 1 \\ \times 3 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{r} 3x + 2y = 12 \\ 3x + 3y = 15 \end{array} \underline{-} \quad -y = -3 \Rightarrow y = 3$$

Dari  $x+y=5$  maka diperoleh  $x+3=5 \Rightarrow x=2$

Sehingga, titik potongnya adalah  $(2, 3)$

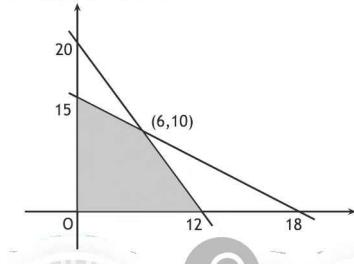
Nilai titik kritis pada fungsi objektif  $2x+3y$

- $(4, 0) \Rightarrow 2.4 + 0 = 8$
- $(5, 0) \Rightarrow 2.5 + 0 = 10$
- $(2, 3) \Rightarrow 2.2 + 3.3 = 13$

Jadi, nilai maksimumnya adalah 13.

**Jawaban: C**

### 13. Pembahasan:



Grafik melalui titik (12,0) dan (0,20)

$$20x + 12y = 240 \Leftrightarrow 5x + 3y = 60 \quad \dots(1)$$

Grafik juga melalui titik (18, 0) dan (0, 25)

$$15x + 18y = 270 \Leftrightarrow 5x + 6y = 90 \quad \dots(2)$$

Dengan menggunakan metode eliminasi untuk persamaan (1) dan (2):

$$\begin{array}{r} 5x + 3y = 60 \\ 5x + 6y = 90 \\ \hline -3y = -30 \\ y = 10 \end{array}$$

Substitusikan ke (1):

$$5x + 3(10) = 10 \Leftrightarrow 5x = 30 \Leftrightarrow x = 6$$

Titik potong garis (6,10)

Uji titik untuk menentukan nilai maksimum dari

$$f(x, y) = 7x + 6y$$

$$(12, 0) \Rightarrow 7(12) + 6(0) = 84$$

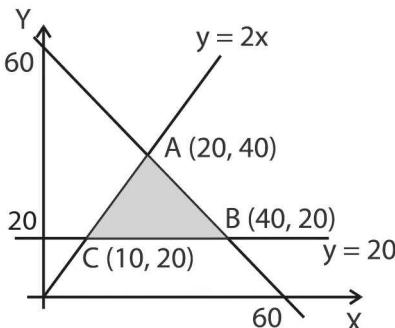
$$(6, 10) \Rightarrow 7(6) + 6(10) = 42 + 60 = 102$$

$$(0, 15) \Rightarrow 7(0) + 6(15) = 90$$

Maka nilai maksimum  $f(x,y) = 7x + 6y = 102$ .

**Jawaban: C**

#### 14. Pembahasan:



Titik	$Z = 3x + 2y$
A (20, 40)	$Z = 60 + 80 = 140$
B (40, 20)	$Z = 120 + 40 = 160$
C (10, 20)	$Z = 30 + 40 = 70$

Jadi, titik yang memaksimumkan  $3x + 2y$  adalah titik (40, 20).

**Jawaban: B**

## Catatan

### 15. Pembahasan:

Misalkan:

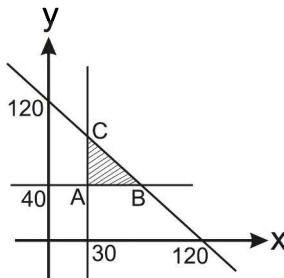
1 pot anggrek =  $x$

1 pot tanaman hias =  $y$

Maka model matematika yang bisa dibuat adalah:

$$x \geq 30; y \geq 40$$

$$x + y \leq 120$$



Titik A (30, 40)

$$x + y = 120$$

$$(y = 40) \text{ maka } x = 120 - 40 = 80$$

Jadi, titik B (80, 40)

$$(x = 30) \text{ maka } y = 120 - 30 = 90$$

Jadi, titik C (30, 90)

Fungsi objektif:

$$f(x, y) = 10.000x + 15.000y$$

$$\bullet \quad f(30, 40) = 10.000(30) + 15.000(40)$$

$$= 300.000 + 600.000 = 900.000$$

$$\bullet \quad f(80, 40) = 10.000(80) + 15.000(40)$$

$$= 800.000 + 600.000 = 1.400.000$$

$$\bullet \quad f(30, 90) = 10.000(30) + 15.000(90)$$

$$= 300.000 + 1.350.000 = 1.650.000$$

Jadi, keuntungan terbesarnya adalah

Rp 1.650.000,00

**Jawaban C**

### 16. Pembahasan:

L1: Persamaan garis yang melalui titik (-2, 0) dan (0,

2) adalah:

$$x - y = -2$$

L2: Persamaan garis yang melalui titik (1, 0) dan (0, -2)  
adalah:

$$-2x + y = -2$$

L3: Persamaan garis yang melalui titik ((4, 0) dan  
(0, 2) adalah:

$$x + 2y = 4$$

L4: persamaan garis yang melalui titik  $(4, 0)$  dan  $(0, 4)$  adalah:

$$x + y = 4$$

Titik potong antara L1 dan L4:  $(1, 3)$

Titik potong antara L2 dan L3:  $(2, 1)$

Titik potong antara L2 dan L4:  $(2, 2)$

Nilai titik kritis pada fungsi objektif:

$$f(x,y) = 2x + 2y - 5$$

- $f(1, 3) = 2.1 + 2.3 - 5 = 3$

- $f(2, 1) = 2.2 + 2.1 - 5 = 1$

- $f(2, 2) = 2.2 + 2.2 - 5 = 3$

- $f(0, 2) = 2.0 + 2.2 - 5 = -1$

Nilai maksimal diperoleh pada titik  $(1, 3)$  dan  $(2, 2)$   
dimana keduanya merupakan titik pada garis  $x + y = 4$

**Jawaban: E**

### 17. Pembahasan:

Misalkan:

Keripik pisang rasa cokelat =  $x$

Keripik pisang rasa keju =  $y$

Sehingga, model matematika yang dapat dibuat adalah:

$$x + y \leq 40 \dots (i)$$

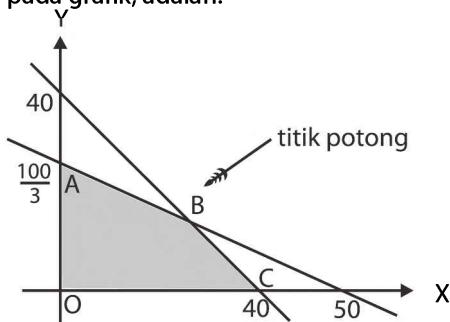
$$10.000x + 15.000y \leq 500.000 \text{ atau}$$

$$10x + 15y \leq 500 \dots (ii)$$

Fungsi objektif:

$$f(x, y) = 2.500x + 3.000y$$

Dari pertidaksamaan (i) dan (ii), jika digambarkan pada grafik, adalah:



Kemudian, dicari titik perpotongan dua garis, yaitu pada titik B.

**Catatan**

Dengan metode eliminasi maka:

$$\begin{array}{rcl} x + y = 40 & | \times 10 & 10x + 10y = 400 \\ 10x + 15y = 500 & | \times 1 & 10x + 15y = 500 \\ & & - \\ & & -5y = -100 \\ & & \Rightarrow y = \frac{-100}{-5} = 20 \end{array}$$

Dengan mensubstitusi nilai  $y = 20$  maka diperoleh nilai  $x = 20$

$$f(x, y) = 2.500x + 3.000y$$

- $f(40, 0) = 40 \times 2.500 + 0 = 100.000$
- $f(20, 20) = 20 \times 2.500 + 20 \times 3.000 = 110.000$
- $f\left(0, \frac{100}{3}\right) = 0 + \frac{100}{3} \times 3.000 = 100.000$

Jadi, keuntungan terbesarnya adalah Rp110.000,00

**Jawaban: A**

**18. Pembahasan:**

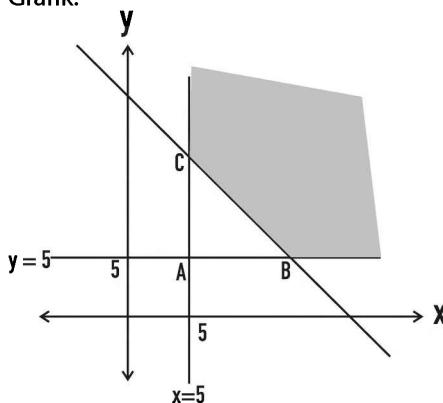
Suatu kendala:

$$x + y \geq 20$$

x	0	20
y	20	0

$$x \geq 5 ; y \geq 5$$

Grafik:



$$x = 5 \Rightarrow 5 + y = 20 \Rightarrow y = 15; \text{ titik B } (15, 5)$$

Titik C (5, 15)

Fungsi objektif:  $f(x,y) = 3x + 4y$

$$f(5,15) = 3.5 + 4.15 = 15 + 60 = 75$$

$$f(15,5) = 3.15 + 4.5 = 45 + 20 = 65$$

Jadi, nilai minimum adalah 65.

**Jawaban: B**

### 19. Pembahasan:

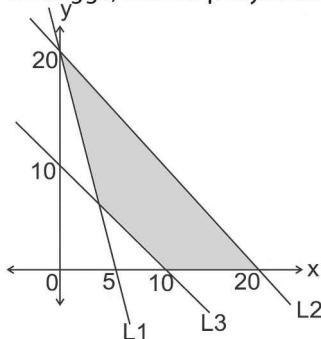
misal:

$$L1: 4x + y \geq 20$$

$$L2: x + y \leq 20$$

$$L3: x + y \geq 10$$

Sehingga, daerah penyelesaiannya:



Titik potong antara garis  $L1$  dan  $L3$ :

$$4x + y = 20$$

$$x + y = 10 \quad -$$

$$3x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$$

$$\text{dan, } y = \frac{20}{3}$$

Sehingga, titik potongnya  $\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right)$

Nilai titik kritis pada fungsi objektif

$$z = 3x + 6y$$

- $(10, 0) \Rightarrow z = 30$
- $(20, 0) \Rightarrow z = 60$
- $(0, 20) \Rightarrow z = 120$

**Catatan**

- $\left(\frac{10}{3}, \frac{20}{3}\right) \Rightarrow z = 10 + 40 = 50$

Jadi, nilai minimal yang diperoleh adalah 30.

**Jawaban: C**

**20. Pembahasan:**

$$f(x, y) = cx + 4y$$

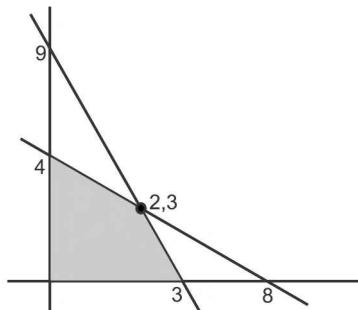
$$3x + y \leq 9$$

$$x + 2y \leq 8$$

$$x \geq 0; y \geq 0$$

Mencapai maksimum di  $(2,3)$  jika....

Jawab:



$$\text{titik pojok } f(x, y) = cx + 4y$$

$$(0,4) \Rightarrow f(0,4) = 16$$

$$(3,0) \Rightarrow f(3,0) = 3c$$

$$(2,3) \Rightarrow f(2,3) = 2c + 12 \text{ maks}$$

- $2c + 12 \geq 16$

$$2c \geq 4$$

$$c \geq 2$$

- $2c + 12 \geq 3c$

$$12 \geq c$$

Berarti  $2 \leq c \leq 12$

**Jawaban: C**

**21. Pembahasan:**

	Daya tampung penumpang	Daya tampung bagasi (kg)
Utama (x) Ekonomi (y)	x y	60 40
	150	800

Sehingga, sistem pertidaksamaan yang dapat dibuat adalah:

$$x + y \leq 150$$

$$60x + 40y \leq 800 \text{ atau } 3x + 2y \leq 40$$

Dan  $x \geq 0; y \geq 0$

**Jawaban: B**

## 22. Pembahasan:

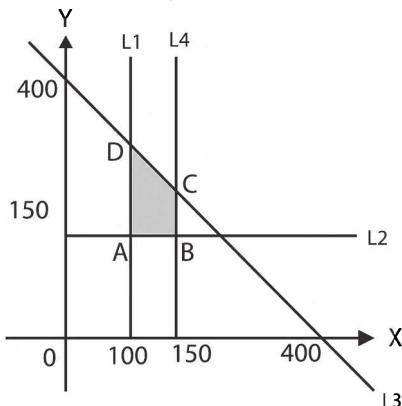
Misalkan: banyak sepatu laki-laki =  $x$

banyak sepatu perempuan =  $y$

Sehingga, berdasarkan soal didapatkan sistem pertidaksamaan berikut:

$$L1: x \geq 100; L2: y \geq 150; L3: x + y \leq 400; L4: x \leq 150$$

Gambar grafik yang memenuhi:



Fungsi objektif  $f(x, y) = 1.000x + 500y$

Nilai pada titik kritis:

$$A(100, 150) \Rightarrow 1.000 \times 100 + 500 \times 150 = 175.000$$

$$B(150, 150) \Rightarrow 1.000 \times 150 + 500 \times 150 = 225.000$$

$$C(150, 250) \Rightarrow 1.000 \times 150 + 500 \times 250 = 275.000$$

$$D(100, 300) \Rightarrow 1.000 \times 100 + 500 \times 300 = 250.000$$

Jadi, keuntungan terbesar yang dapat diperoleh adalah Rp275.000,00

**Jawaban: A**

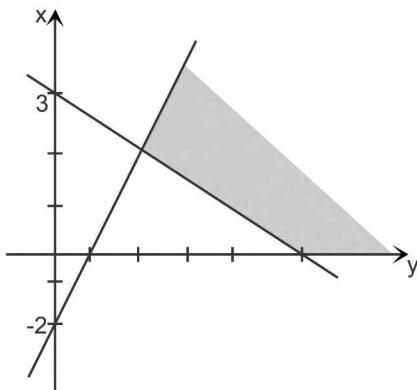
**Catatan****23. Pembahasan:**

$$f(x, y) = 500 + x + y$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

$$2x - y - 2 \geq 0$$

$$x + 2y - 6 \geq 0$$



$f(x, y)$  mempunyai nilai minimum dan tidak mempunyai nilai maksimum.

**Jawaban: C**

**24. Pembahasan:**

Misal:

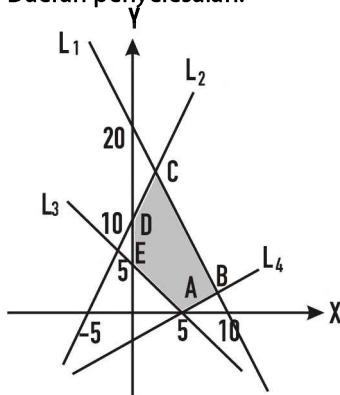
$$L_1 \equiv 2x + y - 20 \leq 0$$

$$L_2 \equiv 2x - y + 10 \geq 0$$

$$L_3 \equiv x + y - 5 \geq 0$$

$$L_4 \equiv x - 2y - 5 \leq 0, \quad x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0$$

Daerah penyelesaian:



Nilai titik kritis pada fungsi objektif  $-2x + 4y + 6$ :

$$A(5, 0) \Rightarrow -2.5 + 4.0 + 6 = 0$$

$$B(9, 2) \Rightarrow -2.9 + 4.2 + 6 = -4$$

$$C\left(\frac{5}{2}, 15\right) \Rightarrow -2\left(\frac{5}{2}\right) + 4.15 + 6 = 61$$

$$D(0, 15) \Rightarrow -2.0 + 4.15 + 6 = 66$$

$$E(0, 5) \Rightarrow -2.0 + 4.5 + 6 = 26$$

Jadi, nilai minimalnya adalah  $-4$ .

### Catatan

**Jawaban: E**

#### 25. Pembahasan:

Misal: mobil jenis I =  $x$

mobil jenis II =  $y$

Model matematika yang bisa dibuat:

- Dari daya tampung:

$$12x + 36y \geq 7200 \Rightarrow x + 2y \geq 600$$

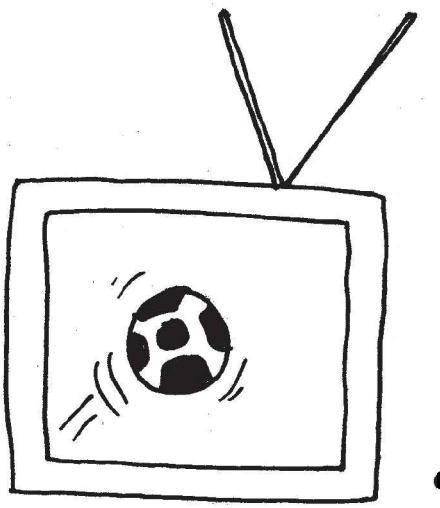
- Dari pendapatan:

$$400x + 600y \geq 200.000 \text{ (dalam ribuan)}$$

$$\Rightarrow 2x + 3y \geq 1.000$$

- $x \geq 0; y \geq 0$

**Jawaban: A**



$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

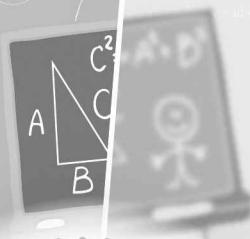
$$Ra + 40a + \dots = 0$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$

$$y = ut \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

11

## FUNGSI KOMPOSISI DAN INVERS



$$va + vb = u$$

$$va = \frac{1}{2}u(1-e)$$

$$vb = \frac{1}{2}u(1+e)$$

$$2u(1+e)$$

$$-1/2eu(1+e)$$

$$2u(1+e)$$



### A Pengertian Fungsi

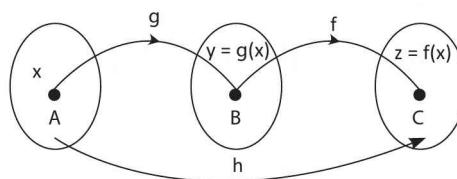
Relasi, yaitu aturan pengkawalan himpunan dengan aturan tertentu. **Fungsi atau pemetaan f** merupakan suatu relasi yang khusus.

Suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B di definisikan sebagai suatu relasi dengan ketentuan setiap anggota A dipasangkan dengan tepat satu anggota B, ditulis  $f: A \rightarrow B$

- Himpunan A disebut daerah asal atau **domain**
- Himpunan B disebut daerah kawan atau **kodomain**.
- Himpunan bagian B yang berpasangan dengan A disebut daerah hasil atau **range**.



### B Komposisi Fungsi



$$g: A \rightarrow B \text{ maka } y = g(x)$$

$$f: B \rightarrow C \text{ maka } z = f(x)$$

Fungsi komposisi g dan f dapat dituliskan

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

### Sifat-sifat Fungsi Komposisi

Tidak komutatif:  $f \circ g \neq g \circ f$

Assosiatif:  $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h = f \circ g \circ h$

Mempunyai identitas I adalah fungsi identitas di mana  $I(x) = x$ ,  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$

Fungsi invers komposisi:  $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

### Domain Fungsi Komposisi:

$$D(g \circ f) = \{x \in D_f \text{ dan } R_f \in D_g\}$$

Keterangan:

$D_f$  = domain f

$D_g$  = domain g

$R_f$  = range f

$D(g \circ f)$  = domain  $g \circ f$



## Fungsi Invers

Suatu fungsi  $f: A \rightarrow B$

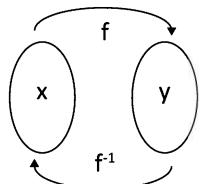
mempunyai fungsi invers

$f^{-1}: B \rightarrow A$ , jika A dan B berkorespondensi satu-satu.

Daerah hasil dari f merupakan  
daerah asal bagi  $f^{-1}$   
dan

Daerah asal dari f merupakan  
daerah hasil bagi  $f^{-1}$

Sehingga jika  $f(x) = y$  maka  $f^{-1}(y) = x$



Fungsi invers berlaku:

$$\begin{array}{c} f(a) = b \\ \diagtimes \\ f^{-1}(b) = a \end{array}$$

Secara grafis  $f^{-1}$  adalah hasil pencerminan  $f(x)$  terhadap garis  $y = x$

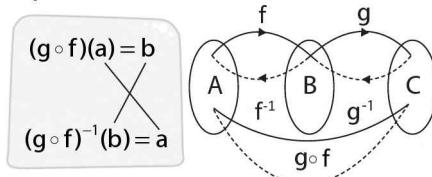


## Invers Fungsi Komposisi

Bila  $f: A \rightarrow B$  dan  $g: B \rightarrow C$  maka:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Invers dari fungsi komposisi berlaku:



**Catatan:**

$$f \circ g (x) = h(x) \Rightarrow f(x) = h(g^{-1}(x))$$

No.	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
1.	$ax + b$	$\frac{(x - b)}{a}$
2.	$\frac{x}{a} + b$	$a(x - b)$
3.	$x^a + b$	$(x - b)^{\frac{1}{a}}$
4.	$(ax + b)^c$	$\frac{(x^c - b)^{\frac{1}{c}}}{a}$
5.	$a^{bx}$	$\frac{^a \log x}{b}$
6.	$a^{bx+c}$	$\frac{^a \log x - c}{b}$
7.	$\frac{ax+b}{cx+d}$	$\frac{-dx+b}{cx-a}$
8.	$\sqrt[n]{ax+b}$	$\frac{x^n - b}{a}$
9.	${}^a \log x$	$a^x$



## Menentukan Fungsi

Jika fungsi komposisi dan fungsi lain diketahui:

Diketahui  $f(x)$  dan  $f \circ g(x) = h(x)$

maka  $g(x) = f^{-1}(h(x))$

Diketahui  $f(x)$  dan  $g \circ f(x) = h(x)$

maka  $g(x) = h(f^{-1}(x))$



# PAKET SOAL

## SOAL UN SMA IPA

1. Diketahui  $f(x) = x^2 - 4x + 6$  dan  $g(x) = 2x + 3$ . Fungsi komposisi  $(f \circ g)(x) = \dots$
- A.  $2x^2 - 8x + 12$       D.  $4x^2 + 4x + 3$   
B.  $2x^2 - 8x + 15$       E.  $4x^2 + 4x + 27$   
C.  $4x^2 + 4x + 15$

Catatan

## SOAL UN SMA IPA

2. Diketahui fungsi  $f(x) = 3x + 4$  dan  
 $g(x) = \frac{4x - 5}{2x + 1}; x \neq -\frac{1}{2}$  invers  $(fog)(x)$  adalah ....
- A.  $(fog)(x) = \frac{14}{-2 + 20}, x \neq 10$   
B.  $(fog)^{-1}(x) = \frac{x - 11}{-2x + 20}, x \neq 10$   
C.  $(fog)^{-1}(x) = \frac{x - 16}{-2x + 20}, x \neq 10$   
D.  $(fog)^{-1}(x) = \frac{x + 11}{-2x + 20}, x \neq 10$   
E.  $(fog)^{-1}(x) = \frac{x + 14}{-2x + 20}, x \neq 10$

## SOAL SBMPTN TKDU

3. Jika  $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{x+3}{x+1}$  maka nilai  $a-3$  agar  $f^{-1}(a+1)=2$  adalah ....
- A.  $-\frac{3}{2}$       D. 1  
B.  $\frac{1}{2}$       E. 2  
C. 0

**SOAL UN SMA IPA**

4. Diketahui fungsi  $f(x) = 2x - 3$  dan  $g(x) = x^2 + 2x - 3$ .  
 Komposisi fungsi  $(g \circ f)(x) = \dots$
- A.  $2x^2 + 4x - 9$       D.  $4x^2 + 8x$   
 B.  $2x^2 + 4x - 3$       E.  $4x^2 - 8x$   
 C.  $4x^2 + 6x - 18$

**SOAL SNMPTN K.DASAR**

5. Jika  $f(x) = 2x + 5$ ,  $g(x) = ax + 4$ , dan  $g(f(1)) = 25$  maka nilai  $g(1)$  adalah....
- A. 1      D. 6  
 B. 3      E. 7  
 C. 5

**SOAL UN SMA IPA**

6. Diketahui fungsi  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dan  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dirumuskan dengan  $f(x) = 2x - 1$  dan  $g(x) = \frac{x+3}{2-x}; x \neq 2$ .

Fungsi invers dari  $(fog)(x)$  adalah  $(fog)^{-1}(x) = \dots$

- A.  $(fog)^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x+3}, x \neq -3$   
 B.  $(fog)^{-1}(x) = \frac{2x-4}{x+3}, x \neq -3$   
 C.  $(fog)^{-1}(x) = \frac{2x+4}{x-3}, x \neq 3$   
 D.  $(fog)^{-1}(x) = \frac{-2x+4}{x+3}, x \neq -3$   
 E.  $(fog)^{-1}(x) = \frac{-2x-4}{x-3}, x \neq 3$

**SOAL UN SMA IPA**

7. Diketahui  $g(x) = \frac{x-4}{2x+7}, x \neq -\frac{7}{2}$ .

Invers fungsi  $g(x)$  adalah  $g^{-1}(x) = \dots$

- A.  $\frac{7x-4}{2x+1}, x \neq -\frac{1}{2}$       D.  $\frac{x+4}{2x-7}, x \neq \frac{7}{2}$   
 B.  $\frac{x-2}{7-4x}, x \neq \frac{7}{4}$       E.  $\frac{7x+4}{1-2x}, x \neq \frac{1}{2}$   
 C.  $\frac{2x-7}{x+4}, x \neq -4$

**SOAL UM UGM MATDAS**

8. Jika  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2}}$  dan

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 7}} \text{ maka } g(x+2) = \dots$$

- A.  $\frac{1}{x+3}$       D.  $x+3$   
B.  $\frac{1}{x-2}$       E.  $x+5$   
C.  $x-2$

**SOAL UN SMA IPA**

9. Diketahui  $f(x) = 2x + 5$  dan  $g(x) = \frac{x-1}{x+4}, x \neq -4$ ,

$$\text{maka } (f \circ g)(x) = \dots$$

A.  $\frac{7x-2}{x+4}, x \neq 4$   
B.  $\frac{2x+3}{x+4}, x \neq 4$   
C.  $\frac{2x+2}{x+4}, x \neq 4$

D.  $\frac{7x-18}{x-4}, x \neq 4$   
E.  $\frac{7x+22}{x+4}, x \neq 4$

**SOAL SBMPTN TKDU**

10. Jika  $f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{x-6}{x+3}$  maka nilai  $f^{-1}(-2)$  adalah

- ....  
A. -1      D. 2  
B. 0      E. 3  
C. 1

**SOAL SNMPTN K.DASAR**

11. Jika  $f(x) = \frac{x-2011}{x-1}$  maka  $(f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x)$

adalah...

- A.  $\frac{x+2011}{x-1}$       D.  $\frac{x-2011}{x-1}$   
B.  $\frac{x+2011}{x+1}$       E.  $\frac{-x+2011}{x-1}$   
C.  $\frac{x-2011}{x+1}$

**SOAL SIMAK UI TKDU**

12. Misalkan  $y = g(x)$  adalah invers dari fungsi

$f(x) = 3x^2 + 1$  dengan  $x < 0$ . Range dari  $\frac{1}{g(x)}$  adalah ....

- A.  $\{y | y \geq 1\}$       D.  $\{y | y > 0\}$   
B.  $\{y | y > 1\}$       E.  $\{y | y < 0\}$   
C.  $\left\{y | y > \frac{1}{3}\right\}$

**SOAL SBMPTN TKDU**

13. Jika  $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{2x-1}{x+1}$  maka nilai  $a$  yang memenuhi  $f^{-1}(a) = 1$  adalah ....

- A. -1      D. 1  
B.  $-\frac{1}{2}$       E. 2  
C.  $\frac{1}{2}$

**SOAL SIMAK UI MATDAS**

14. Jika  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ,  $x \neq \pm 2$  maka  $f^{-1}(x)$  adalah ....

- A.  $\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 2}}$   
B.  $\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$   
C.  $\frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$   
D.  $\frac{2x}{\sqrt{x^2 - 2}}, x \neq \pm\sqrt{2}$   
E.  $\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}, x \neq \pm 1$

**SOAL SNMPTN K.DASAR**15. Jika  $g(x+1) = 2x - 1$  dan  $f(g(x+1)) = 2x + 4$ maka  $f(0) = \dots$ 

- |      |       |
|------|-------|
| A. 6 | D. -4 |
| B. 5 | E. -6 |
| C. 3 |       |

**SOAL UN SMA IPS**16. Invers dari fungsi  $f(x)$  adalah  $f^{-1}(x)$ . Jika diketa-hui  $f(x) = \frac{3x+2}{x-4}$ ,  $x \neq 4$  maka  $f^{-1}(x) = \dots$ 

- |   |                                     |
|---|-------------------------------------|
| A. $\frac{4x+2}{x-3}$ , $x \neq 3$            | D. $\frac{4x-2}{3x-3}$ , $x \neq 1$ |
| B. $\frac{3x+2}{x-3}$ , $x \neq 3$            | E. $\frac{2x-3}{x+4}$ , $x \neq -4$ |
| C. $\frac{x-4}{3x+2}$ , $x \neq -\frac{2}{3}$ |                                     |

**SOAL UN SMA IPS**17. Diketahui  $f(x) = -2x + 3$  dan  $g(x) = x^2 - 4x + 5$ .Komposisi fungsi  $(gof)(x) = \dots$ 

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| A. $4x^2 - 4x + 2$ | D. $4x^2 + 2x + 2$ |
| B. $4x^2 - 4x + 7$ | E. $4x^2 + 8x + 2$ |
| C. $4x^2 - 6x + 7$ |                    |

**SOAL SIMAK UI MATDAS**18. Jika  $f(x) = {}^5 \log(x+1) + {}^5 \log\left(\frac{1}{x-2}\right)$ maka  $f^{-1} = ({}^5 \log 2) = \dots$ 

- |      |      |
|------|------|
| A. 3 | D. 6 |
| B. 4 | E. 7 |
| C. 5 |      |

**SOAL STANDAR SBMPTN**

19. Jika  $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$  maka fungsi  $f(x)$  terdefinisi pada daerah ....
- $0 \leq x \leq 3$
  - $0 < x < 3$
  - $x \leq 0$  atau  $x \geq 3$
  - $-3 \leq x \leq 0$
  - $x \leq -3$  atau  $x \geq 0$

**SOAL SIMAK UI TKDU**

20. Diketahui  $f: R \rightarrow R$  dan  $h: R \rightarrow R$  dengan  $f(x) = 3^{x-2}$  dan  $h(x) = 3x^2 + 3$ . Untuk  $x \neq 2$ , misalkan  $a$  adalah nilai dari  $f^{-1}(h(x) - 3x^2)$  maka jumlah kebalikan dari akar-akar persamaan kuadrat  $ax^2 - 9x + 4 = 0$  adalah ....
- $-\frac{9}{4}$
  - $-\frac{3}{4}$
  - $-\frac{4}{9}$
  - $\frac{3}{4}$
  - $\frac{9}{4}$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

21. Jika  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  dan
- $$(f \circ g)(x) = \frac{1}{x-2} \sqrt{x^2 - 4x + 5} \text{ maka } g(x-3) = \dots$$
- $\frac{1}{x-5}$
  - $\frac{1}{x+1}$
  - $\frac{1}{x-3}$
  - $\frac{1}{-x-3}$
  - $\frac{1}{x+3}$

**SOAL SIMAK UI TKDU**

22. Misalkan,  $f(x)$  terdefinisi untuk semua bilangan real  $x$ . Jika  $f(x) > 0$  untuk setiap  $x$  dan  $f(a) \cdot f(b) = f(a+b)$  untuk setiap  $a$  dan  $b$ , pernyataan yang BENAR adalah ....
- $f(0) = 1$
  - $f(-a) = 1/f(a)$  untuk setiap  $a$
  - $f(a) = \sqrt[3]{f(3a)}$  untuk setiap  $a$
  - $f(b) > f(a)$  jika  $b > a$

# Pembahasan

## 1. Pembahasan:

Fungsi komposisi dari  $f(x)$  dan  $g(x)$  adalah:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Diketahui:

$$f(x) = x^2 - 4x + 6 \text{ dan } g(x) = 2x + 3$$

Maka,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f(2x + 3)$$

$$= (2x + 3)^2 - 4(2x + 3) + 6$$

$$= 4x^2 + 12x + 9 - 8x - 12 + 6$$

$$= 4x^2 + 4x + 3$$

Catatan

Jawaban: D

## 2. Pembahasan:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Jika  $h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}; x \neq -\frac{d}{c}$  maka:

$$h^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}; x \neq \frac{a}{c}$$

Diketahui:

$$f(x) = 3x + 4 \text{ dan } g(x) = \frac{4x - 5}{2x + 1}, x \neq -\frac{1}{2} \text{ maka:}$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f\left(\frac{4x - 5}{2x + 1}\right)$$

$$= 3\left(\frac{4x - 5}{2x + 1}\right) + 4$$

**Catatan**

$$\begin{aligned}
 &= \frac{12x-15}{2x+1} + \frac{4(2x+1)}{2x+1} \\
 &= \frac{12x+8x-15+4}{2x+1} = \frac{20x-11}{2x+1}
 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$(fog)^{-1}(x) = \frac{-x-11}{2x-20} = \frac{x+11}{-2x+20}; x \neq 10$$

**Jawaban: D**

**3. Pembahasan:**

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{x+3}{x+1}$$

$$\text{Misal; } \frac{1}{x+1} = a \Rightarrow a(x+1) = 1$$

$$\Rightarrow ax+a=1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-a}{a}$$

$$\text{Sehingga, } f(a) = \frac{\frac{1-a}{a} + 3}{\frac{1-a}{a} + 1}$$

$$= \frac{\frac{1-a+3a}{a}}{\frac{1-a+a}{a}}$$

$$= \frac{1+2a}{1} = 1+2a$$

$$\text{Dari } f(a) = 1+2a \text{ maka } f^{-1}(a) = \frac{a-1}{2}$$

$$\text{Diketahui, } f^{-1}(a+1) = 2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(a+1) = \frac{(a+1)-1}{2}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 4$$

$$\text{Jadi, nilai dari } a - 3 = 4 - 3 = 1$$

**Jawaban: D**

**4. Pembahasan:**

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Diketahui:

$$f(x) = 2x - 3 \text{ dan } g(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$\text{Maka: } (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g(2x - 3)$$

$$= (2x - 3)^2 + 2(2x - 3) - 3$$

$$= 4x^2 - 12x + 9 + 4x - 6 - 3$$

$$= 4x^2 - 8x$$

**Catatan**

**Jawaban: E**

**5. Pembahasan:**

Diketahui:

$$f(x) = 2x + 5$$

$$g(x) = ax + 4$$

$$\text{Jika, } g(f(1)) = 25$$

$$\Rightarrow g(2.1 + 5) = 25$$

$$\Rightarrow g(7) = 25$$

$$\Rightarrow a.7 + 4 = 25$$

$$\Rightarrow a = \frac{25 - 4}{7} = 3$$

$$\text{Jadi, } g(x) = 3x + 4 \Rightarrow g(1) = 3.1 + 4 = 7$$

**Jawaban: E**

**6. Pembahasan:**

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

Jika  $h(x) = \frac{ax + b}{cx + d}; x \neq -\frac{d}{c}$  maka:

$$h^{-1}(x) = \frac{-dx + b}{cx - a}; x \neq \frac{a}{c}$$

Diketahui:

$$f(x) = 2x - 1 \text{ dan } g(x) = \frac{x+3}{2-x}, x \neq 2$$

**Catatan**

Maka:

$$\begin{aligned}
 (fog)(x) &= f(g(x)) \\
 &= f\left(\frac{x+3}{2-x}\right) \\
 &= 2\left(\frac{x+3}{2-x}\right) - 1 \\
 &= \frac{2x+6}{2-x} - \frac{2-x}{2-x} \\
 &= \frac{3x+4}{2-x} \\
 (fog)(x) &= \frac{3x+4}{-x+2}
 \end{aligned}$$

Sehingga:

$$(fog)^{-1}(x) = \frac{-2x+4}{-x-3} = \frac{2x-4}{x+3}; x \neq -3$$

**Jawaban: B****7. Pembahasan:**

Jika  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ;  $x \neq -\frac{d}{c}$  maka invers fung-

si  $f(x)$  atau  $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ ;  $x \neq -\frac{a}{c}$

Diketahui:

$$g(x) = \frac{x-4}{2x+7}; x \neq -\frac{7}{2}$$

Maka, invers fungsi  $g(x)$  adalah:

$$\begin{aligned}
 g^{-1}(x) &= \frac{-7x-4}{2x-1}; x \neq \frac{1}{2} \\
 &= \frac{7x+4}{1-2x}; x \neq \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: E**

**8. Pembahasan:**

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 7}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(g(x))^2 - 2}} = \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2 - 2}}$$

$$g(x) = x + 3$$

$$g(x+2) = (x+2) + 3$$

$$= x + 5$$

Catatan

Jawaban: E

**9. Pembahasan:**

Diketahui:  $f(x) = 2x + 5$  dan  $g(x) = \frac{x-1}{x+4}, x \neq -4$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f\left(\frac{x-1}{x+4}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x-1}{x+4}\right) + 5$$

$$= \frac{2x-2}{x+4} + 5 \cdot \frac{(x+4)}{x+4}$$

$$= \frac{(2x-2) + (5x+20)}{x+4} = \frac{7x+18}{x+4}$$

Jawaban: D

**10. Pembahasan:**

Diketahui:  $f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{x-6}{x+3}$

Ditanyakan:  $f^{-1}(-2) = \dots ?$

Jawab:

Misal,  $\frac{1}{x-1} = p \Rightarrow p(x-1) = 1$

**Catatan**

$$\Rightarrow px - p = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+p}{p}$$

Sehingga:

$$f(p) = \frac{\left(\frac{1+p}{p}\right) - 6}{\left(\frac{1+p}{p}\right) + 3}$$

$$= \frac{\frac{1+p}{p} - 6p}{\frac{1+p}{p} + 3p} = \frac{1-5p}{1+4p} = \frac{-5p+1}{4p+1}$$

$$\text{Maka, } f^{-1}(p) = \frac{-p+1}{4p+5}$$

Jadi, nilai dari:

$$f^{-1}(-2) = \frac{-(-2)+1}{4(-2)+5} = \frac{3}{-3} = -1$$

**Jawaban: A**

**11. Pembahasan:**

$$f(x) = \frac{x-2011}{x-1}$$

$$f \circ f(x) = \frac{\left(\frac{x-2011}{x-1}\right) - 2011}{\left(\frac{x-2011}{x-1}\right) - 1}$$

$$= \frac{\left(\frac{(x-2011)-2011x+2011}{x-1}\right)}{\left(\frac{(x-2011)-x+1}{x-1}\right)}$$

$$= \frac{-2010x}{-2010} = x$$

$$f \circ f \circ f \circ f(x) = x$$

$$f \circ f \circ f \circ f \circ f(x) = \frac{x-2011}{x-1}$$

**Jawaban: D**

## 12. Pembahasan:

Karena  $g = f^{-1}$ , berlaku range  $g = \text{domain } f$ .

Range  $g = \text{domain } f$

$$= \{t \mid t < 0\}$$

$$\text{Range } \frac{1}{g} = \left\{ \frac{1}{t} \mid t < 0 \right\}$$

$$= \left\{ \frac{1}{t} \mid \frac{1}{t} < 0 \right\}$$

$$= \{s \mid s < 0\}$$

$$= \{y \mid y < 0\}$$

Catatan

Jawaban: E

## 13. Pembahasan:

Diketahui:

$$f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{2x-1}{x+1} \text{ dan } f^{-1}(a) = 1$$

Misal:

$$\frac{1}{x+1} = a \Rightarrow a(x+1) = 1$$

$$\Rightarrow ax + a = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{1-a}{a}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{2\left(\frac{1-a}{a}\right) - 1}{\left(\frac{1-a}{a}\right) + 1} \\ &= \frac{\left(\frac{2-2a}{a}\right) - \frac{a}{a}}{\left(\frac{1-a}{a}\right) + \frac{a}{a}} = \frac{\frac{2-3a}{a}}{\frac{1}{a}} = 2-3a \end{aligned}$$

Maka:

$$f^{-1}(a) = \frac{2-a}{3}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{2-a}{3} \Rightarrow 3 = 2-a \Rightarrow a = -1$$

Jawaban: A



**Catatan****14. Pembahasan:**

$$f(x) = y = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$

$$y^2(x^2 - 4) = x^2$$

$$y^2x^2 - 4y^2 = x^2$$

$$x^2(y^2 - 1) = 4y^2$$

$$x^2 = \frac{4y^2}{y^2 - 1} \Rightarrow x = \frac{2y}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

$$\text{Dengan demikian, } f^{-1}(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

**Jawaban: B****15. Pembahasan:**

$$g(x+1) = 2x - 1$$

$$f(g(x+1)) = 2x + 4$$

$$f(0) = \dots ?$$

**Jawab:**

$$f(g(x+1)) = 2x + 4$$

$$f(2x - 1) = 2x + 4$$

$$\text{Misal, } 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Sehingga, } f(0) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 5$$

**Jawaban: B****16. Pembahasan:**

Jika  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ;  $x \neq -\frac{d}{c}$  maka invers fung-

si  $f(x)$  atau  $f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$ ;  $x \neq \frac{a}{c}$

**Diketahui:**

$$f(x) = \frac{3x+2}{x-4}, x \neq 4$$

Maka,

$$f(x)^{-1} = \frac{4x+2}{x-3}, x \neq 3$$

**Jawaban: A**

**17. Pembahasan:**

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

Diketahui:

$$f(x) = -2x + 3 \text{ dan } g(x) = x^2 - 4x + 5$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} (gof)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(-2x+3) \\ &= (-2x+3)^2 - 4(-2x+3) + 5 \\ &= 4x^2 - 12x + 9 + 8x - 12 + 5 \\ &= 4x^2 - 4x + 2 \end{aligned}$$

**Jawaban: A**

**18. Pembahasan:**

$$f^{-1}(a) = b \Leftrightarrow f(b) = a$$

$$\begin{aligned} f(x) &= {}^5 \log(x+1) + {}^5 \log \frac{1}{x-2} \\ &= {}^5 \log \frac{(x+1)}{(x-2)} \end{aligned}$$

Misal,  $f^{-1}({}^5 \log 2) = a$

Maka  $f(a) = {}^5 \log 2$

$${}^5 \log \frac{a+1}{a-2} = {}^5 \log 2$$

$$\frac{a+1}{a-2} = 2$$

$$a+1 = 2a-4$$

$$a = 5$$

**Jawaban: C**

## Catatan

### 19. Pembahasan:

Diketahui:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} \text{ maka } f(x) \text{ terdefinisi untuk:}$$

$$x^2 - 3x \geq 0$$

$$\Rightarrow x(x-3) \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq 0 \text{ atau } x \geq 3$$

Jawaban: C

### 20. Pembahasan:

-  $f(x) = 3^{x-2}, h(x) = 3x^2 + 3$

$$f^{-1}(h(x) - 3x^2) = a$$

$$\text{Maka, } f(a) = h(x) - 3x^2$$

$$3^{a-2} = (3x^2 + 3) - 3x^2$$

$$3^{a-2} = 3$$

$$\text{Maka, } a - 2 = 1$$

$$a = 3$$

-  $ax^2 - 9x + 4 = 0$

$$3x^2 - 9x + 4 = 0, \text{ misal akar-akar } x_1 \text{ dan } x_2.$$

$$\text{Maka, } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{b}{c} = -\frac{9}{4}$$

Jawaban: E

### 21. Pembahasan:

Diketahui:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\text{Dan } (f \circ g)(x) = \frac{1}{x-2} \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

$$\Rightarrow f(g(x)) = \frac{1}{x-2} \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(g(x))^2 + 1} = \frac{1}{x-2} \sqrt{x^2 - 4x + 5}$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 + 1 = \left( \frac{1}{x-2} \right)^2 (x^2 - 4x + 5)$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2} - 1$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x-2)^2} - \frac{(x-2)^2}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 = \frac{x^2 - 4x + 5 - (x^2 - 4x + 4)}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow (g(x))^2 = \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{(x-2)}$$

Jadi,  $g(x-3) = \frac{1}{((x-3)-2)} = \frac{1}{x-5}$

**Jawaban: A**

## 22. Pembahasan:

Fungsi dengan ciri-ciri  $f(x) > 0$  untuk setiap  $x$  dan  $f(a) \cdot f(b) = f(a+b)$  untuk setiap  $a$  dan  $b$  adalah fungsi eksponensial.

Jadi,  $f(x) = p^x$ ,  $p \in \mathbb{R}$

(1)  $f(0) = P^0 = 1$

$$(2) f(-a) = P^{-a} = \frac{1}{P^a} = \frac{1}{f(a)}, \text{ untuk setiap } a.$$

$$(3) f(a) = Pa = P^{\frac{3a}{3}} = \sqrt[3]{P^{3a}} = \sqrt[3]{f(3a)},$$

untuk setiap  $a$ .

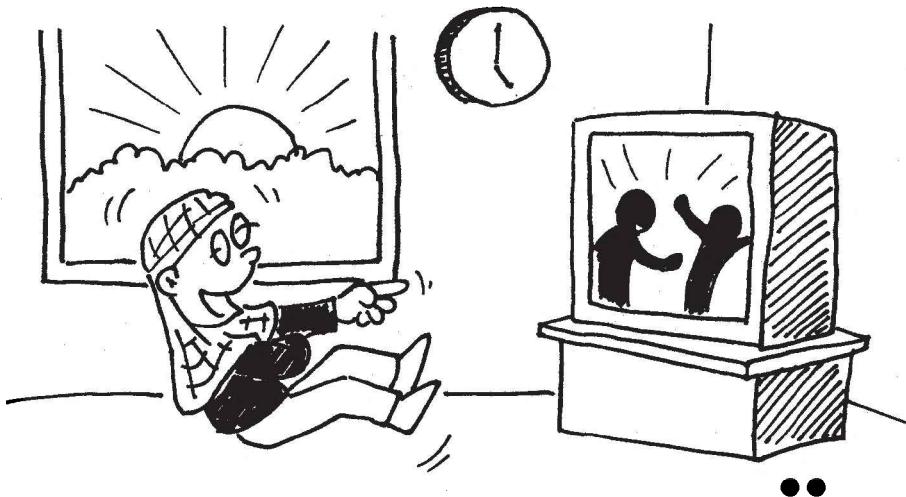
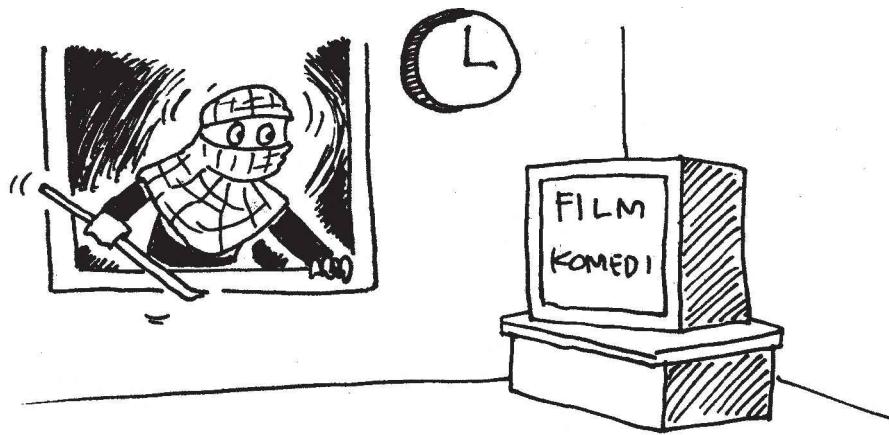
$$(4) \text{ Misal } P = \frac{1}{2}$$

$$\text{Jika } b > a \text{ maka } f(b) = \left(\frac{1}{2}\right)^b < \left(\frac{1}{2}\right)^a = f(a)$$

Jadi, jika  $b > a$ , tidak berlaku  $f(b) > f(a)$ .

Pernyataan 1, 2, dan 3 benar.

**Jawaban: A**



$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$

$$y = ut \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

12

$$va + vb = u$$

$$va = u - vb$$

$$va = u - \frac{1}{2}gt^2$$

$$vb = \frac{1}{2}gt^2$$

$$(1-e^{t^2})$$

$$2u(1+e^{-t^2})$$

$$-1/2eu(t^2+1)$$

$$2u(1+e^{-t^2})$$

$$-1/2eu(t^2+1)$$

$$2u(1+e^{-t^2})$$

$$-1/2eu(t^2+1)$$

# LIMIT



## A Aturan Dasar Pengeraaan

1. Jika  $f(x) = k$  maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = k$ ,  $k$  konstanta,  $k$  dan  $a \in$  real
2. Jika  $f(x) = x$  maka  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$
3.  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
4. Jika  $k$  konstanta maka  $\lim_{x \rightarrow a} k.f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
5.  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x).g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
6.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
7.  $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^n = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\}^n$



## B Rumus-Rumus Penting

### Model 1

Catatan:

Bentuk limit  $\frac{f(x)}{g(x)}$  dan hasilnya  $\frac{0}{0}$  atau  $\frac{\infty}{\infty}$

### Gunakan dalil L'Hospital

Jika  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} = \frac{0}{0}$

Penyelesaian:  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \neq \frac{0}{0}$

(Turunkan bagian atas, turunkan bagian bawah, lalu substitusikan nilai c).

### Model 2

Catatan:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{\sqrt{n+bx} - \sqrt{n+cx}} = \frac{2a\sqrt{n}}{b-c}$$

dan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{n+bx} - \sqrt{n+cx}}{ax} = \frac{b-c}{2a\sqrt{n}}$$

### Model 3

Catatan:

Bentuk:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots}$

(Ket: m adalah pangkat tertinggi pembilang dan n adalah pangkat tertinggi penyebut).

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^m + \dots}{bx^n + \dots} = \begin{cases} \infty, & \text{jika } m > n \\ \frac{a}{b}, & \text{jika } m = n \\ 0, & \text{jika } m < n \end{cases}$$

### Model 4

Catatan:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}$$

$$= \begin{cases} \text{Jika } a > p \Rightarrow \text{hasil} = +\infty \\ \text{Jika } a = p \Rightarrow \text{hasil} = \frac{(b-q)}{2\sqrt{a}} \\ \text{Jika } a < p \Rightarrow \text{hasil} = -\infty \end{cases}$$

Variasinya:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r}$$

$$-\sqrt{mx^2 + nx + s} + \dots$$

Jika  $\sqrt{a} - \sqrt{p} - \sqrt{m} + \dots = 0$ , maka nilai limitnya

$$= \frac{b}{2\sqrt{a}} - \frac{q}{2\sqrt{p}} - \frac{n}{2\sqrt{m}} + \dots$$

### Model 5

Catatan:

Bentuk  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - px + q$

dengan  $p^2 = a$ , maka

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - px + q = \frac{b}{2\sqrt{a}} + q$$

### Model 6

Catatan:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d} - \sqrt[3]{ax^3 + mx^2 + nx + s} \right) \\ &= \frac{(b - m)}{3 \left( \sqrt[3]{a^2} \right)} \end{aligned}$$

### Model 7

Rumus Praktis

Catatan:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax \pm b} - \sqrt{cx \pm d} = \begin{cases} \infty, & \text{untuk } a > c \\ 0, & \text{untuk } a = c \\ -\infty, & \text{untuk } a < c \end{cases}$$



# Limit Fungsi Trigonometri

Perhatikan Polanya!

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{nx} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\sin nx} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{\tan nx} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin m(x-a)}{n(x-a)} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tan m(x-a)}{n(x-a)} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{m(x-a)}{\sin n(x-a)} = \frac{m}{n}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{m(x-a)}{\tan n(x-a)} = \frac{m}{n}$$

Rumus bantu yang sering dipakai:

1.  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2.  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
3.  $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$
4.  $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$
5.  $1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x$

**Trik Praktis:**

$$1 - \cos ax \Rightarrow \text{ambil } 1 - \cos ax = \frac{a^2}{2}$$

$$\cos ax - 1 \Rightarrow \text{ambil } 1 - \cos ax = -\frac{a^2}{2}$$



# PAKET SOAL

SOAL UN SMA IPA

1. Nilai dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{25x^2 - 9x - 16} - 5x + 3 \right) = \dots$

- A.  $-\frac{39}{10}$

B.  $-\frac{9}{10}$

C.  $\frac{21}{10}$

D.  $\frac{39}{10}$

E.  $\infty$

Catatan

SOAL UN SMA IPA

- $$2. \text{ Nilai dari } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{81x^2 - 10x + 3} - 9x + 1 \right) = \dots$$

- A.  $\frac{4}{9}$       D.  $\frac{5}{3}$   
B.  $\frac{2}{3}$       E.  $\frac{5}{2}$   
C. 1

SOAL UN SMA IPA

3. Nilai  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{9x^2 + 6x - 2} - 3x + 1)$  adalah ....



SOAL UN SMA IPA

4. Nilai  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3} = \dots$

- A.  $-\frac{1}{4}$       D. 2  
B.  $-\frac{1}{2}$       E. 4  
C. 1

SOAL UM UGM TKDU



SOAL UN SMA IPA

6. Nilai  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)}{\sqrt{x}-2} = \dots$

A. 0      D. 12  
 B. 4      E. 16  
 C. 8

SOAL UM UGM K.DASAR

7. Nilai dari  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{6}{x^2 - x - 2} - \frac{2}{x-2} \right) = \dots$

A. -1      D.  $\frac{1}{3}$   
 B.  $-\frac{2}{3}$       E.  $\frac{2}{3}$   
 C.  $-\frac{1}{3}$

SOAL UN SMA IPA

8. Nilai dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1) \cdot \tan(x-2)}{x^2 - 4} = \dots$

SOAL UN SMA IPA

9. Nilai  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{\sin x - \cos x} = \dots$

A.  $-2\sqrt{2}$       D.  $\sqrt{2}$   
 B.  $-\sqrt{2}$       E.  $2\sqrt{2}$   
 C.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

**SOAL UN SMA IPA**

10. Nilai  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \tan 2x} = \dots$

A. 4

D. -2

B. 2

E. -4

C. -1

**SOAL UM UGM SAINTEK**

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \tan x} = \dots$

A. 0

D.  $\frac{3}{2}$ B.  $\frac{1}{2}$ 

E. 3

C.  $\frac{3}{4}$ **SOAL UN SMA IPA**

12. Nilai dari  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \tan x}$  adalah ...

A. -8

D. 2

B. 0

E. 4

C. 1

**SOAL UN SMA IPA**

13. Nilai  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x \sin 2x} = \dots$

A.  $\frac{1}{8}$ D.  $\frac{1}{2}$ B.  $\frac{1}{6}$ 

E. 1

C.  $\frac{1}{4}$

**Catatan****SOAL SIMAK UI K.DASAR**

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5+2\sqrt{x}} - \sqrt{5-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} = \dots$$

A.  $\frac{2}{2\sqrt{5}}$

D.  $\frac{4}{5\sqrt{5}}$

B.  $2\sqrt{5}$

E.  $\frac{4}{5}\sqrt{5}$

C.  $\frac{2}{5}\sqrt{5}$

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3\tan x \sin x}{1-\cos x}} = \dots$$

A. 6

D. 1

B.  $\sqrt{6}$

E. 0

C.  $\sqrt{3}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

$$16. \text{Jika } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 2, \text{ maka nilai } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x}} \text{ adalah } \dots$$

A. -4

D. 2

B. -2

E. 4

C. -1

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{\sqrt{4x^2+3x}} = \dots$$

A.  $-\infty$

D.  $\frac{1}{2}$

B.  $-\frac{1}{2}$

E.  $\infty$

C. 0

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\sin^2 x - \cos 2x + 1} = \dots$$

A. 1

D.  $-\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{3}$

E. -1

C.  $\frac{2}{3}$

**SOAL SIMAK UI SAINTEK**

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} = \dots$$

A. -1

D.  $\frac{1}{4}$

B.  $-\frac{1}{4}$

E. 1

C. 0

**SOAL SNMPTN K.IPA**

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} = \dots$$

A. 1

D.  $-\sqrt{3}$

B. 0

E.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

C.  $-\sqrt{2}$

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \cos x + 1}{x \tan x} = \dots$$

A.  $\frac{2}{3}$

D. -1

B.  $\frac{1}{2}$

E. -2

C.  $-\frac{1}{2}$

**SOAL UM UGM**

$$22. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - (a+1)x^2 + ax}{(x^2 - a) \tan(x-1)} = \dots$$

A. 1

D. 0

B.  $1-a$

E.  $2-a$

C. a

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

23. Diberikan  $f(x) = \sin^2 x$ . Jika  $f'(x)$  menyatakan turunan pertama dari  $f(x)$ , maka

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \left\{ f'(x + \frac{1}{h}) - f'(x) \right\} = \dots$$

- A.  $\sin 2x$                       D.  $2 \sin x$   
B.  $-\cos 2x$                       E.  $-2 \cos x$   
C.  $2 \cos 2x$

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x \tan x} = \dots$$

- A. 2                              D.  $-\frac{1}{2}$   
B.  $\frac{1}{2}$                               E. -2  
C. -1

**SOAL SNMPTN K.IPA**

25. Diketahui fungsi  $g$  kontinu di  $x = 3$   
dan  $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$ .

Nilai  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( g(x) \frac{x-3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \right)$  adalah ....

- A.  $4\sqrt{3}$                               D. 4  
B.  $2\sqrt{3}$                               E. 2  
C.  $\sqrt{3}$

# Pembahasan

## 1. Pembahasan:

Nilai dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - px + q)$

dengan syarat  $p^2 = a$  adalah:

$$\frac{b}{2\sqrt{a}} + q$$

Nilai dari:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{25x^2 - 9x - 16} - 5x + 3)$$

$$= \frac{-9}{2\sqrt{25}} + 3$$

$$= \frac{-9}{10} + \frac{30}{10} = \frac{21}{10}$$

Catatan

Jawaban: C

## 2. Pembahasan:

$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} - px + q)$  dengan  $p^2 = a$

maka nilainya adalah:

$$\frac{b}{2\sqrt{a}} + q$$

Sehingga:

Nilai dari  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{81x^2 - 10x + 3} - 9x + 1)$

$$= \frac{-10}{2\sqrt{81}} + 1$$

$$= \frac{-10}{18} + \frac{18}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}$$

Jawaban: A

**Catatan****3. Pembahasan:**

$$\text{Hasil dari } \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{9x^2 + 6x - 2} - 3x + 1 \right)$$

$$= \frac{6}{2\sqrt{9}} + 1$$

$$= \frac{6}{6} + 1 = 2$$

**Jawaban: D****4. Pembahasan:**

Nilai dari  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3}$  adalah

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3} \cdot \frac{2 + \sqrt{x+1}}{2 + \sqrt{x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4 - (x+1)}{(x-3)(2 + \sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)(2 + \sqrt{x+1})} = \frac{-1}{2 + \sqrt{3+1}} = -\frac{1}{4}$$

Atau, dengan cara L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{1} = -\frac{1}{2\sqrt{3+1}} = -\frac{1}{4}$$

**Jawaban: A****5. Pembahasan:**

$$a = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{2 - \sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{0 - \frac{1}{\sqrt{x+2}}}$$

$$= \frac{4}{-\frac{1}{4}} = -16$$

Sehingga, nilai dari  $4 - a = 4 - (-16) = 20$

**Jawaban: E**

**6. Pembahasan:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \times \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x}+2 = \sqrt{4}+2=4\end{aligned}$$

**Cara lain:**

Dalil L'Hopital

Jika  $\frac{f(a)}{g(a)} \underset{a}{\sim}$  atau  $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{0}{0}$  maka:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\frac{1}{\sqrt{x^2-2}}} \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\frac{1}{\frac{-1}{2\sqrt{x^2}}}} \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2}}}} \\&= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} \\&= \lim_{x \rightarrow 4} 2\sqrt{x} = 2\sqrt{4} = 2.2=4\end{aligned}$$

**Jawaban: B****7. Pembahasan:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{6}{x^2-x-2} - \frac{2}{x-2} \right) \\= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{6}{(x-2)(x+1)} - \frac{2}{(x-2)} \right)\end{aligned}$$

**Catatan**

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{6-2(x+1)}{(x-2)(x+1)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{-2x+4}{(x-2)(x+1)} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{x+1} = \frac{-2}{3}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: B****8. Pembahasan:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a$$

Nilai dari:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+1) \tan(x-2)}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2x+1) \tan(x-2)}{(x+2)(x-2)} \\
 &= \frac{(2 \cdot 2 + 1)}{2+2} \cdot 1 = \frac{5}{4} = 1,25
 \end{aligned}$$

**Jawaban: E****9. Pembahasan:**

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin x - \cos x} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x - \cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{(\cos x - \sin x)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} -\frac{1}{\cos x} \\
 &= -\frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} \\
 &= -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: B****10. Pembahasan:**

Dalam penyelesaian limit, jika bertemu dengan  $\cos 2x$  maka diganti menjadi  $1 - 2\sin^2 x$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - 1}{x \tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\sin^2 2x - 1}{x \tan 2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\sin^2 2x}{x \tan 2x} = \frac{-2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2} = -4
 \end{aligned}$$

**Jawaban: E****11. Pembahasan:**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3\cos^2 x \cdot (-\sin x)}{\tan x + x \cdot \sec^2 x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{+3 \cdot \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{x}}{\frac{\tan x}{x} + \frac{x}{x} \cdot \sec^2 x} \\
 &= \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{1 + 1} \\
 &= \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: D**

## Catatan

### 12. Pembahasan:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\tan x} = 1$$

Pada setiap hitung limit, setiap hitung "cos x" harus dirubah.

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$$

Nilai dari

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \tan x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \sin x \cdot \sin x}{x \cdot \tan x} = 2 \cdot 1 = 2$$

Jawaban: D

### 13. Pembahasan:

Dalam menentukan nilai limit, setiap  $\cos 2A$  dirubah menjadi:

$$1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} A$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{2x \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{2x \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{2x \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \sin x}{2x \sin 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin x}{2x} \cdot \frac{\sin x}{\sin 2x} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Jawaban: D

**Catatan****14. Pembahasan:**

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+2\sqrt{x}} - \sqrt{5-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5+2\sqrt{x}} - \sqrt{5-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{5+2\sqrt{x}} + \sqrt{5-2\sqrt{x}}}{\sqrt{5+2\sqrt{x}} + \sqrt{5-2\sqrt{x}}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5+2\sqrt{x}) - (5-2\sqrt{x})}{\sqrt{x} [\sqrt{5+2\sqrt{x}} + \sqrt{5-2\sqrt{x}}]} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\sqrt{x}}{\sqrt{x} [\sqrt{5+2\sqrt{x}} + \sqrt{5-2\sqrt{x}}]} \\
 &= \frac{4}{\sqrt{5+2\sqrt{5}}} \\
 &= \frac{4}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: C****15. Pembahasan:**

Dalam hitung limit, setiap nilai  $1 - \cos A$  diubah menjadi  $2 \sin^2 \frac{1}{2}A$

$$\begin{aligned}
 & \text{Nilai dari } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{3 \tan x \sin x}{1 - \cos x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{3 \tan x \sin x}{2 \sin^2 \frac{1}{2}x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{3 \tan x \sin x}{2 \cdot \frac{1}{2}x \cdot \frac{1}{2}x}} \\
 &= \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{3}{\frac{1}{2}}} = \sqrt{6}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: B**

**Catatan****16. Pembahasan:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x}} = \dots ?$$

Jawab:

$$\begin{aligned}\text{Lim}_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} &= 2 \\ \text{Lim}_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x}} &= \text{Lim}_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x}} \\ &= \text{Lim}_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \cdot \text{Lim}_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x}} \\ &= 2 \text{Lim}_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{-2\sqrt{1-x}}{x}} \\ &= 2 \cdot -2\sqrt{1-0} = -4\end{aligned}$$

**Jawaban: A****17. Pembahasan:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+7}{\sqrt{4x^2 + 3x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+7}{\sqrt{4(-x)^2 + 3(-x)}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x+7}{\sqrt{4x^2 - 3x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\left(-1 + \frac{7}{x}\right)}{x\sqrt{4 - \frac{3}{x}}} \\ &= \frac{-1 + 0}{\sqrt{4 - 0}} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

**Jawaban: B****18. Pembahasan:**

Setiap hitung limit, nilai cosinus harus diubah menjadi sinus dengan persamaan trigonometrinya:

- $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$
- $\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{A}{2}$

$$\text{Nilai dari: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\sin^2 x - \cos 2x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\sin^2 x - (1 - 2\sin^2 x) + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{\sin^2 x - 1 + 2\sin^2 x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{3\sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan x}{3 \sin x, \sin x} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

**Jawaban: B**

**19. Pembahasan:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\tan x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3} \cdot \frac{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\tan x) - (1+\sin x)}{x^3 [\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}]} \cdot \frac{\cos x}{\cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x [1 - \cos x]}{x^3 \cdot \cos x \cdot [\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot 2 \sin \frac{1}{2}x \cdot \sin \frac{1}{2}x}{x^3 \cdot \cos x \cdot [\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}]}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{\sin \frac{1}{2}x}{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\tan x} + \sqrt{1+\sin x}}$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}$$

**Jawaban: D**

## Catatan

### 20. Pembahasan:

Rumus identitas trigonometri:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\text{dan } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2 \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2 \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= \tan\left(0 - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}\end{aligned}$$

Jawaban: D

### 21. Pembahasan:

Setiap hitung limit, nilai cosinus harus diubah menjadi sinus dengan persamaan trigonometrinya:

- $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$
- $\cos A = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}A$

$$\text{Nilai dari: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \cos x + 1}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - \left(1 - 2\sin^2 \frac{1}{2}x\right) + 1}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - 1 + 2\sin^2 \frac{1}{2}x + 1}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x + 2\sin^2 \frac{1}{2}x}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x \tan x} + \frac{2\sin^2 \frac{1}{2}x}{x \tan x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \sin x}{x \tan x} + \frac{2 \sin \frac{1}{2} x \cdot \sin \frac{1}{2} x}{x \tan x} \\
 &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: A****22. Pembahasan:**

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - (a+1)x^2 + ax}{(x^2 - a)\tan(x-1)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-a)(x-1)}{(x^2 - a)\tan(x-1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-a)}{(x^2 - a)} = \frac{1(1-a)}{1^2 - a} \\
 &= \frac{1-a}{1-a} = 1
 \end{aligned}$$

**Jawaban: A****23. Pembahasan:**

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

Untuk  $t = \frac{1}{h}$  maka jika  $h \rightarrow \sim$  berakibat  $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow \sim} h \left\{ f' \left( x + \frac{1}{h} \right) - f'(x) \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x+t) - f'(x)}{t} \\
 &= f''(x) \\
 &= 2 \cos 2x
 \end{aligned}$$

**Jawaban: C****24. Pembahasan:**

Dalam hitung limit, bentuk  $\cos x$  diubah menjadi bentuk  $\sin x$ .

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$$

**Catatan**

$$\text{Nilai dari } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x - x^2 (1 - \sin^2 x)}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x - x^2 + x^2 \sin^2 x}{x \tan x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin^2 x}{x \tan x} - \frac{x^2}{x \tan x} + \frac{x^2 \sin^2 x}{x \tan x}$$

$$= 3 - 1 + 0 = 2$$

**Jawaban: A**

**25. Pembahasan:**

Fungsi g kontinu di  $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left( g(x) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \right) = \dots ?$$

Jawab:

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 3} \left( g(x) \cdot \frac{x-3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} g(x) \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \\ &= 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{3})(\sqrt{x} - \sqrt{3})}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} \\ &= 2 \cdot 2\sqrt{3} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

**Jawaban: A**

$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$
$$y = ut \sin(\alpha) - 1/2 gt^2$$

13

$$va + vb = u$$

$$va =$$

$$va = 1/2 u(1-e^{-2})$$

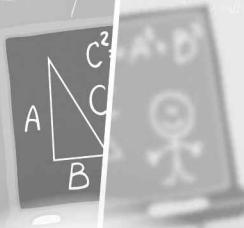
$$vb = 1/2 u(1-e^{-2})$$

$$2u(1+e^{-2})$$

$$-1/2eu(1-e^{-2})$$

$$(1-e^{-2})^2$$

# DIFFERENSIAL



## A Pengertian

Misalkan,  $y$  adalah fungsi dari  $x$  atau  $y = f(x)$ , dimana  $y$  merupakan fungsi yang dapat diturunkan pada setiap titik (differensiabel) maka turunan pertama fungsi

$y$  terhadap  $x$  ditulis dengan  $\frac{dy}{dx}$  atau  $y'$  atau  $f'(x)$ , dengan definisi:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Secara umum:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+ah)-f(x)}{bh} = \frac{a}{b} f'(x)$$

dan

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+ah)-f(p)}{bh} = \frac{a}{b} f'(p)$$

## B Sifat-Sifat Turunan

- Turunan suatu konstanta  $c$   
Jika  $y = c$  maka  $y' = 0$
- Turunan perkalian fungsi dan konstanta  
Jika  $y = c f(x)$  maka  $y' = c f'(x)$
- Turunan penjumlahan/pengurangan fungsi  
Jika  $y = u(x) \pm v(x)$  maka  $y' = u'(x) \pm v'(x)$

d. Turunan perkalian fungsi

Jika  $y = u(x).v(x)$  maka

$$y' = u'(x).v(x) + u(x).v'(x)$$

e. Turunan pembagian fungsi

Jika  $y = \frac{u(x)}{v(x)}$  maka  $y' = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{v^2(x)}$

f. Turunan fungsi komposisi (dalil rantai) jika  $y = f(x)$  fungsi  $g$  dan  $g$  fungsi  $x$  adalah:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dg} \cdot \frac{dg}{dx}$$

## Rumus-Rumus Turunan Fungsi

Catatan:

Jika  $f(x) = ax^n$  maka  $f'(x) = a.n x^{n-1}$

### Rumus Pengayaan

No	Fungsinya	Turunannya
1	$y = (f(x))^n$	$y' = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$
2	$y = a^U$ , dimana $a = \text{konstanta}$	$y' = a^U \cdot \ln a \cdot U'$
3	$y = ^a \log U$	$y' = \frac{1}{U \ln a} U'$
4	$y = \ln U$	$y' = \frac{U'}{U}$

### Rumus Praktis:

$$y = \sqrt{U} \Rightarrow y' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$$

Contoh:  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6x}{2\sqrt{3x^2 + 5}} = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 5}}$$

**Rumus Praktis:**

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$$

$$\text{Contoh: } y = \frac{x-5}{x+5} \Rightarrow y' = \frac{5-(-5)}{(x+5)^2} = \frac{10}{(x+5)^2}$$

**Turunan Trigonometri**

Fungsinya	Turunannya
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \cotg x$	$f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \sec x \cdot \tan x$
$f(x) = \operatorname{cosec} x$	$f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cotg x$

**Pengertian****Catatan:**

$$y = a \square^n \rightarrow y' = n \cdot a \square^{n-1} \cdot \square'$$

$\square$  adalah sebarang fungsi

**Contoh Soal:****Soal UAN SMA**

Turunan pertama dari  $f(x) = \sin^4(3x^2 - 2)$  adalah ...

- A.  $2\sin^2 x(3x^2 - 2)\sin(6x^2 - 4)$
- B.  $12\sin^2 x(3x^2 - 2)\sin(6x^2 - 4)$
- C.  $12\sin^2 x(3x^2 - 2)\cos(6x^2 - 4)$

- D.  $24 \sin^3 x (3x^2 - 2) \cos^2 (3x^2 - 2)$   
 E.  $-24 \sin^3 x (3x^2 - 2) \cos^2 (3x^2 - 2)$

**Pembahasan:**

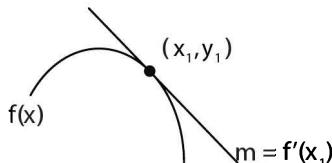
**Catatan:**

$$y = a^n \rightarrow y' = n \cdot a^{n-1} \cdot a'$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^4(3x^2 - 2) = (\sin(3x^2 - 2))^4 \\ f'(x) &= 4(\sin(3x^2 - 2))^3 (\cos(3x^2 - 2))(6x) \\ &= 24x \cdot (\sin(3x^2 - 2))^2 (2)(\sin(3x^2 - 2)) \\ &\quad (\cos(3x^2 - 2)) \\ &= 12x \cdot (\sin(3x^2 - 2))^2 (\sin 2(3x^2 - 2)) \\ &= 12x \cdot (\sin(3x^2 - 2))^2 (\sin(6x^2 - 4)) \end{aligned}$$

**Jawaban: B**

## F Gradien dan Garis Singgung



Gradien = nilai turunan pertama  $f(x)$  ketika

$x = x_1$ .

Persamaan garis singgungnya:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

## G Fungsi Naik dan Fungsi Turun

Interval fungsi naik dan interval fungsi turun

Kurva/fungsi  $f(x)$  naik jika  $f'(x) > 0$  dan kurva/fungsi  $f(x)$  turun jika  $f'(x) < 0$



## Titik Stasioner (Maksimal/Minimal)

(m,n)

a<0

Grafik 1

atau

a>0

(m,n)

Grafik 2

Itu artinya (m, n) adalah titik puncak. Titik puncak sering disebut sebagai titik stasioner, titik balik, dan juga titik ekstrem.

Pada titik puncak (m, n), berlaku  $f'(m) = 0$ .

Untuk grafik 1, nilai n disebut **nilai maksimal**, karena berada di puncak atas.

Untuk grafik 2, nilai n disebut sebagai **nilai minimal** karena berada di puncak bawah.

### Catatan:

#### Rumus Praktis 1

Luas maksimum segi empat dalam segitiga adalah setengah dari luas segitiga

$$L_{\max} \square = \frac{1}{2} L \Delta$$

Dengan, panjang sisi-siny:

$$\frac{1}{2} \text{ alas } \Delta \text{ dan } \frac{1}{2} \text{ tinggi } \Delta$$

#### Rumus Praktis 2

Bila diketahui  $a + b = p$  maka  $a^m \cdot b^n$  mencapai nilai stasioner (maksimum/minimum) pada saat:

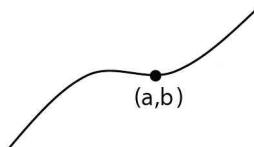
$$a = \left( \frac{m}{m+n} \right) p$$

$$b = \left( \frac{n}{m+n} \right) p$$



## I Terapan Turunan Kedua

Turunan kedua biasa digunakan untuk menentukan titik belok. Perhatikan gambar.



Titik  $(a, b)$  merupakan titik belok pada fungsi  $f(x)$  jika:

- Nilai  $f'(x)$  disekitar  $x = a$  tidak berubah tanda. Artinya,  $f'(x)$  disekitar  $x = a$  sama-sama negatif atau sama-sama positif.
- Nilai  $f''(a) = 0$ .



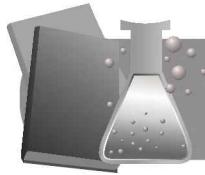
## J Pemakaian Dalam Mekanika

Jika  $s(t)$  = fungsi jarak,  $v(t)$  = fungsi kecepatan,  $a(t)$  = fungsi percepatan, dan  $t$  = waktu.

Maka berlaku:

$$v(t) = s'(t)$$

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$



# **PAKET SOAL**

SOAL UM UGM



Catatan

SOAL UN SMA IPA

2. Diketahui  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - Ax^2 + 1$ ,  $f(x) = g(2x - 1)$ ,  
 A suatu konstanta. Jika  $f$  naik pada  $x \leq 0$  atau  $x \geq 1$   
 nilai maksimum relatif  $g$  adalah ...

A.  $\frac{7}{3}$       D.  $-\frac{1}{3}$   
 B.  $\frac{5}{3}$       E.  $-\frac{5}{3}$   
 C.  $\frac{1}{3}$

SOAL SBMPTN SAINTEK

3. Grafik fungsi  $f(x) = 4x^2 + 2x^2 - 8x + 4$  turun pada ....

A.  $x < -\frac{2}{3}$  atau  $x > 1$

B.  $-\frac{2}{3} < x < 1$

C.  $x < -1$  atau  $x > \frac{2}{3}$

D.  $-1 < x < \frac{2}{3}$

E.  $-\frac{2}{3} < x < 2$

**SOAL SIMAK UI K.DASAR**

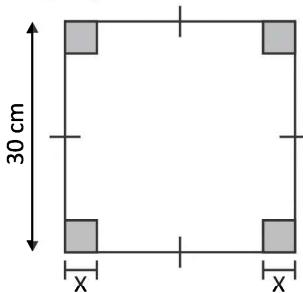
4. Jika garis singgung parabola  $y = 4x - x^2$  dititik M(1, 3) juga merupakan garis singgung parabola

$y = x^2 - 6x + k$  maka nilai dari  $5 - \sqrt{k-1}$  adalah ....



SOAL UN

5. Dari selembar karton berbentuk persegi yang berukuran sisi 30 cm akan dibuat kotak tanpa tutup dengan cara menggunting empat persegi di setiap kotak seperti pada gambar. Volume kotak terbesar yang dapat dibuat adalah ....



- A.  $2.000 \text{ cm}^3$
  - B.  $3.000 \text{ cm}^3$
  - C.  $4.000 \text{ cm}^3$
  - D.  $5.000 \text{ cm}^3$
  - E.  $6.000 \text{ cm}^3$

## SOAL SBMPTN SAINTEK

6. Grafik fungsi  $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 8x + 4$  turun pada

• • •

- A.  $x < -\frac{2}{3}$  atau  $x > 1$

- $$\text{B. } -\frac{2}{3} < x < 1$$

- C.  $x < -1$  atau  $x > \frac{2}{3}$

- D.  $-1 < x < \frac{2}{3}$

- $$\text{E. } -\frac{3}{2} < x < 2$$

**SOAL SIMAK UI K.DASAR**

7. Jika  $f(0) = 0$  dan  $f'(0) = 2$  maka turunan dari  $f(f(f(f(f(f(x))))))$  di  $x=0$  adalah ....

- A. 128                      D. 16  
B. 64                      E. 8  
C. 32

**SOAL UN**

8. Suatu perusahaan memproduksi  $x$  unit barang, dengan biaya  $(5x^2 - 10x + 30)$  dalam ribu rupiah untuk tiap unit. Jika barang tersebut terjual habis dengan harga Rp50.000,00 tiap unit maka keuntungan maksimum yang diperoleh perusahaan tersebut adalah ...

- A. Rp10.000,00              D. Rp40.000,00  
B. Rp20.000,00              E. Rp50.000,00  
C. Rp30.000,00

**SOAL SIMULASI**

9. Persamaan garis yang menyinggung kurva  $y = x^2 - 4x$  di titik A yang berabsis 3 adalah ...

- A.  $y = 2x - 9$               D.  $y = 3x + 2$   
B.  $y = 2x$                       E.  $y = 3x$   
C.  $y = 3x - 1$

**SOAL UM UGM K.DASAR**

10. Garis  $l$  menyinggung  $y = 3 - 2\cos x$  di  $(a,b)$ . Garis  $h$  menyinggung  $y = 2\cos x$  di  $(a,c)$ . Jika  $l \perp h$  dan

$$0 < a < \frac{\pi}{2}$$

- A.  $3 - 2\sqrt{3}$               D.  $2\sqrt{3} - 3$   
B.  $3 - \sqrt{3}$                       E.  $3\sqrt{3} - 3$   
C.  $\sqrt{3} - 3$

**Catatan****SOAL UM UGM K.IPA**

11. Kurva  $y = \frac{x^2}{x-1}$  mencapai maksimum relatif di ....

A.  $(2, 4)$       B.  $(0, 0)$

C.  $\left(2, \frac{4}{3}\right)$       D.  $\left(3, \frac{9}{2}\right)$

E.  $\left(-2, -\frac{4}{3}\right)$

**SOAL UN SMA IPS**

12. Diketahui  $f(x) = x^3 + 5x^2 + 9x$  dan  $f'(x)$  merupakan turunan pertama dari fungsi  $f(x)$ . Nilai dari  $f'(-3)$  adalah ....

- A.  $-6$       D.  $3$   
B.  $-3$       E.  $6$   
C.  $1$

**SOAL UM UGM K.IPA**

13. Diketahui  $f(x) = g(x - \sqrt{6x-2})$ . Jika  $f'(3) = 6$

maka  $g'(-1) = \dots$

- A.  $12$       D.  $24$   
B.  $16$       E.  $28$   
C.  $20$

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

14. Diberikan  $f(x) = \sin^2 x$ . Jika  $f'(x)$  menyatakan turunan pertama dari  $f(x)$  maka

$$\lim_{h \rightarrow \infty} h \left\{ f'(x + \frac{1}{h}) - f'(x) \right\} = \dots$$

- A.  $\sin 2x$       D.  $2 \sin x$   
B.  $-\cos 2x$       E.  $-2 \cos x$   
C.  $2 \cos 2x$

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

15. Jika  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 13$ , maka kurva  $f$  naik pada

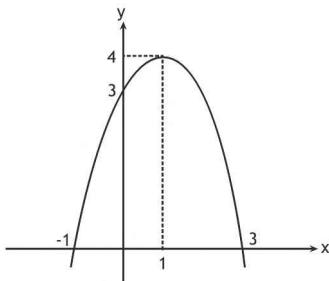
....

- A.  $-3 \leq x \leq 1$       D.  $-4 \leq x \leq 0$   
B.  $-1 \leq x \leq 3$       E.  $-3 \leq x \leq 3$   
C.  $1 \leq x \leq 3$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

16. Jika gambar di bawah ini adalah grafik  $y = \frac{df(x)}{dx}$

maka dapat disimpulkan bahwa fungsi  $f(x)$  ....



- A. mencapai nilai maksimum di  $x = 1$   
B. mencapai nilai minimum di  $x = -1$   
C. naik pada interval  $\{x | x < 1\}$   
D. selalu memotong sumbu-y di titik  $(0,3)$   
E. merupakan fungsi kuadrat

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

17. Diketahui  $F(x) = (a+1)x^3 - 3bx^2 + 9x$ . Jika  $F''(x)$

habis dibagi  $x-1$  maka kurva  $y = F(x)$  tidak  
mempunyai titik ekstrim lokal jika ....

- A.  $-3 < b < 0$       D.  $-4 < b < 0$   
B.  $0 < b < 3$       E.  $1 < b < 4$   
C.  $-4 < b < -1$

**SOAL UN SMA IPS**

18. Hasil penjualan  $x$  unit barang per bulan dinyatakan dengan fungsi  $g(x) = 38.000 + 200x - 5x^2$  (dalam ribuan rupiah). Hasil penjualan maksimum per bulan adalah ....
- A. Rp20.000.000,00      D. Rp50.000.000,00  
B. Rp30.000.000,00      E. Rp60.000.000,00  
C. Rp40.000.000,00

**SOAL SNMPTN K.IPA**

19. Diketahui fungsi  $f$  dan  $g$  dengan  $g(x) = f(x^2 + 2)$ . Jika diketahui bahwa  $g'(1)=8$  maka nilai  $f'(3)$  adalah ....
- A. 8      D. 2  
B. 6      E. 1  
C. 4

**SOAL UN SMA IPS**

20. Suatu proyek pembangunan kantor desa dapat diselesaikan dalam  $x$  hari dengan biaya proyek per hari  $\left(\frac{50}{x} + x - 300\right)$  ratus ribu rupiah. Supaya biaya proyek minimum maka proyek tersebut harus diselesaikan dalam waktu ....
- A. 40 hari      D. 120 hari  
B. 60 hari      E. 150 hari  
C. 90 hari

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

21. Diketahui  $F(x) = bx^3 - 3(1+a)x^2 - 3x$ . Jika  $F''(x)$  habis dibagi  $x-1$ , dan kurva  $y=F(x)$  mempunyai titik ekstrim lokal maka ....
- A.  $0 \leq b \leq 1$   
B.  $b < 0$  atau  $b > 1$   
C.  $-1 \leq b \leq 0$   
D.  $b \leq -1$  atau  $b \geq 0$   
E.  $-1 < b < 1$

# Pembahasan

## 1. Pembahasan:

Garis g menyinggung kurva  $f(x)$ , berlaku  $m_g = m_{f(x)}$  di titik singgung

- Kurva:  $y = x^4 - x^2$   
Gradien kurva:  $y' = 4x^3 - 2x$
- Garis g menyinggung kurva di  $(1, 0)$ , berlaku:  
 $m_g = 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1 = 2$   
Persamaan garis g adalah  $y - 0 = 2(x - 1)$ , atau  
 $y = 2x - 2$
- Garis h menyinggung kurva di  $(-1, 0)$ , berlaku:  
 $m_h = 4 \cdot (-1)^3 - 2(-1) = -2$   
Persamaan garis h adalah  $y - 0 = -2(x + 1)$ , atau  
 $y = -2x - 2$
- g dan h berpotongan, dengan metode substitusi maka:  
 $2x - 2 = -2x - 2$   
 $x = 0$  sehingga  $y = 2 \cdot 0 - 2 = -2$

Titik potong:  $(a, b) = (0, -2)$

$$a - b = 0 - (-2) = 2$$

Jawaban: B

## 2. Pembahasan:

$$g(x) = \frac{1}{3}x^3 - A^2x + 1; f(x) = g(2x - 1)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(2x - 1)^3 - A^2(2x - 1) + 1$$

$$= \frac{1}{3}(8x^3 - 12x^2 + 6x - 1) - A^2(2x - 1) + 1$$

$$= \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + 2x - \frac{1}{3} - 2A^2x + A^2 + 1$$

$$= \frac{8}{3}x^3 - 4x^2 + (2 - 2A^2)x + \left(A^2 + \frac{2}{3}\right)$$

$$\text{Maka, } f'(x) = 8x^2 - 8x + (2 - 2A^2)$$

Catatan

## Catatan

- Fungsi  $f(x)$  naik pada  $x \leq 0$  atau  $x \geq 1$ , maka akar-akar dari turunan  $f(x)$  atau  $f'(x)$  adalah  $x_1 = 0$  dan  $x_2 = 1$
- Jika persamaan kuadrat  $ax^2 + bx + c = 0$  mempunyai akar-akar  $x_1$  dan  $x_2$  maka:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ dan } x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Dari  $f'(x) = 8x^2 - 8x + (2 - 2A^2)$  dengan akar-  
akar  $x_1 = 0$  dan  $x_2 = 1$

$$\text{Maka, } x_1 \cdot x_2 = \frac{2 - 2A^2}{8}$$

$$\Rightarrow 0 \cdot 1 = \frac{2 - 2A^2}{8}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{2 - 2A^2}{8}$$

$$\Rightarrow 0 = 2 - 2A^2$$

$$\Rightarrow 2A^2 = 2$$

$$\Rightarrow A^2 = 1$$

$$\text{Sehingga, } g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$

Suatu fungsi  $g(x)$  mencapai maksimum relatif  
di  $x = p$ , jika  $g'(x) = 0$  dan  $g''(x) < 0$ .

$$\text{Dari, } g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + 1$$

$$\text{Maka, } g'(x) = x^2 - 1 \text{ dan } g''(x) = 2x$$

$$\text{Untuk uji } g'(x) = 0, \Rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 1$$

$$\Rightarrow = \sqrt{1} = \pm 1$$

Ketika  $x = 1$  maka:  $g''(1) = 2 \cdot 1 = 2 > 0$  (tidak memenuhi)

Ketika  $x = -1$  maka:  $g''(-1) = 2(-1) = -2 < 0$  (memenuhi)

Sehingga:

$$\begin{aligned}g(-1) &= \frac{1}{3}(-1)^3 - (-1) + 1 \\&= -\frac{1}{3} + 2 = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

**Jawaban: B****3. Pembahasan:**

Grafik suatu fungsi  $f(x)$  turun, jika  $f'(x) < 0$

Suatu grafik fungsi

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 8x + 4, \text{ turun maka:}$$

$$f'(x) = 12x^2 + 4x - 8 < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 + x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow f'(x) = (3x - 2)(x + 1) < 0$$

$$\text{Pembuat nol } x = \frac{2}{3} \text{ atau } x = -1$$

$$\begin{array}{c}+ \quad | \quad - \quad | \quad + \\ \hline -1 \quad \quad 0 \quad \quad \frac{2}{3} \end{array}$$

Sehingga, daerah hasilnya adalah:

$$-1 < x < \frac{2}{3}$$

**Jawaban: D****4. Pembahasan:**

- Misalkan,  $g$  adalah garis singgung parabola  $y = 4x - x^2$  di titik  $M(1, 3)$ .

Berlaku:

$$M_g = M_{y=4x-x^2} \text{ di } (1, 3)$$

$$M_g = 4 - 2x \text{ di } (1, 3)$$

$$\begin{aligned}M_g &= 4 - 2 \cdot 1 \\&= 2\end{aligned}$$

- $g \equiv y - 3 = 2(x - 1)$   
 $y = 2x + 1$
- $g$  menyinggung  $y = x^2 - 6x + k$   
Substitusi:  $x^2 - 6x + k = 2x + 1$   
 $x^2 - 8x + (k - 1) = 0$

Bersinggungan:  $D = 0$

$$(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (k - 1) = 0$$

**Catatan**

$$4(k-1) = 8.8$$

$$k-1 = 2.8$$

$$k = 17$$

- Jadi,  $5 - \sqrt{k-1} = 5 - \sqrt{17-1} = 5 - 4 = 1$

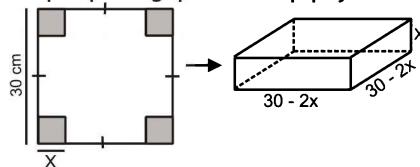
**Jawaban: B**

**5. Pembahasan:**

Suatu fungsi  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  akan menghasilkan nilai maksimal ketika  $f'(x) = 0$ .

Diketahui:

Selembar karton berbentuk persegi, akan dibuat menjadi kotak tanpa tutup dengan menggunting empat persegi pada setiap pojok karton.



Sehingga, volume kotak yang terbentuk adalah:

$$(30-2x)(30-2x)x = 900x - 120x^2 + 4x^3$$

Volume maksimal dari kotak tersebut diperoleh ketika  $(\text{volume})' = 0$  maka:

$$900 - 240x + 12x^2 = 0$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 240x + 900 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (x-15)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 15 \text{ atau } x = 5$$

- Ketika  $x = 15$  maka ukuran kotak:

$$\text{Panjang} = 30 - 2.15 = 0 \text{ cm}$$

$$\text{Lebar} = 30 - 2.15 = 0 \text{ cm}$$

$$\text{Tinggi} = 15 \text{ cm}$$

$$\text{Maka, volume} = 0$$

- Ketika  $x = 5$  maka ukuran kotak:

$$\text{Panjang} = 30 - 2.5 = 20 \text{ cm}$$

$$\text{Lebar} = 30 - 2.5 = 20 \text{ cm}$$

$$\text{Tinggi} = 5 \text{ cm}$$

Maka, volume =  $20 \times 20 \times 5 = 2000 \text{ cm}^3$

Jadi, volume maksimalnya adalah  $2.000 \text{ cm}^3$

**Jawaban: A**

## 6. Pembahasan:

Grafik suatu fungsi  $f(x)$  turun, jika  $f'(x) < 0$

Catatan

Suatu grafik fungsi

$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 8x + 4$  turun maka:

$$f'(x) = 12x^2 + 4x - 8 < 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 + x - 2 < 0$$

$$\Rightarrow (3x - 2)(x + 1) < 0$$

Pembuat nol  $x = \frac{2}{3}$  atau  $x = -1$

+	-	-	+
-1	0	$\frac{2}{3}$	

Sehingga, daerah hasilnya adalah:

$$-1 < x < \frac{2}{3}$$

Jawaban: D

## 7. Pembahasan:

- $y_1 = f(x) \Rightarrow y'_1 = f'(x)$  sehingga  $y'(0) = f'(0) = 2$
- $y_2 = f(f(x)) \Rightarrow y'_2 = f'(f(x)) \cdot f'(x)$   
sehingga  $y'_2(0) = f'(0) \cdot f'(0) = 2 \cdot 2 = 2^2$
- $y_3 = f(f(f(x))) \Rightarrow y'_3 = f'(f(f(x))) \cdot f'(f(x)) \cdot f'(x)$   
Diperoleh  $y'_3 = f'(0) \cdot f'(0) \cdot f'(0) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$
- Dengan demikian, jika  $y_6 = f(f(f(f(f(f(x))))))$ ,  
maka  $y'_6(0) = 2^6 = 64$

Jawaban: B

## 8. Pembahasan:

Untung = Harga Jual – Biaya Produksi

Harga jual untuk  $x$  unit =  $50x$  (dalam ribuan rupiah)

Biaya produksi untuk  $x$  unit =

$$(5x^2 - 10x + 30)x = 5x^3 - 10x^2 + 30x$$

Fungsi untung:

$$L(x) \equiv 50x - (5x^3 - 10x^2 + 30x) = 20x - 5x^3 + 10x^2$$

Laba maksimum diperoleh ketika  $L'(x) = 0$

$$\Rightarrow L'(x) \equiv 20 - 15x^2 + 20x = 0$$

## Catatan

$$\Rightarrow -3x^2 + 4x + 4 = 0$$
$$\Rightarrow (-3x - 2)(x - 2) = 0$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ (tidak mungkin), atau } x = 2$$

Jadi, laba maksimumnya adalah:

$$20(2) - 5(2)^3 + 10(2)^2$$

$$= 40 - 40 + 40 = 40 \text{ (dalam ribuan rupiah)}$$

Atau Rp40.000,00

**Jawaban: D**

### 9. Pembahasan:

Gradien (kemiringan garis) dari garis singgung pada kurva  $y$  adalah  $y'$

Persamaan garis lurus yang melalui titik  $(x_1, y_1)$  dan bergradien  $m$  adalah:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Sehingga:

Garis yang menyinggung kurva  $y = x^2 - 4x$  memiliki gradien ( $m$ ) =  $2x - 4$

Titik singgung A memiliki absis 3 maka  $m = 2.3 - 4 = 2$

Ordinat titik A adalah:  $y = 3^2 - 4.3 = -3$

Maka, persamaan garis singgungnya memiliki gradien 2 dan melalui titik A (3, -3), yaitu:

$$y - (-3) = 2(x - 3)$$

$$y + 3 = 2x - 6$$

$$y = 2x - 9$$

**Jawaban: A**

### 10. Pembahasan:

Gradien garis singgung pada kurva  $f(x)$  adalah  $m = f'(x)$

Garis  $l$  menyinggung  $f(x) = 3 - 2\cos x$  di  $(a, b)$

Artinya:  $m_l = f'(a) = 2\sin a$ .

Garis  $h$  menyinggung  $f(x) = 2\cos x$  di  $(a, c)$ .

Artinya:  $m_h = h'(a) = -2 \sin a$

$$\text{Karena } l \perp h \text{ maka } m_l \cdot m_h = -1 \Rightarrow m_l = -\frac{1}{m_h}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$2 \sin a = -\frac{1}{-2 \sin a} \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin a = \pm \frac{1}{2}$$

Karena  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ , kuadran I nilai sinus positif sehingga diperoleh:

$$\sin a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 30^\circ$$

$$f(x) = 3 - 2 \cos x \Rightarrow b = 3 - 2 \cos 30^\circ = 3 - \sqrt{3}$$

$$f(x) = 2 \cos x \Rightarrow c = 2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}$$

$$\text{Jadi, } b - c = 3 - \sqrt{3} - \sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3}$$

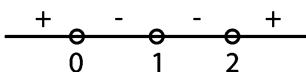
**Jawaban: A**

### 11. Pembahasan:

$$y = \frac{x^2}{x-1}$$

$$y' = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

Nilai  $y'$  di dalam garis bilangan:



Maksimum reatif terjadi setelah kurva naik ( $y' > 0$ , atau  $x < 0$ ) dan berlanjut kurva turun ( $y' < 0$ , atau  $x > 0$ )

Jadi, maksimum relatif terjadi di  $x = 0$  dengan nilai:

$$y = \frac{0^2}{0-1} = 0$$

Titik maksimum relatif:  $(0, 0)$

**Jawaban: B**

### 12. Pembahasan:

$f(x) = x^3 + 5x^2 + 9x$  maka turunan pertama dari

$f(x)$ , yaitu:

**Catatan**

$$f'(x) = 3x^2 + 10x + 9$$

Sehingga, nilai dari

$$f'(-3) = 3(-3)^2 + 10(-3) + 9 = 6$$

**Jawaban: E**

**13. Pembahasan:**

$$f(x) = g\left(x - \sqrt{6x-2}\right) = g\left(x - (6x-2)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$f'(x) = g'\left(x - (6x-2)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(6x-2)^{\frac{1}{2}} \cdot 6\right)$$

$$x=3 \Rightarrow f'(3) = g'\left(3 - (6.3-2)^{\frac{1}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}(6.3-2)^{\frac{1}{2}} \cdot 6\right)$$

$$= g'(-1) \cdot \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow g'(-1) = 4 \cdot f'(3) = 4 \cdot 6 = 24$$

**Jawaban: D**

**14. Pembahasan:**

$$f(x) = \sin^2 x$$

$$f'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

Untuk  $t = \frac{1}{h}$  maka jika  $h \rightarrow \sim$  berakibat  $t \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow \sim} h \left\{ f\left(x + \frac{1}{h}\right) - f'(x) \right\} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f'(x+t) - f'(x)}{t} \\ &= f''(x) \\ &= 2 \cos 2x \end{aligned}$$

**Jawaban: C**

**15. Pembahasan:**

Suatu fungsi  $f(x)$  naik, jika  $f'(x) \geq 0$

Diketahui:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 13$$

Jika,  $g(x) = f(1-x)$  maka:

$$g(x) = \frac{1}{3}(1-x)^3 + (1-x)^2 + 13$$

Fungsi  $g(x)$  naik, jika  $g'(x) > 0$ .

Sehingga:

$$\frac{1}{3} \cdot 3(1-x)^{3-1}(-1) + 2(1-x)^{2-1}(-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow (1-x)^2(-1) + 2(1-x)(-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow (1-2x+x^2)(-1) + (2-2x)(-1) \geq 0$$

$$\Rightarrow -1+2x-x^2-2+2x \geq 0$$

$$\Rightarrow -x^2+4x-3 \geq 0$$

$$\Rightarrow (-x+1)(x-3) \geq 0$$

Pembuat nolnya  $x = 1$  atau  $x = 3$

Daerah hasil:

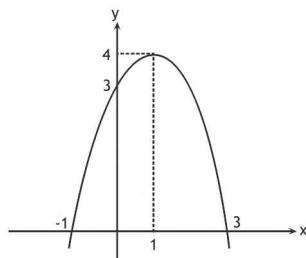
$$\begin{array}{c|ccccc} - & | & & + & | & - \\ 0 & & 1 & & 3 & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

Atau  $1 \leq x \leq 3$

**Jawaban: C**

### 16. Pembahasan:

Diketahui grafik  $y = \frac{df(x)}{dx}$  sebagai berikut



Karena  $\frac{df(x)}{dx} = f'(x)$

maka dari grafik di atas diperoleh:

- $f'(x) = 0$  untuk  $x = -1$  dan  $x = 3$ , berarti  $f(x)$  mencapai nilai max/min untuk  $x = -1$  dan  $x = 3$ .
- $f''(x)$  adalah turunan kedua  $f(x)$  bernilai positif untuk  $x = -1$  dan negatif untuk  $x = 3$  (garis singgung turun). Berarti  $f(x)$  mencapai minimum untuk  $x = -1$  dan maksimum untuk  $x = 3$ .

**Jawaban: B**

**Catatan****17. Pembahasan:**

$$F(x) = (a+1)x^3 - 3bx^2 + 9x$$

$$\Rightarrow F'(x) = 3(a+1)x^2 - 6bx + 9$$

$$\Rightarrow F''(x) = 6(a+1)x - 6b$$

Karena  $F''(x)$  habis dibagi  $x-1$  maka:

$$x=1 \Rightarrow 6(a+1)-6b=0$$

$$\Rightarrow 6(a+1)=6b$$

$$\Rightarrow (a+1)=b$$

$$F(x) = (a+1)x^3 - 3bx^2 + 9x$$

$$\Rightarrow F(x) = bx^3 - 3bx^2 + 9x$$

Nilai ekstrim dari  $F(x)$  diperoleh dari  $F'(x) = 0$ .

Sehingga:

$$F'(x) = 3bx^2 - 6bx + 9$$

$$\Rightarrow 0 = 3bx^2 - 6bx + 9$$

Agar tidak mempunyai titik ekstrem lokal maka

$D < 0$  sehingga:

$$(-6b)^2 - 4 \cdot 3b \cdot 9 < 0$$

$$\Rightarrow 36b^2 - 108b < 0$$

$$\Rightarrow b^2 - 3b < 0$$

$$\Rightarrow b(b-3) < 0$$

Pembuat nolnya adalah  $b=0$  dan  $b=3$



Daerah penyelesaiannya adalah:

$$0 < b < 3$$

**Jawaban: B**

**18. Pembahasan:**

Nilai maksimal atau minimal dari suatu fungsi

$f(x)$  diperoleh ketika  $f'(x) = 0$

Diketahui:

Hasil penjualan  $x$  unit barang per bulan dinyatakan dengan fungsi  $g(x) = 38.000 + 200x - 5x^2$  (dalam ribuan rupiah).

Sehingga, hasil penjualan maksimal diperoleh ketika

$$g'(x) = 0.$$

$$g'(x) = 200 - 10x$$

$$\Rightarrow 0 = 200 - 10x$$

$$\Rightarrow 10x = 200$$

$$\Rightarrow x = 20$$

Hasil penjualan maksimalnya:

$$g(20) = 38.000 + 200(20) - 5(20)^2$$

$$= 38.000 + 4000 - 2000$$

$$= 40.000$$

Jadi, penjualan maksimalnya adalah

Rp40.000.000,00

**Jawaban: C**

**19. Pembahasan:**

$$g(x) = f(x^2 + 2)$$

$$g'(1) = 8$$

$$f'(3) = \dots ?$$

Jawab:

$$g(x) = f(x^2 + 2)$$

$$g'(x) = f'(x^2 + 2) \cdot 2x$$

$$g'(1) = f'(1+2) \cdot 2 \cdot 1$$

$$8 = f'(3) \cdot 2$$

$$f'(3) = 4$$

**Jawaban: C**

**20. Pembahasan:**

Nilai maksimal atau minimal dari suatu fungsi

$f(x)$  diperoleh ketika  $f'(x) = 0$

Fungsi yang menyatakan pembangunan proyek kantor desa dalam  $x$  hari adalah:

$$\left( \frac{50}{x} + x - 300 \right) \text{ (dikali } x \text{)} \text{ menjadi } 50 + x - 300x$$

**Catatan**

Sehingga, turunan pertamanya adalah:  $2x - 300$   
 $2x - 300 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{300}{2} = 150$$

Jadi, biaya proyek akan minimum ketika proyek diselesaikan dalam waktu 150 hari.

**Jawaban: E**

**21. Pembahasan:**

$$F(x) = bx^3 - 3(1+a)x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow F'(x) = 3bx^2 - 6(1+a)x - 3$$

$$\Rightarrow F''(x) = 6bx - 6(a+1)$$

Karena  $F''(x)$  habis dibagi  $x - 1$  maka:

$$x = 1 \Rightarrow 6b - 6(1+a) = 0$$

$$\Rightarrow 6b = 6(1+a)$$

$$\Rightarrow b = 1+a$$

$$F(x) = bx^3 - 3(1+a)x^2 - 3x$$

$$\Rightarrow F(x) = bx^3 - 3bx^2 - 3x$$

Nilai ekstrim dari  $F(x)$  diperoleh dari  $F'(x) = 0$ .

Sehingga:

$$F'(x) = 3bx^2 - 6bx - 3$$

$$\Rightarrow 0 = 3bx^2 - 6bx - 3$$

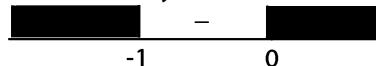
Agar mempunyai solusi maka  $D \geq 0$  sehingga:

$$(-6b)^2 - 4 \cdot 3b(-3) \geq 0$$

$$\Rightarrow 36b^2 + 36b \geq 0$$

$$\Rightarrow 36b(b+1) \geq 0$$

Pembuat nolnya adalah  $b = 0$  dan  $b = -1$



Daerah penyelesaiannya adalah;

$$b \leq -1 \text{ atau } b \geq 0$$

**Jawaban: D**

$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$
$$y = ut \sin(\alpha) - 1/2 gt^2$$

$$Ra + 40a +$$

14

$$va + vb = u$$

$$va = u$$

$$va = 1/2u(1-e)$$

$$vb = 1/2u(1+e)$$

$$(1-e^{1/2})$$

$$2u(1+e)$$

$$-1/2eu(1+e)$$

$$2)$$

# INTEGRAL



## A Sifat dan Rumus Integral

### Sifat Integral

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx + c, \text{ dengan } c = \text{konstanta}$$

$$\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Jika  $f(x)$  dan  $g(x)$  kontinu pada interval  $a \leq x \leq b$ , maka:

1.  $\int_a^a f(x) dx = 0$
2.  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$
3.  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx, \text{ jika } a \leq p \leq b$

### Rumus Dasar Integral

- a.  $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c, \text{ syarat } n \neq -1$
- b.  $\int x^{-1} dx = \ln x + c$
- c.  $\int a dx = ax + c$
- d.  $\int e^x dx = e^x + c$

### Rumus Pengembangan

- a.  $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{1}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$
- b.  $\int \sqrt{a^2 + u^2} du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2 + u^2} + \frac{1}{2}a^2 \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$
- c.  $\int \sqrt{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2 \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$
- d.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\left(\frac{u}{a}\right) + C$
- e.  $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 + u^2}} = \ln|u + \sqrt{a^2 + u^2}| + C$
- f.  $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln|u + \sqrt{u^2 - a^2}| + C$
- g.  $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C$
- h.  $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg}\left|\frac{u}{a}\right| + C$
- i.  $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
- j.  $\int \frac{du}{u\sqrt{2^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec}\left|\frac{u}{a}\right| + C$

### Rumus Integral Trigonometri

- a.  $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- b.  $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- c.  $\int \sin(ax+b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
- d.  $\int \cos(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
- e.  $\int \csc^2(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{tg}(ax+b) + C$
- f.  $\int \sin^m x \cos x \, dx = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x + C$
- g.  $\int \cos^m x \sin x \, dx = \frac{-1}{m+1} \cos^{m+1} x + C$

## B Metode Substitusi

Bentuk:  $\int a(b)^n dx$

Ciri-cirinya:  $b' = k \cdot a$ ,  $k$  = konstanta

Cara biasa:

- Salah satu bagian dimisalkan dengan  $u$ .
- Sisanya yang lain (termasuk  $dx$ ) harus diubah dalam  $du$ .

Rumus Praktis:

$$\int a(b)^n dx = \left( \frac{1}{n+1} \right) \left( \frac{a}{b'} \right) (b)^{n+1} + C, n \neq -1$$

### Soal UAN SMA

Hasil  $\int x \sqrt{9-x^2} dx = \dots$

- A.  $-\frac{1}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2} + C$
- B.  $-\frac{2}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2} + C$
- C.  $\frac{2}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2} + C$
- D.  $\frac{2}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2} + \frac{2}{9}(9-x^2)\sqrt{9-x^2} + C$
- E.  $\frac{1}{3}(9-x^2)\sqrt{9-x^2} + \frac{1}{9}\sqrt{9-x^2} + C$

Pembahasan:

Catatan:

$$\int a \cdot b^n dx = \left( \frac{1}{n+1} \right) \left( \frac{a}{b'} \right) (b)^{n+1} + C$$

Maka:

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{9-x^2} dx &= \int x (9-x^2)^{\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{x}{-2x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (9-x^2)^{\frac{1}{2}+1} + C \\ &= \left( -\frac{1}{2} \right) \left( \frac{2}{3} \right) (9-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{3}(9-x^2)^{\frac{3}{2}} + C \\
 &= -\frac{1}{3}(9-x^2)^1(9-x^2)^{\frac{1}{2}} + C \\
 &= -\frac{1}{3}(9-x^2)\sqrt{(9-x^2)} + C
 \end{aligned}$$

**Jawaban: A**

## Integral Parsial

Bentuknya:  $\int f(x)g(x)dx$

Ciri-cirinya: salah satu fungsi  $f(x)$  atau  $g(x)$  bila diturunkan sampai beberapa kali penurunan akan bernilai nol.

Cara biasa:

- Salah satu bagian dimisalkan U.
- Sisanya yang lain (termasuk  $dx$ ) dianggap sebagai dV.

$$\int UdV = UV - \int VdU$$

Cara Praktisnya lihat langsung pada contoh soal!

### Contoh Soal:

#### Soal UAN SMA

Nilai  $\int_0^1 5x(1-x)^6 dx = \dots$

- |                    |                    |                     |
|--------------------|--------------------|---------------------|
| A. $\frac{75}{56}$ | C. $\frac{5}{56}$  | E. $-\frac{10}{56}$ |
| B. $\frac{10}{56}$ | D. $-\frac{7}{56}$ |                     |

### Pembahasan:

$\int 5x(1-x)^6 dx$  merupakan bentuk integral parsial.

### Cara Praktis

Diturunkan      Diintegralkan

↓	↓
5x	$(1-x)^6$
5	$-\frac{1}{7}(1-x)^7$
0	$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}(1-x)^8$

$\oplus$        $\ominus$

Jadi, integral  $\int 5x(1-x)^6 dx$  adalah

$$\begin{aligned}\int 5x(1-x)^6 dx &= (5x)\left(-\frac{1}{7}(1-x)^7\right) - (5)\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{8}(1-x)^8 + c \\ &= -\frac{5}{7}x(1-x)^7 - \frac{5}{56}(1-x)^8 + c\end{aligned}$$

Selanjutnya diperoleh:

$$\begin{aligned}\int_0^1 5x(1-x)^6 dx &= \left[ -\frac{5}{7}x(1-x)^7 - \frac{5}{56}(1-x)^8 \right]_0^1 \\ &= \left[ (0) - \left( -\frac{5}{56} \right) \right] = \frac{5}{56}\end{aligned}$$

Jawaban: C

## D Integral Trigonometri

### Turunan

$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \sec^2 x$
$f(x) = \cotg x$	$f'(x) = -\operatorname{cosec}^2 x$
$f(x) = \sec x$	$f'(x) = \sec x \cdot \tan x$
$f(x) = \operatorname{cosec} x$	$f'(x) = -\operatorname{cosec} x \cdot \cotg x$

### Integralnya

Artinya:

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int -\sin x dx = \cos x + c \Rightarrow \int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x dx = -\cotg x + c$$

$$\int \sec x \cdot \tan x dx = \sec x + c$$

Dst.

### Rumus-rumus Umum

$$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$$

$$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$$

$$\int \sin^m x \cos x dx = \frac{1}{m+1} \sin^{m+1} x + c$$

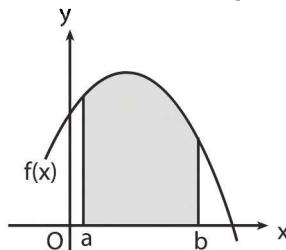
$$\int \cos^m x \sin x dx = \frac{-1}{m+1} \cos^{m+1} x + c$$

### Rumus Trigonometri yang Sering Dipakai:

- $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$
- $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$
- $2\cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$
- $-2\sin A \sin B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

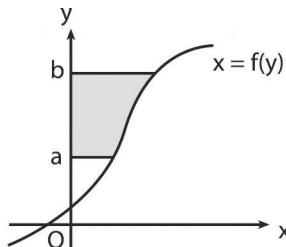
## C Integral Parsial

### Luas suatu kurva terhadap sumbu x



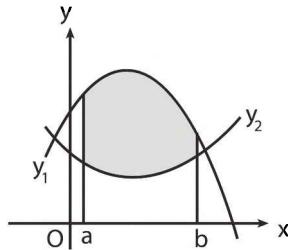
$$L = \int_a^b y dx$$

### Luas suatu kurva terhadap sumbu y



$$L = \int_a^b x \, dy$$

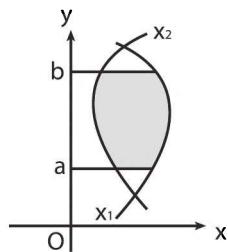
### Luas antara beberapa kurva



$$L = \int_a^b (y_1 - y_2) \, dx$$

$$L = \int_a^b (y_{\text{atas}} - y_{\text{bawah}}) \, dx$$

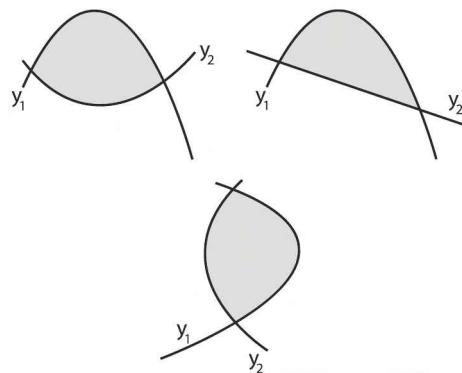
### Luas antara beberapa kurva



$$L = \int_a^b (x_1 - x_2) \, dy$$

$$L = \int_a^b (x_{\text{kanan}} - x_{\text{kiri}}) \, dy$$

### Luas antara Dua Kurva

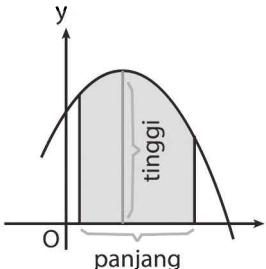


Jika daerah yang diarsir hanya dibatasi oleh dua kurva maka cara praktisnya:

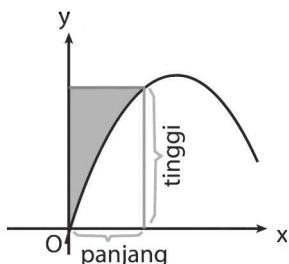
$$L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$$

dengan  $D$  = diskriman dari  $y_2 - y_1$

### Rumus Praktis



$$L = \frac{2}{3} \times \text{panjang} \times \text{tinggi}$$



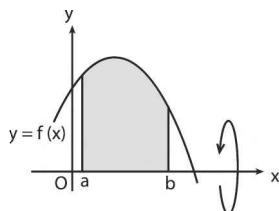
$$L = \frac{1}{3} \times \text{panjang} \times \text{tinggi}$$

F

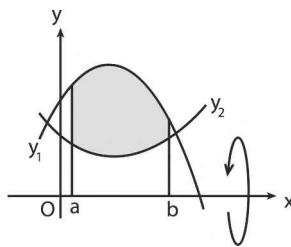
## Volume Benda Putar

Volume benda putar sebuah kurva bila diputar  $360^\circ$ .

### Mengelilingi Sumbu-X



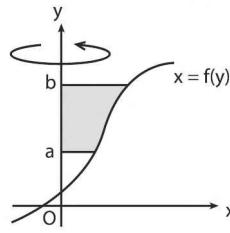
$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$



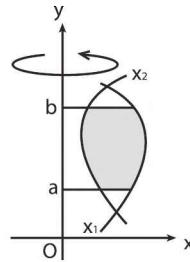
$$L = \pi \int_a^b (y_1^2 - y_2^2) dx$$

$$L = \pi \int_a^b (y_{\text{atas}}^2 - y_{\text{bawah}}^2) dx$$

### Mengelilingi Sumbu-Y



$$L = \pi \int_a^b x^2 dy$$



$$L = \pi \int_a^b (x_1^2 - x_2^2) dy$$

$$L = \int_a^b (x_{\text{kanan}}^2 - x_{\text{kiri}}^2) dy$$



# PAKET SOAL

Catatan

## SOAL UN SMA IPA

1. Hasil dari  $\int_0^2 3(x+1)(x-6) dx = \dots$
- A. -58      D. -16  
B. -56      E. -14  
C. -28

## SOAL UN SMA IPA

2. Hasil  $\int_{-1}^2 (x^3 - 6x^2 + 8x + 2) dx = \dots$
- A.  $12\frac{1}{4}$       D.  $4\frac{1}{4}$   
B.  $8\frac{1}{4}$       E.  $3\frac{3}{4}$   
C.  $7\frac{3}{4}$

## SOAL SNMPTN K.IPA

3. Luas daerah di bawah  $y = -x^2 + 8x$ , di atas  $y = 6x - 24$ , dan terletak di kuadran I adalah ....
- A.  $\int_0^4 (-x^2 + 8x) dx + \int_4^6 (x^2 - 2x - 24) dx$   
B.  $\int_0^4 (-x^2 + 8x) dx + \int_4^6 (-x^2 + 2x + 24) dx$   
C.  $\int_0^6 (-x^2 + 8x) dx + \int_6^8 (-x^2 + 2x - 24) dx$   
D.  $\int_4^6 (6x - 24) dx + \int_6^8 (-x^2 + 8x) dx$   
E.  $\int_0^4 (6x + 24) dx + \int_4^6 (-x^2 + 8x) dx$



**SOAL UN SMA IPS**

4. Hasil dari  $\int \left( 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) dx = \dots$

- A.  $x^4 - \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$
- B.  $x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$
- C.  $x^4 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 + C$
- D.  $x^4 + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$
- E.  $x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$

**SOAL UN SMA IPA**

5. Hasil dari  $\int \frac{2x-3}{\sqrt{2x^2-6x+5}} dx = \dots$

- A.  $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2-6x+5} + C$
- B.  $\sqrt{2x^2-6x+5} + C$
- C.  $\frac{2}{3}\sqrt{2x^2-6x+5} + C$
- D.  $2\sqrt{2x^2-6x+5} + C$
- E.  $\frac{1}{\sqrt{2x^2-6x+5}} + C$

**SOAL UN SMA IPA**

6. Hasil  $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+1}} dx = \dots$

- A.  $\frac{1}{3}\sqrt{x^3+6x+1} + C$
- B.  $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+6x+1} + C$
- C.  $\sqrt{x^3+6x+1} + C$
- D.  $2\sqrt{x^3+6x+1} + C$
- E.  $3\sqrt{x^3+6x+1} + C$



**SOAL UN SMA IPS**

7. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva

$$y = -x^2 + 4x + 5, \text{ sumbu X, dan } 1 \leq x \leq 4 \text{ adalah ....}$$

- |                   |                                |
|-------------------|--------------------------------|
| A. 38 satuan luas | D. $23\frac{2}{3}$ satuan luas |
| B. 25 satuan luas | E. $23\frac{1}{3}$ satuan luas |
| C. 24 satuan luas |                                |

**SOAL SNMPTN K.IPA**

8. Diketahui  $\int f(x) dx = \frac{1}{4}ax^2 + bx + c$  dan

$$a \neq 0 \text{ jika } f(a) = \frac{a+2b}{2} \text{ dan } f(b) = 6 \text{ maka fungsi}$$

$$f(x) = \dots$$

- |                       |                        |
|-----------------------|------------------------|
| A. $\frac{1}{2}x + 4$ | D. $x + 4$             |
| B. $2x + 4$           | E. $-\frac{1}{2}x + 4$ |
| C. $\frac{1}{2}x - 4$ |                        |

**SOAL SNMPTN K.IPA**

9. Hasil substitusi  $u = x + 1$  pada  $\int_0^1 x^2 \sqrt{x+1} dx$  adalah ....

- |                                   |                                   |
|-----------------------------------|-----------------------------------|
| A. $\int_0^1 (u-1)^2 \sqrt{u} du$ | D. $\int_0^1 (u-1) du$            |
| B. $\int_0^1 x^2 \sqrt{u} du$     | E. $\int_1^2 (u-1)^2 \sqrt{u} du$ |
| C. $\int_1^2 (u-1) \sqrt{u} du$   |                                   |

**SOAL SNMPTN K.IPA**

10. Diketahui fungsi  $f$  dan  $g$  dengan  $g(x) = f(x^2 + 2)$ . Jika diketahui bahwa  $g'(1) = 8$  maka nilai  $f'(3)$  adalah ....
- A. 8                              D. 2  
B. 6                              E. 1  
C. 4

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

11.  $\int 2\cos(1-2x)\sin x \, dx = \dots$
- A.  $\cos(x-1) + \frac{1}{3}\cos(3x-1) + C$   
B.  $\cos(x-1) - \frac{1}{3}\cos(3x-1) + c$   
C.  $-\sin(x-1) + \frac{1}{3}\sin(3x-1) + c$   
D.  $-\sin(x-1) - \frac{1}{3}\sin(3x-1) + c$   
E.  $\sin(x-1) + \frac{1}{3}\sin(3x-1) + c$

**SOAL UN SMA IPA**

12. Hasil  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos x \, dx = \dots$
- A.  $-\frac{4}{3}$                               D.  $\frac{2}{3}$   
B.  $-\frac{2}{3}$                               E.  $\frac{4}{3}$   
C.  $\frac{1}{3}$

**SOAL SNMPTN**

13. Kecepatan atau laju pertumbuhan penduduk suatu kota untuk  $t$  tahun yang akan datang dinyatakan sebagai:

$$N(t) = 400t + 600\sqrt{t}, \quad 0 \leq t \leq 9.$$



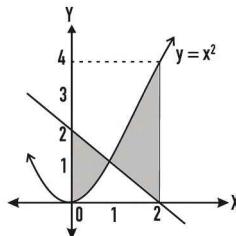
**Catatan**

Jika banyak penduduk saat ini adalah 5.000 jiwa maka banyak penduduk 9 tahun yang akan datang adalah...

- A. 37.000 jiwa      D. 32.000 jiwa  
B. 35.000 jiwa      E. 30.000 jiwa  
C. 33.500 jiwa

**SOAL UM UGM MATDAS**

14. Luas daerah yang diarsir pada gambar di samping adalah ....



- A.  $\frac{4}{6}$  satuan luas      D. 3 satuan luas  
B. 2 satuan luas      E.  $3\frac{1}{6}$  satuan luas  
C.  $2\frac{5}{6}$  satuan luas

**SOAL UN SMA IPA**

15. Hasil dari  $\int (\cos^3 2x \sin 2x) dx = \dots$

- A.  $\frac{1}{4} \cos^4 2x + C$       D.  $-\frac{1}{8} \cos^4 2x + C$   
B.  $\frac{1}{4} \sin^4 2x + C$       E.  $-\frac{1}{8} \sin^4 2x + C$   
C.  $\frac{1}{6} \cos^4 2x + C$

**SOAL UN SMA IPA**

16. Hasil dari  $\int \sqrt{1 - \cos 2x} dx = \dots$

- A.  $\sqrt{x - \frac{1}{2} \sin 2x} + C$       D.  $-\sqrt{2} \cos x + C$   
B.  $\sqrt{x + \frac{1}{2} \sin 2x} + C$       E.  $\sqrt{2} \cos x + C$   
C.  $-2 \cos x + C$

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

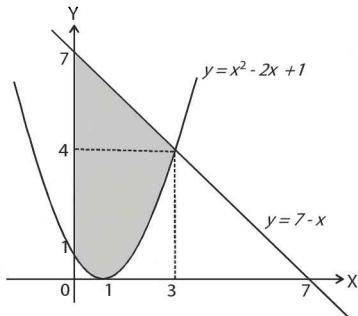
17. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = 3 - x^2$  dan

$y = 2|x|$  adalah ....

- A.  $\int_0^1 (-x^2 - 2x + 3) dx$
- B.  $2 \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3) dx$
- C.  $\int_{-1}^1 (-x^2 + 2x + 3) dx$
- D.  $\int_{-1}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx$
- E.  $2 \int_{-1}^0 (-x^2 + 2x + 3) dx$

**SOAL UN SMA IPA**

18. Luas daerah arsiran pada gambar dapat dinyatakan dengan rumus ....



- A.  $\int_0^2 ((7-x) - (x^2 - 2x + 1)) dx$
- B.  $\int_0^3 ((7-x) - (x^2 - 2x + 1)) dx$
- C.  $\int_0^2 ((x^2 - 2x + 1) - (7-x)) dx$
- D.  $\int_0^3 ((x^2 - 2x + 1) - (7-x)) dx$
- E.  $\int_0^1 (x^2 - 2x + 1) dx + \int_1^3 (7-x) dx$

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

19. Jika  $L(a)$  adalah luas daerah yang dibatasi oleh sumbu- $X$  dan parabola  $y = ax + x^2$ ,  $0 < a < 1$ , maka

peluang nilai  $a$  sehingga  $L(a) \geq \frac{1}{48}$  adalah ....

A.  $\frac{11}{12}$

D.  $\frac{3}{4}$

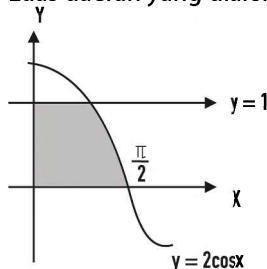
B.  $\frac{7}{8}$

E.  $\frac{1}{2}$

C.  $\frac{5}{6}$

**SOAL UM UGM**

20. Luas daerah yang diarsir di bawah adalah ....



A.  $\frac{\pi}{6} + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \, dx$

D.  $\frac{\pi}{2} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \, dx$

B.  $\frac{\pi}{3} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \, dx$

E.  $\frac{\pi}{2} + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos x \, dx$

C.  $\frac{\pi}{3} + \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos x \, dx$

**SOAL SIMAK UI SAINTEK**

21. Diberikan titik O pada suatu garis lurus. Sebuah partikel bergerak pada garis tersebut dan melewati titik O dengan kecepatan  $16 \text{ cm/s}$ . Percepatan gerak partikel tersebut adalah  $2t - 10 \text{ cm/s}^2$ . Berapa total jarak yang ditempuh oleh partikel tersebut dimu-

lai dari titik O sampai waktu ketika berhenti untuk yang kedua kalinya?

- A. 152 cm      D.  $17\frac{1}{3}$  cm  
 B. 112 cm      E.  $14\frac{2}{3}$  cm  
 C.  $50\frac{2}{3}$  cm

Catatan

SOAL UN SMA IPA

22. Volume benda putar yang terbentuk dari daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = -\sqrt{3}x^2$ , sumbu X, di dalam dan lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$ , diputar mengelilingi sumbu X adalah ....

- A.  $\frac{80}{15}\pi$  satuan volume    D.  $\frac{34}{15}\pi$  satuan volume  
B.  $\frac{68}{15}\pi$  satuan volume    E.  $\frac{32}{15}\pi$  satuan volume  
C.  $\frac{64}{15}\pi$  satuan volume

## **SOAL SBMPTN SAINTEK**

23. Jika  $L(a)$  adalah luas daerah yang dibatasi oleh sumbu-X dari parabola  $y = ax - x^2$ ,  $0 < a < 1$ , maka

peluang nilai  $a$  sehingga  $L(a) \geq \frac{9}{16}$  adalah ....

- A.  $\frac{3}{4}$       D.  $\frac{1}{3}$   
B.  $\frac{1}{2}$       E.  $\frac{1}{4}$   
C.  $\frac{3}{8}$



**SOAL SIMAK UI K.IPA**

24. Jika diketahui garis singgung parabola

$y = ax^2 + 12x - 14$  pada titik  $x = 3$  membentuk

sudut terhadap sumbu x sebesar  $\pi - \text{arc tan}(6)$ , maka luas daerah yang dibatasi oleh garis lurus  $y = 9x - 32$  dan parabola tersebut adalah ....

A.  $\frac{85}{2}$

D.  $\frac{115}{2}$

B.  $\frac{95}{2}$

E.  $\frac{125}{2}$

C.  $\frac{105}{2}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

25. Untuk  $-\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{8}$  maka:

$$\int \sqrt{1 - \tan^2 2x + \tan^4 2x - \tan^6 2x + \dots} dx = \dots$$

A.  $\frac{1}{2} \tan 2x + k$

D.  $\frac{1}{2} \sin 2x + k$

B.  $\frac{1}{2} \cos 2x + k$

E.  $-\frac{1}{2} \sin 2x + k$

C.  $-\frac{1}{2} \cos 2x + k$

# Pembahasan

## 1. Pembahasan:

$$\int_m^n ax^2 + bx + c \, dx = \frac{a}{2+1} x^{2+1} + \frac{b}{1+1} x^{1+1} + cx]_m^n$$

Hasil dari:

$$\begin{aligned}\int_0^2 3(x+1)(x-6) \, dx &= \int_0^2 3x^2 - 15x - 18 \, dx \\ &= \left[ \frac{3}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 - 18x \right]_0^2 \\ &= \left( 2^3 - \frac{15}{2}(2)^2 - 18(2) \right) - 0 \\ &= 8 - 30 - 36 = -58\end{aligned}$$

Catatan

Jawaban: A

## 2. Pembahasan:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 (x^3 - 6x^2 + 8x + 2) \, dx &= \left. \frac{1}{4}x^4 - \frac{6}{3}x^3 + \frac{8}{2}x^2 + 2x \right|_{-1}^2 \\ &= \left. \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x \right|_{-1}^2 \\ &= \left( \frac{1}{4}(2)^4 - 2(2)^3 + 4(2)^2 + 2(2) \right) - \\ &\quad \left( \frac{1}{4}(-1)^4 - 2(-1)^3 + 4(-1)^2 + 2(-1) \right) \\ &= (4 - 16 + 16 + 4) - \left( \frac{1}{4} + 2 + 4 - 2 \right) \\ &= 8 - 4 \frac{1}{4} = 3 \frac{3}{4}\end{aligned}$$

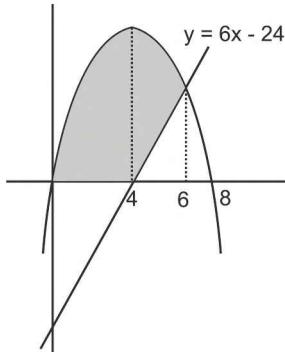
Jawaban: E

## 3. Pembahasan:

Luas daerah di bawah

$y = -x^2 + 8x$ , di atas  $y = 6x - 24$  dan terletak di kuadran I adalah:



**Catatan****Jawab:**

$$L = \int_0^4 -x^2 + 8x \, dx + \int_4^6 -x^2 + 8x - 6x + 24 \, dx \\ = \int_0^4 -x^2 + 8x \, dx + \int_4^6 -x^2 + 2x + 24 \, dx$$

**Jawaban: B****4. Pembahasan:**

$$\int \left( 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x \right) dx = \frac{4}{4}x^4 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}x^3 + 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + C \\ = x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + C$$

**Jawaban: E****5. Pembahasan:**

Nilai dari:

$$\int \frac{(2x-3)}{\sqrt{2x^2-6x+5}} dx = \int (2x-3)(2x^2-6x+5)^{-\frac{1}{2}} dx$$

Misal:  $2x^2 - 6x + 5 = u$  maka  
 $du = 4x - 6 \, dx$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}du = 2x - 3 \, dx$$

Sehingga:

$$\int (2x-3)(2x^2-6x+5)^{-\frac{1}{2}} dx = \int \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} du \\ = \frac{1}{2} \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{2x^2 - 6x + 5} + C$$

**Jawaban: B**

**6. Pembahasan:**

Dari  $\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+1}} dx$

Misal:  $u = x^3 + 6x + 1 \Rightarrow du = 3x^2 + 6 dx$

$$\Rightarrow \frac{du}{3x^2+6} = dx$$

Sehingga,

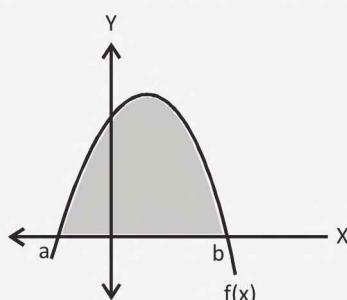
$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2}{\sqrt{x^3+6x+1}} dx &= \int \frac{x^2+2}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{3x^2+6} \\ &= \int (x^2+2) \cdot u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{3(x^2+2)}\end{aligned}$$

$$= \int u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{du}{3}$$

$$= \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{2}} \cdot du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 2 u^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3+6x+1} + C$$

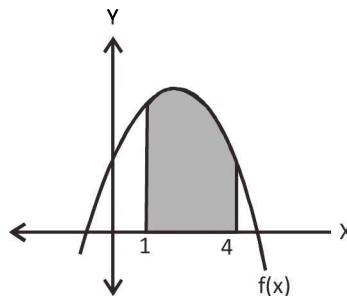
**Jawaban: B****7. Pembahasan:**

Luas daerah arsiran adalah  $\int_a^b f(x) dx$



**Catatan**

Sehingga, daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = -x^2 + 4x + 5$  sumbu X, dan  $1 \leq x \leq 4$  adalah:



$$\begin{aligned}
 \text{Luas daerah arsiran} &= \int_{1}^{4} (-x^2 + 4x + 5) dx \\
 &= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x \Big|_1^4 \\
 &= \left( -\frac{1}{3}(4)^3 + 2(4)^2 + 5.4 \right) - \left( -\frac{1}{3}(1)^3 + 2(1)^2 + 5.1 \right) \\
 &= \left( -\frac{64}{3} + 32 + 20 \right) - \left( -\frac{1}{3} + 2 + 5 \right) \\
 &= 45 - \frac{63}{3} = 24 \text{ satuan luas}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: C**

**8. Pembahasan:**

$$\int f(x) dx = \frac{1}{4}ax^2 + bx + c, a \neq 0$$

$$f(a) = \frac{a+2b}{2}$$

$$f(b) = 6$$

$$f(x) = \dots ?$$

**Jawab:**

- $\int f(x) dx = \frac{1}{4}ax^2 + bx + c$

$$f(x) = \frac{1}{2}ax + b$$

- $f(a) = \frac{a+2b}{2} \Rightarrow f(x) = \frac{ax+2b}{2} \Rightarrow a = 1$

- $f(b) = \frac{b+2b}{2} \Rightarrow 6 = \frac{3b}{2} \Rightarrow b = 4$
- $f(x) = \frac{x+2b}{2} = \frac{x+2 \cdot 4}{2} = \frac{1}{2}x + 4$

**Jawaban: A**

## Catatan

**9. Pembahasan:**

Diketahui:

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{x+1} dx$$

Dengan mensubstitusikan

$$u = x + 1 \Rightarrow x = u - 1, \text{ dan } du = dx.$$

Sehingga:

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{x+1} dx = \int_0^1 (u-1)^2 \sqrt{u} du$$

**Jawaban: A**

**10. Pembahasan:**

$$g(x) = f(x^2 + 2)$$

$$g'(1) = 8$$

$$f'(3) = \dots ?$$

Jawab:

$$g(x) = f(x^2 + 2)$$

$$g'(x) = f'(x^2 + 2) \cdot 2x$$

$$g'(1) = f'(1+2) \cdot 2 \cdot 1$$

$$8 = f'(3) \cdot 2$$

$$f'(3) = 4$$

**Jawaban: C**

**11. Pembahasan:**

$$2\sin A \cdot \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2\cos A \cdot \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$$

Nilai dari,  $\int 2 \cos(1-2x) \cdot \sin x dx$

$$= \int 2 \sin x \cdot \cos(1-2x) dx$$



**Catatan**

$$\begin{aligned}
 &= \int \sin(x + (1 - 2x)) + \sin(x - (1 - 2x)) \, dx \\
 &= \int \sin(-x + 1) + \sin(3x - 1) \, dx \\
 &= -\cos(x - 1) - \frac{1}{3}\cos(3x - 1) + C \\
 &= \cos(x - 1) + \frac{1}{3}\cos(3x - 1) + C
 \end{aligned}$$

**Jawaban: A****12. Pembahasan:**

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\int \cos^n x \sin x \, dx = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x + C$$

Sehingga:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin x \cos x) \cos x \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \cos^2 x \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^2 x \sin x \, dx \\
 &= 2 \left( -\frac{1}{3} \cos^3 x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= 2 \left( \left( -\frac{1}{3} \cos^3 \left( \frac{\pi}{2} \right) \right) - \left( -\frac{1}{3} \cos^3 0 \right) \right) \\
 &= 2 \left( \left( -\frac{1}{3} \cdot (-1)^3 \right) - \left( -\frac{1}{3} \cdot (1)^3 \right) \right) \\
 &= 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: E**

**13. Pembahasan:**

Jika banyak penduduk dinyatakan oleh fungsi  $B(t)$ , dan laju pertumbuhan penduduk  $N(t)$  maka:

$$B(t) = \int N(t) dt$$

$$\Rightarrow B(t) = \int 400t + 600\sqrt{t} dt$$

$$\Rightarrow B(t) = \int 400t + 600(t)^{\frac{1}{2}} dt$$

$$\Rightarrow B(t) = 200t^2 + 400t^{\frac{3}{2}} + C$$

Jika banyak penduduk saat ini ( $t = 0$ ) adalah 5.000 jiwa maka:

$$B(0) = 200 \cdot 0^2 + 400 \cdot 0^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\Rightarrow 5.000 = C$$

$$\text{Sehingga, } B(t) = 200t^2 + 400t^{\frac{3}{2}} + 5.000$$

Jadi, banyak penduduk 9 tahun yang akan datang adalah:

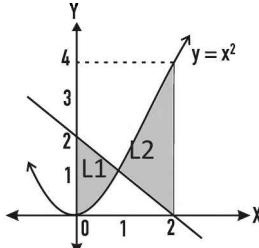
$$B(9) = 200(9)^2 + 400(9)^{\frac{3}{2}} + 5.000$$

$$= 16.200 + 10.800 + 5.000 = 32.000 \text{ jiwa}$$

**Jawaban: D**

**14. Pembahasan:**

Diketahui:



Daerah yang diarsir dibatasi oleh kurva  $y = x^2$  dan garis  $y = 2 - x$

Absis titik potong kurva dan garis:

$$x^2 = 2 - x \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2 \text{ dan } x_2 = 1$$

**Catatan**

- $$\bullet \quad L1 = \int_0^1 (2-x) - x^2 \, dx$$

$$= \int_0^1 -x^2 - x + 2 \, dx = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x \Big|_0^1$$

$$= \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - 0 = -\frac{5}{6} + 2 = \frac{7}{6}$$
- $$\bullet \quad L2 = \int_1^2 x^2 - (2-x) \, dx$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x \Big|_1^2$$

$$= \left( \frac{8}{3} + 2 - 4 \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right)$$

$$= \frac{11}{6}$$

Jadi, luas daerah arsiran seluruhnya adalah:

$$\frac{7}{6} + \frac{11}{6} = \frac{18}{6} = 3 \text{ satuan luas.}$$

**Jawaban: D**

**15. Pembahasan:**

$$\int \cos^n ax \sin ax \, dx = -\frac{1}{a(m+1)} \cos^{n+1} x + C$$

Sehingga:

$$\begin{aligned} \int (\cos^3 2x \sin 2x) \, dx &= -\frac{1}{2(3+1)} \cos^{3+1} + C \\ &= -\frac{1}{8} \cos^4 2x + C \end{aligned}$$

**Jawaban: D**

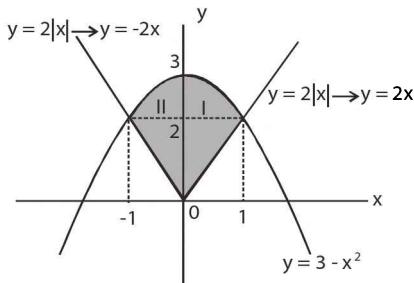
**16. Pembahasan:**

Hasil dari  $\int \sqrt{1-\cos 2x} dx$  adalah:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-\cos 2x} dx &= \int \sqrt{2 \sin^2 x} dx \\ &= \int \sqrt{2} \sin x dx \\ &= -\sqrt{2} \cos x + c\end{aligned}$$

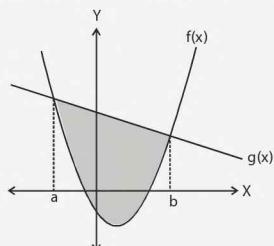
**Catatan****Jawaban: D****17. Pembahasan:**

Daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = 3 - x^2$  dan  $y = 2|x|$  adalah:



Luas I = Luas II maka luas daerah arsiran

$$\begin{aligned}&= 2 \int_0^1 (3 - x^2 - 2x) dx = 2 \int_0^1 (-x^2 - 2x + 3) dx \text{ atau} \\ &= 2 \int_{-1}^0 (3 - x^2 - 2x) dx = 2 \int_{-1}^0 -x^2 - 2x + 3 dx\end{aligned}$$

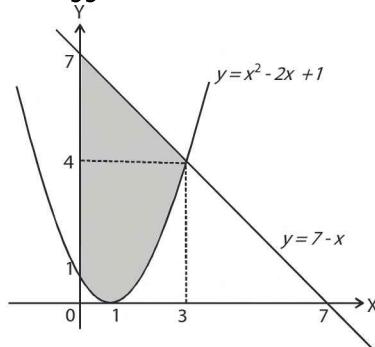
**Jawaban: B****18. Pembahasan:**

$$\text{Luas daerah arsiran} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx$$



**Catatan**

Sehingga:



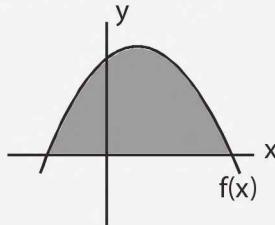
Luas daerah arsiran pada gambar grafik di atas adalah:

$$\int_0^3 ((7-x) - (x^2 - 2x + 1)) dx$$

**Jawaban: B****19. Pembahasan:**

Luas daerah yang dibatasi grafik

$$f(x) = ax^2 + bx + c \text{ dan sumbu } x:$$



$$\text{Memiliki luas } \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}; \text{ dengan } D = b^2 - 4ac$$

Luas daerah yang dibatasi oleh grafik

 $y = ax + x^2, 0 < a < 1$  dan sumbu-x adalah:

$$\frac{(b^2 - 4ac)\sqrt{b^2 - 4ac}}{6a^2} = \frac{(a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0)\sqrt{a^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{6(1)^2}$$

$$= \frac{a^2\sqrt{a^2}}{6} = \frac{a^3}{6}$$

$$L(a) \geq \frac{1}{48}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{6} \geq \frac{1}{48}$$

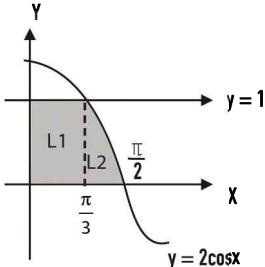
$$\Rightarrow a^3 \geq \frac{1}{8} \Rightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{1}{8}} \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$$

Sehingga, peluang  $a$  adalah  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

**Jawaban: E**

### 20. Pembahasan:

Diketahui:



Ketika  $y = 1$  maka:

$$1 = 2 \cos x \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

Luas daerah yang diarsir = L1 + L2

$$= 1 \times \frac{\pi}{3} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x \, dx$$

$$= \frac{\pi}{3} + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos x \, dx$$

**Jawaban: C**

### 21. Pembahasan:

$$a = (2t - 10) \text{ cm/s}^2$$

$$v = t^2 - 10t + c$$

Di titik 0,  $t = 0$  dan  $v = 16 \text{ cm/s}$

Berlaku:  $16 = 0^2 - 10 \cdot 0 + c \Rightarrow c = 16$

$$v = t^2 - 10t + 16$$

**Catatan**



**Catatan**

Partikel berhenti saat  $v = 0$

$$t^2 - 10t + 16 = 0$$

$$(t-2)(t-8)=0$$

Partikel berhenti saat  $t = 2$  dan  $t = 8$

- Dari  $t = 0$  sampai  $t = 2$ , jarak yang ditempuh adalah:

$$\begin{aligned} \int_0^2 v dt &= \int_0^2 [t^2 - 10t + 16] dt \\ &= \frac{1}{3} t^3 - 5t^2 + 16t \Big|_0^2 \\ &= \frac{1}{3} [2^3 - 0^3] - 5[2^2 - 0^2] + 16[2 - 0] \\ &= \frac{8}{3} - 20 + 32 \\ &= 14\frac{2}{3} \end{aligned}$$

- Dari  $t = 2$  sampai dengan  $t = 8$ , jarak yang ditempuh adalah:

$$\begin{aligned} \int_2^8 [t^2 - 10t + 16] dt &= \frac{1}{3} t^3 - 5t^2 + 16t \Big|_2^8 \\ &= \frac{1}{3} [8^3 - 2^3] - 5[8^2 - 2^2] + 16[8 - 2] \\ &= \frac{504}{3} - 300 + 96 \\ &= -36 \end{aligned}$$

Jarak yang ditempuh dari  $t = 2$  sampai dengan  $t = 8$  adalah 36 cm

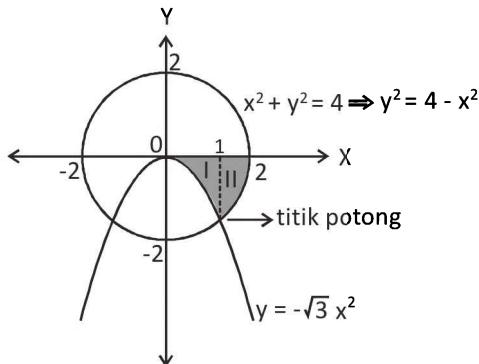
- Total jarak yang ditempuh

$$= 14\frac{2}{3} + 36 = 50\frac{2}{3} \text{ cm}$$

**Jawaban: C**

**22. Pembahasan:**

Daerah yang dibatasi oleh  $y = -\sqrt{3}x^2$ ;  $x^2 + y^2 = 4$  dan sumbu X adalah:



**Titik potong:**

Dari persamaan  $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 - y^2$  disubstiusikan ke persamaan  $y = -\sqrt{3}x^2$ ,

Diperoleh:

$$y = -\sqrt{3}(4 - y^2)$$

$$\Rightarrow y = -4\sqrt{3} + \sqrt{3}y^2$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}y^2 - y - 4\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}y - 4)(y + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{4}{\sqrt{3}} \text{ atau } \Rightarrow y = -\sqrt{3}$$

Dilihat dari daerah pada grafiknya, titik potong berada di kuadran IV maka ordinatnya (y) negatif.

Dengan mensubstitusikan nilai  $y = -\sqrt{3}$ , pada persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$ , diperoleh:

$$x^2 + (-\sqrt{3})^2 = 4$$

$$\Rightarrow x^2 + 3 = 4$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{4 - 3} = \pm 1$$

Sehingga, titik potong  $(1, -\sqrt{3})$

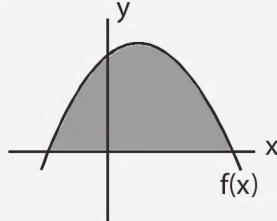
Volume daerah arsiran = volume daerah I + volume daerah II

**Catatan**

$$\begin{aligned}
 &= \pi \int_0^1 y_1^2 dx + \pi \int_1^2 y_2^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 (-\sqrt{3}x^2)^2 dx + \pi \int_1^2 (4-x^2)^2 dx \\
 &= \pi \int_0^1 3x^4 dx + \pi \int_1^2 (4-x^2)^2 dx \\
 &= \pi \left[ \frac{3}{5}x^5 \right]_0^1 + \pi \left( 4x - \frac{1}{3}x^3 \right) \Big|_1^2 \\
 &= \pi \left( \frac{3}{5}(1)^5 - \frac{3}{5}(0) \right) + \pi \left( \left( 4(2) - \frac{1}{3}(2)^3 \right) - \left( 4(1) - \frac{1}{3}(1)^3 \right) \right) \\
 &= \left( \frac{3}{5} + \left( \left( 8 - \frac{8}{3} \right) - \left( 4 - \frac{1}{3} \right) \right) \right) \pi \\
 &= \left( \frac{3}{5} + 4 - \frac{7}{3} \right) \pi \\
 &= \left( \frac{6+60-35}{15} \right) \pi = \frac{34}{15} \pi \text{ satuan volume}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: D****23. Pembahasan:**

Luas daerah yang dibatasi grafik  $f(x) = ax^2 + bx + c$  dan sumbu x:



Memiliki luas  $\frac{D\sqrt{D}}{6a^2}$ ; dengan  $D = b^2 - 4ac$

Luas daerah yang dibatasi oleh grafik

$y = 2ax - x^2$ ,  $0 < a < 1$  dan sumbu-x adalah:

$$\frac{(b^2 - 4ac)\sqrt{b^2 - 4ac}}{6a^2} = \frac{((2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0)\sqrt{(2a)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 0}}{6(-1)^2}$$

$$= \frac{4a^2 \sqrt{4a^2}}{6} = \frac{8a^3}{6}$$

$$L(a) \geq \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{8a^3}{6} \geq \frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow a^3 \geq \frac{9}{16} \times \frac{6}{8}$$

$$\Rightarrow a^3 \geq \frac{54}{128}$$

$$\Rightarrow a^3 \geq \frac{27}{64}$$

$$\Rightarrow a \geq \sqrt[3]{\frac{27}{64}} \Rightarrow a \geq \frac{3}{4}$$

Sehingga, peluang  $a$  adalah  $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

**Jawaban: E**

#### 24. Pembahasan:

$$m_{\text{garis singgung}} = m_{\text{kurva}} \text{ di titik singgung}$$

$$\tan(\pi - \arctan 6) = 2ax + 12 \quad \text{dix} = 3$$

$$-\tan(\arctan 6) = 2a \cdot 3 + 12$$

$$-6 = 6a + 12$$

$$6a = -18$$

$$a = -3$$

- Parabola:  $y = -3x^2 + 12x - 14$

Pembahasan cerdik:

$$\text{Luas daerah} = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2}, \text{ dengan } D = b^2 - 4ac$$

Daerah dibatasi  $y = -3x^2 + 12x - 14$  dan  $y = 9x - 32$

Subtitusi:

$$9x - 32 = -3x^2 + 12x - 14$$

$$3x^2 - 3x - 18 = 0$$



**Catatan**

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-18) = 9 + 216 = 225$$

$$L = \frac{D\sqrt{D}}{6a^2} = \frac{225\sqrt{225}}{6 \cdot 3^2} = \frac{225 \cdot 15}{54} = \frac{125}{2}$$

**Jawaban: E****25. Pembahasan:**

$$1 - \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^4 2x - \operatorname{tg}^6 2x + \dots$$

merupakan barisan geometri tak hingga dengan:  
suku pertama ( $a$ ) = 1

$$r = -\operatorname{tg}^2 2x$$

Jumlah deret geometri tak hingga adalah

$$\frac{a}{1-r}$$

Sehingga:

$$\int \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^4 2x - \operatorname{tg}^6 2x + \dots} dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2x}} dx$$

$$= \int \sqrt{\frac{1}{\sec^2 2x}} dx$$

$$= \int \frac{1}{\sec 2x} dx$$

$$= \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + k$$

**Jawaban: D**

$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$x = ut \cos (\alpha)$$
$$y = ut \sin (\alpha) - 1/2 gt^2$$

$$Ra + 40a + 0 = 0$$

15

$$va + vb = u$$

$$va = u - vb$$

$$va = u - 1/2u(1-e^{-2})$$

$$vb = 1/2u(1-e^{-2})$$

$$(1-e^{-2})$$

$$2u(1+e^{-2})$$

$$-1/2eu(1+e^{-2})$$

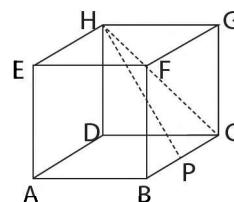
$$(1-e^{-2})$$

# DIMENSI TIGA



## A Istilah Bangun Ruang

Ada beberapa istilah penting yang sering digunakan dalam materi dimensi tiga. Istilah-istilah tersebut antara lain:

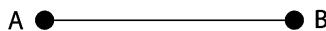


- **Bidang gambar**, yaitu bidang datar yang akan digunakan untuk menggambar bangun ruang.
- **Bidang frontal**, yaitu bidang yang sejajar dengan bidang gambar. (Contoh: Bidang ABFE dan DCGH).
- **Bidang ortogonal**, yaitu bidang yang tegak lurus terhadap bidang frontal. (Contoh: Bidang ABCD dan EFGH adalah bidang ortogonal horizontal, bidang ADHE dan BCGF adalah bidang ortogonal vertikal).
- **Perbandingan proyeksi**, yaitu besar perbandingan antara panjang garis ortogonal pada gambar dan panjang garis ortogonal sebenarnya.
- **Sudut surut**, yaitu sudut pada gambar yang dibentuk oleh garis frontal horizontal arah ke kanan dengan garis ortogonal arah ke belakang yang berpotongan. (Contoh:  $\theta$  adalah sudut surut).

## B Jarak

- **Jarak antara dua titik**

Adalah panjang garis lurus yang menghubungkan kedua titik itu.

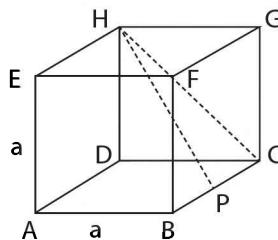


Ruas garis AB menunjukkan jarak antara titik A dan titik B.

**Contoh**

Pada kubus ABCD.EFGH yang berusuk a, tentukan jarak titik H ke titik pertengahan BC!

**Penyelesaian:**

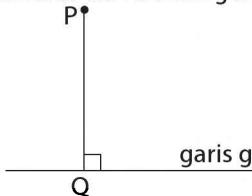


$$\begin{aligned} HP &= \sqrt{CH^2 + CP^2} \\ &= \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2} = \frac{3}{2}a \end{aligned}$$

= Jarak titik H ke  
titik tengah rusuk BC

- **Jarak titik ke garis**

Adalah panjang garis tegak lurus dari titik ke garis.



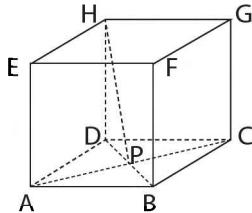
PQ menunjukkan jarak antara titik P dan garis g oleh ruas garis PQ yang tegak lurus g.

**Contoh**

Pada kubus ABCD.EFGH yang berusuk a, tentukan jarak titik H ke garis AC.

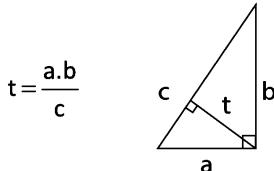
**Penyelesaian:**

$$\begin{aligned} HP &= \sqrt{DH^2 + DP^2} \\ &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{6} \end{aligned}$$



Perhatikan gambar segitiga di bawah.

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} c.t = \frac{1}{2} a.b$$

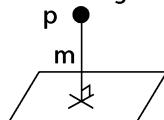


Jadi, jarak dari titik sudut siku-siku ke sisi miring adalah

$$= \frac{\text{perkalian sisi sisi tegak}}{\text{sisi miring}}$$

● **Jarak antara titik dengan bidang**

Adalah panjang garis tegak lurus dari titik ke bidang atau panjang garis lurus dari titik ke titik proyeksinya pada bidang.

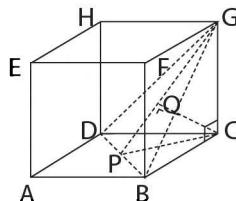


Jarak antara P dan bidang ditunjukkan oleh garis m yang tegak lurus bidang.

**Contoh**

Tentukan jarak antara titik C dan bidang BDG pada kubus ABCD.EFGH yang berusuk a.

**Penyelesaian:**



CQ merupakan jarak dari C ke bidang BDG.

Titik Q terletak pada garis GP.

Titik P terletak di tengah BD karena BG = DG

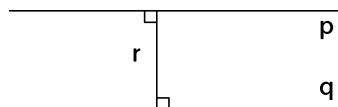
Perhatikan segitiga siku-siku CGP

$$\Leftrightarrow GP = \sqrt{CG^2 + CP^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{6}$$

$\Leftrightarrow$  Jarak dari titik C ke garis PG

$$CQ = \frac{CP \times CG}{GP} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2} \times a}{\frac{1}{2}a\sqrt{6}} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}$$

- **Jarak antara dua garis bersilangan**



Jarak antara garis p dan q ditunjukkan oleh ruas garis r yang tegak lurus terhadap garis p dan q.

Misal, hendak ditentukan jarak antara garis AB dan CE yang bersilangan.

Caranya:

- Buat bidang melalui CE dan sejajar garis AB, diperoleh bidang CDEF.
- Proyeksikan AB pada bidang CDEF diperoleh PQ.
- Maka jarak antara AB dan CE adalah jarak antara AB dan garis PQ, yaitu AP atau BQ atau RS =  $t \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ .



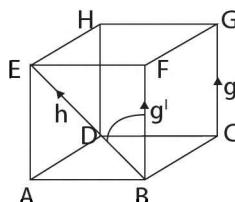
- **Sudut antara 2 garis yang bersilangan**

Sudut antara garis g dan h yang bersilangan dapat ditentukan dengan cara:

- Membuat garis yang sejajar terhadap salah satu garis (misal  $g' \parallel g$ ) dan menyentuh garis lain (garis).
- Sudut yang dibentuk  $g'$  dan  $h$  sama dengan sudut antara  $g$  dan  $h$ .

**Contoh**

- 
- Garis BE dan CG bersilangan
  - $FB \parallel CG$  dan menyentuh BE
  - Sudut antara BE dan CG sama dengan  $\angle EBF = 45^\circ$

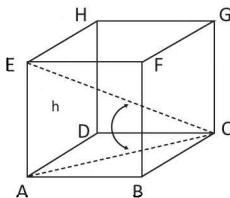


- **Sudut antara garis dan bidang**

Sudut antara garis dan bidang yang tidak sejajar sama dengan sudut antara garis dan proyeksi garis pada bidang.

Garis m menembus bidang di titik P. Titik Q pada garis m diproyeksikan pada bidang proyeksi Q'. Jadi, sudut antara garis m dan bidang adalah  $\angle QPQ'$ .

**Contoh**



- Karena garis AC adalah proyeksi EC pada bidang ABCD maka sudut antara garis EC dan bidang ABCD adalah  $\angle ACE$ .

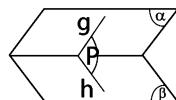
- $\sin \angle ACE = \frac{AE}{EC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

- **Sudut antara 2 bidang bersilangan**

Sudut antara bidang  $\alpha$  dan  $\beta$  yang tak sejajar ditentukan sebagai berikut:

- Tentukan sebuah titik (P) pada garis potong kedua bidang
- Melalui P dibuat garis g yang terletak pada  $\alpha$  dan garis h yang terletak pada  $\beta$ , garis g, dan h keduanya tegak lurus garis potong.

Maka, sudut antara bidang  $\alpha$  dan  $\beta$  sama dengan sudut antara garis g dan h.



## Irisan Bangun Ruang oleh Bidang Datar

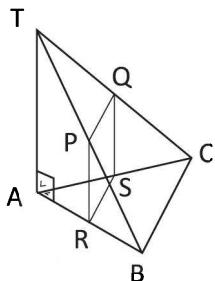
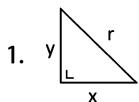
Irisan bangun ruang oleh bidang datar adalah penampang yang dibatasi oleh garis-garis perpotongan antara permukaan bangun ruang dan bidang datar tersebut.

**Contoh**

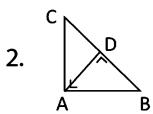
Rusuk TA dari bidang empat T.ABC tegak lurus pada alas. TA dan BC masing-masing 8 cm dan 6 cm. Jika P titik tengah TB, Q titik tengah TC, dan R titik tengah AB, dan bidang yang melalui ketiga titik P, Q, dan R memotong rusuk AC di S maka luas PQRS adalah ....

**Penyelesaian:**

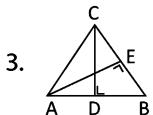
- Bila bidang PQR diperluas akan memotong pertengahan AC di S
- PQRS merupakan empat persegi panjang, karena  $PR \perp RS$  dan  $PQ \parallel RS$
- $\triangle ABC$  sebangun dengan  $\triangle BPR$ ,  $PR = \frac{1}{2}AT = 4\text{ cm}$
- $\triangle ABC$  sebangun dengan  $\triangle ARS$ ,  $RS = \frac{1}{2}BC = 3\text{ cm}$
- Luas PQRS =  $PR \times RS = 12\text{ cm}^2$

**E****Rumus Tambahan**

$$r^2 = x^2 + y^2$$



$$AD = \frac{AB \cdot AC}{BC}$$



$$AB \cdot AD = AE \cdot CB$$



# PAKET SOAL

## SOAL UN SMA IPA

1. Diketahui kubus ABCD.EFGH memiliki panjang rusuk 6 cm. Jarak titik G ke diagonal BE adalah ....

- A.  $3\sqrt{6}$  cm      D.  $3\sqrt{10}$  cm  
B.  $6\sqrt{6}$  cm      E.  $9\sqrt{10}$  cm  
C.  $9\sqrt{6}$  cm

Catatan

## SOAL SBMPTN SAINTEK

2. Diberikan bilangan empat beraturan  $T.ABC$  dengan panjang rusuk  $a$ . jika titik  $P$  adalah titik tengah rusuk  $BC$  maka jarak titik  $P$  ke garis  $AT$  adalah ....

- A.  $\frac{a}{4}\sqrt{2}$       D.  $\frac{a}{2}\sqrt{3}$   
B.  $\frac{a}{3}\sqrt{2}$       E.  $\frac{a}{3}\sqrt{3}$   
C.  $\frac{a}{2}\sqrt{2}$

## SOAL UN SMA IPA

3. Diketahui balok KLMN.PQRS dengan  $KL = 3$  cm,  $LM = 4$  cm, dan  $KP = 12$  cm. Jarak titik R ke garis  $PM$  adalah ....

- A.  $\frac{35}{13}$  cm      D.  $\frac{50}{13}$  cm  
B.  $\frac{40}{13}$  cm      E.  $\frac{60}{13}$  cm  
C.  $\frac{45}{13}$  cm

## SOAL UN SMA IPA

4. Pada kubus ABCD.EFGH panjang rusuk adalah 8 cm. Jarak titik E ke bidang BGD adalah ....

- A.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$  cm      D.  $\frac{8}{3}\sqrt{3}$  cm

**Catatan**

- B.  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$  cm      E.  $\frac{16}{3}\sqrt{3}$  cm  
C.  $\frac{4}{3}\sqrt{3}$  cm

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

5. Diketahui kubus ABCD.EFGH mempunyai sisi 4 cm. Titik P pada AB sehingga  $AP = 1$  cm, titik Q pada FG sehingga  $QG = 1$  cm, R titik tengah DH. Jarak R ke PQ adalah ....

- A. 5      D.  $\frac{5}{3}\sqrt{3}$   
B.  $5\sqrt{2}$       E.  $\frac{5}{2}\sqrt{2}$   
C.  $\frac{5}{2}$

**SOAL UM UGM K.IPA**

6. Diketahui kubus ABCD.EFGH, dengan panjang rusuk a, titik P pada perpanjangan DH sehingga  $DP = 2DH$ . Jarak titik F ke bidang PAC adalah ....

- A.  $\frac{2a}{3}$       D.  $a$   
B.  $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$       E.  $\frac{3a}{2}$   
C.  $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$

**SOAL UN SMA IPA**

7. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 8 cm. M adalah titik tengah EH. Jarak titik M ke AG adalah ....

- A.  $4\sqrt{6}$  cm      D.  $4\sqrt{2}$  cm  
B.  $4\sqrt{5}$  cm      E. 4 cm  
C.  $4\sqrt{3}$  cm

## **SOAL SBMPTN SAINTEK**

8. Diketahui kubus  $ABCD.EFGH$  mempunyai sisi 4 cm. Titik  $P$  adalah titik tengah  $CD$ , titik  $Q$  adalah titik tengah  $EH$ , dan titik  $R$  titik tengah  $BF$ . Jarak  $P$  ke  $QR$  adalah ....

A.  $\sqrt{15}$   
B.  $3\sqrt{2}$   
C.  $\sqrt{6}$   
D.  $\sqrt{5}$   
E.  $2\sqrt{2}$

## Catatan

SOAL UN SMA IPA

9. Kubus ABCD.EFGH memiliki rusuk 4 cm. Sudut antara AE dan bidang AFH adalah  $\alpha$ . Nilai  $\sin \alpha = \dots$

A.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

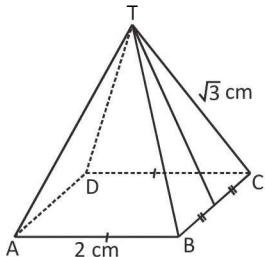
C.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

D.  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

E.  $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

SOAL UN SMA IPA

10. Perhatikan gambar limas T.ABCD!  
Nilai kosinus sudut antara TP dan bidang alas adalah ....



A.  $\sqrt{2}$

B.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

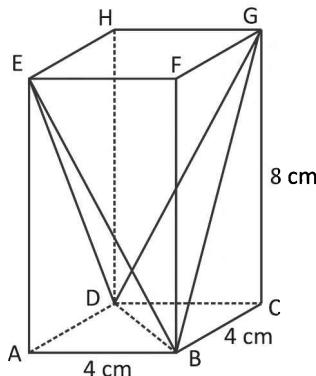
C.  $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

D.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

**SOAL UN SMA IPA**

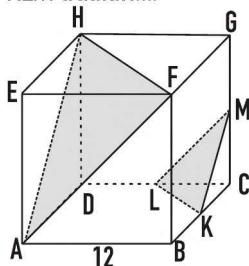
11. Nilai cosinus sudut antara bidang BDE dan bidang BDG seperti terlihat pada gambar prisma segi-4 ABCD.EFGH beraturan berikut adalah ....



- A.  $\frac{2}{6}$       D.  $\frac{7}{9}$   
B.  $\frac{3}{6}$       E.  $\frac{8}{9}$   
C.  $\frac{4}{6}$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

12. Pada gambar kubus ABCD.EFGH, titik-titik K, L dan M berturut-turut merupakan titik tengah BC, CD, dan CG. Jarak antara bidang AFH dengan bidang KLM adalah....



- A.  $2\sqrt{3}$       D.  $6\sqrt{3}$   
B.  $4\sqrt{3}$       E.  $7\sqrt{3}$   
C.  $5\sqrt{3}$

**SOAL UN SMA IPA**

13. Kubus ABCD.EFGH memiliki rusuk 4 cm. Sudut antara AE dan bidang AFH adalah  $\alpha$ .

Maka  $\sin \alpha = \dots$

- A.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$       D.  $\frac{2}{3}\sqrt{3}$   
B.  $\frac{1}{2}\sqrt{3}$       E.  $\frac{3}{4}\sqrt{3}$   
C.  $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

14. Prisma tegak segitiga sama sisi ABC.DEF dengan panjang AB =  $s$ , dan AD =  $t$ . Jika titik G terletak ditengah-tengah sisi EF maka panjang AG adalah ...

- A.  $\sqrt{t^2 - \frac{3s^2}{4}}$       D.  $\sqrt{t^2 - s^2}$   
B.  $\sqrt{t^2 + \frac{3s^2}{4}}$       E.  $\sqrt{t^2 + \frac{s^2}{4}}$   
C.  $\sqrt{t^2 + s^2}$

**SOAL SBMPTN K.IPA**

15. Diberikan kubus ABCD.EFGH. Jika  $\alpha$  adalah sudut antara bidang ACF dan alas ABCD maka  $\sin \alpha \cos \alpha = \dots$

- A.  $\frac{2}{\sqrt{6}}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$   
B.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       E.  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$   
C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

**SOAL UN SMA IPA**

16. Diketahui kubus PQRS.TUVW dengan panjang rusuk  $a$  satuan, terdapat bola luar dinyatakan  $B_1$  dan bola dalam dinyatakan  $B_2$ . Perbandingan volume bola  $B_1$  dan bola  $B_2$  adalah ...

- A.  $3\sqrt{3} : 1$       D.  $3 : 1$   
B.  $2\sqrt{3} : 1$       E.  $2 : 1$   
C.  $\sqrt{3} : 1$

**SOAL UM UGM SAINTEK**

17. Panjang rusuk kubus PQRS.TUVW adalah 6 cm. Titik X pada TW, y pada UV, dan Z pada QR. Jika  $|TX| : |XW| = 1 : 2$ ,  $|UY| : |YV| = 2 : 1$ , dan PXYZ membentuk bidang datar maka volume bangun TUYX.PQZ adalah ....
- A.  $180 \text{ cm}^2$       D.  $60 \text{ cm}^2$   
B.  $80 \text{ cm}^2$       E.  $36 \text{ cm}^2$   
C.  $72 \text{ cm}^2$

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

18. Diberikan bidang empat A.BCD dengan BC tegak lurus BD dan AB tegak lurus bidang BCD. Jika  $BC = BD = a\sqrt{2} \text{ cm}$ , dan  $AB = a \text{ cm}$  maka sudut antara bidang ACD dan BCD sama dengan ....
- A.  $\frac{\pi}{6}$       D.  $\frac{3\pi}{4}$   
B.  $\frac{\pi}{4}$       E.  $\frac{\pi}{2}$   
C.  $\frac{\pi}{3}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

19. Diketahui limas T.ABC dengan TA tegak lurus bidang ABC. Panjang rusuk AB, AC, BC, dan TA berturut-turut adalah 3cm, 4cm, 5cm, dan  $\frac{9}{5} \text{ cm}$ . Jika  $\varphi$  sudut antara bidang BCT dengan bidang ABC maka nilai  $\cos \varphi$  adalah ....
- A.  $\frac{4}{5}$       D.  $\frac{9}{25}$   
B.  $\frac{3}{5}$       E.  $\frac{12}{25}$   
C.  $\frac{6}{25}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

20. Kubus ABCD.EFGH panjang sisinya 1 dm. Titik P pada BC dengan  $|PC| = t \text{ dm}$ . Titik Q adalah proyeksi A pada DP dan R adalah proyeksi Q pada bidang EFGH. Luas segitiga AQR adalah ....  $\text{dm}^2$

- A.  $\frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}$       D.  $\frac{\sqrt{t^2+1}}{1}$   
B.  $\frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$       E.  $1+t^2$   
C.  $2\sqrt{t^2+1}$

**SOAL UN SMA IPA**

21. Diketahui prisma segitiga tegak ABC.DEF. Panjang

$AB = 4 \text{ cm}$ ,  $BC = 6 \text{ cm}$ ,  $AC = 2\sqrt{7} \text{ cm}$ , dan  $CF = 8 \text{ cm}$ .

Volume prisma tersebut adalah ....

- A.  $96\sqrt{3} \text{ cm}^3$       D.  $48\sqrt{3} \text{ cm}^3$   
B.  $96\sqrt{2} \text{ cm}^3$       E.  $48\sqrt{2} \text{ cm}^3$   
C.  $96 \text{ cm}^3$

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

22. Pada kubus ABCD.EFGH, titik P terletak segmen BG sehingga  $3 \times PG = 2 \times BP$ . Titik Q adalah titik potong garis HP dan bidang ABCD. Jika panjang sisi kubus 6 cm, luas segitiga APQ adalah ....  $\text{cm}^2$

- A.  $9\sqrt{2}$       D.  $27\sqrt{2}$   
B.  $12\sqrt{2}$       E.  $36\sqrt{2}$   
C.  $18\sqrt{2}$

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

23. Pada kubus ABC.EFGH, titik K terletak pada rusuk GH sehingga  $HK : GH = 1 : 2$ . Titik M terletak pada rusuk EF sehingga  $EM : MF = 1 : 2$ . Jika  $\alpha$  adalah sudut yang terbentuk antara irisan bidang yang melalui titik A, C, K dan irisan bidang yang melalui A, C, M maka nilai dari  $\cos \alpha$  adalah ....

- A.  $\frac{3}{11}$       D.  $\frac{7}{11}$   
B.  $\frac{4}{11}$       E.  $\frac{9}{11}$   
C.  $\frac{5}{11}$

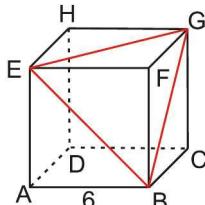
# Pembahasan

Catatan

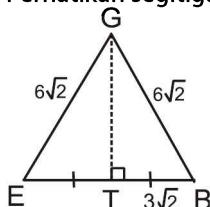
## 1. Pembahasan:

Diketahui:

Kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm.



Perhatikan segitiga BGE sama sisi:



Sehingga, jarak titik G ke garis EB = GT.

$$GT^2 = GB^2 - TB^2$$

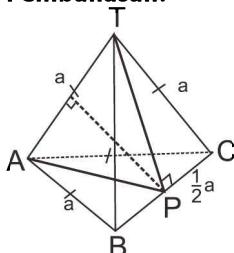
$$= (6\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2$$

$$= 72 - 18 = 54$$

$$\Rightarrow GT = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$$

Jawaban: A

## 2. Pembahasan:



Perhatikan segitiga TPC siku-siku di P maka:

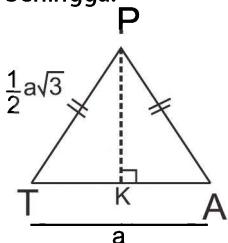
$$TP = \sqrt{TC^2 - PC^2}$$

$$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$$

Perhatikan segitiga TPA, panjang TP = AP maka segitiga TPA sama kaki.

Sehingga:



$$PK = \sqrt{PT^2 - TK^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{2}a\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{2}{4}a^2} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$$

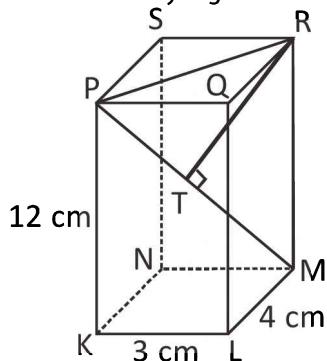
PK adalah jarak titik P ke garis AT

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{2} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

**Jawaban: C**

### 3. Pembahasan:

Gambar balok yang dimaksud dari soal adalah:



**Catatan**

## Catatan

$$\text{Panjang } PR = \sqrt{PS^2 + SR^2}$$

$$= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

Perhatikan segitiga PRM siku-siku di R maka:

$$PM = \sqrt{PR^2 + RM^2}$$

$$= \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm}$$

$$\text{Luas segitiga PRM} = \frac{1}{2} \times PR \times RM$$

$$= \frac{1}{2} \times 5 \times 12 = 30 \text{ cm}^2$$

Jarak titik R ke PM adalah ruas garis RT.

Dengan konsep luas segitiga, maka:

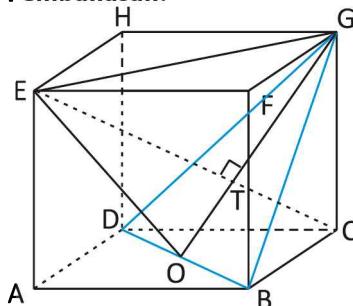
$$\text{Luas segitiga PRM} = \frac{1}{2} \times PM \times RT$$

$$\Rightarrow 30 = \frac{1}{2} \times 13 \times RT$$

$$\Rightarrow RT = \frac{60}{13} \text{ cm}$$

**Jawaban: E**

#### 4. Pembahasan:



Perhatikan, diagonal EC memotong tegak lurus bidang BGD di titik T maka ET merupakan jarak titik E ke bidang BGD.

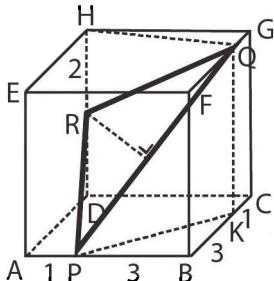
Garis ET : EC = 2 : 3

Panjang EC = diagonal ruang =  $8\sqrt{3}$  cm sehingga,

$$\text{panjang ET} = \frac{2}{3} \times 8\sqrt{3} = \frac{16}{3}\sqrt{3} \text{ cm}$$

**Jawaban: E**

### 5. Pembahasan:



Perhatikan segitiga PBK, siku-siku sama kaki maka

$$\text{panjang } PK = 3\sqrt{2} \text{ cm}$$

- Perhatikan segitiga PQK siku-siku di K maka:

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{PK^2 + KQ^2} \\ &= \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 4^2} = \sqrt{34} \end{aligned}$$

- Perhatikan segitiga GHQ siku-siku di G maka:

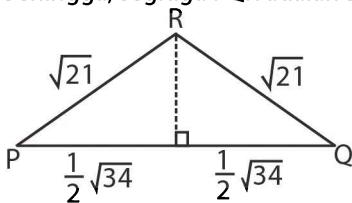
$$HQ = \sqrt{HG^2 + GQ^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}$$

- Perhatikan segitiga RHQ siku-siku di H maka:

$$RQ = \sqrt{HQ^2 + HR^2} = \sqrt{(\sqrt{17})^2 + 2^2} = \sqrt{21}$$

- Panjang  $RQ = RP$

Sehingga, segitiga PQR adalah segitiga samakaki.



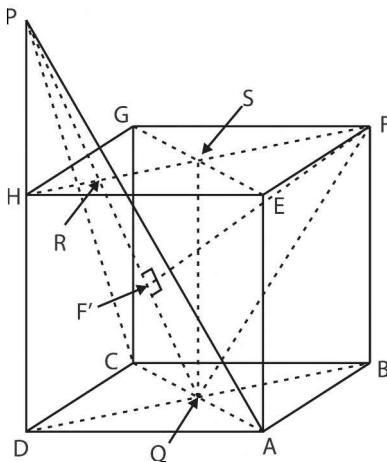
Maka, jarak titik R ke garis PQ adalah:

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{21})^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{34}\right)^2} &= \sqrt{21 - \frac{34}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{84 - 34}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Jawaban: E

**Catatan**

**6. Pembahasan:**



$$RF = \frac{3}{4}HF = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$$

$$SQ = a, SR = \frac{1}{4}a\sqrt{2} \Rightarrow RQ = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$$

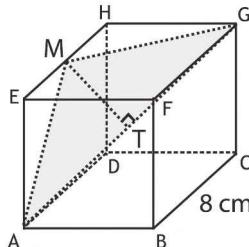
$$\triangle RQF = \frac{1}{2} \cdot RF \cdot SQ = \frac{1}{2} \cdot RQ \cdot FF'$$

$$\frac{3}{4}a\sqrt{2} \cdot a = \frac{3}{4}a\sqrt{2} \cdot FF'$$

$$FF' = a$$

**Jawaban: D**

**7. Pembahasan:**



$$EM = MH = 4 \text{ cm}$$

Perhatikan segitiga AEM siku-siku di E maka:

$$AM = \sqrt{AE^2 + EM^2}$$

$$= \sqrt{8^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

Perhatikan segitiga  $MHG$  siku-siku di  $G$  maka:

$$\begin{aligned} MG &= \sqrt{MH^2 + HG^2} \\ &= \sqrt{8^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

Diagonal ruang  $AG = 8\sqrt{3}$

Jadi, segitiga  $AMG$  adalah segitiga sama kaki sehingga garis  $MT$  (jarak antara titik  $M$  dengan  $AG$ ) memotong garis menjadi dua sama panjang

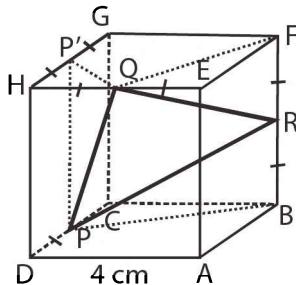
$$\left( AT = TG = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \right)$$

Perhatikan segitiga  $AMT$  siku-siku di  $T$  maka:

$$\begin{aligned} MT &= \sqrt{AM^2 - AT^2} \\ &= \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - (4\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{80 - 48} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ cm} \end{aligned}$$

**Jawaban: D**

#### 8. Pembahasan:



- Perhatikan segitiga  $P'HQ$  siku-siku sama kaki maka panjang  $P'Q = 2\sqrt{2}$  cm
- Perhatikan segitiga  $PP'Q$  siku-siku di  $P'$  maka:

$$\begin{aligned} PQ &= \sqrt{P'P^2 + P'Q^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{24} \end{aligned}$$

- Perhatikan segitiga  $QEF$  siku-siku di  $E$  maka:

$$\begin{aligned} QF &= \sqrt{QE^2 + EF^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \end{aligned}$$

## Catatan

- Perhatikan segitiga QRF siku-siku di F maka:

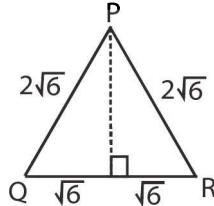
$$\begin{aligned}QR &= \sqrt{QF^2 + FR^2} \\&= \sqrt{(\sqrt{20})^2 + 2^2} = \sqrt{24}\end{aligned}$$

- Perhatikan segitiga PBR siku-siku di B, dimana panjang PB = QF =  $\sqrt{20}$  maka:

$$\begin{aligned}PR &= \sqrt{PB^2 + BR^2} \\&= \sqrt{(\sqrt{20})^2 + 2^2} = \sqrt{24}\end{aligned}$$

Jadi, segitiga PQR adalah segitiga sama sisi dengan panjang sisi  $= \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ .

Sehingga, jarak titik P ke garis QR adalah:

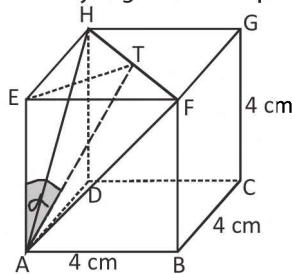


$$\begin{aligned}\sqrt{(2\sqrt{6})^2 - (\sqrt{6})^2} &= \sqrt{24 - 6} \\&= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

**Jawaban: B**

### 9. Pembahasan:

Kubus yang dimaksud pada soal adalah:



Proyeksi AE pada bidang AFH adalah AT maka:  
Sudut antara AE dan bidang AFH adalah  $\angle EAT$   
Perhatikan segitiga EAT, siku-siku di E!

$$\text{Panjang ET} = \frac{1}{2} \times \text{diagonal sisi}$$

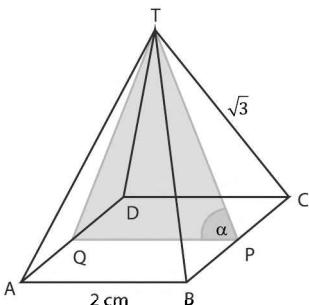
$$= \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$\begin{aligned}\text{Panjang TA} &= \sqrt{AE^2 + ET^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{16+8} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\text{depan } (ET)}{\text{miring } (TA)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

**Jawaban: C**

#### 10. Pembahasan:



Perhatikan segitiga TPQ.

$$TP = TQ = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2} \text{ cm}$$

Aturan cosinus yang berlaku pada segitiga TPQ di atas:

$$\cos \alpha = \frac{PQ^2 + TP^2 - TQ^2}{2 \cdot PQ \cdot TP}$$

Karena  $TQ = TP$  maka:

$$\cos \alpha = \frac{PQ^2}{2 \cdot PQ \cdot TP}$$

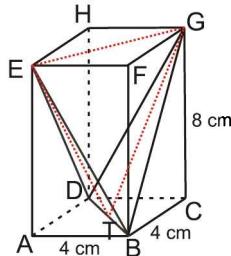
$$= \frac{2^2}{2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

**Jawaban: D**

## Catatan

### 11. Pembahasan:

Diketahui:



$$\text{Panjang } EG = 4\sqrt{2} \text{ (diagonal bidang)}$$

$$\begin{aligned}\text{Panjang } ET = TG &= \sqrt{GC^2 + TC^2} \\ &= \sqrt{8^2 + (2\sqrt{2})^2} \\ &= \sqrt{64 + 8} \\ &= \sqrt{72} = 6\sqrt{2} \text{ cm}\end{aligned}$$

Sudut antara bidang BDE dan bidang BDG adalah sudut ETG.

Perhatikan segitiga ETG.

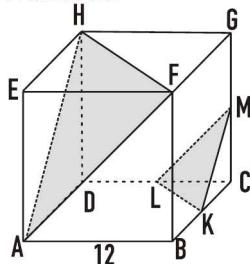
Dengan aturan cosinus maka:

$$\begin{aligned}\cos \angle ETG &= \frac{ET^2 + TG^2 - EG^2}{2 \cdot ET \cdot TG} \\ &= \frac{(6\sqrt{2})^2 + (6\sqrt{2})^2 - (4\sqrt{2})^2}{2 \cdot 6\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2}} \\ &= \frac{72 + 72 - 32}{144} = \frac{112}{144} = \frac{7}{9}\end{aligned}$$

Jawaban: D

### 12. Pembahasan:

Diketahui:



Sehingga, panjang diagonal ruang  $EC = 12\sqrt{3}$ .

Jarak titik E ke bidang AFH:

$$= \frac{1}{3}EC = \frac{1}{3} \times 12\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

Jarak titik C ke bidang KLM:

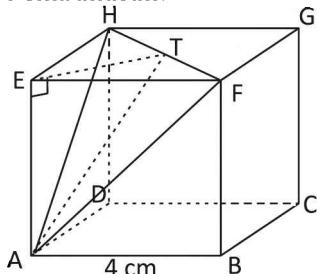
$$= \frac{1}{6}EC = \frac{1}{6} \times 12\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Sehingga, jarak bidang AFH ke bidang KLM

$$= 12\sqrt{3} - 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

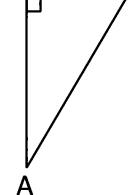
**Jawaban: D**

### 13. Pembahasan:



Perhatikan segitiga AET siku-siku di E, garis AT pada bidang AFH.

E      T



$$AT = \sqrt{4^2 + (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{16+8}$$

$$= \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ cm}$$

Dengan aturan sinus maka:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin 90^\circ} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}}$$

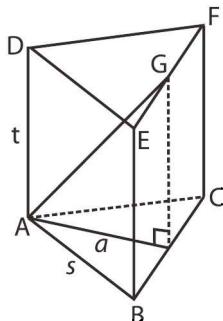
$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{12}}{6} = \frac{2}{6}\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

**Jawaban: C**

**14. Pembahasan:**

Misalkan, tinggi segitiga sama sisi ABC =  $a$ , diperoleh:

$$a = \sin 60^\circ \cdot s \Rightarrow a = \frac{s\sqrt{3}}{2}$$

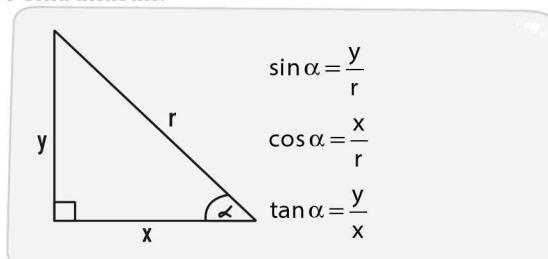


Dengan Pythagoras:

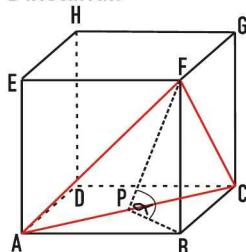
$$\begin{aligned} AG &= \sqrt{t^2 + a^2} \\ &= \sqrt{t^2 + \left(\frac{s\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + \frac{3s^2}{4}} \end{aligned}$$

**Jawaban: B**

**15. Pembahasan:**



Diketahui:

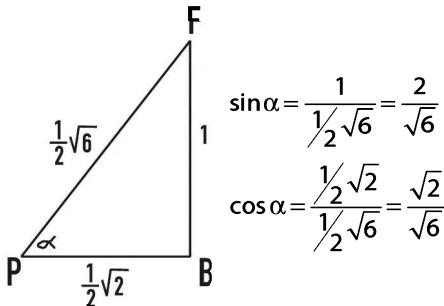


Misalkan, panjang rusuk kubus adalah 1.

$$\text{Maka, } PB = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

Perhatikan segitiga ABF siku-siku di B sehingga

$$\begin{aligned} \text{panjang } PF &= \sqrt{BF^2 + PB^2} \\ &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 6} = \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{aligned}$$

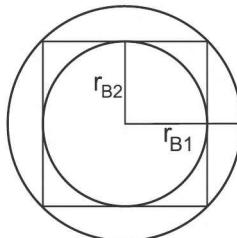


$$\text{Maka, } \sin \alpha \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

**Jawaban: B**

### 16. Pembahasan:

Gambar di samping merupakan irisan bola luar, kubus dan bola dalam.



$$R_{B1} = \frac{1}{2} \text{ diagonal ruang kubus}$$

$$= \text{jari-jari bola luar} = \frac{1}{2}\sqrt{3} a$$

$$R_{B2} = \frac{1}{2} \text{ panjang rusuk kubus}$$

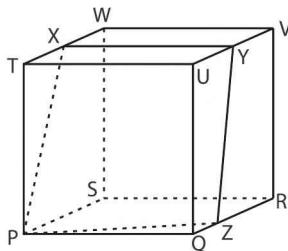
$$= \text{jari-jari bola dalam} = \frac{1}{2} a$$

**Catatan**

$$V_{B_1} = \frac{4}{3}\pi(R_{B_1})^3 = (R_{B_1})^3$$

$$V_{B_2} = \frac{4}{3}\pi(R_{B_2})^3 = (R_{B_2})^3$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}a\right)^3}{\left(\frac{1}{2}a\right)^3} = \frac{\left(\frac{1}{2}a\right)^3(\sqrt{3})^3}{\left(\frac{1}{2}a\right)^3} = \frac{3\sqrt{3}}{1}$$

**Jawaban: A****17. Pembahasan:**

$$TX = 2, UY = 4, QZ = 2, PQ = 6$$

$$\text{Volume prisma} = L_{\text{alas}} \cdot t$$

TUYX . PQZ dapat dianggap sebagai prisma dengan  $L_{\text{alas}} = \text{rata-rata } PTX \text{ dan } L_{QUYX}$ , dan tinggi PQ.

$$- \quad L_{\text{alas}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot TX \cdot TP + \frac{(UY + QZ) \cdot UQ}{2}}{2} \quad \{\text{rumus rata-rata}\}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 + \frac{(4+2) \cdot 6}{2}}{2}$$

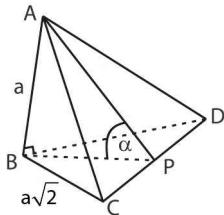
$$= 12$$

$$- \quad V_{TUYX.PQZ} = L_{\text{Alas}} \cdot PQ$$

$$= 12 \cdot 6$$

$$= 72$$

**Jawaban: C**

**18. Pembahasan:****Catatan**

- $\triangle BCD$  siku-siku di  $B$ .

$$BC = a\sqrt{2}, BD = a\sqrt{2} \text{ maka } CD = 2a$$

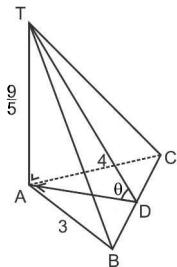
Akibatnya,  $CP = a$

- $\triangle BCP$  siku-siku di  $P$ .

$$CP = a, BC = a\sqrt{2}, \text{ maka } BP = a.$$

- $\tan \alpha = \frac{AB}{BP} = \frac{1}{1} = 1$

$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

**Jawaban: B****19. Pembahasan:**

$$\cos \theta ?$$

Jawab:

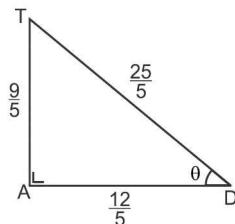
$$AD \cdot BC = AC \cdot AB$$

$$AD = \frac{AC \cdot AB}{BC}$$

$$= \frac{4 \cdot 3}{5} = \frac{12}{5}$$

**Catatan**

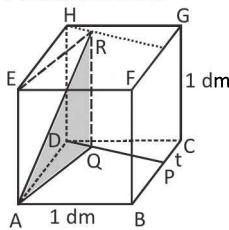
Perhatikan  $\triangle ADT$



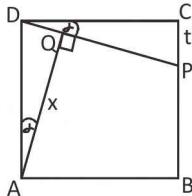
$$\cos \theta = \frac{12}{5} : \frac{25}{5} = \frac{12}{25}$$

**Jawaban: E**

**20. Pembahasan:**



Jika kita lihat alas kubusnya maka:



$$\cos \alpha = \frac{DC}{DP} = \frac{AQ}{AD}$$

$$\frac{DC}{DP} = \frac{AQ}{AD}$$

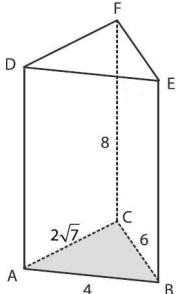
$$\frac{1}{\sqrt{t^2+1}} = \frac{AQ}{1}$$

$$AQ = \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$$

Luas

$$\begin{aligned}\triangle AQR &= \frac{1}{2} AQ \times QR \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} 1 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{t^2+1}}\end{aligned}$$

**Jawaban: A**

**21. Pembahasan:**

Dengan aturan kosinus:

$$\cos ABC = \frac{4^2 + 6^2 - (2\sqrt{7})^2}{2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$= \frac{16 + 36 - 28}{48} = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$$

Dengan aturan sinus untuk mencari luas segitiga:

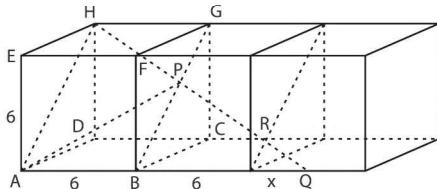
$$L = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$$

$$\text{Volume prisma} = \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

$$= 6\sqrt{3} \times 8 = 48\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

**Jawaban: D**

**22. Pembahasan:**

$$BP : PG = 3 : 2$$

$$- \quad BP = \frac{3}{5} BG = \frac{3}{5} \cdot 6\sqrt{2}$$

## Catatan

- Kesebangunan  $\triangle AQH$  dengan  $\triangle BQP$ :

$$\frac{BQ}{AQ} = \frac{BP}{AH} \Leftrightarrow \frac{6+x}{12+x} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 6\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$30 + 5x = 36 + 3x$$

$$3x = 6$$

$$x = 3$$

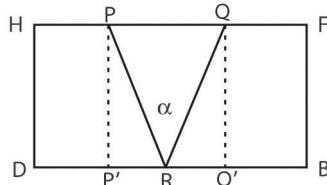
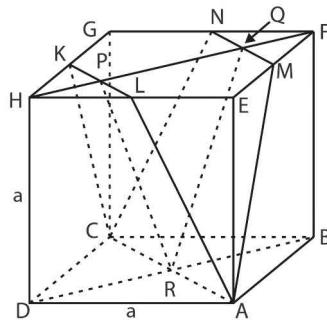
Diperoleh panjang  $AQ = 12+3 = 15$  cm.

Karena BP tegak lurus AQ, diperoleh:

$$\begin{aligned} L\Delta AQP &= \frac{1}{2} \cdot AQ \cdot BP \\ &= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot \frac{3}{5} \cdot 6\sqrt{2} \\ &= 27\sqrt{2} \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

**Jawaban: D**

### 23. Pembahasan:



- $\alpha = \angle(ACK, ACM)$   
 $= \angle(ACKL, ACNM)$   
 $= \angle(PR, QR)$   
 $= \angle PRQ$

**Catatan**

$$- \quad HP = \frac{1}{4}HF = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$$

$$QF = \frac{1}{3}HF = \frac{1}{3}a\sqrt{2}$$

$$PQ = HF - HP - QF$$

$$= a\sqrt{2} - \frac{1}{4}a\sqrt{2} - \frac{1}{3}a\sqrt{2}$$

$$= \frac{5}{12}a\sqrt{2}$$

$$- \quad P'R = \frac{1}{4}DB = \frac{1}{4}a\sqrt{2}$$

$$PP' = a = \frac{1}{4}a\sqrt{16}$$

$$\text{Diperoleh, } PR = \frac{1}{4}a\sqrt{18} = \frac{3}{4}a\sqrt{2}$$

$$- \quad RQ' = \frac{1}{6}DB = \frac{1}{6}a\sqrt{2}$$

$$QQ' = a = \frac{1}{6}a\sqrt{36}$$

$$\text{Diperoleh, } QR = \frac{1}{6}a\sqrt{38}$$

- Aturan cosinus:

$$PQ^2 = PR^2 + QR^2 - 2PR.QR.\cos\alpha$$

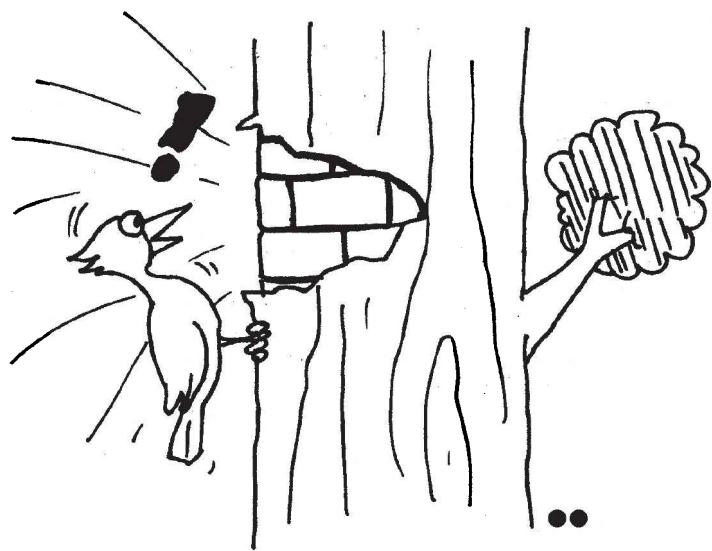
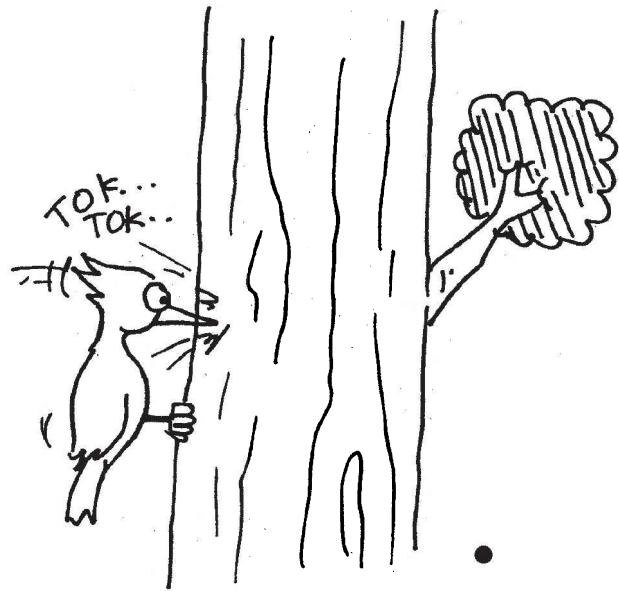
$$\frac{50}{144}a^2 = \frac{18}{16}a^2 + \frac{38}{36}a^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}a\sqrt{2} \cdot \frac{1}{6}a\sqrt{38} \cdot \cos\alpha$$

$$\frac{50}{144} = \frac{314 - 72\sqrt{19}\cos\alpha}{144}$$

$$72\sqrt{19}\cos\alpha = 264$$

$$\cos\alpha = \frac{264}{72\sqrt{19}}$$

**Jawaban: -**



$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$
$$y = ut \sin(\alpha) - 1/2 gt^2$$

16

$$va + vb = u$$

$$va = u$$

$$va = u$$

$$vb = u$$

$$(1-e^{t/2})$$

$$2u(1+e^{-t/2})$$

$$-1/2eu(t+2)$$

# POLINOMIAL



## A Pengertian Suku Banyak

Bentuk umum:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + a_{n-3} x^{n-3} + \dots + a_1 x + a_0$$

Dengan  $a_n \neq 0$  adalah konstanta, n bilangan cacah disebut suku banyak (polinomial) dalam x berderajat n (n adalah pangkat tertinggi dari x).

$a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  disebut koefisien-koefisien suku banyak dari masing-masing peubah (variabel) x yang merupakan konstanta real dan  $a_n \neq 0$ . Sedangkan,  $a_0$  disebut suku tetap (konstanta).

### Contoh

$$x^3 + 2x^2 + 5x + 1 \rightarrow \text{derajat } 3$$

$$2x^6 + x^4 + 2x^3 + 5x^2 + x + 8 \rightarrow \text{derajat } 6$$



## B Perkalian Suku Banyak

- $\overbrace{a(b+c)} = ab + ac$
- $\overbrace{(a+b)(c+d)} = ac + ad + bc + bd$



## C Nilai Suku Banyak

Misalkan:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$$

**Cara Menghitung:**

**a. Dengan cara substitusi**

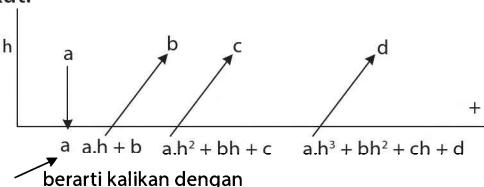
Jika  $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$  maka nilai suku banyak tersebut.

$x = 1$  adalah  $f(1)$

$$\begin{aligned} \text{Jadi, } f(1) &= (1)^3 + 2.(1)^2 + 1 + 4 \\ &= 1 + 2 + 5 = 8 \end{aligned}$$

**b. Dengan pembagian sintesis Horner**

Jika  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  adalah suku banyak maka  $f(h)$  diperoleh cara sebagai berikut:



## D Teorema Sisa

- Suatu suku banyak  $f(x)$  jika dibagi  $(x - a)$  maka sisanya  $= f(a)$
- Suatu suku banyak  $f(x)$  jika dibagi  $(x + a)$  maka sisanya  $= f(-a)$
- Suatu suku banyak  $f(x)$  jika dibagi  $(ax - b)$  maka sisanya  $= f(\frac{b}{a})$
- Suatu suku banyak  $f(x)$  habis dibagi  $(x - a)$  maka  $f(a) = 0$



## D Teorema Sisa

- Jika  $f(a) = S = 0$  sehingga  $a$  merupakan pembuat nol suku banyak  $f(x)$  maka  $(x - a)$  adalah faktor dari suku banyak  $f(x)$ .
- Jika pada suku banyak  $f(x)$  berlaku  $f(a) = 0$ ,  $f(b) = 0$ , dan  $f(c) = 0$  maka  $f(x)$  habis dibagi  $(x - a)(x - b)(x - c)$ .

- Jika  $(x - a)$  adalah faktor dari  $f(x)$  maka  $x = a$  adalah akar dari  $f(x)$
- Jika  $f(x)$  dibagi oleh  $(x - a)(x - b)$  maka sisanya:

$$S = \frac{(x-a)}{(b-a)} f(b) + \frac{(x-b)}{(a-b)} f(a)$$

- Jika  $f(x)$  dibagi oleh  $(x - a)(x - b)(x - c)$  maka sisanya:

$$S = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c) + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} f(b) + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} f(a)$$

### Akar-akar Suku Banyak

- Fungsi derajat tiga:  
 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  untuk  $f(x) = 0$

1. $x_1 + x_2 + x_3$	$= -\frac{b}{a}$
2. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$	$= \frac{c}{a}$
3. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$	$= -\frac{d}{a}$

- Fungsi derajat empat:  
 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$  untuk  $f(x) = 0$

1. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4$	$= -\frac{b}{a}$
2. $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$	$= \frac{c}{a}$
3. $x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4$	$= -\frac{d}{a}$
4. $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$	$= \frac{e}{a}$

**Catatan:**

pangkat ganjil → berakhir negatif

Tambahan:

1. $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$
2. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$
3. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = (x_1 + x_2 + x_3)^3 - 3x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)$



# PAKET SOAL

Catatan

## SOAL UN SMA IPA

1. Suku banyak berderajat 3, jika dibagi  $(x^2 + 2x - 3)$

bersisa  $(3x - 4)$ , jika dibagi  $(x^2 - x - 2)$  bersisa  $(2x + 3)$ . Suku banyak tersebut adalah ....

- A.  $x^3 - x^2 - 2x - 1$       D.  $x^3 + 2x^2 - x - 1$   
B.  $x^3 + x^2 - 2x - 1$       E.  $x^3 + 2x^2 + x + 1$   
C.  $x^3 + x^2 + 2x - 1$

## SOAL SBMPTN SAINTEK

2. Jika

$$x^4 + ax + (b-10)x^2 + 24x - 15 = f(x)(x-1)$$

dengan  $f(x)$  habis dibagi  $x - 1$  maka nilai  $b$  adalah ....

- A. 8      D. 2  
B. 6      E. 1  
C. 4

## SOAL UN SMA IPA

3. Salah satu faktor linier suku banyak  $f(x) = 2x^3 + px^2 - 17x + 10$  adalah  $(x + 2)$ . Salah satu faktor linier lainnya adalah ....

- A.  $x + 5$       D.  $2x + 1$   
B.  $x - 5$       E.  $2x - 3$   
C.  $x - 2$

## SOAL SNMPTN K.IPA

4. Diketahui suku banyak

$p(x) = ax^6 + bx^4 + cx - 2007$ , dengan  $a$ ,  $b$  dan  $c$  konstan. Jika suku banyak  $p(x)$  bersisa  $-2007$ , bila dibagi oleh  $(x - 2007)$ , dan juga bersisa  $-2007$  bila dibagi oleh  $(x + 2007)$  maka  $c = \dots$

- A.  $-2007$       D. 10  
B.  $-1$       E.  $2007$   
C. 0

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

5. Misalkan

$$f(x) = (x-1)^5 + (x-1)^4 + (x-1)^3 + (x-1)^2 + (x-1) + 1$$

Maka sisa dari pembagian  $f(x-1)$  oleh  $x-1$  adalah ....

- |      |       |
|------|-------|
| A. 1 | D. 6  |
| B. 2 | E. 10 |
| C. 4 |       |

**SOAL UN SMA IPA**

6. Suku banyak berderajat 3, jika dibagi  $(x^2 + x - 2)$  bersisa  $(2x - 1)$ , jika dibagi  $(x^2 + x - 3)$  bersisa  $(3x - 3)$ . Suku banyak tersebut adalah ...
- |                         |                         |
|-------------------------|-------------------------|
| A. $x^3 - x^2 - 2x - 3$ | D. $x^3 - 2x^2 - x + 2$ |
| B. $x^3 - x^2 - 2x + 3$ | E. $x^3 - 2x^2 + x - 2$ |
| C. $x^3 - x^2 + 2x + 3$ |                         |

**SOAL SIMULASI UN**

7. Suku banyak  $f(x)$  dibagi  $(x - 1)$  bersisa 5, dibagi  $(x - 2)$  bersisa 4. Suku banyak  $g(x)$  dibagi  $(x - 1)$  bersisa 2 dibagi  $(x - 2)$  bersisa 3. Jika  $V(x) = f(x).g(x)$  maka sisa pembagian  $V(x)$  oleh  $(x - 2)(x - 1)$  adalah ....
- |             |              |
|-------------|--------------|
| A. $2x + 4$ | D. $2x + 10$ |
| B. $2x + 6$ | E. $2x + 12$ |
| C. $2x + 8$ |              |

**SOAL SIMAK UI K.IPA**

8. Jika suku banyak  $p(x)$  dibagi dengan  $(x + 1)$  memberikan sisa 13 dan jika dibagi  $(x - 1)$  memberikan sisa 7 maka jumlah koefisien dari suku-suku  $p(x)$  dengan pangkat  $x$  genap adalah ....
- |      |       |
|------|-------|
| A. 0 | D. 10 |
| B. 3 | E. 20 |
| C. 6 |       |

**SOAL UN SMA IPA**

9. Diketahui suku banyak  $P(x) = 2x^4 + ax^3 - 3x^2 + 5x + b$ . Jika  $P(x)$  dibagi  $(x - 1)$  sisa 11, dibagi  $(x + 1)$  sisa -1 maka nilai  $(2a + b) =$  ....
- |       |      |
|-------|------|
| A. 13 | D. 7 |
| B. 10 | E. 6 |
| C. 8  |      |

**SOAL SNMPTN**

10. Diketahui suku banyak  $P(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + k$  habis dibagi  $x - 2$ . Jika  $P(x)$  dibagi  $x - 1$  sisanya adalah ....

**Catatan**

- A. 8
- D. -1
- B. 4
- E. -2
- C. 0

**BANK SOAL PENULIS**

11. Tiga kali nilai suku banyak  $x^3 - x^2 - kx - 2$  pada  $x = 1$  sama dengan nilai suku banyak pada  $x = 2$ . Nilai  $k$  yang memenuhi adalah ....

- A. 4
- D. 16
- B. 8
- E. 20
- C. 12

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

12. Jika  $x^4 + ax^3 + (b-10)x^2 + 15x - 6 = f(x)(x-1)$

dengan  $f(x)$  habis dibagi  $x-1$  maka nilai  $b$  adalah ....

- A. 2
- D. -1
- B. 1
- E. -2
- C. 0

**SOAL STANDAR SNMPTN**

13. Persamaan polinom yang akar-akarnya dua kali akar-akar polinom  $x^3 + 3x^2 - 5x + 7$  adalah ....

- A.  $8x^3 - 12x^2 - 10x - 7 = 0$
- B.  $x^3 + 6x^2 - 20x + 56 = 0$
- C.  $8x^3 + 12x^2 - 10x + 7 = 0$
- D.  $x^3 - 3x^2 - 5x - 7 = 0$
- E.  $x^3 - 6x^2 - 20x - 56 = 0$

**SOAL UN SMA IPA**

14. Diketahui  $(x-2)$  dan  $(x-1)$  adalah faktor-faktor suku banyak  $P(x) = x^3 + ax^2 - 13x + b$ . Jika akar-akar persamaan suku banyak tersebut adalah  $x_1, x_2$  dan  $x_3$  untuk  $x_1 > x_2 > x_3$  maka nilai  $x_1 - x_2 - x_3 = \dots$

- A. 8
- D. 2
- B. 6
- E. -4
- C. 3

## **SOAL SIMULASI**



Catatan

## SOAL STANDAR SBMPTN

16. Suku banyak  $f(x)$  habis dibagi oleh  $(x - 1)$ . Sisa pembagian  $f(x)$  oleh  $(x - 1)(x + 1)$  adalah ....

A.  $-\frac{1}{2}f(1)(1-x)$       D.  $\frac{1}{2}f(-1)(1+x)$   
B.  $-\frac{1}{2}f(1)(1+x)$       E.  $-\frac{1}{2}f(-1)(1+x)$   
C.  $\frac{1}{2}f(-1)(1-x)$

SOAL UM UGM SAINTEK

17. Suku banyak  $P(x)$  dibagi  $x^2 - x - 2$  mempunyai hasil bagi  $Q(x)$  dan sisa  $x + 2$ . Jika  $Q(x)$  dibagi  $x + 2$  mempunyai sisa 3 maka  $P(x)$  dibagi  $x^2 + 3x + 2$  adalah ....

A.  $-11x - 10$       D.  $10x + 11$   
B.  $-10x - 11$       E.  $11x + 10$   
C.  $11x - 10$

SOAL UN SMA IPA

18. Suku banyak  $(2x^3 + 5x^2 + ax + b)$  dibagi  $(x + 1)$  sisanya 1 dan jika dibagi  $(x - 2)$  sisanya 43. Nilai dari  $a + b =$   
....  
A. -4 D. 2  
B. -2 E. 4  
C. 0

# SOAL STANDAR SNMPTN K.IPA

19. Bila akar-akar persamaan:  
 $x^4 - 8x^3 + ax^2 - bx + c = 0$  membentuk deret aritmetika dengan beda 2 maka ....

A.  $a = -8, b = -15, c = 16$       D.  $a = -16, b = 8, c = -15$   
B.  $a = 8, b = 15, c = -16$       E.  $a = 14, b = -8, c = -15$   
C.  $a = 14, b = -8, c = 15$



**SOAL STANDAR SBMPTN**20. Jika suku banyak (polinom)  $f(x)$  dibagi oleh  $(x - a)$ (x - b) dan  $a \neq b$  maka sisa pembagian ini adalah ....

- A.  $\frac{x-a}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$
- B.  $\frac{x-a}{a-b}f(b) + \frac{x-a}{b-a}f(a)$
- C.  $\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$
- D.  $\frac{x-b}{a-b}f(b) + \frac{x-a}{b-a}f(a)$
- E.  $\frac{x-a}{b-a}f(b) + \frac{x-a}{b-a}f(a)$

**SOAL SBMPTN SAINTEK**21. Suku banyak  $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$  membagi habis

$$x^4 + 4x^3 + 2ax^2 + 4bx + c.$$

Nilai  $a + b$  adalah ....

- A. 12
- B. 10
- C. 9
- D. 6
- E. 3

**SOAL SNMPTN K.IPA**22. Jika  $x_1, x_2$ , dan  $x_3$  merupakan akar-akar persama-an  $x^3 - 5x^2 + 9x - 3 = 0$  maka nilai dari

$$x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2 = \dots$$

- A. 15
- B. 30
- C. 33
- D. 36
- E. 39

**SOAL SBMPTN**

23. Diketahui suku banyak  $g(x) = ax^2 - bx - (a + b)$  habis dibagi  $x - 4$  dan salah satu akar persamaan suku banyak  $f(x) = 0$  adalah 4.  $f(x)$  dibagi  $g(x)$  sisanya  $ax + b - 2$  maka nilai  $a$  adalah ....

A.  $\frac{6}{7}$

D.  $\frac{2}{7}$

B.  $\frac{5}{7}$

E.  $\frac{1}{7}$

C.  $\frac{4}{7}$

**SOAL STANDAR UN**

24. Suatu suku banyak  $F(x)$  dibagi oleh  $(x - 2)$  sisanya 8, dan jika dibagi  $(x + 3)$  sisanya -7. Sisa pembagian suku banyak  $F(x)$  oleh  $x^2 + x - 6$  adalah ....

A.  $9x - 7$

D.  $x - 4$

B.  $x + 6$

E.  $3x + 2$

C.  $2x + 3$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

25. Misalkan  $x_1$  dan  $x_2$  bilangan bulat yang merupakan akar-akar persamaan kuadrat  $x^2 - (2k + 4)x + (3k + 4) = 0$ . Jika  $x_1, k, x_2$  merupakan tiga suku pertama dari suatu deret geometri maka rumus suku ke-n deret tersebut adalah ...

A.  $1 - (-1)^n$

D.  $2(-1)^n$

B.  $1 + (-1)^n$

E. -1

C.  $-(-1)^n$

# Pembahasan

## Catatan

### 1. Pembahasan:

Bentuk umum suku banyak  $f(x)$  adalah:

$$f(x) = H(x) \cdot P(x) + \text{sisa}$$

Dengan,  $H(x)$  = hasil bagi

$P(x)$  = pembagi

#### Teorema sisa:

Sisa dari suatu suku banyak  $f(x)$  yang dibagi  $(x - a)$  adalah  $f(a)$ .

Diketahui:

Suku banyak berderajat 3, jika dibagi  $(x^2 + 2x - 3)$

bersisa  $(3x - 4)$ .

Misal: suku banyak yang dimaksud adalah  $f(x)$ , dan hasil baginya  $(ax + b)$  maka:

$$f(x) = (ax + b) \cdot (x^2 + 2x - 3) + (3x - 4)$$

Jika  $f(x)$  dibagi  $(x^2 - x - 2)$  bersisa  $(2x + 3)$ , atau

$f(x)$  dibagi  $(x - 2)(x + 1)$  bersisa  $(2x + 3)$

maka:

$$f(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7 \quad \dots \text{(i)}$$

$$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 3 = 1 \quad \dots \text{(ii)}$$

- Dengan mensubstitusikan (i) pada

$$f(x) = (ax + b) \cdot (x^2 + 2x - 3) + (3x - 4)$$

diperoleh:

$$f(2) = (2a + b) \cdot (2^2 + 2 \cdot 2 - 3) + (3 \cdot 2 - 4)$$

$$\Rightarrow 7 = (2a + b) \cdot (5) + 2$$

$$\Rightarrow 5 = 10a + 5b \text{ atau } 1 = 2a + b \quad \dots \text{(iii)}$$

- Dengan mensubstitusikan (ii) pada

$$f(x) = (ax + b) \cdot (x^2 + 2x - 3) + (3x - 4)$$

diperoleh:

$$f(-1) = (-a + b) \cdot ((-1)^2 + 2(-1) - 3) + (3(-1) - 4)$$

$$\Rightarrow 1 = (-a + b) \cdot (-4) + (-7)$$

$$\Rightarrow 8 = 4a - 4b \text{ atau } \Rightarrow 2 = a - b \dots \text{(iv)}$$

Dari persamaan (iii) dan (iv), dengan metode eliminasi maka:

$$1 = 2a + b$$

$$\underline{2 = a - b} \quad +$$

$$3 = 3a$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{3} = 1$$

Dari  $2 = a - b$ , dan nilai  $a = 1$ , maka  $b = -1$

Sehingga, suku banyak tersebut:

$$f(x) = (x - 1) \cdot (x^2 + 2x - 3) + (3x - 4)$$

$$= x^3 + 2x^2 - 3x - x^2 - 2x + 3 + (3x - 4)$$

$$= x^3 + x^2 - 2x - 1$$

### Jawaban: B

## 2. Pembahasan:

### Teorema Sisa:

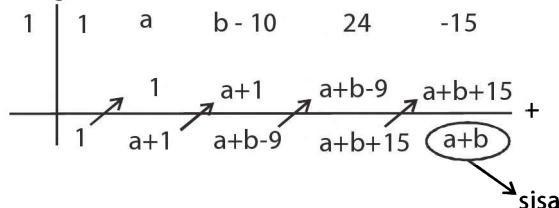
Setiap suku banyak  $f(x)$  habis dibagi  $(x - a)$  maka  $f(a) = 0$ .

Diketahui:

$$x^4 + ax^3 + (b-10)x^2 + 24x - 15 = f(x)(x-1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 + ax^3 + (b-10)x^2 + 24x - 15}{(x-1)} = f(x)$$

Dengan cara Horner maka:



## Catatan

Hasilnya adalah:

$$x^3 + (a+1)x^2 + (a+b-9)x + (a+b+15)$$

Dengan sisa  $a+b$ , dimana  $a+b=0$  karena  $f(x)$

habis dibagi  $(x - 1)$ .

Sehingga:

$$x^3 + (a+1)x^2 + (a+b-9)x + (a+b+15) = f(x)$$

Karena  $f(x)$  habis dibagi  $(x - 1)$  maka:

$$f(1) = 0$$

$$\Rightarrow 1^3 + (a+1)1^2 + (a+b-9)1 + (a+b+15) = f(1)$$

Ingat, bahwa nilai  $a+b=0$

$$\Rightarrow 1+a+1+0-9+0+15=0$$

$$\Rightarrow a+8=0$$

$$\Rightarrow a=-8$$

Karena,  $a+b=0 \Rightarrow -8+b=0$

$$\Rightarrow b=8$$

**Jawaban: A**

### 3. Pembahasan:

Suatu suku banyak  $P(x)$  dengan salah satu faktornya  $(x + a)$  maka  $P(-a) = 0$

Diketahui:

$$\text{Suku banyak } f(x) = 2x^3 + px^2 - 17x + 10$$

dengan salah satu faktornya  $(x + 2)$  maka:

$$f(-2) = 0$$

$$\Rightarrow 2(-2)^3 + p(-2)^2 - 17(-2) + 10 = 0$$

$$\Rightarrow -16 + 4p + 34 + 10 = 0$$

$$\Rightarrow 4p + 28 = 0 \Rightarrow p = -7$$

$$\text{Sehingga, } f(x) = 2x^3 - 7x^2 - 17x + 10$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+2)(2x^2 - 11x + 5)$$

$$\Rightarrow f(x) = (x+2)(2x-1)(x-5)$$

Jadi, salah satu faktor linier lainnya adalah:  $(x - 5)$

**Jawaban: B**

#### 4. Pembahasan:

$$p(x) = ax^6 + bx^4 + cx - 2007$$

- $p(x) : (x - 2007)$ ;

sisa = -2007, maka  $p(2007) = -2007$

- $p(x) : (x + 2007)$ ;

sisa = -2007, maka  $p(-2007) = -2007$

Misal:  $2007 = m$

(i).  $P(m) = am^6 + bm^4 + cm - m = -m$

$$am^6 + bm^4 + cm = 0$$

(ii).  $P(m) = am^6 + bm^4 - cm - m = -m$

$$am^6 + bm^4 - cm = 0$$

Dari persamaan (i) dan (ii) diperoleh  $2cm = 0$

$$\Rightarrow c = 0$$

**Jawaban: C**

#### 5. Pembahasan:

$f(x)$  dibagi  $(x - a)$  sisa  $f(a)$

- $f(x) = (x - 1)^5 + (x - 1)^4 + (x - 1)^3 + (x - 1)^2 + (x - 1) + 1$
- $f(x + 1) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
- Sisa pembagian oleh  $x - 1$  adalah  $1^5 + 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 6$

**Jawaban: D**

#### 6. Pembahasan:

Misal, suku banyak berderajat tiganya adalah  $F(x)$ .

Dibagi  $(x^2 + x - 2)$  atau  $(x - 1)(x + 2)$  bersisa  $2x - 1$

maka:

$$F(1) \equiv 2.1 - 1 = 1$$

$$F(-2) \equiv 2.(-2) - 1 = -5$$

Dari pilihan jawaban yang ada, yang sesuai adalah  $x^3 - x^2 - 2x + 3$ , karena:

$$F(1) = 1^3 - 1^2 - 2.1 + 3 = 1$$

$$F(-2) = (-2)^3 - (-2)^2 - 2(-2) + 3 = -5$$

Dan  $x^3 - x^2 - 2x + 3$  dibagi  $x^2 + x - 3$  bersisa  $3x - 3$ .

**Jawaban: B**

**Catatan**

## Catatan

### 7. Pembahasan:

$f(x)$  dibagi  $(x - 1)$  bersisa 5 maka:

$$f(1) = 5$$

$f(x)$  dibagi  $(x - 2)$  bersisa 4 maka:

$$f(2) = 4$$

$g(x)$  dibagi  $(x - 1)$  bersisa 2 maka:

$$g(1) = 2$$

$g(x)$  dibagi  $(x - 2)$  bersisa 3 maka:

$$g(2) = 3$$

$$V(x) = f(x).g(x)$$

$V(x)$  dibagi  $(x - 2)(x - 1)$  bersisa  $px + q$  maka:

$$V(1) = f(1).g(1)$$

$$= 5 \cdot 2 = 10$$

$$\Rightarrow p + q = 10 \quad \dots(i)$$

$$V(2) = f(2).g(2)$$

$$= 4 \cdot 3 = 12$$

$$\Rightarrow 2p + q = 12 \quad \dots(ii)$$

Dari persamaan (i) dan (ii), dengan menggunakan metode eliminasi, diperoleh:

$$p + q = 10$$

$$\underline{2p + q = 12} \quad -$$

$$-p \quad = -2 \Rightarrow p = 2$$

Dengan mensubstitusikan pada  $p + q = 10$ , diperoleh  $q = 8$

Jadi, sisa pembagian  $V(x)$  oleh  $(x - 2)(x - 1)$  adalah:  
 $2x + 8$

**Jawaban: C**

### 8. Pembahasan:

Misal,  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ .

$$P(1) = 7 \quad \Rightarrow \quad a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = 7$$

$$P(-1) = 13 \quad \Rightarrow \quad a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n = 13$$

$$+ \qquad \qquad \qquad +$$

$$2a_0 + 2a_2 + \dots + 2a_n = 20$$

$$\text{Diperoleh: } a_0 + a_2 + a_4 + \dots + a_n = 10$$

**Jawaban: D**

**9. Pembahasan:**

$$P(x) = 2x^4 + ax^3 - 3x^2 + 5x + b$$

$P(x)$  dibagi  $(x-1)$  sisa 11 maka:

$$P(1) = 11$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 1^4 + a \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + b = 11$$

$$\Rightarrow 2 + a - 3 + 5 + b = 11$$

$$\Rightarrow a + b = 7 \quad \dots(i)$$

$P(x)$  dibagi  $(x+1)$  sisa -1 maka:

$$P(-1) = -1$$

$$\Rightarrow 2(-1)^4 + a(-1)^3 - 3(-1)^2 + 5(-1) + b = -1$$

$$\Rightarrow 2 - a - 3 - 5 + b = -1$$

$$\Rightarrow -a + b = 5 \quad \dots(ii)$$

Dengan metode eliminasi dari persamaan (i) dan (ii):

$$a + b = 7$$

$$\begin{array}{r} -a + b = 5 \\ \hline \end{array}$$

$$2a = 2$$

$$\Rightarrow a = 1$$

Dengan mensubstitusikan nilai  $a = 1$  ke salah satu persamaan (misal  $a + b = 7$ ) maka:

$$1 + b = 7 \Rightarrow b = 6$$

$$\text{Jadi, nilai dari } (2a + b) = 2 \cdot 1 + 6 = 8$$

**Jawaban: C****10. Pembahasan:**

$$p(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + k$$

$p(x)$  habis dibagi  $x-2$

Jika  $p(x)$  dibagi  $x-1$ , maka sisa = ...?

Jawab:

- $p(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + k$

$$p(2) = 16 + 16 - 36 - 4 + k$$

$$0 = 32 - 40 + k$$

$$k = 8$$

## Catatan

•  $p(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$

Sisa jika  $p(x)$  dibagi  $x - 1$  adalah:

$$p(1) = 1 + 2 - 9 - 2 + 8$$

$$= 0$$

Jawaban: C

### 11. Pembahasan:

Tiga kali nilai suku banyak  $x^3 - x^2 + kx - 2$  pada  $x = 1$  sama dengan nilai suku banyak pada  $x = 2$ , artinya:

$$3f(1) = f(2)$$

$$3(1 - 1 + k - 2) = 8 - 4 + 2k - 2$$

$$3k - 6 = 2k + 2$$

$$\Rightarrow k = 8$$

Jawaban: B

### 12. Pembahasan:

#### Teorema Sisa:

Setiap suku banyak  $f(x)$  habis dibagi  $(x - a)$  maka  $f(a) = 0$ .

Diketahui:

$$x^4 + ax^3 + (b-10)x^2 + 15x - 6 = f(x)(x-1)$$

$$\Rightarrow \frac{x^4 + ax^3 + (b-10)x^2 + 15x - 6}{(x-1)} = f(x)$$

Dengan cara Horner maka:

1		1	a	b - 10	15	-6
		1	a+1	a+b-9	a+b-6	a+b+6
		1	a+b-9	a+b+6	a+b+6	+ sisa

Hasilnya adalah:

$$x^3 + (a+1)x^2 + (a+b-9)x + (a+b+6)$$

Dengan sisa  $a+b$ , dimana  $a+b=0$  karena  $f(x)$

habis dibagi  $(x - 1)$ .

Sehingga:

$$x^3 + (a+1)x^2 + (a+b-9)x + (a+b+6) = f(x)$$

Karena  $f(x)$  habis dibagi  $(x - 1)$  maka:

$$f(1) = 0$$

$$\Rightarrow 1^3 + (a+1)1^2 + (a+b-9)1 + (a+b+6) = f(1)$$

Ingin, bahwa nilai  $a+b=0$

$$\Rightarrow 1+a+1+0-9+0+6=0$$

$$\Rightarrow a-1=0$$

$$\Rightarrow a=1$$

Karena,  $a+b=0 \Rightarrow 1+b=0$

$$\Rightarrow b=-1$$

**Jawaban: D**

### 13. Pembahasan:

Diketahui:

$$x^3 + 3x^2 - 5x + 7 \quad (a = 1, b = 3, c = -5, d = 7)$$

Misal, akar-akarnya adalah  $x_1, x_2$ , dan  $x_3$  maka:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = \frac{-5}{1} = -5$$

$$x_1x_2x_3 = \frac{-d}{a} = \frac{-7}{1} = -7$$

Jadi, jika akar-akarnya dua kali akar-akar  $x_1, x_2$  dan  $x_3$ , maka:

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 2(-3) = -6$$

$$2x_1 \cdot 2x_2 + 2x_1 \cdot 2x_3 + 2x_2 \cdot 2x_3$$

$$= 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4(-5) = -20$$

$$2x_1 \cdot 2x_2 \cdot 2x_3 = 8(x_1x_2x_3) = 8(-7) = -56$$

Sehingga, persamaan yang barunya adalah:

$$x^3 + 6x^2 - 20x + 56 = 0$$

**Jawaban: B**

**Catatan****14. Pembahasan:**

$(x-2)$  dan  $(x-1)$  adalah faktor-faktor suku banyak

$$P(x) = x^3 + ax^2 - 13x + b$$

- $(x-2) \Rightarrow x=2$   
 $\Leftrightarrow 2^3 + a \cdot 2^2 - 13 \cdot 2 + b = 0$   
 $\Leftrightarrow 8 + 4a - 26 + b = 0$   
 $\Leftrightarrow 4a + b = 18 \dots \text{(i)}$
- $(x-1) \Rightarrow x=1$   
 $\Leftrightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 + b = 0$   
 $\Leftrightarrow 1 + a - 13 + b = 0$   
 $\Leftrightarrow a + b = 12$   
 $\Leftrightarrow a = 12 - b \dots \text{(ii)}$

Dengan mensubstisikan (ii) pada (i), diperoleh:

$$4(12 - b) + b = 18$$

$$\Leftrightarrow 48 - 4b + b = 18$$

$$\Leftrightarrow -3b = -30$$

$$\Leftrightarrow b = 10$$

Sehingga,  $a = 12 - 10 = 2$

Jika  $(x+a) \Rightarrow x = -a$  adalah faktor dari polinomial  $P(x)$  maka:

$$P(-a) = 0$$

Jadi,  $P(x) = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$

$$\Rightarrow P(x) = (x-2)(x-1)(x+5)$$

Karena  $x_1 > x_2 > x_3$  maka:

$$x_1 = 2; x_2 = 1; \text{ dan } x_3 = -5$$

$$\text{Jadi, } x_1 - x_2 - x_3 = 2 - 1 + 5 = 6$$

**Jawaban: B**

**15. Pembahasan:**

Misal:  $x_1, x_2, x_3$  dan  $x_4$  adalah akar-akar dari  $x^4 - 8x^3 + 2ax^2 + (5b + 3)x + 4c - 3 = 0$

Maka:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \dots \text{(i)}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = 2a \dots (ii)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -(5b + 3) \dots (iii)$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 4c - 3 \dots (iv)$$

$x_1, x_2, x_3, x_4$  membentuk barisan aritmetika dengan beda 2 maka:

$$x_2 = x_1 + 2; x_3 = x_1 + 4 \text{ dan } x_4 = x_1 + 6$$

Dari persamaan (i):

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$\Rightarrow x_1 + (x_1 + 2) + (x_1 + 4) + (x_1 + 6) = 8$$

$$\Rightarrow 4x_1 + 12 = 8 \Rightarrow x_1 = -1$$

Sehingga, diperoleh:

$$x_2 = 1; x_3 = 3 \text{ dan } x_4 = 5$$

Dari persamaan (ii):

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = 2a$$

$$\Rightarrow (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 5 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 5 = 2a$$

$$\Rightarrow 14 = 2a \Rightarrow a = 7$$

Dari persamaan (iii):

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = -5b - 3$$

$$\Rightarrow (-1) \cdot 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 5 = -5b - 3$$

$$\Rightarrow -3 - 5 - 15 + 15 + 3 = -5b$$

$$\Rightarrow -5 = -5b \Rightarrow b = 1$$

Dari persamaan (iv):

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = 4c - 3$$

$$\Rightarrow (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 = 4c - 3$$

$$\Rightarrow -15 + 3 = 4c$$

$$\Rightarrow -12 = 4c \Rightarrow c = -3$$

Jadi, nilai dari  $a + b + c = 7 + 1 - 3 = 5$

**Jawaban: D**

## 16. Pembahasan:

Pembagi  $(x - 1)(x + 1)$  maka  $x = 1$  dan  $x = -1$

Misalkan, sisa baginya  $px + q$  sehingga:

Ketika  $x = 1$ , sisa  $= p + q$

Karena  $f(x)$  habis dibagi  $(x - 1)$  maka  $f(1) = 0$ , oleh karena itu  $p + q = 0 \dots (i)$

## Catatan

## Catatan

Ketika  $x = -1$ , sisa  $= -p + q = f(-1) \dots \text{(ii)}$   
Dari (i) dan (ii), dengan metode eliminasi, diperoleh:  
 $p + q = 0$   
 $-p + q = f(-1)$

$$2p = -f(-1) \Rightarrow p = -\frac{1}{2}f(-1)$$

$$\text{Dan } q = \frac{1}{2}f(-1)$$

Sehingga, sisa pembagian adalah:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}f(-1)x + \frac{1}{2}f(-1) \\ & = \frac{1}{2}f(-1)(-x + 1) = \frac{1}{2}f(-1)(1 - x) \end{aligned}$$

**Jawaban: C**

### 17. Pembahasan:

Suku banyak  $f(x)$  dapat ditulis sebagai:  
 $f(x) = B(x) \cdot H(x) \cdot S(x)$ ,  
dengan  $B(x)$  : pembagi  
 $H(x)$  : hasil bagi  
 $S(x)$  : sisa

- $P(x) = (x^2 - x - 2) \cdot Q(x) + x + 2$   
 $= (x + 1)(x - 2) \cdot Q(x) + x + 2$   
 $p(-1) = 0 + (-1) + 2 = 1$   
 $P(2) = 0 + 2 + 2 = 4$
- $Q(x) = (x + 2) \cdot H_1(x) + 3$   
 $Q(-2) = 0 + 3 = 3$
- Dari penulisan  $P(x)$  di atas, diperoleh:  
 $P(-2) = (-2 + 1)(-2 - 2) \cdot Q(-2) + -2 + 2$   
 $= -1 \cdot (-4) \cdot 3 + 0$   
 $= 12$
- Misal, sisa pembagian  $P(x)$  oleh  $x^2 + 3x + 2$  adalah  $ax + b$ .  
Titulis:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= (x^2 + 3x + 2) \cdot H(x) + ax + b \\
 &= (x+1)(x+2) \cdot H(x) + ax + b \\
 P(-1) = 0 &\quad -a + b = 1 \\
 P(-2) = 0 &\quad \underline{-2a + b = 12} \\
 &\quad a = -11 \\
 &\quad b = -10
 \end{aligned}$$

Jadi, sisa  $ax + b$  adalah  $-11x - 10$

**Jawaban: A**

### 18. Pembahasan:

$$F(x) = 2x^3 + 5x^2 + ax + b : (x+1)$$

Sisa 1, artinya:

$$F(-1) = 1 \Rightarrow 2(-1)^3 + 5(-1)^2 + a \cdot (-1) + b = 1$$

$$\Rightarrow a - b = 2 \quad \dots \text{(i)}$$

$F(x)$  dibagi  $(x-2)$  sisanya 43 maka:

$$F(2) = 43 \Rightarrow 2(2)^3 + 5(2)^2 + a \cdot (2) + b = 43$$

$$\Rightarrow 2a + b = 7 \quad \dots \text{(ii)}$$

Selanjutnya dari persamaan (i) dan (ii) dieliminasi, diperoleh:

$$a - b = 2$$

$$\underline{2a + b = 7} \quad -$$

$$\underline{3a} \quad = 9 \Rightarrow a = 3$$

$$\text{Dan, } b = a - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$\text{Jadi, nilai } a + b = 3 + 1 = 4$$

**Jawaban: E**

### 19. Pembahasan:

Diketahui:

Akar-akar dari  $x^4 - 8x^3 + ax^2 - bx + c = 0$  membentuk deret aritmetika dengan beda 2.

Misal, akar-akarnya adalah:  $x_1, x_2, x_3,$  dan  $x_4$  maka:

$$x_2 = x_1 + 2, x_3 = x_1 + 4, \text{ dan } x_4 = x_1 + 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$$

$$\Rightarrow x_1 + (x_1 + 2) + (x_1 + 4) + (x_1 + 6) = 8$$

$$\Rightarrow 4x_1 + 12 = 8$$

$$\Rightarrow x_1 = -1$$

## Catatan

Sehingga,  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 3$  dan  $x_4 = 5$   
Jadi, persamaan suku banyaknya adalah:  
 $(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 5) = 0$   
 $\Rightarrow x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0$   
Jadi,  $a = 14$ ,  $b = -8$  dan  $c = -15$ .

Jawaban: E

### 20. Pembahasan:

Misal: sisa pembagiannya  $S(x) = px + q$   
 $f(x)$  dibagi oleh  $(x - a)(x - b)$  sehingga:  
ketika  $x = a$  maka  $S(a) = f(a)$   
 $ap + q = f(a) \dots (i)$   
Ketika  $x = b$  maka  $S(b) = f(b)$   
 $bp + q = f(b) \dots (ii)$

Dari (i) dan (ii), dengan metode eliminasi:

$$\begin{array}{r} ap + q = f(a) \\ bp + q = f(b) \\ \hline ap - bq = f(a) - f(b) \end{array}$$

$$\Rightarrow (a - b)p = f(a) - f(b)$$

$$\Rightarrow p = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Dari (i):

$$\begin{aligned} a \left[ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right] + q &= f(a) \\ \Rightarrow q &= f(a) - a \left[ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right] \\ \Rightarrow q &= \frac{a.f(a) - b.f(a)}{a - b} - \left[ \frac{a.f(a) - a.f(b)}{a - b} \right] \\ \Rightarrow q &= \frac{-b.f(a) + a.f(b)}{a - b} \end{aligned}$$

Sehingga:

$$S(x) = px + q$$

$$= \left[ \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right] x + \frac{-bf(a) + af(b)}{a - b}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{f(a) - f(b) - bf(a) + af(b)}{a - b} \\
 &= \frac{(x - b)f(a) - (a - x)f(b)}{a - b} \\
 &= \frac{x - b}{a - b}f(a) + \frac{a - x}{a - b}f(b) \\
 &= \frac{x - b}{a - b}f(a) + \frac{x - a}{b - a}f(b)
 \end{aligned}$$

**Jawaban: C****21. Pembahasan:**

Suku banyak  $x^3 + 3x^2 + 9x + 3$  membagi habis  $x^4 + 4x^3 + 2ax^2 + 4bx + c$ .

Artinya, terdapat pengali  $f(x)$  sehingga:

$$\begin{aligned}
 (x^3 + 3x^2 + 9x + 3)(f(x)) &= x^4 + 4x^3 + 2ax^2 + 4bx + c \\
 (x^3 + 3x^2 + 9x + 3)(x) &= x^4 + 3x^3 + 9x^2 + 3x \\
 (x^3 + 3x^2 + 9x + 3)(1) &= \frac{x^3 + 3x^2 + 9x + 3}{x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 12x + 3} +
 \end{aligned}$$

Pembagi  $f(x) = (x + 1)$

Sehingga:

$$x^4 + 4x^3 + 2ax^2 + 4bx + c = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 12x + 3$$

Maka:

- $2a = 12 \Rightarrow a = 6$
- $4b = 12 \Rightarrow b = 3$
- $c = 3$

Jadi, nilai dari  $a + b = 6 + 3 = 9$

**Jawaban: C****22. Pembahasan:**

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  dengan akar-akar

$x_1, x_2$ , dan  $x_3$  maka:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \frac{-d}{a}$$

## Catatan

Diketahui:  $x^3 - 5x^2 + 9x - 3 = 0$  dengan akar-akar  $x_1, x_2$ , dan  $x_3$

Sehingga:

$$\begin{aligned} & x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3^2 \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 (x_1 + x_2 + x_3) \\ &= 3 \cdot (5) = 15 \end{aligned}$$

Jawaban: A

### 23. Pembahasan:

$$g(x) = ax^2 - bx - (a + b)$$

habis dibagi  $x - 4$

Salah satu akar persamaan suku banyak

$f(x) = 0$  adalah 4.

$f(x)$  dibagi  $g(x)$  sisanya  $ax + b - 2$ ?

Jawab:

- $g(x) = ax^2 - bx - (a + b)$

$$g(4) = 16a - 4b - a - b$$

$$0 = 15a - 5b$$

$$3a = b$$

- $\frac{f(x)}{g(x)}$  sisanya  $ax + b - 2$

$$x = 4 \text{ sisanya } = 0$$

$$\Rightarrow 4a + b - 2 = 0$$

$$4a + 3a - 2 = 0$$

$$a = \frac{2}{7}$$

Jawaban: D

### 24. Pembahasan:

Misalkan:

Sisa pembagian  $F(x)$  oleh  $x^2 + x - 6$  atau  $(x - 2)(x + 3)$  adalah  $px + q$ .

Untuk  $F(x)$  dibagi  $(x - 2)$  sisanya 8 maka:

$$F(2) = 8 \Rightarrow 2p + q = 8 \dots (i)$$

Untuk  $F(x)$  dibagi  $(x + 3)$  sisanya -7 maka:

$$F(-3) = -7 \Rightarrow -3p + q = -7$$

Dari (i) dan (ii), diperoleh:

$$2p + q = 8$$

$$\underline{-3p + q = -7}$$

$$\underline{5p = 15 \Rightarrow p = 3 \text{ dan } q = 2}$$

Jadi, sisa pembagiannya adalah  $3x + 2$ .

**Jawaban: E**

### 25. Pembahasan:

$x_1$  dan  $x_2$  merupakan akar-akar persamaan kuadrat  $x^2 - (2k + 4)x + (3k + 4) = 0$ .

Maka:

$$x_1 + x_2 = 2k + 4 \dots (\text{i})$$

$$x_1 \cdot x_2 = 3k + 4 \dots (\text{ii})$$

Jika  $x_1, k, x_2$  merupakan tiga suku pertama dari suatu deret geometri maka berlaku:

$$x_1 \cdot x_2 = k^2 \dots (\text{iii})$$

Dari (ii) dan (iii) maka diperoleh:

$$k^2 = 3k + 4$$

$$\Rightarrow k^2 - 3k - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (k - 4)(k + 1) = 0$$

$$\Rightarrow k = 4 \text{ atau } k = -1$$

Sehingga, persamaan kuadratnya (dengan mengambil nilai  $k = -1$ )

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ dan } x_2 = 1$$

Maka, diperoleh barisan geometrinya:

1, -1, 1, ....

Jadi, rumus suku ke-n dari barisan geometrinya:  $-(-1)^n$

**Jawaban: C**



$$2a+b=x$$

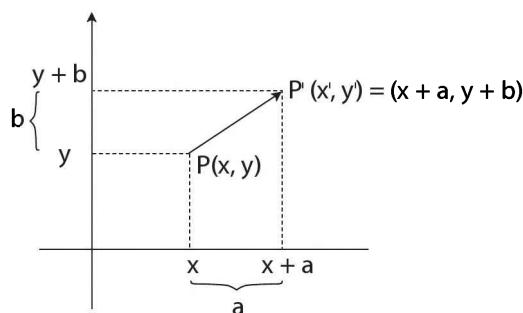
$$\pi = 3.141592654$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$
$$y = ut \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

17

# TRANSFORMASI

## A Translasi (Pergeseran)



Translasi  $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  memetakan titik  $P(x, y)$  ke titik  $P'(x + a, y + b)$  maka:

$$x' = x + a \text{ dan } y' = y + b, \text{ atau } P'(x + a, y + b).$$

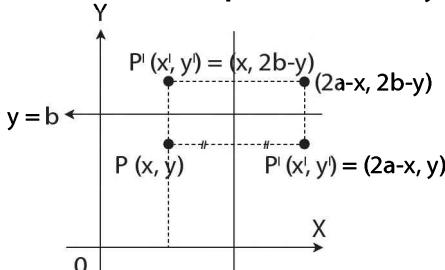
Dapat dituliskan dalam bentuk:

$$A(x, y) \xrightarrow{T\left( \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)} A'(x + a, y + b)$$

## B

## Refleksi (Pencerminan)

### a. Pencerminan Terhadap Garis $x = a$ dan $y = b$



Titik  $P(x, y)$  dicerminkan terhadap garis  $x = a$  bayangannya  $P'(2a - x, y)$ .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & -x \\ y & \end{pmatrix}$$

Titik  $P(x, y)$  dicerminkan terhadap garis  $y = b$  bayangannya  $P'(x, 2b - y)$ .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2b - y \end{pmatrix}$$

Titik  $P(x, y)$  dicerminkan terhadap garis  $x = a$  dan  $y = b$  bayangannya  $P'(2a - x, 2b - y)$ .

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - x \\ 2b - y \end{pmatrix}$$

### b. Pencerminan Terhadap Sumbu-X, Sumbu-Y, Garis $y = x$ , dan $y = -x$

- Pencerminan titik  $P(x, y)$  terhadap sumbu  $x$  menghasilkan bayangan  $P'(x, -y)$ .

$$P(x, y) \xrightarrow{\text{Sumbu } x} P'(x, -y)$$

- Pencerminan titik  $P(x, y)$  terhadap sumbu  $y$  menghasilkan bayangan  $P'(-x, y)$ .

$$P(x, y) \xrightarrow{\text{Sumbu } y} P'(-x, y)$$

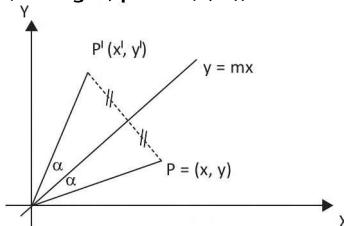
- Pencerminan titik  $P(x, y)$  terhadap sumbu  $y = x$  menghasilkan bayangan  $P'(y, x)$ .

$$P(x, y) \xrightarrow{y = x} P'(y, x)$$

- Pencerminan titik  $P(x, y)$  terhadap sumbu  $y = -x$  menghasilkan bayangan  $P'(-y, -x)$

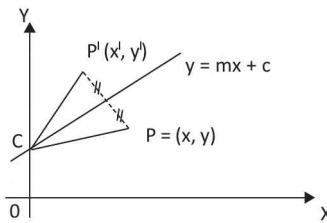
$$P(x, y) \xrightarrow{y = -x} P'(-y, -x)$$

- Pencerminan terhadap garis  $y = mx$   
( $m = \tan \alpha$ , pusat  $(0, 0)$ )



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Pencerminan terhadap garis  $y = mx + c$   
( $m = \tan \alpha$ , pusat  $(0, c)$ )



$$\begin{pmatrix} x' - 0 \\ y' - c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 0 \\ y - c \end{pmatrix}$$

### c. Pencerminan Terhadap Dua Garis yang Saling Berpotongan

$$g ; y = m_1 x + c_1 \rightarrow m_1 = \tan \theta_1$$

$$h ; y = m_2 x + c_2 \rightarrow m_2 = \tan \theta_2$$

- Pusat  $(a, b)$  adalah titik potong garis  $g$  dan  $h$
- Sudut antara garis  $g$  dan  $h$  adalah  $\theta$

$$\tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right| \text{ atau } \alpha = \theta_2 - \theta_1 = \theta_1 - \theta_2$$

Jika suatu titik dicerminkan terhadap  $g$  dilanjutkan terhadap  $h$  maka arah sudut  $\alpha$  adalah garis  $g$  ke garis  $h$  (berlawanan jarum jam  $\alpha = +$ , searah jarum jam  $\alpha = -$ ).

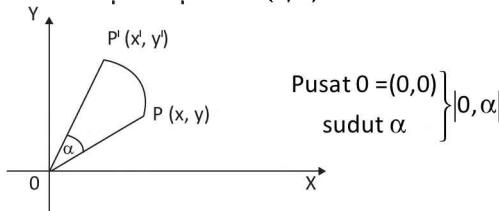
Matriks transformasinya adalah:

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

## C Rotasi (Perputaran)

Rotasi (perputaran) pada bidang geometri ditentukan oleh titik pusat, besar sudut, dan arah sudut rotasi. Suatu rotasi dikatakan memiliki arah positif jika rotasi itu berlawanan arah dengan arah putaran jarum jam, dan rotasi dikatakan memiliki arah negatif jika rotasi itu searah dengan arah putaran jarum jam.

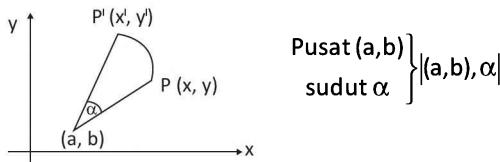
- Rotasi terhadap titik pusat  $O(0, 0)$



Pusat  $O = (0, 0)$   
sudut  $\alpha$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Rotasi terhadap titik pusat  $A(a, b)$



Pusat  $(a, b)$   
sudut  $\alpha$

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



## Dilatasi (Perkalian)

- Dilatasi terhadap titik pusat O(0,0)

Pusat 0 = (0,0)  
faktor skala k

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A(x,y) \xrightarrow{[O,k]} A'(kx,ky)$$

- Dilatasi terhadap titik pusat A(a,b)

Pusat (a,b)  
faktor skala k

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

$$A(x,y) \xrightarrow{[P(a,b),k]} A'(k(x-a) + a, k(y-b) + b)$$

- Jika suatu matrik Transformasi  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  memetakan bangun A menjadi A' maka:

$$\text{Luas bangun } A' = |(a d - bc)| \times \text{luas bangun } A$$

## Komposisi Transformasi

Misalkan,  $T_1$  adalah transformasi yang memetakan titik  $A(x,y)$  ke titik  $A'(x',y')$ , kemudian oleh  $T_2$  titik  $A'(x',y')$  dipetakan kembali ke titik  $A''(x'',y'')$ . Transformasi  $T_1$  dilanjutkan dengan  $T_2$  memetakan titik  $A(x,y) \rightarrow (x'',y'')$  dapat ditulis dalam bentuk  $T_2 \circ T_1 : A(x,y) \rightarrow A(x'',y'')$  dengan  $T_2 \circ T_1$  disebut komposisi transformasi, dibaca  $T_2$  komposisi  $T_1$ .

Jika  $T_1$  dan  $T_2$  masing-masing adalah transformasi yang bersesuaian dengan matriks-matriks

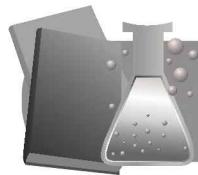
$M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  dan  $M_2 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  maka komposisi transformasinya adalah sebagai berikut:

- $T_1 \circ T_2$  bersesuaian dengan matriks berikut

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

- $T_2 \circ T_1$  bersesuaian dengan matriks berikut

$$M_2 \cdot M_1 = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$



# PAKET SOAL

## Catatan

### SOAL SBMPTN SAINTEK

1. Transformasi  $T$  merupakan pencerminan terhadap garis  $y = \frac{x}{3}$  dilanjutkan pencerminan terhadap garis  $y = -3x$ . Matriks penyajian  $T$  adalah ....

- A.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$   
B.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$       E.  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$   
C.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

### SOAL UN SMA IPA

2. Persamaan bayangan lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  bila dicerminkan terhadap garis  $x = 2$  dan dilanjutkan dengan translasi  $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  adalah ....

- A.  $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$   
B.  $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$   
C.  $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 13 = 0$   
D.  $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 13 = 0$   
E.  $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0$

### SOAL STANDAR SBMPTN

3. Persamaan bayangan dari lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$  oleh transformasi rotasi dengan pusat  $O(0, 0)$  sejauh  $90^\circ$  searah putaran jarum jam adalah ....

- A.  $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 3 = 0$   
B.  $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$   
C.  $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$   
D.  $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$   
E.  $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 3 = 0$

**SOAL UN SMA IPA**

4. Bayangan titik  $S(2, 4)$  oleh rotasi yang berpusat di  $O(0, 0)$  sejauh  $90^\circ$  berlawanan arah jarum jam dan dilanjutkan oleh pencerminan terhadap garis  $y = x$  adalah ....
- A.  $S''(2, -4)$       D.  $S''(-4, -2)$   
B.  $S''(-2, 4)$       E.  $S''(-4, 2)$   
C.  $S''(2, 4)$

**SOAL PREDIKSI UN**

5. Bayangan garis  $x + 3y + 2 = 0$  oleh transformasi yang berkaitan dengan matriks  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  dilanjutkan matriks  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  adalah ....
- A.  $13x - 5y + 4 = 0$       D.  $-5x - 4y - 2 = 0$   
B.  $13x - 5y - 4 = 0$       E.  $13x - 4y + 2 = 0$   
C.  $-5x - 4y + 2 = 0$

**SOAL STANDAR UN SMA IPA**

6. Luas bayangan persegi panjang PQRS dengan  $P(-1, 2)$ ,  $Q(3, 2)$ ,  $R(3, -1)$ ,  $S(-1, -1)$  karena dilatasi  $[0, 3]$  dilanjutkan rotasi pusat O bersudut  $\frac{\pi}{2}$  adalah ...
- A. 36      D. 96  
B. 48      E. 108  
C. 72

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

7. Transformasi  $T$  merupakan pencerminan terhadap garis  $y = \frac{x}{4}$  dilanjutkan pencerminan terhadap garis  $y = -4x$ . Matriks penyajian  $T$  adalah ....
- A.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$   
B.  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$       E.  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$   
C.  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

**SOAL UN SMA IPA**

8. Persamaan bayangan garis  $y = 2x - 3$  karena refleksi terhadap garis  $y = -x$ , dilanjutkan refleksi terhadap  $y = x$  adalah ....
- A.  $y + 2x - 3 = 0$       D.  $2y - x - 3 = 0$   
B.  $y - 2x - 3 = 0$       E.  $2y + x + 3 = 0$   
C.  $2y + x - 3 = 0$

**SOAL SIMULASI UN**

9. Elips dengan persamaan  $4x^2 + 9y^2 = 36$  digeser  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  kemudian diputar  $90^\circ$  dengan pusat  $(-1, 2)$ .

Persamaan bayangan elips tersebut adalah ....

- A.  $4(x - 3)^2 + 9(y - 3)^2 = 36$   
B.  $9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 36$   
C.  $4(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$   
D.  $9(x + 1)^2 + 4(y - 2)^2 = 36$   
E.  $4(x + 1)^2 + 9(y - 2)^2 = 36$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

10. Diketahui lingkaran L berpusat di titik  $(-2, 3)$  dan melalui titik  $(1, 5)$ . Jika lingkaran L diputar  $90^\circ$  terhadap titik  $O(0, 0)$  searah jarum jam, kemudian di geser ke bawah sejauh 5 satuan maka persamaan lingkaran L' yang dihasilkan adalah ....

- A.  $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 5 = 0$   
B.  $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 5 = 0$   
C.  $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$   
D.  $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 5 = 0$   
E.  $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

11. Matriks yang menyatakan perputaran sebesar  $\frac{\pi}{3}$

terhadap O dalam arah berlawanan dengan perputaran jarum jam dan dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis  $x + y = 0$  adalah....

A.  $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

D.  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

B.  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

E.  $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

C.  $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

**SOAL UN SMA IPA**

12. Bayangan kurva  $y = x + 1$  jika ditransformasikan

oleh matriks  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , kemudian dilanjutkan oleh

pencerminan terhadap sumbu x adalah ....

- |                    |                     |
|--------------------|---------------------|
| A. $x + y - 3 = 0$ | D. $3x + y + 1 = 0$ |
| B. $x - y - 3 = 0$ | E. $x + 3y + 1 = 0$ |
| C. $x + y + 3 = 0$ |                     |

**SOAL STANDAR SBMPTN**

13. Titik P (a, b) dicerminkan terhadap sumbu x, bayangannya dicerminkan pula terhadap sumbu y maka bayangan terakhir titik P merupakan...

- A. Pencerminan titik P terhadap garis  $y = x$
- B. Pencerminan titik P terhadap garis  $y = -x$
- C. Pencerminan titik P terhadap sumbu y
- D. Perputaran titik P dengan pusat O(0, 0) sebesar  $\pi$  radian berlawanan arah perputaran jarum jam
- E. Perputaran titik P dengan pusat O(0, 0) sebesar

$\frac{\pi}{2}$  radian berlawanan arah perputaran jarum jam

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

14. Titik  $(2a, -a)$  diputar  $90^\circ$  berlawanan arah jarum

jam dengan pusat perputaran titik  $(2, 2)$ . Jika hasil

rotasinya adalah  $(a+4, -2)$  maka  $a = \dots$

- |      |       |
|------|-------|
| A. 2 | D. -1 |
| B. 1 | E. -2 |
| C. 0 |       |

SOAL UM UGM K.IPA

15. Bayangan kurva  $y = \sin x$  oleh refleksi terhadap sumbu  $x$  dilanjutkan dengan dilatasi berpusat di  $O(0, 0)$  dan faktor skala  $\frac{1}{2}$  adalah kurva ...

- A.  $\sin 2x$       D.  $y = -\sin x \cos x$   
B.  $y = -\sin x$       E.  $y = -\sin 2x$   
C.  $y = \sin x \cos x$

SOAL SNMPTN K.IPA

16. Vektor  $\vec{x}$  dicerminkan terhadap garis  $x = 0$ . Kemudian hasilnya diputar terhadap titik asal 0 sebesar  $\theta > 0$  searah jarum jam, menghasilkan vektor  $\vec{y}$ . Jika  $\vec{y} = A\vec{x}$  maka matriks  $A = \dots$

- Jika  $y = Ax$  maka matriks  $A = \dots$

$$A. \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

C.  $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$D. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$E. \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

## **SOAL STANDAR SBMPTN**

17. Parabola  $y = x^2 - 6x + 8$  digeser ke kanan sejauh 2 satuan searah dengan sumbu-x dan digeser ke bawah sejauh 3 satuan. Jika parabola hasil pergeseran ini memotong sumbu-x di  $x_1$  dan  $x_2$ , maka  $x_1 + x_2 = \dots$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

18. Suatu gambar dalam bidang XY diputar  $45^\circ$  searah jarum jam kemudian dicerminkan terhadap sumbu X. Matriks yang menyatakan hasil kedua transformasi tersebut adalah ...

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

D.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

B.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

E.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

C.  $\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

**SOAL SBMPTN SAINTEK**

19. Titik  $(2a, -a)$  diputar  $90^\circ$  berlawanan arah jarum jam dengan pusat putaran titik  $(1, 1)$ . Jika hasil rotasi adalah  $(2+a, -2)$  maka  $a = \dots$

A. 2

D. -1

B. 3

E. -2

C. 0

**SOAL STANDAR UN**

20. Parabola  $y = x^2 - 4$  dicerminkan terhadap sumbu x, kemudian digeser  $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Ordinat titik potong

hasil transformasi dengan sumbu y adalah ....

A. -3

D. -6

B. -4

E. -9

C. -5

**SOAL STANDAR SBMPTN**

21. Diketahui jajar genjang ABCD dengan titik-titik sudutnya adalah A(2, 0), B(4, 0) dan koordinat titik potong kedua diagonalnya adalah E( $3\frac{1}{2}$ , 2). Jika jajar genjang itu diputar dengan pusat A sejauh  $90^\circ$  searah putaran jarum jam maka dihasilkan bayangan segiempat A'B'C'D'. Dengan demikian ....
- (1). B'(2, -2)
  - (2). C'(6, -3)
  - (3). D'(6, -1)
  - (4). Luas segiempat A'B'C'D' = 8 satuan luas

**SOAL SIMULASI UN**

22. Oleh suatu pemetaan  $A(x, y) \rightarrow A'(x', y')$ , hubungan x dan y dengan x' dan y' ditentukan oleh persamaan matriks  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Bayangan dari titik (-5, 3) dan (2, -4) oleh transformasi itu masing-masing adalah (1, -3) dan (-6, -10). Bayangan titik A (3, -6) oleh transformasi itu adalah ....
- A. A'(-15, -9)
  - B. A'(15, -9)
  - C. A'(9, 15)
  - D. A'(-9, 15)
  - E. A'(-9, -15)

# Pembahasan

## 1. Pembahasan:

Jika pencerminan terhadap garis I kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis II, dimana garis I dan garis II saling tegak lurus maka transformasi tersebut sama halnya dengan mencerminkan terhadap titik perpotongan garis I dan garis II tersebut.

$$\text{Garis } y = \frac{x}{3} \text{ (memiliki gradien } (m_1) = \frac{1}{3})$$

Garis  $y = -3x$  (memiliki gradien  $(m_2) = -3$ )  
Sehingga kedua garis tegak lurus, karena:

$$m_1 \times m_2 = \frac{1}{3} \times (-3) = -1$$

(syarat dua garis saling tegak lurus).

Titik perpotongan kedua garis:

$$\frac{x}{3} = -3x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} + 3x = 0$$

$$\Rightarrow 3\frac{1}{3}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Ketika  $x = 0$  maka  $y = 0$

Jadi, titik perpotongannya  $(0, 0)$

Oleh karena itu, suatu transformasi pencerminan

terhadap garis  $y = \frac{x}{3}$  kemudian dilanjut pencer-

minan terhadap garis  $y = -3x$ , sama halnya trans-

formasi pencerminan terhadap titik  $(0, 0)$ .

Matrik pencerminan terhadap titik  $(0, 0)$  adalah:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Catatan

Jawaban: C



**Catatan****2. Pembahasan:**

Suatu titik  $(x, y)$  jika dicerminkan terhadap garis  $x=a$  maka bayangannya adalah

$$(2a-x, y)$$

Suatu titik  $(x, y)$  ditranslasikan  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  maka

$$\text{bayangannya adalah } (x+a, y+b)$$

Sehingga, dari persamaan lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  yang dicerminkan terhadap garis  $x=2$  maka:

$$x' = 2.2 - x$$

$$= 4 - x$$

$$\Rightarrow x = 4 - x'$$

$$\text{Dan } y' = y \Rightarrow y = y'$$

Kemudian dilanjutkan dengan translasi  $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$  maka:

$$x'' = x' - 3$$

$$\Rightarrow x' = x'' + 3$$

$$\text{Dan } y'' = y' + 4$$

$$\Rightarrow y' = y'' - 4$$

Persamaan bayangan lingkaran  $x^2 + y^2 = 4$  adalah:

$$(4 - x')^2 + (y')^2 = 4$$

$$\Rightarrow 16 - 8x' + (x')^2 + (y')^2 = 4$$

$$\Rightarrow 16 - 8(x'' + 3) + (x'' + 3)^2 + (y'' - 4)^2 = 4$$

$$\Rightarrow 16 - 8x'' + 24 + (x'')^2 + 6x'' + 9 + (y'')^2 - 8y'' + 16 = 4$$

$$\Rightarrow (x'')^2 + (y'')^2 - 2x'' - 8y'' + 13 = 0$$

Jadi, persamaan bayangannya adalah:

$$x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$$

**Jawaban: A**

**3. Pembahasan:**

Diketahui:

Lingkaran  $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$  maka:

- Pusat =  $\left(-\frac{1}{2}(4), -\frac{1}{2}(-6)\right) = (-2, 3)$

- Jari-jari

$$= \sqrt{\frac{1}{4}(4)^2 + \frac{1}{4}(-6)^2 - (-3)} = \sqrt{16} = 4$$

Lingkaran ditransformasi rotasi dengan pusat O(0, 0) sejauh  $90^\circ$  maka:

Bayangan pusat lingkaran adalah  $(-3, -2)$

Jadi, persamaan bayangannya adalah lingkaran dengan pusat  $(-3, -2)$  dan berjari-jari 4, yaitu:

$$(x+3)^2 + (y+2)^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 = 16$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 4y - 3 = 0$$

**Jawaban: D**

**4. Pembahasan:**

- Titik A  $(x, y)$  dirotasi  $90^\circ$  berlawanan arah jarum jam maka  $A'(-y, x)$ .
- Titik B  $(x, y)$  dicerminkan terhadap garis  $y = x$  maka  $B'(y, x)$

Diketahui:

Titik S  $(2, 4)$  dirotasi  $90^\circ$  berlawanan arah jarum jam maka  $S'(-4, 2)$  kemudian dicerminkan terhadap garis  $y = x$  maka:

$$S''(2, -4)$$

**Jawaban: A**

**5. Pembahasan:**

Diketahui:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Sehingga:

$$T_2 \circ T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 17 \end{bmatrix}$$

Bayangan garis  $x + 3y + 2 = 0$

## Catatan

- Diambil dua titik sembarang pada garis  $x + 3y + 2 = 0$ , misal A(-2, 0) dan B(1, -1)
- Bayangan titik A(-2, 0) oleh  $T_2 \circ T_1$ :  
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ -20 \end{bmatrix}$$
- Bayangan titik B(1, -1) oleh  $T_2 \circ T_1$ :  
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 10 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \end{bmatrix}$$

Bayangannya adalah garis yang melalui titik (-8, -20) dan (-3, -7), yaitu:

$$\begin{aligned}\frac{y+20}{-7+20} &= \frac{x+8}{-3+8} \\ \Rightarrow 5(y+20) &= 13(x+8) \\ \Rightarrow 5y+100 &= 13x+104 \\ \Rightarrow 13x-5y+4 &= 0\end{aligned}$$

**Jawaban: A**

### 6. Pembahasan:

Luas sebuah persegi panjang bila dirotasi tidak mengubah luas. Bila didilatasi dengan dilatasi [0,a] maka luasnya menjadi

$$L_{\text{baru}} = (L_{\text{lama}}) \times (a^2)$$

Persegi panjang PQRS dengan P(-1, 2), Q(3, 2), R(3, -1), S(-1, -1)

$$p = (x_2 - x_1) = (3 - (-1)) = 4$$

$$l = (y_3 - y_2) = (-1 - 2) = -3, \Rightarrow l = 3.$$

Karena dilatasi [0, 3], diperoleh luas baru

$$L_{\text{baru}} = (4 \times 3) \times 3^2 = 12 \times 9 = 108$$

**Jawaban: E**

### 7. Pembahasan:

Jika pencerminan terhadap garis I kemudian dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis II, dimana garis I dan garis II saling tegak lurus maka transformasi tersebut sama halnya dengan mencerminkan terhadap titik perpotongan garis I dan garis II tersebut.

Garis  $y = \frac{x}{4}$  (memiliki gradien ( $m_1$ ) =  $\frac{1}{4}$ )

Garis  $y = -4x$  (memiliki gradien ( $m_2$ ) =  $-4$ )

Sehingga kedua garis tegak lurus, karena:

$$m_1 \times m_2 = \frac{1}{4} \times (-4) = -1 \text{ (syarat dua garis saling tegak lurus).}$$

Titik perpotongan kedua garis:

$$\frac{x}{4} = -4x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} + 4x = 0$$

$$\Rightarrow 4\frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Ketika  $x = 0$  maka  $y = 0$

Jadi, titik perpotongannya  $(0, 0)$

Oleh karena itu, suatu transformasi pencerminan ter-

hadap garis  $y = \frac{x}{4}$  kemudian dilanjutkan pencer-

minan terhadap garis  $y = -4x$ , sama halnya trans-

formasi pencerminan terhadap titik  $(0, 0)$ .

Matrik pencerminan terhadap titik  $(0, 0)$  adalah:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Jawaban: C**

## 8. Pembahasan:

Bayangan dari  $y = 2x - 3$  yang direfleksikan terhadap garis  $y = -x$  dilanjutkan  $y = x$  adalah:

Refleksi terhadap garis  $y = -x$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}$$

Refleksi terhadap garis  $y = x$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

**Catatan**

$$\begin{aligned}
 y &= 2x - 3 \text{ direfleksikan terhadap } y = -x \\
 \Rightarrow -x &= -2y - 3 \\
 -x &= -2y - 3 \text{ direfleksikan terhadap } y = x \\
 \Rightarrow -y &= -2x - 3 \\
 \Rightarrow y - 2x - 3 &= 0
 \end{aligned}$$

**Jawaban: B****9. Pembahasan:**

$(x, y)$  digeser sejauh  $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  diperoleh:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = x' + 1 \\ y = y' - 2 \end{array}$$

Bayangan  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  yang diputar  $90^\circ$  dengan pusat

$(-1, 2)$  adalah:

$$\begin{pmatrix} x''+1 \\ y''-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'+1 \\ y'-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x''+1 \\ y''-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-y' \\ x'+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1-y' \\ x'+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(y+2) \\ (x-1)+3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -(y+1) \\ x+2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Jadi:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(y+1) \\ x+2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y = -(x''+1) \\ x = y''-2 \end{array}$$

Bayangan dari  $4x^2 + 9y^2 = 36$  adalah:

$$4(y''-2)^2 + 9(x''+1)^2 = 36$$

$$\Rightarrow 9(x+1)^2 + 4(y-2)^2 = 36$$

**Jawaban: D**

**10. Pembahasan:**

Diketahui: lingkaran dengan pusat  $(-2, 3)$  dan melalui titik  $(-1, 5)$  diputar  $90^\circ$  terhadap titik  $O(0, 0)$  maka:

- Pusat bayangannya adalah  $(-3, 2)$  kemudian digeser 5 satuan ke bawah, menjadi  $(-3, -3)$
- Bayangan titik  $(-1, 5)$  adalah  $(-5, -1)$  kemudian digeser 5 satuan ke bawah menjadi  $(-5, -6)$

Jarak titik pusat  $(-3, -3)$  ke titik  $(-5, -6)$  merupakan jari-jari lingkaran. Maka:

$$r = \sqrt{(-5+3)^2 + (-6+3)^2} = \sqrt{13}$$

Sehingga, persamaan lingkaran dengan pusat  $(-3, -3)$  dan jari-jari  $\sqrt{13}$  adalah:

$$(x+3)^2 + (y+3)^2 = (\sqrt{13})^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 + 6y + 9 = 13$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x + 6y + 5 = 0$$

**Jawaban: A**

**11. Pembahasan:**

$T_1$  = Matriks rotasi  $\frac{\pi}{3}$  berlawanan arah jarum jam

adalah:

$$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$T_2$  = matriks refleksi terhadap garis  $x+y=0$  atau  $x=-y$

adalah  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Sehingga, matriks komposisinya:

$$T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

**Catatan**

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

**Jawaban: A****12. Pembahasan:**

Transformasi terhadap matriks  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  adalah:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+2y \\ y \end{bmatrix}$$

$$x' = x + 2y \Rightarrow x = x' - 2y$$

$$y' = y$$

Dilanjutkan pencerminan terhadap sumbu x adalah:

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ -y' \end{bmatrix}$$

$$x'' = x' \Rightarrow x'' = x + 2y \Rightarrow x = x'' - 2y$$

$$y'' = -y' \Rightarrow y'' = -y \Rightarrow y = -y''$$

Jika,  $y = x + 1$  ditransformasi terhadap matriks

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  dan dilanjutkan pencerminan terhadap

sumbu x maka bayangannya adalah:

$$-y'' = x'' - 2y + 1 \Rightarrow -y'' = x'' - 2(-y'') + 1$$

$$\Rightarrow x'' + 2y'' + y'' + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x'' + 3y'' + 1 = 0$$

$$\text{Atau } x + 3y + 1 = 0$$

**Jawaban: E****13. Pembahasan:**

Titik  $P(a, b)$  dicerminkan terhadap sumbu x

$\Rightarrow P'(a, -b)$ , kemudian dicerminkan terhadap sum-

bu y  $\Rightarrow P''(-a, -b)$

Sehingga, bayangan titik  $P(a, b)$  menjadi  $P'(-a, -b)$  sama halnya dengan rotasi titik  $P$  dengan pusat  $O(0, 0)$  dengan sudut  $180^\circ(\pi)$ .

**Jawaban: D**

#### 14. Pembahasan:

Transformasi rotasi titik  $A(x, y)$  yang diputar  $\alpha$  berlawanan arah jarum jam dengan pusat perputarannya di  $P(a, b)$  dapat dituliskan:

$$A(x, y) \xrightarrow{[P(a, b), \alpha]} A'(x', y')$$

Persamaan transformasinya:

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

Diketahui:

Titik  $(2a, -a)$  diputar  $90^\circ$  berlawanan arah jarum jam dengan pusat perputaran  $(2, 2)$  dan memperoleh hasil rotasi  $(a+4, -2)$ , atau dapat dituliskan:

$$(2a, -a) \xrightarrow{[P(2, 2), 90^\circ]} (a+4, -2)$$

Sehingga, persamaan transformasinya:

$$\begin{pmatrix} a+4-2 \\ -2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-2 \\ -a-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-2 \\ -a-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -4 = 2a - 2$$

$$\Rightarrow -4 + 2 = 2a$$

$$\Rightarrow -2 = 2a \Rightarrow a = -1$$

**Jawaban: D**

#### 15. Pembahasan:

$$(x, y) \xrightarrow{\text{cerminkan sbX}} (x, -y) \xrightarrow{\text{Dilatasi}[O, \frac{1}{2}]} \left(\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y\right)$$

Jadi, bayangannya adalah:

$$x' = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 2x'$$

$$y' = -\frac{1}{2}y \Rightarrow y = -2y'$$

**Catatan**

Dengan demikian, bayangan dari  $y = \sin x$  adalah

$$-2y' = \sin 2x' \Rightarrow y' = -\frac{1}{2} \sin 2x'$$

$$\Rightarrow y' = -\frac{1}{2} (2 \cdot \sin x' \cdot \cos x')$$

$$\Rightarrow y' = -2 \cdot \sin x' \cdot \cos x'$$
**Jawaban: D****16. Pembahasan:**

- $T_1$  = Matrik transformasi pencerminan terhadap garis  $x = 0$  (garis  $y$ ) adalah:  

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- $T_2$  = matrik transformasi rotasi terhadap titik asal  $(0, 0)$  sebesar  $\theta > 0$  searah jarum jam (sudut negatif):  

$$\begin{bmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$
- Matrik transformasi oleh  $T_1$  dan dilanjutkan oleh  $T_2$  adalah  $T_2 \circ T_1$ .

Jika vektor  $\vec{x}$  dicerminkan terhadap garis  $x = 0$  kemudian dirotasi terhadap titik asal sebesar  $\theta$  searah jarum jam dan menghasilkan vektor  $\vec{y}$ .

Dengan  $\vec{y} = A\vec{x}$  maka:

$$\begin{aligned} A &= T_2 \circ T_1 \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

**Jawaban: E****17. Pembahasan:**

Parabola  $y = x^2 - 6x + 8$  digeser ke kanan sejauh 2 satuan searah dengan sumbu-x dan digeser ke bawah sejauh 3 satuan.

Misal:  $(x, y) \rightarrow (x', y')$

Maka:

$$x' = x + 2 \Rightarrow x = x' - 2$$

$$y' = y - 3 \Rightarrow y = y' + 3$$

Sehingga bayangan dari  $y = x^2 - 6x + 8$  adalah:

$$(y' + 3) = (x' - 2)^2 - 6(x' - 2) + 8$$

$$\Rightarrow y' + 3 = x'^2 - 4x' + 4 - 6x' + 12 + 8$$

$$\Rightarrow y' = x'^2 - 10x' + 21$$

Atau  $y = x^2 - 10x + 21$

Memotong sumbu x ( $y = 0$ ) di titik  $x_1$  dan  $x_2$ , maka  $x_1 + x_2$

$$= -\frac{-10}{1} = 10$$

### Catatan

#### Jawaban: C

#### 18. Pembahasan:

$T_1$  adalah rotasi  $(O, 45^\circ)$  maka matriks  $T_1 =$

$$\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$T_2$  adalah refleksi terhadap sumbu X maka matriks

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Sehingga, matriks yang menyatakan transformasi  $T_1$  dilanjut  $T_2$  adalah:

$$\begin{aligned} T_2 \circ T_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### Jawaban: A

#### 19. Pembahasan:

Transformasi rotasi titik  $A(x, y)$  yang diputar  $\alpha$  berlawanan arah jarum jam dengan pusat perputarannya di  $P(a, b)$  dapat dituliskan:

$$A(x, y) \xrightarrow{[P(a, b), \alpha]} A'(x', y')$$

## Catatan

Persamaan transformasinya:

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

Diketahui:

Titik  $(2a, -a)$  diputar  $90^\circ$  berlawanan arah jarum jam dengan pusat perputaran  $(1, 1)$  dan memperoleh hasil rotasi  $(2+a, -2)$ , atau dapat dituliskan:

$$(2a, -a) \xrightarrow{[P(1, 1), 90^\circ]} (2+a, -2)$$

Sehingga, persamaan transformasinya:

$$\begin{pmatrix} 2+a-1 \\ -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-1 \\ -a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a-1 \\ -a-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a+1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+1 \\ 2a-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow -3 = 2a - 1$$

$$\Rightarrow -3 + 1 = 2a$$

$$\Rightarrow -2 = 2a \Rightarrow a = -1$$

**Jawaban: D**

### 20. Pembahasan:

Parabola  $y = x^2 - 4$  memiliki titik puncak di  $P(0, -4)$  dan titik potong pada sumbu x adalah  $A(-2, 0)$  dan  $B(2, 0)$ .

Dengan pencerminan terhadap sumbu x maka:

- $P(0, -4) \xrightarrow{\text{refleksi smb } X} P'(0, 4)$
- $A(-2, 0) \xrightarrow{\text{refleksi smb } X} A'(-2, 0)$
- $B(2, 0) \xrightarrow{\text{refleksi smb } X} B'(2, 0)$

Kemudian digeser  $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$  maka:

- $P'(0, 4) \rightarrow P''(0 + 3, 4 - 1) \rightarrow P''(3, 3)$
- $A'(-2, 0) \rightarrow A''(-2 + 3, 0 - 1) \rightarrow A''(1, -1)$
- $B'(2, 0) \rightarrow B''(2 + 3, 0 - 1) \rightarrow B''(5, -1)$

Sehingga, persamaan parabolanya:

$$y = a(x-3)^2 + 3$$

Karena parabola melewati titik  $(1, -1)$  maka:

$$-1 = a(1-3)^2 + 3 \Rightarrow a = -1$$

Akibatnya, persamaan parabolanya adalah:

$$y = -(x-3)^2 + 3$$

Jadi, ordinat titik potong pada sumbu  $y$  ( $x = 0$ ) adalah:

$$y = -(0-3)^2 + 3 = -6$$

**Jawaban: D**

### 21. Pembahasan:

Diketahui jajar genjang ABCD dengan titik-titik sudutnya adalah A(2, 0), B(4, 0) dan koordinat titik

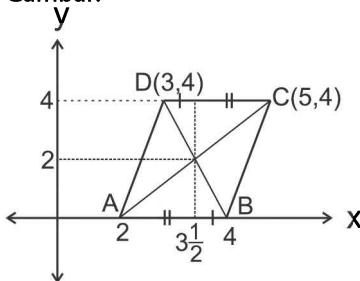
potong kedua diagonalnya adalah E( $3\frac{1}{2}$ , 2) maka:

Koordinat C dan D berada di garis  $y = 2 \times 2 = 4$ .

$$\text{Titik } C = \left( 2 + 2 \left( 3\frac{1}{2} - 2 \right), 4 \right) = (5, 4)$$

$$\text{Titik } D = \left( 4 - 2 \left( 4 - 3\frac{1}{2} \right), 4 \right) = (3, 4)$$

Gambar:



Jika jajar genjang diputar dengan pusat A(2, 0) sejauh  $90^\circ$  searah putaran jarum jam.

Rotasi dengan  $[P(a,b), -90^\circ]$  yang mem-

takan titik  $A(x, y)$  ke  $A'(x', y')$  adalah:

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

**Catatan**

Maka:

(1). Titik B' =

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x' = 2 \text{ dan } y' = -2$$

Jadi, titik B'(2, -2)

(2). Titik C' =

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5-2 \\ 4-0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x' = 6 \text{ dan } y' = -3$$

Jadi, titik C'(6, -3)

(3). Titik D' =

$$\begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-2 \\ 4-0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x'-2 \\ y'-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x' = 6 \text{ dan } y' = -1$$

Jadi, titik D'(6, -1)

(4). Luas A'B'C'D' = luas ABCD =  $2 \times 4 = 8$ 

Sehingga, semua pernyataan benar.

**Jawaban: E****22. Pembahasan:**

Diketahui:

Persamaan matriks  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Jika bayangan dari (-5, 3) adalah (1, -3) maka:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5a + 3b \\ -5c + 3d \end{pmatrix}$$

Diperoleh:  $-5a + 3b = 1 \dots (i)$

$$-5c + 3d = -3 \dots \text{(ii)}$$

Jika bayangan dari  $(2, -4)$  adalah  $(-6, -10)$  maka:

$$\begin{pmatrix} -6 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - 4b \\ 2c - 4d \end{pmatrix}$$

$$\text{Diperoleh: } 2a - 4b = -6 \dots \text{(iii)}$$

$$2c - 4d = -10 \dots \text{(iv)}$$

Dari persamaan (i) dan (iii),

$$\begin{array}{rcl} -5a + 3b = 1 & | \times 4 & -20a + 12b = 4 \\ 2a - 4b = -6 & | \times 3 & 6a - 12b = -18 \\ \hline & & -14a = -14 \\ & & \Rightarrow a = 1 \text{ dan } b = 2 \end{array}$$

Dari persamaan (ii) dan (iv),

$$\begin{array}{rcl} -5c + 3d = -3 & | \times 4 & -20c + 12d = -12 \\ 2c - 4d = -10 & | \times 3 & 6c - 12d = -30 \\ \hline & & -14c = -42 \\ & & \Rightarrow c = 3 \text{ dan } d = 4 \end{array}$$

Sehingga, matriks transformasinya adalah:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Jadi, bayangan dari titik  $A(3, -6)$  adalah:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -15 \end{pmatrix}$$

**Jawaban: E**

### Catatan



$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$Ra + 40a + \dots = 0$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$
$$y = ut \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

18

$$va + vb = u$$

$$va = u - vb$$

$$va = \frac{1}{2}u(1-e)$$

$$vb = \frac{1}{2}u(1+e)$$

$$(1-e^{1/2})$$

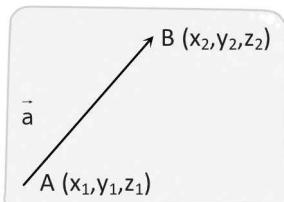
$$2u(1+e)$$

$$-1/2eu(1+e)$$

$$(1/2)$$

# VEKTOR

## A Notasi Vektor



Vektor  $\vec{a}$  atau  $\overrightarrow{AB}$  di atas dapat dinyatakan dengan:

- **Matriks**

$$\overrightarrow{AB} = B - A \text{ maka } \overrightarrow{AB} = \vec{a} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

- **Kombinasi linear vektor basis**

$$\overrightarrow{AB} = B - A \text{ maka}$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k} \text{ atau}$$

$$= x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x, y, z)$$

## B Panjang Vektor

Misalkan,  $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (x, y, z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$

maka panjang vektor  $\vec{a}$  adalah:

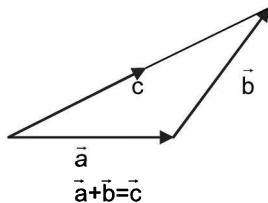
$$|\vec{a}| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}$$

Vektor satuan  $\vec{a}$  ditulis  $\hat{a}$ , dengan:  $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Vektor satuan  $\hat{a}$  panjangnya satu dan searah  $\vec{a}$ .

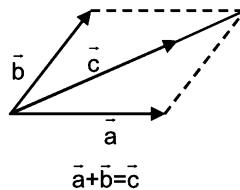
## C Penjumlahan Vektor

Cara Segitiga



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

Cara Jajaran Genjang



$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

- Jika  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  dan  $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$  maka  $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} x+r \\ y+s \\ z+t \end{pmatrix}$  dan panjangnya

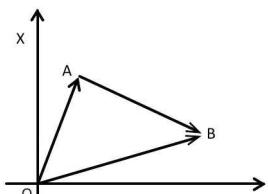
$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(x+r)^2 + (y+s)^2 + (z+t)^2}$$

- Jika  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  dan  $\vec{b} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix}$  maka  $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} x-r \\ y-s \\ z-t \end{pmatrix}$  dan panjangnya

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(x-r)^2 + (y-s)^2 + (z-t)^2}$$

## D Panjang Vektor

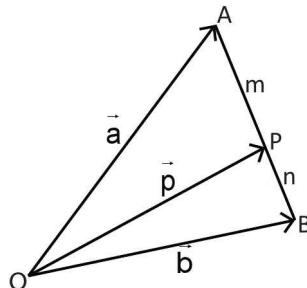
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  dan  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$  adalah vektor-vektor posisi.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \vec{b} - \vec{a}$$



## Rumus Pembagian Ruas Garis



Jika  $\vec{p}$  adalah vektor posisi dari titik P yang membagi garis AB dengan perbandingan  $\overline{AP} : \overline{PB} = m:n$  maka:

$$\vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$



## Perkalian dan Sudut Dua Vektor Perkalian dan Sudut Dua Vektor

Untuk  $|\vec{a}| \neq 0$  dan  $|\vec{b}| \neq 0$  dan  $\theta$  sudut antara vektor  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$  maka perkalian titik (*dot product*) antara  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$  menghasilkan nilai skalar sebesar:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \theta$$

$$\text{sehingga } \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\text{dengan } \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

Jika  $\vec{a}$  tegak lurus  $\vec{b}$  maka  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Penting untuk diketahui:**

$$1. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$2. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$



# PAKET SOAL

## Catatan

### SOAL SBMPTN SAINTEK

1. Diketahui

$$A(-3, 0, 0), B(0, -3, 0), \text{ dan } C(0, 0, 4).$$

Panjang vektor proyeksi  $\vec{AC}$  ke vektor  $\vec{AB}$  adalah ....

- A.  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$       D.  $\sqrt{2}$   
B.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       E.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$   
C.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$

### SOAL UN SMA IPA

2. Diketahui

$$\text{vektor } \vec{a} = 2\vec{i} - 2p\vec{j} + 4\vec{k} \text{ dan } \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Jika panjang proyeksi vektor  $\vec{a}$  pada  $\vec{b}$  adalah  $\frac{6}{\sqrt{26}}$ , nilai  $p = \dots$

- A. -3      D. 1  
B. -2      E. 3  
C. -1

### SOAL UM UGM

3. Jika  $\vec{p}, \vec{q}$ , dan  $\vec{s}$  berturut-turut adalah vektor posisi titik-titik sudut jajaran genjang PQRS dengan PQ sejajar SR maka  $\vec{s} = \dots$

- A.  $-\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$       D.  $\vec{p} - \vec{q} - \vec{r}$   
B.  $-\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$       E.  $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$   
C.  $\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$

**SOAL UN SMA IPA**

4. Diketahui vektor-vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ m \end{pmatrix}$ , dan  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ . Jika  $\vec{a}$  tegak lurus  $\vec{b}$ , hasil dari  $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \dots$
- A.  $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}$       D.  $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 12 \end{pmatrix}$   
B.  $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$       E.  $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}$   
C.  $\begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 10 \end{pmatrix}$

**SOAL SNMPTN K.IPA**

5. Diketahui vektor  $\vec{u} = (a, -2, -1)$  dan  $\vec{v} = (a, a, -1)$ . Jika vektor  $\vec{u}$  tegak lurus pada  $\vec{v}$  maka nilai  $a$  adalah ....
- A. -1      D. 2  
B. 0      E. 3  
C. 1

**SOAL STANDAR SBMPTN**

6. Diketahui  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$  dan  $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{14}$ . Hasil dari  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots$
- A. 4      D.  $\frac{1}{2}$   
B. 2      E. 0  
C. 1

**SOAL SNMPTN K.IPA**

7. Nilai  $p$  agar vektor  $pi + 2j - 6k$  dan  $4i - 3j + k$  saling tegak lurus adalah ...
- A. 6      D. -1  
B. 3      E. -6  
C. 1

**SOAL SNMPTN K.IPA**

8. Jika besar sudut antara vektor  $\vec{p}$  dan vektor  $\vec{q}$  adalah

$60^\circ$ , panjang  $\vec{p}$  dan  $\vec{q}$  masing-masing 10 dan 6 maka

panjang vektor  $\vec{p} - \vec{q} = \dots$

A. 4

D.  $2\sqrt{17}$

B. 9

E.  $2\sqrt{19}$

C. 14

**SOAL SNMPTN K.IPA**

9. Jika  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  adalah dua vektor satuan membentuk sudut  $60^\circ$  maka  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} = \dots$

A.  $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

D.  $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$

B.  $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

E.  $\frac{1}{\sqrt{3}} + 1$

C.  $\frac{3}{2}$

**SOAL UN SMA IPA**

10. Diketahui vektor-vektor  $\vec{u} = 9\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$  dan  $\vec{v} = a\vec{i} - b\vec{j} + a\vec{k}$ . Sudut antara vektor  $\vec{u}$  dan vektor  $\vec{v}$  adalah  $\theta$  dengan  $\cos \theta = \frac{6}{11}$ . Proyeksi  $\vec{u}$  pada  $\vec{v}$  adalah  $\vec{p} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ . Nilai  $b = \dots$

A.  $\sqrt{2}$

D. 4

B. 2

E.  $4\sqrt{2}$

C.  $2\sqrt{2}$

**SOAL UM UGM SAINTEK**

11. Diketahui vektor-vektor  $\vec{u} = (a, 1, -n)$  dan  $\vec{v} = (1, a, a)$ . Jika  $\vec{u}_1$  vektor proyeksi  $\vec{u}$  pada  $\vec{v}$ ,  $\vec{v}_1$  vektor proyeksi  $\vec{v}$  pada  $\vec{u}$ , dan  $\theta$  sudut antara

$\bar{u}$  dan  $\bar{v}$  dengan  $\cos\theta = \frac{1}{3}$  maka luas jajargenjang

yang dibentuk oleh  $\bar{u}_1$  dan  $\bar{v}_1$  adalah ....

- A.  $\frac{2}{9}\sqrt{2}$       D.  $\frac{2}{3}\sqrt{6}$   
B.  $\frac{2}{9}\sqrt{6}$       E. 2  
C.  $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

**SOAL STANDAR SBMPTN K.IPA**

12. Jika vektor tak nol  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$  memenuhi

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| \text{ maka vektor } \vec{a} \text{ dan } \vec{b} \dots$$

- A. Membentuk sudut  $90^\circ$   
B. Membentuk sudut  $60^\circ$   
C. Membentuk sudut  $45^\circ$   
D. Searah  
E. Berlawanan arah

**SOAL UM UGM K.IPA**

13. Vektor  $\bar{u} = (x, y, 1)$  sejajar  $\bar{v} = (-1, 3, z)$ . Jika  $\bar{u}$

tegak lurus  $(3, -2, 3)$  maka  $y = \dots$

- A. 3      D.  $-\frac{1}{3}$   
B. 1      E. -1  
C.  $\frac{1}{3}$

**SOAL UN SMA IPA**

14. Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ; dan  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

Jika  $\vec{a}$  tegak lurus  $\vec{b}$ , hasil dari  $(3\vec{a} - \vec{b}) + 2\vec{c}$  adalah ....

**Catatan**

A.  $\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

D.  $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

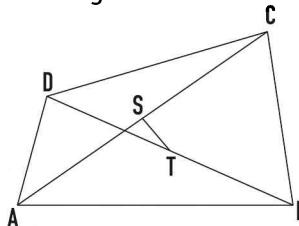
B.  $\begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

E.  $\begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

C.  $\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

15. Pada segiempat sembarang ABCD, S dan T masing-masing titik tengah AC dan BD. Jika  $\vec{u} = \vec{ST}$  maka  $\vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD}$  dapat dinyatakan dalam  $\vec{u}$  sebagai ....



A.  $\frac{1}{4}\vec{u}$

D.  $2\vec{u}$

B.  $\frac{1}{2}\vec{u}$

E.  $4\vec{u}$

C.  $\vec{u}$

**SOAL UN SMA IPA**

16. Diketahui vektor-vektor  $\vec{u} = ai - 12j + bk$  dan  $\vec{v} = -bi + aj + ak$ . Sudut antara  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  adalah

$\theta$  dengan  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Proyeksi  $\vec{u}$  pada  $\vec{v}$  adalah

$\vec{p} = 4i - 4j - 4k$ . Nilai dari  $a = \dots$

- A.  $4\sqrt{7}$   
 B.  $2\sqrt{14}$   
 C.  $2\sqrt{7}$   
 D.  $\sqrt{14}$   
 E.  $\sqrt{7}$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

17. Pada persegi panjang OACB, D adalah titik tengah OA dan P titik potong CD dengan diagonal AB. Jika

$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  dan  $\vec{b} = \overrightarrow{OC}$  maka  $\overrightarrow{CP} = \dots$

- A.  $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$   
 B.  $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$   
 C.  $-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$   
 D.  $-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$   
 E.  $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

18. Diketahui,  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  dan  $\vec{c}$  vektor dalam dimensi tiga.

Jika  $\vec{a} \perp \vec{b}$  dan  $\vec{a} \perp (\vec{b} + 2\vec{c})$  maka  $\vec{a}(\vec{b} - 2\vec{c}) = \dots$

- A. 4  
 B. 2  
 C. 1  
 D. 0  
 E. -1

**SOAL STANDAR SBMPTN**

19. Jika  $\overrightarrow{OA} = (1, 2)$ ;  $\overrightarrow{OB} = (4, 2)$  dan  $\theta = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

maka  $\tan \theta = \dots$

- A.  $\frac{3}{5}$   
 B.  $\frac{3}{4}$   
 C.  $\frac{4}{3}$   
 D.  $\frac{9}{16}$   
 E.  $\frac{16}{9}$

## **SOAL STANDAR SBMPTN**

20. Diberikan vektor berikut:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \\ p \end{pmatrix}, \text{ dan } \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Jika panjang proyeksi vektor  $\vec{b}$  pada vektor  $\vec{a}$  adalah 1, dan vektor  $\vec{b}$  tegak lurus dengan vektor  $\vec{c}$  maka nilai  $p + q$  adalah ...



SOAL UN SMA IPA

21. Diketahui vektor  $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + p\vec{k}$  dan  $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ . Jika panjang proyeksi vektor  $\vec{a}$  pada  $\vec{b}$  adalah  $\frac{4}{\sqrt{17}}$ , nilai  $p = \dots$

- A. -2      D. 2  
B. -1      E. 3  
C. 1

## **SOAL STANDAR SBMPTN**

22. Jika besar sudut antara vektor  $\vec{p}$  dan vektor  $\vec{q}$  adalah  $60^\circ$ , panjang  $\vec{p}$  dan  $\vec{q}$  masing-masing 10 dan 6 maka panjang vektor  $\vec{p} - \vec{q} = \dots$



## **SOAL STANDAR SBMPTN**

23. Diketahui titik-titik P(1, 1), Q(5, 3), dan R(2, 4). Jika titik S merupakan proyeksi titik R pada garis PQ. Maka panjang PS = ....

A.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$

B.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$

E.  $\sqrt{5}$

C.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

**SOAL UM UGM**

24. Diketahui kubus satuan ABCD.EFGH. Misalkan vektor-vektor  $\overrightarrow{AB} = \vec{i} = (1, 0, 0)$ ;  $\overrightarrow{AD} = \vec{j} = (0, 1, 0)$  dan  $\overrightarrow{AE} = \vec{k} = (0, 0, 1)$ . Titik P adalah titik pusat sisi BCGF.

Vektor proyeksi  $\overrightarrow{FP}$  ke vektor  $\overrightarrow{AC}$  adalah...

A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

D.  $\frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, 0)$

B.  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

E.  $\frac{1}{4}(1, 1, 0)$

C.  $\frac{1}{2\sqrt{2}}(0, 1, 1)$

**SOAL STANDAR SBMPTN**

25. Jika  $\vec{a} = (2, k)$  dan  $\vec{b} = (3, 5)$ , dan  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$

maka konstanta positif k adalah ...

A.  $\frac{1}{4}$

D. 4

B.  $\frac{1}{2}$

E. 8

C. 2

# Pembahasan

## Catatan

### 1. Pembahasan:

Jika  $\vec{c}$  adalah vektor proyeksi  $\vec{a}$  pada  $\vec{b}$  maka panjang proyeksi  $\vec{c}$  adalah:

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Titik A  $(-3, 0, 0)$ ; B  $(0, -3, 0)$  dan C  $(0, 0, 4)$  sehingga:  
 $\overline{AC} = C - A$

$$= (0 - (-3), 0 - 0, 4 - 0) = (3, 0, 4)$$

$$\overline{AB} = B - A$$

$$= (0 - (-3), -3 - 0, 0 - 0) = (3, -3, 0)$$

Sehingga, panjang vektor proyeksi  $\overline{AC}$  ke vektor  $\overline{AB}$  adalah:

$$\frac{3.3 + 0.(-4) + 4.0}{\sqrt{3^2 + (-3)^2 + 0}} = \frac{9}{\sqrt{18}}$$

$$= \frac{9}{3\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

**Jawaban: E**

### 2. Pembahasan:

Panjang proyeksi vektor  $\vec{u}$  pada  $\vec{v}$  adalah:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Diketahui:

$$\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{p}\vec{j} + 4\vec{k} \text{ dan } \vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

Panjang proyeksi vektor  $\vec{a}$  pada  $\vec{b}$  adalah  $\frac{6}{\sqrt{26}}$



maka:

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{6}{\sqrt{26}}$$

$$\Rightarrow \frac{2.1 + (-2p).(-3) + 4.4}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{6}{\sqrt{26}}$$

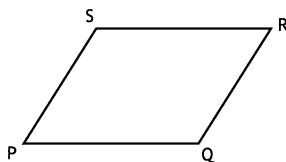
$$\Rightarrow \frac{18 + 6p}{\sqrt{26}} = \frac{6}{\sqrt{26}}$$

$$\Rightarrow 18 + 6p = 6$$

$$\Rightarrow p = \frac{6 - 18}{6} = -2$$

**Jawaban: B**

### 3. Pembahasan:



PQRS jajargenjang dengan PQ sejajar SR maka berlaku:

$$\vec{PQ} = \vec{RS}$$

$$\vec{q} - \vec{p} = \vec{s} - \vec{r}$$

$$\vec{s} = -\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$$

**Jawaban: A**

### 4. Pembahasan:

Jika vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  saling tegak lurus maka:  
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Diketahui, vektor-vektor:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}; \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ m \end{pmatrix}, \text{ dan } \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}$  tegak lurus  $\vec{b}$  maka:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

## Catatan

$$\Rightarrow 1.4 + 2.4 + (-3).m = 0$$

$$\Rightarrow 4 + 8 - 3m = 0$$

$$\Rightarrow 12 = 3m \Rightarrow m = 4$$

Sehingga,  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}\text{Jadi, nilai dari } \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1+8-3 \\ 2+8+4 \\ -3+8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Jawaban: A

### 5. Pembahasan:

$$\vec{u} = (a, -2, -1)$$

$$\vec{v} = (a, a, -1)$$

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$

$$\text{nilai } a = \dots ?$$

Jawab:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (a-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow a = 1$$

Jawaban: C

### 6. Pembahasan:

Diketahui:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k} \text{ maka:}$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18}$$

$$\Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}|^2 = 18$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 18 \dots (i)$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{14}$$

$$\Rightarrow |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 14$$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 14 \quad \dots\dots \text{(ii)}$$

Dari (i) dan (ii) dengan metode eliminasi maka:

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 18$$

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 14 -$$

$$4\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

**Jawaban: C**

#### 7. Pembahasan:

Jika vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  saling tegak lurus maka:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\text{Misal: } \vec{u} = p\vec{i} + 2\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$$

$\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  saling tegak lurus maka:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Rightarrow 4p + 2(-3) + (-6).1 = 0$$

$$\Rightarrow 4p - 6 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow p = 3$$

**Jawaban: B**

#### 8. Pembahasan:

Panjang vektor

$$|\vec{p} - \vec{q}| = \sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{100 + 36 - 2.60.\frac{1}{2}} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$$

**Jawaban: E**

## Catatan

### 9. Pembahasan:

Jika,  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  merupakan vektor

- $\alpha$  merupakan sudut antara vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  maka:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \theta$$

Diketahui:

Vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  membentuk sudut  $60^\circ$  maka nilai dari:

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 60^\circ + |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 0^\circ$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

**Jawaban: C**

### 10. Pembahasan:

Jika terdapat dua vektor  $\vec{u}$  dan vektor  $\vec{v}$ :

- Sudut antara vektor  $\vec{u}$  dan vektor  $\vec{v}$  adalah

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

- Proyeksi  $\vec{u}$  pada  $\vec{v}$  adalah  $\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$

- Jika proyeksi  $\vec{u}$  pada  $\vec{v}$  adalah  $\vec{p}$  maka  $\vec{v}$  dan  $\vec{p}$  kolinier.

Diketahui:

$$\vec{u} = 9\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k} \text{ dan } \vec{v} = a\vec{i} - b\vec{j} + a\vec{k}$$

Proyeksi  $\vec{u}$  pada  $\vec{v}$  adalah  $\vec{p} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$  maka  $\vec{p}$  dan  $\vec{v}$  kolinier.

Artinya,  $\vec{p} = n \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k} = n \cdot (\vec{a}\vec{i} - \vec{b}\vec{j} + \vec{a}\vec{k})$$

Diperoleh:

$$4 = a \cdot n \Rightarrow n = \frac{4}{a} \quad \dots \text{(i)}$$

$$-2 = -b \cdot n \Rightarrow n = \frac{-2}{-b} = \frac{2}{b} \quad \dots \text{(ii)}$$

Dari persamaan (i) dan (ii) maka:

$$\frac{4}{a} = \frac{2}{b} \Rightarrow 2a = 4b \Rightarrow a = 2b \quad \dots \text{(iii)}$$

Sudut antara vektor  $\vec{u}$  dan vektor  $\vec{v}$  adalah  $\theta$

dengan  $\cos \theta = \frac{6}{11}$  maka:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{11} = \frac{9a + a(-b) + b.a}{\sqrt{9^2 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + (-b)^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{11} = \frac{9a}{\sqrt{81 + a^2 + b^2} \cdot \sqrt{2a^2 + b^2}}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (iii) maka:

$$\frac{6}{11} = \frac{9(2b)}{\sqrt{81 + (2b)^2 + b^2} \cdot \sqrt{2(2b)^2 + b^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{11} = \frac{18b}{\sqrt{81 + 5b^2} \cdot \sqrt{9b^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{11} = \frac{18b}{\sqrt{81 + 5b^2} \cdot 3b}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{11} = \frac{6}{\sqrt{81 + 5b^2}}$$

$$\Rightarrow 11 = \sqrt{81 + 5b^2}$$

$$\Rightarrow 121 = 81 + 5b^2$$

$$\Rightarrow 5b^2 = 121 - 81$$

**Catatan**

$$\Rightarrow b^2 = \frac{40}{5} = 8$$

$$\Rightarrow b = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

**Jawaban: C****11. Pembahasan:**

- $\bar{u} = (a, 1, -a)$ ,  $\bar{v} = (1, a, a)$ ,  $\angle(\bar{u}, \bar{v}) = \theta$  dengan  $\cos \theta = \frac{1}{3}$ .

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cos \theta$$

$$a + a - a^2 = \sqrt{a^2 + 1 + a^2} \cdot \sqrt{1 + a^2 + a^2} \cdot \frac{1}{3}$$

$$6a - 3a^2 = 2a^2 + 1$$

$$5a^2 - 6a + 1 = 0$$

$$(5a - 1)(a - 1) = 0$$

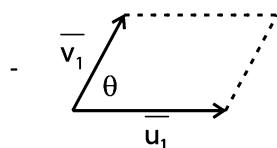
$$a = \frac{1}{5} \text{ atau } a = 1$$

- Untuk  $a = 1$  maka  $\bar{u} = (1, 1, -1)$ ,  $\bar{v} = (1, 1, 1)$ .  
Karena  $\bar{u}_1$  adalah proyeksi  $\bar{u}$  pada  $\bar{v}$  maka  
 $\bar{u}_1 / / \bar{v}$   
Karena  $\bar{v}_1$  adalah proyeksi  $\bar{v}$  pada  $\bar{u}$  maka  
 $\bar{v}_1 / / \bar{u}$

$$\text{Akibatnya, } \angle(\bar{u}_1, \bar{v}_1) = \angle(\bar{u}, \bar{v}) = \theta$$

$$|\bar{u}_1| = \frac{|\bar{u} \cdot \bar{v}|}{|\bar{v}|} = \frac{1+1-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$|\bar{v}_1| = \frac{|\bar{v} \cdot \bar{u}|}{|\bar{u}|} = \frac{1+1-1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



Luas jajargenjang yang dibentuk oleh  $\bar{u}_1$  dan  $\bar{v}_1$

$$|\bar{u}_1| \cdot |\bar{v}_1| \cdot \sin\theta$$

$$\text{adalah } = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ = \frac{2}{9}\sqrt{2}$$

**Jawaban: A**

### 12. Pembahasan:

Diketahui:

vektor tak nol  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$  memenuhi  $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$

$$\Rightarrow |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Rightarrow 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Sehingga, vektor  $\vec{a}$  dan  $\vec{b}$  saling tegak lurus.

**Jawaban: A**

### 13. Pembahasan:

- $\bar{u}$  sejajar  $\bar{v} \rightarrow \bar{u} = k \cdot \bar{v}$
- $\bar{u}$  tegak lurus  $\bar{w} \rightarrow \bar{u} \cdot \bar{v} = 0$
- $\bar{u} = (x, y, 1)$  sejajar  $\bar{v} = (-1, 3, 7)$

$$\text{berlaku: } \bar{u} = k\bar{v} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\text{diperoleh: } k = -x, y = -3x, -xz = 1$$

- $\bar{u} = (x, y, 1)$  tegak lurus  $\bar{w} = (3, -2, 3)$

$$\text{berlaku: } \bar{u} \cdot \bar{w} = 0 \Leftrightarrow 3x - 2y + 3 = 0$$

$$\text{dari } y = -3x, \text{ diperoleh } -y - 2y + 3 = 0$$

$$3y = 3$$

$$y = 1$$

**Jawaban: B**

**Catatan****14. Pembahasan:**

Jika dua vektor  $\vec{u}$  dan  $\vec{v}$  saling tegak lurus maka:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

Diketahui vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ;  $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ; dan  $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Vektor  $\vec{a}$  tegak lurus  $\vec{b}$  maka:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 2(-3) + (-1).6 = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 6 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 4x = 12$$

$$\Rightarrow x = \frac{12}{4} = 3$$

Sehingga, vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Jadi, hasil dari  $(3\vec{a} - \vec{b}) + 2\vec{c}$

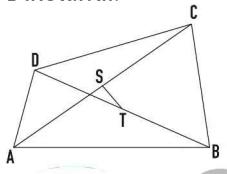
$$= \left( 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \right) + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 9 - 4 + 4 \\ 6 + 3 + 0 \\ -3 - 6 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

**Jawaban: B**

**15. Pembahasan:**

Diketahui:



T tengah-tangah BD maka:

$$\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \dots \text{(i)}$$

$$\overrightarrow{CT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}) \dots \text{(ii)}$$

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{CT} = (\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{ST}) + (\overrightarrow{CS} + \overrightarrow{ST})$$

$$= \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{CS} + 2\overrightarrow{ST}$$

$$= 0 + 2\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{ST}$$

$$\begin{aligned}\text{Jadi, } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} &= 2(\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{CT}) \\ &= 4\overrightarrow{ST} = 4\overrightarrow{u}\end{aligned}$$

Jawaban: E

### 16. Pembahasan:

Jika terdapat dua vektor  $\vec{u}$  dan vektor  $\vec{v}$ :

- Sudut antara vektor  $\vec{u}$  dan vektor  $\vec{v}$  =

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

- Proyeksi pada  $\vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$

- Jika proyeksi  $\vec{u}$  pada  $\vec{v}$  adalah  $\vec{p}$  maka  $\vec{v}$  dan  $\vec{p}$  kolinier.

Diketahui:

$$\vec{u} = a\vec{i} - 12\vec{j} + b\vec{k} \text{ dan } \vec{v} = -b\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}$$

Proyeksi  $\vec{u}$  pada  $\vec{v}$  adalah  $\vec{p} = 4\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$  maka dan  $\vec{v}$  kolinier.

Artinya,  $\vec{p} = n \cdot \vec{v}$

$$\Rightarrow 4\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} = n \cdot (-b\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k})$$

$$\text{Diperoleh, } 4 = -b \cdot n \Rightarrow n = -\frac{4}{b} \dots \text{(i)}$$

**Catatan**

$$-4 = a \cdot n \Rightarrow n = -\frac{4}{a} \dots \text{(ii)}$$

Dari persamaan (i) dan (ii) maka:

$$-\frac{4}{b} = -\frac{4}{a} \Rightarrow a = b \dots \text{(iii)}$$

Sudut antara vektor  $\vec{u}$  dan vektor  $\vec{v}$  adalah  $\theta$

dengan  $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{4}$  maka:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a \cdot (-b) + (-12)a + b \cdot a}{\sqrt{a^2 + (-12)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(-b)^2 + a^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{-12a}{\sqrt{a^2 + 144 + b^2} \cdot \sqrt{2a^2 + b^2}}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (iii) maka:

$$\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{-12a}{\sqrt{a^2 + 144 + a^2} \cdot \sqrt{2a^2 + a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{-12a}{\sqrt{2a^2 + 144} \cdot \sqrt{3a^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{-12a}{\sqrt{2a^2 + 144} \cdot a\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{-12}{\sqrt{2a^2 + 144} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a^2 + 144} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4 \cdot (-12)$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a^2 + 144} \cdot 3 = -48$$

$$\Rightarrow \sqrt{2a^2 + 144} = \frac{-48}{3} = -16$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 144 = 256$$

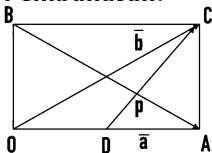
$$\Rightarrow a^2 = \frac{256 - 144}{2} = 56$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

Catatan

Jawaban: B

**17. Pembahasan:**



$$CP : DP = 2 : 1$$

$$\text{Maka, } \overrightarrow{CP} = \frac{2}{3} \overrightarrow{CD} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3} \left( \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} - \frac{1}{2} \overrightarrow{a} \right) = \frac{1}{3} \overrightarrow{a} - \frac{2}{3} \overrightarrow{b}$$

Jawaban: B

**18. Pembahasan:**

Diketahui:

$\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  dan  $\vec{c}$  vektor dalam dimensi tiga.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \perp (\vec{b} + 2\vec{c}) \Rightarrow \vec{a} \cdot (\vec{b} + 2\vec{c}) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot 2\vec{c} = 0$$

$$\Rightarrow 0 + \vec{a} \cdot 2\vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot 2\vec{c} = 0$$

Sehingga, nilai dari:

$$\vec{a}(\vec{b} - 2\vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot 2\vec{c}$$

$$= 0 - 0 = 0$$

Jawaban: D

**19. Pembahasan:**

Diketahui:

$$\overrightarrow{OA} = (1, 2); \overrightarrow{OB} = (4, 2)$$

$$\theta = \angle(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \text{ Sehingga } \cos \theta = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}| \cdot |\overrightarrow{OB}|}$$

**Catatan**

$$= \frac{1.4 + 2.2}{\sqrt{1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

$$\text{Sehingga, diperoleh } \tan \theta = \frac{3}{4}$$

**Jawaban: B****20. Pembahasan:**

Diberikan:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \\ p \end{pmatrix}, \text{ dan } \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

- Jika panjang proyeksi vektor  $\vec{b}$  pada vektor  $\vec{a}$  adalah 1 maka:

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = 1 \Rightarrow \frac{1.2 + 1.2\sqrt{2} + \sqrt{2}.p}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (\sqrt{2})^2}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2 + 2\sqrt{2} + p\sqrt{2}}{\sqrt{4}} = 1 \Rightarrow 2 + 2\sqrt{2} + p\sqrt{2} = 2$$

$$\Rightarrow p\sqrt{2} = -2\sqrt{2} \Rightarrow p = -2$$

- Vektor  $\vec{b}$  tegak lurus dengan vektor  $\vec{c}$  maka:

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow 2.0 + 2\sqrt{2}q + p\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow 0 + 2\sqrt{2}q - 2\sqrt{2} = 0$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}q = 2\sqrt{2} \Rightarrow q = 1$$

Jadi, nilai dari  $p + q = -2 + 1 = -1$ **Jawaban: A****21. Pembahasan:**Panjang proyeksi vektor  $\vec{u}$  pada  $\vec{v}$  adalah:

$$\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|}$$

Diketahui:

$$\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + p\vec{k} \text{ dan } \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

Panjang proyeksi vektor  $\vec{a}$  pada  $\vec{b}$  adalah  $\frac{4}{\sqrt{17}}$

maka:

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \frac{3.2 + (-4).2 + p.(-3)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \frac{-2 - 3p}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow -2 - 3p = 4$$

$$\Rightarrow p = \frac{4+2}{-3} = -2$$

**Jawaban: A**

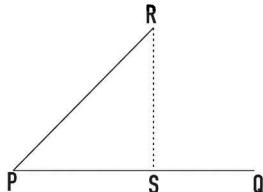
### 22. Pembahasan:

Panjang vektor

$$\begin{aligned} |\vec{p} - \vec{q}| &= \sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - 2|\vec{p}||\vec{q}|\cos 60^\circ} \\ &= \sqrt{100 + 36 - 2.60.\frac{1}{2}} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19} \end{aligned}$$

**Jawaban: E**

### 23. Pembahasan:



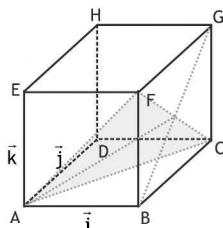
$$\overrightarrow{PQ} = (5, 3) - (1, 1) = (4, 2)$$

$$\overrightarrow{PR} = (2, 4) - (1, 1) = (1, 3)$$

$$|\overrightarrow{PS}| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}|}{|\overrightarrow{PQ}|} = \frac{1.4 + 2.3}{\sqrt{4^2 + 2^2}}$$

**Catatan**

$$\begin{aligned}
 &= \frac{4+6}{\sqrt{16+4}} = \frac{10}{\sqrt{20}} = \frac{10}{2\sqrt{5}} \\
 &= \frac{5}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: E****24. Pembahasan:**

$$\overrightarrow{AF} = (1, 0, 1)$$

$$\overrightarrow{AP} = \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{Diperoleh } \overrightarrow{FP} = \left( 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right)$$

$$\overrightarrow{AC} = (1, 1, 0)$$

Vektor proyeksi  $\overrightarrow{FP}$  ke  $\overrightarrow{AC}$  adalah

$$= \left| \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} \right| \overrightarrow{AC} = \left| \frac{0 + \frac{1}{2} + 0}{(\sqrt{1+1+0})^2} \right| \overrightarrow{AC}$$

$$= \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4} (1, 1, 0)$$

**Jawaban: E****25. Pembahasan:**

Diketahui:

$$\vec{a} = (2, k) \text{ dan } \vec{b} = (3, 5)$$

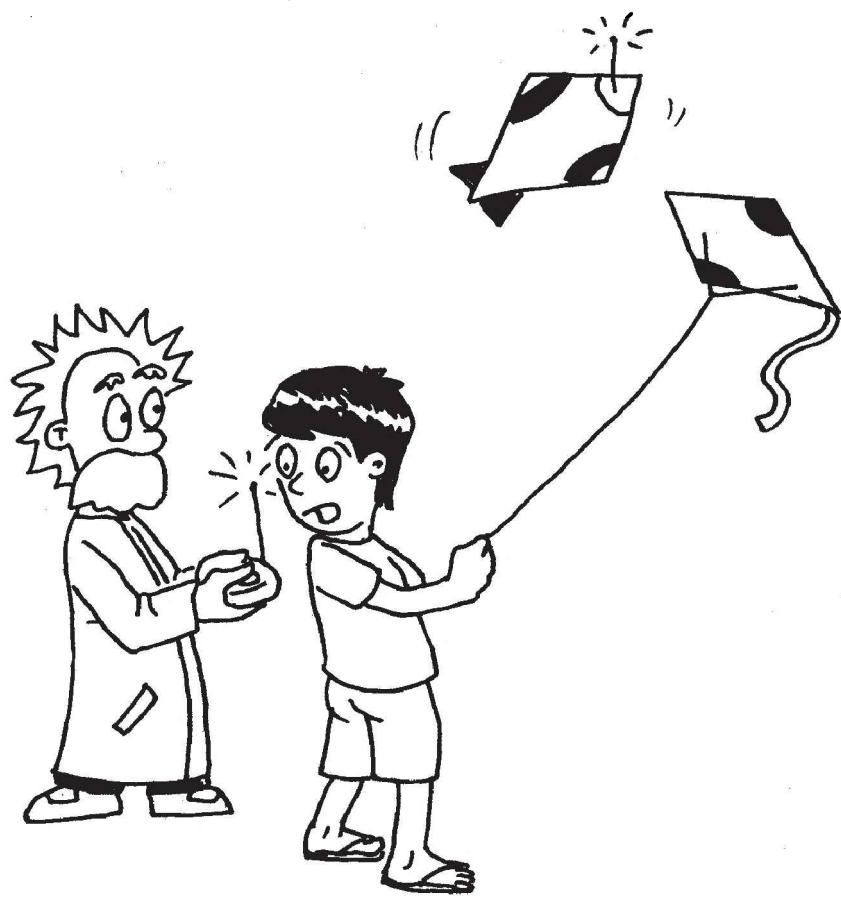
$$\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

**Catatan**

$$\Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{6+5k}{\sqrt{2^2+k^2} \cdot \sqrt{3^2+5^2}}$$
$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6+5k}{\sqrt{34(4+k^2)}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{68(4+k^2)} = 2(6+5k)$$
$$\Rightarrow \sqrt{68(4+k^2)} = 12+10k$$
$$\Rightarrow 68(4+k^2) = (12+10k)$$
$$\Rightarrow 68k^2 + 272 = 144 + 240k + 100k^2$$
$$\Rightarrow 32k^2 + 240k - 128 = 0$$
$$\Rightarrow 2k^2 + 15k - 8 = 0$$
$$\Rightarrow (2k-1)(k+8) = 0$$
$$\Rightarrow k = \frac{1}{2} \text{ atau } k = -8$$

**Jawaban: B**



$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$

$$y = ut \sin(\alpha) - 1/2 gt^2$$

19

# LOGIKA MATEMATIKA



## A Tabel Kebenaran

Pernyataan majemuk dan tabel kebenaran

p	q	$p \wedge q$ Konjungsi	$p \vee q$ Disjungsi	$p \Rightarrow q$ Implikasi	$p \Leftrightarrow q$ Biimplikasi
B	B	B	B	B	B
B	S	S	B	S	S
S	B	S	B	B	S
S	S	S	S	B	B

Keterangan:

- Konjungsi:  $p \wedge q$  dibaca "p dan q" (akan bernilai benar jika kedua-duanya benar)
- Disjungsi:  $p \vee q$  dibaca "p atau q" (akan bernilai salah bila kedua-duanya salah)
- Implikasi:  $p \Rightarrow q$  dibaca "jika p maka q" (akan salah bila p benar dan q salah)
- Biimplikasi:  $p \Leftrightarrow q$  dibaca "p jika dan hanya jika q" (akan bernilai benar bila kedua-duanya benar atau kedua-duanya salah).



## B

## Konvers, Invers, dan Kontraposisi

Dari suatu implikasi  $p \Rightarrow q$  dapat dibentuk pernyataan majemuk:

- $q \Rightarrow p$  disebut **konvers** dari  $p \Rightarrow q$
- $\sim p \Rightarrow \sim q$  disebut **invers** dari  $p \Rightarrow q$
- $\sim q \Rightarrow \sim p$  disebut **kontraposisi** dari  $p \Rightarrow q$

**Sifat:**

1.  $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$
2.  $q \Rightarrow p \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$

Jadi, implikasi ekuivalen dengan kontraposisi dan konvers ekuivalen dengan invers.

### Pernyataan senilai

No.	Pernyataan	Senilai
1.	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$ $\sim p \vee q$
2.	$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$
3.	$p \Rightarrow \sim q$	$q \Rightarrow \sim p$
4.	$q \Rightarrow \sim p$	$p \Rightarrow \sim q$

### Ingkaran

No.	Pernyataan	Negasi/Ingkaran
1.	$p \wedge q$	$\sim p \vee \sim q$
2.	$q \vee p$	$\sim p \wedge \sim q$
3.	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \sim q$
4.	$p \Leftrightarrow q$	$(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$



## C Pernyataan Berkuantor

No.	Pernyataan	Cara Baca	Negasinya
1.	$\forall_{(x)} \cdot P_{(x)}$	Untuk setiap $x$ berlaku $P_{(x)}$ atau Untuk semua $x$ berlaku $P_{(x)}$	$\exists_{(x)} \cdot \overline{P_{(x)}}$
2.	$\exists_{(x)} \cdot P_{(x)}$	Ada $x$ berlaku $P_{(x)}$ atau beberapa $x$ berlaku $P_{(x)}$	$\forall_{(x)} \cdot \overline{P_{(x)}}$



## D Penarikan Kesimpulan

- **Modus Ponens**

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \quad (\text{B}) \\ \hline p \\ \hline \therefore q \quad (\text{B}) \end{array}$$

- **Modus Tollens**

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \quad (\text{B}) \\ \hline \sim q \quad (\text{B}) \\ \hline \therefore \sim p \quad (\text{B}) \end{array}$$

- **Prinsip Silogisme**

$$\begin{array}{c} p \Rightarrow q \quad (\text{B}) \\ q \Rightarrow r \quad (\text{B}) \\ \hline \therefore p \Rightarrow r \quad (\text{B}) \end{array}$$



# PAKET SOAL

## Catatan

### SOAL UN SMA IPA

1. Diketahui premis-premis berikut:

Premis 1: Ada siswa yang tidak rajin belajar atau hasil ulangan baik.

Premis 2: Jika hasil ulangan baik maka beberapa siswa dapat mengikuti seleksi perguruan tinggi

Premis 3: Semua tidak dapat mengikuti seleksi perguruan tinggi.

Kesimpulan yang sah dari ketiga premis tersebut adalah ....

- A. Ada siswa yang hasil ulangan baik.
- B. Ada siswa yang hasil ulangan tidak baik.
- C. Ada siswa yang rajin belajar.
- D. Ada siswa yang tidak rajin belajar.
- E. Semua siswa rajin belajar.

### SOAL UN SMA IPA

2. Diketahui premis-premis berikut:

Premis 1: Jika kesadaran akan kebersihan meningkat, maka sampah yang berserakan berkurang.

Premis 2: Jika sampah yang berserakan berkurang maka saluran air lancar.

Premis 3: Jika saluran air lancar maka masyarakat bahagia.

Kesimpulan dari premis-premis tersebut adalah ....

- A. Kesadaran akan kebersihan meningkatkan tetapi masyarakat tidak bahagia
- B. Masyarakat bahagia dan kesadaran akan kebersihan meningkat
- C. Jika masyarakat bahagia maka kesadaran akan kebersihan meningkat
- D. Jika kesadaran akan kebersihan meningkat maka masyarakat bahagia
- E. Jika sampah berserakan berkurang maka masyarakat bahagia

### **SOAL STANDAR UN SMA**

3. Negasi dari pernyataan "Jika garis  $k$  tegak lurus bidang  $\alpha$  maka semua garis di bidang  $\alpha$  tegak lurus  $k$ " adalah ....
- Jika garis  $k$  tidak tegak lurus bidang  $\alpha$  maka semua garis di bidang  $\alpha$  tidak tegak lurus garis  $k$ .
  - Jika garis  $k$  tegak lurus bidang  $\alpha$  maka semua garis di bidang  $\alpha$  tegak lurus garis  $k$ .
  - Garis  $k$  tegak lurus bidang  $\alpha$  tetapi ada garis di bidang  $\alpha$  yang tidak tegak lurus  $k$ .
  - Garis  $k$  tegak lurus bidang  $\alpha$  tetapi semua garis di bidang  $\alpha$  tidak tegak lurus garis  $k$ .
  - Garis  $k$  tidak tegak lurus bidang  $\alpha$  tetapi semua garis di bidang  $\alpha$  tegak lurus  $k$ .

### **SOAL UN SMA IPA**

4. Diketahui premis-premis berikut:
- Jika penguasaan siswa terhadap matematika rendah maka siswa sulit menguasai IPA.
  - Jika siswa sulit menguasai IPA maka IPTEK tidak berkembang.
  - IPTEK berkembang.

Kesimpulan yang sah dari ketiga premis tersebut adalah ....

- Penguasaan siswa terhadap matematika tidak rendah atau IPTEK tidak berkembang.
- Penguasaan siswa terhadap matematika rendah dan IPTEK berkembang.
- Siswa mudah menguasai IPA atau IPTEK berkembang.
- Penguasaan siswa terhadap matematika tidak rendah.
- Penguasaan siswa terhadap matematika rendah.

### **SOAL UN SMA IPS**

5. Negasi dari pernyataan "Semua bilangan rasional adalah bilangan real dan prima" adalah ....
- Tidak ada bilangan rasional adalah bilangan real dan prima.
  - Ada bilangan real adalah bilangan rasional atau prima.
  - Ada bilangan real yang bukan bilangan rasional dan prima.
  - Semua bilangan rasional bukan bilangan real atau bukan prima.
  - Ada bilangan rasional yang bukan bilangan real atau bukan prima.

### **SOAL UN SMA IPA**

6. Pernyataan "Jika pejabat negara jujur maka semua rakyat hidup sejahtera" setara dengan pernyataan ....
- Jika pejabat negara tidak jujur maka semua rakyat hidup tidak sejahtera.
  - Jika pejabat negara tidak jujur maka ada rakyat yang hidupnya tidak sejahtera.

## Catatan

- C. Jika ada rakyat hidup tidak sejahtera maka pejabat negara tidak jujur.
- D. Pejabat negara tidak jujur dan semua rakyat hidup sejahtera.
- E. Pejabat negara jujur atau semua rakyat hidup sejahtera.

### SOAL STANDAR UN SMA IPA

7. Ingkaran dari  $\sqrt{14} < 4$  jika dan hanya jika

$$\sin 45^\circ < \sin 60^\circ \text{ adalah ....}$$

- A.  $\sqrt{14} \leq 4$  jika dan hanya jika  $\sin 45^\circ < \sin 60^\circ$
- B.  $\sqrt{14} < 4$  jika dan hanya jika  $\sin 45^\circ \geq \sin 60^\circ$
- C.  $\sqrt{14} \leq 4$  jika dan hanya jika  $\sin 45^\circ > \sin 60^\circ$
- D.  $\sqrt{14} > 4$  jika dan hanya jika  $\sin 45^\circ \geq \sin 60^\circ$
- E.  $\sqrt{14} > 4$  jika dan hanya jika  $\sin 45^\circ > \sin 60^\circ$

### SOAL UN SMA IPS

8. Pernyataan yang setara dengan  $\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)$

adalah ....

- A.  $(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r$
- B.  $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$
- C.  $\sim r \Rightarrow (p \wedge \sim q)$
- D.  $\sim r \Rightarrow (\sim p \vee q)$
- E.  $r \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

### SOAL STANDAR UN SMA IPS

9. Jika pernyataan  $p$  bernilai benar,  $q$  bernilai salah dan  $r$  bernilai benar, dari pernyataan di bawah ini yang bernilai salah adalah ....

- A.  $p \wedge (q \Rightarrow \sim r)$
- B.  $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$
- C.  $\sim p \Leftrightarrow (q \wedge r)$
- D.  $(\sim p \wedge q) \vee \sim r$
- E.  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim r$

### SOAL UN SMA IPA

10. Pernyataan yang setara dengan pernyataan "Jika suatu bilangan habis dibagi 6 maka bilangan tersebut habis dibagi 3" adalah ....

- A. Jika suatu bilangan tidak habis dibagi 6 maka bilangan tersebut tidak habis dibagi 3.
- B. Jika suatu bilangan tidak habis dibagi 3 maka bilangan tersebut tidak habis dibagi 6.

- C. Jika suatu bilangan habis dibagi 3 maka bilangan tersebut habis dibagi 6.
- D. Suatu bilangan habis dibagi 6 dan bilangan tersebut tidak habis dibagi 3.
- E. Suatu bilangan habis dibagi 3 dan bilangan tersebut tidak habis dibagi 6.

**SOAL STANDAR UN SMA IPS**

11. Pernyataan yang setara dengan  $\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)$  adalah ....

- A.  $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$
- B.  $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$
- C.  $\sim r \Rightarrow (p \wedge \sim q)$
- D.  $\sim r \Rightarrow (\sim p \vee q)$
- E.  $r \Rightarrow (\sim p \wedge q)$

**SOAL UN SMA IPA**

12. Pernyataan yang setara dengan pernyataan "Jika setiap orang menanam pohon maka udara bersih" adalah ....

- A. Jika beberapa orang tidak menanam pohon maka udara tidak bersih
- B. Jika udara bersih maka setiap orang menanam pohon
- C. Jika udara tidak bersih maka setiap orang tidak menanam pohon
- D. Jika udara tidak bersih maka beberapa orang tidak menanam pohon
- E. Jika semua orang tidak menanam pohon maka udara tidak bersih

**SOAL STANDAR SBMPTN**

13. Diketahui tiga pernyataan berikut:

P : Jakarta ada di pulau Bali

Q : 2 adalah bilangan prima

R : semua bilangan prima adalah bilangan ganjil

Pernyataan majemuk di bawah ini yang bernilai benar adalah ...

- A.  $(\sim P \vee Q) \wedge R$
- B.  $(\sim Q \vee \sim R) \wedge (\sim Q \vee P)$
- C.  $(P \vee \sim Q) \wedge (Q \vee \sim R)$
- D.  $\sim P \Rightarrow R$
- E.  $\sim R \wedge \sim (Q \wedge R)$

**SOAL STANDAR UN SMA**

14. Pernyataan yang setara dengan  $(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow r$  adalah ....

- A.  $(p \vee q) \Rightarrow \sim r$       D.  $\sim r \Rightarrow (p \vee q)$   
B.  $(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim r$       E.  $r \Rightarrow (\sim p \vee q)$   
C.  $\sim r \Rightarrow (p \wedge q)$

**SOAL UN SMA IPS**

15. Ingkaran pernyataan "Pada hari Senin siswa SMAN memakai sepatu hitam dan atribut lengkap" adalah ....

- A. Pada hari Senin siswa SMAN tidak memakai sepatu hitam atau tidak memakai atribut lengkap.  
B. Selain hari Senin siswa SMAN memakai sepatu hitam atau atribut lengkap.  
C. Pada hari Senin siswa SMAN memakai sepatu hitam dan tidak memakai atribut lengkap.  
D. Pada hari Senin siswa SMAN tidak memakai sepatu hitam dan atribut lengkap.  
E. Selain hari Senin siswa SMAN tidak memakai sepatu hitam dan memakai atribut lengkap.

**SOAL SIMULASI**

16. Diketahui tiga implikasi:

- (1). " $2x + 5 = 3 \Rightarrow x^2 = 1$ "  
(2). " $x - 2 = 1 \Rightarrow 2x = 8$ "

(3). " $\sin x = \frac{1}{2}$ ,  $x$  lancip  $\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ "

Implikasi yang mempunyai nilai benar adalah ....

- A. (1), (2) dan (3)      D. (2) dan (3)  
B. (1) dan (2)      E. (2)  
C. (1) dan (3)

**SOAL STANDAR UN SMA**

17. Diketahui premis-premis berikut,

$P_1$ : Jika  $x^2 < 4$  maka  $-2 < x < 2$

$P_2$ :  $x < -2$  atau  $x > 2$

Kesimpulan dari kedua premis tersebut adalah ....

- A.  $x^2 \geq 4$       D.  $x^2 < 4$   
B.  $x^2 > 4$       E.  $x^2 = 4$   
C.  $x^2 \neq 4$

**SOAL SIMULASI UN**

18. "Jika laut pasang maka tiang dermaga tenggelam" senilai dengan ...
- A. Jika laut surut maka tiang dermaga tampak.
  - B. Jika laut pasang maka tiang dermaga tidak tenggelam.
  - C. Jika tiang dermaga tampak maka laut tidak pasang.
  - D. Jika laut tidak pasang maka tiang dermaga tidak tenggelam.
  - E. Jika laut tidak pasang maka tiang dermaga tampak.

**SOAL UN**

19. Ingkaran dari pernyataan: "Beberapa bilangan prima adalah bilangan genap" adalah ...
- A. Semua bilangan prima adalah bilangan genap
  - B. Semua bilangan prima bukan bilangan genap
  - C. beberapa bilangan prima bukan bilangan prima
  - D. Beberapa bilangan genap bukan bilangan prima
  - E. Beberapa bilangan genap adalah bilangan prima

**SOAL SIMULASI UN**

20. "Jika ABC segitiga sama sisi maka ABC segitiga samakaki". Kontraposisi dari implikasi tersebut adalah ....
- A. Jika ABC segitiga sama kaki maka ABC segitiga sama sisi.
  - B. Jika ABC bukan segitiga sama kaki maka ABC bukan segitiga sama sisi.
  - C. Jika ABC bukan segitiga sama kaki maka ABC segitiga sama sisi.
  - D. Jika ABC bukan segitiga sama sisi maka ABC bukan segitiga sama kaki.
  - E. Jika ABC bukan segitiga sama sisi maka ABC segitiga sama kaki.

**SOAL STANDAR SBMPTN**

21. Diketahui pernyataan a, b, dan c.

Pernyataan  $(a \Rightarrow b) \vee c$  bernilai salah jika ....

- A. a benar, b benar, dan c benar.
- B. a benar, b benar, dan c salah.
- C. a benar, b salah, dan c benar.
- D. a salah, b salah, dan c benar.
- E. a benar, b salah, dan c salah.

# Pembahasan

Catatan

## 1. Pembahasan:

Misal:

$p = \text{ada siswa yang rajin belajar}$

$q = \text{hasil ulangan baik}$

$r = \text{beberapa siswa dapat mengikuti seleksi perguruan tinggi}$

Maka, dari premis-premis pada soal dapat dibuat bentuk logika matematikanya:

Premis 1:  $\sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q$

Premis 2:  $q \Rightarrow r$

Premis 3:  $\sim r$

Dari premis 1 dan 2, dengan prinsip silogisme:

$$p \Rightarrow q$$

$$\underline{q \Rightarrow r}$$

Kesimpulan:  $p \Rightarrow r \dots\dots(i)$

Dari kesimpulan (i) dan premis 3, dengan modus tollens:

$$p \Rightarrow r$$

$$\underline{\sim r}$$

Kesimpulan:  $\therefore \sim p$

Sehingga, kesimpulan akhirnya adalah:

Ada siswa yang tidak rajin belajar.

**Jawaban: D**

## 2. Pembahasan:

Silogisme

Premis 1:  $p \Rightarrow q$

Premis 2:  $q \Rightarrow r$

Kesimpulan:  $p \Rightarrow r$

Diketahui,

Premis 1: "Jika kesadaran akan kebersihan meningkat, maka sampah yang berserakan berkurang."

Premis 2: "Jika sampah yang berserakan berkurang, maka saluran air lancar."

Maka, kesimpulan sementara:

"Jika kesadaran akan kebersihan meningkat maka saluran air lancar."

Premis 3: "Jika saluran air lancar maka masyarakat bahagia."

Sehingga, kesimpulannya:

"Jika kesadaran akan kebersihan meningkat maka masyarakat bahagia."

**Jawaban: D**

### 3. Pembahasan:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

Sehingga, negasi dari pernyataan "Jika garis k tegak lurus bidang  $\alpha$  maka semua garis di bidang  $\alpha$  tegak lurus k" adalah:

"Garis k tegak lurus bidang  $\alpha$  tetapi ada garis di bidang  $\alpha$  yang tidak tegak lurus k"

**Jawaban: C**

### 4. Pembahasan:

Misal:

$p$  = penguasaan siswa terhadap matematika tinggi

$q$  = siswa menguasai IPA

$r$  = IPTEK berkembang

Sehingga:

Dengan metode silogisme:

Premis 1 :  $\sim p \Rightarrow \sim q$

Premis 2 :  $\sim q \Rightarrow \sim r$

Kesimpulan awal:  $\sim p \Rightarrow \sim r$

Dengan metode modus tollens maka:

Kesimpulan awal :  $\sim p \Rightarrow \sim r$

Premis 3 :  $\sim r$

Kesimpulan akhir :  $p$

Jadi, kesimpulan yang sah dari ketiga premis pada soal adalah:

Penguasaan siswa terhadap matematika tinggi.

Atau

Penguasaan siswa terhadap matematika tidak rendah.

**Jawaban: D**

### 5. Pembahasan:

Pernyataan berkuantor "semua" memiliki ingkaran "ada beberapa".

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

## Catatan

Pernyataan "Semua bilangan rasional adalah bilangan real dan prima"

Artinya, ada dua premis yang dihubungkan oleh konjungsi, yaitu:

Semua bilangan rasional adalah bilangan real.

Semua bilangan rasional adalah bilangan prima.

Sehingga, bentuk logika matematikanya adalah:

$p \wedge q$  maka negasinya adalah:  $\sim p \vee \sim q$  atau

"Ada bilangan rasional yang bukan bilangan real atau bukan prima".

**Jawaban: E**

### 6. Pembahasan:

Pernyataan yang ekuivalen (senilai)

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

$$\equiv \sim p \vee q$$

Diketahui:

Jika pejabat negara jujur maka semua rakyat hidup sejahtera.

Misal:

$p$  = pejabat negara jujur

$q$  = semua rakyat hidup sejahtera

Sehingga, bentuk logika metematikanya:

$$p \Rightarrow q$$

Senilai dengan:  $\sim q \Rightarrow \sim p$

Jadi, pernyataan yang senilai adalah:

Jika ada rakyat hidup tidak sejahtera maka pejabat negara tidak jujur.

**Jawaban: C**

### 7. Pembahasan:

Ingkaran dari:

$\sqrt{14} < 4$  jika dan hanya jika  $\sin 45^\circ < \sin 60^\circ$  adalah:

$\sqrt{14} \leq 4$  jika dan hanya jika  $\sin 45^\circ > \sin 60^\circ$

**Jawaban: C**

### 8. Pembahasan:

Implikasi setara dengan kontraposisi, yaitu:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

Ingkaran dari disjungsi:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Pernyataan  $\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)$  merupakan implikasi maka akan setara dengan kontraposisinya, yaitu:  
 $\sim(p \vee \sim q) \Rightarrow r$

Setara dengan:  $(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$

### Jawaban: B

#### 9. Pembahasan:

Diketahui:

p bernilai benar, q bernilai salah, dan r bernilai benar.

Nilai kebenaran dari:

A.  $p \wedge (\sim q \Rightarrow r)$

Benar dan (jika salah maka salah) = benar dan benar = **benar**.

B.  $(p \wedge q) \Rightarrow \sim r$

Jika (benar dan salah) maka salah = jika salah maka salah = **benar**.

C.  $\sim p \Leftrightarrow (q \wedge r)$

Salah jika dan hanya jika (salah dan benar) = salah jika dan hanya jika salah = **benar**.

D.  $(\sim p \wedge q) \vee \sim r$

(salah dan salah) atau salah = salah atau salah = **salah**.

E.  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim r$

(jika benar maka salah) jika dan hanya jika salah = salah jika dan hanya jika salah = **benar**.

### Jawaban: D

#### 10. Pembahasan:

Pernyataan yang ekuivalen (senilai)  
 $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

$$\equiv \sim p \vee q$$

Diketahui:

Pernyataan "Jika suatu bilangan habis dibagi 6 maka bilangan tersebut habis dibagi 3"

Misal:

$p$  = suatu bilangan habis dibagi 6.

$q$  = bilangan tersebut habis dibagi 3

Sehingga, bentuk logika matematikanya:

$$p \Rightarrow q$$



**Catatan**

Setara dengan  $\sim q \Rightarrow \sim p$

Pernyataannya adalah:

Jika suatu bilangan tidak habis dibagi 3 maka bilangan tersebut tidak habis dibagi 6.

**Jawaban: B**

**11. Pembahasan:**

p	q	r	(p v ~q)	$\sim r \Rightarrow (p v \sim q)$
B	B	B	B	B
B	B	S	B	B
B	S	B	B	B
B	S	S	B	B
S	B	B	S	B
S	B	S	S	S
S	S	B	B	B
S	S	S	B	B

Yang sesuai dengan (ekuivalen) dengan  
 $\sim r \Rightarrow (p \vee \sim q)$  adalah:

$(\sim p \wedge q) \Rightarrow r$	Kebenaran
$(S \wedge B) \Rightarrow B$	B
$(S \wedge B) \Rightarrow S$	B
$(S \wedge S) \Rightarrow B$	B
$(S \wedge S) \Rightarrow S$	B
$(B \wedge B) \Rightarrow B$	B
$(B \wedge B) \Rightarrow S$	S
$(B \wedge S) \Rightarrow B$	B
$(B \wedge S) \Rightarrow S$	B

**Jawaban: B**

## 12. Pembahasan:

Implikasi ekuivalen dengan kontraposisi  
 $p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$

Sehingga, pernyataan yang setara dengan:  
"Jika setiap orang menanam pohon maka udara bersih"  
Adalah:  
"Jika udara tidak bersih maka ada beberapa orang yang tidak menanam pohon."

**Jawaban: D**

**Catatan**

## 13. Pembahasan:

Perhatikan, konsep logika:

- Disjungsi bernilai salah jika p dan q keduanya bernilai salah.
- Konjungsi bernilai benar jika p dan q keduanya bernilai benar.
- Implikasi bernilai salah jika p benar dan q salah.

Jika ( $S = \text{salah}$ ,  $B = \text{benar}$ )

Dari soal dapat disimpulkan bahwa:

$P = S$  maka  $\neg P = B$

$Q = B$  maka  $\neg Q = S$

$R = S$  maka  $\neg R = B$

Selanjutnya dari masing-masing jawaban diperoleh:

A.  $(\neg P \vee Q) \wedge R \rightarrow \text{bernilai salah}$

$$\equiv (\neg B \vee B) \wedge S \equiv (B) \wedge S \equiv S$$

B.  $(\neg Q \vee \neg R) \wedge (\neg Q \vee P) \rightarrow \text{bernilai salah}$

$$\equiv (S \vee B) \wedge (S \vee S) \equiv (B) \wedge (S) \equiv S$$

C.  $(P \wedge \neg Q) \wedge (Q \vee \neg R) \rightarrow \text{bernilai salah}$

$$\equiv (S \wedge S) \wedge (B \vee B) \equiv (S) \wedge (B) \equiv S$$

D.  $P \Rightarrow R \rightarrow \text{bernilai salah}$

$$\equiv B \Rightarrow S \equiv S$$

E.  $\neg R \wedge \neg (Q \wedge R)$

$$\equiv \neg R \wedge (\neg Q \vee \neg R)$$

$$\equiv B \wedge (S \vee B) \equiv B \wedge B \equiv B$$

**Jawaban: E**



**Catatan****14. Pembahasan:**

p	q	r	$(\sim p \vee \sim q) \Rightarrow r$	$\sim r \Rightarrow (p \wedge q)$
B	B	B	B	B
B	B	S	B	B
B	S	B	B	B
B	S	S	S	S
S	B	B	B	B
S	B	S	S	S
S	S	B	B	B
S	S	S	S	S

**Jawaban: C****15. Pembahasan:**

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Sehingga, ingkaran dari:

"Pada hari Senin siswa SMAN memakai sepatu hitam dan atribut lengkap" adalah:

"Pada hari Senin siswa SMAN tidak memakai sepatu hitam atau tidak memakai atribut lengkap"

**Jawaban: A****16. Pembahasan:**

Pernyataan:

$$(1). 2x + 5 = 3 \Rightarrow x^2 = 1$$

Agar pernyataan  $2x + 5 = 3$  menjadi kalimat yang benar maka:

$$x = \frac{3 - 5}{2} = -1$$

Sehingga, nilai  $x^2 = 1$  (benar)

Jadi, pernyataan (1) benar.

$$(2). x - 2 = 1 \Rightarrow 2x = 8$$

Agar pernyataan  $x - 2 = 1$  menjadi kalimat yang benar maka:

$$x = 3$$

Sehingga, nilai dari  $2x = 8$  menjadi  $2 \cdot 3 = 8$  (bernilai salah)

Jadi, pernyataan (2) salah.

$$(3). \sin x = \frac{1}{2}, x \text{ lancip} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Agar pernyataan  $\sin x = \frac{1}{2}$ , menjadi kalimat yang benar maka:  
 $x = 30^\circ$

Sehingga, nilai dari  $\cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}$  (benar)

Jadi, pernyataan yang benar adalah pernyataan (1) dan (3).

**Jawaban: C**

**17. Pembahasan:**

Diketahui:

P<sub>1</sub>; Jika  $x^2 < 4$  maka  $-2 < x < 2$

P<sub>2</sub>;  $x < -2$  atau  $x > 2$

Maka, kesimpulan dari dua premis tersebut adalah:

$$x^2 > 4$$

**Jawaban: B**

**18. Pembahasan:**

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p$$

Sehingga pernyataan:

"Jika laut pasang maka tiang dermaga tenggelam" senilai dengan:

"Jika tiang dermaga tampak maka laut tidak pasang".

**Jawaban: C**

**19. Pembahasan:**

Ingkaran/negasi dari pernyataan berkuantor "beberapa" adalah "semua".

Jadi, jika X = "Beberapa bilangan prima adalah bilangan genap" maka:

$\sim X$  = "Semua bilangan prima bukan bilangan genap"

**Jawaban: B**

**Catatan**

## Catatan

### 20. Pembahasan:

Kontraposisi dari  $p \Rightarrow q$  adalah  $\sim q \Rightarrow \sim p$

Jadi, kontraposisi dari "Jika ABC segitiga sama sisi maka ABC segitiga sama kaki" adalah:

"Jika ABC bukan segitiga sama kaki maka ABC bukan segitiga sama sisi"

**Jawaban: B**

### 21. Pembahasan:

Implikasi akan bernilai salah jika pernyataan kedua salah.

Disjungsi akan bernilai salah jika dua pernyataan yang dihubungkan bernilai salah.

Dari  $(a \Rightarrow b) \vee c$

Akan bernilai salah, ketika:  
a benar, b salah, dan c salah

**Jawaban: E**

$$2a+b=x$$

$$\pi=3.141592654$$

$$Ra + 40a + \dots = 0$$

$$x = ut \cos(\alpha)$$
$$y = ut \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt^2$$

20

# BARISAN DAN DERET



## A Rumus Umum

DERET		
ARITMATIKA	GEOMETRI	
$a = \text{suku pertama}$ $b = \text{beda}$	$a = \text{suku pertama}$ $r = \text{rasio}$	
Suku ke - n ( $U_n$ )	$U_n = a + (n - 1)b$	$U_n = ar^{n-1}$
Jumlah suku ke - n ( $S_n$ )	$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$ $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$	$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1$ $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}, r > 1$
Jumlah tak hingga		<b>Divergen:</b> $r \geq 1$ atau $r \leq -1$ <b>Konvergen/punya jumlah</b> Syarat: $-1 < r < 1$ $S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$

Di antara dua bilangan disisipkan k bilangan.	$b_{\text{baru}} = \frac{b_{\text{lama}}}{k+1}$	$r_{\text{baru}} = \sqrt[k+1]{r_{\text{lama}}}$
Suku Tengah ( $U_t$ )	$U_t = \frac{U_1 + U_n}{2}$	$U_t = \sqrt{U_1 \times U_n}$
Keduanya berlaku	$U_n = S_n - S_{n-1}$	

## B Deret Aritmatika

Harus hafal!

$a = \text{suku pertama}$	$b = \text{beda} = U_n - U_{n-1}$
$\text{Suku ke } n (U_n)$	$U_n = a + (n-1)b$
$\text{Jumlah suku ke } n (S_n)$	$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$ $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$

### Rumus Praktis

Jika jumlah n suku pertama deret aritmatika adalah:

$$\begin{aligned}
 S_n &= an^2 + bn, \text{ maka} \\
 U_n &= S'_n - a = (2an + b) - a \\
 b &= \text{turunan kedua } S_n \\
 &= S''_n \\
 &= 2a
 \end{aligned}$$

## C Deret Geometri

Harus hafal!

$a = \text{suku pertama}$
$r = \text{rasio} = \frac{U^n}{U_{n-1}}$

Suku ke - n ( $U_n$ )	$U_n = ar^{n-1}$
Jumlahan suku ke - n ( $S_n$ )	$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r < 1$ $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$

## D Soal Deret Geometri Tak Hingga

Suatu deret tak hingga dikatakan konvergen atau punya jumlah jika berlaku:  
Syarat:  $-1 < r < 1$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

### Rumus Praktis:

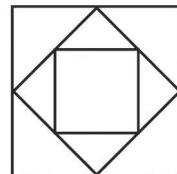
Sebuah bola dijatuhkan dari ketinggian  $H_0$ , dan akan memantul kembali dengan ketinggian  $\frac{a}{b}$  maka panjang lintasan bola sampai bola berhenti adalah:

$$\text{Panjang Lintasan} = \frac{b+a}{b-a} \times H_0$$

### Rumus Praktis:

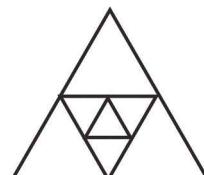
Jika dalam sebuah bujur sangkar dibuat lagi bujur sangkar di dalamnya seperti gambar di samping maka:

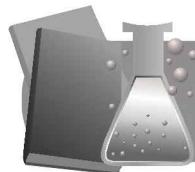
- Rasio deret luas =  $\frac{1}{2}$
- Rasio deret keliling =  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$



Jika dalam segitiga sama sisi dibuat lagi segitiga sama sisi di dalamnya seperti gambar di samping maka:

- Rasio deret luas =  $\frac{1}{4}$
- Rasio deret keliling =  $\frac{1}{2}$





# **PAKET SOAL**

Catatan

SOAL SBMPTN TKDU

1. Hasil kali 5 suku pertama suatu barisan geometri adalah 32. Jika jumlah suku ketiga dan suku keempat barisan tersebut adalah 6 maka suku keenam barisan tersebut adalah ...

A.  $\frac{1}{8}$       D. 8  
B. 2      E. 16  
C. 3

SOAL UM UGM TKDU



SOAL UN SMA IPA

3. Tempat duduk gedung pertunjukkan film diatur mulai dari baris depan ke belakang dengan banyak baris di belakang lebih 4 kursi dari baris di depannya. Bila dalam gedung pertunjukkan terdapat 15 baris kursi dan baris terdepan ada 20 kursi, kapasitas gedung pertunjukkan tersebut adalah ....

A. 1.200 kursi                      D. 600 kursi  
B. 800 kursi                           E. 300 kursi  
C. 720 kursi

SOAL SNMPTN K.DASAR

**SOAL UN SMA IPA**

5. Diketahui suku ke-3 dan suku ke-6 suatu barisan aritmetika berturut-turut adalah 8 dan 17. Jumlah 21 suku pertama deret tersebut adalah ....
- A. 630                      D. 670  
B. 651                      E. 672  
C. 665

**SOAL UM UGM K.DASAR**

6. Tiga bilangan membentuk barisan geometri dengan rasio positif. Jika bilangan kedua ditambah 4, diperoleh barisan aritmetika. Jika bilangan pertama adalah 2. Maka jumlah ketiga bilangan semula adalah ....
- A. 20                      D. 26  
B. 22                      E. 28  
C. 24

**SOAL SBMPTN TKDU**

7. Diketahui  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  adalah tiga suku pertama suatu barisan aritmetika dengan  $b > 0$ . Jika  $a + b + c = b^2 - 4$  maka nilai  $b$  adalah ....
- A. 2                      D. 6  
B. 4                      E. 7  
C. 5

**SOAL SNMPTN K.DASAR**

8. Jika jumlah 10 suku pertama suatu deret aritmetika adalah  $-110$  dan jumlah suku ke 11 dan suku ke 12 adalah  $2$  maka jumlah suku pertama dan kedua adalah ...
- A.  $-18$                       D.  $28$   
B.  $18$                       E.  $-38$   
C.  $-28$

**SOAL UM UGM TKDU**

9. Suku ke 3, 5, dan 8 suatu deret aritmetika berturut-turut adalah  $\frac{3x+1}{2}$ ,  $2x+2$ ,  $4x-7$ . Jika  $U_n$  menyatakan suku ke- $n$  barisan tersebut maka suku ke- $2n$  adalah ....
- A.  $5 + 3n$                       D.  $3 + 2U_n$   
B.  $2 + 6n$                       E.  $3n + U_n$   
C.  $2U_n$

**SOAL SNMPTN K.DASAR**

10. Jika  $a, b, c, d, e$  membentuk barisan geometri dan  $a \times b \times c \times d \times e = 182$  maka di antara kelima suku barisan itu yang dapat ditentukan nilainya adalah suku ke ....
- A. pertama                      D. keempat  
B. kedua                        E. kelima  
C. ketiga

**SOAL SBMPTN TKDU**

11. Misalkan,  $a, 8, c, d$  merupakan suatu barisan aritmetika dan  $a, 8, d$  merupakan barisan geometri maka nilai  $a + c + d$  adalah ....
- A. 15 atau 24                      D. 24 atau 36  
B. 16 atau 32                    E. 25 atau 36  
C. 24 atau 32

**SOAL SNMPTN K.DASAR**

12. Jika  $a$  adalah suku pertama,  $r$  adalah rasio, dan  $S_n = 5^{n+2} - 25$  adalah jumlah  $n$  suku pertama deret geometri maka nilai  $a + r$  adalah ....
- A. 95                              D. 225  
B. 105                            E. 500  
C. 125

**SOAL SBMPTN TKDU**

13. Diketahui  $a, b$ , dan  $c$  berturut-turut adalah suku ke-2, ke-4, dan ke-6 suatu barisan aritmetika. Jika  $\frac{a+b+c}{b-1} = 4$  maka nilai  $b$  adalah ....
- A. 4                              D. -2  
B. 2                              E. -4  
C. -1

**SOAL SNMPTN K.DASAR**

14.  $\log a + \log (ab) + \log (ab^2) + \log (ab^3) + \dots$  adalah deret aritmetika. Maka jumlah 6 suku pertama sama dengan ....
- A.  $6 \log a + 15 \log b$               D.  $7 \log a + 15 \log b$   
B.  $6 \log a + 12 \log b$               E.  $7 \log a + 12 \log b$   
C.  $6 \log a + 18 \log b$

## Catatan

### SOAL UM UGM TKDU

15. Diketahui  $U_n$  adalah suku ke-n suatu barisan aritmetika. Jika untuk setiap bilangan asli  $n$ , nilai

$U_n - U_{n-2}$  sama dengan tiga kali suku pertama dan

$$\frac{U_3 + U_{11}}{U_9 - U_5} = \frac{U_1 + U_3}{3} \text{ maka } U_{10} = \dots$$

A.  $\frac{87}{10}$

D. 29

B.  $\frac{29}{3}$

E. 32

C. 21

### SOAL UN SMA IPA

16. Seutas tali dipotong menjadi 5 bagian sehingga panjang potongan-potongan tali tersebut membentuk barisan geometri. Jika panjang tali terpendek 6 cm dan potongan tali terpanjang 96 cm maka panjang tali semula adalah ....

A. 96 cm D. 191 cm

B. 185 cm E. 192 cm

C. 186 cm

### SOAL SNMPTN K.DASAR

17. Jika 18, a, b, c, d, e, f, g, -6 merupakan barisan aritmetika maka  $a + d + g = \dots$

A. 36 D. 18

B. 30 E. 12

C. 24

### SOAL SBMPTN TKDU

18. Diketahui deret geometri tak hingga

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$ . Jika rasio deret tersebut adalah

$r$  dengan  $-1 < r < 1$ ,  $u_2 + u_4 + u_6 + \dots = 4$ , dan

$u_2 + u_4 = 3$  maka nilai  $r^2$  adalah ....

A.  $\frac{1}{4}$  D.  $\frac{1}{2}$

B.  $\frac{1}{3}$  E.  $\frac{3}{4}$

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



**SOAL SIMAK UI TKDU**

19. Koefisien suku tengah dari  $(3-2x)^6$  adalah ....

- A. 4320                      D. -2160  
B. 2160                      E. -4320  
C. 160

**SOAL UN SMA IPA**

20. Sebuah bola dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 4 meter dan memantul kembali  $\frac{3}{4}$  dari ketinggian

sebelumnya. Panjang lintasan seluruhnya sampai bola berhenti adalah ....

- A. 12 meter                      D. 28 meter  
B. 16 meter                      E. 32 meter  
C. 24 meter

**SOAL UN SMA IPA**

21. Barisan geometri dengan  $U_7 = 384$  dan rasio = 2. Suku ke-10 barisan tersebut adalah ...

- A. 1.920                      D. 4.608  
B. 3.072                      E. 6.144  
C. 4.052

**SOAL SBMPTN TKDU**

22. Diketahui deret geometri tak hingga

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  Jika rasio deret tersebut adalah  $r$  dengan  $-1 < r < 1$ ,  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = 3$ , dan  $u_3 + u_4 + u_5 + \dots = 1$  maka nilai  $r$  adalah ....

- A.  $-\frac{1}{4}$  atau  $\frac{1}{4}$                       D.  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  atau  $\frac{1}{\sqrt{3}}$   
B.  $-\frac{1}{3}$  atau  $\frac{1}{3}$                       E.  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$  atau  $\frac{1}{\sqrt{2}}$   
C.  $-\frac{1}{2}$  atau  $\frac{1}{2}$

## **SOAL SIMAK UI TKDU**

Catatan



## **SOAL SBMPTN TKDU**

24. Diketahui deret geometri tak hingga  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  jika rasio deret tersebut adalah  $\frac{1}{2}$ , dan  $u_1 + u_2 + u_3 = 6$ , maka  $u_1 = \dots$

$$u_3 + u_4 + u_5 + \dots = \frac{2}{3} \text{ maka nilai } r \text{ adalah} \dots$$

- A.  $-\frac{1}{9}$  atau  $\frac{1}{9}$

B.  $-\frac{2}{9}$  atau  $\frac{2}{9}$

C.  $-\frac{1}{3}$  atau  $\frac{1}{3}$

D.  $-\frac{4}{9}$  atau  $\frac{4}{9}$

E.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$  atau  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

## **SOAL UN SMA IPA**

25. Sebuah pabrik memproduksi barang jenis A pada tahun pertama sebesar 1.960 unit. Tiap tahun produksi turun sebesar 120 unit sampai tahun ke-16. Total seluruh produksi yang dicapai sampai tahun ke-16 adalah ....



# Pembahasan

## Catatan

### 1. Pembahasan:

Misal:

Lima suku pertama deret geometrinya adalah  $a, b, c, d,$  dan  $e.$

Dari soal didapatkan informasi bahwa:

$$a \times b \times c \times d \times e = 32$$

$$\Rightarrow a \times ar \times ar^2 \times ar^3 \times ar^4 = 32$$

$$\Rightarrow a^5 r^{10} = 32$$

$$\Rightarrow (ar^2)^5 = 32$$

$$\Rightarrow ar^2 = \sqrt[5]{32} = 2$$

Jumlah suku ketiga dan keempat adalah 6 maka:

$$ar^2 + ar^3 = 6$$

$$\Rightarrow 2 + ar^3 = 6$$

$$\Rightarrow ar^3 = 4$$

Sehingga, rasio dari deret geometri tersebut adalah:

$$\frac{ar^3}{ar^2} = \frac{4}{2} = 2$$

Jadi, suku keenam ( $ar^5$ ) barisan tersebut adalah:

$$ar^5 = ar^3 \times r^2 = 4 \times 4 = 16$$

**Jawaban: E**

### 2. Pembahasan:

Deret aritmatika:

$$S_n = \frac{1}{2} n [2a + (n - a)b]$$

$$S_4 = 30 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot [2a + 3b] = 30 \Leftrightarrow 2a + 3b = 15$$

$$S_7 = 84 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot [2a + 6b] = 84 \Leftrightarrow a + 3b = 12$$
$$\begin{array}{rcl} & & a = 3 \\ & & b = 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 S_{15} &= \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot [2a + 14.b] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 15 [2.3 + 14.3] \\
 &= 360
 \end{aligned}$$

**Jawaban: D**

### 3. Pembahasan:

Suku ke-n barisan aritmetika:

$$U_n = a + (n-1)b$$

Jumlah n suku pertama deret aritmetika:

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n) \text{ atau } S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

Dari soal yang ada maka dapat disimpulkan bahwa:  
Banyaknya kursi dari baris pertama, ke baris berikutnya sampai baris ke-15 membentuk barisan aritmetika.

Suku pertama =  $a = 20$

Beda =  $b = 4$

Banyak baris =  $n = 15$

Sehingga, banyak kapasitas gedung pertunjukkan dapat dihitung dengan

$$\begin{aligned}
 S_n &= \frac{n}{2}(2a + (n-1)b) \\
 \Rightarrow S_{15} &= \frac{15}{2}(2.20 + 14.4) \\
 &= \frac{15}{2}(40 + 56) \\
 &= \frac{15}{2} \cdot 96 = 720 \text{ kursi}
 \end{aligned}$$

**Jawaban: C**

### 4. Pembahasan:

Barisan aritmetika:

$$U_n = a + (n-1)b$$

Deret aritmetika:

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

**Catatan**



**Catatan**

Diketahui:

$$a = 4b$$

$$S_4 = 66$$

$$\Rightarrow S_4 = \frac{4}{2} (2a + (4-1)b)$$

$$\Rightarrow 66 = 2(2.4b + 3b)$$

$$\Rightarrow 66 = 22b$$

$$\Rightarrow b = 3$$

Sehingga,  $a = 4.3 = 12$

Jadi,

$$U_5 = a + 4b = 12 + 4.3 = 24$$

**Jawaban: E**

**5. Pembahasan:**

- Barisan aritmetika

$$\text{Suku ke-}n = U_n = a + (n-1)b$$

- Deret aritmetika:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)b)$$

Diketahui:

Barisan aritmetika:

$$\text{Suku ke-3} = 8 \Rightarrow a + 2b = 8 \dots (\text{i})$$

$$\text{Suku ke-6} = 17 \Rightarrow a + 5b = 17 \dots (\text{ii})$$

Dari (i) dan (ii):

$$a + 2b = 8$$

$$\underline{a + 5b = 17}$$

$$- 3b = -9$$

$$\Rightarrow b = 3 \text{ sehingga, diperoleh } a = 2$$

Maka, jumlah 21 suku pertamanya adalah:

$$S_{21} = \frac{21}{2} (2.2 + (21-1)3)$$

$$= \frac{21}{2} (64) = 672$$

**Jawaban: E**

## 6. Pembahasan:

Misal, barisan aritmetikanya = 2, 2 + b, 2 + 2b  
Sehingga, barisan geometrinya = 2, (2 + b - 4), 2b  
+ 2 = 2, b - 2, 2b + 2

Pada barisan geometri berlaku:  $U_2^2 = U_1 \cdot U_3$

Maka, dari barisan geometri di atas, diperoleh:

$$(b-2)^2 = 2(2b+2)$$

$$b^2 - 4b + 4 = 4b + 4$$

$$b^2 - 8b = 0$$

$$b(b-8) = 0$$

Untuk  $b = 8$  maka barisan geometrinya = 2, 6, 18

Jumlah ketiga bilangan:  $2 + 6 + 18 = 26$

**Jawaban: D**

## 7. Pembahasan:

Jika  $a$ ,  $b$ , dan  $c$  adalah tiga suku barisan aritmetika berurutan maka:

$$a + c = 2b$$

Diketahui:

$a$ ,  $b$ , dan  $c$  adalah tiga suku barisan aritmetika berurutan dan  $b > 0$ .

Jika  $a + b + c = b^2 - 4$  maka:

$$a + c = b^2 - b - 4$$

$$\Rightarrow 2b = b^2 - b - 4$$

$$\Rightarrow b^2 - 3b - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (b-4)(b+1) = 0$$

$$\Rightarrow b = 4 \text{ atau } b = -1$$

Karena  $b > 0$  maka  $b = 4$

**Jawaban: B**

## 8. Pembahasan:

$$S_{10} = -110 \Rightarrow \text{Deret aritmatika}$$

$$U_{11} + U_{12} = 2$$

$$U_1 + U_2 = \dots ?$$

Jawab:

**Catatan**



## Catatan



Jawaban: E

## **9. Pembahasan:**

Barisan aritmatika:  $U_n = a + (n - 1)b$

- $$\begin{aligned} U_5 &= a + 4b = 2x + 2 \\ U_8 &= a + 7b = 4x - 7 \\ 3b &= 2x - 9 \end{aligned}$$
  - $$U_5 = a + 4b = 2x + 2$$
  - $$U_3 = a + 2b = \frac{3x + 1}{2} \quad |$$
  - $$2b = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$
  - Substitusi:  $b = \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$
  - $$3 \cdot \left( \frac{1}{4}x + \frac{3}{4} \right) = 2x - 9$$
  - $$3x + 9 = 8x - 36$$



$$5x = 45$$

$$x = 9$$

- Dengan demikian,  $b = 3$  dan  $a = 8$

$$U_n = 8 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 5$$

$$U_{2n} = 8 + (2n - 1) \cdot 3 = 6n + 5$$

$$= 3n + 5 + 3n = U_n + 3n$$

**Jawaban: E**

### Catatan

#### 10. Pembahasan:

Diketahui  $a, b, c, d, e \Rightarrow$  barisan geometri

$a \times b \times c \times d \times e = 182$ , artinya:

$$a \times ar^1 \times ar^2 \times ar^4 = 182$$

$$a^5 \times r^{10} = 182$$

$$(ar^2)^5 = 182 \Rightarrow ar^2 = \sqrt[5]{182}$$

Jelas, bahwa kita bisa menentukan nilai  $ar^2$ , artinya dapat ditentukan nilainya adalah suku ketiga.

**Jawaban: C**

#### 11. Pembahasan:

$a, 8, c, d$  merupakan barisan aritmetika maka:

$$8 - a = c - 8 = d - c$$

Dari  $8 - a = c - 8$  diperoleh:

$$8 + 8 = c + a$$

$$\Rightarrow 16 = a + c$$

$$\Rightarrow 16 - a = c \quad \dots(i)$$

Dari  $c - 8 = d - c$  diperoleh

$$2c - 8 = d \quad \dots(ii)$$

$a, 8, d$  merupakan barisan geometri maka:

$$a.d = 8^2 \Rightarrow a.d = 64$$

$$\Rightarrow a(2c - 8) = 64$$

$$\Rightarrow 2ac - 8a - 64 = 0$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (i)

$$\Rightarrow 2a(16 - a) - 8a - 64 = 0$$

$$\Rightarrow 32a - 2a^2 - 8a - 64 = 0$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 24a + 64 = 0$$



## Catatan

$$\Rightarrow a^2 - 12a + 32 = 0$$

$$\Rightarrow (a-4)(a-8) = 0$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ atau } a = 8$$

Ketika  $a = 4$  maka  $c = 12$  dan  $d = 16$

Sehingga,  $a + c + d = 32$

Ketika  $a = 8$  maka  $c = 8$  dan  $d = 8$

Sehingga,  $a + b + c = 24$

**Jawaban: C**

### 12. Pembahasan:

Deret geometri:

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Diketahui:

Jumlah n suku pertama dari barisan geometri adalah:

$$S_n = 5^{n+2} - 25$$

Sehingga:

$$S_1 = 5^{1+2} - 25$$

$$= 5^3 - 25 = 125 - 25 = 100$$

Maka,  $U_1 = 100 = a$

$$S_2 = 5^{2+2} - 25$$

$$= 5^4 - 25 = 625 - 25 = 600$$

$$U_2 = S_2 - S_1$$

$$= 600 - 100 = 500$$

$$\text{Jadi, } r = \frac{500}{100} = 5$$

$$\text{Nilai dari } a + r = 100 + 5 = 105$$

**Jawaban: B**

### 13. Pembahasan:

Diketahui:

$a$ ,  $b$ , dan  $c$  adalah suku ke-2, ke-4 dan ke-6 barisan aritmetika.

Misalkan: selisih barisan aritmetika tersebut adalah  $s$  maka:

$$U_2 = b - 2s \Rightarrow a = b - 2s$$

$$U_3 = b - s$$

$$U_4 = b$$

$$U_5 = b + s$$

$$U_6 = b + 2s \Rightarrow c = b + 2s$$

Jika,  $\frac{a+b+c}{b-1} = 4$  maka:

$$\frac{(b-2s)+b+(b+2s)}{b-1} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{3b}{b-1} = 4$$

$$\Rightarrow 3b = 4(b-1)$$

$$\Rightarrow 3b = 4b - 4$$

$$\Rightarrow 4 = 4b - 3b$$

$$\Rightarrow 4 = b$$

**Jawaban: A****14. Pembahasan:**

Sifat logaritma:  ${}^a\log b - {}^a\log c = {}^a\log \frac{b}{c}$

Diketahui:

$$\log a + \log(ab) + \log(ab^2) + \log(ab^3) + \dots$$

maka dapat diperoleh:

$$a = \log a \text{ dan}$$

$$\text{beda}(b) = \log(ab) - \log a$$

$$= \log \frac{(ab)}{a} = \log b$$

Jumlah n suku pertama:

$$S_n = \frac{n}{2} (2a + (n-1)b)$$

Sehingga, jumlah 6 suku pertamanya:

$$S_6 = \frac{6}{2} (2 \cdot \log a + (6-1) \cdot \log b)$$

$$= 3(2 \log a + 5 \log b)$$

$$= 6 \log a + 15 \log b$$

**Jawaban: A****15. Pembahasan:**

Suku ke-n barisan aritmetika

$$U_n = a + (n-1)b$$



## Catatan

$$\begin{aligned} - U_n - U_{n-2} &= 3a \Rightarrow 2b = 3a, \text{ sehingga } a = \frac{2b}{3} \\ \frac{U_3 + U_{11}}{U_9 - U_5} &= \frac{U_1 + U_3}{3} \Leftrightarrow \frac{2a + 12b}{4b} = \frac{2a + 2b}{3} \\ \frac{a + 6b}{4b} &= \frac{a + b}{3} \\ \frac{\frac{2b}{3} + 6b}{4b} &= \frac{\frac{2b}{3} + b}{3} \\ \frac{2b + 18b}{4b} &= \frac{2b + 3b}{3} \\ 15 &= 5b \\ b &= 3, a = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_{10} &= a + 9b = 2 + 9 \cdot 3 \\ &= 29 \end{aligned}$$

Jawaban: D

### 16. Pembahasan:

Suku ke- $n$  barisan geometri =  $U_n = a \cdot r^{n-1}$

Jumlah  $n$  suku pertama deret geometri:

- $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}; r > 1$
- $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}; r < 1$

Diketahui:

Seutas tali dipotong menjadi 5 bagian maka  $n = 5$

Potongan terpendek 6 cm  
maka  $U_1 = a = 6$  ... (i)

Potongan terpanjang 96 cm  
maka  $U_5 = a \cdot r^4 = 96$  ... (ii)

Dengan mensubstitusikan persamaan (i) ke persamaan (ii), diperoleh:  
 $6 \cdot r^4 = 96$

$$\Rightarrow r^4 = \frac{96}{6} = 16$$

$$\Rightarrow r = \sqrt[4]{16} = 2$$

Panjang tali semula sama dengan menyambung potongan-potongan tali. Hal itu dapat dihitung dengan deret geometri dengan  $r > 2$ , yaitu:

$$S_5 = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\Rightarrow S_5 = \frac{6(2^5 - 1)}{2 - 1}$$

$$= \frac{6(32 - 1)}{1} = 186$$

Jadi, panjang tali semula adalah 186 cm.

**Jawaban: C**

### 17. Pembahasan:

$18, a, b, c, d, e, f, g, -6 \Rightarrow$  barisan aritmetika

$a + d + g = \dots ?$

Jawab:

$$\begin{aligned} b_{\text{baru}} &= \frac{b_{\text{lama}}}{k+1} \\ &= \frac{-6 - 18}{7 + 1} = -3 \end{aligned}$$

deret =  $18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, -3, -6$

Sehingga, nilai dari  $a + d + g = 15 + 6 + (-3) = 18$

**Jawaban: D**

### 18. Pembahasan:

Suatu deret geometri tak hingga dengan suku pertama  $a$  dan rasio  $r$  maka:

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

Diketahui:

Deret geometri tak hingga

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  dengan rasio  $r: -1 < r < 1$

Jika:

**Catatan**



## Catatan

- $u_2 + u_4 + u_6 + \dots = 4$   
 $\Rightarrow ar + ar^3 + ar^5 + \dots = 4$   
Suku pertama =  $ar$   
Rasio =  $r^2$   
Sehingga,  $S_{\infty} = \frac{ar}{1-r^2}$   
 $\Rightarrow 4 = \frac{ar}{1-r^2}$   
 $\Rightarrow ar = 4(1-r^2) \dots (i)$   
•  $u_2 + u_4 = 3$   
 $\Rightarrow ar + ar^3 = 3$   
 $\Rightarrow ar(1+r^2) = 3 \dots (ii)$

Dengan mensubstitusikan persamaan (i) ke persamaan (ii), diperoleh:

$$4(1-r^2)(1+r^2) = 3$$

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b) &= a^2 - b^2 \\ \Rightarrow 4(1-r^4) &= 3 \\ \Rightarrow 1-r^4 &= \frac{3}{4} \\ \Rightarrow 1-\frac{3}{4} &= r^4 \Rightarrow r^4 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

$$\text{Sehingga, } \sqrt{r^4} = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2}$$

Jawaban: D

### 19. Pembahasan:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n C_i^n a^{n-i} b^i$$

$$(3-2x)^6 = \sum_{i=0}^6 C_i^6 3^{6-i} \cdot (-2x)^i$$

Suku tengahnya adalah:

$$\begin{aligned} C_3^6 \cdot 3^3 (-2x)^3 &= \frac{6!}{3!3!} \cdot 27 \cdot (-8)x^3 \\ &= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 27 \cdot (-8)x^3 \\ &= -4320x^3 \end{aligned}$$

## Catatan

Jawaban: E

### 20. Pembahasan:

Deret geometri tak hingga dengan rasio  $r$  adalah:

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

Diketahui:

Bola dari ketinggian 4 m dipantulkan dengan rasio

pantulan  $\frac{3}{4}$  maka:

- Panjang lintasan turun:

$$S_{\infty} = \frac{4}{1 - \frac{3}{4}} = 4 \times \frac{4}{1} = 16 \text{ m}$$

- Panjang lintasan naik (dimulai setelah pantulan pertama, dengan ketinggian setelah pantulan

pertama adalah  $4m \times \frac{3}{4} = 3m$ ):

$$S_{\infty} = \frac{3}{1 - \frac{3}{4}} = 3 \times \frac{4}{1} = 12 \text{ m}$$

Sehingga, panjang lintasan seluruhnya:

$$16 \text{ m} + 12 \text{ m} = 28 \text{ m}$$

#### Cara Cepat:

Panjang lintasan pantulan bola dari ketinggian  $H_0$  dengan ketinggian pantulan  $\frac{p}{q}$  dari pantulan sebelumnya adalah:

$$\frac{q+p}{q-p} \times H_0$$



## Catatan

Dari soal diketahui:  $H_o = 4 \text{ m}$  dan  $\frac{p}{q} = \frac{3}{4}$

Maka, panjang lintasannya adalah:

$$\frac{4+3}{4-3} \times 4\text{m} = \frac{7}{1} \times 4\text{m} = 28\text{m}$$

**Jawaban: D**

### 21. Pembahasan:

Barisan geometri

$$U_n = a \cdot r^{n-1}$$

Diketahui:

$$U_7 = 384 \Rightarrow a \cdot r^6 = 384$$

$$r = 2$$

$$\Rightarrow a \cdot 2^6 = 384 \Rightarrow a = \frac{384}{2^6}$$

$$\Rightarrow a \cdot 2^6 = 384$$

$$\Rightarrow a = \frac{384}{64} = 6$$

$$\text{Jadi, suku ke-10 } (U_{10}) = a \cdot r^9 = 6 \cdot 2^9$$

$$= 6 \times 512 = 3.072$$

**Jawaban: B**

### 22. Pembahasan:

Suatu deret geometri tak hingga dengan suku pertama  $a$  dan rasio  $r$ , maka:

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

Diketahui:

Deret geometri tak hingga:

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  dengan rasio  $r$ :  $-1 < r < 1$

Jika:

- $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = 3$

$$\Rightarrow a + ar + ar^2 + \dots = 3$$

Suku pertama =  $a$

Rasio =  $r$

$$\text{Sehingga, } S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{a}{1-r}$$

$$\Rightarrow a = 3(1-r) \dots (\text{i})$$

- Dari  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = 3$

$$\underline{\text{Dan } u_3 + u_4 + u_5 + \dots = 1}$$

$$\text{Maka, } u_1 + u_2 = 3 - 1 = 2$$

$$\text{Sehingga, } a + ar = 2 \Rightarrow a(1+r) = 2 \dots (\text{ii})$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (i) ke persamaan (ii), diperoleh:

$$3(1-r)(1+r) = 2$$

$$\Rightarrow 3(1-r^2) = 2$$

$$\Rightarrow (1-r^2) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{2}{3} = r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Jadi, nilai } r = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ atau } -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

**Jawaban: D**

### 23. Pembahasan:

Deret geometri:  $\frac{x-1}{x}, \frac{1}{x}, \frac{1}{x(x-1)}, \dots$

$$\text{maka, didapatkan } r = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{x-1}$$

Jumlahnya mempunyai limit, artinya deret tersebut merupakan deret konvergen dengan ketentuan  $-1 < r < 1$ .

Maka:



## Catatan

$$-1 < \frac{1}{x-1} < 1$$

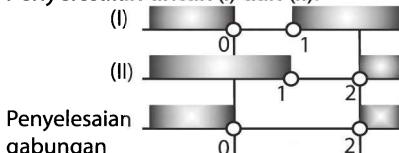
Penyelesaian (I):

$$-1 < \frac{1}{x-1} \Rightarrow \frac{1}{x-1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{x}{x-1} > 0$$

Penyelesaian (II):

$$\frac{1}{x-1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{x-1} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{x-1} < 0$$

Penyelesaian untuk (I) dan (II):



Penyelesaian gabungan

$$HP = \{x < 0 \text{ atau } x > 2\}$$

Jawaban: E

### 24. Pembahasan:

Suatu deret geometri tak hingga dengan suku pertama  $a$  dan rasio  $r$  maka:

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

Diketahui:

Deret geometri tak hingga:

$u_1 + u_2 + u_3 + \dots$  dengan rasio  $r$ ,  $-1 < r < 1$

Jika:

- $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = 6$

$$\Rightarrow a + ar + ar^2 + \dots = 6$$

Suku pertama =  $a$

Rasio =  $r$

$$\text{Sehingga, } S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{a}{1-r}$$

$$\Rightarrow a = 6(1-r) \dots (i)$$

- dari  $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = 6$

$$\text{dan } u_3 + u_4 + u_5 + \dots = \frac{2}{3}$$

$$\text{maka: } u_1 + u_2 = 6 - \frac{2}{3} = \frac{18}{3} - \frac{2}{3} = \frac{16}{3}$$

Sehingga:

$$a + ar = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow a(1+r) = \frac{16}{3} \dots \text{(ii)}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (i) ke persamaan (ii), diperoleh:

$$6(1-r)(1+r) = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow 6(1-r^2) = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow (1-r^2) = \frac{16}{3} : 6$$

$$\Rightarrow 1-r^2 = \frac{16}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{8}{9} = r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{9}} = \pm \frac{1}{3}$$

$$\text{Jadi, nilai } r = \frac{1}{3} \text{ atau } -\frac{1}{3}$$

**Jawaban: C**

## 25. Pembahasan:

$$\text{Deret aritmetika: } S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)b)$$

Dari soal, diketahui bahwa:

$$a = 1.960 \text{ dan } b = -120$$

$$\begin{aligned}\text{Sehingga, } S_{16} &= \frac{16}{2}(2(1.960) + (16-1)(-120)) \\ &= 8(3.920 - 1.800) \\ &= 8 \times 2.120 = 16.960\end{aligned}$$

**Jawaban: C**



# Daftar Pustaka

**Anwar, Cecep.** 2008. *Matematika Aplikasi: Untuk SMA Dan MA Kelas XII Program Studi Ilmu Alam/Pesta.* Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.

**Chandra, Aristo.** 2011. *Metode The King Matematika SMA.* Jakarta: Wahyu Media.

**Damari, Ari.** 1999. *Kupas Matematika SMA untuk Kelas 1,2,dan 3.* Jakarta; Wahyu Media.

**Departemen Pendidikan nasional.** 1999-2012. *Soal-soal SPMB-SNMPTN-SBMPTN.* Yogyakarta

**Departemen Pendidikan nasional.** 1999-2012. *Soal-soal Ujian Nasional Matematika SMA.* Yogyakarta

**Djumanta, Wahyudi.** 2008. *Mahir Mengembangkan Kemampuan Matematika 2: untuk Kelas XI Sekolah Menengah Atas/Madrasah Aliyah.* Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.

**Martono, Koko.** 1999. *Kalkulus.* Jakarta: Penerbit Erlangga.

**Pangarso Yuliatmoko dan Dewi Retno Sari S.** 2008. *Matematika: untuk Sekolah Menengah Atas dan Madrasah Aliyah Kelas XII Program Bahasa.* Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.

**Purcell, Edwin J dan Dale Varberg.** 1999. *Kalkulus dan Geometri Analisis. Jilid 1 (Terjemahan).* Edisi kelima. Jakarta: Penerbit Erlangga.

**Soedyarto, Nugroho. 2008.** *Matematika 2 untuk SMA atau MA Kelas XI Program IPA.* Jakarta: Pusat Perbukuan, Departemen Pendidikan Nasional.

**Supriyana, Sunu. 2012.** *Metode Cerdik 1001 Soal Bahas Matematika SMA.* Yogyakarta: Pelangi Edukasi.

$$x = ut \cos(a)$$

# Tentang Penulis

## Tim Tentor

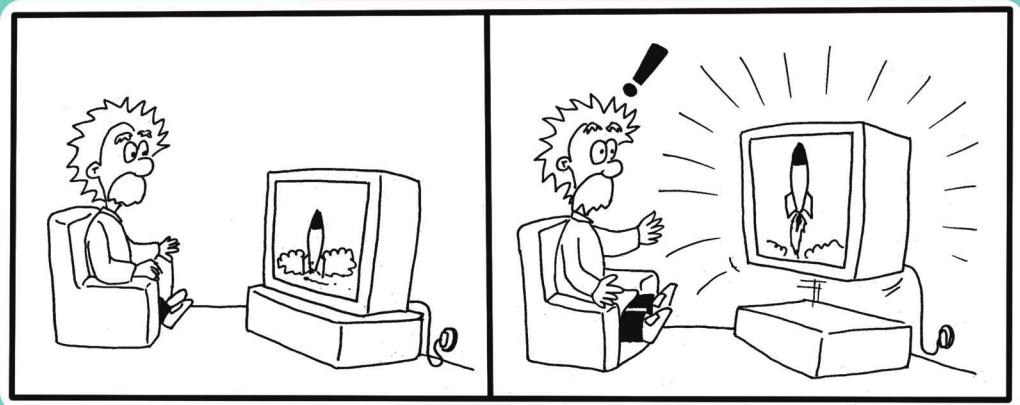
(Komunitas Pengajar Alumni UGM dan UNY)

Yogyakarta, menjadi destinasi utama dalam menimba ilmu generasi bangsa dari seluruh indonesia. Disebut kota pelajar karena Jogja merupakan kota yang diwarnai dinamika pelajar dan mahasiswa yang berasal dari berbagai daerah di Indonesia. Ada lebih dari 137 perguruan tinggi disana. Perguruan tinggi yang dimiliki oleh pemerintah adalah Universitas Gajah Mada, inilah universitas negeri pertama yang lahir pada masa kemerdekaan. Setelah itu didirikan Akademi Seni Rupa Indonesia dan Akademi Musik Indonesia, lalu Perguruan Tinggi Agama Islam Negri, yang kini menjadi UIN Sunan Kalijaga. Dan yang tidak kalah favoritnya adalah UNY, Universitas Negeri Yogyakarta, yang dulu dikenal sebagai sekolahnya para calon guru.

Di kota ini berkembang pesat berbagai komunitas, dari komunitas hobi, komunitas seni, komunitas fotografi, komunitas pecinta lingkungan, komunitas kedaerahaan, dll. Dan kami lahir dari salah satu komunitas tersebut, komunitas yang berbasis "edukasi", yang nota bene adalah alumni UGM dan UNY. Buku ini lahir sebagai salah satu hasil karya kami untuk membantu adik-adik belajar guna menguasai dan memahami materi pelajaran di sekolah. Jika adik-adik ingin berkorespondensi, bisa dikirim melalui email: [kotaksaranpenulis@yahoo.com](mailto:kotaksaranpenulis@yahoo.com).

## Buku "Complete 1001 Bank Soal" berbeda dengan buku yang lain, Why....?? Alasannya:

1. 1001++ soal-soal fresh update bersumber dari Ujian Tengah Semester (UTS), Ujian Akhir Semester, Ujian Nasional (UN), SBMPTN, SIMAK UI, UM UGM, dan lain-lain.
2. Dibahas tuntas oleh Komunitas Tentor Alumni UGM & UNY dengan cara yang simpel dan semua soal jadi lebih gampang.
3. Dapatkan free apps android untuk simulasi tes agar kamu dapat belajar di mana pun dan kapan pun.
4. Materi dirangkum ala Bimbingan Belajar sehingga sangat praktis, simpel, dan mudah dipahami.
5. Penulis merupakan "Tentor Matematika" yang telah bertahun-tahun menjadi pengajar Matematika. So, sudah jangan diragukan lagi....
6. Di dalam buku ini terdapat ilustrasi-ilustrasi lucu yang dapat membuat otak jadi fresh kembali.



**Bintang Wahyu**

**Redaksi:**

Jl. Moh. Kahfi II, No.1 Cipedak, Jagakarsa,  
Jakarta Selatan 12630  
Telp. (021) 7863020 (Ext. 102, 103)  
Faks. (021) 7874212  
Email: bintangwahyu.redaksi@gmail.com  
Facebook: Bintang Wahyu  
Twitter: @redaksi\_bintang  
Website: www.bintangwahyu.com

ISBN 979-795-930-9

9 789797959302  
ISBN 978-979-795-930-2 Pelajaran