Федеральное агентство по образованию
Санкт-Петербургский государственный
электротехнический университет "ЛЭТИ"

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К КУРСОВОЙ РАБОТЕ

по дисциплине "Информатика"

ВАРИАНТ N1

Подп. и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подп. и дата

Инв. № подл.

2019

СОДЕРЖАНИЕ

1 ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время при решении различных как прикладных инженерных, так и чисто исследовательских задач, возникает необходимость в использовании широкого круга алгоритмов из множества разделов математики. Между тем самостоятельная реализация многих алгоритмов на некотором языке программирования может быть сложна и избыточна. Вследствие этого широкое распространение получили математические пакеты и системы компьютерной алгебры, такие как: MatLab, Octave, SciLab, Mathematica, Reduce, Mapple, призванные избавить пользователя от рутинных процедур, предоставить удобный интерфейс взаимодействия с уже написанным программным кодом и быстрым созданием нового. К сожалению, некоторые из перечисленных выше математических пакетов, будучи коммерческими по природе, имеют пакетом SciLab и системой компьютерной алгебры Reduce.

1.1 Цель курсовой работы

Уметь применять персональный компьютер и математические пакеты прикладных программ в инженерной деятельности.

1.2 Тема курсовой работы:

Решение математических задач с использованием математического пакета «SciLab» и системы компьютерной алгебры «Reduce».

1.3 Задание на курсавую работу

а) Даны функции $f(x) = \sqrt{3}(x) + cos(x)$ и $g(x) = cos(2x + (\dfrac{\pi}{3}) - 1$

   – Решить уравнение f(x)=g(x)

   – Исследовать функцию h(x)=f(x)-g(x) на промежутке $[0; \frac{5\pi}{6}]$

б) Найти коэффициенты кубического сплайна, интерполирующего данные, представленные в векторах V_y и V_x.
   Построить на графике функцию f(x), полученную после нахождения коэффициентов кубического сплайна.
   Представить графическое изображение результатов интерполяции исходных данных различными методами с использованием встроенных функций.

в) Решить задачу оптимального распределения неоднородных ресурсов. На предприятии постоянно возникают задачи определения оптимального плана производства продукции при наличии конкретных ресурсов (сырья, полуфабрикатов, оборудования, финансов, рабочей силы и др.)

или проблемы оптимизации распределения неоднородных ресурсов на производстве.

Постановка задачи. Для изготовления n видов изделий N_1, N_2, ..., N_n необходимы ресурсы m видов: трудовые, материальные, финансовые и др. Известно требуемое количество отдельного i-го ресурса для изготовления каждого j-го изделия. Назовем эту величину нормой расхода c_ij. Пусть определено количество каждого вида ресурса, которым предприятие располагает в данный момент, - a_i. Известна прибыль $_i$, получаемая предприятием от изготовления каждого j-го изделия. Требуется определить, какие изделия и в каком количестве должны производиться предприятием, чтобы прибыль была максимальной.

paint.jpg

Используемые ресурсы a_i	Изготавливаемые изделия				Наличие ресурсов, a_i
	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	
Трудовые	3	5	2	7	15
Материальные	4	3	3	5	9
Финансовые	5	6	4	8	30
Прибыль, $П_j$	40	50	30	20	

Рисунок 1 – Исходные данные

2 ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ

Исследование функции — задача, заключающаяся в определении основных параметров заданной функции.

Даны функции $f(x) = \sqrt{3}sin(x) + cos(x)$,$g(x) = cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1$

а) Решить уравнение $f(x) = g(x)$

б) Исследовать функцию $h(x) = f(x) - g(x)$ на промежутке $[0; \frac{5\pi}{6}]$

2.1 Решение уравнения

Уравнение – это равенство, содержащее одно или несколько неизвестных, при условии, что ставится задача нахождения тех значений неизвестных, для которых оно истинно.

Решить уравнение – это значит найти все значения неизвестных, при которых оно обращается в верное числовое равенство, или установить, что таких значений нет.

Обычно при использовании мат. пакетов решение нелинейных уравнений можно получить двумя путями – численно и аналитически. Поскольку в «SciLab» и «SMath studio» с помощью стандартных функций можно получить только численное решение, при нахождении аналитического воспользуемся системой компьютерной алгебры «Reduce».

2.2 Аналетический метод решения

Аналетический метод решения - это решение, представленное в виде формулы (и соответственно полученное тоже путём математических выкладок).

Для отыскания аналитического решения воспользуемся функцией solve из системы компьютерной алгебры «Reduce» где:

– expr – список из уравнений (то есть система)

– var – список из переменных, относительно которых решаются уравнения expr

При попытке разрешить уравнение h(x)= 0 относительно x:
solve(sqrt(3)sin(x)+cos(x)-cos(2x+pi/3)-1,x);
получаем:

$$\left\{x = root\_of\left(cos\left(\frac{6x\_ + \pi}{3}\right) - cos(x\_) - sqrt(3)sin(x\_) - 1, x\_, tag\_2\right)\right\}$$

То есть решение данного уравнения не было найдено. Упростим данное уравнение, воспользовавшись двумя тригонометрическими тождествами:

$$sin(x+y) = sin(x)cos(y) + cos(x)sin(y) \tag{1}$$
$$cos(2x) = 1 - 2sin^2(x) \tag{2}$$

Выразим множетели функции $f(x)$ таким образом:

$$\sqrt{3} = 2cos\frac{\pi}{6},$$
$$1 = 2sin\frac{\pi}{6}$$

Функцию $f(x) = \sqrt{3}sin(x) + cos(x)$ запишем так:

$$sin(x) \times 2cos(\frac{\pi}{6}) + cos(x) \times 2sin(\frac{\pi}{6})$$
$$2 \times (sin(x) \times cos(\frac{\pi}{6}) + cos(x) \times sin(\frac{\pi}{6}))$$
$$2sin(x + \frac{\pi}{6})$$

Функцию $g(x) = cos(2x + \frac{\pi}{3}) - 1$ запишим так:

$$\cancel{1} - 2sin^2(x + \frac{\pi}{6}) - \cancel{1}$$
$$2sin^2(x + \frac{\pi}{6})$$

И получим тривиальное уравнение, эквивалентное исходному

$$2(sin(x + \frac{\pi}{6}) + sin^2(x + \frac{\pi}{6})) = 0$$

Применим к нему функцию solve в программе "Reduce":
solve(2sin(x+pi/6)*(1+sin(x+pi/6))); и получим решение:

$$x = \frac{\pi(arbint(4)+5)}{6}, \qquad x = \frac{\pi(12arbint(4)-1)}{6},$$
$$x = \frac{2\pi(arbint(3)+2)}{3}, \qquad x = \frac{2\pi(3arbint(3)-1)}{3}$$

где arbint (arbitrary integer) является произвольным целым числом. Запишем решение в более привычной форме:

$$x_1 = \frac{5}{6} * \pi + 2n\pi, n \in Z$$
$$x_2 = -\frac{1}{6} * \pi + 2n\pi, n \in Z$$
$$x_3 = \frac{8}{6} * \pi + 2n\pi, n \in Z$$
$$x_4 = -\frac{4}{6} * \pi + 2n\pi, n \in Z$$

Периодические решения для x_3 и x_4 совпадают, а периодическое решение для x_2 можно записать в виде:

$$x_2 = \frac{11}{6} * \pi + 2n\pi, n \in Z$$

Таким образов воспользовавшись математическим пакетом «Reduce» мы получили ответ Аналетическим способом. Но для более полн картины мы должны найти корни и Числовым методом используя пакет«SMath studio».

2.3 Числовой метод решения

Для отыскания численного решения воспользуемся стандартной функцией «SMath studio» solve.

«SMath studio» позволяет находить корни уравнения (нуля функции), т.е. точки, где значение функции равно нулю (графически пересекает ось X).Исследуем два выражения «$f(x) = \sqrt{3}sin(x) + cos(x)$,$g(x) = cos(2x + \dfrac{\pi}{3}) - 1$». Из этого выражения можно построить функцию «$f(x) = \sqrt{3}sin(x) + cos(x) - cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$»

В результате построения полкчился график изображённый на рисунке 2.

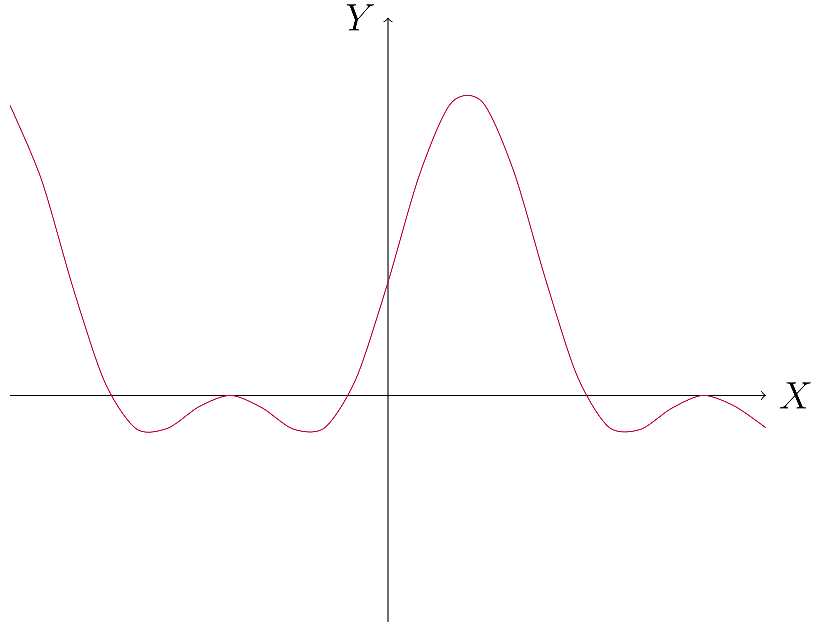

Рисунок 2 – График функции $f(x) = \sqrt{3}sin(x) + cos(x) - cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$

Для того чтобы найти корни уравнения используем функции solve( ) с двумя аргументами (первый задаёт функцию, а второй переменную, по которой ведётся поиск корней), как и команда «Найти корни» , ищет корни в заданном в настройках диапазоне (Сервис/Опции/Вычисление/Корни/Диапазон), по умолчанию – 20..20. Выбираем диапазон - 5...5.

В результате программа «SMath studio» выдала ответ:

$$solve(f(x); x) = \begin{cases} -3.6652 \\ -0.5236 \\ 2.618 \end{cases}$$

Теперь мы можем указать эти значения на графике 3 изображённом ниже.

Таким образом видно, где находятся наши корни уравнения $f(x)$ на графике в интервале (-5, 5).

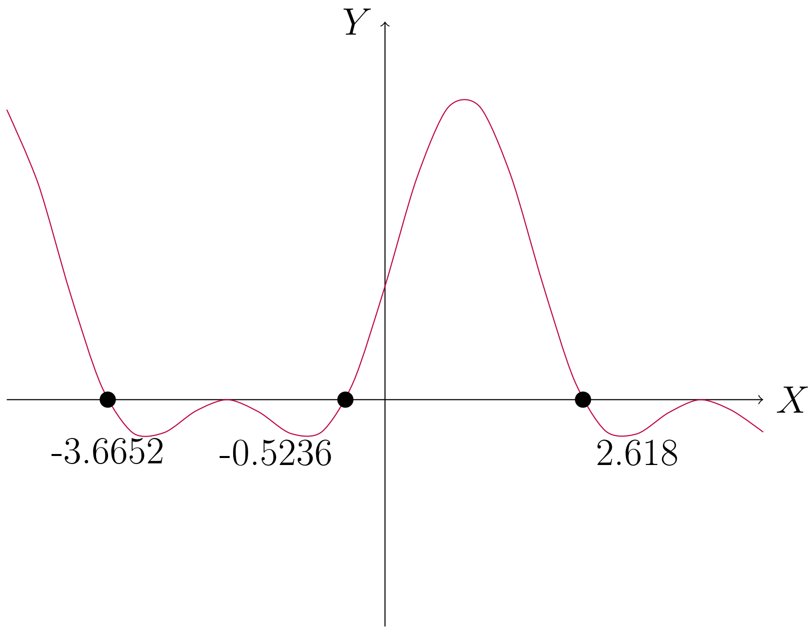

Рисунок 3 – График функции $f(x)$ с отмеченными корнями

2.4 Порядок исследования функции

Алгаритм исследованиия функции:

а) Найти область определения. Выделить особые точки (точки разрыва)

б) Проверить наличие вертикальных асимптот в точках разрыва и на границах области определения

в) Найти точки пересечения с осями координат

г) Установить, является ли функция чётной или нечётной

д) Определить, является ли функция периодической или нет (только для тригонометрических функций)

е) Найти точки экстремума и интервалы монотонности

ж) Найти точки перегиба и интервалы выпуклости-вогнутости

з) Найти наклонные асимптоты. Исследовать поведение на бесконечности

и) Выбрать дополнительные точки и вычислить их координаты

к) Построить график и асимптоты.

2.4.1 Найти область определения. Выделить особые точки (точки разрыва)

Данная функция имеет следующую область определения функции $h(x) = \sqrt{3}sin(x) + cos(x) - cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1$:

$$x \in R$$

2.4.2 Точки пересечения с осями координат

Для того чтобы найти точки пересечения с осями необходимо вместо переменых подставить вместо премныых значение «0».

Находим точки пересечения с осью $_x$. В разделе 2.3 уже были найдены эти значения.

$$O_x : \text{точки } A(-3.6652, 0); B(-0.5236, 0); C(2.618, 0).$$

Находим точки пересечения с осью O_y. Для этого в программе «SMath studio» подставляем $x = 0$ и получаем:

$$O_y : \text{точка } D(0, 1.5)$$

Точки пересечения функции $(h(x))$ с осями O_x и O_y представлены на рисунке 4.

По заданию необходимо исследовать функцию $h(x)$ на итервале $[o, \frac{5\pi}{6}] \Rightarrow$ O_x равная C(2.618,0) и точка $D(0, 1.5)$ с осью O_y. Данные точки представлены в соответстсвии с рисунком 5.

2.4.3 Анализ поиска вертикальной асимптоты

По условию задания граничными точками области определения являются $(0; \frac{5\pi}{6}$

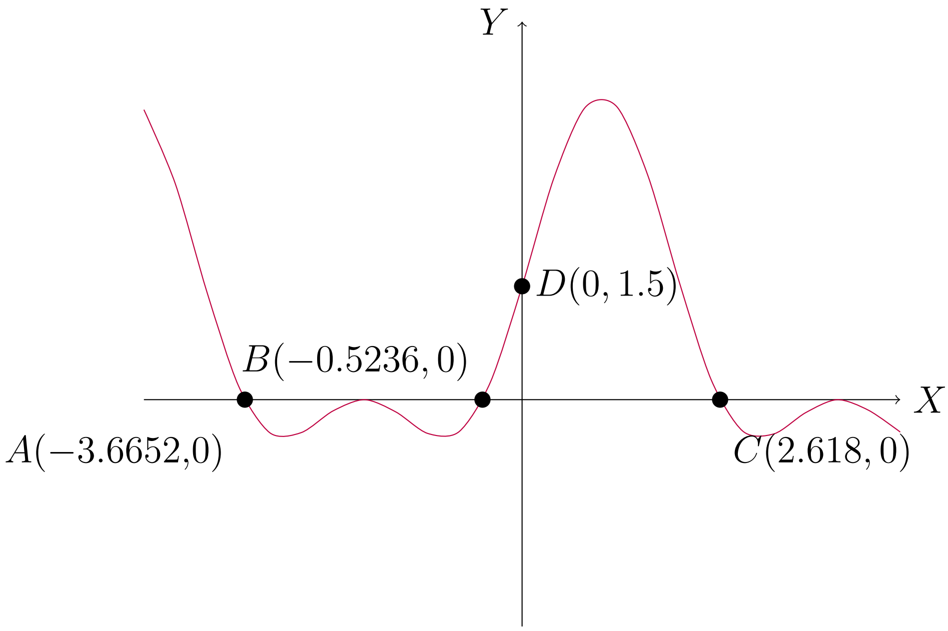

Рисунок 4 – График функции $h(x)$ с точками пересечения осей O_x и O_y

На границах области определения функция имеет вертикальные асимптоты, если односторонние пределы функции в этих граничных точках бесконечны.

Поскольку математический пакет "Scilab"не имеет возможности посчитать пределы, данную операцию пройдётся сделать частично в ручную.

Рассчитаем вертикальную асимптоту при x=0, точка является началом промежутка исследования функции h(x):

$$\lim_{x\to 0-0} \sqrt{3}sin(x) + cos(x) - cos(2x + \tfrac{\pi}{3}) + 1 = \lim_{x\to 0-0} 1.5 \neq \pm\infty$$

Из этого следует что по краю исследуемого промежутка вертикальных асимптот не наблюдается. В момент расчётов в функцию h(x) было подставленною значение x в математический пакет "Scilab".

Листинг программы:

$-- > x = 0$

x =

0.

$-- > \sqrt(3) * sin(x) + cos(x) - cos((2 * x) + ((pi)/3)) + 1$

ans =

1.5

Рассчитаем вертикальную асимптоту при x=$\frac{5\pi}{6}$, точка является концом промежутка исследования функции h(x):

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{6}+0} \sqrt{3}sin(x) + cos(x) - cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1 = \lim_{x\to\frac{5\pi}{6}+0} -2{,}22 \neq \pm\infty$$

Из этого следует что по краю исследуемого промежутка вертикальных асимптот не наблюдается. В момент расчётов в функцию h(x) было подставленною значение x в математический пакет "Scilab".

Листинг программы:

$-- > x = (5 * (pi))/6$
x = //

2.61

$-- > q = sqrt(3) * sin(x) + cos(x) - cos((2 * x) + ((pi)/3)) + 1$ q =

\- 2.22

2.4.4 Анализ выявления чётности, нечётности функции

Из этого следует что при решении следует:

$$\begin{cases} x = -1 \\ \text{h(-x)} = \sqrt{3}sin(x) + cos(x) - cos(2x + \frac{\pi}{3}) + 1 = -0.0349609 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ \text{h(x)} = ((\sqrt{3}) * (sin(x)) + (cos(x))) - ((cos(2 * x) + (\pi/3)) - 1) = -0.0349609 \end{cases}$$

$$h(-x) = h(-x) \Longleftrightarrow -0.0349609 = -0.0349609 \Longrightarrow \text{Функция чётная.}$$

Из этого следует что функция является симметричной. В момент расчётов в функцию h(x) было подставленною значение x в математический пакет "Scilab"и использован следующий листинг:

−− >x1=-1

x1 =

- 1.

−− >q1=sqrt(3)*sin(x)+cos(x)-cos((2*x) + ((pi)/3)) + 1

q1 =

column 1 to 6

- 0.0349609 - 0.0448128 - 0.0849485 - 0.1727211 - 0.3132469 - 0.4599841

column 7 to 12

- 0.4817829 - 0.1877381 0.5573472 1.6851065 2.8831929 3.7428516

column 13 to 16

3.9959654 3.6480703 2.9206719 2.0889372

−>x2=1

x2 =

1.

−>q2=sqrt(3)*sin(x)+cos(x)-cos((2*x) + ((pi)/3)) + 1 q2 =

column 1 to 6

- 0.0349609 - 0.0448128 - 0.0849485 - 0.1727211 - 0.3132469 - 0.4599841
column 7 to 12

- 0.4817829 - 0.1877381 0.5573472 1.6851065 2.8831929 3.7428516

column 13 to 16

3.9959654 3.6480703 2.9206719 2.0889372

–>if (q1 == q2) then
–>disp ("Чётная")

Чётная
–>elseif (q1 == (q2)*(-1)) then
–>disp ("Не чётная! ")
–>else
–>disp ("В общем виде")
–>end

2.4.5 Построение графика y=h(x)

Поскольку для упрощения поиска производных первого и второго порядков, значение которых максимально приближено к нулю, проще ориентироваться уже по готовому графику функции h(x), построение следует провести на данном этапе.

Для построения графика h(x) необходимо определить в каком пространстве находится данный график. Поскольку в исследуемой функции координата y выражается через координату x, данный график строиться в двухмерном пространстве. Для построения графика в двухмерном пространстве используются следующие команды в математическом пакете "Scilab".Команда plot которая предназначена для построения графика одной функции y = f (x). Обращение к ней имеет вид plot(x,y,[xcap,ycap,caption]) где x — массив абсцисс, y — массив ординат, xcap, ycap, caption — подписи осей X, Y и графика соответственно. Для создания функции y = f (x) используется команда function f=y(x), f=x+a, endfunction;. Данная команда так же используется при получении производной первого и второго порядка методом приближения.

Пример листинга построения простейшего графика в математическом пакете "Scilab":

```
–>function f = myquadratic ( x )
–>f = x+1
–>endfunction

–>xdata = linspace ( 0,3,200 );

–>ydata = myquadratic ( xdata );

–>plot ( xdata , ydata )
```

Результат построения графика представлен в соовецтвии с рисунком 5.

2.4.6 Производная первого и второго порядков с помощью интерполяционной формулы Ньютона.

Данный способ заключается в том, что функцию y(x), заданную в равно стоящих точках x_i отрезка [a,b] с помощью значений $y_1 = f(x_i)$, приближенно заменяют интерполяционным полиномом Ньютона, построенном для системы узлов x_0,x_1,....,$x_k(k \leqslant n)$ и вычисляют производные $y' = f'(x), y'' = f''(x)$.

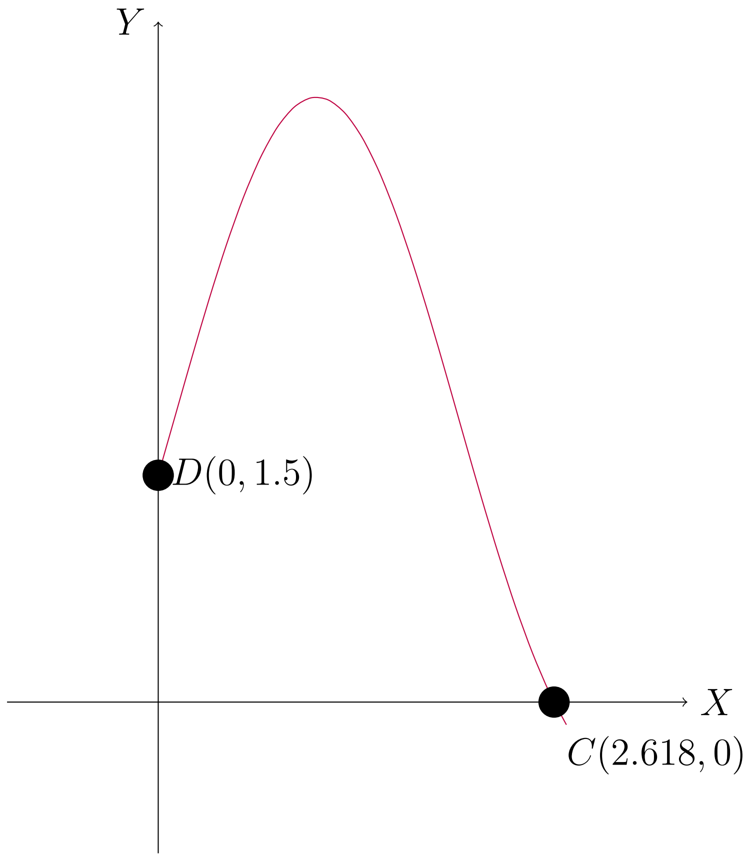

Рисунок 5 – График функции $h(x)$ в пределах $[0, \frac{5\pi}{6}]$

Для выявления точки экстремума производная исследуемой функции должна быть равна нулю $h(x) = 0$. При расчётах на исследуемый области $x = (0; \frac{5\pi}{6},$ ориентируясь по рисунку №2 видим что количество таких точек равно единице, поскольку поскольку функция в данном случае изгибается один раз. Возьмём за первичную точку приближения, x=1. В следствии чего получим $h'(x) = 0.2873079$. Поскольку приближение к нулю в десятых долях является достаточно большим, возьмём за точку приближения x=1,04. В следствии получим $h'(x) = 0.0475615$. Приближение к нулю в погрешности сотых долей является малым, но не достаточно. возьмём за точку приближения x=1,048. В следствии получим $h'(x) = -0.0004526$. Для максимального приближения к нулю используем x=1.047921. В следствии получим $h'(x) = 0.0000215$. Данное приближение вполне можно считать допустимым.

Листин проводимых расчётов в математическом пакете "Scilab":

−− >h=0.1;

```
-- >x=1:h:(5*(pi)/6);

-- >y=sqrt(3)*sin(x)+cos(x)-cos((2*x) + ((pi)/3)) + 1;

-- >dy=diff(y);

-- >dy2=diff(y,2);

-- >dy3=diff(y,3);

-- > //Приближенное значение y'(x)

-- >Y=(dy(1)-dy2(1)/2+dy3(1)/3)/h
Y =

0.2873079

-- >h=0.1;

-- >x=1.04:h:(5*(pi)/6);

-- >y=sqrt(3)*sin(x)+cos(x)-cos((2*x) + ((pi)/3)) + 1;

-- >dy=diff(y);

-- >dy2=diff(y,2);

-- >dy3=diff(y,3);

-- > //Приближенное значение y'(x)

-1->Y=(dy(1)-dy2(1)/2+dy3(1)/3)/h
Y =
```

```
0.0475615

-- >h=0.1;

-- >x=1.048:h:(5*(pi)/6);

-- >y=sqrt(3)*sin(x)+cos(x)-cos((2*x) + ((pi)/3)) + 1;

-- >dy=diff(y);

-- >dy2=diff(y,2);

-- >dy3=diff(y,3);

-- > //Приближенное значение y'(x)

-- >Y=(dy(1)-dy2(1)/2+dy3(1)/3)/h
Y =

- 0.0004526

-- >h=0.1;

-- >x=1.047921:h:(5*(pi)/6);

-- >y=sqrt(3)*sin(x)+cos(x)-cos((2*x) + ((pi)/3)) + 1;

-- >dy=diff(y);

-- >dy2=diff(y,2);

-- >dy3=diff(y,3);

-- > //Приближенное значение y'(x)
```

$--$ >Y=(dy(1)-dy2(1)/2+dy3(1)/3)/h

Y =

0.0000215

Поскольку точка экстремума являться h(x)=0, то в случае когда $h'(x) > 0$ функция возрастает, а в случае $h'(x) < 0$ функция убывает. Из расчётов было выявлено, что при x=1,048 функция $h'(x) < 0$, следственно функция убывает после точки экстремума, на исследуемом промежутке. При x=1 функция $h'(x) > 0$ больше нуля, следственно она возрастет. Таким образом в промежутке [1,1.47921] находится точка max функции $h(x)$.

Представим данные на рисунке 6 в графическом виде :

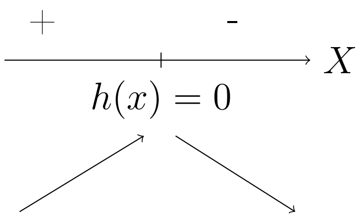

Рисунок 6 – График точки экстремума

2.4.7 Получение точек перегиба функции с помощью интерполяционной формулы Ньютона

Получение точек перегиба в данном случае отличаться лишь тем, что при проведении данной операции в команду вставляться значение функции решённой производной первого порядка аналитическим способом. В предоставленных расчётах взята в ручную $h'(x) = -sin(x) + 2 * sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \sqrt(3) * cos(x)$.

Из рисунка 5 следует что на исследуемом промежутке $x = (0; \frac{5\pi}{6})$ имеются две точи перегиба. Первая точка перегиба в районе значений $x = (0; 0{,}2)$, вторая в районе значений $x = (1; 1{,}5)$

Рассчитывая вторую точку приблизим x=0,1. Из этого значение производной функции $h'(x) = 0.1123053$. Поскольку погрешность данной производной в отличию нуля имеет десятичную долю, то данная точка не может рассматриваться как точка перегиба. Рассчитывая вторую точку приблизим x=0,1111. Из этого значение производной функции $h'(x) = 0.0098675$. Поскольку в данной точке низкая доля, возьмём эту точку как точку перегиба. Рассчитаем вторую точку перегиба, приближая значения функции то точки x=1,98. Из этого значение производной функции $h'(x) = -0.0362294$. Примем эту точку за приближенную к нулю. В итоге получаем две точки перегиба $x_1 = 0.1111 x_2 = 1.98$. Поскольку функция возрастет на точке x_1 и убывает на точке x_2 то в промежуток этих точек выпуклый.

Листинг полных расчётов в математическом пакете "Scilab":

```
-1->h=0.1;

-1->x=0.1:h:(5*(pi)/6);

-1->y=-sin(x)+2*sin((2*x) + ((pi)/3)) + sqrt(3)*cos(x);

-1->dy=diff(y);

-1->dy2=diff(y,2);

-1->dy3=diff(y,3);

-1->Y=(dy(1)-dy2(1)/2+dy3(1)/3)/h
Y =

0.1123053

-1->h=0.1;

-1->x=0.1111:h:(5*(pi)/6);
```

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата

Вариант N1

-1->y=-sin(x)+2*sin((2*x) + ((pi)/3)) + sqrt(3)*cos(x);

-1->dy=diff(y);

-1->dy2=diff(y,2);

-1->dy3=diff(y,3);

-1->Y=(dy(1)-dy2(1)/2+dy3(1)/3)/h

Y =

0.0098675

-1->h=0.1;

-1->x=1.98:h:(5*(pi)/6);

-1->y=-sin(x)+2*sin((2*x) + ((pi)/3)) + sqrt(3)*cos(x);

-1->dy=diff(y);

-1->dy2=diff(y,2);

-1->dy3=diff(y,3);

-1->Y=(dy(1)-dy2(1)/2+dy3(1)/3)/h

Y =

- 0.0362294

2.4.8 Итоги исследования функции $h(x)$

Итоги исследования функции $h(x)$ в интервале $[0, \frac{5\pi}{6}]$:

а) ООФ: $x \in R$;

б) функция $h(x)$ переодична;

в) функция $h(x)$ чётная;

г) Монотонность:

- возрастае на промежутке $[0, 1.047921]$;
- убывает на промежутке $[1.047921, \frac{5\pi}{6}]$

д) максимум $h(x) = 1.047921$;

е) функция $h(x)$ в интервале $[0.1111, 1.98]$;

ж) корень функции $h(x)$ равен $x = 2.618$.

3 ПОИСК КУБИЧЕСКОГО СПЛАЙНА

Найти коэффициенты кубического сплайна, интерполирующего данные, представленные в векторах:

- $V_x = [0, 0.25, 1.25, 2.125, 3.25]$;
- $V_y = [2, 1.6, 2.325, 2.017, 2.833]$.

Построить на графике функцию f(x), полученную после нахождения коэффициентов кубического сплайна. Представить графическое изображение результатов интерполяции исходных данных различными методами с использованием встроенных функций splin(x,y,“natural”), splin(x,y,“clamped”), splin(x,y,“not_a_knot”), splin(x,y, “fast”), splin(x,y,“monotone”), и interp(xx,x,y,d)

Оценить погрешность интерполяции в точке x = 2.2. Вычислить значение функции в точке x = 1.2.

3.1 Нахождение коэффициентов кубического сплайна

Найдем уравнение сплайна проходящего через четыре точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) и (x_5, y_5). Для того чтобы потенциальная энергия изогнутой металлической линейки (сплайна) принимала минимальное значение, производная четвертого порядка должна быть равна нулю, значит мы можем представить сплайн полиномом третьей степени на каждом отрезк $[x_i, x_{i+1}]$.

$$F_i(x) = A_{i0} + A_{i1}x + A_{i2}x^2 + A_{i3}x^3, \text{ где } x \in [x_i, x_{i+1}]$$

Найдем коэффициэнты A_{ij} исходя и того, что в точках склейки функция не имеет разрывов, изломов и изгиб ее слева и справа совпадает. На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ график $F_i(x)$ проходит через точки y_i, y_{i+1} или $F_i(x_i) = y_i, F_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$. Записывая равенства через коэффициэнты A_{ij}:

$$f_i = A_{i0} + A_{i1}x_i + A_{i2}x_i^2 + A_{i3}x_i^3.$$

В результате получаем 8 уравнений.

Производные первого порядка во внутренних точках x_i должны совпадать, т.е. производная слева $F_i'(x_i) = A_{i1} + 2A_{i2}x_i + 3A_{i3}x_i^2$ должна быть равна производной справа $F_{i+1}'(x_i) = A_{(i+1)1} + 2A_{(i+1)2}x_i + 3A_{(i+1)3}x_i^2$. Физический смысл равенства производных состоит в том, что в точках склейки у нас нет излома сплайна. В результате получаем ещё 3 уравнения.

Производные второго порядка в точках склейки x_i должны совпадать, вторая производная слева $F_i(x_i) = 2A_{i2}+6A_{i3}x_i$ должна быть равна второй производной справа $F_{i+1}(x_i) = 2A_{(i+1)2} + 6A_{(i+1)3}x_i$. Физический смысл равенства вторых производных в том, что в точках склейки изгиб сплайна справа и слева должен быть одинаковым. В результате получаем ещё 3 уравнения.

Еще два уравнения получаем из граничных условий в крайних точках x_1, x_n. В условии не котируеться закреплены ли наши крайнии точки, поэтому примем, что концы сплайна оставлены свободными в крайних точках (x_1, y_1), (x_n, y_n) В этом случае изгиба в крайних точках нет и, значит, вторая производная в этих точках равна 0.

$$F(x_1) = 0$$
$$F(x_n) = 0$$

Тем самым ещё добовляеться два уравнения. В сумме получаем 16 уравнений, характерезующий данный сплайн, для определения коэффициентов A_{ij} все урванения составим в одну систему и решим с помощью матриц.

Для решения данной системой воспользуемся математическим пакетом «SMath studio». На риссунке 7 представлена матрица из уравнения.

Решая уравнение, получаем значение для коэффициэнтов A_{ij} :

$$A := \begin{bmatrix}
1 & x1 & x1^2 & x1^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & x2 & x2^2 & x2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2\cdot x2 & 3\cdot x2^2 & 0 & -1 & -2\cdot x2 & -3\cdot x2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 6\cdot x2 & 0 & 0 & -2 & -6\cdot x2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x2 & x2^2 & x2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x3 & x3^2 & x3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cdot x3 & 3\cdot x3^2 & 0 & -1 & -2\cdot x3 & -3\cdot x3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\cdot x3 & 0 & 0 & -2 & -6\cdot x3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x3 & x3^2 & x3^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x4 & x4^2 & x4^3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2\cdot x4 & 3\cdot x4^2 & 0 & -1 & -2\cdot x4 & -3\cdot x4^2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\cdot x4 & 0 & 0 & -2 & -6\cdot x4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x4 & x4^2 & x4^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x5 & x5^2 & x5^3 \\
0 & 0 & 2 & 6\cdot x1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6\cdot x4
\end{bmatrix}$$

Рисунок 7 – Матрица, составленная из 16 уравнения

$$\begin{bmatrix} A_{10} \\ A_{11} \\ A_{12} \\ A_{13} \\ A_{20} \\ A_{21} \\ A_{22} \\ A_{23} \\ A_{30} \\ A_{31} \\ A_{32} \\ A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1.8924 \\ 0 \\ 4.6786 \\ 2.1007 \\ -3.1013 \\ 4.8355 \\ -1.7687 \\ -2.6911 \\ 8.3992 \\ -4.3649 \\ 0.6847 \\ -8.2637 \\ 16.2663 \\ -8.0671 \\ 1.2654 \end{bmatrix}$$

Окончательно, уравнение для сплайна получаем в виде

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x) = 4.6786 \times x^3 + 0 \times x^2 - 1.8924 \times x + 2 \text{ где } x \in [0, 0.25], \\ F_2(x) = -1.7687 \times x^3 + 4.8355 \times x^2 - 3.1013 \times x + 2.1007 \text{ где } x \in [0.25, 1.25 \\ F_3(x) = 0.6847 \times x^3 - 4.3649 \times x^2 + 8.3919 \times x - 2.6911 \text{ где } x \in [1.25, 2.125 \\ F_4(x) = 1.2654 \times x^3 - 8.0671 \times x^2 + 16.2663 \times x - 8.2637 \text{ где } x \in [2.125, 3.2 \end{cases}$$

По данным уравнениям строим гафик, представленный в соответствии с рисунком 8.

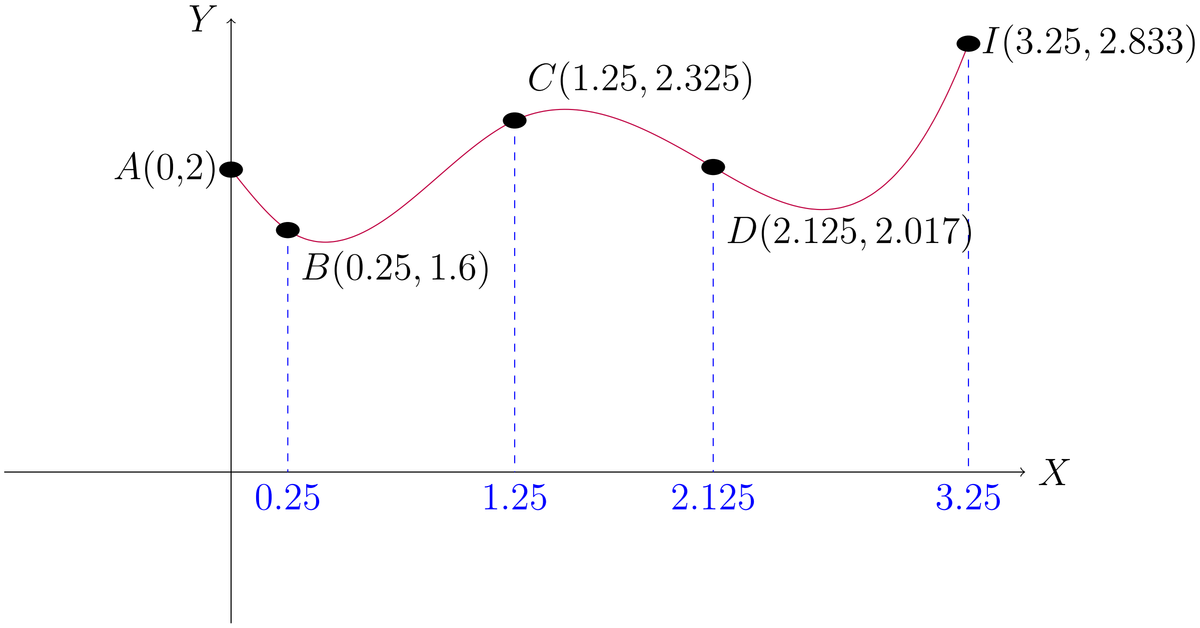

Рисунок 8 – График функции кубического сплайна

3.2 Вычисление значения функции в точке

Дальше по заданию необходимо вычислить значение функции при $x = 1.2$. Для решения задачи необходимо выбрать функцию, в которой находится данная точка и вместо x подставить её значение. Для решения воспользуемся программой «SMath studio». Решение представлено в соответствии с рисунком 9.

Полученаа точка представлена в соответствии с рисунком 10.

$x := 1{,}2$

$F3(x) := -1{,}7687 \cdot x^3 + 4{,}8355 \cdot x^2 - 3{,}1013 \cdot x + 2{,}1007$

$F3(x) = 2{,}2859464$

Рисунок 9 – Вычисление функции в точке $x = 1.2$

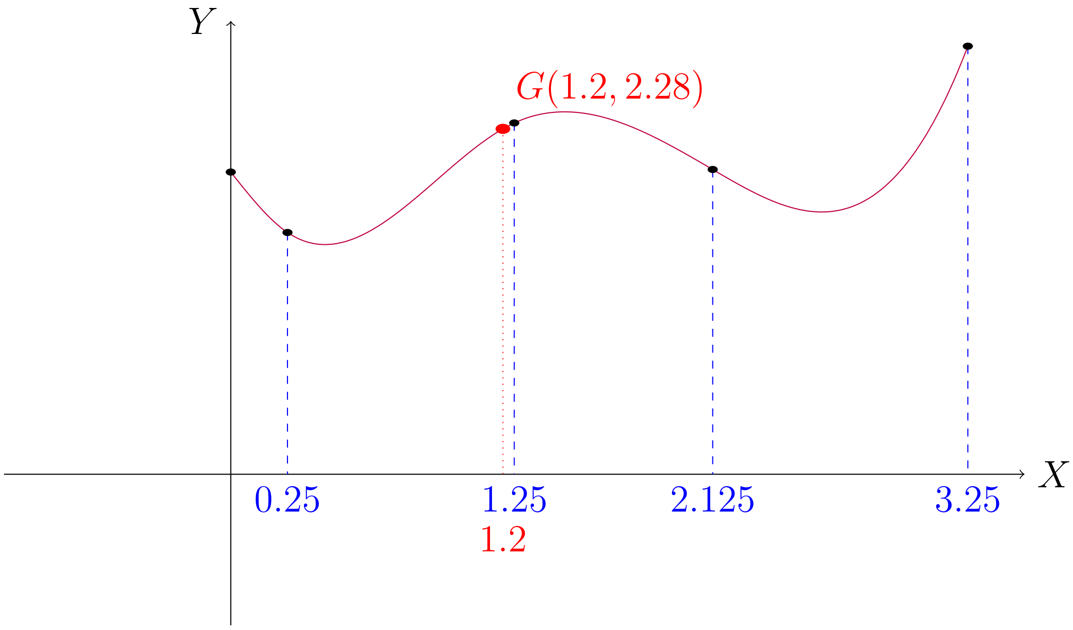

Рисунок 10 – Графичекое расположение точки $x = 1.2$ на графике функции

3.3 Определение погрешности функции сплайна в точке

Для орпеделения погрешности в точке $x = 2.2$ используем формулу 3.

$$\left|S_3^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\right| \leqslant R_r, r = 0,1,2,3... \quad (3)$$

Если функция достаточно гладкая, то:

$$\left|S_3^{(r)}(x) - f^{(r)}(x)\right| \leqslant \frac{1}{384} \times \bar{h}^4 \left|f^{IV}(x)\right| \quad (4)$$

где

$$\bar{h} = |x_{\text{точка, в которй вычисляется погрешность}} - x_{\text{ближайшее i}}|.$$

Для определения погрешности составим выражение полинома Ньютона:

P(x)=A$_0 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)(x-x_1) + A_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + A_4(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$

Неизвестные коэффициенты найдём, используя метод разделённых разностей.

$$A_0 = f(x_0); \tag{5}$$

$$A_1 = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} + \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1}; \tag{6}$$

$$A_2 = \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)}; \tag{7}$$

$$\begin{aligned} A_3 = {} & \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)(x_2 - x_3)} + \\ & + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)(x_0 - x_3)}; \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} A_4 = {} & \frac{f(x_4)}{(x_4 - x_3)(x_4 - x_2)(x_4 - x_1)(x_4 - x_0)} + \\ & + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_4)(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_3 - x_0)} + \\ & + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)} + \\ & + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_4)(x_1 - x_3)(x_1 - x_2)(x_1 - x_0)} + \\ & + \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_4)(x_0 - x_3)(x_0 - x_2)(x_0 - x_1)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Формулы для нахождения коэффициентов полинома Ньютона, приведённые выше рассчитаем в математическом пакете «SMath studio». Результаты расчётов представлены в соответствии с рисунком 11.

Подставляя полученные коэффициенты в формулу полиномв Ньютона и упростив благодаря программе «Maxima», получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} P(x) = {} & \frac{85397632 \times x^4 - 493575024 \times x^3 + 872509224 \times x^2}{160000000} + \\ & + \frac{-444611205 \times x + 320000000}{16000000}. \end{aligned} \tag{10}$$

$A0 = 2$

$A1 = -1,5999875$

$A2 = 1,86002875$

$A3 = -1,1500537535$

$A4 = 0,5337351978$

Рисунок 11 – Результат расчётов коэффициентов полинома Ньютона

Сплайн является достатаочно гладкой функцией, поэтому для нахождения погрешности используем формулу 4.

Находим $\bar{h}$ по формуле:

$$\bar{h} = |x_{\text{точка, в которй вычисляется погрешность}} - x_{\text{ближайшее i}}|.$$

Подставляем установленные данные и получаем:

$$\bar{h} = |2.2 - 2.125| = 0.075.$$

Используя программу «Reduce Algebra», находим производную четвёртой степени:

$$\left|f^{IV}(x)\right| = \frac{2001507}{156250}. \tag{11}$$

Подставляем полученные данные в формулу 4 и определяем погрешность с помощью математического пакета «SMath studio». Расчёт представлен в соответствии с рисунком 12

$$R := \frac{0,075^{4} \cdot \frac{2001507}{156250}}{384}$$

$$R = 0,000001055482207$$

Рисунок 12 – Расчёт погрешности

В результате получается:

$$\left| S_3^{(r)}(x) - f^{(r)}(x) \right| \leqslant 1.0555 \times 10^{-6}. \tag{12}$$

Расчитав погрешность, найдём значение функции в точке $x = 1.2$ более точнее, чем в разделе 3.2 Курсовой. Для нахождения значения функции в точке $x = 1.2$ используем функцию 10, получаем:

$$P(1.2) = 2.2941$$

4 ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ РЕСУРСОВ

Требуется решить следующую задачу оптимального распределения неоднородных ресурсов.

Для изготовления n видов изделий N_1, N_2, ... , N_n неходимы ресурсы m видов: трудовые, материальные, финансовые и др. Известно требуемое количество отдельного i-го ресурса для изготовления каждого j-го изделия. Назовем эту величину нормой расхода c_{ij}. Пусть определено количество каждого вида ресурса, которым предприятие располагает в данный момент, – a_i. Известна прибыль ${}_i$, получаемаяпредприятием от изготовления каждого j-го изделия. Требуетсяопределить, какие изделия и в каком количестве должны произво-диться предприятием, чтобы прибыль была максимальной.

Исходные данные представлены в соответствии с рисункои 13.

paint.jpg

Используемые ресурсы a_i	Изготавливаемые изделия				Наличие ресурсов, a_i
	$И_1$	$И_2$	$И_3$	$И_4$	
Трудовые	3	5	2	7	15
Материальные	4	3	3	5	9
Финансовые	5	6	4	8	30
Прибыль, $П_j$	40	50	30	20	

Рисунок 13 – Исходные данные

Так как данная задача является целочисленной задачей линейного программирования (ILP), стандартная функция мат. пакета «SciLab» . Для решения задачи предназначена функция linpro.

где p – массив (вектор-столбец) коэффициентов при неизвестных целевой функции, длина вектора n совпадает с количеством неизвестных x;

C – матрица при неизвестных из левой части системы ограничений, количество строк матрицы равно количеству ограничений, а количество столбцов совпадает

с количеством неизвестных;
b – массив (вектор-столбец), содержит свободные члены системы ограничений;
ci - массив (вектор-столбец) содержит нижнюю границу переменных;
cs - массив (вектор-столбец) содержит верхнюю границу переменных, если таковая отсутствует, указывают [ ].

Функция linpro возвращает массив неизвестных x, минимальное значение функции f и массив множителей Лагранжа lagr.

Листинг кода:

```
->C=[3,5,2,7;4,3,3,5;5,6,4,8;]
C =
3. 5. 2. 7.
4. 3. 3. 5.
5. 6. 4. 8.
-> b=[15;9;30;]
b =
15.
9.
30.
->ci=[0;0;0;0;]
ci =
0.
0.
0.
0.
->cs=[]
->p=[40;50;30;20]
p =
40.
50.
30.
20.
->[x,lagr,f]=linpro(-p,C,b,ci,cs)
f = - 150.
```

Изм.	Лист	№ докум.	Подп.	Дата	Вариант N1	Лист 34

x =

0.

3.

0.

0.

В результате вычислений утановлено, что максимальную прибыль (150 д. е.) можено получить при производстве изделия № 2. при объёме выпуска 3 ед.

5 ВЫВОД

Были изучены встроенные функции математического пакета «SciLab», операторы системы компьютерной алгебры «Reduce», проамма «Maxima», которая позволяет упрощать выражения и приложение «SMath studio». Полученные знания были применены при решении задач:

а) нашли корни функции аналитическим и численным способом;

б) нахождения нулей функции на заданном участке;

в) аналитического исследования функции в заданном промежутке;

г) интерполяции кубическими сплайнами и нахождения погрешности в заданной точке неизвестной функции;

д) целочисленного линейного программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.С. Завьялов. Методы сплайн-функций. М.Наука, 1980.
2. Калиткин. Численные методы. М.,Мир, 1980
3. Разделённая разность. 2015. url:https://ru.wikipedia.org/wiki/