Examen - SAI - Stamate - 20.02.2024

① Pe mult. nr. reale $\mathbb{R}$ considerăm relația

$x \sim y$ dacă $(x^2+2x+5)^2 = (y^2+2y+5)^2$

(a) Ar. că $\sim$ este rel. de echivalență pe $\mathbb{R}$

O relație binară pe A, notată "ρ" s.n. relație de echivalență dacă urm. condiții sunt verificate pentru orice $a, b, c \in A$

(i) $a \rho a$ (reflexivitate)

(ii) $a \rho b \Rightarrow b \rho a$ (simetrie)

(iii) $a \rho b$ și $b \rho c \Rightarrow a \rho c$ (tranzitivitate)

(i) $(x^2+2x+5)^2 = (x^2+2x+5)^2 \Rightarrow x \sim x \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ "$\sim$" este reflexivă

(ii) $(x^2+2x+5)^2 = (y^2+2y+5)^2 \Rightarrow (y^2+2y+5)^2 = (x^2+2x+5)^2$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Deci $x \sim y \Rightarrow y \sim x \Rightarrow$ "$\sim$" este simetrică

(iii) $\left.\begin{array}{l}(x^2+2x+5)^2 = (y^2+2y+5)^2 \\ (y^2+2y+5)^2 = (z^2+2z+5)^2\end{array}\right| \Rightarrow (x^2+2x+5)^2 = (z^2+2z+5)^2$

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ "$\sim$" este tranzitivă

Din (i), (ii), (iii) rezultă că "$\sim$" este relație de echivalență pe $\mathbb{R}$

(b) Determinați clasa de echivalență $\hat{0}$.

GPT

Trebuie să det. clasa de echivalență a lui 0, adică toate valorile $y \in \mathbb{R}$ pentru care $y \sim 0$

Asta înseamnă să rezolvăm ecuația:

$$(x^2+2x+5)^2 = (y^2+2y+5)^2$$

Pentru $x=0$, avem $\quad 5^2 = (y^2+2y+5)^2$

$$(y^2+2y+5)^2 = 25$$

$$y^2+2y+5 = \pm 5$$

1] $y^2+2y+5=5 \Leftrightarrow y(y+2)=0 \Rightarrow y=0$ sau $y=-2$

2] $y^2+2y+5=-5$

$y^2+2y+5=0$

$\Delta = 4-20=-15<0 \Rightarrow$ nu are sol. $\Rightarrow$ semnul este pozitiv pe tot domeniul

Cum $y^2+2y+5>0 \ \forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow y^2+2y+5=-5$ nu are sol.

Deci, clasa de echivalență a lui 0 este formată din elementele $y \in \mathbb{R}$ pentru care $y=0$ sau $y=-2$.

Astfel, clasa de echivalență a lui 0 este $\{0, -2\}$

(c) Det. un sistem de reprezentanți pentru ~.

Fie ~ o rel. de echivalență pe A.

O familie de elemente $(a_i)_{i\in I}$ ale lui A s.n.

sistem de reprezentanți pentru ~ dacă:

(i) $\forall i \neq j \in I$ avem că $a_i \nsim a_j$ (a_i nu este echivalent cu a_j)

(ii) $\forall a \in A, \exists i \in I$ a.î. $a \sim a_i$

Putem prescurta astfel:

$\forall a \in A$, ~~...~~ $\exists! i \in I$ a.î. $a \sim a_i$

Sistemul de reprezentanți pt. o clasă de echiv. este un set care conține exact câte un element din fiecare clasă de echivalență, adică un set care include un reprezentant unic pentru fiecare clasă de echivalență.

Practic, dacă iei un elem. din fiecare clasă de echiv. vei forma un sistem de reprezentanți.

Trebuie să identificăm câte un reprezentant pt. fiecare clasă de echiv. generată de relația:

$x \sim y$ dacă $(x^2+2x+5)^2 = (y^2+2y+5)^2$

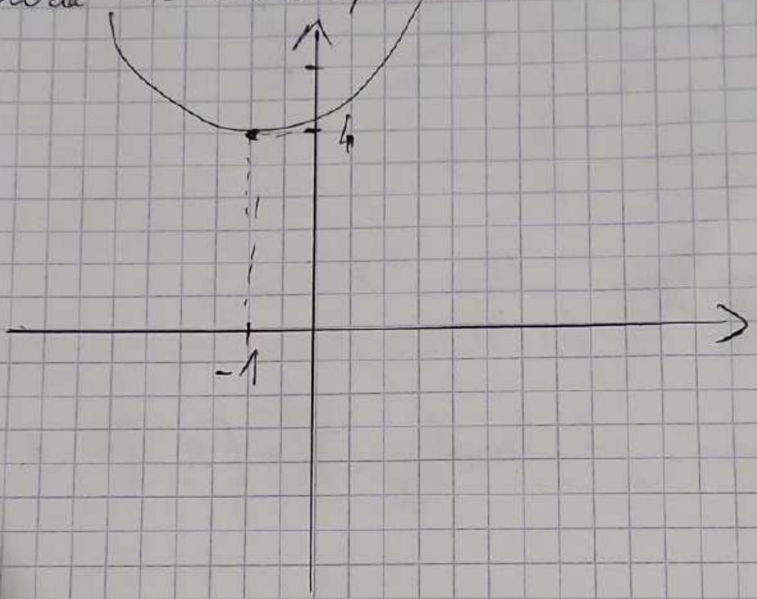
Din (-), clasa de echiv. a lui 0 este $\{0,-2\}$, care sunt constante

Deci putem găsi soluții folosind $(x^2+2x+5)^2 = c$

Vârful parabolei $x^2+2x+5=0$ este $(-1, 4)$

$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

Deci val. minimă a acestei fct. este 4 și crește pe măsură ce se îndepărtează de -1



Deci c poate varia de la $c^2=4^2=16$ la infinit

Vom lua fiecare valoare posibilă a lui c și vom det. valorile lui x care generează acea valoare.

- Pentru $c=16$, $x^2+2x+5=4 \Leftrightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1$
- Pentru $c>16$, $x^2+2x+5=\sqrt{c}$ poate avea 2 sol. distincte, dar o vom alege, de ex., pe cea mai mare.

Astfel, un sistem de reprezentanți poate fi:

$\{-1\} \cup \{$soluții unice pentru fiecare $c>16\}$

② a) Notăm cu n = ordinul elem. $(\hat{3}, \bar{4})$ din grupul $G = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{12}$

Aflați n și câte elemente din G au ordinul n.

$$ord_{\mathbb{Z}_m}(\hat{a}) = \frac{m}{(m, a)}$$

$$ord(\hat{x}, \bar{y}) = [ord_{\mathbb{Z}_n}(\hat{x}), ord_{\mathbb{Z}_m}(\bar{y})]$$

$$ord_{\mathbb{Z}_9}(\hat{3}) = \frac{9}{(9,3)} = \frac{9}{3} = 3$$

$$ord_{\mathbb{Z}_{12}}(\bar{4}) = \frac{12}{(12,4)} = \frac{12}{4} = 3$$

$$ord_G(\hat{3}, \bar{4}) = [ord_{\mathbb{Z}_9}(\hat{3}), ord_{\mathbb{Z}_{12}}(\bar{4})] = [3, 3] = 3$$

Deci $\boxed{n = 3}$

$$[ord_{\mathbb{Z}_9}(a), ord_{\mathbb{Z}_{12}}(b)] = 3 \Rightarrow (ord_{\mathbb{Z}_9}(a), ord_{\mathbb{Z}_{12}}(b)) = \{(3,1), (3,3), (1,3)\}$$

$$ord_{\mathbb{Z}_9}(a) = \frac{9}{(9,a)} = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{(9,a)} = 1 \Leftrightarrow (9,a) = 3 \Rightarrow a = \{\hat{3}, \hat{6}\}$$

$$ord_{\mathbb{Z}_9}(a) = \frac{9}{(9,a)} = 1 \Leftrightarrow (9,a) = 9 \Rightarrow a = \{\hat{9}\} = \{\hat{0}\}$$

$$ord_{\mathbb{Z}_{12}}(b) = \frac{12}{(12,b)} = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{(12,b)} = 1 \Leftrightarrow (12,b) = 4 \Rightarrow b = \{\bar{4}, \bar{8}\}$$

$$ord_{\mathbb{Z}_{12}}(b) = \frac{12}{(12,b)} = 1 \Leftrightarrow (12,b) = 12 \Rightarrow b = \{\bar{12}\} = \{\bar{0}\}$$

c.m.m.d.c $(m,0)$ nu există, de aici și tăieturile de mai sus.

Deci, pentru ca $[ord_{\mathbb{Z}_9}(a), ord_{\mathbb{Z}_{12}}(b)] = 3$ trebuie

să avem $ord_{\mathbb{Z}_9}(a) = 3 \Rightarrow a = \{\hat{3}, \hat{6}\}$

și

$ord_{\mathbb{Z}_{12}}(b) = 3 \Rightarrow b = \{\bar{4}, \bar{8}\}$

Astfel, $(ord_{\mathbb{Z}_9}(a), ord_{\mathbb{Z}_{12}}(b)) = \{(\hat{3}, \bar{4}), (\hat{3}, \bar{8}), (\hat{6}, \bar{4}), (\hat{6}, \bar{8})\}$

Răspuns: 4 elemente

b) Considerăm permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 7 & 1 & 9 & 2 & 6 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_9$$

Calculați σ^{2024}.

$\sigma = (1\ 8\ 3)(2\ 7\ 4\ 9\ 5)$

$ord(\sigma) = [3, 5] = 15$

$$\sigma^{2024} = \sigma^{15 \cdot 134 + 14} = \underbrace{(\sigma^{15})}_{e.m.}{}^{134} \cdot \sigma^{14} = e^{134} \cdot \sigma^{14} = \sigma^{14} =$$

$$= (1\ 8\ 3)^{14}(2\ 7\ 4\ 9\ 5)^{14} = (1\ 8\ 3)^{3 \cdot 4 + 2}(2\ 7\ 4\ 9\ 5)^{5 \cdot 2 + 4}$$

$$= (1\ 8\ 3)^{2}(2\ 7\ 4\ 9\ 5)^{4} = (1\ 3\ 8)(2\ 5\ 9\ 4\ 7)$$

③ Det. acei $x \in \mathbb{Z}$ pt care au loc simultan relațiile:

$$\begin{cases} x \equiv 8 \bmod 9 \\ x \equiv 1 \bmod 5 \\ x \equiv 3 \bmod 14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \bmod m_1 \\ x \equiv a_2 \bmod m_2 \\ \vdots \\ x \equiv a_n \bmod m_n \end{cases}$$

$M = m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$

$M_k = \frac{M}{m_k}$

$N_1 = (m_2 \cdot m_3)^{-1} (\bmod m_1)$

$N_2 = (m_1 \cdot m_3)^{-1} (\bmod m_2)$

$N_3 = (m_1 \cdot m_2)^{-1} (\bmod m_3)$

$x = a_1 M_1 N_1 + a_2 M_2 N_2 + a_3 M_3 N_3$

x va fi ceva de forma: $\underset{a}{\underline{263}} + \underset{b}{\underline{105}} K$

Rezolvare:

$M = 9 \cdot 5 \cdot 14 = \underline{630}$

I) $M_1 = \frac{630}{9} = 70$

$M_2 = \frac{9 \cdot \cancel{5} \cdot 14}{\cancel{5}} = 126$

$M_3 = \frac{9 \cdot 5 \cdot 14}{14} = 45$

II) $N_1 = (5\cdot 14)^{-1} \pmod 9 = 4$

~~$5\cdot 14 = 70$~~ ~~$\Rightarrow 70 \equiv 7 \pmod 9$~~

~~$\frac{70}{9} = 7$ rest 7~~

$5\cdot 14 = 70$

$\frac{70}{9} = 7$ rest 7

$7\cdot 4 \mid 9$
27

$7\cdot 4 = 28 \mid 9$
$27 \quad 3 \text{ r } 1$
1

Calculez $\underbrace{7x \equiv 1 \bmod 9}$

7 ori cât împărțit la 9 dă restul 1?

$\boxed{x = 4}$

$N_2 = (9\cdot 14)^{-1} \pmod 5 = 6$

$9\cdot 14 = 126$

$\frac{126}{5} = 25$ rest 1

Calculez $x \equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow \boxed{x = 6}$

$N_3 = (9\cdot 5)^{-1} \pmod{14} = 19$

~~$3\cdot 9 \quad 29 \mid 14$~~
~~$28 \quad 2 \text{ r } 1$~~

$3\cdot 19 = 57 \mid 14$
$56 \quad \ldots$

$9\cdot 5 = 45$

$\frac{45}{14} = 3$ rest 3

Calculez $3x \equiv 1 \pmod{14}$

$\boxed{x = 19}$

III) $x = a_1 M_1 N_1 + a_2 M_2 N_2 + a_3 M_3 N_3$
$= 8 \cdot 20 \cdot 4 + 1 \cdot 126 \cdot 6 + 3 \cdot 45 \cdot 19 = 5561$

Termenii pentru care relațiile din sistemul dat au loc simultan sunt de forma
$x = 5561 + 630k$

4) Arătați că polinomul $x^4 + x + 2$ este ireductibil în $\mathbb{Q}[x]$

Criteriul lui Eisenstein
Avem un polinom $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$
Polinomul $P(x)$ este ireductibil dacă există un număr prim p care îndeplinește:
1) p divide toți coeficienții lui $P(x)$, cu excepția termenului de grad maxim (a_n)
2) p nu divide coeficientul termenului de grad maxim (a_n)
3) p^2 nu divide coeficientul termenului liber (a_0)

Polinomul nostru este $P(x) = x^4 + x + 2$
Coeficienți: 1 0 0 1 2
Nu există p prim care să satisfacă cele 3 condiții, deci criteriul Eisenstein nu se aplică.