# Методические указания к курсовой работе по дисциплине "Информатика".

М.П. Белов
А.К. Пожидаев
А.Н. Прокшин
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ"

# 1 Задание на курсовую работу

**Цель курсовой работы:** уметь применять персональный компьютер и математические пакеты прикладных программ в инженерной деятельности.

**Тема курсовой работы:** решение математических задач с использованием математического пакета "Scilab"или "Reduce-algebra".

**Содержание курсовой работы:**

1. Даны функции $f(x) = \sqrt{3}sin(x) + cos(x)$ и $g(x) = cos(2x + \pi/3) - 1$
   (a) Решить уравнение $f(x) = g(x)$.
   (b) Исследовать функцию $h(x) = f(x) - g(x)$ на промежутке $[0; (5\pi)/6]$.

2. Найти коэффициенты кубического сплайна, интерполирующего данные, представленные в векторах $V_x$ и $V_y$ (смотри приложение 1).

   Построить на графике функцию $f(x)$, полученную после нахождения коэффициентов кубического сплайна.

   Представить графическое изображение результатов интерполяции исходных данных различными методами с использованием встроенных функций `splin(x,y,"natural")`, `splin(x,y,"clamped")`, `splin(x,y,"not_a_knot")`, `splin(x,y,"fast")`, `splin(x,y,"monotone")` и `interp(xx, x, y, d)`.

3. Решить задачу оптимального распределения неоднородных ресурсов [5]. На предприятии постоянно возникают задачи определения оптимального плана производства продукции при наличии конкретных ресурсов (сырья, полуфабрикатов, оборудования, финансов, рабочей силы и др.) или проблемы оптимизации распределения неоднородных ресурсов на производстве. Рассмотрим несколько возможных примеров постановки таких задач.

   **Постановка задачи А** (варианты 1 – 12). Для изготовления **n** видов изделий $\mathbf{И_1}$, $\mathbf{И_2}$, ... , $\mathbf{И_n}$ необходимы ресурсы **m** видов: трудовые, материальные, финансовые и др. Известно требуемое количество отдельного **i**-го ресурса для изготовления каждого **j**-го изделия. Назовем эту величину нормой расхода $\mathbf{c_{ij}}$. Пусть определено количество каждого вида ресурса, которым предприятие располагает в данный момент, – $\mathbf{a_i}$. Известна прибыль $\mathbf{П_i}$, получаемая предприятием от изготовления каждого **j**-го изделия. Требуется определить, какие изделия и в каком количестве должны производиться предприятием, чтобы прибыль была максимальной.

**Постановка задачи B** (варианты 13 – 25). Пусть в распоряжении завода железобетонных изделий (ЖБИ) имеется m видов сырья (песок, щебень, цемент) в объемах $\mathbf{a_i}$. Требуется произвести продукцию $\mathbf{n}$ видов. Дана технологическая норма $\mathbf{c_{ij}}$ потребления отдельного $\mathbf{i}$-го вида сырья для изготовления единицы продукции каждого $\mathbf{j}$-го вида. Известна прибыль $\mathbf{\Pi_j}$, получаемая от выпуска единицы продукции $\mathbf{j}$-го вида. Требуется определить, какую продукцию и в каком количестве должен производить завод ЖБИ, чтобы получить максимальную прибыль. Исходные данные для вариантов 1, ..., 12 представлены в приложении 2, табл. 1.1 – 1.12, а для вариантов 13 – 25 представлены в приложении 2, табл. 1.13 – 1.25

Варианты данных для выполнения этого задания курсовой работы приведены в приложении 2.

# 2 Основные требования к оформлению отчета

Отчет по работе предъявляется на проверку в виде пояснительной записки, включая распечатки с исходными данными, математическими выражениями и результатами расчетов.

Элементы отчета приводятся в следующем порядке: титульный лист (см. приложение 3), содержание, список обозначений и сокращений, задание, введение, разработка алгоритма, распечатка программы, анализ результатов вычислений, выводы, список литературы.

Во введении излагаются цели, задачи и (кратко) содержание работы. Алгоритм разрабатывается в терминах исходной задачи и представляется в виде последовательности операторов расчета. В выводах следует отразить основные особенности и преимущества использования математических пакетов применительно к решению задач рассматриваемого класса.

Пример оформления отчета в формате ЕСКД приведен в приложении 3 и 4

# 3 Вывод уравнения сплайна

## 3.1 Производная по направлению. Связь производной по направлению с частной производной.

Рассмотрим функцию $f$, заданную на некотором линейном пространстве аргументов. Линейное пространство аргументов может быть конечной размерности $N$, может быть бесконечной, но счетной размерности(каждой размерности можно присвоить какое либо целое число), а может быть быть размерности, больше чем счетной (т.е. когда нельзя найти способ присвоить каждой размерности целое число).

От линейного пространства аргументов требуется, чтобы в нем была определена длина вектора $\| \vec{a} \|$. (Знак $\| \; \|$ используется для обозначения длины вектора ). В векторном пространстве аргументов может быть **не определено скалярное произведение**, а значит и не определен и угол между векторами. (В том случае, когда скалярное произведение определено, длина вектора $\vec{a}$ определяется как $\| \vec{a} \| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{|\vec{a}|^2} = |\vec{a}|$ и угол между векторами определяется через равенство $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot Cos\alpha$). Кроме того, если в пространстве не определен угол, значит нет понятия ортогональности векторов, которое соответствует углу с величиной $\pi/2$.

Определим производную функции $f$ в точке $\vec{x}$ по направлению $\vec{h}$ следующим образом:

$$D_{\vec{h}} f(\vec{x}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{x} + t\vec{h}) - f(\vec{x})}{t}$$

Значение этого выражения показывает, как быстро меняется значение функции при сдвиге аргумента в направлении вектора $\vec{h}$. Отметим, что если изменение аргумента будет происходить в разных направлениях, то при этом, в общем случае, изменение значения функции будет различным.

Если в пространстве аргументов введено скалярное произведение, и если в пространстве аргуметнов введены ортогональные оси, и если направление $\vec{h}$ сонаправлено с одной из осей, то производная по направлению совпадает с частной производной по этой оси, которая в случае $n$-мерного пространства аргументов определяется как:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_k + \Delta x, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{\Delta x}.$$

**Примечание:** Можно пользоваться статьей из википедии

`http://ru.wikipedia.org/wiki/Производная_по_направлению`

но следует учитывать, что авторы википедии рассматривают только конечномерное пространство аргументов с введенным в нем скалярным произведением и, тем самым, сужают определение производной по направлению только на такие пространства аргументов.

## 3.2 Понятие вариации функционала.

**Определение:** Функционалом $V$ называется функция, определенная на некотором пространстве функций $Y$. Аргументом функционала $V$ является функция $f$ из пространства $Y$, а областью значений - пространство вещественный чисел $R$. В пространстве аргумента $Y$ определена длина $\| f \|$, иначе ее называют нормой.

В качестве пространства $Y$ мы будем рассматривать множество функций $y(x)$, непрерывных вместе со своими $n-$ми производными на отрезке $[a, b]$.

Приведем пример функционала: $V[y] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$ - длина кривой, описываемой функцией $y(x)$.

В этом случае пространство аргумента функционала $V$ – это множество всех функций $y(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$. Множество значений функционала $V$ – это длины кривых. Значением длины может быть любое вещественное число.

Пусть $\vec{y_0} \in Y$ – произвольная фиксированная точка, $\vec{h} \in Y$ – произвольный элемент $Y$. Рассмотрим функцию вещественной переменной $t$: $\Phi(t) \equiv V[\vec{y_0} + t \cdot \vec{h}]$, $t$ – вещественное число.

**Определение:** Если существует

$$\Phi'(t)_{t=0} = \frac{d}{dt} V \left[\vec{y}_0 + t\vec{h}\right]_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{V[\vec{y}_0 + t\vec{h}] - V[\vec{y}_0]}{t} \tag{1}$$

для любого $\vec{h} \in Y$ то эта производная называется вариацией функционала $V$ в точке $\vec{y}_0$ и обозначается $\delta V(\vec{y}_0, \vec{h})$. Заметим, что предел в правой части выражения совпадает с определением производной по направлению, введенной в предыдущем параграфе. Значит, вариация функционала есть ни что иное, как производная по направлению.

## 3.3 Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закреплёнными концами).

Будем рассматривать множество функций $Y'$, непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a, b]$, таких что $y_a = y_0, y_b = y_1$. Тем самым, рассматривается множество непрерывно дифференцируемых на $[a, b]$ функций, у которых известны значения на концах отрезка (концы закреплены).

Будем рассматривать функционал

$$V[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx$$

Простейшая задача вариационного исчисления (задача с закрепленными концами): найти экстремум этого функционала на множестве $Y'$.

Необходимое условие существования экстремума функции $f$ одной переменной в точке $x_0$ состоит в том, что производная функции в точке экстремума должна быть равна 0. Аналогично, для того чтобы найти экстремум функционала, мы должны найти точку $y_0$, которая в данном случае является функцией $y_0(x)$, в которой вариационная производная $\delta V(\vec{y}_0, \vec{h})$ равна 0.

Получим необходимое условие для задачи с закрепленными концами. Для этого посчитаем вариацию

$$\delta V(y_0, h) = \frac{d}{dt} V\left[y + th\right]_{t=0}$$

Сначала вычислим производную $\frac{d}{dt} V\left[y + th\right] = \frac{d}{dt} \int\limits_a^b F(x, y + th, y' + th')dx$, предполагая, что функция $F$ имеет все необходимые для этого непрерывные частные производные. Относительно функции $h(x)$ потребуем, чтобы $y(x) + th(x) \in Y'$. Отсюда $h$ непрерывно диффиренцируема и $h(a) = 0, h(b) = 0$. Перейдем к вычислению производной

$$\frac{d}{dt} V\left[y + th\right] = \int\limits_a^b \left[F_y(x, y + th, y' + th')h + F_{y'}(x, y + th, y' + th')h'\right] dx$$

Полагая $t = 0$ и приравнивая нулю получившуюся вариацию, получаем, что для функции $y$, на которой достигается экстремум, имеет место

$$\delta V(y, h) = \int\limits_a^b \left[F_y(x, y, y')h + F_{y'}(x, y, y')h'\right] dx = 0$$

Разобьем интеграл на два и проинтегрируем по частям второй:

$$\int\limits_a^b F_{y'} h' dx = \underbrace{F_{y'} h\Big|_a^b}_{=0} - \int\limits_a^b \frac{d}{dx} F_{y'} h dx$$

Подстановка $F_{y'} h\Big|_a^b = 0$, так как $h(a) = h(b) = 0$. Объединяя оба интеграла в один, получаем

$$\int\limits_a^b \left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) h dx = 0.$$

Если этот интеграл равен нулю для любой непрерывно дифференцируемой функции $h$, обращающейся в нуль на концах отрезка $h(a) = h(b) = 0$, то

$$\left(F_y - \frac{d}{dx} F_{y'}\right) \equiv 0$$

Поэтому в качестве необходимого условия экстремума для задачи с закрепленными концами мы получаем следующую краевую задачу для **уравнения Эйлера**:

$$\begin{cases} \left(F_y - \frac{d}{dx}F_{y'}\right) = 0 \\ \\ y(a) = y_0, y(b) = y_1 \end{cases}$$

### 3.4 Уравнение Эйлера для металлической линейки (сплайна)

Рассмотрим металлическую линейку, проходящую через заданные точки с координатами $x_i, y_i$. Из законов физики известно, что тело стремится занять положение, обладающее минимумом энергии. В нашем случае, поскольку линейка не движется, необходимо рассмотреть потенциальную энергию согнутой пружины. Будем искать уравнение сплайна в виде функции $y(x)$ Из курса математики известно, что изгиб функции пропорционален второй производной функции $y^{''}(x)$. Заметим, что вторая производная может принимать и положительные и отрицательные значения. Потенциальная энергия согнутой линейки не может быть отрицательной. Значит потенциальная энергия согнутой линейки пропорциональна $\left(y^{''}(x)\right)^2$.

Итак, мы получили, что потенциальная энергия согнутой линейки (сплайна) представляется в виде функционала:

$$V[y^{''}] = \int\limits_a^b F(y^{''})dx = \int\limits_a^b \left(y^{''}(x)\right)^2 dx$$

К этому нужно добавить граничные условия в точках $a, b$:

$$\begin{cases} C_{1a}y(a) + C_{2a}y^{'}(a) = C_{3a} \\ C_{1b}y(b) + C_{2b}y^{'}(b) = C_{3b} \end{cases}$$

Поступая так же, как и в задаче с закрепленными концами, решение которой приведено в предыдущем параграфе, дважды интегрируя по частям и подставляя граничные условия в подстановках, получаем уравнение

$$\frac{d^2}{dx^2}F_{y''} = 0$$

Отсюда, взяв вторую производную по $x$ от сложной функции получаем для уравнения сплайна условие

$$y^{IV} = 0$$

# 4 Уравнение сплайна.

Найдем уравнение сплайна проходящего через четыре точки $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$ и $(x_4, y_4)$. Для того чтобы потенциальная энергия изогнутой металлической линейки(сплайна) принимала минимальное значение, производная четвертого порядка должна быть равна нулю, значит мы можем представить сплайн полиномом третьей степени на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$

$$F_i(x) = A_{i0} + A_{i1}x + A_{i2}x^2 + A_{i3}x^3, \text{ где } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Найдем коэффициэнты $A_{ij}$ исходя и того, что в точках склейки функция не имеет разрывов, изломов и изгиб ее слева и справа совпадает. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ график $F_i(x)$ проходит через точки $y_i$, $y_{i+1}$ или $F_i(x_i) = y_i$, $F_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Записывая равенства через коэффициэнты $A_{ij}$ :

$$y_i = A_{i0} + A_{i1}x_i + A_{i2}x_i^2 + A_{i3}x_i^3$$

получаем 8 уравнений:

$$\begin{aligned}
y_1 &= A_{10} + A_{11}x_1 + A_{12}x_1^2 + A_{13}x_1^3 \\
y_2 &= A_{10} + A_{11}x_2 + A_{12}x_2^2 + A_{13}x_2^3 \\
y_2 &= A_{20} + A_{21}x_2 + A_{22}x_2^2 + A_{23}x_2^3 \\
y_3 &= A_{20} + A_{21}x_3 + A_{22}x_3^2 + A_{23}x_3^3 \\
y_3 &= A_{30} + A_{31}x_3 + A_{32}x_3^2 + A_{33}x_3^3 \\
y_4 &= A_{30} + A_{31}x_4 + A_{32}x_4^2 + A_{33}x_4^3
\end{aligned}$$

Производные первого порядка во внутренних точках $x_i$ должны совпадать, т.е. производная слева $F_i^{'}(x_i) = A_{i1} + 2A_{i2}x_i + 3A_{i3}x_i^2$ должна быть равна производной справа $F_{i+1}^{'}(x_i) = A_{(i+1)1} + 2A_{(i+1)2}x_i + 3A_{(i+1)3}x_i^2$. Физический смысл равенства производных состоит в том, что в точках склейки у нас нет излома сплайна.

$$\begin{gathered}
A_{11} + 2A_{12}x_2 + 3A_{13}x_2^2 = A_{21} + 2A_{22}x_2 + 3A_{23}x_2^2 \\
A_{21} + 2A_{22}x_3 + 3A_{23}x_3^2 = A_{31} + 2A_{32}x_3 + 3A_{33}x_3^2
\end{gathered}$$

Производные второго порядка в точках склейки $x_i$ должны совпадать, вторая производная слева $F_i^{''}(x_i) = 2A_{i2} + 6A_{i3}x_i$ должна быть равна второй производной справа $F_{i+1}^{''}(x_i) = 2A_{(i+1)2} + 6A_{(i+1)3}x_i$. Физический смысл равенства вторых производных в том, что в точках склейки изгиб сплайна справа и слева должен быть одинаковым.

$$\begin{gathered}
2A_{12} + 6A_{13}x_2 = 2A_{22} + 6A_{23}x_2 \\
2A_{22} + 6A_{23}x_3 = 2A_{32} + 6A_{33}x_3
\end{gathered}$$

Еще два уравнения получаем из граничных условий в крайних точках $x_1, x_n$:

$$C_{11}F'(x_1) + C_{12}F''(x_1) = C_{13}$$
$$C_{n1}F'(x_n) + C_{n2}F''(x_n) = C_{n3}$$

Чтобы понять физический смысл гранчных условий рассмотрим два примера:

1) концы сплайна жестко закреплены под определенным углом. в этом случае граничные условия принимают вид

$$F'(x_1) = \alpha_1$$
$$F'(x_n) = \alpha_n$$

иными словами, угол, под которым закреплен левый конец сплайна в точке $x_1$ равен $\alpha_1$, угол, под которым закреплен правый конец сплайна в точке $x_n$ равен $\alpha_n$.

2) концы сплайна оставлены свободными в крайних точках $(x_1, y_1), (x_n, y_n)$. В этом случае изгиба в крайних точках нет и, значит, вторая производная в этих точках равна 0.

$$F''(x_1) = 0$$
$$F''(x_n) = 0$$

Найдем график сплайна в случае, когда концы сплайна оставлены свободными в граничных точках $(x_1, y_1), (x_4, y_4)$. Это дает нам уравнения:

$$2A_{12} + 6A_{13}x_1 = 0$$
$$2A_{32} + 6A_{33}x_4 = 0$$

Тем самым, у нас получилось 12 уравнений для определения 12 коэффициэнтов $A_{ij}$.

$$\begin{pmatrix}
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2x_2 & 3x_2^2 & 0 & -1 & -2x_2 & -3x_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 6x_2 & 0 & 0 & -2 & -6x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2x_3 & 3x_3^2 & 0 & -1 & -2x_3 & -3x_3^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x_3 & 0 & 0 & -2 & -6x_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \\
0 & 0 & 2 & 6x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6x_4
\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{20} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{30} \\ A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \\ 0 \\ y_2 \\ y_3 \\ 0 \\ 0 \\ y_3 \\ y_4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

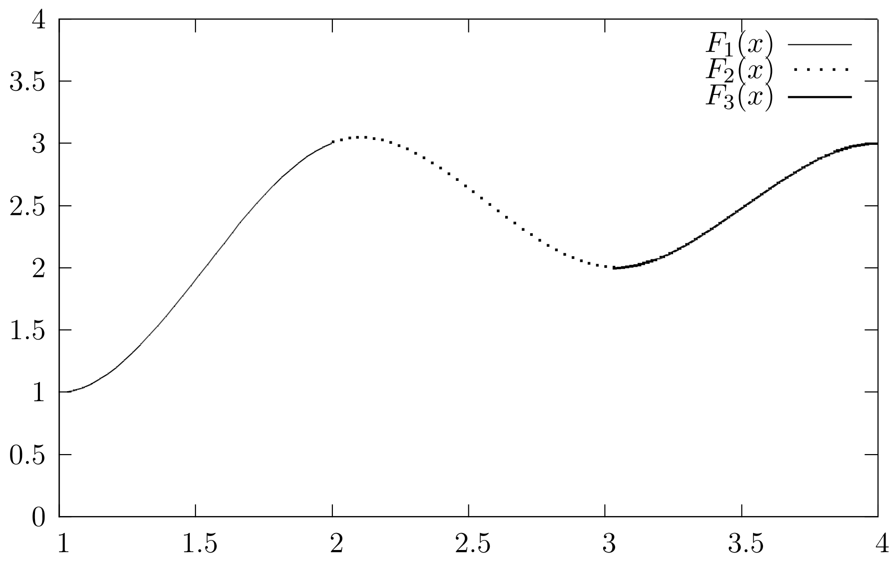
Решая уравнение, получаем значение для коэффициэнтов $A_{ij}$:

$$\begin{pmatrix} A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{20} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{30} \\ A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{47}{5} \\ -20 \\ \frac{74}{5} \\ \frac{-16}{5} \\ -37 \\ \frac{248}{5} \\ -20 \\ \frac{13}{5} \\ \frac{463}{5} \\ -80 \\ \frac{116}{5} \\ \frac{-11}{5} \end{pmatrix}$$

Окончательно, уравнение для сплайна получаем в виде

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) &= -\frac{16}{5}x^3 + \frac{74}{5}x^2 - 20x + \frac{47}{5}, \quad \text{где } x \in [1,2], \\ F_2(x) &= \frac{13}{5}x^3 - 20x^2 + \frac{248}{5}x - 37, \quad \text{где } x \in [2,3], \\ F_3(x) &= -\frac{11}{5}x^3 + \frac{116}{5}x^2 - 80x + \frac{463}{5}, \quad \text{где } x \in [3,4] \end{cases}$$

График функции $F(x)$ представлен ниже




## 5 разделённые разности

В ссылке [3] дается понятие разделённых разностей.

функция $f$ задана на множестве попарно различных точек $x_0, \ldots, x_n \in X$.

Тогда разделённой разностью нулевого порядка функции $f$ в точке $x_j$ называют значение $f(x_j)$, а разделённую разность порядка $k$ для системы точек $(x_j,\ x_{j+1},\ \ldots,\ x_{j+k})$ определяют через разделённые разности порядка $(k-1)$ по формуле

$$f(x_j;\ x_{j+1};\ \ldots;\ x_{j+k-1};\ x_{j+k}) = \frac{f(x_{j+1};\ \ldots;\ x_{j+k-1};\ x_{j+k}) - f(x_j;\ x_{j+1};\ \ldots;\ x_{j+k-1})}{x_{j+k} - x_j}$$

в частности,

$$f(x_0;\ x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0},$$

$$f(x_0;\ x_1;\ x_2) = \frac{f(x_1;\ x_2) - f(x_0;\ x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0},$$

$$f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_{n-1};\ x_n) = \frac{f(x_1;\ \ldots;\ x_{n-1};\ x_n) - f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_{n-1})}{x_n - x_0}.$$

Для разделённой разности верна формула

$$f(x_0;\ x_1;\ \ldots;\ x_n) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{n} (x_j - x_i)},$$

в частности,

$$f(x_0;\ x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1},$$

$$f(x_0;\ x_1;\ x_2) = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)}.$$

## 6 интерполяционный полином Лагранжа

Лагранж, Жозеф Луи предложил для интерполяции использовать многочлен вида:

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

где базисные полиномы определяются по формуле:

$$l_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

где $l_i(x)$ обладают следующими свойствами:

- являются многочленами степени $n$
- $l_i(x_i) = 1$
- $l_i(x_j) = 0$ при $j \neq i$

## 7 оценка погрешности при интерполяции полиномом Лагранжа

В работе [2] (стр.32) дается строгая оценка погрешнисти при интерполяции полиномом Лагранжа.

Погрешность удобно представить в следующем виде [1] :

$$y(x) - \mathcal{P}_n(x) = \omega_n(x) r(x), \qquad \omega_n(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \tag{2}$$

ибо эта погрешность заведомо равна нулю во всех узлах интерполяции. Введем вспомогательную функцию $q(\xi) = y(\xi) - \mathcal{P}_n(x) - \omega_n(x) r(x)$, где $x$ играет роль параметра и принимает любое фиксированное значение. Очевидно, $q(\xi) = 0$ при $\xi = x_0, x_1, ...x_n$ и при $\xi = x$, т.е. обращается в нуль в $n+2$ точках.

Предположим, что $y(x)$ имеет в $n+1$ непрерывную производную; тогда то же справедливо для $q(\xi)$. Между двумя нулями гладкой функции лежит нуль её производной. Последовательно применяя это правило, получим, что между крайними из $n+2$ нулей функции лежит $n+1$ нуль производной. Но $q^(n+1)(\xi) = y^(n+1)(\xi) - (n+1)! r(x)$, [2] и если в какой-то точке $\xi^*$, лежащей между указанными выше нулями, она обращается в нуль, то $r(x) = y^(n+1)(\xi^*)/(n+1)!$. Заменяя погрешность (2) максимально возможной, получаем оценку погрешности:

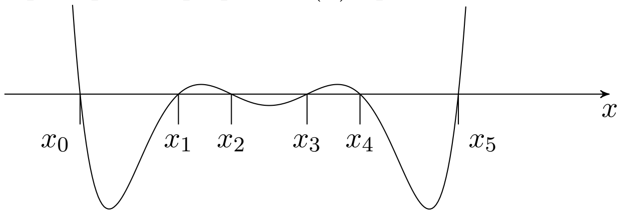
$$\mid y(x) - \mathcal{R}_n(x) \mid \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \mid \omega_n(x) \mid, \qquad M_{n+1} = max \mid y^{(n+1)}(\xi) \mid$$

Обратим внимание, что $x$ не обязательно должно лежать в интервале $[x_0, x_n]$, а может лежать и вне интервала.

[1] $\mathcal{P}_n(x)$ – интерполяционный полином Лагранжа

[2] выражение $y^{(n)}(x)$ означает $n-$ую производную функции $y(x)$

Примерный график $\omega_n(x)$ при $n = 5$




## 8 теорема о среднем(вариант)

Для непрерывных функций если $f(x) \in C[a, b]$ и величины $\alpha$ и $\beta$ имеют одинаковые знаки, то

$$\alpha f(a) + \beta f(b) = (\alpha + \beta) f(\xi), \qquad a \leq \xi \leq b$$

При $f(a) = f(b)$ это очевидно. Если $f(a) \neq f(b)$, то функция $\psi(x) = \alpha f(a) + \beta f(b) - (\alpha + \beta) f(x))$ принимает на концах отрезка $[a,\ b]$ значения разных знаков и, следовательно, существует точка $\xi \in [a,\ b]$, в которой $\psi(x) = 0$.

## 9 разложение по формуле Тейлора

Будем рассматривать класс $C_k[a, b]$ функций, имеющих на $[a, b]$ непрерывную производную $k-$го порядка. Такие функции разложимы по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)(x-a)}{1!} + ... + \frac{f^{(k-1)}(a)(x-a)^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{f^{(k)}(\xi)(x-a)^k}{k!}$$

где $\xi$ – некоторая точка из промежутка $[a, x]$.

## 10 линейная аппроксимация

**вопрос:** для чего мы находили полином Лагранжа.

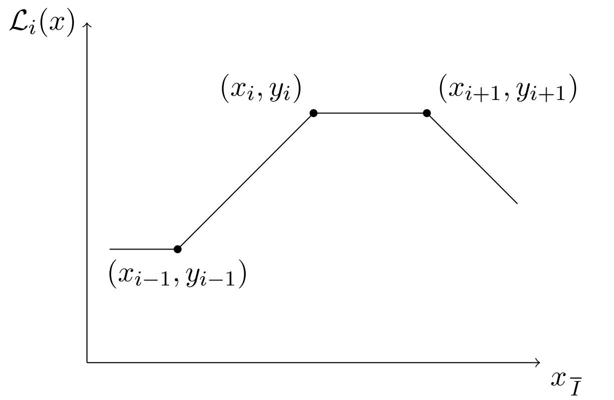
**ответ:** для оценки погрешности при интерполяции полиномом $n-$ой степени, где полином проходит через все точки $(x_i,\ y_i)$, $i \in 1, ..., n+1$. В случае сплайн-интерполяции интерполяция проводится полиномом третьей степени, и есть отличие: на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}$ полином проходит только через две точки $(x_i,\ y_i)$ и $(x_{i+1},\ y_{i+1})$

Функция $\mathcal{L}$ - кусочно-линейная функция, со значениями $f_i$ в точках с координатами $x_i$, иначе эта функция называется *интерполяциолнный сплайн первой степени*

*Интерполяционный сплайн* определяется условиями

$$\mathcal{L}(x_i) = f_i, \qquad i = 0, ..., N \tag{3}$$

Геометрически он представляет собой ломанную, проходящую через точки $(x_i,\ y_i)$, где $y_i = f_i$



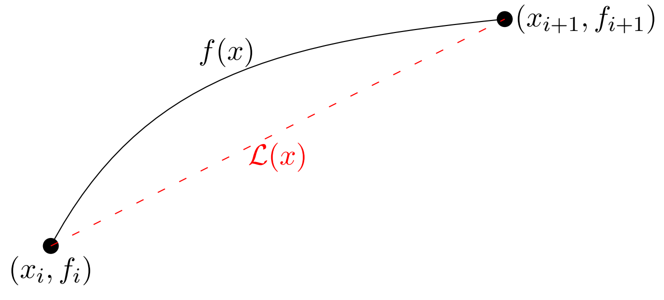

Если обозначить $h_i = x_{i+1} - x_i$, то при $x \in [x_i, x_{i+1}]$ уравнение сплайна первой степени будет иметь вид

$$\mathcal{L}(x) = f_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + f_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} \tag{4}$$

или

$$\mathcal{L}(x) = f_i + \frac{x - x_i}{h_i}(f_{i+1} - f_i) \tag{5}$$

вернемся к предпоследнему рисунку на доске:




Получим оценку разности $\mathcal{R}(x) =\mid \mathcal{L}(x) - f(x) \mid$.
Взяв для $\mathcal{L}$ представление при $x \in [x_i, x_{i+1}]$

$$\mathcal{L}(x) = (1 - t) f_i + t f_{i+1}, \qquad \text{где } t = (x - x_i)/h_i$$

$$\mathcal{R}(x) = \mathcal{L}(x) - f(x) = (1 - t) f_i + t f_{i+1} - f(x) \tag{6}$$

Пусть $f(x) \in C[a, b]$ непрерывна.
применяя к выражению $(1 - t) f_i + t f_{i+1}$ теорему о среднем, получаем

$$\mathcal{R}(x) = f(\xi) - f(x), \qquad \xi \in [x_i, x_{i+1}].$$

Следовательно,

$$\mid \mathcal{R}(x) \mid \leq \omega(f),$$

где $\omega(f) = \max\limits_{0<i<N-1} \omega_i f,$ и $\omega_i(f) = \max\limits_{x', x'' \in [x_i, x_{i+i}]} \mid f(x') - f(x'') \mid$

Пусть $f(x)$ достаточно гладкая (производные нужных нам порядков непрерывны). По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f_i = f(x) - th_i f'(\xi), \quad f_{i+1} = f(x) + (1-t)h_i f'(\eta)$$

где $\xi, \eta \in [x_i, x_{i+1}]$ и $t = (x - x_i)/h_i$

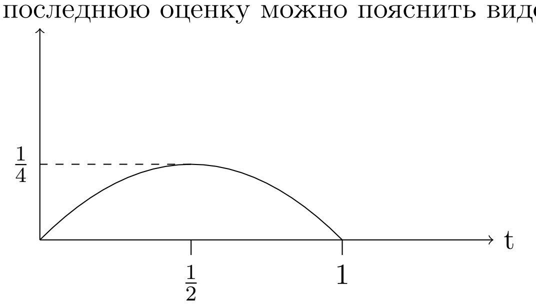
Подставив эти выражения в (6), получаем

$$\mathcal{R}(x) = t(1-t)h_i \left[ f'(\eta) - f'(\xi) \right]$$

Следовательно,

$$\mid \mathcal{R}(x) \mid \leqslant t(1-t)h_i \omega_i(f') \leqslant \frac{1}{4} \bar{h} \omega(f')$$

последнюю оценку можно пояснить видом графика $t(1-t)$:




Наконец, если функция имеет вторую непрерывную производную на отрезке $[a, b]$. По формуле Тейлора

$$f_i = f(x) - th_i f'(x) + \frac{t^2 x_i^2}{f}'' (\xi),$$

$$f_{i+1} = f(x) + (1-t)h_i f'(x) + \frac{(1-t)^2 x_i^2}{f}'' (\eta),$$

Из формулы (6) следует, что

$$\mathcal{R}(x) = (1-t)\frac{t^2 h_i^2}{2} f''(\xi) + t\frac{(1-t)^2 x_i^2}{f}'' (\eta)$$

по теореме о среднем

$$\mid \mathcal{R}(x) \mid \leqslant \frac{1}{2} h_i^2 t(1-t) \mid f''(\xi) \mid \leqslant \frac{1}{8} \bar{h}^2 \mid f''(\xi) \mid$$

## 11 Оценки погрешности интерполяции эрмитовыми кубическими сплайнами

В работе [1] приводятся оценки для функций разных классов. Если $S_3(x)$ эрмитов кубический сплайн интерполирует на сетке функцию f(x) то имеют место оценки

$$| S_3^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) | \leqslant \mathcal{R}_r, r = 0, 1, 2, 3$$

Если функция достаточно гладкая, то

$$| S_3^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) | \leqslant \frac{1}{384} \bar{h}^4 \mid f^{IV}(x) \mid$$

где, $\bar{h} = \left| x_{\substack{\text{точка, в которой} \\ \text{вычисляется} \\ \text{погрешность}}} - x_{\text{ближайшее } i} \right|$

## Приложение 1

| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 |
| 0,25 | 1,6 | 2,6 | 3,6 | 4,6 | 5,6 |
| 1,25 | 2,325 | 3,7 | 4,575 | 5,7 | 6,875 |
| 2,125 | 2,017 | 3,017 | 4,017 | 5,017 | 6,017 |
| 3,25 | 2,833 | 3,333 | 3,833 | 4,333 | 4,833 |

Оценить погрешность интерполяции в точке `x = 2,2`. Вычислить значение функции в точке `x = 1,2`

| x | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 |
| 0,5 | 1,7 | 2,7 | 3,7 | 4,7 | 5,7 |
| 1,4 | 2,325 | 3,7 | 4,575 | 5,7 | 6,875 |
| 2,25 | 2,333 | 3,333 | 4,333 | 5,333 | 6,333 |
| 3,5 | 3,167 | 3,667 | 4,167 | 4,667 | 5,167 |

Оценить погрешность интерполяции в точке `x = 2,4`. Вычислить значение функции в точке `x = 1,4`

| x | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 |
| 0,75 | 1,8 | 2,8 | 3,8 | 4,8 | 5,8 |
| 1,6 | 2,325 | 3,7 | 4,575 | 5,7 | 6,875 |
| 2,375 | 2,5 | 3,5 | 4,5 | 5,5 | 6,5 |
| 3,75 | 3,5 | 4,0 | 4,5 | 5,0 | 5,5 |

Оценить погрешность интерполяции в точке `x = 2,6`. Вычислить значение функции в точке `x = 1,6`

| x | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 |
| 1,0 | 1,9 | 2,9 | 3,9 | 4,9 | 5,9 |
| 1,8 | 2,325 | 3,7 | 4,575 | 5,7 | 6,875 |
| 2,5 | 2,667 | 3,667 | 4,667 | 5,667 | 6,667 |
| 4 | 3,5 | 4,333 | 4,833 | 5,333 | 5,833 |

Оценить погрешность интерполяции в точке `x = 2,8`. Вычислить значение функции в точке `x = 1,8`

| x | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2,0 | 3,0 | 4,0 | 5,0 | 6,0 |
| 1,25 | 1,925 | 2,925 | 3,925 | 4,925 | 5,925 |
| 2,0 | 2,4 | 3,75 | 4,675 | 5,745 | 6,975 |
| 2,625 | 2,7 | 3,72 | 4,8 | 5,695 | 6,725 |
| 4,25 | 3,65 | 4,444 | 4,956 | 5,425 | 5,726 |

Оценить погрешность интерполяции в точке `x = 3,1`. Вычислить значение функции в точке `x = 2,1`

## Приложение 2

Таблица 1. 1

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Трудовые | 3 | 5 | 2 | 7 | 15 |
| Материальные | 4 | 3 | 3 | 5 | 9 |
| Финансовые | 5 | 6 | 4 | 8 | 30 |
| Прибыль, $П_j$ | 40 | 50 | 30 | 20 | |

Таблица 1. 2

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Трудовые | 1 | 3 | 2 | 4 | 12 |
| Материальные | 3 | 4 | 2 | 6 | 10 |
| Финансовые | 6 | 7 | 5 | 6 | 20 |
| Прибыль, $П_j$ | 30 | 60 | 20 | 30 | |

Таблица 1. 3

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Трудовые | 3 | 5 | 5 | 3 | 11 |
| Материальные | 4 | 5 | 8 | 5 | 8 |
| Финансовые | 5 | 6 | 4 | 8 | 26 |
| Прибыль, $П_j$ | 40 | 50 | 25 | 25 | |

Таблица 1. 4

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Трудовые | 8 | 5 | 5 | 7 | 18 |
| Материальные | 4 | 4 | 9 | 5 | 12 |
| Финансовые | 5 | 7 | 4 | 3 | 34 |
| Прибыль, $П_j$ | 45 | 55 | 60 | 32 | |

Таблица 1. 5

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Трудовые | 5 | 5 | 6 | 4 | 14 |
| Материальные | 9 | 3 | 6 | 5 | 10 |
| Финансовые | 5 | 8 | 6 | 8 | 30 |
| Прибыль, $П_j$ | 42 | 52 | 35 | 15 | |

Таблица 1. 23

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 8 | 5 | 8 | 7 | 20 |
| Щебень | 6 | 6 | 6 | 5 | 10 |
| Цемент | 9 | 6 | 4 | 9 | 35 |
| Прибыль, $П_j$ | 44 | 54 | 40 | 30 | |

Таблица 1. 6

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | И$_1$ | И$_2$ | И$_3$ | И$_4$ | |
| Трудовые | 2 | 7 | 4 | 7 | 16 |
| Материальные | 4 | 4 | 4 | 5 | 14 |
| Финансовые | 5 | 9 | 4 | 9 | 38 |
| Прибыль, П$_j$ | 35 | 50 | 35 | 20 | |

Таблица 1. 7

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | И$_1$ | И$_2$ | И$_3$ | И$_4$ | |
| Трудовые | 2 | 4 | 2 | 9 | 20 |
| Материальные | 5 | 5 | 5 | 6 | 10 |
| Финансовые | 5 | 6 | 4 | 8 | 30 |
| Прибыль, П$_j$ | 25 | 45 | 60 | 20 | |

Таблица 1. 8

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | И$_1$ | И$_2$ | И$_3$ | И$_4$ | |
| Трудовые | 3 | 8 | 6 | 7 | 16 |
| Материальные | 2 | 6 | 6 | 5 | 8 |
| Финансовые | 7 | 9 | 5 | 8 | 35 |
| Прибыль, П$_j$ | 45 | 55 | 20 | 25 | |

Таблица 1. 24

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | И$_1$ | И$_2$ | И$_3$ | И$_4$ | |
| Песок | 3 | 10 | 8 | 7 | 20 |
| Щебень | 9 | 3 | 9 | 5 | 15 |
| Цемент | 10 | 8 | 2 | 6 | 28 |
| Прибыль, П$_j$ | 46 | 56 | 36 | 25 | |

Таблица 1.9

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Трудовые | 1 | 7 | 6 | 5 | 17 |
| Материальные | 2 | 1 | 9 | 15 | 8 |
| Финансовые | 6 | 8 | 5 | 8 | 32 |
| Прибыль, $П_j$ | 35 | 52 | 36 | 24 | |

Таблица 1.10

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Трудовые | 4 | 4 | 4 | 6 | 14 |
| Материальные | 4 | 6 | 6 | 3 | 12 |
| Финансовые | 6 | 4 | 5 | 8 | 35 |
| Прибыль, $П_j$ | 40 | 55 | 35 | 25 | |

Таблица 1.11

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Трудовые | 4 | 4 | 1 | 9 | 18 |
| Материальные | 3 | 4 | 5 | 3 | 11 |
| Финансовые | 6 | 5 | 8 | 4 | 33 |
| Прибыль, $П_j$ | 50 | 40 | 20 | 30 | |

Таблица 1.25

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 3 | 15 | 12 | 7 | 25 |
| Щебень | 14 | 13 | 3 | 15 | 19 |
| Цемент | 15 | 6 | 14 | 8 | 50 |
| Прибыль, $П_j$ | 50 | 60 | 40 | 30 | |

Таблица 1.12

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Трудовые | 2 | 8 | 4 | 4 | 16 |
| Материальные | 2 | 5 | 5 | 4 | 8 |
| Финансовые | 5 | 8 | 4 | 9 | 40 |
| Прибыль, $П_j$ | 42 | 52 | 35 | 25 | |

Таблица 1.13

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 4 | 6 | 3 | 8 | 17 |
| Щебень | 4 | 9 | 6 | 5 | 19 |
| Цемент | 5 | 4 | 6 | 9 | 40 |
| Прибыль, $П_j$ | 42 | 52 | 35 | 25 | |

Таблица 1.14

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 2 | 4 | 1 | 6 | 14 |
| Щебень | 4 | 4 | 4 | 5 | 8 |
| Цемент | 8 | 6 | 8 | 8 | 35 |
| Прибыль, $П_j$ | 45 | 55 | 35 | 20 | |

Таблица 1.15

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 1 | 3 | 1 | 5 | 13 |
| Щебень | 2 | 3 | 1 | 7 | 7 |
| Цемент | 5 | 6 | 4 | 8 | 28 |
| Прибыль, $П_j$ | 38 | 45 | 28 | 22 | |

Таблица 1.16

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 5 | 6 | 6 | 6 | 19 |
| Щебень | 6 | 6 | 3 | 6 | 19 |
| Цемент | 3 | 8 | 8 | 8 | 35 |
| Прибыль, $П_j$ | 35 | 54 | 35 | 54 | |

Таблица 1.17

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 4 | 4 | 6 | 6 | 25 |
| Щебень | 3 | 3 | 7 | 7 | 15 |
| Цемент | 8 | 8 | 8 | 8 | 25 |
| Прибыль, $П_j$ | 45 | 55 | 65 | 30 | |

Таблица 1.18

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 5 | 3 | 3 | 9 | 20 |
| Щебень | 9 | 3 | 9 | 5 | 12 |
| Цемент | 9 | 6 | 8 | 8 | 35 |
| Прибыль, $П_j$ | 35 | 45 | 45 | 35 | |

Таблица 1.19

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 2 | 2 | 2 | 12 | 18 |
| Щебень | 6 | 8 | 4 | 5 | 15 |
| Цемент | 8 | 6 | 9 | 7 | 35 |
| Прибыль, $П_j$ | 42 | 52 | 32 | 22 | |

Таблица 1. 20

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 3 | 9 | 9 | 7 | 19 |
| Щебень | 4 | 5 | 6 | 5 | 8 |
| Цемент | 5 | 8 | 7 | 8 | 32 |
| Прибыль, $П_j$ | 38 | 48 | 36 | 24 | |

Таблица 1. 21

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 9 | 5 | 2 | 9 | 18 |
| Щебень | 10 | 8 | 3 | 5 | 15 |
| Цемент | 9 | 9 | 1 | 8 | 20 |
| Прибыль, $П_j$ | 40 | 60 | 20 | 25 | |

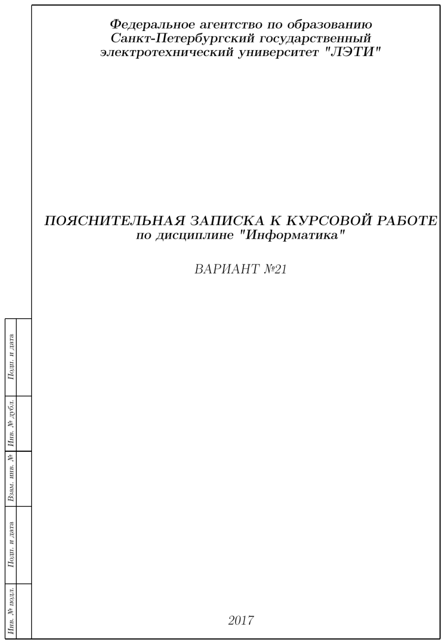
Таблица 1. 22

| Используемые ресурсы $\mathbf{a_i}$ | Изготавливаемые изделия | | | | Наличие ресурсов, $\mathbf{a_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $И_1$ | $И_2$ | $И_3$ | $И_4$ | |
| Песок | 3 | 7 | 6 | 7 | 16 |
| Щебень | 4 | 5 | 5 | 1 | 12 |
| Цемент | 5 | 4 | 9 | 8 | 35 |
| Прибыль, $П_j$ | 35 | 45 | 36 | 28 | |

# Приложение 3

```
\documentclass[russian,utf8,nocolumnxxxi,nocolumnxxxii]{eskdtext}
\usepackage[T1,T2A]{fontenc}
\usepackage[utf8]{inputenc}
%\usepackage[english,ukrainian,russian]{babel}
\usepackage{amssymb,amsmath}

\usepackage{tikz}
\usepackage{siunitx}
\usepackage[american,cuteinductors,smartlabels]{circuitikz}

\usepackage[backend=biber]{biblatex}
\addbibresource{error_estimation_otchet.bib}

\usepackage[]{hyperref}
\hypersetup{
    colorlinks=true,
}

\usepackage{textcomp}
\newcommand{\No}{\textnumero}

\ESKDdepartment{Федеральное агентство по образованию}
\ESKDcompany{Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет "ЛЭТИ
\ESKDtitle{Пояснительная записка к Курсовой работе}
\ESKDsignature{Вариант N21}
\ESKDauthor{Студент ~A.~A.}
\ESKDchecker{Прокшин~A.~H.}
\ESKDdocName{по дисциплине "Информатика"}

\begin{document}
...
\end{document}
```

# Приложение 4



Федеральное агентство по образованию
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет "ЛЭТИ"

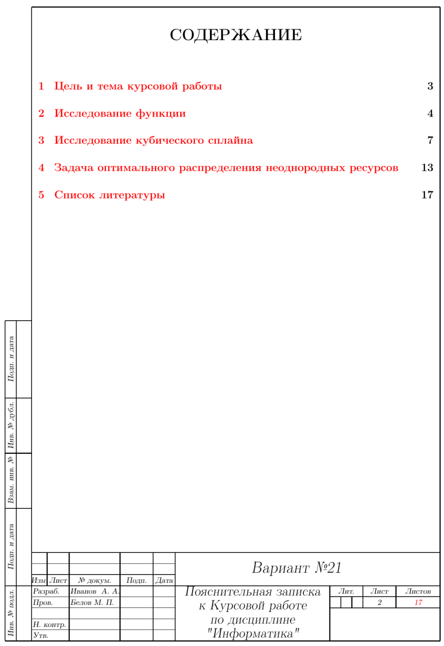
ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К КУРСОВОЙ РАБОТЕ
по дисциплине "Информатика"

ВАРИАНТ №21

2017

Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.

Рис. 1: Пример оформления титульной страницы



СОДЕРЖАНИЕ



Подп. и дата
Инв. № дубл.
Взам. инв. №
Подп. и дата
Инв. № подл.

| Изм. | Лист | № докум. | Подп. | Дата | Вариант №21 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Разраб. | | Иванов А. А. | | | Пояснительная записка к Курсовой работе по дисциплине "Информатика" | Лит. | Лист | Листов |
| Пров. | | Белов М. П. | | | | | 2 | 17 |
| Н. контр. | | | | | | | | |
| Утв. | | | | | | | | |

Рис. 2: Пример оформления первой страницы

# Список литературы

[1] Ю.С. Завьялов. *Методы сплайн-функций.* М.Наука, 1980.

[2] Калиткин. *Численные методы.* М.,Мир, 1980.

[3] *Разделённая разность.* 2015. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A0%D0%B0%D0%B7%D0%B4%D0%B5%D0%BB%D1%91%D0%BD%D0%BD%D0%B0%D1%8F_%D1%80%D0%B0%D0%B7%D0%BD%D0%BE%D1%81%D1%82%D1%8C.