Sveučilište u Mostaru
Fakultet prirodoslovno-matematičkih i odgojnih znanosti

Stjepan Harapin

Statistička fizika

Rješenja zadataka

Mostar, 2020.

Sadržaj

2 Kinetička teorija plinova

Zadatak 2.1. *Uzimajući u obzir relativno gibanje molekula u plinu sastavljenom od* N *jednakih molekula efektivnog udarnog presjeka* σ*, a koje se nalaze u volumenu* V*, izvedite izraz za srednji slobodni put*

$$l = \frac{1}{n\ \sigma\ \sqrt{2}}\ .$$

Rješenje:

3 Termodinamika

Zadatak 3.1. *Neka pri ne suviše niskim temperaturama za* 1 *mol realnog plina vrijedi jednadžba stanja*

$$PV = RT - \frac{CP}{T^2}$$

gdje je C neka konstanta.
Izračunajte termodinamičke koeficijente α, β, κ.

Rješenje:

Definiramo redom:

- volumni koeficijent toplinskog rastezanja α;
- toplinski koeficijent tlaka β;
- izotermni koeficijent kompresije κ.

$$\alpha = \frac{1}{V}\Big(\frac{\partial V}{\partial T}\Big)_P$$

$$\beta = \frac{1}{P}\Big(\frac{\partial P}{\partial T}\Big)_V$$

$$\kappa = \frac{-1}{V}\Big(\frac{\partial V}{\partial P}\Big)_T$$

Izvod za α:

$$PV = RT - \frac{CP}{T^2}\Big/\frac{\partial}{\partial T}, \quad P = konst.$$

$$P * \frac{\partial V}{\partial T} = R * \frac{\partial T}{\partial T} - CP * \frac{\partial T^{-2}}{\partial T}$$

$$P * \frac{\partial V}{\partial T} = R + CP * \frac{2}{T^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P} + \frac{2C}{T^3}$$

Sada ovaj izraz uvrstimo u izraz za volumni koeficijent toplinskog rastezanja α:

$$\alpha = \frac{1}{V}\Big(\frac{R}{P} + \frac{2C}{T^3}\Big)$$

Ubacimo $\frac{1}{V}$ unutar zagrada i izbacimo $\frac{1}{T}$ ispred:

$$\alpha = \frac{1}{T}\Big(\frac{RT}{PV} + \frac{2C}{VT^2}\Big)$$

Početnu jednadžbu stanja za zadani realni plin svodimo na izraz za $\frac{RT}{PV}$:

$$\frac{RT}{PV} = \frac{C}{VT^2} + 1$$

Taj izraz supstituiramo u našu jednadžbu:

$$\alpha = \frac{1}{T}\Big(\frac{C}{VT^2} + \frac{2C}{VT^2} + 1\Big)$$

$$\alpha = \frac{1}{T}\Big(1 + \frac{3C}{VT^2}\Big)$$

Izvod za β:

$$PV = RT - \frac{CP}{T^2}\Big/\frac{\partial}{\partial T}, \quad V = konst.$$

$$V * \frac{\partial P}{\partial T} = R - \frac{C}{T^2} * \frac{\partial P}{\partial T} + \frac{2CP}{T^3}$$

$$V\frac{\partial P}{\partial V} + \frac{C}{T^2}\frac{\partial P}{\partial T} = R + \frac{2CP}{T^3}$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{RT^3 + 2CP}{VT^3 + CT} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R + \frac{2CP}{T^3}}{V + \frac{C}{T^2}}$$

$$\beta = \frac{1}{P}\frac{R + \frac{2CP}{T^3}}{V + \frac{C}{T^2}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\frac{R}{P} + \frac{2C}{T^3}}{V + \frac{C}{T^2}} \Bigg/ \frac{\frac{T}{V}}{\frac{T}{V}} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\frac{RT}{PV} + \frac{2C}{VT^2}}{T + \frac{C}{VT}}$$

Ponovo kao i za α izrazimo $\frac{RT}{PV}$ iz zadane jednadžbe za realni plin i uvrstimo:

$$\beta = \frac{1}{T}\Big(\frac{1 + \frac{3C}{VT^2}}{1 + \frac{C}{VT^2}}\Big)$$

Izvod za κ:

$$PV = RT - \frac{CP}{T^2} \Big/ \frac{\partial}{\partial P}, \quad T = konst.$$

$$V + P * \frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{C}{T^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial P} = -\frac{C}{PT^2} - \frac{V}{P}$$

Sada ovaj izraz uvrstimo u izraz za izotermni koeficijent kompresije κ:

$$\kappa = -\frac{1}{V}\Big(-\frac{C}{PT^2} - \frac{V}{P}\Big)$$

Unutar zagrade ubacimo $\frac{-1}{V}$ i izbacimo $\frac{1}{P}$:

$$\kappa = \frac{1}{P}\Big(1 + \frac{C}{VT^2}\Big)$$

U granici $C = 0$, u početnoj jednadžbi za realni plin dobijamo izraz za idealni plin pa se time i koeficijenti reduciraju na izraze koji opisuju idealni plin:

$$\alpha = \beta = \frac{1}{T}, \quad \kappa = \frac{1}{P}$$

Zadatak 3.2. *Množina idealnog plina* $z = 3,6$ *mol izobarno se ohladi sa* $T_1 = 300K$ *na* $T_2 = 280K$.
Izračunajte izgubljenu toplinu ako je molarni toplinski kapacitet plina pri konstantnom volumenu $2,5R$*, gdje je* R *plinska konstanta.*

Rješenje:

Krećemo od relacije za toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$$

Tu relaciju uvrštavamo u 1. zakon termodinamike:

$$d'Q = dU + pdV \quad \Rightarrow \quad d'Q = C_V dT + pdV$$

Za idealni plin pri konstantnom tlaku vrijedi:

$$pdV = zRdT$$

Pošto je zadan molarni toplinski kapacitet koji se odnosi na mol tvari, množimo ga sa količinom tvari koja je zadana u molovima:

$$C_V = 2,5R * z$$

Taj izraz, zajedno sa ostalim zadanim veličinama, uvrštavamo u modificirani 1.ZTD. i integriramo po temperaturi za koju nam je zadano početno i završno stanje:

$$d'Q = C_V dT + zRdT \quad \Rightarrow \quad d'Q = (C_V + zR)dT \Big/ \int$$

$$Q = (C_V + zR)\int_{T_1}^{T_2} dT \quad \Rightarrow \quad Q = (C_V + zR)(T_2 - T_1)$$

$$Q = (2,5 * 8,314\frac{J}{Kmol} * 3,6mol + 3,6mol * 8,314\frac{J}{Kmol}) * (280K - 300K)$$

$$Q = 104,76\frac{J}{K} * (-20K)$$

$$Q = -2095,2J$$

Negativan predznak znači da plin gubi toplinu.

Zadatak 3.3. *U aproksimaciji idealnog plina izračunajte koliku toplinu moramo predati plinu neona mase $M = 1,5kg$ da bismo mu pri konstantnoj temperaturi $T = 400K$ udvostručili volumen.*
Molarna masa neona jest $\mu = 0,0202\frac{kg}{mol}$.

Rješenje:

Krenimo od 1.ZTD:

$$d'Q = dU + pdV \quad \Rightarrow \quad d'Q = C_V dT + pdV$$

Po postavci zadatka imamo izotermni proces pa je promjena temperature jednaka nuli, tj. $dT = 0$ odakle nam slijedi:

$$d'Q = pdV$$

Pošto je zadan idealni plin, koristimo jednadžbu idealnog plina:

$$pV = zRT \quad \Rightarrow \left[z = \frac{M}{\mu}\right] \Rightarrow \quad pV = \frac{M}{\mu}RT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{M}{\mu}RT * \frac{1}{V}$$

Integriramo po volumenu za koji imamo izraženu promjenu kao $V_2 = 2V_1$:

$$d'Q = pdV \quad \Rightarrow \quad d'Q = \frac{MRT}{\mu} * \frac{dV}{V} \Big/ \int$$

$$Q = \frac{MRT}{\mu}\int_{V_1}^{V_2}\frac{dV}{V} \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{MRT}{\mu} * (\ln|V_2| - \ln|V_1|)$$

Uvrštavamo poznate veličine, razliku logaritama zapisujemo kao razlomak i volumene izražavamo preko dane relacije:

$$Q = \frac{1,5kg * 8,314\frac{J}{Kmol} * 400K}{0,0202\frac{kg}{mol}} * \ln\left|\frac{2V_1}{V_1}\right|$$

$$Q = \frac{4988,4J}{0,0202} * \ln 2$$

$$Q = 1,73 * 10^5 J$$

Zadatak 3.4. *Zagrijavajući se izobarno, plin je primio toplinu $Q = 84kJ$ i pritom povećao svoju unutrašnju energiju za $\Delta U = 60kJ$.
Primjenom modela idealnog plina izračunajte omjer $\frac{C_P}{C_V}$.*

Rješenje:

Ispišimo 1.ZTD. i jednadžbu idealnog plina za zadani plin pri izobarnom zagrijavanju.
Ukupna primljena toplina iz 1.ZTD:

$$Q = \Delta U + p\Delta V$$

Jednadžba idealnog plina pri promjeni volumena i temperature iz početnog u završno stanje:

$$p\Delta V = zR\Delta T$$

Iz relacije za toplinski kapacitet plina pri konstantnom volumenu izrazit ćemo promjenu unutrašnje energije:

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \Rightarrow dU = C_V dT \Rightarrow \Delta U = C_V \Delta T$$

Uvrstit ćemo dobiveni rezultat u 1.ZTD:

$$Q = C_V \Delta T + zR\Delta T \quad \Rightarrow \quad Q = (C_V + zR)\Delta T$$

Sada iz relacije $C_P = C_V + zR$ dobivamo za toplinu:

$$Q = C_P \Delta T$$

Izrazili smo oba kapaciteta preko poznatih veličina. Sada to uvrstimo u zadani omjer:

$$\frac{C_P}{C_V} = \frac{\frac{Q}{\Delta T}}{\frac{\Delta U}{\Delta T}} = \frac{Q}{\Delta U} = \frac{84kJ}{60kJ} = 1,4$$

Zadatak 3.5. *Iz početnog stanja sa tlakom* $p_1 = 25kPa$ *i volumenom* $V_1 = 0,2m^3$*, idealni plin je izotermno povećao svoj tlak na vrijednost* $p_2 = 30kPa$*. Koliki je rad u promatranom procesu?*

Rješenje:

Rad idealnog plina u izotermnom procesu je zadan izrazom:

$$W = \int_1^2 pdV$$

Iz jednadžbe stanja idealnog plina dobivamo izraz za tlak:

$$pV = zRT \quad \Rightarrow \quad p = \frac{zRT}{V}$$

Uvrstimo tlak u izraz za rad i riješimo integral:

$$W = zRT * \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \quad \Rightarrow \quad W = zRT * \ln\left|\frac{V_2}{V_1}\right|$$

Iz jednadžbe stanja izotermnih procesa dobivamo:

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$W = p_1V_1 * \ln\frac{p_1}{p_2}$$

Uvrstimo poznate vrijednosti:

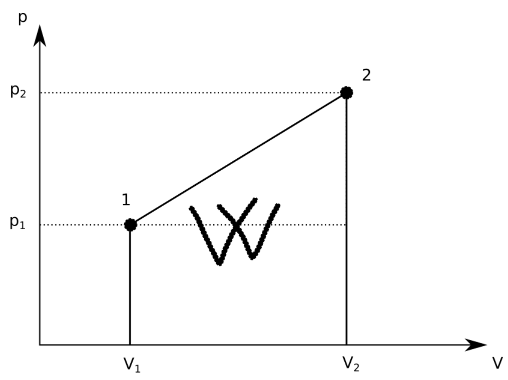
$$W = 25 * 10^3 kPa * 0,2m^3 * \ln\frac{25kPa}{30kPa}$$

$$W = -911,6J$$

Negativni predznak znači da rad nije obavio plin, nego su ga obavile vanjske sile.

Zadatak 3.6. *Promatrajući termodinamički proces u kojemu je tlak proporcionalan s volumenom, odredite rad ako je u početnom stanju* $p_1 = 2,3MPa$, $V_1 = 4,4m^3$, *a u konačnom stanju* $p_2 = 3,7MPa$, $V_2 = 6,5m^3$.

Rješenje:



Iznos rada termodinamičkog procesa jednak je površini ispod grafa što ga čini traženi proces u $p - V$ dijagramu.
Površinu vidimo na slici poviše. Možemo je podijeliti na dva dijela. Prvi dio čini pravokutnik duljina stranica $(V_2 - V_1)$ i $(p_1 - 0)$, a drugi dio trokut osnovice duljine $(V_2 - V_1)$ i visine $(p_2 - p_1)$.

Zbroj površina nam daje traženi rad:

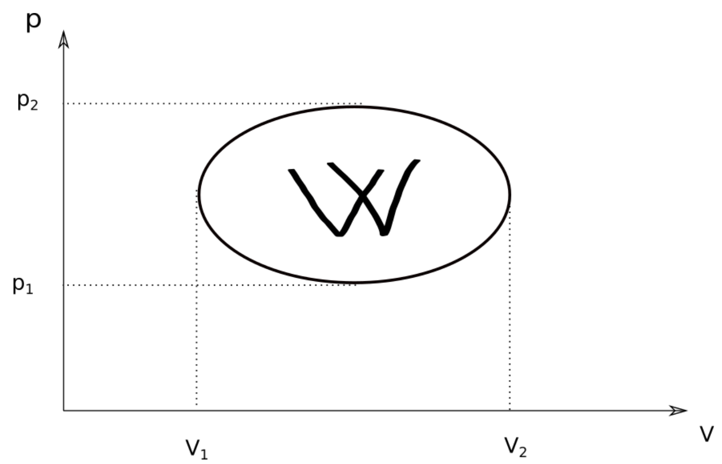
$$W = p_1 * (V_2 - V_1) \quad + \quad \frac{(V_2 - V_1) * (p_2 - p_1)}{2}$$

$$W = (V_2 - V_1) * \left[p_1 + \frac{p_2 - p_1}{2}\right] = 2,1m^3 * 3MPa$$

$$W = 6,3MJ$$

Zadatak 3.7. *$P-V$ dijagram kružnog procesa, u kojem sustav prima toplinu od okoline, ima oblik elipse.*
Koliko puta moramo ponoviti ciklus da bi sveukupna primljena toplina bila $\Delta Q = 2,826MJ$ ako je razlika između maksimalnoga i minimalnoga tlaka $\Delta p = 48kPa$, a maksimalnoga i minimalnoga volumena $\Delta V = 1,5m^3$.

Rješenje:



Nakon svakog ciklusa sustav je u stanju početne unutrašnje energije, pa je prema 1.Z.TD. primljena toplina jednaka obavljenom radu.
Rad u jednom ciklusu brojčano je jednak površini elipse.

Površinu elipse računamo po formuli

$$P = a * b * \pi$$

gdje su a i b duljine velike i male poluosi elipse.
Iz slike slijedi:

$$W_0 = \frac{\Delta p}{2} * \frac{\Delta V}{2} * \pi$$

-u n ciklusa sustav prima toplinu koja je n puta veća: $Q = n * W_0$

$$n = \frac{Q}{W_0} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{4 * Q}{\Delta p * \Delta V * \pi} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{4 * 2,826 * 10^6 J}{48 * 10^3 J * 1,5 m^3 * \pi}$$

$$n = 49,97 \approx 50$$

Zadatak 3.8. *Odredite izraz za molarni toplinski kapacitet idealnog plina u procesu u kojem je tlak plina proporcionalan s volumenom:*

$$p = a * V$$

Rješenje:

Molarni toplinski kapacitet odrediti ćemo iz izraza : $C = \frac{d'Q}{dT}$

1.Z.TD. za idealne plinove:

$$d'Q = dU + pdV \quad \Big| \quad dU = C_V dT$$

$$d'Q = C_V dT + aV dV \quad \Big| \quad dV^2 = 2V dV \Rightarrow \frac{dV^2}{2V} = dV$$

$$d'Q = C_V dT + \frac{a}{2} dV^2$$

Jednadžba stanja 1 *mola* idealnog plina:

$$pV = RT \quad \Rightarrow \quad a * V * V = RT \quad \Rightarrow \quad aV^2 = RT \quad \Rightarrow \quad adV^2 = RdT$$

Uvrstimo u dobiveni izraz za 1.Z.TD:

$$d'Q = C_V dT + \frac{1}{2} RdT \quad \Rightarrow \quad d'Q = \Big(C_V + \frac{R}{2}\Big) dT$$

Uspoređujući dobiveni izraz sa izrazom $C = \frac{d'Q}{dT}$, dobijemo izraz za C:

$$C = C_V + \frac{R}{2}$$

Znamo da vrijedi jednakost: $C_p - C_V = R$

$$C = C_V + \frac{1}{2}(C_p - C_V)$$

$$C = \frac{C_p + C_V}{2}$$

Zadatak 3.9. *Idealni plin koji sadrži N molekula prelazi iz početnog stanja 1 u konačno stanje 2.*
Odredite izraz za promjenu entropije plina i primjenite ga u IZOBARNIM, IZOTERMNIM i IZOHORNIM procesima.

Rješenje:

Za idealni plin vrijedi:

$$dU = C_V dT, \quad pV = NkT \Rightarrow p = \frac{NkT}{V}, \quad TdS = dU + pdV$$

Uvrštavamo u osnovnu relaciju termodinamike za sustave u termičkoj ravnoteži:

$$dS = C_V \frac{dT}{T} + Nk \frac{dV}{V} \quad \Big/ \int$$

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \left| \frac{T_2}{T_1} \right| + Nk \ln \left| \frac{V_2}{V_1} \right|$$

IZOBARNI PROCESI:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}, \quad C_p = C_V + Nk$$

$$S_2 - S_1 = C_p \ln \frac{T_2}{T_1}$$

IZOHORNI PROCESI:

$$V_2 = V_1$$

$$S_2 - S_1 = C_V \ln \frac{T_2}{T_1}$$

IZOTERMNI PROCESI:

$$T_2 = T_1$$

$$S_2 - S_1 = Nk \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Zadatak 3.10. *U izotermnom procesu volumen plina promijenio se od početne vrijednosti V_1 do konačne vrijednosti V_2.*
Odredite promjenu unutrašnje energije ako plin zadovoljava jednadžbu stanja:

$$pV = NkT\Big[1 + \frac{N}{V}B(T)\Big]$$

Rješenje:

Termodinamička relacija:

$$p + \Big(\frac{\partial U}{\partial V}\Big)_T = T\Big(\frac{\partial p}{\partial T}\Big)_V$$

Deriviramo jednadžbu stanja po temperaturi T:

$$V * \Big(\frac{\partial p}{\partial T}\Big)_V = Nk\Big[1 + \frac{N}{V}B(T)\Big] + NkT\Big[\frac{N}{V}\frac{dB(T)}{dT}\Big]$$

$$\Big(\frac{\partial p}{\partial T}\Big)_V = \frac{Nk}{V}\Big[1 + \frac{N}{V}B(T)\Big] + kT\Big(\frac{N}{V}\Big)^2\frac{dB(T)}{dT}$$

Uvrštavamo u termodinamičku jednadžbu:

$$\Big(\frac{\partial U}{\partial V}\Big)_T = \frac{NkT}{V}\Big[1+\frac{N}{V}B(T)\Big]+k\Big(\frac{NT}{V}\Big)^2\frac{dB(T)}{dT}-p, \quad gdje\, je \quad p = \frac{NkT}{V}\Big[1+\frac{N}{V}B(T)\Big]$$

Nakon kraćenja, dobijamo:

$$\Big(\frac{\partial U}{\partial V}\Big)_T = k\Big(\frac{NT}{V}\Big)^2 * \frac{dB(T)}{dT}$$

IZOTERMNI PROCES: $T = konst.$

$$V_1 \to V_2, \quad \Delta U = U(V_2, T) - U(V_1, T)$$

$$\frac{\partial U}{\partial V} = k(NT)^2 * \frac{dB(T)}{dT}\Big(\frac{1}{V^2}\Big)$$

$$dU = k(NT)^2 * \frac{dB(T)}{dT}\frac{dV}{V^2} \qquad \Big/ \int$$

$$U = k(NT)^2 * \frac{dB}{dT}\Big(-\frac{1}{V}\Big)$$

Dobili smo izraz za U u koji možemo uvrstiti početno i završno stanje:

$$U(V_2, T) - U(V_1, T) = k(NT)^2 * \frac{dB(T)}{dT}\Big[\frac{-1}{V_2} - \Big(\frac{-1}{V_1}\Big)\Big]$$

$$\Delta U = k(NT)^2 * \frac{dB(T)}{dT}\Big[\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\Big]$$

Zadatak 3.11. *Tlak elektromagnetskog polja povezan je s gustoćom energije relacijom*

$$p = \frac{u}{3}.$$

Izvedite zakon zračenja crnog tijela.

Rješenje:

u - gustoća energije
U - ukupna energija

Te su veličine povezane relacijom: $u = \frac{U}{V}$

Krenimo od termodinamičke relacije:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

$$u + \frac{u}{3} = T * \frac{du}{dT} * \frac{1}{3}$$

$$\frac{4u}{3du} = \frac{T}{3dT} \quad \Rightarrow \quad \frac{4u}{du} = \frac{T}{dT}$$

$$\frac{du}{4u} = \frac{dT}{T} \quad \Big/ \int$$

$$\ln|u| = 4\ln|T| + C \quad \Big/^{e} \quad \Rightarrow \quad e^{\ln|u|} = e^C e^{4*\ln|T|}$$

Supstituiramo integracijsku konstantu: $a = e^C$

$$u = aT^4$$

Uvrštavajući izraz $u = \frac{U}{V}$, dobijamo **Stefan-Boltzmanov zakon zračenja crnog tijela** koji predstavlja ukupnu energiju zračenja u volumenu V:

$$U = aVT^4$$

Zadatak 3.12. *Neka je poznata slobodna energija kao funkcija temperature, volumena i broja čestica.*
Odredite izraz za kemijski potencijal sustava μ.

Rješenje:

U termičkoj ravnoteži, osnovna relacija termodinamike za sustave varijabilnog broja čestica jest:

$$TdS = dU + pdV - \mu dN$$

Slobodna energija je zadana izrazom:

$$F = U - TS$$

Prebacimo je u diferencijalni oblik:

$$dF = dU - TdS - SdT$$

$$dF = dU - dU - pdV + \mu dN - SdT$$

$$dF = \mu dN - pdV - SdT$$

Budući je dF totalni diferencijal, mora vrijediti:

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_{N,T} \quad , \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{N,V} \quad , \quad \mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{V,T}$$

Dobili smo Maxwellove relacije.
U prve dvije promatramo sustave konstantnog broja čestica. Treća nam daje traženu vezu kemijskog potencijala sa slobodnom energijom.

4 Klasična statistička fizika

Zadatak 4.1. *Koliko atoma u molu plina helija na temperaturi $T = 450K$ ima brzinu između v_1 i v_2, gdje su $v_1 = 800\frac{m}{s}$, $v_2 = 804\frac{m}{s}$.*
Masa atoma helija jest $m_{He} = 6,65 * 10^{-27}kg$.

Rješenje:

Raspodjela atoma (čestica) prema iznosu brzine određena je funkcijom $P(v^2)$.
Tu funkciju nazivamo *funkcijom Maxwellove raspodjele.*
Ona nam daje vjerojatnost da se čestica, u ovom slučaju atom, nađe u nekom intervalu brzina.
Skup čestica kojeg promatramo je 1 mol atoma u plinu helija, tj. *Avogadrov broj* N_A atoma helija ima brzinu distribuiranu po Maxwellovoj raspodjeli. Množeći ukupan broj atoma sa vjerojatnosti nalaženja atoma u danom intervalu brzine, dobit ćemo broj atoma koji se nalazi u tom intervalu.

To zapisujemo na sljedeći način:

$$N = N_A * \int_{v_1}^{v_2} P(v^2)dv \quad ,$$

gdje je

$$P(v^2) = 4\pi\Big(\frac{m}{2\pi kT}\Big)^{\frac{3}{2}} * v^2 * e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \quad .$$

Uvrštavajući u izraz funkciju Maxwellove raspodjele i poznate veličine, dobijamo rješenje.

$$N = N_A * 4\pi\Big(\frac{m}{2\pi kT}\Big)^{\frac{3}{2}} * \int_{v_1}^{v_2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

Aproksimacija integrala:
Određeni integral nam predstavlja površinu ispod krivulje omeđenu granicama integracije. Kad je razlika među granicama dovoljno mala, integral možemo aproksimirati pravokutnikom ispod krivulje čija je jedna stranica definirana tim granicama, a druga stranica srednjom vrijednosti funkcije među tim granicama.

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)f(c), \quad c \in [a,b]$$

Za točku $c \in [v_1, v_2]$ ćemo uzeti $\overline{v} = \frac{v_1+v_2}{2}$.

$$\int_{v_1}^{v_2} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv \approx (v_2 - v_1) * \left(\frac{v_1 + v_2}{2}^2\right) * e^{-m\frac{\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)^2}{2kT}}$$

Dobijamo konačan oblik:

$$N = N_A * 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} * (v_2 - v_1) * \left(\frac{v_1 + v_2}{2}^2\right) * e^{-m\frac{(v_1+v_2)^2}{8kT}}$$

$$N = 6,022 * 10^{23} mol^{-1} * 4\pi * \left(\frac{6,65 * 10^{-27} kg}{2\pi * 450K * 1,38 * 10^{-23} JK^{-1}}\right)^{\frac{3}{2}} * ...$$

$$... * (4ms^{-1}) * 643204 m^2 s^{-2} * e^{-\frac{4,28*10^{-21} kgm^2 s^{-2}}{1,245*10^{-20} J}}$$

$$N = 9,744 * 10^{20} \frac{1}{mol}$$

Zadatak 4.2. *Kolika je vjerojatnost da su u plinu dušika na temperaturi* $0°C$ *iznosi svih triju Cartesiusovih komponenti translacijske molekulske brzine u intervalu između* $v_1 = 400\frac{m}{s}$ *i* $v_2 = 500\frac{m}{s}$.
Masa molekule dušika jest $m = 4,65 * 10^{-26} kg$.

Rješenje:

Za razliku od prošlog zadatka, ovdje tražimo vjerojatnost nalaženja čestice u intervalu brzine u svakoj komponenti zasebno.
Vjerojatnost da čestica ima x komponentu translacijske brzine između v_1 i v_2 je dana izrazom:

$$w_x = 2 * \int_{v_1}^{v_2} f(v_x{}^2) dv_x, \quad gdje\ je \quad f(v_x{}^2) = \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} * e^{-\frac{m v_x{}^2}{2kT}}$$

Integral za traženu vjerojatnost množimo sa 2 pošto na osi x imamo pozitivnu i negativnu brzinu. U ovom slučaju gledamo apsolutan iznos brzine tako da nam negativna komponenta predstavlja samo suprotan smjer.

U zadatku tražimo vjerojatnost da se sve tri komponente nađu u traženom intervalu.
Znamo da je gibanje čestice u jednoj komponenti neovisno o gibanju u druge dvije komponente. Vjerojatnost skupa nezavisnih događaja dobivamo množenjem vjerojatnosti tih događaja zasebno:

$$w = w_x * w_y * w_z$$

Pretpostavljamo još da su vjerojatnosti za sve komponentne jednake, tj:

$$w_x = w_y = w_z \quad \rightarrow \quad w = (w_x)^3 = (w_y)^3 = (w_z)^3$$

Dobivamo konačan oblik tražene vjerojatnosti:

$$w = (w_x)^3 = \left[2 * \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} * \int_{v_1}^{v_2} e^{-\frac{m v_x{}^2}{2kT}} dv_x \right]^3$$

Uvedimo supstituciju:

$$t = \sqrt{\frac{m{v_x}^2}{2kT}}, \quad t^2 = \frac{m{v_x}^2}{2kT}, \quad dt = \sqrt{\frac{m}{2kT}}dv_x$$

$$w_x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} * \sqrt{\frac{m}{2kT}} * \sqrt{\frac{2kT}{m}} * \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt$$

$$w_x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} * \int_{t_1}^{t_2} e^{-t^2} dt$$

Da bismo riješili ovaj integral, uvodimo funkciju $\Phi(x)$ oblika:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} * \int_{o}^{x} e^{-t^2} dt$$

Rješenja ove funkcije za vrijednosti varijable x su dane u tablici koja se može naći u Šipsu[1] i također je dana na kraju ove skripte.

$$t = \sqrt{\frac{m{v_x}^2}{2kT}} \rightarrow t = \sqrt{\frac{4,65 * 10^{-26} kg}{2 * 1,38 * 10^{-23} JK^{-1} * 273,15K}} * v$$

$$t_1 = 0,994 \quad , \quad t_2 = 1,241$$

$$w_x = \Phi(1,241) - \Phi(0,994)$$

$$w_x = 0,081$$

$$w = (w_x)^3 = (0,081)^3 = 0,00053$$

Zadatak 4.3. *Da li je veća vjerojatnost da je iznos x-komponente translacijske molekulske brzine između najvjerojatnije i srednje brzine ili srednje i srednje kvadratne brzine?*

Rješenje:

v_m - najvjerojatnija brzina
$\overline{v}$ - srednja brzina
v_s - srednja kvadratna brzina

$$v_m = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad ; \quad \overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad ; \quad v_s = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

Kao i u prošlom zadatku, vjerojatnost da je iznos x-komponente brzine između v_m i $\overline{v}$ jest:

$$\omega_1 = 2 * \int_{v_m}^{\overline{v}} f({v_x}^2) dv_x$$

Da je iznos x-komponente brzine između $\overline{v}$ i v_s:

$$\omega_2 = 2 * \int_{\overline{v}}^{v_s} f({v_x}^2) dv_x$$

Rješavamo integrale i uspoređujemo dobivene vjerojatnosti.
U prošlom smo zadatku objasnili kako riješiti ovaj integral tako da ovdje direktno računamo vrijednosti supstitucijske varijable t i uvrštavamo u funkciju Φ.

$$t = \sqrt{\frac{m{v_x}^2}{2kT}}$$

$$t_m = \sqrt{\frac{m}{2kT}} * \sqrt{\frac{2kT}{m}} \Rightarrow t_m = 1$$

$$\overline{t} = \sqrt{\frac{m}{2kT}} * \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \Rightarrow \overline{t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} = 1,128$$

$$t_s = \sqrt{\frac{m}{2kT}} * \sqrt{\frac{3kT}{m}} \Rightarrow t_s = 1,225$$

$$\omega_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} * \int_{1}^{1,128} e^{-t^2} dt$$

$$\omega_1 = \Phi(1,128) - \Phi(1) = 0,0467$$

$$\omega_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} * \int_{1,128}^{1,225} e^{-t^2} dt$$

$$\omega_2 = \Phi(1,225) - \Phi(1,128) = 0,0271$$

Uspoređujući dobivene vjerojatnosti ω_1 i ω_2 vidimo da je $\omega_1 > \omega_2$, tj. vjerojatnost da je iznos x-komponente translacijske brzine između najvjerojatnije i srednje brzine veći je od vjerojatnosti da je između srednje i srednje kvadratne brzine.

Zadatak 4.4. *Za plin u kojem vrijedi Maxwellova raspodjela molekula prema brzinama, izračunajte omjer*

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} : \frac{1}{\overline{v}} \quad .$$

Rješenje:

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\overline{v}} = \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}$$

Srednju vrijednost dobivamo tako da promatranu veličinu pomnožimo s vjerojatnošću, a dobiveni umnožak integriramo po cijelom području.

$$\overline{v} = \int_0^\infty v * P(v^2) dv$$

Primjenjujući taj izraz na traženi razlomak, dobijamo:

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = \int_0^\infty \left(\frac{1}{v}\right) * P(v^2) dv$$

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = 4\pi * \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} * \int_0^\infty \frac{1}{v} * v^2 * e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

SUPSTITUCIJA:

$$\sqrt{\frac{m}{2kT}} v = t \quad , \quad v = \sqrt{\frac{2kT}{m}} t \quad , \quad \sqrt{\frac{m}{2kT}} dv = dt \quad , \quad dv = \sqrt{\frac{2kT}{m}} dt$$

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = 4\pi * \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} * \sqrt{\frac{2kT}{m}} * \sqrt{\frac{2kT}{m}} * \int_0^\infty t * e^{-t^2} dt$$ [1]

Pošto znamo rješenje ovog integrala, sređujući izraz, dobijamo:

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}$$

[1] Postupak rješavanja ovog integrala je izveden na kraju skripte.

Sada tražimo omjer dobivenih veličina:

$$\frac{\overline{\left(\frac{1}{v}\right)}}{\frac{1}{\overline{v}}} = \frac{\sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}}{\sqrt{\frac{\pi m}{8kT}}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{\pi}}{\frac{\pi}{8}}}$$

$$\frac{\overline{\left(\frac{1}{v}\right)}}{\frac{1}{\overline{v}}} = \frac{4}{\pi}$$

Zadatak 4.5. *Odredite vjerojatnost da se projekcija translacijske brzine molekule na $x-y$ ravnini nalazi između najvjerojatnije i srednje kvadratne brzine.*

Rješenje:

Tražena vjerojatnost će biti:

$$\omega = \frac{\int_{v_m}^{v_s} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} * u * du}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{mu^2}{2kT}} * u * du}$$

SUPSTITUCIJA:

$$\frac{mu^2}{2kT} = t \quad , \quad \frac{m}{2kT} 2udu = dt \quad , \quad udu = \frac{kT}{m} dt$$

Granice za integral u brojniku:

$$t_1 = \frac{m}{2kT} * \frac{2kT}{m} = 1 \quad , \quad t_2 = \frac{m}{2kT} * \frac{3kT}{m} = \frac{3}{2}$$

Granice za integral u nazivniku:

$$t_3 = \frac{m}{2kT} * 0 = 0 \quad , \quad t_4 = \frac{m}{2kT} * \infty = \infty$$

$$\omega = \frac{\frac{kT}{m} * \int_1^{\frac{3}{2}} e^{-t} dt}{\frac{kT}{m} * \int_0^{\infty} e^{-t} dt}$$

Pošto je rješenje integrala $\int e^{-t} dt = -e^{-t} + C$, dobivamo sljedeći izraz za traženu vjerojatnost:

$$\omega = \frac{-e^{-\frac{3}{2}} - \left(-e^{-1}\right)}{-e^{-\infty} - \left(-e^{-0}\right)} = \frac{\frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{e}}{0 - 1}$$

$$\omega = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^{\frac{3}{2}}} = 0,144$$

Zadatak 4.6. *Neka se molekule jednoatomnog idealnog plina gibaju u ravnini. Odredite relativan broj molekula kojima je energija veća od kT.*

Rješenje:

Relativan broj molekula označavamo sa $\frac{\Delta N}{N}$ gdje je N ukupan broj molekula, a ΔN broj molekula sa danim svojstvom.
Drugim riječima, tražimo udio molekula sa brzinom većom od kT u skupu molekula sa svim mogućim brzinama.

$$E > kT \quad , \quad kT = \frac{m{v_0}^2}{2}$$

$$N = N_A 4\pi \Big(\frac{m}{2\pi kT}\Big)^{\frac{3}{2}} \int_{v_1}^{v_2} v^2 \; e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \; dv$$

Konstante ispred integrala se krate i time dobivamo sljedeći oblik:

$$\frac{\Delta N}{N} \; = \; \frac{\int_{v_0}^{\infty} \; e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \; v \; dv}{\int_0^{\infty} \; e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \; v \; dv}$$

SUPSTITUCIJA:

$$\frac{mv^2}{2kT} = t \quad , \quad \frac{m}{2kT} \; 2vdv = dt \quad , \quad vdv = \frac{kT}{m} \; dt$$

Granice za integral u brojniku:

$$t_1 = \frac{m}{2kT} * \frac{2kT}{m} = 1 \quad , \quad t_2 = \frac{m}{2kT} * \infty = \infty$$

Granice za integral u nazivniku:

$$t_3 = \frac{m}{2kT} * 0 = 0 \quad , \quad t_4 = \frac{m}{2kT} * \infty = \infty$$

$$\frac{\Delta N}{N} \; = \; \frac{\frac{kT}{m} \; \int_1^{\infty} \; e^{-t} \; dt}{\frac{kT}{m} \; \int_0^{\infty} \; e^{-t} \; dt}$$

Pošto je rješenje integrala $\int e^{-t}dt = -e^{-t} + C$, dobivamo sljedeći izraz za relativan broj molekula kojima je energija veća od kT:

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{-e^{-\infty} - (-e^{-1})}{-e^{-\infty} - (-e^{-0})} = \frac{0 - \frac{1}{e}}{0 - 1}$$

$$\frac{\Delta N}{N} = \frac{1}{e} = 0,3678$$

Zadatak 4.7. *Temperatura na površini Sunca približno je* $6000K$. *Mogu li na tako visokoj temperaturi atomi vodika u većoj mjeri napuštati Sunce?*

$Masa\ vodika:\ m = 1,66 * 10^{-27}\ kg$
$Masa\ Sunca:\ M = 1,97 * 10^{30}\ kg$
$Radijus\ Sunca:\ 6,95 * 10^{8}\ m$

Rješenje:

Brzina potrebna da tijelo (u ovom slučaju atom) napusti nebeski objekt zove se **2. Kozmička brzina**.
Iz Maxwellove raspodjele možemo dobiti srednju brzinu atoma pri nekoj temperaturi. Usporedbom tih brzina procijenjujemo vjerojatnost da atom vodika napusti Sunce.

IZVOD 2. KOZMIČKE BRZINE:

Krećemo od potencijalne energije između u našeg tijela i nebeskog objekta koju izjednačavamo sa kinetičkom energijom tijela:

$$E_G = G\,\frac{m\ M}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{m{v_0}^2}{2} = G\,\frac{m\ M}{R} \quad \Rightarrow \quad {v_0}^2 = G\,\frac{2M}{R}$$

$$\boldsymbol{v_s} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Sada računamo 2. Kozmičku brzinu i srednju brzinu atoma vodika na Suncu:

$$v_s = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2 * 6,674 * 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}\ *\ 1,97 * 10^{30}\ kg}{6,95 * 10^{8}\ m}} = 615,1\ \frac{km}{s}$$

$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8\ *\ 1,38 * 10^{-23}\ \frac{J}{K}\ *\ 6000\ K}{\pi\ *\ 1,66 * 10^{-27}\ kg}} = 11,3\ \frac{km}{s}$$

Iako je dobivena srednja brzina velika brzina za atome, ona je još uvijek jedno 55 puta manja od brzine potrebne za napuštanje Sunca.
Stoga je emisija atoma vodika sa Sunca slaba.

Zadatak 4.8. *Na plin istovrsnih molekula, koje se nalaze u beskonačno visokom cilindru, djeluje gravitacijska sila.*
Pretpostavljajući da je na svim visinama temperatura jednaka $10°C$*, odredite molekulsku masu ako je težište plina na visini* $\overline{x} = 30\ km$.

Rješenje:

Potencijalna energija molekule na visini x je jednaka:

$$E_p = mgx$$

U zadatku imamo zadanu distribuciju molekula kroz cilindar s obzirom na gravitacijsku potencijalnu energiju.
Težište plina u tom slučaju predstavlja prosječnu vrijednost pomaka molekule u potencijalnom polju.
Prosječnu vrijednost izražavamo na sljedeći način:

$$\overline{A} = \frac{\int Ae^{-\beta E}\, d\phi}{\int e^{-\beta E}\, d\phi}$$

U dani izraz uvrštavamo potencijalnu energiju i integriramo po cijelom cilindru, što je od 0 do ∞:

$$\overline{x} = \frac{\int_0^\infty x\, e^{-\frac{mgx}{kT}}\, dx}{\int_0^\infty e^{-\frac{mgx}{kT}}\, dx}$$

Integral u nazivniku rješavamo običnom supstitucijom:

$$\frac{mg}{kT}\, x = t \quad , \quad \frac{mg}{kT}\, dx = dt$$

$$\int_0^\infty e^{-\frac{mgx}{kT}}\, dx = -\frac{kT}{mg}\,(0-1) = \frac{kT}{mg}$$

Integral u brojniku rješavamo parcijalnom integracijom na sljedeći način:

$$u = x \quad , \quad du = dx \quad , \quad dv = e^{-\frac{mgx}{kT}}dx \quad , \quad v = -\frac{mg}{kT}\, e^{-\frac{mgx}{kT}}$$

$$= -x\,\frac{kT}{mg}\, e^{-\frac{mgx}{kT}} + \int_0^\infty \frac{kT}{mg}\, e^{-\frac{mgx}{kT}}\, dx = \left(\frac{kT}{mg}\right)^2$$

Uvrštavajući rješenja u izraz za težište plina, dobivamo:

$$\overline{x} \;=\; \frac{\int_0^\infty \; x \; e^{-\frac{mgx}{kT}} \; dx}{\int_0^\infty \; e^{-\frac{mgx}{kT}} \; dx} \;=\; \frac{\left(\frac{kT}{mg}\right)^2}{\frac{kT}{mg}}$$

$$\overline{x} \;=\; \frac{kT}{mg} \quad \Rightarrow \quad m \;=\; \frac{kT}{g\overline{x}}$$

$$m \;=\; \frac{1,38 * 10^{-23} \; \frac{J}{K} \; * \; 283,15 \; K}{9,81 \; \frac{m}{s^2} \; * \; 30 * 10^3 \; m} \;=\; 1,33 * 10^{-26} \; kg$$

Zadatak 4.9. *U posudi visine* 250 *m nalazi se argon pri konstantnoj temperaturi* 275 *K. Neka je pri dnu posude srednji slobodni put atoma* $l(0) = 5 * 10^{-6}$ *m. Odredite srednji slobodni put atoma pri vrhu posude.*
Molarna masa argona jest $\mu = 0,04\ \frac{kg}{mol}$.

Rješenje:

Za molekule u gravitacijskom polju koncentraciju u ovisnosti o pomaku uz uvjet konstantne temperature možemo izraziti formulom:

$$n(x) \ = \ n(0)\ e^{-\frac{Mgx}{kT}}$$

$$z \ = \ \frac{N}{N_A} \ = \ \frac{M}{\mu} \quad \Rightarrow \quad M \ = \ \frac{\mu N}{N_A} \quad \Rightarrow \quad M \ = \ \frac{\mu}{N_A}$$

Za N uzimamo 1, tj. promatramo 1 atom argona.
Također vrijedi $R = kN_A$.

$$l \ = \ \frac{1}{n\sigma\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad n \ = \ \frac{1}{l\sigma\sqrt{2}}$$

Uvrštavanjem ovih izraza u početnu formulu, dobivamo:

$$\frac{1}{l(x)\ \sigma\ \sqrt{2}} \ = \ \frac{1}{l(0)\ \sigma\ \sqrt{2}} \ * \ \frac{1}{e^{\frac{\mu g x}{RT}}}$$

$$l(x) \ = \ l(0) \ * \ e^{\frac{\mu g x}{RT}}$$

$$l(250\ m) \ = \ 5 * 10^{-6}\ m \ * \ e^{\frac{0{,}04\ \frac{kg}{mol}\ *\ 9{,}81\ \frac{m}{s^2}\ *\ 250\ m}{8{,}314\ \frac{J}{mol\ K}\ *\ 275\ K}}$$

$$l = 5,22 * 10^{-6}\ m$$

Zadatak 4.10. *Promatrajući idealni plin u kojem se nalazi N istovrsnih jednoatomskih molekula, odredite particijsku funkciju molekule, energiju, i entropiju plina.*

Rješenje:

Particijska funkcija čestice:

$$z \;=\; \frac{2s+1}{h^f} \int e^{-\beta E} \; d\phi$$

Za jednoatomske molekule vrijedi:

$$f = 3, \quad d\phi = d^3p \; d^3r$$

Particijska funkcija jednoatomske molekule:

$$z \;=\; \frac{2s+1}{h^3} \int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \; d^3p \; d^3r, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

Integracijom po koordinatama dobivamo volumen:

$$\int d^3r = V$$

Integracijom po impulsima dobivamo:

$$\int d^3p = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} p^2 \; \sin\theta \; dp \; d\theta \; d\phi = 4\pi \int_0^\infty p^2 \; dp$$

$$d^3p = 4\pi \; p^2 \; dp$$

$$\int e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \; d^3p = 4\pi \int_0^\infty e^{-\beta \frac{p^2}{2m}} \; p^2 \; dp = \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$z = \frac{2s+1}{h^3} * V * (2\pi m k T)^{\frac{3}{2}}$$

Prosječna energija molekule:

$$\overline{E} \ = \ - \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ \ln(z) \right)_V \ = \ \frac{3}{2} \ kT$$

Ukupnu energiju molekula u plinu dobijemo zbrajajući prosječne energije svih čestica, tj. ukupna energija sustava je N puta veća od prosječne energije sustava.

$$U \ = \ N * \overline{E} \ = \ \frac{3}{2} \ NkT$$

Slobodnu energiju plina računamo iz izraza:

$$F \ = \ -kT \ \ln \left[\frac{1}{N!} \ z^N \right]$$

Primjenimo Stirlingovu formulu:

$$\ln \frac{1}{N!} = N \ln \frac{e}{N} \quad \Rightarrow \quad F = -kT \left[N \ln \frac{e}{N} \ + \ \ln z^N \right]$$

$$F \ = \ -NkT \ \left[\ln \left(\frac{2s+1}{h^3} \ \frac{V}{N} \ (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \right) \ + \ 1 \right]$$

Pošto smo dobili izraz za slobodnu energiju, **tlak** plina možemo izračunati kao:

$$p \ = \ - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \ = \ \frac{NkT}{V}$$

Entropiju plina dobivamo iz izraza:

$$S \ = \ - \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_V \ = \ Nk \left[\ln \left[\frac{2s+1}{h^3} \ \frac{V}{N} \ (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} \right] + \frac{5}{2} \right]$$

Zadatak 4.11. *Kolika je entropija sustava sastavljenog od $3N$ jednaka linearna harmonička oscilatora koja titraju frekvencijom ω?*

Rješenje:

Particijska funkcija čestice:

$$z \ = \ \frac{2s+1}{h^f} \int e^{-\beta E} \ d\phi$$

Pošto govorimo o linearnom harmoničkom oscilatoru, nemamo spin i imamo 1 stupanj slobode.

$$s = 0, \quad f = 1, \quad d\phi = dp \ dq$$

Time izraz za particijsku funkciju čestice prelazi u particijsku funkciju linearnog harmoničkog oscilatora danog izrazom:

$$z \ = \ \frac{1}{h} \int_{\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} \ e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2 q^2}{2}\right)} \ dp \ dq, \quad \beta = \frac{1}{kT}$$

Integriramo izraz:

$$z \ = \ \frac{kT}{\hbar\omega}$$

Pošto imamo određenu particijsku funkciju, možemo odrediti i slobodnu energiju:

$$F \ = \ -3NkT \ \ln\left(\frac{kT}{\hbar\omega}\right)$$

Iz Maxwellovih relacija znamo da je entropija jednaka negativnoj derivaciji slobodne energije po temperaturi:

$$S \ = \ -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V \ = \ 3Nk \ \left(1 + \ln\frac{kT}{\hbar\omega}\right)$$

Zadatak 4.12. *Zadana je Hamiltonova funkcija trodimenzionalnog izotropnog harmoničkog oscilatora:*

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + m\omega^2 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

Odredite produkt srednje vrijednosti kvadrata impulsa i srednje vrijednosti kvadrata pomaka iz ravnotežnog položaja.

Rješenje:

U klasičnoj fizici, **zakon jednake raspodjele energije** je općenit.
Bez obzira na oblik gibanja, uvijek je prosječna kinetička energija za stupanj slobode jednaka $\frac{kT}{2}$.

Harmonički oscilator zadan u zadatku ima 3 stupnja slobode u x, y i z smjeru od kojih svaki ima prosječnu kinetičku energiju $\frac{kT}{2}$, tj:

$$\overline{\frac{p_x^2}{2m}} = \overline{\frac{p_y^2}{2m}} = \overline{\frac{p_z^2}{2m}} = \frac{kT}{2}$$

$$\overline{p_x^2} = \overline{p_y^2} = \overline{p_z^2} = mkT$$

Srednju vrijednost kvadrata impulsa i kvadrata pomaka možemo zapisati kao:

$$\overline{p^2} = \overline{p_x^2} + \overline{p_y^2} + \overline{p_z^2}$$
$$\overline{r^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2}$$

Iz toga slijedi:

$$\overline{p^2} = 3\ mkT$$

Prosječne vrijednosti kinetičke i potencijalne energije linearnog harmoničkog oscilatora međusobno su jednake.
Kinetička i potencijalna energija daju prosječnoj vrijednosti energije harmoničkog oscilatora isti doprinos $\frac{kT}{2}$.

Prosječna potencijalna energija harmoničkog oscilatora sa tri stupnja slobode je dana izrazom:

$$\overline{\frac{m\omega^2 x^2}{2}} = \overline{\frac{m\omega^2 y^2}{2}} = \overline{\frac{m\omega^2 z^2}{2}} = \frac{kT}{2}$$

$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = \overline{z^2} = \frac{kT}{m\omega^2}$$

$$\overline{r^2} = 3\,\frac{kT}{m\omega^2}$$

Sada tražimo produkt srednje vrijednosti kvadrata impulsa i srednje vrijednosti kvadrata pomaka:

$$\overline{p^2} \; * \; \overline{r^2} \; = \; 3mkT * \frac{3kT}{m\omega^2} \; = \; \left(\frac{3kT}{\omega}\right)^2$$

Srednje vrijednosti

5 Kvantna statistička fizika

Zadatak 5.1. *Zadan je sustav s dva energetska nivoa:*

$$E_1 = 0 \ , \ E_2 = E \ , \ g_1 = g_2$$

gdje je $E = 3 * 10^{-19}\ J$.
Na kojoj će temperaturi biti zadovoljen uvjet da je:

$$\frac{d\overline{E}}{dT} \ = \ 6 \ \frac{\overline{E}}{T}$$

Rješenje:

Prosječna energija čestice je:

$$\overline{E} \ = \ \frac{E}{e^{\frac{E}{kT}} + 1}$$

E je konstanta.
Tražimo derivaciju prosječne energije po temperaturi da možemo iskoristiti uvjet.

$$\frac{d\overline{E}}{dT} \ = \ k * \left(\frac{E}{kT} \right)^2 \ \frac{e^{\frac{E}{kT}}}{\left(e^{\frac{E}{kT}} + 1 \right)^2}$$

Iskoristimo uvjet u dobivenoj derivaciji:

$$6 \ \frac{\overline{E}}{T} \ = \ k * \left(\frac{E}{kT} \right)^2 \ \frac{e^{\frac{E}{kT}}}{\left(e^{\frac{E}{kT}} + 1 \right)^2}$$

Supstituiramo $x = \frac{E}{kT}$, gdje izraz za prosječnu energiju $\overline{E}$ već imamo zadan.

$$6 \ \frac{E}{kT} \ \frac{1}{\left(e^{\frac{E}{kT}} + 1 \right)} \ = \ \left(\frac{E}{kT} \right)^2 \ \frac{e^{\frac{E}{kT}}}{\left(e^{\frac{E}{kT}} + 1 \right)^2}$$

$$6x \, \frac{1}{(e^x+1)} \; = \; x^2 \, \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$x \; = \; 6 \, (1 + e^{-x})$$

Pošto jednadžba ovog oblika nema algebarsko rješenje, rješavamo je iteracijom, tj. za neku početnu vrijednost od x, uvrštavajući je u jednadžbu, dobijamo rješenje veće točnosti.
Zadovoljit ćemo se točnošću na prva četiri decimalna mjesta.

$$x_0 = 6 \; , \; x_1 = 6,0149 \; , \; x_2 = 6,0146 \; , \; x_3 = 6,0147$$

Temperaturu određujemo iz izraza:

$$\frac{E}{kT} \; = \; 6,0147$$

$$T = 3613 \; K$$

Zadatak 5.2. *Promatramo sustav čestica koje su se smjestile na tri ekvidistantna nivoa:*

$$E_1 = 0 \ , \ E_2 = E \ , \ E_3 = 2E \ , \ g_1 = 1 \ , \ g_2 = 4 \ , \ g_3 = 3$$

pri čemu je razmak između susjednih niova $E = 0,1\ eV$.
Na kojoj temperaturi će zbroj čestica na 1. i 3. nivou biti jednak broju čestica na 2. nivou?

Rješenje:

Izraz za naseljenost i-tog energijskog nivoa:

$$N_i \ = \ C \ g_i \ e^{\frac{E_i}{kT}}, \ i = 1, 2, 3, ...$$

Uvjet iz zadatka nam kaže da je:

$$N_1 \ + \ N_3 \ = \ N_2$$

Uvrstimo izraz za naseljenost i-tog energijskog nivoa u dani uvjet:

$$C \ \left(g_1 \ e^{\frac{E_1}{kT}} \ + \ g_3 \ e^{\frac{E_3}{kT}} \right) \ = \ C \ g_2 \ e^{\frac{E_2}{kT}}$$

$$1 \ + \ 3 * e^{\frac{2E}{kT}} \ = \ 4 * e^{\frac{E}{kT}}$$

Supstitucijom $x = e^{\frac{E}{kT}}$ dobijamo kvadratnu jednadžbu:

$$3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Rješenjem kvadratne jednadžbe dobijemo rješenja za x koja uvrštavamo u supstituciju i time dobijamo traženu temperaturu.

$$x_1 = 1 \ , \ x_2 = \frac{1}{3} \ , \ gdje \ je \ x \ = \ e^{\frac{E}{kT}}$$

$$T_1 = \infty \ K \ , \ T_2 = 1056,3 \ K$$

Zadatak 5.3. $N = 10^{20}$ *čestica se smjestilo na 8 energijskih nivoa*

$$E_n = nE \ , \ n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \ ,$$

a svaki od njih sadrži isti broj kvantnih stanja.
Izračunajte toplinski kapacitet sustava ako je $kT = E$.

Rješenje:

Toplinski kapacitet sustava je zadan izrazom:

$$C_V \ = \ N \ \frac{d\overline{E}}{dT}$$

Da bismo to izračunali, prvo moramo odrediti prosječnu energiju zadane čestice i naći njenu derivaciju. Odredimo particijsku funkciju jedne čestice:

$$z \ = \ \sum_{n=0}^{7} g_n \ e^{-\frac{E_n}{kT}}$$

Ovaj izraz predstavlja geometrijski red čiju sumu možemo izraziti formulom:

$$\sum_{n=0}^{k-1} a * r^k \ = \ a * \left(\frac{1 - r^k}{1 - r} \right) \ , \ gdje \ je \ r \neq 1$$

Neka je:

$$a = g_n = g \quad , \quad e^{-\beta} = r \quad , \quad k = E_n$$

Primjenom formule na particijsku funkciju čestice dobijamo izraz:

$$z \ = \ g \ \frac{1 - e^{-8\beta E}}{1 - e^{-\beta E}} \ , \ \beta \ = \ \frac{1}{kT}$$

Prosječna energija čestice određena je izrazom:

$$\overline{E} \ = \ -\left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ \ln(z) \right)$$

$$\overline{E} \ = \ -\frac{\partial}{\partial \beta} \ \ln g \ \frac{1 - e^{-8\beta E}}{1 - e^{-\beta E}} \ = \ \frac{E}{e^{\frac{E}{kT}} - 1} \ - \ \frac{8E}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}$$

$$\frac{d\overline{E}}{dT} \;=\; k * \left[\frac{\left(\frac{E}{kT}\right)^2 \;*\; e^{\frac{E}{kT}}}{\left(e^{\frac{E}{kT}} - 1\right)^2} \;-\; \frac{\left(\frac{8E}{kT}\right)^2 \;*\; e^{\frac{8E}{kT}}}{\left(e^{\frac{8E}{kT}} - 1\right)^2} \right]$$

U postavkama zadatka imamo zadano $E = kT$ i $N = 10^{20}$.
Uvrštavamo postavke i dobivenu derivaciju u izraz za toplinski kapacitet sustava:

$$C_V \;=\; N\,\frac{d\overline{E}}{dT} \quad \Rightarrow \quad C_V = N\;k * \left[\frac{e}{(e-1)^2} \;-\; \frac{8^2\;e^8}{(e^8-2)^2}\right]$$

$$C_V \;=\; 1,24 * 10^{-3}\;\frac{J}{K}$$

Zadatak 5.4. *U sustavu sa dva energijska nivoa, na gornjem nivou nalazi se 80% čestica. Odredite temperaturu sustava ako je broj kvantnih stanja na gornjem nivou dva puta veći nego na donjem nivou, a energijski procijep između nivoa jest* $E_2 - E_1 = 1,5\ eV$.

Rješenje:

Izraz za naseljenost i-tog energijskog nivoa:

$$N_i \;=\; C\ g_i\ e^{\frac{E_i}{kT}}$$

Izrazimo uvjete dane u zadatku:

$$\frac{N_1}{N_2} \;=\; \frac{1}{4} \quad , \quad \frac{g_1}{g_2} \;=\; \frac{1}{2}$$

$$\frac{N_1}{N_2} \;=\; \frac{g_1\ e^{-\frac{E_1}{kT}}}{g_2\ e^{-\frac{E_2}{kT}}}$$

$$\frac{N_1}{N_2} \;=\; \frac{g_1}{g_2}\ e^{\frac{E_2 - E_1}{kT}}$$

$$\frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{2}\ e^{\frac{1,5\ eV}{kT}}$$

$$T \;=\; \frac{1,5 * 1,6 * 10^{-19}\ J}{1,3806 * 10^{-23}\ \frac{J}{K}\ \ln(\frac{1}{2})}$$

$$T \;=\; -25090,3\ K$$

Zadatak 5.5. *U sustavu negativne temperature čestice su smještene na tri ekvidistantna energijska nivoa istih statističkih težina:*

$$E_1 = E \ , \ E_2 = 2E \ , \ E_3 = 3E \ , \ g_1 = g_2 = g_3$$

Neka se na 1. nivou nalazi $N_1 = 10^{18}$*, a na 2. nivou* $N_2 = 2 * 10^{19}$ *čestica. Koliki je ukupan broj čestica u sustavu?*

Rješenje:

Neka je:

$$g_1 = g_2 = g_3 = g$$

Naseljenost energijskih nivoa:

$$N_1 \ = \ C \ g \ e^{\frac{E}{k|T|}} \ , \ N_2 \ = \ C \ g \ e^{\frac{2E}{k|T|}} \ , \ N_3 \ = \ C \ g \ e^{\frac{3E}{k|T|}}$$

Pogledajmo odnos omjera naseljenosti različitih nivoa:

$$\frac{N_2}{N_1} \ = \ \frac{C \ g \ e^{\frac{2E}{k|T|}}}{C \ g \ e^{\frac{E}{k|T|}}} \ = \ \frac{e^{\frac{2E}{k|T|}}}{e^{\frac{E}{k|T|}}} \ = \ e^{\frac{2E-E}{k|T|}} \ = \ e^{\frac{E}{k|T|}}$$

Vidimo da će za omjer naseljenosti N_3 i N_2 biti jednak:

$$\frac{N_3}{N_2} \ = \ \frac{C \ g \ e^{\frac{3E}{k|T|}}}{C \ g \ e^{\frac{2E}{k|T|}}} \ = \ \frac{e^{\frac{3E}{k|T|}}}{e^{\frac{2E}{k|T|}}} \ = \ e^{\frac{3E-2E}{k|T|}} \ = \ e^{\frac{E}{k|T|}}$$

Slijedi:

$$\frac{N_2}{N_1} \ = \ \frac{N_3}{N_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2 * 10^{19}}{10^{18}} \ = \ \frac{N_3}{2 * 10^{18}}$$

$$N_3 \ = \ 4 * 10^{20}$$

Ukupan broj čestica je:

$$N \ = \ N_1 \ + \ N_2 \ + \ N_3 \ = \ 4,21 * 10^{20}$$

Zadatak 5.6. *Izvedite izraz za ukupan broj fotona crnog tijela volumena V i temeperature T.*

Rješenje:

$$N(\vec{q}) = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} + 1}$$

Dani izraz predstavlja **Planckovu funkciju raspodjele**. Ona određuje ravnotežnu raspodjelu fotona prema energijama $\hbar\omega$ pri temperaturi T.

Elektromagnetski valovi su transverzalni. Svakom elektromagnetskom valu određene frekvencije pridružena su dva titranja. Svakom smjeru širenja pripadaju dva harmonička oscilatora jednake frekvencije, pa ukupan broj fotona dobivamo zbrajanjem dvostrukog izraza Planckove funkcije raspodjele po svim valnim vektorima:

$$N_f = 2 \sum_{\vec{q}} \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Da bismo izračunali ukupan broj fotona, transformirat ćemo sumu po valnim vektorima na integral po frekvenciji:

$$\sum_{\vec{q}} \rightarrow \frac{V}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 \, d\omega$$

Time izraz za ukupan broj fotona poprima sljedeći oblik:

$$N_f = \frac{V}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \frac{\omega^2 \, d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

Supstituirajmo integral. Neka je $x = \frac{\hbar\omega}{kT}$.

$$\int_0^\infty \frac{\omega^2 \, d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} = \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 \, dx}{e^x - 1}$$

Riješimo prvo dobiveni integral. Član $\frac{1}{1-e^{-x}}$ u integralu ćemo razviti u **geometrijski red** kojeg poopćeno možemo zapisati kao:

$$\frac{1}{1-x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} x^n \;=\; 1 \;+\; x \;+\; x^2 \;+\; x^3 \;+ ...$$

Integral poprima oblik:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2\ dx}{e^x - 1} \;=\; \int_0^{\infty} \frac{e^{-x}\ x^2\ dx}{1 - e^{-x}} \;=\; \int_0^{\infty} e^{-x}\ x^2\ dx\ (1 \;+\; e^{-x} \;+\; e^{-2x} \;+ ...)$$

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx}\ x^2\ dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx}\ x^2\ dx \;=\; 2\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$$

Približan iznos ove sume jest:

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^3} \;=\; 1,202$$

Vratimo se sad u izraz za broj fotona i uvrstimo dobiveno:

$$N_f \;=\; \frac{V}{\pi^2 c^3} \left(\frac{kT}{\hbar}\right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^2\ dx}{e^x - 1} \quad \Rightarrow \quad N_f \;=\; \frac{2 * 1,202}{\pi^2} * V * \left(\frac{kT}{c\hbar}\right)^3$$

Uvedimo konstantu:

$$b \;=\; \frac{2,404}{\pi^2} \left(\frac{k}{c\hbar}\right)^3$$

Dobijamo konačan oblik:

$$N_f \;=\; b\ V\ T^3$$

Zadatak 5.7. *U temperaturnom području duboko ispod Debyeove temperature θ, temperatura kristala snizila se od početne vrijednosti $T_1 = 20\ K$ na konačnu vrijednost $T_2 = 10\ K$. Neka se u tom procesu unutrašnja energija kristalnog titranja smanjila za $3\ J$.*
Primjenom Debyeovog modela odredite toplinski kapacitet rešetke u početnom i konačnom stanju.

Rješenje:

Prema Debyeovom modelu, u niskotemperaturnom području ($T << \theta$), unutrašnja energija titranja kristalne rešetke jest:

$$U(T) \; = \; \frac{3\,\pi\,NkT}{5}\left(\frac{T}{\theta}\right)^2$$

Omjer unutrašnjh energija na temperaturama T_1 i T_2 jest:

$$\frac{U(T_1)}{U(T_2)} \; = \; \frac{T_1^4}{T_2^4} \; = \; 16$$

Iz uvjeta vrijedi:

$$U(T_1) - U(T_2) \; = \; 3\ J$$

Iz dva prethodna izraza dobivamo:

$$U(T_1) = 3,2\ J \quad , \quad U(T_2) = 0,2\ J$$

Izraz za toplinski kapacitet pridružen energiji $U(T)$ dobivamo kao derivaciju energije po temperaturi, tj:

$$C_V(T) \; = \; \frac{dU(T)}{dT}$$

Slijedi:

$$C_V(T) \; = \; \frac{12\,\pi\,Nk}{5}\left(\frac{T}{\theta}\right)^2$$

Uvrštavajući izraz za energiju $U(T)$, dobivamo:

$$C_V(T) \; = \; \frac{4\ *\ U(T)}{T}$$

$$C_V(T_1) = 0,64\ \frac{J}{K} \quad , \quad C_V(T_2) = 0,08\ \frac{J}{K}$$

Zadatak 5.8. *Pri kojoj koncentraciji iznos prosječne brzine u idealnom elektronskom plinu na apsolutnoj nuli postaje*

$$\overline{v} = 5 * 10^5 \ \frac{m}{s} \ ?$$

Rješenje:

Vrijedi izraz:

$$\overline{v} \ = \ \frac{\int_0^\infty v \ \rho(v) \ d^3v}{\int_0^\infty \rho(v) \ d^3v}$$

Na apsolutnoj nuli, za funkciju fermionske raspodjele, vrijedi:

$$\rho(v) \ = \left| \begin{array}{ll} 1, & v < v_F \\ 0, & v > v_F \end{array} \right.$$

Raspišimo diferencijalni element volumena:

$$d^3v = v^2 \ \sin\theta \ dv \ d\theta \ d\phi \quad \rightarrow \quad d^3v = \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} v^2 \ \sin\theta \ dv \ d\theta \ d\phi$$

$$d^3v \ = \ 4\pi \int_0^\infty \ v^2 \ dv$$

Raspišimo sada integral:

$$\overline{v} \ = \ \frac{\int_0^{v_F} v \ \rho(v) \ d^3v \ + \ \int_{v_F}^\infty v \ \rho(v) \ d^3v}{\int_0^{v_F} \rho(v) \ d^3v \ + \ \int_{v_F}^\infty \rho(v) \ d^3v}$$

Pošto je za $v > v_F \quad \rho(v) = 0$, drugi integrali u izrazu nestaju. U izraz uvrstimo element volumena i dobijamo konačni oblik:

$$\overline{v} \ = \ \frac{4\pi \ \int_0^{v_F} v^3 \ dv}{4\pi \ \int_0^{v_F} v^2 \ dv}$$

Iz toga slijedi:

$$\overline{v} \ = \ \frac{\int_0^{v_F} v^3 \ dv}{\int_0^{v_F} v^2 \ dv} \ = \ \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} \ \frac{v^4}{v^3} \ = \ \frac{3}{4} \ v_F$$

Uvrstimo u izraz za iznos Fermijeve brzine elektrona:

$$v_F \ = \ \frac{\hbar}{m} \ \sqrt[3]{\frac{3\pi^2 N}{V}}$$

$$\frac{N}{V} \ = \ \frac{1}{3\pi^2} \ \left(\frac{mv_F}{\hbar}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{N}{V} \ = \ \frac{1}{3\pi^2} \ \left(\frac{4}{3}\frac{m\overline{v}}{\hbar}\right)^3$$

$$\frac{N}{V} \ = \ \frac{1}{3\pi^2} \ \left(\frac{4}{3} * \frac{9,109 * 10^{-31} \ kg}{\hbar}\right)^3 \ \left(5 * 10^5 \ \frac{m}{s}\right)^3$$

$$\frac{N}{V} = 3,628 * 10^{28} \ \frac{1}{m^3}$$

Zadatak 5.9. *Odredite vjerojatnost da je na apsolutnoj nuli iznos translacijske brzine fermiona veći od iznosa srednje kvadratične brzine* $v_s = \sqrt{\overline{v^2}}$.

Rješenje:

Sa v_F je zadana maksimalna brzina fermiona na apsolutnoj nuli i nazivamo je *Fermieva brzina.*
Tražimo omjer broja fermiona sa brzinom većom od srednje kvadratične brzine v_s i broja fermiona na svim mogućim brzinama.
Taj omjer je dan izrazom:

$$\omega = \frac{\int_{v_s}^{v_F} v^2 dv}{\int_0^{v_F} v^2 dv}$$

$$\omega = \frac{\int_{v_s}^{v_F} v^2 dv}{\int_0^{v_F} v^2 dv} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} \frac{(v_F^3 - v_s^3)}{(v_F^3 - 0)}$$

$$\omega = 1 - \left(\frac{v_s}{v_F}\right)^3$$

Znamo da vrijedi sljedeći izraz za prosječnu vrijednost kvadrata brzine:

$$\overline{v^2} = \frac{3}{5} v_F^2$$

Slijedi:

$$\omega = 1 - \left(\frac{\sqrt{\frac{3}{5}v_F^2}}{v_F}\right)^3 = 1 - \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^3$$

$$\omega = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\omega = 0,535$$

Zadatak 5.10. *Uz pretpostavku da vrijedi uvjet primjenljivosti klasične statističke fizike*

$$-\mu >> kT$$

izvedite izraz za kemijski potencijal idealnog plina u kojem se N čestica spina s i mase m translacijski giba u volumenu V.

Rješenje:

Ukupan broj čestica u sustavu zadan je relacijom

$$N = \sum_i \frac{g_i}{e^{\frac{E_i-\mu}{kT}} \pm 1} \quad \Rightarrow \quad N = \int_0^\infty \frac{g(E)\, dE}{e^{\frac{E_i-\mu}{kT}} \pm 1}$$

gdje je u oznaci $\pm$ gorni predznak za fermione, a donji za bozone.
Gustoća stanja g(E) je dana izrazom:

$$g(E) = \frac{2s+1}{h^3} * 4\pi V m * \sqrt{2mE}$$

Ovom relacijom je također određen *kemijski potencijal* statističkog sustava u stanju termičke ravnoteže kao funkcija temperature i koncentracije čestica. Pri danoj temperaturi kemijski potencijal mora biti tako odabran da dana relacija bude ispunjena.

Primjenimo sada uvjet zadatka.
Pošto je $-\mu >> kT$, a energija E je po definiciji pozitivna, tada u izrazu $e^{\frac{E_i-\mu}{kT}} \pm 1$ jasno slijedi da je brojnik puno veći od nazivnika pa izraz možemo aproksimirati izbacivanjem jedinice, tj. $e^{\frac{E_i-\mu}{kT}}$.

Konačan izraz ovisnosti kemijskog potencijala idealnog plina u ovisnosti o koncentraciji i temperaturi, uz dani uvjet, jest:

$$N = \frac{2s+1}{h^3} * 4\pi V m * \sqrt{2m} * e^{\frac{\mu}{kT}} * \int_0^\infty \sqrt{E}\; e^{\frac{-E}{kT}} dE$$

Sada nam samo preostaje riješiti integral i izraziti ga preko danih veličina N, s, m i V.

Nakon integriranja, dobijamo:

$$N = \frac{2s+1}{h^3} * 2 * \pi * V * \sqrt{2m * (2m)^2} * e^{\frac{\mu}{kT}} * \frac{\sqrt{\pi}}{2} * (kT)^{\frac{3}{2}}$$

$$N = \frac{2s+1}{h^3} * \sqrt{\pi} * \pi * V * 2mkT^{\frac{3}{2}} * e^{\frac{\mu}{kT}} \Big/ \ln$$

$$\mu = \ln\left(\frac{(2s+1) * V * (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}})}{Nh^3}\right) * (-kT) \quad ^2$$

Dobili smo formulu za *kemijski potencijal* idealnog plina.

Provjerimo još uvjet primjenljivosti klasične statističke fizike.
Zapišimo jednadžbu kao:

$$-\mu = kT * \ln(X)$$

Iz ovog zapisa vidimo da ako želimo da uvjet $-\mu >> kT$ vrijedi, $\ln(X)$ mora biti pozitivan i mnogo veći od 1.

Ako je $\ln(X) >> 1$, onda slijedi:

$$\left(\frac{(2s+1) * V * (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}})}{Nh^3}\right) >> 1$$

U području statističke fizike taj uvjet mora biti ispunjen kako je i navedeno u zadatku.

[2] Minus dobijemo zbog zamjene brojnika i nazivnika u logaritmu.

Zadatak 5.11. *Promotrimo monštvo fermiona koji se translacijski gibaju u idealnom plinu. Neka je zadan kemijski potencijal fermiona na apsolutnoj nuli* $\mu_0 = 3 * 10^{-21}\ J$.
Izračunajte kemijski potencijal pri temperaturi $T = 5000\ K$.

Rješenje:

Izračunajmo prvo termičku energiju sustava pri 5000 K:

$$kT \ = \ 1,3806 * 10^{-23} \frac{J}{K} \ * \ 5000K \ = \ 6,903 * 10^{-20} J$$

Usporedimo kemijski potencijal sa dobivenom termičkom energijom:

$$3 * 10^{-21} J << 6,903 * 10^{-20} J \quad \Rightarrow \quad \mu_0 << kT$$

Pošto ovaj uvjet vrijedi, kvantnu raspodjelu možemo aproksimirati klasičnom Boltzmannovom raspodjelom.
U prethodnom zadatku smo izveli formulu:

$$\mu \ = \ \ln \left(\frac{(2s+1) * V * (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}})}{Nh^3} \right) * (-kT)$$

Izvedimo sada izraz za μ_0 ($T = 0K$). U suprotnoj granici apsolutne nule, za kemijski potencijal fermiona vrijedi:

$$\mu_0 \ = \ \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{6\pi^2 N}{(2s+1)V} \right]^{\frac{2}{3}}$$

Izraz svedemo na:

$$\frac{(2s+1) * V * m^{\frac{3}{2}}}{N\hbar^3} \ = \ \frac{3 * 2\pi^2}{(2\mu_0)^{\frac{3}{2}} * 4\pi}$$

Ovu jednakost supstituiramo u "klasični" izraz:

$$\mu \ = \ (-kT) \ * \ \ln\left(\frac{3}{4\pi}\left(\frac{\pi kT}{\mu_0}\right)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$\mu \ = \ -1,3806 * 10^{-23}\frac{J}{K} \ * \ 5000K \ * \ \ln\left(0,2387 \ * \ 614,610\frac{J}{J}\right)$$

$$\mu \ = \ -3,44 * 10^{-19} \ J$$

Zadatak 5.12. *Zadana je gustoća stanja fermionskog sustava*

$$g(E) = C * V * E^3$$

pri čemu konstanta proporcionalnosti ima vrijednost

$$C = 2,5 * 10^{102} \ \frac{1}{m^3 J^4} \ .$$

Kolika mora biti fermionska koncentracija da bi prosječna energija fermiona na apsolutnoj nuli bila

$$\overline{E} = 0,8 \ eV \ ?$$

Rješenje:

Prosječna energija fermiona na apsolutnoj nuli određena je izrazom:

$$\overline{E} \ = \ \frac{\int_0^\infty \ E * g(E) * \rho(E) * dE}{\int_0^\infty \ g(E) * \rho(E) * dE}$$

Na apsolutnoj nuli, za funkciju fermionske raspodjele, vrijedi:

$$\rho(E) \ = \left| \begin{array}{ll} 1, & E < \mu_0 \\ 0, & E > \mu_0 \end{array} \right.$$

Raspišimo sada integral:

$$\overline{E} \ = \ \frac{\int_0^{\mu_0} E \ g(E) \ \rho(E) \ dE \ + \ \int_{\mu_0}^\infty E \ g(E) \ \rho(E) \ dE}{\int_0^{\mu_0} g(E) \ \rho(E) \ dE \ + \ \int_{\mu_0}^\infty g(E) \ \rho(E) \ dE}$$

Pošto je za $E > \mu_0 \quad \rho(E) = 0$, drugi integrali u izrazu nestaju. U izraz uvrstimo element volumena i dobijamo konačni oblik:

$$\overline{E} \ = \ \frac{\int_0^{\mu_0} E \ g(E) \ dE}{\int_0^{\mu_0} g(E) \ dE}$$

$$\overline{E} = \frac{CV \int_0^{\mu_0} E^4 * dE}{CV \int_0^{\mu_0} E^3 * dE} \quad \Rightarrow \quad \overline{E} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}} \frac{E^5}{E^4} = \frac{4}{5} \frac{\mu_0^5 - 0}{\mu_0^4 - 0} = \frac{4}{5} \mu_0$$

$$\overline{E} = \frac{4}{5} \mu_0$$

Izraz za broj čestica jest

$$N = \int_0^{\infty} g(E) * \rho(E) * dE$$

pri čemu je $\rho(E)$ Fermi-Diracova, odnosno Bose-Einsteinova funkcija:

$$\rho(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} \pm 1}$$

Pošto sustav promatramo za $E < \mu_0$, možemo definirati uvjet konstantnosti broja čestica:

$$N = \int_0^{\mu_0} g(E) dE = \frac{CV\mu_0^4}{4}$$

Koristeći se prijašnje dobivenim izrazom za prosječnu energiju, slijedi:

$$\frac{N}{V} = \frac{C}{4} \left(\frac{5}{4} \overline{E} \right)^4$$

$$\frac{N}{V} = \frac{1}{4} * 2,5 * 10^{102} \frac{1}{m^3 J^4} * \left(\frac{5}{4} * 0,8 * 1,6 * 10^{-19} J \right)^4$$

$$\frac{N}{V} = 4,09 * 10^{26} \frac{1}{m^3}$$

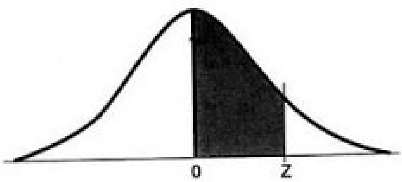
6 Dodatak

6.1 Fizikalne konstante

Popis nekih konstanti korištenih pri rješavanju zadataka kao i odnos nekih, često korištenih, fizikalnih veličina:

- *Boltzmannova konstanta:* $k = 1,3806 * 10^{-23}\ \frac{J}{K}$
- *Avogadrov broj čestica:* $N_A = 6,022 * 10^{23}\ \frac{1}{mol}$
- *Univerzalna plinska konstanta:* $R = kN_A = 8,314\ \frac{J}{mol\ K}$
- *Gravitacijska konstanta:* $G = 6,674 * 10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\ s^2}$
- *Planckova konstanta:* $h = 6,626 * 10^{-34}\ Js$
- *Reducirana Planckova konstanta:* $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 * 10^{-34}\ Js$
- $1\ eV\ =\ 1,602 * 10^{-19}\ J$
- $1°C\ =\ 273,15\ K$

6.2 Vrijednosti funkcije standardne normalne raspodjele $\Phi(x)$



This table presents the area between the mean and the Z score . When Z=1.96, the shaded area is 0.4750.

Areas Under the Standard Normal Curve

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000									

Source: Adapted by permission from *Statistical Methods* by George W. Snedecor and William G. Cochran, sixth edition © 1967 by The Iowa State University Press, Ames, Iowa, p. 548.

6.3 Rješenja nekih specijalnih integrala

Standardan način rješavanja Gaussovog integrala[3] potječe još od Poissona i koristi svojstvo:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2)}\, dx\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2)} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{(-y^2)} dy \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

Sada promatramo funkciju $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$ preko cijele ravnine $\mathbb{R}^2$ i uspoređujemo funkciju u Cartesiusovim i polarnim koordinatama:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2)}\, dx\right)^2 = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\ dy \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\ r\ dr\ d\theta$$

Integrali s obje strane jednakosti razapinju cijelu ravninu $\mathbb{R}^2$. Dodatnu varijablu r u polarnim koordinatama smo dobili kao Laméov koeficijent.

Računamo integral u polarnim koordinatama:

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r\ e^{-r^2}\ dr$$

Uvodimo supstituciju $t = -r^2$ i gubimo minus tako da okrenemo granice integracije i promijenimo im predznake:

$$= 2\pi \int_{-\infty}^{0} \left(-\frac{1}{2}\right)\ e^t\ dr \;=\; \pi \int_{-\infty}^{0} e^t\ dt$$

$$= \pi(e^0 - e^{-\infty}) \;=\; \pi(1-0) \;=\; \pi$$

Izjednačavajući rezultat sa integralom u Cartesiusovim koordinatama dobivamo:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\ dx\right)^2 \;=\; \pi$$

[3]Gaussov integral je integral Gaussove funkcije $f(x) = e^{-x^2}$ preko cijele realne osi. Integral je oblika $\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2)}dx = \sqrt{\pi}$.

Iz toga slijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \boldsymbol{\sqrt{\pi}} \quad\Rightarrow\quad \int_{0}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \boldsymbol{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

Definirajmo sad integrale oblika

$$I_n \;=\; \int_0^{\infty} x^n\, e^{-x^2}\, dx$$

Parcijalnom integracijom dobijamo:

$$I_n \;=\; \frac{n-1}{2} \int_0^{\infty} x^{n-2}\, e^{-x^2}\, dx \;=\; \frac{n-1}{2}\, I_{n-2}$$

Pomoću dobivene rekurzivne formule možemo sve integrale s parnim n svesti na I_0 koji smo već izračunali.

Analogno, integrali s neparnim n mogu se izraziti pomoću I_1:

$$I_1 \;=\; \int_0^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx \;=\; -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\, e^{-x^2} \;=\; \frac{1}{2}$$

Bibliografija

[1] Vladimir Šips. *"Uvod u statističku fiziku"*
Školska knjiga, Zagreb 1990.