Домашнее задание

В этой домашней работе студенты попрактикуются в решении определителя квадратных матриц, а также в нахождении собственных чисел и собственных векторов матрицы.

Задача 1

Найдите определитель и собственные значения матриц:

а) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det A = 16 - 3 - 3 + 6 + 6 - 4 = 18$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 & -3 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(2-\lambda)^2 - 3 - 3 + 3(2-\lambda) + 3(2-\lambda) - (4-\lambda) =$$

$$= (4-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2) - 6 + 6 - 3\lambda + 6 - 3\lambda - 4 + \lambda =$$

$$= 16 - 16\lambda + 4\lambda^2 - 4\lambda + 4\lambda^2 - \lambda^3 - 6\lambda + 2 + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 - 25\lambda + 18 = -(\lambda - 1)\underbrace{(\lambda^2 - 7\lambda + 18)}_{\text{комплексные корни}}$$

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \frac{7 \pm i\sqrt{23}}{2}$$

б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\det B = 4 - 1 = 3$$

$$\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$\lambda_{1,2} = 1, \quad \lambda_3 = 3$$

в) $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det C = 5 \cdot 4 \cdot 4 - 5 \cdot (-1) \cdot (-1) = 80 - 5 = 75$$

$$\det (C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (5-\lambda)(4-\lambda)^2 - (5-\lambda) = (5-\lambda)(16 - 8\lambda + \lambda^2 - 1) =$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 15) = (5-\lambda)(\lambda-5)(\lambda-3)$$

$\lambda_{1,2} = 5$, $\lambda_3 = 3$

Задача 2

Диагонализируйте следующие матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = A$

1) $\det (A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & -2 \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (7-\lambda)(5-\lambda)(9-\lambda) - 8(9-\lambda) =$

$$= (9-\lambda)(35 - 7\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 8) = (9-\lambda)(\lambda^2 - 12\lambda + 27) =$$

$$= (9-\lambda)(\lambda-9)(\lambda-3) \Rightarrow \lambda_{1,2} = 9 , \lambda_3 = 3$$

2) Ищем СВ $(A - \lambda I)x = 0$.

- $\lambda_{1,2} = 9$

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ -2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

- $\lambda_3 = 3$

$$\begin{pmatrix} 4 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3) Базис:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad A' = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = B$

1) $\det(B - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)^2 - (3-\lambda) =$

$= (3-\lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = (3-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-1)$

$\lambda_{1,2} = 3, \quad \lambda_3 = 1$

2) Ищем СВ $(B - \lambda I)X = 0$

$\lambda_{1,2} = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3) Базис:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad B' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = C$

1) $\det(C - \lambda I) = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & -1 \\ 2 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2 + 2 + (3-\lambda) - 2(2-\lambda) - 2(4-\lambda) =$

$= (12 - 4\lambda - 3\lambda + \lambda^2)(2-\lambda) + 3 - \lambda - 4 + 2\lambda - 8 + 2\lambda =$

$= 24 - 14\lambda + 2\lambda^2 - 12\lambda + 7\lambda^2 - \lambda^3 - 9 + 3\lambda =$

$= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15 = (\lambda - 1)(-\lambda^2 + 8\lambda - 15) = (\lambda-1)(\lambda-3)(\lambda-5)$

$$\begin{array}{r|l} -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 23\lambda + 15 & \lambda - 1 \\ \cline{2-2} \underline{-\lambda^3 + \lambda^2} \qquad\qquad\qquad & -\lambda^2 + 8\lambda - 15 \\ 8\lambda^2 - 23\lambda \qquad\quad & \\ \underline{8\lambda^2 - 8\lambda} \qquad\quad & \\ -15\lambda + 15 & \\ \underline{-15\lambda + 15} & \\ 0 & \end{array}$$

2) Ищем СВ $(C - \lambda I)X = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda_2 = 3$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda_3 = 5$

$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

3) Базис:

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \qquad C' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = D$

1) $\det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$

$$= (1-\lambda)\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{I} - \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}}_{II} + \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}_{III} =$$

$I = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)\left(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 2\right) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1)$

$II = (1-\lambda)^2 + 1 - 1 = (1-\lambda)^2$

$III = 0 - (1-\lambda) - (1-\lambda) = -2(1-\lambda)$

$= (1-\lambda)\left[(1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 1) - (1-\lambda) - 2(1-\lambda)\right] =$

$= (1-\lambda)^2(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = (1-\lambda)^2(\lambda+1)(\lambda-3)$

2) Ищем СВ $(D - \lambda I)X = 0$

$\lambda_{1,2} = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_3 = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\lambda_4 = 3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3) Базис:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad D' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$