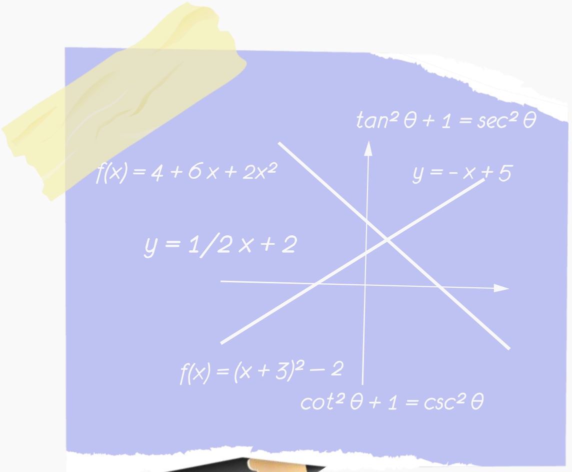
Prof. coordonator: Lect. Dr. Romeo Bercia

SCSS 2024

SERII FOURIER PENTRU FUNCȚII CU VALORI COMPLEXE. APLICAȚII



Avram Alexandru-Valentin, Ceaușu Ruxandra-Mihaela
Grupa 1324, Anul II, FSA

Conținutul prezentării

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

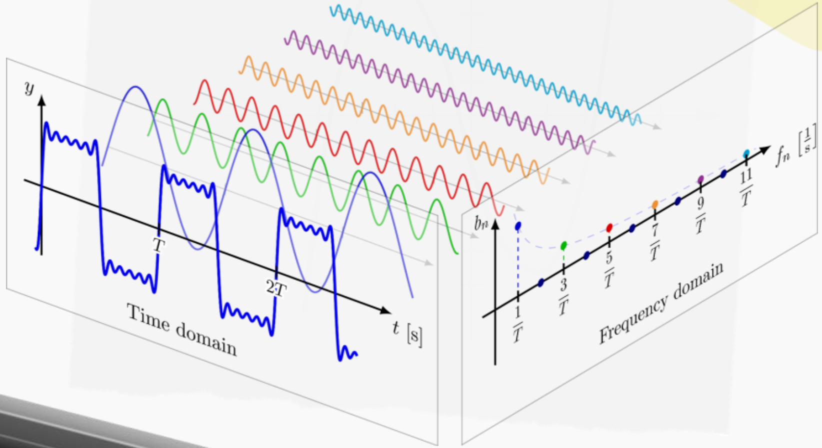
Serii Fourier

Serii Fourier pentru funcții complexe

Aplicații. Implementare

01

Serii Fourier



Formă generală

Considerăm:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

continuă, cu $f(0) = f(1)$.

Sau o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, cu perioada T = 1.

Dezvoltarea unei astfel de funcții în serie Fourier este:

$$\boldsymbol{f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(2\pi n t) + b_n \sin(2\pi n t)\right), \forall\, t \in [0, 1]}$$

unde: $\boldsymbol{a_n = 2 \int_0^1 f(t) \cos(2\pi n t)\, dt, \mathrm{n} \geq 0}$

$\boldsymbol{b_n = 2 \int_0^1 f(t) \sin(2\pi n t)\, dt, \mathrm{n} \geq 1}$

$y = ax^2 + bx + c$

Forma complexă a seriei Fourier

Pornind de la *relațiile lui Euler*:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Seria devine:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{e^{2\pi int} + e^{-2\pi int}}{2} + b_n \frac{e^{2\pi int} - e^{-2\pi int}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{2\pi int}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n + ib_n}{2} e^{-2\pi int}\right)$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi int}}$$

Notații:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}, n \geq 1$$

$$c_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi int} dt, \forall n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Observații:

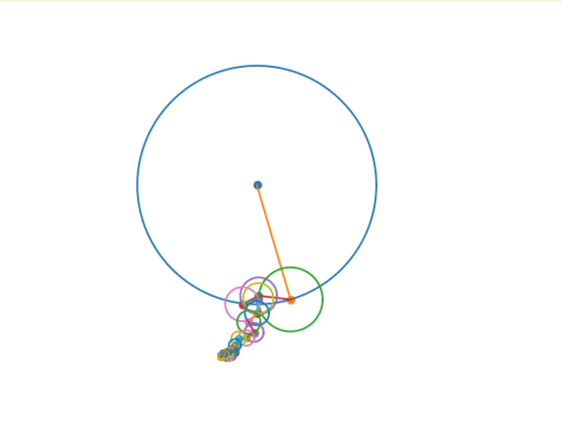
$$\boldsymbol{c_{-n} = \overline{c_n}}$$

Funcția are valori reale!

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

02

Seria Fourier pentru funcții complexe



Serii Fourier pentru funcții cu valori complexe

Acum, considerăm:

$$f : [0,1] \to \mathbb{C}$$

cu dezvoltarea în serie Fourier complexă:

$$\boldsymbol{f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n t}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{f(t) = \ldots + c_{-2}e^{-2\cdot 2\pi i t} + c_{-1}e^{-1\cdot 2\pi i t} + c_0 e^{0\cdot 2\pi i t} + c_1 e^{1\cdot 2\pi i t} + c_2 e^{2\cdot 2\pi i t} + \ldots}$$

Cum determinăm coeficienții c_n?

$$f(t) = \ldots + c_{-2}e^{-2\cdot 2\pi it} + c_{-1}e^{-1\cdot 2\pi it} + c_0 e^{0\cdot 2\pi it} + c_1 e^{1\cdot 2\pi it} + c_2 e^{2\cdot 2\pi it} + \ldots$$

01 Integrăm funcția pe intervalul [0,1]

02 Integrala unei sume infinite

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \left(\ldots + c_{-2}e^{-2\cdot 2\pi it} + c_{-1}e^{-1\cdot 2\pi it} + c_0 e^{0\cdot 2\pi it} + c_1 e^{1\cdot 2\pi it} + c_2 e^{2\cdot 2\pi it} + \cdots\right)dt =$$

$$= \ldots + \underbrace{\int_0^1 c_{-1}e^{-1\cdot 2\pi it}dt}_{0} + \underbrace{\int_0^1 c_0 e^{0\cdot 2\pi it}dt}_{c_0} + \underbrace{\int_0^1 c_1 e^{1\cdot 2\pi it}dt}_{0} + \underbrace{\int_0^1 c_2 e^{2\cdot 2\pi it}dt}_{0} + \ldots$$

Integrala comută cu suma

03

Cum determinăm coeficienții c_n?

04 Multiplicăm funcția cu $e^{-n\cdot 2\pi i t}$

05 Integrala unei sume infinite

$$\int_0^1 f(t)e^{-n\cdot 2\pi i t}dt = \int_0^1 \left(\ldots + c_{-1}e^{-(n+1)\cdot 2\pi i t} + c_0 e^{-n\cdot 2\pi i t} + c_1 e^{(1-n)\cdot 2\pi i t} + \ldots + c_n e^{(n-n)\cdot 2\pi i t} + \cdots\right)dt =$$

$$= \ldots + \underbrace{\int_0^1 c_{-1}e^{-(n+1)\cdot 2\pi i t}dt}_{0} + \underbrace{\int_0^1 c_0 e^{-n\cdot 2\pi i t}dt}_{0} + \underbrace{\int_0^1 c_1 e^{(1-n)\cdot 2\pi i t}dt}_{0} + \cdots + \underbrace{\int_0^1 c_n e^{0\cdot 2\pi i t}dt}_{c_n} + \ldots$$

Integrala comută cu suma

06

Obs: c_{-n} ***nu mai este neapărat egal cu*** $\overline{c_n}$

Funcția are valori complexe!

$$c_n = \int_0^1 f(t)e^{-2\pi i n t}dt$$

Reprezentarea grafică pentru $f : [0,1] \to \mathbb{C}$

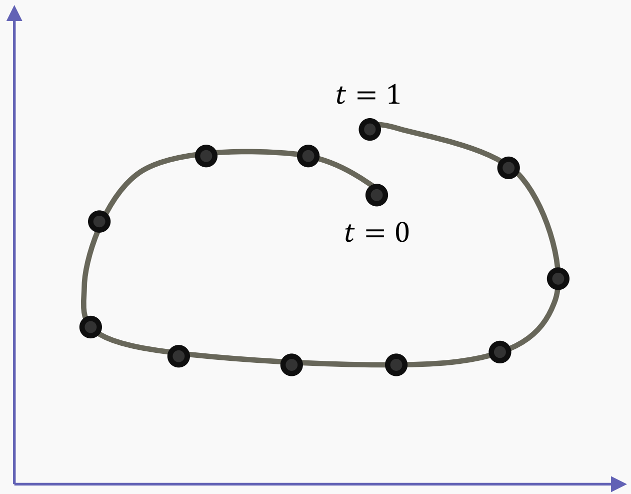
Funcția considerată are valori complexe, deci este de forma:

$$\boldsymbol{f(t) = u + iv}$$

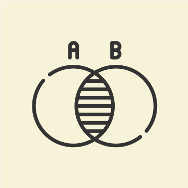
Reprezentarea grafică este *o curbă în planul complex.*

Formă parametrică:

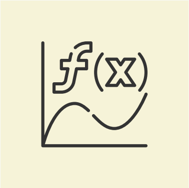
$$\begin{cases} x = u(t) \\ y = v(t) \end{cases}, t \in [0,1]$$



Aproximarea numerică

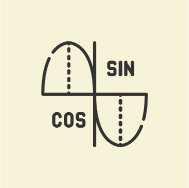


Cele două aspecte de luat în considerare în ceea ce privește *aproximarea* sunt:



N = numărul de termeni considerați din seria Fourier

$$f(t) \approx \sum_{-N}^{N} c_n e^{2\pi i n t}$$



Aproximarea numerică a coeficienților c_n

$$c_n = \int_0^1 f(t) e^{-2\pi i n t} dt$$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Aproximarea numerică

- Cunoscând valorile funcției în anumite puncte aparținând domeniului de definiție, se aproximează integrala folosind formule de cuadratură:

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \sum_{k=0}^{M} \omega_k\, g(t_k)$$

- *Metoda trapezelor pentru diviziune uniformă*:

$$\int_0^1 g(t)dt \approx \frac{1}{2M} g(t_0) + \sum_{k=1}^{M-1} \frac{1}{M} g(t_k) + \frac{1}{2M} g(t_M)$$

În Matlab, procedura *trapz* implementează metoda trapezelor.

03

Aplicații. Implementare

Bibliografie. Referințe

V. Serov – *Fourier Series, Fourier Transform and Their Applications to Mathematical Physics*, Springer Verlag, 2017

Karan Asher - *Fourier series And Fourier Transform*, IOSR Journal of Mathematics (IOSR-JM), Volume 4, Issue 6 (Jan. - Feb. 2013), pp 73-76

- *Documentația Python: https://docs.python.org/3/*
- *Documentația OpenCV: https://docs.opencv.org/4.x/*
- *Documentația Matlab: https://www.mathworks.com/help/matlab/*
- *https://youtu.be/r6sGWTCMz2k?si=68RXeOq65pItyeov*