КЛАССИЧЕСКАЯ УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА
ПО МАТЕМАТИКЕ

СБОРНИК ЗАДАЧ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

Под общей редакцией
А. А. СВЕШНИКОВА

Издание пятое,
стереотипное

ЛАНЬ®
САНКТ-ПЕТЕРБУРГ · МОСКВА · КРАСНОДАР
2013

ББК 22.17.я7
С 23

С 23 Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций: Учебное пособие / Под общей ред. А. А. Свешникова. 5-е изд., стер. — СПб.: Издательство «Лань», 2013. — 448 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная литература).

ISBN 978-5-8114-0708-8

Сборник охватывает все основные разделы теории вероятностей, встречающиеся при решении практических вопросов, связанных с автоматическим управлением, обработкой опытных данных, установлением их точности и т. д. Задачи снабжены ответами, а в отдельных случаях указаниями к решению. В конце задачника приложены краткие таблицы для вероятностных расчетов, необходимые при решении ряда задач.

Учебное пособие предназначено для студентов, специализирующихся в области прикладной математики, а также экономики, финансов, информационной безопасности, математической экономики, кибернетики и т. д.

ББК 22.17.я7

Коллектив авторов:
Борис Григорьевич ВОЛОДИН,
Михаил Павлович ГАНИН,
Исай Яковлевич ДИНЕР,
Лазарь Борисович КОМАРОВ,
Арам Арутюнович СВЕШНИКОВ,
Калман Беркович СТАРОБИН

Обложка
А. Ю. ЛАПШИН

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Данное издание отличается от предыдущего в ряде отношений.

Во-первых, из задачника исключены параграфы, сравнительно мало используемые при чтении общего курса теории вероятностей в высших технических учебных заведениях: энтропия и информация, метод огибающих, вопросы контроля качества. Включены некоторые новые вопросы (проверка статистических гипотез, случайные последовательности и некоторые другие).

Во-вторых, в целях сокращения объема, исключены решения типовых примеров, полезные при изучении теории вероятностей в порядке самообразования, но не являющиеся необходимыми при использовании задачника как учебного пособия в высшей школе.

Наконец, весь текст задачника просмотрен, внесено некоторое количество новых задач, показавшихся интересными его авторам, а вводные части перед каждым параграфом, по возможности освобождены от объяснений и определений, которые читатель может найти в соответствующей учебной литературе.

В остальном целевая направленность и содержание задачника остались без изменения. Поэтому во многих случаях авторы формулировали задачи в том виде, как они возникают в различных приложениях, считая, что математические предпосылки, необходимые для решения подобных задач, должны быть сделаны читателем на основании физического существа задач. Например, говоря о сигналах малой длительности предполагается, что при решении можно считать длительность сигналов бесконечно малой; в задачах, в которых речь идет об ошибках округления (например, задача 12.11), предполагается, что ошибки подчиняются равномерному закону распределения; в ряде задач применяется понятие выбора «наудачу», поскольку математическая нечеткость этого термина не может вызвать недоразумения, а более корректная формулировка этих задач приводит к исчезновению задачи в том виде, в каком она обычно возникает на практике.

Подобная формулировка задач представляется авторам не только целесообразной, но и совершенно необходимой для задачника, предназначенного для изучения прикладной теории вероятностей, поскольку основная трудность обычно возникает не в усвоении чисто математического содержания соответствующих разделов теории, а в умении ставить конкретную прикладную задачу как задачу теории вероятностей.

При переработке задачника перед его авторами возникли трудности, связанные с согласованием обозначений и трактовки отдельных вопросов теории с учебной литературой, используемой в высших технических учебных заведениях, поскольку единого учебника, охватывающего все содержание задачника, не существует, а в разных учебниках и учебных пособиях используются и различные обозначения, и различный метод изложения.

Если, например, при первом издании задачника классический подход к определению вероятности и соответствующая символика для учебной литературы указанного типа была общепринятой, то в настоящее время теоретико-множественное определение вероятности и соответствующая символика начали уже проникать и во втузовскую учебную литературу, хотя «классическое» изложение теории вероятностей пока и является доминирующим.

В этом вопросе авторы сочли целесообразным пойти на компромисс, отразив в известной мере во вводных частях современную аксиоматику теории вероятностей, оставаясь в остальном в рамках обозначений и определений, являющихся пока наиболее распространенными во втузовской учебной литературе. Подобный подход представляется наиболее целесообразным, поскольку для читателей, владеющих теоретико-множественным построением теории вероятностей при использовании задачника не могут возникнуть какие-либо трудности.

Компромиссным в задачнике является и решение вопроса о терминологии, поскольку в литературе применяется различная терминология, с которой должен быть знаком изучающий теорию вероятностей, в задачнике для обозначения одного понятия часто используются параллельно различные термины: элементарные события и элементарные исходы, корреляционная функция и автокорреляционная функция, вариационный ряд и упорядоченная выборка, разряды и интервалы и т. д.

Больших трудов стоило авторам приблизить разделы, посвященные математической статистике, к ее современному уровню. В первых изданиях задачника авторы сознательно не выходили за рамки наиболее распространенных учебников для технических учебных заведений, в которых математической статистике уделяется незначительное внимание и обходится ряд тонкостей. Это неизбежно приводило к математической некорректности решения ряда задач. В настоящем издании сделана попытка несколько выйти за рамки указанной учебной литературы: авторы попытались внести известную ясность в такие вопросы, как получение оценок параметров, критерии согласия, проверка статистических гипотез и т. п.

Однако и в задачах, посвященных математической статистике, авторы считали необходимым формулировать условия задач так, как они возникают на практике, а не в форме схематизированных математических задач. Это относится, прежде всего, к тому, что результаты, с которыми на практике приходится иметь дело, всегда округлены и, строго говоря, представляют группированную выборку. Поэтому обработка этих результатов так, как это рекомендуется математической статистикой для негруппированных выборок (например, при применении критериев согласия) является математически некорректным, хотя практически обычно вынужденно и делается. Авторы сочли целесообразным оставить задачи подобного типа, дав в сводках формул необходимые комментарии. Подобный образ действия представляется авторам не только единственно возможным, если стремиться приучить пользоваться методами математической статистики в реальных ситуациях, но и оправданным рядом общих соображений. Дело в том, что реальная ценность применения статистических методов состоит в получении сравнительных результатов, а в этом случае обычно не является существенным точное знание таких параметров как, например, уровень значимости, а существенным является единый подход к вопросу при сходных ситуациях.

Авторы надеются, что предлагаемая книга поможет изучающим теорию вероятностей приобрести навыки ее применения к решению различных прикладных вопросов.

Авторы благодарны всем лицам, сообщившим свои замечания по предыдущим изданиям задачника, а также всем лицам, принимавшим участие в обсуждении рукописи.

Глава 1

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СЛУЧАЙНЫМИ СОБЫТИЯМИ

Пространством элементарных исходов (событий) называется множество Ω элементов ω, которые взаимно исключают друг друга и являются всевозможными исходами испытания (опыта, эксперимента). Событием называется любое множество (подмножество) A элементов из Ω и обозначается той же буквой A, что и само множество. Наступление любого из элементарных исходов, принадлежащих множеству A, означает наступление события A. Суммой (объединением) $A+B$ ($A \cup B$) множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B. Произведением (пересечением) AB ($A \cap B$) множеств A и B называется множество элементов, принадлежащих и A, и B. Разностью $A-B$ ($A \setminus B$) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B. Суммой, произведением и разностью событий A и B называется событие, соответствующее сумме, произведению и разности, соответственно, множеств A и B. Множество Ω всех элементарных исходов совпадает с достоверным событием. Противоположным множеством (событием) $\overline{A}$ для A называется дополнение A до Ω. Пустое множество $\varnothing$ называется невозможным событием. События A и B несовместны, если $AB = \varnothing$. Попарно несовместные события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют полную систему событий, если их сумма совпадает с достоверным событием Ω.

Задачи

1.1. Что означают события $A + A$ и AA?

1.2. Для каких событий A и B возможно равенство $AB = A$?

1.3. Мишень состоит из десяти кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_k ($k = 1, 2, \ldots, 10$), причем $r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$. Событие A_k — попадание в круг радиуса r_k ($k = 1, 2, \ldots, 10$). Что означают события

$$B = \sum_{k=1}^{6} A_k\,, \qquad C = \prod_{k=5}^{10} A_k\,?$$

1.4. События: A — хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, B — все приборы доброкачественные. Что означают события: а) $A + B$; б) AB?

1.5. События A, B и C означают, что взято хотя бы по одной книге из трех различных собраний сочинений, каждое из которых содержит по крайней мере три тома. События A_s и B_k означают, соответственно, что из первого собрания сочинений взяты s, а из второго k томов. Что означают события: а) $A+B+C$; б) ABC; в) A_1+B_3; г) A_2B_2; д) $(A_1B_3+B_1A_3)\,C$?

1.6. Из таблицы случайных чисел наудачу взято одно число. Событие A — выбранное число делится на 5; событие B — данное число оканчивается нулем. Что означают события $A - B$ и $A\overline{B}$?

1.7. Событие A — хотя бы одно из имеющихся четырех изделий бракованное, событие B — бракованных изделий среди них не менее двух. Что означают противоположные события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?

1.8. Упростить выражение $A = (B + C)(B + \overline{C})(\overline{B} + C)$.

1.9. Когда возможны равенства: а) $A + B = \overline{A}$; б) $AB = \overline{A}$; в) $A + B = AB$?

1.10. Найти случайное событие X из равенства

$$\overline{X + A} + \overline{X + \overline{A}} = B.$$

1.11. Доказать, что $\overline{A}B + A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B} = \overline{AB}$.

1.12. Доказать следующие соотношения:

$$\overline{\sum_{k=1}^{n} A_k} = \prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k\,, \qquad \sum_{k=1}^{n} \overline{A}_k = \overline{\prod_{k=1}^{n} A_k}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \Omega - \prod_{k=1}^{n} \overline{A}_k\,, \qquad \prod_{k=1}^{n} A_k = \Omega - \sum_{k=1}^{n} \overline{A}_k\,.$$

1.13. Совместны ли события A и $\overline{A+B}$?

1.14. Доказать, что события A, $\overline{A}B$ и $\overline{A+B}$ образуют полную систему событий.

1.15. Два шахматиста играют одну партию. Событие A — выиграет первый игрок, B — выиграет второй игрок. Какое событие следует добавить к указанной совокупности, чтобы получилась полная система событий?

1.16. Машинно-котельная установка состоит из двух котлов и одной машины. Событие A — исправна машина. Событие B_k $(k = 1, 2)$ — исправен k-й котел. Событие C означает работоспособность машинно-котельной установки, что будет в том случае, если исправны машина и хотя бы один котел. Выразить события C и $\overline{C}$ через A и B_k.

1.17. Судно имеет одно рулевое устройство, четыре котла и две турбины. Событие A означает исправность рулевого устройства, B_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ — исправность k-го котла, а C_j $(j = 1, 2)$ — исправность j-й турбины. Событие D — судно управляемое, что будет в том случае, когда исправны рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна турбина. Выразить события D и $\overline{D}$ через A, B_k и C_j.

1.18. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. События: A_k $(k = 1, 2)$ — исправен k-й блок первого типа, B_j $(j = 1, 2, 3)$ — исправен j-й блок второго типа. Прибор работает, если исправны хотя бы один блок первого типа и не менее двух блоков второго типа. Выразить событие C, означающее работу прибора, через A_k и B_j.

§ 2. НЕПОСРЕДСТВЕННЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Если множество Ω элементарных исходов конечно или счетно, то вероятность случайного события A равна сумме вероятностей $P(\omega_j)$ элементарных исходов ω_j, входящих в A.

Пусть множество Ω содержит n элементов $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ и из каких-либо соображений симметрии следует, что все они равновероятны, т. е. $\mathrm{P}(\omega_j) = -\frac{1}{n}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда вероятность события A равна отношению числа m элементарных исходов ω_j, благоприятствующих событию A, к общему числу n всех равновозможных исходов множества Ω, т. е.

$$\mathrm{P}(A) = \frac{m}{n}\,.$$

При вычислениях указанных чисел n и m часто используются соответствующие формулы комбинаторики для числа способов извлечения элементов из заданной совокупности и числа размещений этих элементов по группам. Число способов извлечения по одному k элементов из l равно l^k или $\frac{l!}{(l-k)!}$ в зависимости от того, возвращается или нет каждый извлеченный элемент. Число способов выбрать любые k элементов из l равно C_l^k. Если k элементов берутся из совокупности l элементов, которая объединяет r различных групп, состоящих соответственно из $l_1, l_2, \ldots, l_r$ элементов, то число способов выбрать любые $k_1, k_2, \ldots, k_r$ элементов из указанных групп, где $\sum_{j=1}^{r} k_j = k$, равно $\prod_{j=1}^{r} C_{l_j}^{k_j}$. Число размещений l элементов по s группам так, что в j-ю группу попадает h_j элементов $(j = 1, 2, \ldots, s)$, где $\sum_{j=1}^{s} h_j = l$, равно $\frac{l!}{h_1!\, h_2! \ldots h_s!}$. Число всевозможных размещений l различных (пронумерованных) элементов по s пронумерованным группам равно s^l. Если размещаются одинаковые (неразличимые между собой) элементы, то каждое размещение определяется количеством h_j элементов, попадающих в j-ю группу $(j = 1, 2, \ldots, s)$; при этом число всевозможных размещений l элементов по s группам равно C_{l+s-1}^{l}. Число способов размещения l различных элементов по s пронумерованным группам таким образом, что в любых k из s группах оказались элементы, а в остальных $s-k$ группах элементов не было, равно $C_s^k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_k^j (k - j)^l$. Если элементы одинаковые, то указанное число размещений равно $C_s^k C_{l-1}^{k-1}$. Число перестановок из l пронумерованных элементов, в каждой из которых любые k элементов сохраняют свои порядковые номера, равно $\frac{l!}{k!} \sum_{j=0}^{l-k} \frac{(-1)^j}{j!}$.

Задачи

2.1. Лотерея выпущена на общую сумму n рублей. Цена одного билета r рублей. Ценные выигрыши падают на m билетов. Определить вероятность ценного выигрыша на один билет.

2.2. Случайно выбранная кость домино оказалась не дублем. Найти вероятность того, что вторую также взятую наудачу кость домино можно приставить к первой.

2.3. В колоде 36 карт четырех мастей. После извлечения и возвращения одной карты колода перемешивается и снова извлекается одна карта. Определить вероятность того, что обе извлеченные карты одной масти.

2.4. Буквенный замок содержит на общей оси пять дисков, каждый из которых может занимать шесть положений, отмеченных различными буквами. Замок открывается только в том случае, когда положения дисков образуют определенную буквенную комбинацию. Определить вероятность открытия замка, если комбинация букв установлена наудачу.

2.5. Черный и белый короли находятся соответственно на первой и третьей горизонталях шахматной доски. На одно из незанятых полей первой или второй горизонтали наудачу ставится ферзь. Определить вероятность того, что образовавшаяся позиция матовая для черного короля, если положения королей равновозможны на любых полях указанных горизонталей.

2.6. В кошельке лежат три монеты достоинством по 20 коп. и семь монет по 3 коп. Наудачу берется одна монета, а затем извлекается вторая монета, оказавшаяся монетой в 20 коп. Определить вероятность того, что и первая извлеченная монета имеет достоинство в 20 коп.

2.7. Из партии деталей, среди которых n доброкачественных и m бракованных, для контроля наудачу взято s штук. При контроле оказалось, что первые k из s деталей доброкачественные. Определить вероятность того, что следующая деталь будет доброкачественной.

2.8. Определить вероятность того, что выбранное наудачу из таблицы случайных чисел целое число N при а) возведении в квадрат; б) возведении в четвертую степень;

в) умножении на любое другое случайное число из этой таблицы даст число, оканчивающееся единицей.

2.9. На десяти одинаковых карточках написаны различные числа от нуля до девяти. Определить вероятность того, что наудачу образованное с помощью данных карточек: а) двузначное число делится на 18; б) трехзначное число делится на 36.

2.10. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины: а) не содержит одинаковых цифр; б) имеет две одинаковые цифры; в) имеет три одинаковые цифры; г) содержит две пары одинаковых цифр; д) состоит из одинаковых цифр. Известно, что все номера четырехзначные, начиная с 0001, не повторяющиеся и равновозможные.

2.11. Десять книг на одной полке расставляются наудачу. Определить вероятность того, что при этом три определенные книги окажутся поставленными рядом.

2.12. На восьми одинаковых карточках написаны соответственно числа 2, 4, 6, 7, 8, 11, 12 и 13. Наудачу берутся две карточки. Определить вероятность того, что образованная из двух полученных чисел дробь сократима.

2.13. Имеется пять отрезков, длины которых равны соответственно 1, 3, 5, 7 и 9 единицам. Определить вероятность того, что с помощью взятых наудачу трех отрезков из данных пяти можно построить треугольник.

2.14. Из десяти билетов выигрышными являются два. Определить вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов: а) один выигрышный; б) оба выигрышных; в) хотя бы один выигрышный.

2.15. Обобщение задачи 2.14. Имеются $n + m$ билетов, из которых n выигрышных. Одновременно приобретаются k билетов. Определить вероятность того, что среди них s выигрышных.

2.16. В генуэзской лотерее разыгрываются девяносто номеров, из которых выигрывают пять. По условию можно ставить на любой из девяноста номеров или на любую совокупность двух, трех, четырех или пяти номеров, причем для получения выигрыша должны выиграть все выбранные номера. Какова вероятность выигрыша в каждом из указанных пяти случаев?

2.17. Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд спортсменов по жребию разбиваются на две подгруппы. Определить вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: а) в равных подгруппах; б) в одной подгруппе.

2.18. В зале, насчитывающем $n+k$ мест, случайным образом занимают места n человек. Определить вероятность того, что будут заняты определенные $m \leqslant n$ мест.

2.19. Из колоды карт (52 карты) наудачу извлекаются три карты. Найти вероятность того, что это будут тройка, семерка и туз: а) независимо от порядка извлечения карт без возвращения; б) в указанном порядке при извлечении карт без возвращения; в) в указанном порядке с возвращением каждой карты в колоду.

2.20. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются три карты. Определить вероятность того, что сумма очков этих карт равна 21, если валет составляет два очка, дама — три, король — четыре, туз — одиннадцать, а остальные карты — соответственно шесть, семь, восемь, девять и десять очков.

2.21. Имеются пять билетов стоимостью по одному рублю, три билета по три рубля и два билета по пять рублей. Наудачу берутся три билета. Определить вероятность того, что: а) хотя бы два из этих билетов имеют одинаковую стоимость; б) все три билета стоят семь рублей.

2.22. Очередь в кассу, где производится продажа билетов по 5 коп., состоит из $2n$ человек. Какова вероятность того, что ни одному из покупателей не придется ждать сдачи, если перед продажей билета первому покупателю из очереди у кассира было только $2m$ пятаков, а получение платы за каждый билет равновозможно как пятаком, так и гривенником?

2.23. По займу ежегодно разыгрываются шесть основных тиражей и один дополнительный, происходящий после основного пятого. Из 100 000 серий в каждом основном тираже выигрывают 170 серий, а в каждом дополнительном — 230 серий. Найти вероятность выигрыша на одну облигацию за первые десять лет: а) в основном тираже; б) в дополнительном тираже; в) в каком-либо тираже.

2.24. Из имеющихся n изделий j-м признаком обладают n_j изделий $(j = 1, 2, \ldots, k)$, $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$. Определить вероятность того, что из взятых наудачу m изделий указанными признаками обладают соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_k$ изделий, причем $\sum_{j=1}^{k} m_j = m$.

2.25. По m урнам наудачу разложены n одинаковых шаров. Определить вероятность того, что:

а) в первой урне n_1 шаров, во второй — n_2, ..., в m-й — n_m;

б) имеются урны, в которых соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_m$ шаров, если числа $n_1, n_2, \ldots, n_m$ различные, $\sum_{k=1}^{m} n_k = n$.

2.26. В урне имеется l одинаковых шаров с номерами от 1 до l. Шары извлекаются наудачу l раз по одному без возвращения. Определить вероятность того, что при k извлечениях номера шаров совпадут с номерами опытов.

2.27. При каждом из восьми выстрелов равновозможно попадание в любую из четырех целей. Определить вероятность того, что: а) будут попадания только в три цели; б) в одну цель не будет попаданий, в другую произойдет одно попадание, в какую-либо цель — три попадания, а в оставшуюся цель — четыре попадания; в) в каждую цель произойдет по два попадания.

2.28. На одном билете спортивной лотереи наудачу зачеркнуто 6 номеров из 49. Билет выигрывает, если среди зачеркнутых имеется не менее трех номеров из шести, разыгрываемых в тираже. Определить вероятность P_k того, что среди зачеркнутых выпавшими в тираже окажется k номеров ($k = 3, 4, 5, 6$).

2.29. Баллотируется два кандидата, причем за первого в урну опущено n бюллетеней, а за второго m бюллетеней. Определить вероятность того, что при последовательном подсчете бюллетеней число голосов, поданных за первого кандидата, будет все время более чем в k раз превосходить число голосов, поданных за второго, если $n \geqslant km$, а k — целое положительное число.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пространство элементарных исходов Ω иногда можно представить в виде некоторой области с ограниченным объемом $V_n(\Omega)$ в n-мерном евклидовом пространстве. При этом элементарные исходы ω изображаются точками, лежащими внутри указанной области. Если для любой части A области Ω с объемом $V_n(A)$ вероятность $\mathrm{P}(A)$ определяется формулой

$$\mathrm{P}(A) = \frac{V_n(A)}{V_n(\Omega)},$$

то можно говорить, что вероятность события A определяется геометрически[1].

Задачи

3.1. В точке C, положение которой на телефонной линии AB длины L равновозможно, произошел разрыв. Определить вероятность того, что точка C удалена от точки A на расстояние, не меньшее l.

3.2. Параллельно оси абсцисс проведены две линии, ординаты которых равны 8 и 9,5. Определить вероятность того, что круг радиуса 2,5 не будет пересечен осью абсцисс и ни одной из двух параллельных линий, если положение центра круга равновозможно на оси ординат в интервале от 0 до 9,5.

3.3. В круге радиуса R проведена хорда параллельно заданному направлению. Определить вероятность того, что длина этой хорды не более R, если положение точки пересечения хорды с перпендикулярным к ней диаметром равновозможно в любой точке этого диаметра.

3.4. Перед вращающимся с постоянной скоростью кругом находится отрезок длиной $2h$, расположенный в плоскости круга таким образом, что прямая, соединяющая середину отрезка с центром круга, перпендикулярна к отрезку. По касательной к окружности круга в точке, положение которой равновозможно на окружности, слетает частица. Определить вероятность попадания этой частицы на отрезок, если расстояние между отрезком и центром круга равно l, а траектория полета частицы прямолинейная.

[1] Используемое при формулировке ряда задач требование равновозможности попадания точки в любую часть области (линейной, двумерной и т. д.) понимается в смысле применимости понятия геометрической вероятности.

3.5. Прямоугольная решетка состоит из цилиндрических прутьев радиуса r. Расстояния между осями прутьев равны соответственно a и b. Определить вероятность попадания шариком диаметра d в решетку при одном бросании без прицеливания, если траектория полета шарика перпендикулярна к плоскости решетки, а пересечение траектории с решеткой равновозможно в любой точке каждого прямоугольника со сторонами a и b, образованного осями прутьев.

3.6. Внутри эллипса с полуосями $a = 100$ см и $b = 10$ см симметрично расположен прямоугольник со сторонами 10 и 3 см, бóльшая сторона которого параллельна a. Кроме того, проведены не пересекающиеся с эллипсом, прямоугольником и между собой четыре окружности, диаметр каждой из которых равен 4,3 см. Определить вероятность того, что:

а) случайная точка, положение которой равновозможно внутри эллипса, окажется внутри одного из кругов;

б) окружность радиуса 5 см, построенная вокруг этой точки как около центра, пересечется хотя бы с одной стороной прямоугольника.

3.7. Начерчены пять концентрических окружностей, радиусы которых равны соответственно kr $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$. Круг радиуса r и два кольца с внешними радиусами $3r$ и $5r$ заштрихованы. В круге радиуса $5r$ поставлена точка, положение которой равновозможно в этом круге. Определить вероятность попадания данной точки: а) в круг радиуса $2r$; б) в заштрихованную область.

3.8. Лодка перевозит груз с одного берега пролива на другой, пересекая пролив за один час. Определить вероятность того, что идущее вдоль пролива судно будет замечено, если с лодки обнаруживают судно в случае, когда пересекают его курс не ранее, чем за 20 мин до пересечения судном курса лодки, и не позднее, чем через 20 мин после пересечения судном курса лодки. Любой момент и любое место пересечения судном курса лодки равновозможны. Курс судна перпендикулярен к курсу лодки.

3.9. На отрезке длиной l независимо одна от другой поставлены две точки, положение каждой из которых равновозможно на всем отрезке. Определить вероятность того, что расстояние между этими точками меньше βl, где $0 < \beta < 1$.

3.10. На отрезке AB длиной l независимо одна от другой поставлены две точки L и M, положение каждой из которых равновозможно на AB. Найти вероятность того, что точка L ближе к точке M, чем к точке A.

3.11. На отрезке длиной l независимо одна от другой поставлены две точки, положение каждой из которых равновозможно на этом отрезке. Определить вероятность того, что из трех получившихся частей одного отрезка можно построить треугольник.

3.12. На окружности радиуса R независимо одна от другой поставлены три точки A, B и C, положение каждой из которых равновозможно на окружности. Определить вероятность того, что треугольник ABC остроугольный.

3.13. На трех отрезках A_jB_j $(j = 1, 2, 3)$ одинаковой длины l независимо одна от другой поставлено по одной точке C_j, причем положение C_j равновозможно на A_jB_j $(j = 1, 2, 3)$. Определить вероятность того, что из отрезков A_jC_j $(j = 1, 2, 3)$ можно построить треугольник.

3.14. На отрезке AB длины l независимо одна от другой поставлены две точки M и N, положение каждой из которых равновозможно на AB. Определить вероятность того, что длина каждого из трех получившихся отрезков не превосходит заданной величины a $(l \geqslant a \geqslant l/3)$.

3.15. К автобусной остановке через каждые четыре минуты подходит автобус линии A и через каждые шесть минут — автобус линии B. Интервал времени между моментами прихода автобуса линии A и ближайшего следующего автобуса линии B равновозможен в пределах от нуля до четырех минут.

Определить вероятность того, что: а) первый подошедший автобус окажется автобусом линии A; б) автобус какой-либо линии подойдет в течение двух минут.

3.16. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода один час, а второго — два часа.

3.17. Время подхода к указанному месту одного лица не зависит от момента подхода другого лица и равновозможно в интервале от 0 до T. Определить вероятность того, что время ожидания одним другого будет не больше t.

3.18. Два судна в тумане: одно идет вдоль пролива шириной L, а другое курсирует без остановок поперек этого пролива перпендикулярно курсу первого. Скорости движения судов соответственно равны v_1 и v_2. Второе судно подает звуковые сигналы, которые слышны на расстоянии $d < L$. Определить вероятность того, что на первом судне услышат сигналы, если пересечение курсов судов равновозможно в любом месте пролива.

3.19. Стержень длиной $l = 200$ мм ломается на части, причем положение каждой точки излома не зависит от положения других точек излома и равновозможно по всей длине стержня. Определить вероятность того, что хотя бы одна часть стержня между точками излома будет не более 10 мм, если точек излома: а) две; б) три.

3.20. На поверхности сферы радиуса R независимо одна от другой поставлены две точки, положение каждой из которых равновозможно на сфере. Определить вероятность того, что проходящая через эти точки дуга большого круга стягивает угол, меньший α ($\alpha < \pi$).

3.21. Спутник Земли движется по орбите, которая заключена между 60° северной и 60° южной широты. Считая падение спутника в любую точку поверхности земного шара между указанными параллелями равновозможным, найти вероятность того, что спутник упадет выше 30° северной широты.

3.22. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими одна от другой на расстояние L. Определить вероятность того, что наудачу брошенная на плоскость игла длиной l ($l<L$) пересечет какую-либо прямую (задача Бюффона).

3.23. Определить вероятность того, что корни: а) квадратного $x^2 + 2ax + b = 0$, б) кубического $x^3 + 3ax + 2b = 0$ уравнений вещественны, если равновозможны значения коэффициентов в прямоугольнике $|a| \leqslant n$, $|b| \leqslant m$. Какова вероятность, что при указанных условиях корни квадратного уравнения будут положительными?

3.24. На плоскости независимо друг от друга прямолинейно перемещаются точка A и центр B круга радиуса R. Скорости этих точек постоянны и равны соответственно u и v. В фиксированный момент времени расстояние $AB = r$ $(r > R)$, а угол между линией AB и вектором $\overrightarrow{v}$ равен β. Считая все направления движения точки A равновозможными, определить вероятность попадания точки A в круг.

§ 4. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ СОБЫТИЙ

Условная вероятность $\mathrm{P}(A/B)$ события A при условии B, когда $\mathrm{P}(B) \neq 0$ определяется формулой

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)}\,.$$

Вероятность произведения двух событий

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A/B).$$

События A и B независимые, если

$$\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B).$$

Для вероятности произведения n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ справедливо выражение

$$\mathrm{P}\left(\prod_{j=1}^{n} A_j\right) = \mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_2/A_1)\mathrm{P}(A_3/A_1A_2)\ldots\mathrm{P}\left(A_n/\prod_{j=1}^{n-1} A_j\right).$$

События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы в совокупности, если для любого числа $l \leqslant n$ при $1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_l \leqslant n$ справедливо равенство

$$\mathrm{P}\left(\prod_{j=1}^{l} A_{k_j}\right) = \prod_{j=1}^{l} \mathrm{P}\left(A_{k_j}\right).$$

Задачи

4.1. Два стрелка, для которых вероятности попадания в мишень равны соответственно 0,7 и 0,8, производят по одному выстрелу. Определить вероятность хотя бы одного попадания в мишень.

4.2. Вероятность выхода из строя k-го блока вычислительной машины за время T равна P_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Определить вероятность выхода из строя за указанный промежуток времени хотя бы одного из n блоков этой машины, если работа всех блоков взаимно независима.

4.3. Вероятность наступления события в каждом опыте одинакова и равна 0,2. Опыты производятся последовательно до наступления события. Определить вероятность того, что придется производить четвертый опыт.

4.4. Вероятность того, что изготовленная на первом станке деталь будет первосортной, равна 0,7. При изготовлении такой же детали на втором станке эта вероятность равна 0,8. На первом станке изготовлены две детали, на втором три. Найти вероятность того, что все детали первосортные.

4.5. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента k или двух элементов k_1 и k_2, которые выходят из строя независимо друг от друга соответственно с вероятностями 0,3; 0,2 и 0,2. Определить вероятность разрыва электрической цепи.

4.6. Работа прибора прекратилась вследствие выхода из строя одной лампы из общего числа N. Отыскание этой лампы производится путем поочередной проверки каждой лампы. Определить вероятность того, что придется проверять n ламп, если вероятность выхода из строя любой лампы равна p.

4.7. Сколько нужно взять чисел из таблицы случайных чисел, чтобы с вероятностью не менее 0,9 быть уверенным, что среди них хотя бы одно число четное?

4.8. Вероятность того, что в результате четырех независимых опытов событие A произойдет хотя бы один раз, равна половине. Определить вероятность появления события при одном опыте, если она во всех опытах остается неизменной.

4.9. В круг радиуса R вписан равносторонний треугольник. Какова вероятность того, что четыре наудачу поставленные в данном круге точки окажутся внутри треугольника?

4.10. Определить вероятность того, что написанная наудачу простая дробь несократима (задача Чебышева)[2].

4.11. События A и B несовместны, $\mathrm{P}(A) \neq 0$ и $\mathrm{P}(B) \neq 0$. Зависимы ли данные события?

4.12. Вероятность того, что в электрической цепи напряжение превысит номинальное значение, равна p_1. При повышенном напряжении вероятность аварии прибора–потребителя электрического тока равна p_2. Определить вероятность аварии прибора вследствие повышения напряжения.

4.13. На участке AB для мотоциклиста-гонщика имеются 12 препятствий, вероятность остановки на каждом из которых равна 0,1. Вероятность того, что от пункта B до конечного пункта C мотоциклист проедет без остановки, равна 0,7. Определить вероятность того, что на участке AC не будет ни одной остановки.

4.14. Три игрока играют на следующих условиях. Сначала против первого последовательно ходят второй и третий игроки. При этом первый игрок не выигрывает, а вероятности выигрыша для второго и третьего игроков одинаковы и равны 0,3. Если первый игрок не проигрывает, то он делает по одному ходу против второго и третьего игроков и выигрывает у каждого из них с вероятностью 0,4. После этого игра заканчивается. Определить вероятность того, что в результате такой игры первый игрок выиграет хотя бы у одного партнера.

4.15. Вероятность поражения первой мишени для данного стрелка равна 2/3. Если при первом выстреле зафиксировано попадание, то стрелок получает право на второй выстрел по другой мишени. Вероятность поражения обеих мишеней при двух выстрелах равна 0,5. Определить вероятность поражения второй мишени.

4.16. Детали могут быть изготовлены с применением двух технологий: в первом случае деталь проходит три технологические операции, вероятности получения брака при каждой из которых равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Во втором случае

[2] Считать, что числитель и знаменатель — независимые наудачу выбранные числа, каждое из которых с вероятностью $1/N$ совпадает с любым из чисел $1, 2, \ldots, N$ и устремить N к бесконечности.

имеются две операции, вероятности получения брака при которых одинаковы и равны 0,3. Определить, какая технология обеспечивает большую вероятность получения первосортной продукции, если в первом случае для доброкачественной детали вероятность получения продукции первого сорта равна 0,9, а во втором 0,8.

4.17. Вероятности того, что любая деталь окажется бракованной в результате механической и термической обработки, равны соответственно p_1 и p_2. Вероятности того, что брак является неустранимым, соответственно равны p_3 и p_4. Определить: а) какое количество деталей необходимо взять после механической обработки, чтобы с вероятностью 0,9 можно было утверждать, что хотя бы одна из них будет сдана доброкачественной в термическую обработку с учетом возможности устранения брака; б) вероятность того, что хотя бы одна из трех деталей будет иметь неустранимый брак после прохождения сначала механической, а затем термической обработки.

4.18. Показать, что если условная вероятность $\mathrm{P}(A/B)$ больше безусловной вероятности $\mathrm{P}(A)$, то и условная вероятность $\mathrm{P}(B/A)$ больше безусловной вероятности $\mathrm{P}(B)$.

4.19. Мишень состоит из двух концентрических окружностей с радиусами kr и nr, где $k < n$. Считая положение точки попадания при каждом выстреле равновозможным в круге радиуса nr, определить вероятность того, что при двух выстрелах будет одно попадание в круг радиуса kr.

4.20. С помощью шести карточек, на которых написано по одной букве, составлено слово «карета». Карточки перемешиваются, а затем наугад извлекаются по одной. Какова вероятность, что в порядке поступления букв образуется слово «ракета»?

4.21. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и потому набирает ее наудачу. Определить вероятность того, что ему придется звонить не более, чем в три места. Как изменится вероятность, если известно, что последняя цифра нечетная?

4.22. В лотерее n билетов, из которых m выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея k билетов?

4.23. В лотерее из сорока тысяч билетов ценные выигрыши падают на три билета. Определить: а) вероятность получения хотя бы одного ценного выигрыша на тысячу билетов; б) сколько необходимо приобрести билетов, чтобы вероятность получения ценного выигрыша была не менее 0,5?

4.24. В урне n пронумерованных от 1 до n одинаковых шаров. Производится m извлечений шаров по одному с возвращением. Определить вероятность того, что ни разу не будет извлечен шар с одним и тем же номером.

4.25. Имеются четыре бракованных изделия: на одном повреждена окраска, на другом имеется вмятина, на третьем — зазубрины, а на четвертом — одновременно все три указанных дефекта. Пусть A, B, C — события, заключающиеся в том, что у первого наудачу взятого изделия повреждена окраска (A), имеется вмятина (B) или имеются зазубрины (C). Являются ли данные события независимыми попарно и в совокупности?

4.26. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — совокупность попарно независимых событий. Всегда ли условная вероятность появления любого события, вычисленная в предположении, что какие-либо другие события из этой совокупности произошли, равна безусловной вероятности этого события?

4.27. Квадрат горизонтальными линиями разделен на n одинаковых полос. В каждую из них бросается точка, положение которой равновозможно в любом месте полосы. Затем аналогично предыдущему проводят $n-1$ вертикальных линий. Определить вероятность того, что в каждой вертикальной полосе будет только по одной точке.

4.28. В обществе из $2n$ человек одинаковое число мужчин и женщин. Места за столом занимаются наудачу. Определить вероятность того, что два лица одного пола не займут места рядом.

4.29. Общество, состоящее из пяти мужчин и десяти женщин, наудачу разбиваются на пять групп по три человека. Найти вероятность того, что в каждой группе будет по одному мужчине.

4.30. В урне имеются $n + m$ одинаковых шаров, из которых n белого, а m черного цвета, причем $m \geqslant n$. Производятся подряд без возвращения n извлечений по два шара. Определить вероятность того, что каждый раз извлекаются пары шаров разного цвета.

4.31. В урне имеются n шаров с номерами от 1 до n. Шары извлекаются наудачу по одному без возвращения. Какова вероятность, что при k первых извлечениях номера шаров совпадут с номерами извлечений?

4.32. В урне имеются два шара — белый и черный. Производятся извлечения по одному шару до тех пор, пока не появится черный, причем при извлечении белого шара в урну возвращается этот шар и добавляется еще два белых шара. Определить вероятность того, что при первых пятидесяти опытах черный шар не будет извлечен.

4.33. В очереди за билетами стоимостью в 5 руб. стоят $n+m$ человек, из которых n лиц имеют деньги пятирублевого достоинства, а $m (m \leqslant n+1)$ — десятирублевого. Каждый покупает только один билет. В кассе до продажи билетов денег нет. Какова вероятность, что никому из очереди не придется ожидать сдачи?

4.34. Условия и вопрос задачи такие же, как и в 4.33, но билет стоит один рубль, а покупатели имеют деньги рублевого (n человек) и трехрублевого достоинства (m человек), причем $2m \leqslant n+1$.

4.35. Из совокупности l изделий наудачу выбрано k изделий, последнее из которых оказалось лучшим. Какова вероятность, что это изделие лучшее во всей совокупности?

§ 5. ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ СОБЫТИЙ

Вероятность суммы двух событий определяется по формуле

$$\mathrm{P}(A+B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB),$$

которая обобщается на сумму любого числа событий

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{P}(A_k A_j) + \\ + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \mathrm{P}(A_k A_j A_i) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right).$$

Для несовместных событий вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий, т. е.

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k).$$

Задачи

5.1. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,012; 0,010; 0,006 и 0,002. Определить вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

5.2. Стрелок производит один выстрел в мишень, состоящую из центрального круга и двух концентрических колец. Вероятности попадания в круг и кольца соответственно равны 0,20; 0,15 и 0,10. Определить вероятность непопадания в мишень.

5.3. В квадрат, разделенный на n^2 одинаковых квадратов, брошен шарик. Вероятность попадания шарика в малый квадрат, являющийся пересечением i-й горизонтальной и j-й вертикальной полос, равна P_{ij} $\left(\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij} = 1\right)$. Определить вероятность попадания шарика в k-ую горизонтальную полосу.

5.4. Две одинаковые монеты радиуса r расположены внутри круга радиуса R, в который наудачу бросается точка. Определить вероятность того, что эта точка упадет на одну из монет, если монеты не перекрываются.

5.5. Какова вероятность извлечь из колоды в 52 карты фигуру любой масти или карту пиковой масти (фигурой называется валет, дама и король)?

5.6. В ящике имеются 10 монет по 20 коп., 5 монет по 15 коп. и 2 монеты по 10 коп. Наудачу берутся шесть монет. Какова вероятность, что в сумме они составят не более одного рубля?

5.7. Известны вероятности событий A, B и AB. Найти вероятность события $A\overline{B}$ и условную вероятность $\mathrm{P}(\overline{B}/\overline{A})$, если $\mathrm{P}(A) \neq 1$.

5.8. Доказать, что при $0 < \mathrm{P}(A) < 1$ из условия $\mathrm{P}(B/\overline{A}) = \mathrm{P}(B/A)$ следует независимость событий A и B.

5.9. Событие B включает в себя событие A. Доказать, что $\mathrm{P}(A) \leqslant \mathrm{P}(B)$.

5.10. В двух урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность, что оба шара одного цвета?

5.11. На плоскости проведены две параллельные полосы, ширина которых 10 мм, а расстояние между ними 155 мм. Вдоль прямой, перпендикулярной этим полосам, на расстояниях 120 мм друг от друга расположены центры окружностей радиуса 10 мм. Определить вероятность того, что хотя бы одна окружность пересечет любую из полос, если отклонение центра окружности, ближайшей к первой полосе, от середины этой полосы равновозможно от 0 до 60 мм.

5.12. Вероятность подрыва любого корабля на k-й мине ($k = 1, 2, \ldots, n$) минного заграждения, поставленного в одну линию, равна p $\left(p \leqslant \frac{1}{n}\right)$. Минное заграждение пересекается последовательно и независимо друг от друга кораблями, причем пересечение линии мин для каждого корабля равновозможно в любом месте. Определить вероятность подрыва m-го корабля.

5.13. Наудачу выбранное целое положительное число с вероятностью $1/N$ может совпадать с любым из чисел $1, 2, \ldots, N$, где $N \to \infty$. Определить вероятность того, что это число не делится: а) ни на два, ни на три; б) на два или на три.

5.14. Вероятность получения билета, у которого равны суммы трех первых и трех последних цифр шестизначного номера, равна 0,05525. Какова вероятность иметь такой билет среди двух наудачу взятых, если оба билета: а) имеют последовательные номера; б) получены независимо один от другого?

5.15. Доказать, что при $\mathrm{P}(A) = a$ и $\mathrm{P}(B) = b \neq 0$ будет

$$\mathrm{P}(A/B) \geqslant \frac{a+b-1}{b}\,.$$

5.16. Известно, что $\mathrm{P}(X \leqslant 10) = 0,9$, $\mathrm{P}(|Y| \leqslant 1) = 0,95$. Доказать, что при любой зависимости между X и Y для $Z = X + Y$ имеют место следующие неравенства:

$$\mathrm{P}(Z \leqslant 11) \geqslant 0,85, \qquad \mathrm{P}(Z \leqslant 9) \leqslant 0,95.$$

5.17. Игра между A и B ведется на следующих условиях: в результате первого хода, который всегда делает A, он может выиграть с вероятностью 0,3; если первым ходом A не выигрывает, то ход делает B и может выиграть с вероятностью 0,5; если в результате этого хода B не выигрывает, то A делает второй ход, который может привести к его выигрышу с вероятностью 0,4. Определить вероятности выигрыша для A и для B.

5.18. Вероятность для данного спортсмена улучшить свой предыдущий результат с одной попытки равна p. Определить вероятность того, что на соревнованиях спортсмен улучшит свой результат, если разрешается делать две попытки.

5.19. Игрок A поочередно играет с игроками B и C по две партии. Вероятности выигрыша первой партии для B и C равны 0,1 и 0,2 соответственно; вероятность выиграть во второй партии для B равна 0,3, для C равна 0,4.

Определить вероятность того, что: а)первым выиграет B; б)первым выиграет C.

5.20. Из урны, содержащей n шаров с номерами от 1 до n, последовательно извлекаются два шара, причем первый шар возвращается, если его номер не равен единице. Определить вероятность того, что шар с номером 2 будет извлечен при втором извлечении.

5.21. Игрок A поочередно играет сначала с игроком B, затем с C, имея вероятность выигрыша в каждой партии 0,25, и прекращает игру после первого проигрыша или четырех выигрышей. Определить вероятности выигрыша игроков B и C, если ничейные исходы исключены.

5.22. Вероятность выхода из строя прибора после того, как он применялся k раз, равна $G(k)$. Найти вероятность выхода из строя прибора при его последующих n применениях, если при предшествующих m применениях прибор из строя не вышел.

5.23. Двое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

5.24. Трое поочередно бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше появится герб. Определить вероятности выигрыша для каждого из игроков.

5.25. Вероятность получить очко, не теряя подачи, при игре двух равносильных волейбольных команд равна половине. Определить вероятность получения одного очка для подающей команды.

5.26. В урне имеются n белых и m черных шаров. Два игрока последовательно достают по одному шару, возвращая каждый раз извлеченный шар. Игра продолжается до тех пор, пока кто-нибудь из них не достанет белый шар. Определить вероятность того, что первым вытащит белый шар игрок, начинающий игру.

5.27. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания одного из них. Вероятность попадания для первого стрелка равна 0,2, а для второго равна 0,3. Найти вероятность того, что первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй.

5.28. Доказать справедливость равенства

$$\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{A}_k\right).$$

5.29. Упростить общую формулу для вероятности суммы событий применительно к случаю, когда совпадают вероятности произведений при равных количествах событий.

5.30. Доказать, что

$$\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(A_k) - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{P}(A_k + A_j) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \mathrm{P}(A_k + A_j + A_i) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right).$$

5.31. Доказать, что для любых событий A_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ справедливо равенство

$$\mathrm{P}\left(\overline{A}_0 \prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathrm{P}(\overline{A}_0) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left(\overline{A_0 + A_k}\right) + \\ + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{P}\left(\overline{A_0 + A_k + A_j}\right) - \ldots + (-1)^n \mathrm{P}\left(\overline{\sum_{k=0}^{n} A_k}\right).$$

5.32. В урне имеется n одинаковых шаров с номерами от 1 до n. Шары извлекаются по одному без возвращения. Определить вероятность того, что хотя бы при одном извлечении номер шара совпадет с номером опыта.

5.33. В помещении, насчитывающем n пронумерованных мест, n лицам выдали n номерных билетов. Какова вероятность, что ровно m лиц окажутся сидящими на местах, соответствующих номерам билетов, если все места занимаются наудачу?

5.34. В электропоезд, состоящий из n вагонов, входят k $(k \geqslant n)$ пассажиров, которые выбирают вагоны наудачу. Определить вероятность того, что в каждый вагон войдет хотя бы один пассажир.

5.35. Двое играют до победы, причем для этого необходимо первому выиграть m партий, а второму n партий. Вероятность выигрыша каждой партии первым игроком равна p, а вторым $q = 1 - p$. Определить вероятность выигрыша всей игры первым игроком.

5.36. Два игрока условились, что выигрыш получит тот, кто выиграет определенное число партий. Игра была прервана, когда первому игроку осталось до выигрыша m, а второму n партий. Как разделить ставку, если вероятность выигрыша партии для каждого из игроков равна половине? (Задача де Мере.)

5.37. Задача о четырех лгунах. Из четырех человек а, б, в, г один (а) получил информацию, которую в виде сигнала «да» или «нет» сообщает второму (б), второй — третьему (в), третий — четвертому (г), а последний объявляет результат полученной информации таким же образом, как и все другие.

Известно, что каждый из них говорит правду только в одном случае из трех. Какова вероятность, что первый из этих лгунов сказал правду, если четвертый передал правильную информацию?

5.38. На горизонтальной плоскости проведены параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии L. На плоскость наудачу брошен выпуклый контур, периметр которого равен s. Найти вероятность того, что контур пересечет одну из параллельных прямых, если диаметр круга, описанного около выпуклого контура, меньше L.

5.39. В партии из n изделий m бракованных. Для проверки наудачу выбирается s изделий. Партия бракуется, если среди них бракованных изделий более k. Определить вероятность того, что партия будет забракована.

5.40. При подрыве на любой мине затопляется с вероятностью p $\left(p \leqslant \frac{1}{n}\right)$ только один из n отсеков корабля. Корабль гибнет, если будут затоплены все n отсеков. Определить вероятность P гибели корабля при m подрывах $(m \geqslant n)$.

§ 6. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятность $\mathrm{P}(A)$ события A, которое может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную систему несовместных событий (гипотез), определяется формулой полной вероятности

$$\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(H_k)\mathrm{P}(A/H_k),$$

где

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}(H_j) = 1.$$

Задачи

6.1. Имеются две партии изделий по 12 и 10 штук, причем в каждой партии одно изделие бракованное. Изделие, взятое наудачу из первой партии, переложено во вторую, после чего выбирается наудачу изделие из второй партии. Определить вероятность извлечения бракованного изделия из второй партии.

6.2. Из полного набора костей домино наудачу берутся две кости. Определить вероятность того, что вторую кость можно приставить к первой.

6.3. В двух урнах находится соответственно m_1 и m_2 белых и n_1 и n_2 черных шаров. Из каждой урны наудачу извлекается один шар, а затем из этих двух шаров наудачу берется один. Какова вероятность, что этот шар белый?

6.4. Имеется n урн, в каждой из которых по m белых и по k черных шаров. Из первой урны наудачу извлекается один шар и перекладывается во вторую. Затем из второй урны наудачу извлекается один шар и перекладывается в третью урну и т. д. Определить вероятность извлечения после такого перекладывания белого шара из последней урны.

6.5. В тире имеются пять ружей, вероятности попадания из которых равны соответственно 0,5; 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9. Определить вероятность попадания при одном выстреле, если стреляющий берет одно из ружей наудачу.

6.6. Для контроля продукции из трех партий деталей взята для испытания одна деталь. Как велика вероятность обнаружения бракованной продукции, если в одной партии 2/3 деталей бракованные, а в двух других — все доброкачественные?

6.7. Радиолампа может принадлежать к одной из трех партий с вероятностями p_1, p_2 и p_3, где $p_1 = p_3 = 0{,}25$, $p_2 = 0{,}5$. Вероятности того, что лампа проработает заданное число часов, равны для этих партий соответственно 0,1; 0,2 и 0,4. Определить вероятность того, что лампа проработает заданное число часов.

6.8. Случайная точка может находиться только в точках B_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, переходя за один шаг из B_k в B_{k+1} с вероятностью p_k $(k = 1, 2, 3)$, из B_j в B_{j+2} с вероятностью $q_j = 1 - p_j$ $(j = 1, 2)$, а из B_3 в B_2 с вероятностью $q_3 = 1 - p_3$. Определить вероятность перехода случайной точки из B_1 в B_4: а) не более, чем за s шагов $(s = 3, 4)$; б) когда-либо.

6.9. Характеристика материала, взятого для изготовления продукции, с вероятностями 0,09; 0,16; 0,25; 0,25; 0,16 и 0,09 может находиться в шести различных интервалах.

В зависимости от свойств материала вероятности получения первосортной продукции равны соответственно 0,2; 0,3; 0,4; 0,4; 0,3 и 0,2. Определить вероятность получения первосортной продукции.

6.10. Пластина из изолятора длиной 100 мм прикрывает две проводящие полосы шириной 20 и 25 мм, идущие перпендикулярно ее длине и расположенные так, что их левые кромки удалены от левой кромки пластины соответственно на 20 и 65 мм. С центром в точке, положение которой равновозможно по средней линии (длине) пластины, просверлено отверстие диаметром 10 мм. Определить вероятность получения электрического контакта с какой-либо из полос, если проводящий контакт приложен сверху в точке, положение которой также равновозможно по средней линии пластины, а отклонение от основания пластины такое же, как у центра отверстия.

6.11. Вероятность поступления k вызовов на телефонную станцию за промежуток времени t равна $P_k(t)$. Считая числа вызовов за любые промежутки времени независимыми, определить вероятность $P_s(2t)$ поступления s вызовов за промежуток времени длительностью $2t$.

6.12. Определить вероятность того, что 100 лампочек, взятых наудачу из 1000, окажутся исправными, если известно, что число испорченных лампочек на 1000 штук равновозможно от 0 до 5.

6.13. В сосуд, содержащий n шаров, опущен белый шар. Какова вероятность извлечь из этого сосуда белый шар, если все предположения о первоначальном числе белых шаров равновозможны?

6.14. В ящике находятся 15 теннисных мячей, из которых 9 новых. Для первой игры наудачу берутся три мяча, которые после игры возвращаются в ящик. Для второй игры также наудачу берутся три мяча. Найти вероятность того, что все мячи, взятые для второй игры, новые.

6.15. В правом кармане имеются три монеты по 20 коп. и четыре монеты по 3 коп., а в левом — шесть по 20 коп. и три по 3 коп. Из правого кармана в левый наудачу перекладываются пять монет. Определить вероятность извлечения из левого кармана после перекладывания монет в 20 коп., если монета берется наудачу.

6.16. Пятнадцать экзаменационных билетов содержат по два вопроса, которые не повторяются. Экзаменующийся может ответить только на 25 вопросов. Определить вероятность того, что экзамен будет сдан, если для этого достаточно ответить на два вопроса из одного билета или на один вопрос из первого билета и на указанный дополнительный вопрос из другого билета.

6.17. В каких случаях имеет место равенство

$$\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A/B) + \mathrm{P}(A/\overline{B})?$$

6.18. В одной из двух урн, в каждой из которых 10 шаров, один шар отмечен. Играющий имеет право последовательно извлечь 20 шаров из любой урны, каждый раз возвращая извлеченный шар обратно. Как следует вести игру, чтобы вероятность извлечения отмеченного шара была наибольшей, если вероятность того, что отмеченный шар находится в первой урне, равна 2/3? Чему равна эта вероятность?

6.19. Для поисков пропавшего самолета выделено десять вертолетов, каждый из которых может быть использован для поисков в одном из двух возможных районов, где самолет может находиться с вероятностями 0,8 и 0,2. Как следует распределить вертолеты по районам поисков, чтобы вероятность обнаружения самолета была наибольшей, если каждый вертолет обнаруживает находящийся в районе поиска самолет с вероятностью 0,2, а поиски осуществляются каждым вертолетом независимо от других? Найти вероятность обнаружения самолета при оптимальной процедуре поисков.

§ 7. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Пусть попарно несовместные события (гипотезы) H_1, $H_2, \ldots, H_n$ образуют полную систему событий. Если $\mathrm{P}(A) \neq 0$ то справедлива формула Байеса

$$\mathrm{P}(H_k/A) = \frac{\mathrm{P}(AH_k)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\mathrm{P}(H_k)\mathrm{P}(A/H_k)}{\sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{P}(H_j)\mathrm{P}(A/H_j)} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

После появления события A условная вероятность осуществления события B определяется формулой

$$P(B/A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k/A)P(B/H_k).$$

Задачи

7.1. Имеется десять одинаковых урн, из которых в девяти находятся по два черных и по два белых шара, а в одной — пять белых и один черный шар. Из урны, взятой наудачу, извлечен белый шар. Какова вероятность, что шар извлечен из урны, содержащей пять белых шаров?

7.2. Имеется k_1 урн, в каждой из которых m_1 белых и n_1 черных шаров, и k_2 урн, содержащих по m_2 белых и по n_2 черных шаров. Извлеченный наудачу из выбранной урны один шар оказался белым. Какова вероятность, что данный шар извлечен из урны, принадлежащей первой группе?

7.3. Известно, что 96% выпускаемой продукции удовлетворяют стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную — с вероятностью 0,05. Определить вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, удовлетворяет стандарту.

7.4. Из партии в пять изделий наудачу взято одно изделие, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

7.5. Определить вероятность того, что среди 1000 лампочек нет ни одной неисправной, если из взятых наудачу 100 лампочек все оказались исправными. Предполагается, что число неисправных лампочек из 1000 равновозможно от 0 до 5.

7.6. Игрок D играет с неизвестным противником на следующих условиях: первый ход делает противник; в случае его проигрыша делает ход D, выигрыш которого означает выигрыш игры, а при проигрыше игра повторяется второй раз на тех же условиях. Из двух равновозможных противников B имеет вероятность выиграть первым ходом 0,4, а вторым — 0,3; C имеет вероятность выиграть первым ходом 0,8, а вторым ходом 0,6. Для D вероятность выиграть первым ходом равна 0,3 и не зависит от противника, а для второго хода равна 0,5 при игре с B и 0,7 при игре с C. Игру выиграл D.

Какова вероятность: а) что противником был B; б) что противником был C?

7.7. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 — с вероятностью 0,7; 4 — с вероятностью 0,6 и 2 — с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, но в мишень не попал. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

7.8. Вероятности попадания при каждом выстреле для трех стрелков равны соответственно 4/5, 3/4, 2/3. При одновременном выстреле всех трех стрелков имелось два попадания. Определить вероятность того, что промахнулся третий стрелок.

7.9. Трое охотников одновременно выстрелили по вепрю, который был убит одной пулей. Определить вероятности того, что вепрь убит первым, вторым или третьим охотником, если вероятности попадания для них равны соответственно 0,2; 0,4; 0,6.

7.10. Попадание случайной точки в любое место области S равновозможно, а область S состоит из четырех частей, составляющих соответственно 50, 30, 12 и 8% всей области. При испытании имело место событие A, которое происходит только при попадании случайной точки в одну из этих частей с вероятностями соответственно 0,01; 0,05; 0,2 и 0,5. В какую из частей области S вероятнее всего произошло попадание?

7.11. В урне имеется n шаров; до опытов любое предположение о числе белых шаров среди них равновероятно. Извлекаются последовательно k шаров, причем каждый раз после извлечения шар возвращается в урну. Какова вероятность того, что в урне содержатся только белые шары, если шары другого цвета не извлекались?

7.12. Из двух близнецов первый — мальчик. Какова вероятность, что другой тоже мальчик, если среди близнецов вероятность рождения двух мальчиков и двух девочек соответственно равны a и b, а для разнополых близнецов вероятность родиться первым для обоих полов одинакова?

7.13. Принимая, что вероятность рождения однополых близнецов вдвое больше, чем разнополых, вероятности рождения близнецов разного пола в любой последовательности одинаковыми, а вероятность рождения в двойне первым мальчика равной 0,51, определить вероятность рождения второго мальчика, если первым родился мальчик.

7.14. Два стрелка поочередно стреляют в мишень. Вероятности попадания первыми выстрелами для них равны соответственно 0,4 и 0,5, а вероятности попадания при последующих выстрелах для каждого увеличиваются на 0,05. Какова вероятность, что первым произвел выстрел первый стрелок, если при пятом выстреле произошло попадание в мишень?

7.15. Произведено три независимых испытания, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,2. Вероятность появления другого события B зависит от числа появления события A: при однократном появлении события A эта вероятность равна 0,1, при двукратном появлении равна 0,3, при трехкратном появлении равна 0,7; если событие A не имело места ни разу, то событие B невозможно. Определить наивероятнейшее число появлений события A, если событие B имело место.

7.16. В техникуме n студентов, из которых n_k $(k = 1, 2, 3)$ человек учатся k-й год. Среди двух наудачу выбранных студентов оказалось, что один из них учится дольше второго. Какова вероятность того, что этот студент учится третий год?

7.17. Третья часть одной из трех партий деталей является второсортной, остальные детали во всех партиях первого сорта. Деталь, взятая из одной партии, оказалась первосортной. Определить вероятность того, что деталь была взята из партии, имеющей второсортные детали. Найти ту же вероятность при условии, что взятая из той же партии вторая деталь оказалась первосортной, если первая деталь после проверки возвращена в партию.

7.18. Получена партия из восьми изделий одного образца. По данным проверки половины партии три изделия оказались технически исправными, а одно бракованным. Какова вероятность, что при проверке трех последующих изделий одно из них окажется исправным, а два бракованными, если любое количество бракованных изделий в данной партии равновозможно?

7.19. Прибор содержит два блока, исправность каждого из которых необходима для функционирования прибора. Вероятности безотказной работы в течение промежутка времени T для этих блоков соответственно равны p_1 и p_2. Прибор испытывался время T и вышел из строя. Определить вероятность того, что отказал первый блок, второй блок, оба блока.

§ 8. НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ С ДВУМЯ ВОЗМОЖНЫМИ ИСХОДАМИ

Вероятность $\mathrm{P}_{n;m}$ появления события m раз при n независимых опытах, в каждом из которых вероятность появления события равна p, определяется формулой биномиального распределения

$$\mathrm{P}_{n;m} = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad \text{где} \quad q = 1 - p.$$

Вероятность появления события не менее m раз при n опытах вычисляется по формуле

$$R_{n;m} = \sum_{k=m}^{n} \mathrm{P}_{n;k} \quad \text{или} \quad R_{n;m} = 1 - \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{P}_{n;k}.$$

Вероятность появления события хотя бы один раз при n опытах

$$R_{n;1} = 1 - q^n.$$

Количество n опытов, которые нужно произвести для того, чтобы с вероятностью не меньше P можно было утверждать, что данное событие произойдет по крайней мере один раз, находится по формуле

$$n \geqslant \frac{\ln(1-\mathrm{P})}{\ln(1-p)},$$

где p — вероятность появления этого события в каждом опыте.

Вероятнейшее значение μ числа m появлений события равно целой части числа $(n+1)p$, а при целом $(n+1)p$ наибольшее значение вероятности достигается при двух числах:

$$\mu_1 = (n+1)p - 1 \quad \text{и} \quad \mu_2 = (n+1)p\,.$$

Если опыты независимы, но вероятности появления события различны, то вероятность $\mathrm{P}_{n;m}$ появления события m раз при n опытах равна коэффициенту при u^m в разложении производящей функции

$$G(u) = \prod_{k=1}^{n}(p_k u + q_k) = \sum_{m=0}^{n} \mathrm{P}_{n;m} u^m,$$

где $q_k = 1 - p_k$, p_k — вероятность появления события в k-м опыте.

Коэффициенты $\mathrm{P}_{n;m}$ могут быть определены дифференцированием функции $G(u)$:

$$\mathrm{P}_{n;m} = \frac{1}{m!} \left. \frac{d^m G(u)}{du^m} \right|_{u=0}.$$

Задачи

8.1. Определить вероятность того, что номер первой встретившейся автомашины не содержит: а) цифры пять; б) двух и более пятерок; в) ровно двух пятерок.

Известно, что все номера четырехзначные, неповторяющиеся и равновозможные (считается возможным номер 0000).

8.2. В семье десять детей. Считая вероятности рождения мальчика и девочки равными 0,5, определить вероятность того, что в данной семье: а) пять мальчиков; б) мальчиков не менее трех, но и не более восьми.

8.3. Из таблицы случайных чисел наудачу выписаны 200 двузначных случайных чисел (от 00 до 99). Определить вероятность того, что среди них число 33 встретится: а) три раза; б) четыре раза.

8.4. В библиотеке имеются книги только по технике и математике. Вероятности того, что любой читатель возьмет книгу по технике или по математике, равны соответственно 0,7 и 0,3. Определить вероятность того, что пять читателей подряд возьмут книги или только по технике, или только по математике, если каждый из них берет одну книгу.

8.5. Две электрические лампочки включены в цепь последовательно. Определить вероятность того, что при повышении напряжения в сети выше номинального произойдет разрыв цепи, если вероятность того, что лампочка перегорит, для обеих лампочек одинакова и в этих условиях равна 0,4.

8.6. Событие B наступает в том случае, если событие A появится не менее трех раз. Определить вероятность появления события B, если вероятность появления события A при одном опыте равна 0,3 и произведено: а) пять независимых опытов; б) семь независимых опытов.

8.7. Электрическая схема, содержащая два блока типа A, один блок типа B и четыре блока типа C, составлена так, как это показано на рис. 1. Определить вероятность разрыва цепи, неустранимого с помощью ключа K, если элементы типа A выходят из строя с вероятностью 0,3, элемент типа B — с вероятностью 0,4, элементы типа C — с вероятностью 0,2. События A_j $(j = 1, 2, \ldots, 7)$ — выход из строя j-го элемента — взаимно независимы.

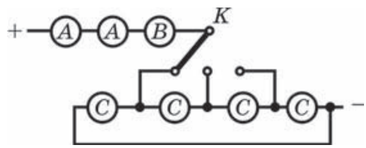

Рис. 1

8.8. Вероятность того, что агрегат необходимо поставить на ремонт после m аварий, определяется формулой $G(m) = 1 - (1 - \frac{1}{\omega})^m$, где ω — среднее число аварий до постановки агрегата на ремонт. Доказать, что вероятность того, что после n производственных циклов потребуется ремонт, определяется по формуле $W_n = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n$, где p — вероятность того, что во время одного производственного цикла произойдет авария.

8.9. Производится четыре независимых опыта, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью 0,3. Событие B наступает с вероятностью, равной 1, если событие A произошло не менее двух раз; не может наступить, если событие A не имело места, и наступает с вероятностью 0,6, если событие A имело место один раз. Определить вероятность появления события B.

8.10. Один из двух наудачу выбранных стрелков произвел 200 независимых выстрелов и получил 116 попаданий. Вероятность попадания при каждом выстреле для первого стрелка равна 1/2, а для второго 2/3. Определить вероятность того, что стрелял первый стрелок.

8.11. Рассчитать зависимость вероятности хотя бы одного появления события A при 10 независимых опытах от вероятности p появления события A в каждом опыте для следующих значений p: 0,01; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6.

8.12. Вероятность хотя бы одного появления события A при четырех независимых опытах равна 0,59. Какова вероятность появления события A при одном опыте, если при каждом опыте эта вероятность одинакова?

8.13. Вероятность появления некоторого события в каждом из восемнадцати независимых опытов равна 0,2. Определить вероятность появления этого события по крайней мере три раза.

8.14. Вероятность выигрыша на каждый из лотерейных билетов равна 0,02. Рассчитать вероятности хотя бы одного выигрыша на n билетов для $n = 1$, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, если считать, что билеты принадлежат разным сериям.

8.15. Если известно, что на лотерейный билет выпал выигрыш, то вероятности того, что выигрышем будет велосипед или стиральная машина, равны соответственно 0,03 и 0,02. Найти вероятность выигрыша хотя бы одного из этих предметов на 10 выигравших лотерейных билетов, выбранных из разных серий.

8.16. Игра состоит в набрасывании колец на колышек. Игрок получает 6 колец и бросает кольца до первого попадания. Найти вероятность того, что хотя бы одно кольцо останется неизрасходованным, если вероятность попадания при каждом броске равна 0,1.

8.17. Определить вероятность получения не менее 28 очков при трех независимых выстрелах из спортивного пистолета по мишени с максимальным числом очков, равным 10, если вероятность получения 30 очков равна 0,008. Известно, что при одном выстреле вероятность получения восьми очков равна 0,15, а менее восьми очков — 0,4.

8.18. Два баскетболиста делают по три броска мячом в корзину. Вероятности попадания мяча при каждом броске равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятность того, что:

а) у обоих будет равное количество попаданий; б) у первого баскетболиста будет больше попаданий, чем у второго.

8.19. Вероятность того, что лампа останется исправной после 1000 часов работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что хотя бы одна из трех ламп останется исправной после 1000 часов работы?

8.20. Трое рабочих на своих станках производят изделия только отличного и хорошего качества, причем первый и второй из них производят изделия отличного качества с вероятностью 0,9, а третий — с вероятностью 0,8. Один из этих рабочих изготовил 8 изделий, среди которых 2 хороших. Какова вероятность, что среди следующих 8 изделий, изготовленных тем же рабочим, будут 2 хороших и 6 отличных?

8.21. Для победы в волейбольном состязании команде необходимо выиграть три партии из пяти; команды неравносильны. Определить вероятность выигрыша в каждой партии для первой команды, если для уравнивания шансов она должна дать фору: а) в две партии; б) в одну партию.

8.22. Матч между двумя шахматистами проводится на следующих условиях: 1) учитываются только результативные партии; 2) выигравшим считается тот, кто первым наберет четыре очка при условии, что у противника при этом не более двух очков; 3) если у обоих игроков по три очка, то выигрывает тот, кто первым наберет пять очков.

Определить вероятности выигрыша матча для каждого из игроков, если вероятности выигрыша каждой партии для них относятся как три к двум.

8.23. Для прикуривания гражданин пользовался двумя коробками спичек, доставая наудачу ту или иную коробку. Через некоторое время он обнаружил, что одна коробка пуста. Какова вероятность, что во второй коробке при этом k спичек, если вначале в каждой коробке было по n спичек? (Задача Банаха).

8.24. Вероятность попадания стрелком в десятку равна 0,7, а в девятку — 0,3. Определить вероятность того, что данный стрелок при трех выстрелах наберет не менее 29 очков.

8.25. Во время каждого из опытов на 1 час в день включается батарея мощностью в 120 Вт или в 200 Вт; вероятности благоприятного исхода опыта равны соответственно 0,06 и 0,08. Результат проведенной серии опытов считается достигнутым в случае хотя бы одного благоприятного исхода опыта с батареей в 200 Вт или хотя бы двух с батареей в 120 Вт. Общая энергия, затраченная на производство всех опытов, не может превышать 1200 Вт·ч. Какие батареи выгоднее использовать?

8.26. Прибор выходит из строя, если перегорит не менее пяти ламп I типа или не менее двух ламп II типа. Определить вероятность выхода из строя прибора, если известно, что перегорело пять ламп, причем лампы перегорают независимо одна от другой. Каждая перегоревшая лампа с вероятностью 0,7 является лампой первого типа и с вероятностью 0,3 — второго типа.

8.27. Вероятность возникновения опасной для прибора перегрузки в каждом опыте равна 0,4. Определить вероятность отказа прибора в серии из трех независимых опытов, если вероятности отказа прибора при одной, двух и трех опасных перегрузках соответственно равны 0,2; 0,5 и 0,8.

8.28. Вероятность участия в каждом опыте любого из n одинаковых объектов равна p $\left(p < \frac{1}{n}\right)$. Опыты прекращаются после того, как впервые один из объектов примет в них участие k раз. Определить вероятность того, что для этого придется производить m независимых опытов, если $m < 2k$.

8.29. В условиях предыдущей задачи определить вероятность достижения результата за $2k-1$ опытов.

8.30. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Сколько таких приборов нужно испытать, чтобы с вероятностью не менее 0,9 получить не меньше трех отказов?

8.31. Пункт A нужно связать с 10 абонентами пункта B. Вероятность того, что в любой фиксированный момент времени абоненту потребуется линия связи, равна 0,2, причем эта потребность не зависит от потребностей других абонентов. Какое минимальное количество каналов необходимо для того, чтобы можно было в любой момент с вероятностью 0,99 обслужить всех абонентов?

8.32. Последовательно послано четыре радиосигнала. Вероятности приема каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, и соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. Определить вероятность приема k сигналов ($k = 0, 1, 2, 3, 4$).

8.33. Используя условия предыдущей задачи, определить вероятность установления двусторонней радиосвязи, если вероятность этого события при приеме одного сигнала равна 0,2, двух — 0,6, а при приеме трех и четырех — единице.

8.34. Вероятности перегорания первой, второй и третьей ламп равны соответственно 0,1; 0,2 и 0,3. Вероятности выхода из строя прибора при перегорании одной, двух и трех ламп равны соответственно 0,25; 0,6 и 0,9. Определить вероятность выхода прибора из строя.

8.35. Охотник стреляет в лося с расстояния 100 м и попадает в него с вероятностью 0,5. Если при первом выстреле попадания нет, то охотник стреляет второй раз, но с расстояния 150 м. Если нет попадания и в этом случае, то охотник стреляет третий раз, причем в момент выстрела расстояние до лося равно 200 м. Считая, что вероятность попадания обратно пропорциональна квадрату расстояния, определить вероятность попадания в лося.

8.36. Сколько чисел необходимо взять из таблицы случайных чисел, чтобы с наибольшей вероятностью обеспечивалось появление среди них трех чисел, оканчивающихся цифрой 7?

8.37. Вероятность p попадания в десятку, при одном выстреле равна 0,2. Сколько нужно произвести независимых выстрелов, чтобы с вероятностью не менее 0,9 попасть в десятку хотя бы один раз?

8.38. За один цикл автомат изготовляет 10 деталей. За какое количество циклов вероятность изготовления хотя бы одной бракованной детали будет не менее 0,8, если вероятность того, что любая деталь бракованная, равна 0,01?

8.39. На прямой через 60 см один от другого расположены центры окружностей, диаметры которых одинаковы и равны 1 см. Несколько таких прямых устанавливаются параллельно друг другу в одной плоскости, причем сдвиг линий равновозможен на любую величину от 0 до 60 см. Перпендикулярно этим линиям в той же плоскости перемещается круг радиуса 7 см. Какое количество линий должно быть, чтобы вероятность пересечения окружности перемещающегося круга с какой-либо окружностью была не менее 0,9?

8.40. Из ящика, в котором 20 белых и 2 черных шара n раз извлекаются шары по одному, причем после каждого извлечения шар возвращается. Определить наименьшее число извлечений, при котором вероятность достать хотя бы один раз черный шар будет больше половины.

8.41. Для данного баскетболиста вероятность забросить мяч в корзину при броске равна 0,4. Произведено 10 бросков. Найти вероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

8.42. Найти вероятнейшее число отрицательных и положительных ошибок и соответствующую вероятность при четырех измерениях, если при каждом измерении вероятность получения положительной ошибки равна 2/3, а отрицательной — 1/3.

8.43. Определить число n повторных независимых испытаний, которое нужно произвести для того, чтобы вероятнейшее число появлений события равнялось 20, если вероятность появления этого события при каждом испытании равна 0,8.

8.44. Подводная лодка атакует корабль, выпуская по нему последовательно и независимо одну от другой n торпед. Каждая торпеда попадает в корабль с вероятностью p. При попадании торпеды с вероятностью $1/m$ затопляется один из m отсеков корабля. Определить вероятность гибели корабля, если для этого необходимо затопление не менее двух отсеков.

8.45. Определить вероятность необходимости повторного голосования при выборе l человек, если голосуют n человек; вероятность быть вычеркнутым для каждого из k кандидатов одинакова и равна p, а для выбора кандидата необходимо получить большинство голосов. Повторное голосование не производится, если больше половины голосов получает каждый из l кандидатов, а любой из оставшихся $k - l$ кандидатов — не более половины голосов из n.

§ 9. НЕЗАВИСИМЫЕ ИСПЫТАНИЯ С ЧИСЛОМ ВОЗМОЖНЫХ ИСХОДОВ, БОЛЬШИМ ДВУХ. РЕКУРРЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вероятность того, что при n независимых испытаниях, в каждом из которых может произойти только одно из событий $A_1, A_2, \ldots, A_m$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, \ldots, p_m$, события $A_k (k = 1, 2, \ldots, m)$ произойдут ровно n_k раз $(\sum_{k=1}^{m} n_k = n)$, определяется формулой

$$P_{n;n_1,n_2,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \,\ldots\, n_m!}\, p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m}.$$

Вероятность $P_{n;n_1,n_2,\ldots,n_m}$ является коэффициентом при $u_1^{n_1} u_2^{n_2} \ldots u_m^{n_m}$ в следующей производящей функции:

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (p_1 u_1 + p_2 u_2 + \ldots + p_m u_m)^n.$$

Производящая функция для $n + n'$ независимых испытаний является произведением производящих функций для n и соответственно для n' испытаний. Для упрощения вычисления искомых вероятностей иногда производится соответствующая замена аргументов в производящей функции. Пусть, например,требуется определить вероятность P_l того, что при n независимых испытаниях число проявлений события A_1 будет на l $(l \leqslant n)$ больше числа появлений события A_2. Данная вероятность равна сумме вероятностей $P_{n;\, l+s,s,n_3,\ldots,n_m}$, распространенной на все возможные значения s, $n_3, \ldots, n_m$, при которых $l + 2s + \sum_{j=3}^{m} n_j = n$. Положив в производящей функции $u_1 = u$, $u_2 = \frac{1}{u}$, $u_j = 1$ $(j = 3, 4, \ldots, m)$, вероятность P_l можно определить как коэффициент при u^l в разложении по степеням параметра u функции

$$G_1(u) = \left(p_1 u + \frac{p_2}{u} + \sum_{j=3}^{m} p_j \right)^n,$$

т. е. в следующем разложении:

$$G_1(u) = \sum_{s=0}^{n} C_n^s p_2^{n-s} \sum_{r=0}^{s} C_s^r p_1^r (1 - p_1 - p_2)^{s-r} u^{r+s-n}.$$

Пусть $p_j = \frac{1}{m}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ и требуется определить вероятность того, что сумма $\sum_{j=1}^{m} jn_j$ номеров появившихся событий при n независимых испытаниях равна r. Тогда следует положить $u_j = u^j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Искомая вероятность является коэффициентом при u^r в разложении по степеням u функции

$$G_2(u) = \frac{u^n}{m^n}(1 + u + \ldots + u^{m-1})^n = \frac{u^n}{m^n}\left(\frac{1 - u^m}{1 - u}\right)^n,$$

т. е. в разложении

$$G_2(u) = \frac{u^n}{m^n}\left[\sum_{k=0}^{n}(-1)C_n^k u^{km}\right]\left(\sum_{s=0}^{\infty} C_{n+s-1}^{n-1} u^s\right),$$

которое справедливо при $|u| < 1$.

Если вероятность $p_j(s)$ появления события A_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ при s-м испытании зависит от номера этого испытания, то вероятность $P_{n;n_1,n_2,\ldots,n_m}$ совпадает с коэффициентом при $u_1^{n_1} u_2^{n_2} \ldots u_m^{n_m}$ в разложении по степеням параметров $u_1, u_2, \ldots, u_m$ производящей функции

$$G(u_1, u_2, \ldots, u_m) = \prod_{s=1}^{n} [p_1(s)u_1 + p_2(s)u_2 + \ldots + p_m(s)u_m].$$

В некоторых случаях для определения вероятности P_n соответствующего исхода серии из n в общем случае зависимых испытаний целесообразно составить рекуррентные уравнения вида

$$\sum_{s=1}^{k} \alpha_{ks} P_s + \beta_k = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где α_{ks} и β_k — известные постоянные, а P_s — вероятность аналогичного исхода за s испытаний. При решении этих уравнений используются различные методы линейной алгебры. Иногда для упрощения вычислений целесообразно использовать производящие функции. Для любой совокупности γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_N$ пронумерованных величин производящая функция $R(u)$ определяется формулой

$$R(u) = \sum_{s=0}^{N} \gamma_s u^s.$$

Задачи

9.1. В урне имеется три шара: черный, красный и белый. Из урны шары по одному извлекаются 5 раз, причем после каждого извлечения шар возвращался обратно. Определить вероятность того, что черный и белый шары извлечены не менее чем по два раза каждый.

9.2. Рабочий производит с вероятностью 0,90 годное изделие, с вероятностью 0,09 — изделие с устранимым браком и с вероятностью 0,01 — с неустранимым браком. Произведено три изделия. Определить вероятность того, что среди них хотя бы одно годное изделие и хотя бы одно с устранимым браком.

9.3. Каждый из девяти шаров с одинаковой вероятностью может быть помещен в один из трех первоначально пустых ящиков. Определить вероятность того, что: а) в каждый ящик попало по три шара; б) в один ящик попало четыре шара, в другой — три, а в оставшийся — два шара.

9.4. По мишени, состоящей из внутреннего круга и двух концентрических колец, производится десять выстрелов из спортивного пистолета. Вероятности попадания в указанные области при каждом выстреле равны соответственно 0,15; 0,22 и 0,13. Определить вероятность того, что при этом будет шесть попаданий в круг, три — в первое кольцо и одно попадание во второе кольцо.

9.5. В электропоезд, состоящий из шести вагонов, садится двенадцать человек, причем выбор каждым пассажиром вагона равновозможен. Определить вероятность того, что: а) в каждый вагон вошло по два человека; б) в один вагон никто не вошел, в другой — вошел один человек, в два вагона — по два человека, а в оставшиеся два вагона соответственно три и четыре человека.

9.6. Урна содержит l белых, m черных и n красных шаров. Производится $l_1 + m_1 + n_1$ извлечений шаров по одному с возвращением каждого извлеченного шара. Определить вероятность того, что будет извлечено: а) сначала l_1 белых, затем m_1 черных и, наконец, n_1 красных шаров; б) l_1 белых, m_1 черных и n_1 красных шаров, причем все шары одного цвета появляются подряд, но последовательность цветов может быть любой; в) l_1 белых, m_1 черных и n_1 красных шаров в любой последовательности.

9.7. По цели, состоящей из m элементарных целей, произведено n независимых выстрелов. Вероятность попадания в k-ю цель при любом выстреле равна p_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1 - p_0$, где p_0 — вероятность промаха. Определить вероятность поражения цели, если для этого необходимо поразить не менее двух элементарных целей, каждая из которых поражается при одном попадании в нее.

9.8. Определить вероятность того, что при n бросаниях монет герб появится нечетное число раз.

9.9. Два равносильных противника играют в шахматы до тех пор, пока один из них не выиграет на две партии больше, чем другой. Какова вероятность, что будет сыграно $2n$ результативных партий?

9.10. Двое играют до тех пор, пока один из них не выиграет все деньги у другого. Определить вероятность того, что при этом будет сыграно ровно n партий, если все ставки одинаковы, каждый игрок в начале игры имеет по три ставки, а вероятность выигрыша в любой партии для каждого из игроков равна половине.

9.11. Два игрока продолжают игру до полного разорения одного из них. Капитал первого игрока равен n рублей, второго — m рублей. Вероятности выигрыша каждой партии для этих игроков равны соответственно p и q $(p + q = 1)$. В каждой партии выигрыш одного игрока (проигрыш другого) равен одному рублю. Определить вероятности разорения для каждого из игроков.

9.12. В шахматы играют $n+1$ равносильных игроков, причем каждый по очереди играет с победителем. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд у всех n противников. Какова вероятность, что при этом будет сыграно ровно m результативных партий (ничьи не учитываются)?

9.13. Матч между двумя равносильными шахматистами происходит на следующих условиях:

1) учитываются только результативные партии;

2) победившим считается набравший шесть очков, если его противник набрал не более четырех очков;

3) если у одного шесть, а у другого пять выигранных партий, то игра продолжается до тех пор, пока разрыв не составит два очка.

Определить вероятность того, что результативных партий придется играть: а) не более десяти; б) ровно n.

9.14. Вероятность появления события в каждом из n независимых опытов одинакова и равна p. Доказать, что производящей функцией для вероятностей появления события больше k раз является функция

$$R(u) = \frac{1 - (q + pu)^n}{1 - u}.$$

9.15. Вероятность появления события в k-м опыте равна p_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Доказать, что производящими функциями для вероятностей появления события соответственно больше k раз и не больше k раз при n независимых опытах являются функции

$$R_1(u) = \frac{1 - \prod_{k=1}^{n}(q_k + p_k u)}{1 - u} \quad \text{и} \quad R_2(u) = \frac{\prod_{k=1}^{n}(q_k + p_k u) - u^{n+1}}{1 - u}.$$

9.16. Два стрелка производят по n выстрелов, причем каждый стреляет по своей мишени. Определить вероятность того, что у них будет по одинаковому числу попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле постоянна и равна половине.

9.17. В каждой паре приборов имеется по две лампы. За время работы только в одном приборе равновозможно — левом или правом, с вероятностью 1/4 перегорает одна лампа и с вероятностью 1/16 — обе лампы. Определить вероятность того, что в n парах таких приборов в левых приборах перегорит по крайней мере на m $(m \leqslant 2n)$ ламп больше, чем в правых. Рассчитать эту вероятность для случая, когда $n = m = 3$.

9.18. Матч на звание чемпиона мира по стоклеточным шашкам состоит из двадцати партий. Определить вероятность того, что матч окончится с результатом 12 : 8, если вероятности выигрыша любой партии для каждого из игроков равны 0,2.

9.19. Для победы в матче на звание чемпиона мира по шахматам претенденту необходимо набрать не менее $12\frac{1}{2}$ очков из 24 возможных. При ничейном исходе (12 : 12) звание чемпиона мира сохраняется за чемпионом. Встречаются два равносильных противника, у которых вероятности выигрыша каждой партии в два раза меньше вероятности ничейного исхода. Определить: а) вероятность того, что чемпионом мира останется прежний чемпион, и вероятность того, что чемпионом мира станет претендент; б) вероятность того, что в матче будет сыграно двадцать партий.

9.20. Определить вероятность того, что при бросании n игральных костей (кубиков) сумма очков на верхних гранях будет: а) равна заданному числу m; б) не больше m.

Найти эти вероятности при $n = 10$, $m = 20$.

9.21. Определить вероятность получения билета, у которого сумма цифр номера равна 21, если номер билета равновозможен от 0 до 999 999.

9.22. Каждая из n величин $X_1, X_2 < \ldots, X_n$ с одинаковой вероятностью может принимать любое целое положительное значение от 1 до m. Найти вероятность того, что сумма $X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ будет: а) равна заданному числу $N (nm \geqslant N \geqslant n)$; б) не меньше заданного числа N.

9.23. Два стрелка производят по три выстрела каждый в свою мишень. Один стрелок при каждом выстреле с одинаковой вероятностью выбивает любое количество очков от 7 до 10; для другого вероятности выбить 7 и 10 очков равны 1/8, а вероятности выбить 8 и 9 очков равны 3/8. Найти вероятность того, что: а) первый стрелок выбьет 25 очков; б) второй стрелок выбьет 25 очков; в) оба стрелка выбьют одинаковое количество очков.

9.24. Бросают две монеты. Определить вероятность того, что равное количество гербов будет при n-м бросании монет (не раньше).

9.25. Две равносильные волейбольные команды играют одну партию. Игра продолжается до тех пор, пока одна команда не будет иметь по крайней мере на два очка больше, чем другая, причем наименьшее необходимое число очков равно 15. Определить вероятности: а) P_k и Q_k выигрыша первой (подающей первый мяч) и второй команд со счетом $15 : k$ $(k = 0, 1, \ldots, 13)$; б) P_I и Q_I выигрыша для обеих команд, когда проигравшая команда имеет не более 13 очков; в) p_k и q_k выигрыша со счетом $(16 + k) : (14 + k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$; г) P_{II} и Q_{II} выигрыша, когда каждая команда потеряла не менее 14 очков; д) P и Q выигрыша первой и второй команд.

9.26. Независимые испытания проводятся до тех пор, пока не будет серии из m появлений события A. Определить вероятность того, что для этого придется провести n испытаний, если вероятность появления события A при каждом испытании равна p. Найти эту вероятность при $m = 2$, $n = 5$.

9.27. Определить вероятность того, что не придется проводить повторного голосования N человек при выборе l из k кандидатов, если вероятность остаться невычеркнутым в любом бюллетене для каждого кандидата одинакова и равна p. Повторное голосование производится при выполнении хотя бы одного условия: l-й (по числу полученных голосов) кандидат получает менее n голосов или равное число голосов получают l-й и $(l + 1)$-й кандидаты. Рассчитать указанную вероятность при $N = k = 3$, $n = 2$, $l = 1$, $p = 0,5$.

Глава 2

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 10. РЯД РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ОСНОВНЫЕ ТИПЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Рядом распределения дискретной случайной величины называется совокупность всех ее возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$. Ряд распределения может быть задан в виде таблицы или формулой.

Вероятности p_i удовлетворяют условию

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

где число возможных значений n может быть конечным или бесконечным.

Функция распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i,$$

где суммирование ведется по всем значениям i, для которых $x_i < x$.

Целочисленная случайная величина может быть задана производящей функцией $G(u)$, определяемой формулой

$$G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k,$$

где $p_k = \mathrm{P}(X = k)$, а суммирование ведется по всем возможным значениям целочисленной случайной величины.

Вероятности p_k могут быть получены из производящей функции $G(u)$ по следующим формулам:

$$p_k = \frac{1}{k!} \left. \frac{d^k G(u)}{du^k} \right|_{u=0}$$

или

$$p_k = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G(z)}{z^{k+1}}\, dz,$$

где интегрирование ведется по замкнутому контуру, обходящему начало координат против часовой стрелки.

Задачи

10.1. Построить ряд распределения и функцию распределения случайного числа попаданий мячом в корзину при одном броске, если вероятность попадания мячом в корзину при одном броске $p = 0{,}3$.

10.2. Построить ряд распределения и функцию распределения для числа появлений гербов при однократном бросании трех монет.

10.3. Производятся последовательные независимые испытания пяти приборов на надежность. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий оказался надежным. Построить ряд распределения случайного числа испытанных приборов, если вероятность выдержать испытания для каждого из них равна 0,9.

10.4. Независимые опыты, в каждом из которых появление события A имеет одну и ту же вероятность p, продолжаются до первого появления A. Определить: ряд распределения числа непоявлений A (геометрическое распределение) и его производящую функцию.

10.5. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Построить ряды распределения и производящие функции случайных чисел бросков, производимых каждым из баскетболистов, если вероятность попадания для первого p_1, а для второго p_2.

10.6. Мишень состоит из круга № 1 и двух концентрических колец с номерами 2 и 3. Попадание в круг № 1 дает

10 очков, в кольцо № 2 дает 5 очков, в кольцо № 3 дает (-1) очко. Вероятности попадания в круг № 1 и кольца № 2 и № 3 соответственно равны 0,5; 0,3; 0,2. Построить ряд распределения для случайной суммы полученных очков в результате трех попаданий.

10.7. Сигналы на включение приборов подаются через каждые 5 сек. Время от момента передачи сигнала до включения прибора 16 сек. Подача сигналов прекращается сразу же после того, как включится хотя бы один прибор. Найти ряд распределения и производящую функцию для случайного числа поданных сигналов, если вероятность включения для каждого прибора равна 1/2.

10.8. Имеется n заготовок для одной и той же детали. Вероятность изготовления годной детали из каждой заготовки равна p. Найти ряды распределения и производящие функции для: а) числа заготовок, оставшихся после изготовления первой годной детали, б) числа использованных заготовок.

10.9. Найти ряд распределения и производящую функцию числа появлений события A в серии из n независимых опытов, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью p (биномиальное распределение).

10.10. Прибор, состоящий из блоков a, b_1 и b_2, дает отказ в случае осуществления события $C = A + B_1 B_2$, где A — отказ блока a; B_1 и B_2 — отказы блоков b_1 и b_2 соответственно. Блок дает отказ при попадании в него хотя бы одной космической частицы. Построить ряд распределения числа случайных частиц, попадание которых в прибор приводит к его отказу, если вероятности попадания в блоки частицы, попавшей в прибор, равны $\mathrm{P}(A) = 0{,}5$; $\mathrm{P}(B_1) = \mathrm{P}(B_2) = 0{,}25$.

10.11. Вероятность попадания в цель для одного выстрела равна p. Вероятность поражения цели при m попаданиях

$$\mathrm{P}(A/m) = 1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m, \quad m \geqslant 0, \quad \omega > 1.$$

Построить ряд распределения числа произведенных выстрелов до поражения цели.

10.12. Число проведенных опытов X случайно и может изменяться в пределах от 0 до ∞. Вероятность $\mathrm{P}(X = k) =$

$= \frac{n^k e^n}{k!}$. Каждый опыт может быть успешным с вероятностью p и неуспешным с вероятностью $(1-p)$. Построить ряд распределения числа успешных опытов.

10.13. Составить ряд распределения для отношения числа очков, выпавших на двух игральных костях при их однократном бросании, если в качестве числителя выбирается большее или равное из двух полученных чисел очков.

10.14. Производится три независимых опыта, в каждом из которых с равной вероятностью может быть получено любое целое число от 0 до 9. Построить ряд распределения суммы полученных чисел.

10.15. Найти ряд распределения и производящую функцию числа независимых опытов до r-го появления события A, если вероятность его появления в каждом опыте равна p (распределение Паскаля).

10.16. Определить производящую функцию распределения Пуассона

$$\mathrm{P}(X = m) = \frac{a^m}{m!}\, e^{-a} \quad (a > 0),$$

где m принимает целые неотрицательные значения.

10.17. Найти ряд распределения случайного числа элементов α, содержащихся в бесповторной выборке r элементов из n элементов, среди которых содержится m элементов α (гипергеометрическое распределение).

10.18. Найти ряд распределения и производящую функцию общего числа «неуспехов», предшествующих наступлению r-го «успеха» в неограниченной серии независимых опытов, в каждом из которых достижение «успеха» возможно с вероятностью p (отрицательное биномиальное распределение).

10.19. Определить производящую функцию логарифмического распределения

$$\mathrm{P}(X = m) = -\frac{a^m}{m\ln(1-a)} \qquad (0 < a < 1),$$

где $m \geqslant 1$ целое число.

10.20. С помощью производящей функции показать, что биномиальное распределение аппроксимируется распределением Пуассона, если

$$\lim_{n\to\infty} np = a.$$

10.21. Любой из 300 абонентов независимо друг от друга звонит на коммутатор. Какова вероятность того, что от них поступит в течение часа четыре вызова, если вероятность вызова для каждого абонента равна 0,01.

10.22. Аппаратура содержит 2000 элементов, отказ каждого из которых не зависит от работоспособности других и имеет вероятность $p = 0{,}0005$. Какова вероятность отказа аппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

10.23. Найти вероятность того, что из 5000 изделий более чем одно не выдержит испытания, если результаты испытаний — независимые события, а вероятность изделию не выдержать испытание равна 0,001. Сравнить результаты расчетов, полученных с использованием распределения Пуассона и с использованием биномиального распределения. В последнем случае расчет производить с помощью семизначных таблиц логарифмов.

10.24. Найти вероятность того, что среди 200 изделий окажется более трех дефектных, если появление дефекта на изделии не зависит от качества остальных и имеет вероятность, равную 0,01.

10.25. В аппаратурный отсек космической ракеты за время ее полета может попасть r элементарных частиц с вероятностью

$$\mathrm{P}(r, \lambda) = \frac{\lambda^r}{r!}\, e^{-\lambda}\,.$$

Условная вероятность для каждой из них попасть при этом в уязвимый блок равна p. Найти вероятность попадания в блок: а) ровно k частиц; б) хотя бы одной частицы.

10.26. С помощью производящей функции показать, что отрицательно биномиальное распределение аппроксимируется распределением Пуассона, если $\lim\limits_{r\to\infty} r(1-p) = a$.

10.27. Космический корабль, имеющий форму шара радиуса r, пересекает пояс космических частиц, имеющих одинаковую скорость u. Определить вероятность $p_o(t)$ отсутствия столкновений корабля с частицами за время t, если вектор скорости корабля $\overline{v}$ составляет угол γ с вектором $\overline{u}$, среднее число частиц, приходящихся в единицу времени на 1 см^2 потока, равно ν, а случайное число их распределено по закону Пуассона.

§ 11. МОМЕНТЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных значений x_i на соответствующие им вероятности $p_i = \mathrm{P}(X = x_i)$

$$\overline{x} = \mathrm{M}\,[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Начальный m_k и центральный μ_k моменты k-го порядка дискретной случайной величины определяются формулами

$$m_k = \mathrm{M}\,[X^k] = \sum_{i=1}^{n} x_i^k P_i$$

$$\mu_k = \mathrm{M}\,[(X - \overline{x})^k] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^k p_i.$$

Второй центральный момент, или дисперсия, вычисляется по одной из формул

$$\mathrm{D}\,[X] = \mathrm{M}\,[(X - \overline{x})^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 p_i$$

или

$$\mathrm{D}\,[X] = \mathrm{M}\,[X^2] - \overline{x}^2.$$

Среднее квадратическое отклонение σ определяется соотношением

$$\sigma = +\sqrt{\mathrm{D}\,[X]}.$$

Если вероятности различных значений случайной величины X зависят от события A_k, то условное математическое ожидание случайной величины X при условии осуществления A_k есть

$$\mathrm{M}\,[\,X \mid A_k\,] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{P}(X = x_i \mid A_k).$$

Если A_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — несовместные события, то полное математическое ожидание X связано с условным математическим ожиданием формулой

$$\mathrm{M}\,[X] = \mathrm{M}\,\{\mathrm{M}\,[\,X \mid A_k\,]\} = \sum_{k=1}^{m} \mathrm{M}\,[\,X \mid A_k\,]\,\mathrm{P}(A_k).$$

Во всех приведенных выше формулах число слагаемых в суммах может быть бесконечным; в этом случае для существования соответствующего математического ожидания ряд должен сходиться абсолютно.

Математическое ожидание целочисленной случайной величины и ее производящая функция связаны между собой зависимостью

$$\mathrm{M}\,[X] = \left.\frac{dG(u)}{du}\right|_{u=1}.$$

Остальные начальные моменты до четвертого порядка равны:

$$m_2 = G_2 + G_1$$

$$m_3 = G_3 + 3G_2 + G_1$$

$$m_4 = G_4 + 6G_3 + 7G_2 + G_1,$$

где

$$G_k = \left.\frac{d^k G(u)}{du^k}\right|_{u=1}.$$

При этом предполагается, что вычисляемые моменты существуют.

Характеристической функцией $E(u)$ случайной величины X называется математическое ожидание функции e^{iuX} (где u — вещественная величина, а $i = \sqrt{-1}$):

$$E(u) = \mathrm{M}\left[e^{iuX}\right].$$

Для дискретной случайной величины

$$E(u) = \sum_{k=1}^{n} p_k e^{iux_k},$$

где x_k — возможные значения случайной величины, $p_k = \mathrm{P}(X = x_k)$ — соответствующие им вероятности.

Если начальный момент m_k существует, то

$$m_k = \mathrm{M}\,[X^k] = \frac{1}{i^k}\,\frac{d^k E(u)}{du^k}\bigg|_{u=0}.$$

Математическое ожидание случайной величины иногда называют ее средним значением.

Задачи

11.1. Определить математическое ожидание числа приборов, давших отказ за время испытаний на надежность, если испытанию подвергается один прибор, а вероятность его отказа p.

11.2. Считая, что вес тела с одинаковой вероятностью может быть равен любому целому числу граммов от 1 до 10, определить, при какой из трех систем разновесов: а) $1, 2, 2, 5, 10$; б) $1, 2, 3, 4, 10$; в) $1, 1, 2, 5, 10$ — среднее число необходимых для взвешивания гирь будет наименьшим, если при взвешивании разрешается гири ставить только на одну чашку, а подбор гирь при взвешивании осуществляется так, чтобы использовать наименьшее возможное число гирь.

11.3. Испытуемый прибор состоит из пяти элементов. Вероятность отказа для элемента с номером i равна $p_i = 0{,}2 + 0{,}1(i - 1)$.

Определить математическое ожидание и дисперсию числа отказавших элементов, если отказы элементов независимы.

11.4. Определить математическое ожидание числа отказавших приборов, при независимых испытаниях трех приборов, если вероятности отказа каждого из них соответственно равны p_1, p_2 и p_3 .

11.5. Определить математическое ожидание числа отказавших приборов в результате независимых испытаний n приборов, если вероятность отказа для каждого из них за время испытаний равна p.

11.6. В лотерее имеется m_1 выигрышей стоимостью k_1, m_2 — стоимостью k_2, ..., m_n — стоимостью m_n каждый. Всего билетов N. Какую стоимость билета следует установить, чтобы математическое ожидание выигрыша на один билет равнялось половине его стоимости?

11.7. Первый игрок бросает 3, а второй 2 одинаковых монеты. Выигрывает монеты партнера тот, у которого выпадает большее число гербов. В случае ничьей игра повторяется до получения определенного результата. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого из игроков?

11.8. Три игрока A, B, C играют на следующих условиях: в каждой партии участвуют двое; проигравший уступает место третьему; первую партию играет A с B. Вероятность выигрыша в каждой партии для каждого игрока равна 1/2. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд 2 раза. При этом он получает m рублей. Каково математическое ожидание выигрыша для каждого игрока: а) после первой партии при условии, что A ее выиграл; б) в начале игры?

11.9. Три игрока A, B, C играют на следующих условиях: в каждой партии участвуют двое; проигравший уступает место третьему; первую партию играют A с B. Вероятность выигрыша в каждой партии для каждого игрока равна 1/2. Игра продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд 2 раза; при этом он получает сумму выигрыша, равную числу всех сыгранных партий. Каково математическое ожидание выигрыша для игроков A и C до начала игры?

11.10. Определить математическое ожидание числа неуспешных независимых испытаний, если вероятность достижения успеха в каждом из них p и они повторяются до достижения первого успеха.

11.11. Вероятность приема позывного сигнала одной радиостанции другой радиостанцией равна 0,2 при каждой посылке. Позывные подаются каждые 5 сек до тех пор, пока не будет получен ответный сигнал, принимаемый достоверно. Общее время прохождения позывного и ответного сигналов равно 16 сек. С помощью производящей функции найти среднее число подаваемых позывных сигналов до установления двусторонней связи.

11.12. Найти математическое ожидание и дисперсию числа изделий, изготовляемых на поточной линии при нормальной настройке за период между двумя переналадками, если при нормальной настройке вероятность изготовления бракованного изделия равна p, а переналадка производится после изготовления k-го бракованного изделия.

11.13. Вероятность того, что отказ прибора произойдет при числе неработоспособных элементов $X = m$ равна:

а) для прибора A

$$\mathrm{P}(X = m) = 1 - e^{-\alpha m} \quad (\alpha > 0;\ m = 0, 1, 2, \ldots);$$

б) для прибора B

$$\mathrm{P}(X = m) = \begin{cases} 0, & \text{при } m = 0; \\ 1 - e^{-\alpha(m-1)}, & \text{при } m = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

Найти математическое ожидание числа неработоспособных элементов, приводящих к отказам каждого из приборов.

11.14. Блокировочная схема, состоящая из реле A, включенного последовательно с двумя реле B и C, соединенными параллельно, должна обеспечить замыкание цепи между клеммами I и II (рис. 2). При каждом включении схемы независимо друг от друга и от результатов предыдущих включений могут не сработать реле A с вероятностью 0,18, а реле B и C с одинаковыми вероятностями, равными 0,22. Определить среднее число включений схемы до первого отказа блокировочной схемы.

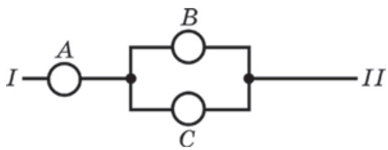

Рис. 2

11.15. Прибор имеет элементы A, B и C, уязвимые к космическому излучению и дающие отказ при попадании в них хотя бы одной частицы. Отказ прибора наступает в случае отказа элемента A или совместного отказа элементов B и C. Определить математическое ожидание числа частиц, попадание которых в прибор приводит к его отказу, если условные вероятности попадания в элементы A, B и C частицы, уже попавшей в прибор, соответственно равны 0,1; 0,2; 0,2.

11.16. Прибор имеет n элементов типа A и m элементов типа B. В случае отказа элементов типа A они не заменяются, а работа прибора продолжается до тех пор, пока в схеме есть хотя бы один исправный элемент типа A. Отказы элементов типа B устраняются так, что число исправных элементов типа B в схеме остается постоянным. Отказ любого из исправных элементов прибора равновозможен. Определить среднее число отказов элементов, приводящих к полному отказу прибора, т. е. к выходу из строя всех n элементов типа A.

11.17. Доказать, что дисперсия числа появлений события при одном опыте не превосходит 1/4.

11.18. Определить условия, для которых третий центральный момент биномиального распределения равен нулю.

11.19. Функция распределения случайной величины X задана равенством

$$F(x) = \sum_{m=0}^{[x]} C_n^m p^m (1-p)^{n-m},$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, меньшее x.

Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} np = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{D}[x] = a$.

11.20. Из урны, содержащей весьма большое число белых и черных шаров, смешанных в равной пропорции, вынимаются последовательно 10 шаров. Шары, вынутые до первого появления черного шара, возвращаются в урну; первый появившийся черный шар и все последующие перекладываются во вторую, первоначально пустую, урну. Определить математические ожидания числа белых и числа черных шаров во второй урне.

Решить ту же задачу в предположении, что число X вынутых шаров является случайным и подчиняется закону Пуассона с параметром $a = 10$, т. е.

$$\mathrm{P}(X = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}.$$

11.21. Игра заключается в том, что монету бросают до появления герба. Если герб выпал при k-м бросании монеты, то игрок A получает k рублей от игрока B. Сколько рублей должен уплатить игрок A игроку B перед началом игры для того, чтобы математические ожидания проигрыша для каждого игрока равнялись нулю (чтобы игра была «безобидной»)?

11.22. Время прибытия колонны равномерно распределено в пределах суток. При организации дежурства n ремонтных рабочих способом A среднее число обслуживаемых машин равно np. При организации дежурства способом B будет обслужено: $n[1-(1-p)^2]$ машин, если автоколонна прибудет в первую половину суток; np машин, если автоколонна прибудет в третью четверть суток; $0{,}5np$ машин, если автоколонна прибудет в четвертую четверть суток.

При каких значениях p следует предпочесть организацию дежурства способом B?

11.23. Рабочий обслуживает n однотипных станков, расположенных в ряд с равными промежутками длины a. Закончив обслуживание какого-либо станка, рабочий переходит к тому станку, который раньше других потребовал обслуживания. Предполагая, что неполадка в любом из n станков равновероятна, вычислить среднее значение длины одного перехода рабочего.

11.24. Случайная величина X может принимать целые положительные значения с вероятностями, убывающими в геометрической прогрессии. Выбрать первый член и знаменатель прогрессии q так, чтобы математическое ожидание величины X было равно 10, и вычислить при этом условии вероятность $\mathrm{P}(X \leqslant 10)$.

11.25. Случайная величина X может иметь любое целое положительное значение n с вероятностью, пропорциональной $\frac{1}{3^n}$. Найти математическое ожидание X.

11.26. Случайная величина X имеет распределение

$$\mathrm{P}\left(X = \frac{1}{2n}\right) = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Найти $\mathrm{M}[X]$.

11.27. Игра состоит в том, что повторяются независимые опыты, в каждом из которых событие A может произойти с вероятностью p. Если событие A произошло в $n > 0$ опытах подряд, а в $(n+1)$-м опыте не произошло, то первый игрок получает от второго игрока y^n рублей. Если же $n = 0$, то первый игрок платит второму игроку 1 рубль. Требуется найти величину y при условии, что игра будет «безобидной», т. е. математическое ожидание выигрыша для обоих игроков равно 0. Рассмотреть пример $p = \frac{1}{13}$.

11.28. Из сосуда, содержащего m белых и n черных шаров, извлекаются шары до тех пор, пока не появится белый шар. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых черных шаров, если каждый шар после извлечения возвращался.

11.29. Даны два ящика с белыми и черными шарами; в первом ящике при общем числе шаров N находится M белых шаров, а во втором ящике имеется M_1 белых шаров при общем числе N_1 шаров. Опыт состоит в том, что из каждого ящика вынимается один шар, который перекладывается в другой ящик, после чего шары перемешиваются. Определить математическое ожидание числа белых шаров в первом ящике по окончании указанных k опытов. Рассмотреть случай $k \to \to \infty$.

11.30. Двустороннюю связь устанавливает та из n радиостанций, которая первой примет позывные дрейфующей станции, причем это событие равновероятно для всех радиостанций ($p = \frac{1}{n}$). Определить вероятность того, что радиостанция № 1 k раз установит двустороннюю связь, если дрейфующая станция m раз выходит на связь. Для нее же найти математическое ожидание и дисперсию числа установлений двусторонней связи.

11.31. Независимые испытания аппаратуры повторяются до тех пор, пока не произойдет отказ. Вероятность отказа от испытания к испытанию не меняется и равна p. Найти математическое ожидание и дисперсию числа безотказных испытаний.

11.32. Для распределения Пуассона

$$\mathrm{P}(X = m) = \frac{a^m}{m!}\,e^{-a} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

с помощью производящей функции вычислить $\mathrm{M}[X]$, $\mathrm{D}[X]$ и μ_3.

11.33. С помощью производящих функций определить математическое ожидание и дисперсии целочисленных случайных величин, имеющих распределения:

а) биномиальное

$$\mathrm{P}(X=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m} \qquad (0 \leqslant m \leqslant n),$$

б) геометрическое

$$\mathrm{P}(X=m)=p(1-p)m \qquad (m \geqslant 0),$$

в) Паскаля

$$\mathrm{P}(X=m)=C_{m-1}^{r-1} p^r(1-p)^{m-r} \qquad (m \geqslant r),$$

г) отрицательно биномиальное

$$\mathrm{P}(X=m)=C_{m+r-1}^{r-1} p^r(1-p)^{m} \qquad (m \geqslant 0),$$

д) логарифмическое

$$\mathrm{P}(X=m)=\frac{p^m}{m\ln(1-p)} \qquad (m \geqslant 1).$$

11.34. Считая число вызовов, поступающих на коммутатор за заданный промежуток времени случайной величиной, подчиняющейся закону Пуассона с параметром, пропорциональным длине промежутка, определить вероятность того, что за 30 сек не будет ни одного вызова, если математическое ожидание числа вызовов за час равно 60.

11.35. Случайное число ошибочных соединений, приходящееся на одного телефонного абонента за рассматриваемый промежуток времени, подчиняется закону Пуассона с параметром, равным 8. Определить вероятность того, что для данного абонента за этот промежуток времени число ошибочных соединений превзойдет 4.

11.36. Корректура в 500 страниц содержит 500 опечаток. Найти вероятность того, что на странице не меньше трех опечаток, считая число опечаток на странице подчиняющимся закону Пуассона с параметром, равным среднему числу опечаток, приходящемуся на одну страницу.

11.37. В наблюдениях Резерфорда и Гейгера радиоактивное вещество за промежуток времени 7,5 сек испускало в среднем 3,87 α-частицы. Найти вероятность того, что за 1 сек это вещество испустит хотя бы одну частицу, если число испускаемых за равные промежутки времени частиц подчиняется закону Пуассона с одним и тем же параметром.

11.38. Определить асимметрию случайной величины, распределенной по закону Пуассона. (Асимметрией называется отношение $\mathrm{Sk} = \frac{M_3}{\sigma^3}$.)

11.39. Определить дисперсию числа атомов радиоактивного вещества, распадающегося в единицу времени, если даны: масса вещества M, период полураспада T_n, атомный вес вещества A, число атомов в грамм-атоме N_0.

11.40.[1] Определить вероятность того, что в экран площадью $S = 0{,}12$ см^2, поставленный на расстоянии $r = 5$ см перпендикулярно потоку от α-радиоактивного вещества, попадает в течение секунды: а) ровно десять α-частиц; б) не менее двух α-частиц, если период полураспада вещества $T_n = 4{,}4 \cdot 10^9$ лет, масса вещества $M = 0{,}1$ г, атомный вес вещества $A = 238$.

11.41. Найти характеристическую функцию числа появлений события при одном испытании, если вероятность появления события при одном испытании равна p.

11.42. Найти характеристическую функцию числа появлений события A при n независимых испытаниях, если вероятность появления события A для k-го испытания равна p_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

11.43. Определить характеристическую функцию случайной величины X и по ней найти $\mathrm{M}[X]$ и $\mathrm{D}[X]$:

а)для биномиального распределения

$$\mathrm{P}(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

б)для распределения

$$\mathrm{P}(X = m) = \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}} \qquad (a > 1,\ m = 0, 1, 2, \ldots),$$

[1]Рассеиванием и поглощением частиц пренебречь.

Число Авогадро $N_0 = 6{,}02 \cdot 10^{22}$ — число атомов в грамм-атоме, т. е. в количестве вещества, вес которого в граммах равен атомному весу.

Периодом полураспада вещества T_n называется время, в течение которого масса радиоактивного вещества уменьшается в среднем вдвое.

Число элементарных распадов за рассматриваемый промежуток времени подчиняется закону Пуассона с параметром, пропорциональным длине промежутка времени.

в) для закона Пуассона

$$\mathrm{P}(X = m) = \frac{a^m}{m!}\, e^{-a} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

§ 12. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины и ее плотность вероятности $f(x)$ связаны соотношениями

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\, dx, \quad f(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Величина x_p, определяемая равенством $F(x_p) = p$, называется квантилем порядка p; квантиль $x_{0,5}$ называют медианой. Если плотность имеет один максимум, то значение x, при котором $f(x)$ достигает максимума, называется модой.

Понятие плотности вероятности $f(x)$ может быть введено и для дискретной случайной величины, если положить

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta(x - x_k),$$

где x_k — возможные значения случайной величины,

$$p_k = P(X = x_k),$$

$\delta(x)$ — обозначение дельта-функции, т. е. такой функции, что

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty, & \text{при } x = 0; \\ 0, & \text{при } x \neq 0, \end{cases} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1.$$

Для $\delta(x)$ справедливо следующее аналитическое представление:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega\,.$$

Задачи

12.1. Найти плотности вероятностей случайных величин по их функциям распределения:

а) равномерное распределение

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0; \\ x, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ 1, & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

б) нормальное распределение

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

12.2. Найти функцию распределения случайной величины равномерно распределенной в интервале $[-1; 2]$.

12.3. В книге Г. Крамера [42] дана функция распределения годовых доходов лиц, облагаемых налогом:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, & \text{при } x \geqslant x_0; \\ 0, & \text{при } x < x_0, \end{cases} \qquad (\alpha > 0).$$

Определить размер годового дохода, который для случайно выбранного налогоплательщика может быть превзойден с вероятностью 0,5.

12.4. Функция распределения случайного времени безотказной работы радиоаппаратуры имеет вид (экспоненциальный закон распределения)

$$F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}} \qquad (t \geqslant 0).$$

Найти: а) вероятность безотказной работы аппаратуры в течение времени T, б) плотность вероятности $f(t)$.

12.5. Случайная величина эксцентриситета детали характеризуется функцией распределения Рэлея

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{-x^2}{2\delta^2}} \qquad (x \geqslant 0).$$

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) медиану распределения; в) моду распределения.

12.6. Функция распределения Вейбулла

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{-x^m}{x_0}} \qquad (x \geqslant 0)$$

в ряде случаев характеризует срок службы элементов электронной аппаратуры.

Найти: а) плотность вероятности $f(x)$; б) квантиль распределения порядка p; в) моду распределения.

12.7. Случайное время простоя радиоэлектронной аппаратуры в ряде случаев имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{M}{x\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(\lg x - \lg x_0)^2}{2\sigma^2}} \qquad (x > 0),$$

где $M = \lg e = 0{,}4343\ldots$ (логарифмически нормальный закон распределения).

Найти: а) моду распределения при $x_0 = 1$ и $\sigma = \sqrt{5M}$; б) функцию распределения.

12.8. Дана функция распределения случайной величины X:

$$F(x) = c + b\,\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \qquad \text{(закон Коши)}.$$

Определить: а) постоянные c и b; б) плотность вероятности; в) $P(\alpha < x < \beta)$.

12.9. Каково должно быть a, чтобы $f(x) = ae^{-x^2}$ являлось плотностью вероятности случайной величины X, изменяющейся в пределах $-\infty < x < \infty$?

12.10. Функция $f(x) = \frac{a}{1+x^2}$ является плотностью вероятности случайной величины X.

Найти: а) функцию распределения случайной величины X; б) вероятность попадания случайной величины в интервал $(-1; 1)$.

12.11. Отсчет времени по секундомеру, имеющему цену деления шкалы 0,2 сек, округляется до полного деления в ближайшую сторону. Определить вероятность того, что ошибка округления превзойдет по абсолютной величине 0,05 сек, считая ее равномерно распределенной.

12.12. Отсчет угла по азимутальному лимбу, имеющему цену деления 1° шкалы, округляется до ближайшего целого числа градусов. Определить вероятность того, что ошибка округления окажется в пределах $\pm 10'$, считая ее равномерно распределенной.

12.13. Известно, что вероятность выхода из строя электронной лампы в течение Δx дней, с точностью до величины порядка малости более высокого чем Δx, равна $k\Delta x$ независимо от величины x дней, которые лампа проработала до интервала времени Δx. Какова вероятность выхода из строя лампы в течение l дней?

12.14. Между двумя пунктами, отстоящими один от другого на расстоянии L, курсирует автобус с остановками по требованию в любом месте. Достоверно известно, что в пределах этого перегона садится, а затем выходит из автобуса некий пассажир. Плотность вероятности посадки его в точке x $(0 \leqslant x \leqslant L)$ пропорциональна $x(L-x)^2$, а плотность вероятности выхода его в точке y, при условии, что посадку он совершил в точке x $(x \leqslant y \leqslant L)$, пропорциональная $(y-x)^h$, $h \geqslant 0$.

Найти вероятность того, что: а) пассажир сядет в автобус ранее пункта z; б) пассажир, севший в автобус в точке x, выйдет после пункта z.

12.15. Последовательные ускоренные испытания приборов на надежность проводятся до первого отказа, после чего они прекращаются. Пользуясь понятием плотности вероятности для дискретной случайной величины, найти плотность вероятности случайного числа испытанных приборов, если вероятность отказа для всех приборов одна и та же и равна 0,5.

12.16. Найти функцию распределения длины хорды, проведенной через точку пересечения окружности с ее диаметром единичной длины, под углом к нему равномерно распределенным в интервале $[0; \frac{\pi}{2}]$.

12.17. Найти функцию распределения дальности полета снаряда в пустоте, если угол бросания его равномерно распределен в интервале $[0; \frac{\pi}{2}]$, а ускорение свободного падения постоянно по величине и направлению.

12.18. Найти функцию распределения периодов колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, если длина маятника равномерно распределена в интервале $[0; 1]$.

12.19. В адиабатном процессе связь между давлением p и объемом v определяется формулой $pv^k = c$. Найти функцию распределения случайной величины v, если p равномерно распределено в интервале $(p_0 - \varepsilon; p_0 + \varepsilon)$, а k и c постоянные величины.

§ 13. МОМЕНТЫ НЕПРЕРЫВНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Математическое ожидание $\overline{x} = \mathrm{M}[X]$ и дисперсия $\mathrm{D}[X]$ случайной величины X, имеющей плотность вероятности $f(x)$, вычисляются по формулам

$$\overline{x} = \mathrm{M}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx,$$

$$\mathrm{D}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^2 f(x)\,dx.$$

Среднее квадратическое отклонение σ определяется формулой

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{D}[X]}.$$

Для симметричного закона распределения характеристикой рассеивания случайной величины может служить срединное отклонение E, определяемое из условия

$$\mathrm{P}\left(|X - \overline{x}| < E\right) = \frac{1}{2}\,.$$

Начальный момент k-го порядка m_k и центральный момент k-го порядка μ_k вычисляются по формулам

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx, \qquad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{x})^k f(x)\,dx.$$

Для существования моментов необходима абсолютная сходимость соответствующих интегралов.

Характеристическая функция $E(u)$ непрерывной случайной величины равна:

$$E(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)\, dx.$$

Плотность вероятности $f(x)$ однозначно выражается через характеристическую функцию:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux} E(u)\, du.$$

Последняя формула для дискретных случайных величин дает плотность вероятности в виде суммы дельта-функций.

Если моменты порядка k существуют, то

$$m_k = \mathrm{M}\left[x^k\right] = \frac{1}{i^k} \cdot \left.\frac{d^k E(u)}{du^k}\right|_{u=0}$$

$$\mu_k = \mathrm{M}\left[(x - \overline{x})^k\right] = \frac{1}{i^k} \cdot \frac{d^k}{du^k}\left[e^{-iu\overline{x}} E(u)\right]_{u=0}.$$

Семиинварианты (кумулянты) вычисляются по формуле:

$$\varkappa_k = \frac{1}{i^k} \cdot \left.\frac{d^k \ln E(u)}{du^k}\right|_{u=0}.$$

Так:

$$\varkappa_1 = \mathrm{M}[X];$$

$$\varkappa_2 = \mathrm{D}[X] = \sigma^2;$$

$$\frac{\varkappa_3}{\varkappa_2^{\frac{3}{2}}} = S_k = \frac{\mu_3}{\sigma^3}; \qquad \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} = E_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\,.$$

Задачи

13.1. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид (закон равномерного распределения)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2l}, & \text{при } |x-a| \leqslant l, \\ 0, & \text{при } |x-a| > l. \end{cases}$$

Определить: а) $\mathrm{M}[X]$; б) $\mathrm{D}[X]$; в) найти связь между средним квадратическим и срединным отклонениями случайной величины X.

13.2. Функция распределения случайной величины X имеет вид (закон арксинуса)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant -1, \\ a + b \arcsin x, & \text{при } -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & \text{при } 1 \leqslant x. \end{cases}$$

Определить постоянные a и b. Найти $\mathrm{M}[X]$ и $\mathrm{D}[X]$.

13.3. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, если плотность вероятности

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

13.4. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид (закон арксинуса)

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} \qquad (-a < x < a).$$

Определить дисперсию и срединное отклонение.

13.5. Плотность вероятности случайных амплитуд A боковой качки корабля определяется формулой (закон Рэлея)

$$f(a) = \frac{a}{\sigma^2}\, e^{\frac{a^2}{2\sigma^2}} \qquad (a \geqslant 0),$$

где σ^2— дисперсия угла крена.

Одинаково ли часто встречаются амплитуды, меньшие и большие ее математического ожидания?

13.6. Скорость молекул газа имеет плотность вероятности (закон Максвелла)

$$f(v) = av^2 e^{-h^2 v^2} \qquad (v \geqslant 0).$$

Найти математическое ожидание и дисперсию скорости молекул, а также величину a при заданном h.

13.7. Плотность вероятности случайной величины X задана в виде

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x < 0, \\ \frac{x_m}{m!} e^{-x}, & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Определить $\mathrm{M}[X]$ и $\mathrm{D}[X]$.

13.8. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x_0^3}{x^3}, & \text{при } x \geqslant x_0, \\ 0, & \text{при } x < x_0 \end{cases} \qquad (x_0 > 0).$$

Найти $\mathrm{M}[X]$ и $\mathrm{D}[X]$.

13.9. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \qquad \text{(распределение Лапласа).}$$

13.10. Случайная величина X имеет плотность вероятности (гамма-распределение)

$$f(x) = ax^{\alpha-1} e^{-\beta x} \qquad (0 \leqslant x < \infty,\ \alpha > 0,\ \beta > 0).$$

Определить параметр a, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

13.11. Случайная величина X имеет плотность вероятности (бета-распределение)

$$f(x) = \begin{cases} cx^{a-1}(1-x)^{b-1}, & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1 \quad (a > 0;\ b > 0), \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 1. \end{cases}$$

Определить параметр c, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

13.12. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = a(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}},$$

где n — целое положительное число, большее 1. Определить постоянную a, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

13.13. Плотность вероятности неотрицательной случайной величины X имеет вид (χ — распределение)

$$f(x) = ax^{n-1}e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (x \geqslant 0),$$

где $n > 1$.

Определить a, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

13.14. Доказать, что при выполнении условий

$$\lim_{x\to-\infty}[xF(x)] = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to\infty}\{x[1-F(x)]\} = 0$$

для математического ожидания случайной величины справедливо равенство

$$\mathrm{M}[X] = \int_0^\infty [1-F(x)]dx - \int_{-\infty}^0 F(x)\,dx.$$

13.15. Вероятность обнаружения затонувшего судна за время поиска t задается формулой

$$p(t) = 1 - e^{-\gamma t} \qquad (\gamma > 0).$$

Определить среднее время поиска, необходимое для обнаружения судна.

13.16. Определить математическое ожидание $m(t)$ массы радиоактивного вещества спустя время (t), если в начальный момент масса вещества была m_0, а вероятность распада ядра любого атома в единицу времени постоянна и равна p.

13.17. Определить время полураспада радиоактивного вещества, если вероятность распада ядра любого атома вещества в единицу времени постоянна и равна p. (Время полураспада T_n определяется моментом, когда масса радиоактивного вещества в среднем уменьшается вдвое).

13.18. Обработка результата одной переписи показала, что плотность вероятности возраста лиц, занимающихся научной работой, может быть представлена формулой

$$f(t) = k(t - 22{,}5)(97{,}5 - t)^5$$

(t — возраст в годах, $22{,}5 \leqslant t \leqslant 97{,}5$).

Определить, во сколько раз число научных работников в возрасте ниже среднего превышает число научных работников в возрасте выше среднего.

13.19. Найти для распределения Стьюдента, задаваемого плотностью вероятности

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}},$$

начальные моменты m_k при $k < n$.

13.20. Случайная величина X подчиняется бета-распределению, т. е. имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\, x^{p-1}(1-x)^{q-1}$$

$$(0 < x < 1; \quad p > 0; \quad q > 0).$$

Найти начальный момент k-го порядка.

13.21. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины, имеющей в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ плотность вероятности $\frac{2}{\pi}\cos^2 x$.

13.22. Выразить центральный момент μ_k через начальные моменты.

13.23. Выразить начальный момент m_k через центральные моменты и математическое ожидание $\overline{x}$.

13.24. Для случайной величины X с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} \qquad (0 \leqslant x < \infty, \quad n > 0).$$

(распределение «хи-квадрат»), найти $\mathrm{M}[X]$ и $\mathrm{D}[X]$.

13.25. Найти характеристическую функцию нормально распределенной случайной величины с математическим ожиданием $\overline{x}$ и дисперсией σ^2.

13.26. Найти характеристическую функцию и начальные моменты случайной величины, плотность вероятности которой

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{для } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{для } x < 0. \end{cases}$$

13.27. Найти характеристическую функцию равномерно распределенной в интервале $[a, b]$ случайной величины и все ее начальные моменты.

13.28. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = 2h^2 x e^{-h^2 x^2} \qquad (x \geqslant 0).$$

Найти ее характеристическую функцию.

13.29. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \qquad (0 \leqslant x < \infty,\ \alpha > 0,\ \beta > 0).$$

Найти ее характеристическую функцию и начальные моменты.

13.30. Найти характеристическую функцию случайной величины X, плотность вероятности которой (закон арксинуса)

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{d^2 - x^2}} \qquad (|x| < a).$$

13.31. Случайная величина X подчиняется закону Коши

$$f(x) = \frac{a}{\pi} \cdot \frac{1}{(x-c)^2 + a^2}\,.$$

Найти ее характеристическую функцию.

13.32. Пользуясь выражением

$$E(u) = \exp\left\{iu\overline{x} - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right\}$$

для характеристической функции закона нормального распределения, найти характеристическую функцию для случайной величины: а) $Y = aX + b$; б) $\overset{\circ}{X} = X - \overline{x}$.

13.33. Пользуясь выражением

$$E(u) = e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}$$

для характеристической функции центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X}$, подчиняющейся закону нормального распределения, определить все центральные моменты.

13.34. Характеристическая функция случайной величины X задана в виде $E(u) = e^{-a|u|}$ $(a > 0)$.

Определить плотность вероятности X.

13.35. Даны характеристические функции

$$E_1(u) = \frac{1 + iu}{1 + u^2}, \qquad E_2(u) = \frac{1 - iu}{1 + u^2}.$$

Определить соответствующие им плотности вероятностей.

13.36. Дана характеристическая функция

$$E(u) = \frac{1}{2e^{-iu} - 1}.$$

Показать, что она соответствует случайной величине дискретного типа. Найти ряд распределения этой величины.

13.37. Доказать, что между семиинвариантами $\varkappa_k$ и начальными моментами m_k существует рекуррентное соотношение (m_k — существует)

$$m_k = \sum_{j=1}^{k} C_{k-1}^{j-1} m_{k-j} \varkappa_j, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

13.38. Найти асимметрию и эксцесс случайной величины, имеющей гамма-распределение

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \qquad (0 \leqslant x < \infty,\ \alpha > 0,\ \beta > 0).$$

13.39. Найти характеристическую функцию, асимметрию и эксцесс случайной величины, плотность вероятности которой

$$f(x) = \frac{1}{2\beta} e^{-\frac{|x-\alpha|}{\beta}} \qquad (-\infty < x < \infty).$$

§ 14. ЗАКОН НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Плотность вероятности нормально распределенной случайной величины имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}$$

или

$$f(x) = \frac{\rho}{E\sqrt{\pi}}\, e^{-\rho^2\frac{(x-\overline{x})^2}{E^2}},$$

где σ — среднее квадратическое отклонение, $E = \rho\sqrt{2}\sigma$ — срединное отклонение (иногда называемое и «вероятным отклонением»), $\rho = 0{,}476936\ldots$ Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал (x_1, x_2) вычисляется по одной из следующих формул

$$1)\ \mathrm{P}(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_2-\overline{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\overline{x}}{\sigma}\right)\right],$$

где $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ — функция Лапласа (интеграл вероятностей);

$$2)\ \mathrm{P}(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{2}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{x_2-\overline{x}}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{x_1-\overline{x}}{E}\right)\right],$$

где $\hat{\Phi}(x) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^x e^{-\rho^2t^2}\,dt$ — приведенная функция Лапласа.

Значения функций $\Phi(x)$ и $\hat{\Phi}(x)$ даны в таблицах [8Т] и [11Т].

Во всех задачах данного параграфа предполагается, что ошибки измерения — нормально распределенные случайные величины.

Задачи

14.1. Какова вероятность того, что ошибка измерения X не превзойдет по абсолютной величине 5 м, если $\overline{x} = 5$ м, а $\sigma = 75$ м.

14.2. Ошибка X удержания высоты самолетом имеет $\overline{x} = 20$ м и $\sigma = 75$ м. Какова вероятность, что самолет будет лететь ниже, внутри и выше коридора высотой 100 м, если самолету задана высота, соответствующая середине коридора.

14.3. Независимые случайные величины X_1 и X_2 распределены нормально с параметрами $\sigma_1 = \sigma_2 = 20$ м, $\overline{x}_1 = 5$ м, $\overline{x}_2 = -5$ м. Какова вероятность того, что хотя бы одна из них по абсолютной величине не превзойдет 15 м.

14.4. Случайное отклонение размера детали от номинала при изготовлении ее на данном станке имеет нулевое математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение, равное 5 мк. Сколько необходимо изготовить деталей, чтобы с вероятностью не менее 0,9 среди них была хотя бы одна годная, если для годной детали допустимо отклонение размера от номинала не более, чем на 2 мк?

14.5. Даны 2 случайные величины X и Y, имеющие одинаковые дисперсии, но первая распределена нормально, а вторая равномерно. Определить соотношение между срединными отклонениями E_x и E_y, определяемыми равенствами:

$$\mathrm{P}\left\{|X - \overline{x}| < E_x\right\} = \mathrm{P}\left\{|Y - \overline{y}| < E_y\right\} = \frac{1}{2}\,.$$

14.6. Нормально распределенная случайная величина X имеет математическое ожидание $\overline{x} = -15$ м и среднее квадратическое отклонение 15 м. Вычислить таблицу функции распределения для значений аргумента через каждые 15 м и построить график.

14.7. Случайные ошибки высотомера X имеют $\overline{x} = 20$ м. Какое они должны иметь среднее квадратическое отклонение, чтобы с вероятностью, равной 0,9, ошибка измерения высоты по абсолютной величине была меньше 100 м?

14.8. Найти связь между средним арифметическим отклонением

$$E_1 = \mathrm{M}[\,|X - \overline{x}|]$$

нормально распределенной случайной величины и ее средним квадратическим отклонением.

14.9. Определить для нормально распределенной случайной величины X, имеющей $\mathrm{M}[X] = 0$,

1) $\mathrm{P}(X \geqslant k\sigma)$ и 2) $\mathrm{P}(|X| \geqslant k\sigma)$ (при $k = 1, 2, 3$).

14.10. Заряд охотничьего пороха отвешивается на весах, имеющих среднюю квадратическую ошибку взвешивания 150 мг. Номинальный вес порохового заряда 2,3 г. Определить вероятность повреждения ружья, если максимально допустимый вес порохового заряда 2,5 г.

14.11. Производится два независимых измерения прибором, ошибки измерения которого X имеют $\overline{x} = 10$ м и $\sigma = 30$ м. Какова вероятность того, что каждая из ошибок измерения, имея разные знаки, по абсолютной величине превзойдет 10 м?

14.12. На плоскости проведены две параллельные прямые, расстояние между ними L. На эту же плоскость бросается круг радиуса R. Случайные отклонения центра круга от линий, в направлении им перпендикулярном, распределены нормально. Центр рассеивания расположен на расстоянии b от одной из линий во внешнюю сторону, а среднее квадратическое отклонение равно σ.

Определить при одном бросании: а) вероятность накрытия кругом хотя бы одной прямой; б) вероятность накрытия обеих прямых, если $L = 10$ м, $R = 8$ м, $b = 5$ м, $\sigma = 14{,}8$ м.

14.13. Изделие считается высшего качества, если отклонение его размеров от номинала не превосходит по абсолютной величине 3,45 мм. Отклонения X, контролируемого размера изделия от номинала, подчиняются закону нормального распределения с параметрами $\overline{x} = 0$ и $\sigma = 3$ мм. Определить математическое ожидание числа изделий высшего качества, если изготовляются 4 изделия.

14.14. Какой ширины должно быть поле допуска, чтобы с вероятностью не более 0,0027 получалась деталь с контролируемым размером вне поля допуска, если случайные отклонения размера от середины поля допуска подчиняются закону нормального распределения с параметрами $\overline{x} = 0$ и $\sigma = 5$ мк?

14.15. Какое наибольшее расстояние допустимо между двумя рыболовецкими судами, идущими параллельными курсами, чтобы вероятность обнаружения косяка рыбы, находящегося посередине между ними, была не менее 0,5, если дальность обнаружения косяка для каждого из судов является независимой нормально распределенной случайной величиной с $\overline{x} = 3{,}7$ км и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1{,}1$ км?

14.16. При большом числе измерений установлено, что 75% ошибок: а) не превосходят $+1{,}25$ мм; б) не превосходят по абсолютной величине 1,25 мм. Заменяя частоты появления ошибок их вероятностями, определить в обоих случаях среднее квадратическое отклонение ошибок измерения, считая их нормально распределенными с нулевым математическим ожиданием.

14.17. Случайное отклонение X размера детали от номинала распределено по нормальному закону с математическим ожиданием $\overline{x}$ и средним квадратическим отклонением σ. Годными деталями являются те, для которых $a < X < b$. Деталями, подлежащими переделке, являются те, для которых $X > b$.

Найти: а) функцию распределения случайных отклонений размеров деталей, подлежащих переделке; б) функцию распределения случайных отклонений размеров годных деталей.

14.18. Нормально распределенная случайная величина X имеет нулевое математическое ожидание. Определить среднее квадратическое отклонение σ, при котором вероятность $\mathrm{P}(a < X < b)$ была бы наибольшей $(0 < a < b)$.

§ 15. ФОРМУЛЫ ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Полная вероятность события вычисляется по формуле

$$\mathrm{P}(A) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(A/x) f(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — плотность вероятности случайной величины X, от значений которой зависит вероятность появления события A; $\mathrm{P}(A/x)$ — вероятность появления события A, вычисленная в предположении, что случайная величина X приняла значение x.

Условная плотность вероятности $f(x/A)$ случайной величины X, т. е. плотность вероятности при условии, что событие A имело место, определяется формулой

$$f(x/A) = \frac{\mathrm{P}(A/x) f(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(A/x) f(x) dx} \quad \text{(обобщенная формула Байеса)},$$

где $f(x)$ — плотность вероятности случайной величины X до опыта.

Задачи

15.1. Курс корабля составляет с линией минного заграждения случайный угол θ, все значения которого равномерно распределены в интервале (θ_1, θ_2). Найти вероятность подрыва корабля на контактной мине, если ширина корабля b, а расстояние между соседними минами равно l (углы θ_1 и θ_2 удовлетворяют условиям $\sin\theta_1 > \frac{b}{l}$, $\sin\theta_2 > \frac{b}{l}$, $\theta_1 < \theta_2$. Размерами можно пренебречь).

15.2. На каждой из двух параллельных прямых независимо отмечены точки с постоянным интервалом $l = 100$ м. Определить вероятность того, что хотя бы одна точка попадает внутрь бесконечной полосы шириной $D = 25$ м, которая расположена в той же плоскости, что и прямые, таким образом, что ограничивающие ее прямые перпендикулярны данным прямым, а середина полосы равномерно распределена на интервале l.

15.3. Найти вероятность попадания одним выстрелом в мишень, если расстояние D до мишени в момент выстрела — случайная величина, равномерно распределенная в интервале от 100 до 200 м, а условная вероятность попадания в цель равна $\frac{3000}{D^2}$, где D выражено в м.

15.4. На берегу пролива шириной $L = 30$ км установлена наблюдательная станция, дальность обнаружения которой является нормально распределенной случайной величиной с математическим ожиданием $\overline{x} = 20$ км и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1{,}5$ км. Судно идет параллельно берегу на расстоянии от него, равномерно распределенном в интервале $(0, L)$. Найти вероятность того, что наблюдательная станция обнаружит судно, если станция ведет наблюдение перпендикулярно проливу.

15.5. На первую чашку весов положен груз, вес которого подчинен нормальному закону распределения с математическим ожиданием $\overline{x} = 20$ кг и средним квадратическим отклонением $\sigma = 1{,}5$ кг. На левой чашке весов находится другой груз, вес которого равномерно распределен в пределах от 0 до 50 кг. Определить вероятность того, что правая чашка перевесит левую. Сравнить полученный результат с тем, который получился бы в предположении, что груз правой чашки не случаен, а в точности равен 20 кг.

15.6. Определить вероятность того, что хотя бы одна из независимых случайных величин, имеющих одну и ту же плотность вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-z)^2}{2\sigma^2}},$$

примет значение по абсолютной величине большее r, если z — равномерно распределенная в интервале $(-l, l)$ случайная величина.

15.7. Производится n независимых испытаний, в каждом из которых определяется значение случайной величины X, имеющей плотность вероятности $f(x)$. Размахом называется величина $W_n = x_{max} - x_{min}$, где x_{max} — наибольшее, а x_{min} — наименьшее из полученных значений. Найти функцию распределения размаха.

15.8. Вероятность попадания случайной точки в часть круга равна отношению площади этой части к площади всего круга. Какова вероятность того, что две независимо поставленные точки будут лежать по одну сторону от хорды окружности, расстояние которой от центра является равномерно распределенной величиной?

15.9. Координаты X_i объектов $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы и имеют плотности вероятностей $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Самолет определил, что координата обнаруженного им объекта равна x_0. Ошибка определения координаты имеет плотность вероятности $f_p(x - x_0)$. Определить вероятность того, что самолет обнаружил i-й объект.

15.10. Случайная величина X подчиняется закону Пуассона

$$\mathrm{P}(X = m) = \frac{a^m}{m!}\, e^{-a},$$

параметр которого неизвестен, но имеет до опыта плотность вероятности

$$f(a) = ae^{-a} \qquad (a > 0).$$

Произведен опыт, в результате которого случайная величина X приняла значение m_0. Найти плотность вероятности a после опыта.

15.11. Количество дефектов изделий X подчиняется закону Пуассона

$$\mathrm{P}(X = k/Y = y) = \frac{y^k}{k!}\,e^{-y} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

параметр которого Y — случайная величина, имеющая гамма-распределение

$$f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\,y^{\alpha-1}e^{-\beta y} \qquad (0 \leqslant y < \infty, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0).$$

Определить полную вероятность появления k дефектных изделий.

15.12. Прибор сохраняет работоспособность за время t, если выполнены оба неравенства

$$a_1 + tX_1 < Y, \qquad a_2 + tX_2 < Y,$$

где a_1 и a_2 — заданные неслучайные величины, X_1 и X_2 — независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами $(\overline{x}_1, \sigma_1)$ и $(\overline{x}_2, \sigma_2)$ соответственно. Определить вероятность $P(t)$ безотказной работы прибора за время t, если Y имеет плотность вероятности $f(y)$.

15.13. Вероятность того, что время безотказной работы прибора τ превзойдет t, равна

$$\mathrm{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}.$$

До опыта известно, что параметр λ равномерно распределен в интервале (λ_1, λ_2). Ни один из n испытанных приборов не отказал за время t_0 испытаний. Найти плотность вероятности λ после опыта.

15.14. Станок настраивается на середину поля допуска, шириной $2d$, с ошибкой X, подчиняющейся нормальному закону с параметрами $\overline{x}$ и σ_x, которая остается неизменной для всех деталей. Отклонение размера каждой детали от номинального равно $X + Y_i$, где Y_i — независимые нормально распределенные величины с параметрами $\overline{y}_i = 0$ и $\sigma_{y_i} = \sigma_y$ для всех номеров деталей i. Определить плотность вероятности X после изготовления станком n деталей, среди которых k имеют контролируемый размер в пределах поля допуска.

15.15. Станок первоначально настроен на середину поля допуска, шириной $2d$. После изготовления каждой детали инструмент изнашивается на одну и ту же случайную величину X, плотность вероятности которой $f(x)$ до опыта известна. Изготовлено n деталей, среди которых первые k имели контролируемый размер в пределах поля допуска, а у остальных — за пределами поля в большую сторону. Найти плотность вероятности X после опыта, если суммарная ошибка контролируемого размера равна $X(i-1)+Y_i$, где Y_i — независимые нормально распределенные величины с параметрами $\overline{y}_i = 0$ и $\sigma_{y_i} = \sigma_y$.

Глава 3

СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 16. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, МОМЕНТЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Функция распределения $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (интегральный закон распределения) системы n случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ определяется формулой

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathrm{P}(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \ldots, X_n < x_n).$$

Для системы непрерывных случайных величин существует плотность вероятности (дифференциальный закон распределения), определяемая формулой

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1, \partial x_2, \ldots, \partial x_n}.$$

Система дискретных случайных величин характеризуется совокупностью вероятностей

$$P_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = \mathrm{P}(X_1 = x_{1,i_1}; X_2 = x_{2,i_2}, \ldots, X_n = x_{n,i_n}),$$

которые могут быть сведены в таблицу с n входами (по числу случайных величин).

С помощью δ-функции плотность вероятности системы дискретных случайных величин можно определить формулой

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} P_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \prod_{k=1}^{n} \delta(x_k - x_{k,i_k}),$$

где суммирование производится по всем значениям $i_1, i_2, \ldots, i_n$ и для смешанной системы

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=f_0(x_1,x_2,\ldots,x_n)+\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} P_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\prod_{k=1}^{n}\delta(x_k-x_{k,i_k}),$$

где первое слагаемое f_0 учитывает непрерывную часть плотности вероятности, а вторая — разрывы в дискретных точках.

Функция распределения для непрерывных случайных величин выражается в виде кратного интеграла

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_n}\int_{-\infty}^{x_{n-1}}\int_{-\infty}^{x_1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

для дискретных случайных величин — в виде кратной суммы

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{x_{k,i_k}<x_k} P_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\,,$$

где суммирование производится по всем возможным значениям каждой из случайных величин, для которых $x_{1,i_1} < x_1$, $x_{2,i_2} < x_2, \ldots, x_{n,i_n} < x_n$.

При $n = 2$ система непрерывных случайных величин может интерпретироваться как случайная точка на плоскости, а при $n = 3$ — как случайная точка в пространстве.

Вероятность попадания случайной точки в область S равна интегралу от плотности вероятности по этой области.

Наиболее важными моментами системы n случайных величин являются: математические ожидания

$$\mathrm{M}[X_i] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty} x_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

дисперсии

$$\mathrm{D}[X_i]=k_{ii}=\sigma_i^2=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}(x_i-\overline{x}_i)^2 f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n$$

и корреляционные моменты

$$\mathrm{M}\left[(X_i - \overline{x}_i)(X_j - \overline{x}_j)\right] =$$
$$= k_{ij} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j)f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n.$$

Вторые центральные моменты составляют корреляционную матрицу

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \ldots & k_{2n} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \ldots & k_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & k_{n3} & \ldots & k_{nn} \end{Vmatrix},$$

где $k_{ij} = k_{ji}$. Иногда оказывается удобной формула

$$k_{ij} = \mathrm{M}[X_i X_j] - \mathrm{M}[X_i] \cdot \mathrm{M}[X_j].$$

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, входящие в систему, не коррелированы (не связаны), если недиагональные элементы корреляционной матрицы равны нулю.

Безразмерной характеристикой связи между случайными величинами X_i и X_j служит коэффициент корреляции

$$r_{ij} = \frac{k_{ij}}{\sqrt{\mathrm{D}[X_i]\mathrm{D}[X_j]}}.$$

Коэффициенты корреляции составляют нормированную корреляционную матрицу

$$\|r_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \ldots & r_{2n} \\ r_{31} & r_{32} & 1 & \ldots & r_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & r_{n3} & \ldots & 1 \end{Vmatrix},$$

где $r_{ij} = r_{ji}$.

Случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$, входящие в систему, независимы, если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n),$$

и зависимы, если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq f_1(x_1) f_2(x_2) \ldots f_n(x_n),$$

где $f_i(x_i)$ — плотность вероятности случайной величины X_i. Для системы дискретных случайных величин условие независимости может быть также выражено в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X_1 = x_{1,i_1}, X_2 = x_{2,i_2}, \ldots, X_n = x_{n,i_n}) = \\ = \mathrm{P}(X_1 = x_{1,i_1})\mathrm{P}(X_2 = x_{2,i_2}) \ldots \mathrm{P}(X_n = x_{n,i_n}). \end{aligned}$$

Характеристической функцией системы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется математическое ожидание функции $\exp\{i \sum_{k=1}^{n} u_k x_k\}$, где u_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — вещественные величины, а $i = \sqrt{-1}$;

$$E_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \mathrm{M}\left[e^{i \sum\limits_{k=1}^{n} u_k x_k}\right] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i \sum\limits_{k=1}^{n} u_k x_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Характеристическая функция системы независимых случайных величин равняется произведению характеристических функций случайных величин, входящих в систему:

$$E_{x_1, x_2, \ldots, x_n}(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}(u_j).$$

Для многомерного нормального распределения с математическими ожиданиями $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ и корреляционной матрицей

$$\|k_{jl}\| = \left\| \begin{matrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{matrix} \right\|$$

$$E(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{x}_j - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} k_{jl} u_j u_l \right\}.$$

В том случае, когда начальные моменты системы случайных величин соответствующего порядка существуют,

$$\mathrm{M}\,[X_1^{r_1} X_2^{r_2} \ldots X_n^{r_n}] =$$
$$= i^{-\sum\limits_{k=1}^{n} r_k} \left.\frac{\partial^{r_1+r_2+\ldots+r_n} E_{x_1,x_2,\ldots,x_n}(u_1,u_2,\ldots,u_n)}{\partial u_1^{r_1}\partial u_2^{r_2}\ldots\partial u_n^{r_n}}\right|_{u_1=u_2=\ldots=u_n=0}.$$

Характеристическая функция подсистемы случайных величин может быть получена из характеристической функции системы, если переменные u_k, относящиеся к величинам, не входящим в подсистему, заменить нулями.

Задачи

16.1. Координаты X, Y случайной точки распределены равномерно внутри прямоугольника, ограниченного абсциссами $x = a$, $x = b$ и ординатами $y = c$, $y = d$ $(b > a,\ d < c)$. Найти плотность вероятности и функцию распределения системы величин X, Y.

16.2. Система случайных величин (X, Y) имеет плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{a}{\pi^2(16 + x^2)(25 + y^2)}\,.$$

Требуется: а) определить величины A; б) найти функцию распределения $F(x, y)$.

16.3. Определить плотность вероятности системы трех положительных случайных величин (X, Y, Z) по заданной функции распределения

$$F(x, y, z) = (1-e^{-ax})(1-e^{-by})(1-e^{-cz})\ (x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0).$$

16.4. В условиях предыдущей задачи определить геометрическое место точек, обладающих одинаковой плотностью вероятности

$$f(x, y, z) = f_0, \qquad f_0 \leqslant abc.$$

16.5. Система (X, Y) задана следующей двумерной таблицей (матрицей) распределения вероятностей (табл. 1)

Таблица 1

$P(X = i, Y = j)$

$j \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
0	0,202	0,174	0,113	0,062	0,049	0,023	0,004
1	0	0,099	0,064	0,040	0,031	0,020	0,006
2	0	0	0,031	0,025	0,018	0,013	0,008
3	0	0	0	0,001	0,002	0,004	0,011

Требуется: а) составить функцию распределения; б) определить вероятность $P(Y \geqslant 2)$; в) определить $M[X]$, $M[Y]$ и корреляционную матрицу.

16.6. Система независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ задана плотностями вероятностей $f_1(x_1), f_2(x_2), \ldots, f_n(x_n)$. Определить функцию распределения этой системы случайных величин.

16.7. Задана плотность вероятности $f(x_1, x_2)$ системы двух случайных величин, которые могут быть реализованы лишь совместно. Наблюдены значения этих величин u и v, причем неизвестно, какой из случайных величин является каждое из этих значений. Определить вероятность того, что u является реализацией случайной величины X_1, а v — случайной величины X_2.

16.8. Задана плотность вероятности системы трех случайных величин $f(x_1, x_2, x_3)$, которые могут быть реализованы лишь совместно. Наблюдены значения этих величин u, v и w, причем неизвестно, реализацией какой из случайных величин является каждое из этих значений. Определить вероятность того, что u является реализацией X_1, а w — реализацией X_3.

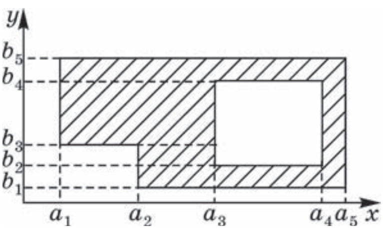

Рис. 3

16.9. Определить вероятность попадания случайной точки в указанную на рис. 3 заштрихованную область, если задана функция распределения $F(x, y)$.

16.10. Определить вероятность попадания точки с координатами (X, Y) в область, определяемую неравенствами $(1 \leqslant x \leqslant 2,\ 1 \leqslant y \leqslant 2)$, если функция распределения $(a > 1)$

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-2y^2} + a^{-x^2-2y^2}, & \text{при } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0 \text{ или } y < 0. \end{cases}$$

16.11. Координаты случайной точки (X, Y) распределены равномерно внутри прямоугольника, ограниченного абсциссами $(0, a)$ и ординатами $(0, b)$. Определить вероятность попадания случайной точки в круг радиуса R, если $a > b$, а центр круга совпадает с началом координат.

16.12. Плотность вероятности системы случайных величин

$$f(x, y) = \begin{cases} c\left(R - \sqrt{x^2 + y^2}\right), & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant R^2, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Определить: а) постоянную c; б) вероятность попадания в круг радиуса $a < R$ с центром в начале координат.

16.13. Случайные величины X и Y связаны соотношением $mX + nY = c$, где m, n и c — неслучайные величины $(m \neq 0,\ n \neq 0)$.

Найти: а) коэффициент корреляции r_{xy}; б) отношение среднеквадратических отклонений σ_x/σ_y.

16.14. Доказать, что коэффициент корреляции по абсолютной величине не превосходит единицы.

16.15. Показать, что

$$k_{xyz} = \mathrm{M}[(X - \overline{x})(Y - \overline{y})(Z - \overline{z})] = \\ = \mathrm{M}[XYZ] - \overline{x}k_{yz} - \overline{y}k_{xz} - \overline{z}k_{xy} - \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}\,.$$

16.16. Дана корреляционная матрица системы случайных величин (X_1, X_2, X_3):

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 16 & -14 & 12 \\ -14 & 49 & -21 \\ 12 & -21 & 36 \end{Vmatrix}.$$

Составить нормированную корреляционную матрицу $\|r_{ij}\|$.

16.17. Однотипные детали в зависимости от точности изготовления различаются по форме на круглые и овальные, а по весу — на легкие и тяжелые. Вероятности того, что взятая наудачу деталь окажется круглой и легкой, овальной и легкой, круглой и тяжелой, овальной и тяжелой, соответственно равны α, β, γ и $\delta = 1 - \alpha - \beta - \gamma$. Взята одна деталь. Найти математические ожидания и дисперсии числа круглых деталей X и числа легких деталей Y, а также корреляционный момент k_{xy} между числом круглых и числом легких деталей, если $\alpha = 0{,}40$, $\beta = 0{,}05$, $\gamma = 0{,}10$.

16.18. Определить математические ожидания и корреляционную матрицу системы случайных величин (X, Y), если плотность вероятности

$$f(x, y) = \frac{2}{\pi(x^2 + y^2 + 1)^3}\,.$$

16.19. Определить плотность вероятности, математические ожидания и корреляционную матрицу системы случайных величин (X, Y), заданных в интервалах $(0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2})$ и $(0 \leqslant \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2})$, если функция распределения системы $F(x, y) = = \sin x \sin y$.

16.20.[1] Иглу длины l наугад бросают на плоскость, разграфленную параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии l $(l > L)$. Найти вероятность пересечения иглой хотя бы одной из прямых.

16.21.[2] Иглу длины l наугад бросают на плоскость, состоящую из прямоугольников со сторонами a и b. Определить вероятность пересечения иглой хотя бы одной из сторон прямоугольника, если $a > l$, $b > l$.

16.22. В результате независимых испытаний получены значения X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывной случайной величины X, плотность вероятности которой $f(x)$. Обозначив $Y = = \min X_j$, $Z = \max X_j$, найти плотность вероятности системы случайных величин (Y, Z). Найти двумерную плотность

---

[1]В задачах 16.20 и 16.21 сохранена формулировка классической «задачи Бюффона». Предполагается, что угол, составленный иглой с направлением прямых равновозможен в интервале $(0, \pi)$, а положение центра иглы равновозможно в любом месте между параллельными линиями.

[2]См. примечание к задаче 16.20.

вероятности системы (X_1, X_n) — распределения концов вариационного ряда.

16.23. В партии из N элементов имеется N_i элементов i-го вида $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$

$$\sum_{i=1}^{m+1} N_i = N.$$

Обозначив через X_i — число элементов i-го вида, оказавшихся в числе n элементов, взятых из партии, найти вероятность

$$\mathrm{P}(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_m = n_m),$$

где $0 \leqslant n_i \leqslant n$ и $\sum_{i=1}^{m} n_i \leqslant n$.

Определить $\mathrm{M}[X]$, $\mathrm{D}[X]$ и $k_{ij} = \mathrm{M}[(X_i - \overline{x}_i)(X_j - \overline{x}_j)]$.

16.24. Система случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеет плотность вероятности (закон распределения Дирихле)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\ = \frac{\Gamma(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{n+1})}{\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)\ldots\Gamma(\nu_{n+1})} x_1^{\nu_1 - 1} x_2^{\nu_2 - 1} \ldots x_n^{\nu_n - 1} \left(1 - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{\nu_{n+1} - 1}.$$

Определить:

а) смешанный момент n-мерного распределения Дирихле

$$\mathrm{M}[X_1^{r_1} X_2^{r_2} \ldots X_n^{r_n}];$$

б) математические ожидания $\mathrm{M}[X_i]$, дисперсии $\mathrm{D}[X_i]$ и корреляционные моменты k_{ij} случайных величин X_i и X_j.

16.25. Для многомерного распределения Пуассона

$$\mathrm{P}\left(X_1 = r_1, X_2 = r_2, \ldots, X_n = r_n = N - \sum_{i=1}^{n-1} r_i\right) = \frac{e^{-\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i} \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i^{r_i}}{\prod\limits_{i=1}^{n} r_i!} \times \\ \times \left(\sum_{i=1}^{n} r_i = N\right)$$

составить производящую функцию

$$G(u_1,u_2,\ldots,u_n)=\sum P(X_1=r_1,X_2=r_2,\ldots,X_n=r_n)u_1^{r_1}u_2^{r_2}\ldots u_n^{r_n},$$

где суммирование ведется по всем значениям r_i от 0 до ∞ и с ее помощью найти $\mathrm{M}[X_j X_l X_m]$.

16.26. Эксперимент, имеющий исходы $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_r$, вероятности которых соответственно равны $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_r$, повторяется до тех пор, пока исход A_0 не появится в k-й раз. Найти вероятность того, что когда A_0 появится в k-й раз, исходы $A_1, A_2, \ldots, A_r$ появятся $i_1, i_2, \ldots, i_r$ раз соответственно (отрицательное полиномиальное распределение).

16.27. Для отрицательного полиномиального распределения (см. предыдущую задачу)

$$P(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{r} i_j + k - 1\right)!}{\prod\limits_{j=1}^{r} i_j!\,(k-1)!} P_0^k \prod_{j=1}^{r} P_j^{i_j}.$$

Найти:

1) производящую функцию;

2) математические ожидания числа появлений j-го исхода и общего числа испытаний до k-го появления исхода A_0.

16.28. Найти характеристическую функцию системы двух случайных величин, подчиненных нормальному закону распределения

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma_1^2} - \frac{2r(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\overline{y})^2}{\sigma_2^2}\right]}.$$

16.29. Найти характеристическую функцию системы n случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, подчиненных нормальному закону распределения, если заданы математические ожидания случайных величин, входящих в систему, $\overline{x}_m = a$, и их корреляционная матрица

$$\|k_{rs}\| = \left\| \begin{matrix} \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ \alpha\sigma^2 & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha\sigma^2 & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 & 0\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & \sigma^2 & \alpha\sigma^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots & \alpha\sigma^2 & \sigma^2 \end{matrix} \right\|, \quad (r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

16.30. Пользуясь методом характеристических функций, определить $\mathrm{M}[(X_1^2 - \sigma^2)(X_2^2 - \sigma^2)]$, если X_1, X_2 — нормальные случайные величины, для которых $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = 0$, $\mathrm{M}[X_1^2] = \mathrm{M}[X_2^2] = \sigma^2$, а $\mathrm{M}[X_1X_2] = k_{12}$.

16.31. Пользуясь методом характеристических функций, определить: а) $\mathrm{M}[X_1^2X_2^2X_3^2]$; б) $\mathrm{M}[(X_1^2 - \sigma^2)(X_2^2 - \sigma^2)(X_3^2 - \sigma^2)]$, если X_1, X_2 и X_3 — нормальные случайные величины, для которых $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \overline{x}_3 = 0$, $\mathrm{M}[X_1^2] = \mathrm{M}[X_2^2] = \mathrm{M}[X_3^2] = \sigma^2$, а k_{12}, k_{13}, и k_{23} — корреляционные моменты между соответствующими случайными величинами.

16.32. Пользуясь методом характеристических функций, определить $\mathrm{M}[X_1X_2X_3]$, если X_1, X_2, X_3 — нормальные центрированные случайные величины.

16.33. Пользуясь методом характеристических функций, выразить $\mathrm{M}[X_1X_2X_3X_4]$через элементы корреляционной матрицы k_{ml} системы нормальных случайных величин X_1, X_2, X_3 и X_4, математические ожидания которых равны нулю.

16.34. Доказать, что центральный момент четного порядка системы n нормальных случайных величин определяется формулой

$$\mu_{r_1r_2\ldots r_n} = \mathrm{M}\left[(X_1 - \overline{x}_1)^{r_1}(X_2 - \overline{x}_2)^{r_2} \ldots (X_n - \overline{x}_n)^{r_n}\right] = \frac{r_1!\, r_2! \ldots r_n!}{2^s s!} \sum k_{m_1l_1} \ldots k_{m_sl_s},$$

где $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = 2s$, а сумма распространена на все возможные различные перестановки $2s$ индексов m_1, m_2, ..., m_n и $l_1, l_2, \ldots, l_n$, из которых r_1 индексов равны 1, r_2 индексов равны 2, ..., r_n индексов равны n.

16.35. Продукция завода состоит из однотипных изделий, каждое из которых в r-м квартале года $(r = 1, 2, 3, 4)$ с вероятностью p_r относится к первому сорту и с вероятностью $q_r = 1 - p_r$ — ко второму сорту. Изделие первого сорта оценивается в s_1, а второго — в s_2 рублей. Определить характеристическую функцию системы случайных величин X и Y, где X — стоимость изделий, выпущенных за первые три квартала, а Y — за последние три квартала года. Определить корреляционный момент X и Y. Число изделий, выпускаемых в r-м квартале, равно N_r.

16.36. Дана производящая функция $G(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ многомерного распределения системы целочисленных случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Определить характеристическую функцию системы.

16.37. Найти характеристическую функцию полиномиального распределения

$$P_{n;n_1,n_2,\ldots,n_m} = \frac{n!}{n_1!\,n_2!\,\ldots n_m!}\,p_1^{n_1} p_2^{n_2}\ldots p_m^{n_m}$$

и с ее помощью найти смешанный момент $\mathrm{M}[X_1 X_2^2 X_3^3]$.

16.38. Составить характеристическую функцию отрицательного полиномиального распределения

$$P(i_1, i_2, \ldots, i_r)\frac{\left(\sum\limits_{j=1}^{r} i_j + k - 1\right)!}{\prod\limits_{j=1}^{r} i_j!\,(k-1)!}\,P_0^k \prod_{j=1}^{k} P_j^{i_j}$$

и с ее помощью определить дисперсию числа появлений исхода A_j до k-го появления исхода A_0.

§ 17. ЗАКОН НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Плотность вероятности для системы n нормальных случайных величин (для многомерного нормального распределения)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{\Delta}}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} k_{ij}^{(-1)}(x_i - \overline{x}_i)(x_j - \overline{x}_j)},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \ldots & k_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nn} \end{vmatrix}$$

— определитель, составленный из элементов корреляционной матрицы; $k_{ij}^{(-1)}$ — элементы обратной матрицы, равные

$$k_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{\Delta}A_{ij} = \frac{1}{\Delta}A_{ji},$$

A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента k_{ij}.

Если определитель матрицы $\|k_{ij}\|$ содержит по крайней мере один минор порядка r, не равный нулю, а все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю, то r называется рангом матрицы, а также рангом многомерного нормального распределения. При $r = n$ распределение называется собственным или невырожденным, а при $r < n$ — несобственным или вырожденным.

Вырожденное распределение сосредоточено в пространстве r измерений. При $r = 1$ все многомерное нормальное распределение сосредоточено на некоторой прямой, при $r = 2$ — на некоторой плоскости.

С помощью линейных преобразований от координат x_1, $x_2, \ldots, x_n$ при ранге r можно перейти к таким координатам $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$, что корреляционная матрица порядка преобразуется к диагональной матрице порядка R.

$$\begin{Vmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \sigma_r^2 \end{Vmatrix},$$

где $\sigma_l^2 = \mathrm{D}[\xi_l]$. Тогда нормальное распределение n зависимых случайных величин преобразуется к эквивалентному нормальному распределению r независимых случайных величин $r \leqslant n$ с плотностью вероятности

$$f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{R}{2}} \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_R} e^{-\frac{1}{2} \sum\limits_{l=1}^{r} \frac{\xi_q^2}{\sigma_l^2}}.$$

Плотность вероятности для системы двух нормальных случайных величин (X, Y) (для нормального закона распределения координат точки на плоскости)

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \cdot \left[\frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\overline{y})^2}{\sigma_y^2} \right]},$$

где $\overline{x}$, $\overline{y}$ — математические ожидания X и Y, σ_x, σ_y — средние квадратические отклонения, r — коэффициент корреляции X и Y.

Геометрическое место точек, имеющих равную плотность вероятности, есть эллипс (эллипс распределения), определяемый уравнением

$$\frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\overline{y})^2}{\sigma_y^2} = k^2.$$

Если $r = 0$, то оси симметрии эллипса распределения параллельны координатным осям Ox и Oy, случайные величины X и Y не связаны и независимы, а плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\overline{y})^2}{\sigma_y^2}\right]}=\frac{\rho^2}{\pi E_x E_y}e^{-\rho^2\left[\frac{(x-\overline{x})^2}{E_x^2}+\frac{(y-\overline{y})^2}{E_y^2}\right]},$$

где $E_x = \sigma_x\rho\sqrt{2}$, $E_y = \sigma_y\rho\sqrt{2}$ — срединные отклонения X и Y соответственно, а $\rho = 0{,}4769\ldots$

В случае трех независимых нормальных случайных величин X, Y, Z имеем $k_{xy} = k_{yz} = k_{xz} = 0$ и

$$f(x,y,z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}\sigma_x\sigma_y\sigma_z}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\overline{x})^2}{\sigma_x^2}+\frac{(y-\overline{y})^2}{\sigma_y^2}+\frac{(z-\overline{z})^2}{\sigma_z^2}\right]} =$$

$$= \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}}E_xE_yE_z}\, e^{-\rho^2\left[\frac{(x-\overline{x})^2}{E_x^2}+\frac{(y-\overline{y})^2}{E_y^2}+\frac{(z-\overline{z})^2}{E_z^2}\right]},$$

где E_x, E_y, E_z — срединные отклонения X, Y, Z соответственно.

Этому частному случаю соответствует параллельность осей симметрии эллипсоида рассеивания координатным осям Ox, Oy и Oz.

Задачи

17.1. Известно, что X и Y — независимые нормальные случайные величины с математическими ожиданиями $\overline{x}$ и $\overline{y}$, средними квадратическими отклонениями σ_x и σ_y соответственно. Выразить функцию распределения системы (X, Y) через приведенные функции Лапласа $\hat{\Phi}(z)$, определяемые формулой

$$\hat{\Phi}(z) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-\rho^2 t^2}\,dt.$$

17.2. Даны математические ожидания двух нормальных случайных величин $\mathrm{M}[X] = 26$, $\mathrm{M}[Y] = -12$ и их корреляционная матрица

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 196 & -91 \\ -91 & 196 \end{Vmatrix}.$$

Определить плотность вероятности системы (X, Y).

17.3. Дана плотность вероятности координат случайной точки на плоскости

$$f(x, y) = ce^{-[4(x-5)^2+2(x-5)(y-3)+5(y-3)^2]}.$$

Требуется: а) определить c; б) определить корреляционную матрицу; в) вычислить площадь $S_{\text{эл}}$ единичного эллипса рассеивания.

17.4. Определить в точке $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ плотность вероятности системы двух нормальных случайных величин, для которых $\overline{x_1} = \overline{x_2} = 0$ и $\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

17.5. Дана корреляционная матрица системы трех нормальных случайных величин (X, Y, Z):

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \\ -2 & 3 & 8 \end{Vmatrix}.$$

Математические ожидания $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 0$. Найти плотность вероятности $f(x, y, z)$ и ее максимальное значение.

17.6. Система n нормальных случайных величин имеет корреляционную матрицу

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 & 3 & 3 \\ \hdotsfor{7} \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \end{Vmatrix}.$$

а) Вычислить обратную матрицу, б) найти плотность вероятности $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если $\overline{x}_1 = \overline{x}_2 = \dots = \overline{x}_n = 0$.

17.7. Координаты (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) случайных точек на плоскости подчинены нормальному закону распределения, причем математические ожидания всех координат равны нулю, дисперсии всех координат одинаковы и равны 10; корреляционные моменты между одноименными координатами $\mathrm{M}[X_1X_2] = \mathrm{M}[Y_1Y_2] = 2$; остальные пары координат не коррелированы. Найти плотность вероятности $f(x_1, y_1, x_2, y_2)$.

17.8. Координаты (X, Y) случайной точки A на плоскости подчинены нормальному закону

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi ab}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}.$$

Определить вероятность того, что точка A окажется внутри эллипса с главными полудиаметрами ka и kb, совпадающими с координатными осями Ox и Oy.

17.9. Координаты случайной точки A в пространстве (X, Y, Z) подчинены нормальному закону

$$f(x, y, z) = \frac{\rho^3}{\pi^{\frac{3}{2}} E_1 E_2 E_3}\, e^{-\rho^2\left(\frac{x^2}{E_1^2}+\frac{y^2}{E_2^2}+\frac{z^2}{E_3^2}\right)}.$$

Определить вероятность того, что точка A окажется внутри эллипсоида с главными полудиаметрами kE_1, kE_2 и kE_3, совпадающими с координатными осями Ox, Oy, Oz.

17.10. При нанесении точки на плоскость допущены ошибки X, Y в ее прямоугольных координатах. Какова вероятность того, что расстояние нанесенной точки от ее истинного положения не превзойдет R, если X и Y — независимые нормальные случайные величины, $\overline{x} = d$, $\overline{y} = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$.

17.11. Система случайных величин (X, Y) подчинена нормальному закону распределения с $\mathrm{M}[X] = \mathrm{M}[Y] = 0$. Определить вероятность того, что а) $X < Y$; б) $X > -Y$.

17.12. Вычислить вероятность попадания случайной точки A, координаты (X, Y) которой подчинены нормальному закону, в прямоугольник со сторонами, параллельными главным осям рассеивания, если координаты вершин прямоугольника (a, b), (a, d), (c, d), (c, b) при $a = -5$, $b = 10$, $c = 5$, $d = 20$ и $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 10$, $\sigma_x = 20$, $\sigma_y = 10$.

17.13. Случайная точка распределена по нормальному круговому закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ м. Сравнить вероятность попадания в фигуру, площадь которой 314 м^2, если она имеет форму: а) круга; б) квадрата; в) прямоугольника с отношением сторон 10 : 1. Центр рассеивания совпадает с геометрическим центром фигуры.

17.14. Найти вероятность попадания случайной точки в заштрихованную (на рис. 4) фигуру, ограниченную тремя концентрическими окружностями и лучами, выходящими из общего центра O, если радиус внешней окружности R, рассеивание случайной точки на плоскости нормальное круговое с дисперсией σ^2. Центр рассеивания совпадает с точкой O.

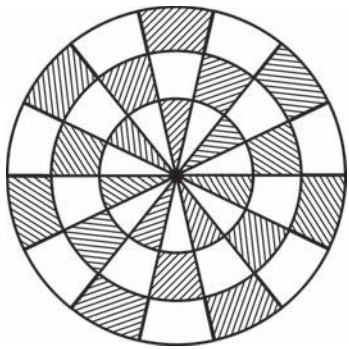

Рис. 4

17.15. Найти вероятность попадания случайной точки в фигуру, ограниченную концентрическими дугами, проведенными радиусами R_1 и R_2, и лучами, выходящими из общего центра дуг O, если рассеивание случайной точки на плоскость нормальное круговое со средним квадратическим отклонением σ, а угол между лучами равен α. Центр рассеивания совпадает с точкой O $(R_1 < R_2)$.

17.16. Для вероятности попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами $2d$ и $2k$, параллельными главным осям рассеивания, имеет место приближенная формула

$$P(\overline{x},\overline{z})=\frac{1}{4}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\overline{x}+d}{E_x}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\overline{x}-d}{E_x}\right)\right]\left[\hat{\Phi}\left(\frac{\overline{z}+k}{E_z}\right)-\hat{\Phi}\left(\frac{\overline{z}-k}{E_z}\right)\right]\approx$$
$$\approx A\frac{\rho^2}{\pi\alpha\beta}\,e^{-\rho^2\left(\frac{\overline{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\overline{z}^2}{\beta^2}\right)},$$

которой рекомендуется пользоваться при значениях d/E_x и k/E_z, не превосходящих 1,5. Приравняв нулевые и вторые моменты левой и правой частей равенства, определить значения A, α и β.

17.17. Пользуясь приближенной формулой предыдущей задачи, определить вероятность попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами $2d$ и $2k$, параллельными главным осям рассеивания, если координаты центра рассеивания распределены равномерно внутри данного прямоугольника, а E_x и E_z даны. Сравнить полученный результат с вероятностью попадания в ту же область при совпадении центра рассеивания с центром области.

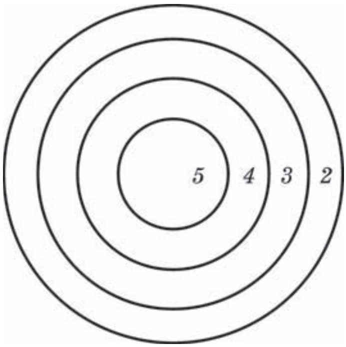

Рис. 5

17.18. Мишень состоит из четырех концентрических окружностей радиусов 10, 20, 30 и 40 см (рис. 5). Попадание в «яблочко» оценивается в 5 баллов, в каждое из трех колец — соответственно в 4, 3 и 2 балла. Задание считается выполненным, если после трех выстрелов получено не менее 7 баллов, и оценивается на отлично, если получено более 12 баллов. Какова вероятность выполнения задания при круговом рассеивании со средним квадратическим отклонением 29,6 см? Какова вероятность получить при этом отличную оценку? Центр рассеивания совпадает с центром мишени.

17.19. Определить вероятность попадания случайной точки в прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$ и $AC = b$, параллельными главным осям рассеивания $(AC \parallel Oy, BC \parallel Ox)$, если центр рассеивания совпадает с точкой A, а $\frac{a}{\sigma_x} = \frac{b}{\sigma_y} = k$.

17.20. Чему равна вероятность попадания точки с координатами X, Y, Z в область, представляющую собой шар радиуса R, из которого вырезан куб с ребром a (диагональ куба меньше диаметра шара)? Центр рассеивания совпадает с общим центром шара и куба. Рассеивание нормальное шаровое со средним квадратическим отклонением σ.

17.21. Рассчитать вероятность попадания точки $A(X, Y, Z)$ в прямой круговой цилиндр с радиусом основания R и высотой h, если рассеивание в плоскости XY, параллельной основанию, подчинено нормальному круговому закону со средним квадратическим отклонением σ, а рассеивание по образующей не зависит от X, Y и подчинено: а) нормальному закону со средним квадратическим отклонением B (центр рассеивания находится на оси цилиндра и делит ее в отношении $m:n$); б) равномерному закону распределения в интервале $(-H, H)$ при $H > h$.

17.22. Определить вероятность попадания случайной точки $A(X, Y, Z)$ в прямой круговой конус, вершина которого совпадает с центром рассеивания; высота конуса h, радиус основания R; рассеивание в плоскости xy, параллельной основанию, подчинено нормальному круговому закону со средним квадратическим отклонением σ, а рассеивание по высоте не зависит от X, Y и подчинено нормальному закону со средним квадратическим отклонением a.

17.23. Нормальный закон распределения на плоскости задан математическими ожиданиями случайных величин $\overline{x_1} = \overline{x_2} = 10$ и корреляционной матрицей $\|K_{ij}\| = \left\| \begin{smallmatrix} 36 & -18 \\ -18 & 36 \end{smallmatrix} \right\|$.

Определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна 10^{-5}.

17.24. Нормальный закон распределения в пространстве задан математическими ожиданиями случайных величин $\overline{x}_1 = 2$, $\overline{x}_2 = 0$, $\overline{x}_3 = -2$ и корреляционной матрицей

$$\|k_{ij}\| = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна 10^{-5}.

17.25. Для многомерного нормального распределения, приведенного в задаче 17.6, определить геометрическое место точек, в которых плотность вероятности равна 10^{-5}. При каких n задача не имеет решений?

17.26. Дана корреляционная матрица четырехмерного нормального распределения системы

$$\begin{Vmatrix} 5 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & -5 & -4 \\ -5 & -5 & 10 & 1 \\ 3 & -4 & 1 & 5 \end{Vmatrix}.$$

Определить ранг распределения. Составить выражение для плотности вероятности в координатах

$$\xi = x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4$$

$$\eta = 2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4.$$

§ 18. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОДСИСТЕМ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. УСЛОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. УСЛОВНЫЕ МОМЕНТЫ. КОРРЕЛЯЦИОННОЕ ОТНОШЕНИЕ

Если $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция распределения системы n случайных величин, то функция распределения части этих случайных величин (подсистемы случайных величин), например, $x_1, x_2, \ldots, x_k$, равна

$$F_{1,2,\ldots,k}(x_1, x_2, \ldots, x_k) = F(x_1, x_2, \ldots, x_k, \infty, \ldots, \infty),$$

а соответствующая плотность вероятности

$$f_{1,2,\ldots,k}(x_1,x_2,\ldots,x_k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,dx_{k+1}\ldots dx_n.$$

Плотность вероятности подсистемы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, вычисленная при условии, что остальные случайные величины $X_{k+1}, X_{k+2}, \ldots, X_n$ приняли определенные значения, равна

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k \mid x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n) = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{f_{k+1,\ldots,n}(x_{k+1}, \ldots, x_n)}.$$

Плотность вероятности системы выражается через условные вероятности по формуле

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \\ = f_1(x_1) f_2(x_2 \mid x_1) f_3(x_3 \mid x_1, x_2) \ldots f_n(x_n \mid x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Моменты условных распределений называются условными моментами.

Условное математическое ожидание Y по x равно

$$\overline{y}_x = \mathrm{M}[Y \mid x] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f(y \mid x)\, dy\,,$$

а условная дисперсия

$$\sigma^2_{y|x} = \mathrm{D}[Y \mid x] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (y - \overline{y}_x)^2 f(y \mid x)\, dy\,.$$

Между дисперсией σ^2_y случайной величины Y, условной дисперсией $\sigma^2_{y|x}$ и условным математическим ожиданием $\overline{y}_x$ существует соотношение

$$\sigma^2_y = \mathrm{M}\left[\sigma^2_{y|x}\right] + \mathrm{D}(\overline{y}_x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma^2_{y|x} f_x(x)\, dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\overline{y}_x - \overline{y})^2 f_x(x)\, dx\,.$$

Корреляционным отношением называется неотрицательная величина $\eta_{\overline{y}/x}$, определяемая формулой

$$\eta^2_{y/x} = \frac{\sigma^2_{\overline{y}x}}{\sigma^2_y} = 1 - \frac{\sigma^2_{y/x}}{\sigma^2_y}\,.$$

Меняя в предыдущих формулах x и y местами, получим условные моменты X по y и корреляционное отношение $\eta_{x/y}$.

Если Y — однозначная функция от X, то $\eta_{y/x} = 1$ и обратно, если $\eta_{y/x} = 1$, то Y — однозначная функция от X.

Если X и Y не коррелированы, то $\eta_{y/x} = 0$ и обратно, если $\eta_{y/x} = 0$, то X и Y не коррелированы.

Задачи

18.1. Система случайных величин (X, Y, Z) равномерно распределена внутри прямоугольного параллелепипеда, образованного плоскостями $x = a_1$, $x = a_2$, $y = b_1$, $y = b_2$, $z = c_1$, $z = c_2$. Определить плотности вероятности системы (X, Y, Z), подсистемы (Y, Z) и случайной величины Z. Проверить зависимость случайных величин, входящих в систему.

18.2. Положение случайной точки (X, Y) равновозможно в любом месте круга радиуса r, центр которого совпадает с началом координат. Определить плотность вероятности и функцию распределения каждой из прямоугольных координат X, Y. Являются ли случайные величины X и Y зависимыми?

18.3. В условиях предыдущей задачи определить условную плотность вероятности $f(y/x)$ при $|x| < r$ и $|x| = r$.

18.4. В условиях задачи 18.2 вычислить корреляционную матрицу системы случайных величин X и Y. Являются ли случайные величины X и Y коррелированными?

18.5. Система случайных величин X, Y подчинена равномерному закону распределения внутри квадрата со стороной a. Диагонали квадрата совпадают с осями координат.

Требуется: а) определить плотность вероятности системы (X, Y); б) определить плотность вероятности каждой из прямоугольных координат; в) определить условные плотности вероятности; г) вычислить корреляционную матрицу системы случайных величин (X, Y); д) проверить их зависимость и коррелированность.

18.6. Случайные величины (X, Y, Z) равномерно распределены внутри сферы радиуса r. Определить для точек, лежащих внутри сферы, плотность вероятности прямоугольной координаты Z и условную плотность вероятности $f(x, y/z)$.

18.7. Дана плотность вероятности системы неотрицательных случайных величин

$$f(x, y) = kxye^{-(x^2+y^2)} \qquad (x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0).$$

Определить k, $f_x(x)$, $f_y(y)$, $f(x/y)$, $f(y/x)$, первые и вторые моменты распределения $f(x, y)$.

18.8. Дано: $f_y(y) = \frac{y}{a^2}e^{-\frac{y^2}{2a^2}}$; $\mathrm{M}[X \mid y] = 2y$; $\mathrm{D}[X \mid y] = a^2e^{-\frac{y^2}{a^2}}$. Определить $\mathrm{M}[X]$, $\mathrm{D}[X]$ $(Y \geqslant 0)$.

18.9. Система двух случайных величин (X, Y) подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x,y)=k\exp\left\{-\frac{1}{0{,}72\sigma^2}\left[(x-5)^2+0{,}8(x-5)(y+2)+0{,}25(y+2)^2\right]\right\}.$$

Определить: а) условные математические ожидания и дисперсии; б) плотность вероятности каждой из случайных величин, входящих в систему; в) условные плотности вероятности $f(y/x)$ и $f(x/y)$.

18.10. Плотность вероятности системы двух случайных величин (X, Y) задана в виде

$$f(x, y) = Ae^{-ax^2+bxy-cy^2} \qquad (a > 0, \quad c > 0).$$

Определить закон распределения $f_x(x)$ и $f_y(y)$. При каких условиях X и Y являются независимыми случайными величинами?

18.11. Дана плотность вероятности системы двух случайных величин $f(x, y) = ke^{-4x^2-6xy-9y^2}$. Определить постоянную k, корреляционный момент между X и Y и условные законы распределения $f(x/y)$ и $f(y/x)$.

18.12. Положение ориентира на плоскости распределено по нормальному закону при $\overline{x} = 125$ м, $\overline{y} = -30$ м, $\sigma_x = 40$ м, $\sigma_y = 30$ м, $r_{xy} = 0{,}6$. Координата X определяет отклонение ориентира «по дальности», т. е. по направлению, параллельному линии наблюдения. Координата Y определяет отклонение ориентира «по боковому направлению», перпендикулярному линии наблюдения.

Определить: а) плотность вероятности отклонений ориентира по дальности; б) плотность вероятности отклонений ориентира по боковому направлению; в) условную плотность вероятности отклонений ориентира по дальности при отсутствии боковых отклонений; г) условную плотность вероятности отклонений ориентира по боковому направлению при отклонении по дальности $+25$ м.

18.13. В условиях предыдущей задачи найти уравнения регрессии Y по X и X по Y.

18.14. Определить плотность вероятности и математическое ожидание длины радиус-вектора случайной точки, координаты которой (X, Y, Z) подчинены нормальному закону распределения

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} a^3}\, e^{-\frac{1}{2a^2}(x^2+y^2+z^2)}.$$

18.15. Система случайных величин (X, Y) подчинена нормальному закону с параметрами $\overline{x} = \overline{y} = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 1$, $r_{xy} = \rho \neq 0$.

Перейти к полярным координатам и найти плотность полярного угла $f(\varphi)$.

18.16. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + x^2 + y^2)^3}} \qquad \text{(двумерный закон Коши).}$$

Показать, что законы распределения подсистем являются законами Коши

$$f_1(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2}, \qquad f_2(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + y^2}.$$

Зависимы ли X и Y?

Найти плотность вероятности $f(\rho)$ радиус-вектора $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

18.17. Система случайных величин подчинена трехмерному закону распределения Коши

$$f(x, y, z) = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

1) Показать, что закон распределения подсистемы (X, Y) является двумерным законом Коши.

2) Найти плотность вероятности $f(r)$ радиус-вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

3) Найти условную плотность вероятности $f(y, z/x)$.

18.18. Дана система нормальных случайных величин (X_1, X_2, X_3, X_4): $\mathrm{M}[X_j] = 0$; $\mathrm{D}[X_j] = 10$; $\mathrm{M}[X_1 X_3] = \mathrm{M}[X_2 X_4] = 2$; $\mathrm{M}[X_1 X_2] = \mathrm{M}[X_1 X_4] = \mathrm{M}[X_2 X_3] = \mathrm{M}[X_3 X_4] = 0$.

Найти плотности вероятности подсистем (X_1, X_3) и (X_1, X_2).

18.19. В условиях предыдущей задачи определить условную плотность вероятности $f(x_3, x_4 \mid x_1, x_2)$, условные математические ожидания $\mathrm{M}[X_3 \mid x_1, x_2]$, $\mathrm{M}[X_4 \mid x_1, x_2]$ и условные дисперсии $\mathrm{D}[X_3 \mid x_1, x_2]$, $\mathrm{D}[X_4 \mid x_1, x_2]$ при $x_1 = 0, x_2 = 10$.

18.20. Система нормальных случайных величин X_1, $X_2, \ldots, X_n$ задана своими математическими ожиданиями $\overline{x}_j$ и корреляционными моментами k_{jl} $(j, l = 1, 2, \ldots, n)$. Определить условный закон распределения случайной величины $X = Xn$ при заданных значениях $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

18.21. Исходя из тождества

$$Y - \overline{y} = \overline{Y} - \overline{y}_X + \overline{y}_X - \overline{y}$$

доказать, что

$$\sigma_y^2 = \mathrm{M}[\sigma_{y/x}^2] + \sigma_{\overline{y}_x}^2,$$

а

$$\mathrm{M}[(Y - \overline{y}_X)(\overline{y}_X - y)] = 0.$$

18.22. Доказать, что если X и Y независимы, то корреляционное отношение равно нулю, а если Y функционально связано с X, то корреляционное отношение равно единице.

18.23. Случайные величины X и Y связаны линейной зависимостью $Y = aX + b$.

1) Выразить $\mathrm{D}[Y]$ и k_{xy} через $\mathrm{D}[X]$.

2) Найти коэффициенты корреляции r_{xy} и корреляционное отношение $\eta_{y/x}$.

18.24. Случайные величины X и Y связаны зависимостью $Y = X^k$ (k — целое положительное число).

1) Выразить $\mathrm{D}[Y]$ и k_{xy} через начальные моменты случайной величины X.

2) Найти r_{xy} и доказать, что

$$(m_{k+1} - m_1 m_k)^2 = (m_2 - m_1^2)(m_{2k} - m_k^2),$$

где $m_i = \mathrm{M}[X^i]$.

3)Найти корреляционное отношение $\eta_{y/x}$.

18.25. Система случайных величин (X, Y) распределена равномерно на треугольнике с вершинами $(0, 0)$, $(0, a)$, $(a, 0)$. Определить:

а) плотность вероятности системы $f(x, y)$, подсистем $f_1(x)$, $f_2(y)$ и условные плотности вероятности $f(y/x)$ и $f(x/y)$ (зависимы ли X и Y?);

б) условное и полное математические ожидания $\overline{y}_x$ и $\overline{y}$;

в) условную и полную дисперсии $\sigma_{y/x}^2$ и σ_y^2;

г) дисперсию условного математического ожидания $\sigma_{\overline{y}_X}^2$;

д) корреляционное отношение $\eta_{y/x}$.

Глава 4

МОМЕНТЫ И ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 19. МОМЕНТЫ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Начальные и центральные моменты случайной величины Y, связанной заданной функциональной зависимостью $Y = \varphi(x)$ со случайной величиной X, плотность вероятности $f(x)$ которой известна, определяются формулами

$$m_k[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x)]^k f(x)\,dx;$$

$$\mu_k[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - \overline{y}]^k f(x)\,dx \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Данные формулы обобщаются на любое количество случайных аргументов: если $Y = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, то

$$m_k[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)]^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n;$$

$$\mu_k[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \overline{y}]^k f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n,$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — плотность вероятности системы случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Все интегралы предполагаются сходящимися абсолютно.

Для дискретных случайных величин интегралы в приведенных выше формулах заменяются соответствующими суммами, а плотности — вероятностями соответствующих наборов значений случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

Если функция $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ линейная, т. е. $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j + b$, то

$$\mathrm{M}[Y] = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathrm{M}[X_j] + b;$$

$$\mu_2[Y] = \mathrm{D}[Y] = \sum_{j=1}^{n} a_j^2 \mathrm{D}[X_j] + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j k_{ij},$$

где k_{ij} — корреляционный момент случайных величин X_i и X_j.

Для вычисления начального и центрального момента порядка k случайной величины $Y = \varphi(X_1, \ldots, X_n)$ можно также воспользоваться формулами

$$m_k[Y] = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{du^k}\,[E_y(u)]\big|_{u=0};$$

$$\mu_k[Y] = \frac{1}{i^k}\frac{d^k}{du^k}\,\left[e^{-iu\overline{y}}E_y(u)\right]\big|_{u=0},$$

где $E_y(u)$ — характеристическая функция случайной величины Y, т. е.

$$E_y(u) = \mathrm{M}[e^{iuY}] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overset{(n)}{\cdots} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iu\varphi(x_1,\ldots,x_n)} f(x_1,\ldots,x_n)\,dx_1 \ldots dx_n.$$

Задачи

19.1. Определить математическое ожидание длины хорды, соединяющей заданную точку окружности радиуса a с другой точкой, все положения которой на окружности равновозможны.

19.2. Найти математическое ожидание длины хорды, проведенной в круге радиуса a перпендикулярно выбранному диаметру и пересекающей этот диаметр в произвольной точке, все положения которой равновозможны на выбранном диаметре.

19.3. При сортировке стальных шариков по их размеру в группу с номинальным размером шарика 10 мм попадают шарики, проходящие через круглое отверстие диаметром 10,1 мм и не проходящие через отверстие диаметром 9,9 мм. Шарики изготовлены из стали с удельным весом 7,8 г/см^3. Найти математическое ожидание и дисперсию веса шарика данной группы, считая распределение радиуса шарика в поле допуска равномерным.

19.4. Неподвижная точка O находится на высоте h над концом A горизонтального отрезка AK длины l. На отрезке AK наудачу выбрана точка B. Найти математическое ожидание угла Φ между линиями OA и OB.

19.5. Ножки циркуля, каждая длиной 10 см, раздвинуты на случайный угол Φ, значения которого равномерно распределены в интервале $[0, 180°]$. Найти математическое ожидание расстояния между остриями ножек.

19.6. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения $(\overline{x}, \sigma_x)$. Определить математическое ожидание случайной величины Y, если

$$Y = e^{\frac{\overline{x}^2 - 2\overline{x}X}{2\sigma_x^2}}.$$

19.7. Вершина C прямого угла прямоугольного равнобедренного треугольника соединяется отрезком прямой с точкой M, выбранной наудачу на гипотенузе; длина гипотенузы 2 м. Найти математическое ожидание длины отрезка CM.

19.8. На окружности радиуса a с центром в начале координат наудачу выбрана точка. Найти математическое ожидание площади квадрата со стороной, равной абсциссе этой точки.

19.9. В урне черные и белые шары; вероятность извлечь белый шар равна p, а черный — q. Из урны извлекается n шаров, причем вынутый шар каждый раз возвращается обратно в урну. Каково математическое ожидание числа случаев, при которых до и после белого шара извлекается черный шар?

19.10. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону нормального распределения

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}.$$

Определить математическое ожидание и дисперсию $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$.

19.11. В полукруге радиуса a выбраны две точки, которые вместе с одним из концов ограничивающего диаметра образуют треугольник. Определить математическое ожидание площади этого треугольника, если положение каждой точки внутри полукруга равновозможно и независимо.

19.12. На окружности единичного радиуса выбраны три точки A, B и C. Найти математическое ожидание площади треугольника ABC, если положение каждой из трех точек на окружности равновозможно и независимо.

19.13. Число космических частиц, попадающих на данную площадку за время t, подчиняется закону Пуассона $P_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$.

Энергия каждой частицы является случайной и характеризуется средним значением $\overline{w}$. Найти среднюю энергию, получаемую площадкой в единицу времени.

19.14. Радиоэлектронный комплекс содержит n элементов. Вероятность повреждения (выход из строя) k-го элемента равна P_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Определить математическое ожидание числа поврежденных элементов.

19.15. Комплекс, состоящий из n однотипных блоков, прекращает работу при выходе из строя хотя бы одного из этих блоков, что происходит с одинаковой вероятностью для любого из них. Вероятность прекращения работы комплекса за некоторый цикл работы равна p. Новый цикл начинается после завершения предыдущего или после ремонта поврежденного блока, если предыдущий цикл не был завершен. Определить математическое ожидание числа блоков, подвергавшихся ремонту хотя бы один раз при m циклах.

19.16. Имеется n блоков, действующих независимо один от другого и совершающих ряд последовательных циклов. Вероятность выхода из строя любого блока за время одного цикла равна p. Новый цикл начинается после завершения предыдущего (отдельно для каждого блока) или после ремонта, если предыдущий цикл для данного блока не был завершен. Определить математическое ожидание числа блоков, подвергавшихся ремонту хотя бы один раз, если каждый блок работал в течение m циклов.

19.17. Число элементов электронной машины, выходящих из строя за некоторый промежуток времени, подчинено закону Пуассона с параметром a. Длительность ремонта машины зависит от числа m вышедших из строя элементов и определяется формулой $t_m = T(1 - e^{-\gamma m})$. Определить математическое ожидание длительности ремонта и ущерба, причиненного простоем машины, если ущерб пропорционален квадрату длительности ремонта: $S_m = kt_m^2$.

19.18. Приборный комплекс включает n блоков, действия которых независимы. Для выхода из строя комплекса достаточно повреждения хотя бы одного из блоков. Вероятность выхода из строя комплекса за некоторый период времени равна p, а повреждение любого из его блоков равновероятно. Новый цикл начинается после завершения предыдущего или после ремонта поврежденного блока, если предыдущий цикл не был завершен.

По условию комплекс должен сделать $2m$ циклов, причем после первых m циклов $(m < \frac{n}{2})$ все блоки, подвергшиеся ремонту хотя бы один раз, удаляются, а оставшимися при прежних условиях повторяется еще m циклов. Определить математическое ожидание числа блоков, подвергшихся ремонту хотя бы один раз после двух серий по m циклов.

19.19. По n мишеням стрелок производит две серии выстрелов по m в каждой. Стрельба организована так, что выстрелы делаются последовательно по каждой мишени и наблюдения за результатами внутри каждой серии не производятся. Пуля с вероятностью p может попасть только в мишень, в которую прицелился стрелок. Мишень считается пораженной, если хотя бы одна пуля попала в нее. Вторая серия выстрелов производится после наблюдения результатов первой серии и в тех же условиях, но по пораженным в первой серии мишеням стрельба уже не ведется. Определить математическое ожидание числа пораженных мишеней в двух сериях для случаев $n = m = 8$ и $n \geqslant 2m$.

19.20. На смежных сторонах прямоугольника a и b случайным образом выбрано по одной точке, положение которых равновозможно в любой точке каждой из сторон. Найти математическое ожидание расстояния между этими точками.

19.21. Найти математическое ожидание расстояния между двумя точками, выбранными на противоположных сторонах прямоугольника, если положение каждой из них равновозможно в любой точке каждой из сторон.

19.22. Получить формулы для математического ожидания и дисперсии числа появлений события при n независимых опытах, если вероятность его появления в k-м опыте равна p_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

19.23. При взвешивании на чашку весов положено 10 разновесов, точность изготовления каждого из которых и точность процесса взвешивания характеризуется средним квадратическим отклонением соответственно равным 0,01 и 0,02 г. Найти среднее квадратическое отклонение ошибки определения веса взвешиваемого тела.

19.24. Положение каждой из двух точек независимо и равновозможно внутри отрезка длиной l. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между ними.

19.25. Плотность вероятности для системы случайных величин (X, Y) задана формулой

$$f(x, y) = \frac{1}{300\pi\sqrt{0{,}75}}\, e^{-\frac{1}{1{,}5}\left[\frac{(x-5)^2}{100} + \frac{y(x-5)}{150} + \frac{y^2}{225}\right]}.$$

.

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = aX + bY$.

19.26. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x) = \frac{\rho}{E_x\sqrt{\pi}}\, e^{-\rho^2 \frac{x^2}{E_x^2}}, \qquad \rho = 0{,}4769\ldots$$

определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = |X|$.

19.27. Случайная величина X подчиняется закону Пуассона. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \cos bX$.

19.28. Дальность до маяка определяется как среднее арифметическое из трех измерений. Связь между ошибками измерения зависит от темпа измерений и характеризуется следующими значениями коэффициентов корреляции:

а) при темпе 3 сек $r_{12} = r_{23} = 0{,}9$, $r_{13} = 0{,}7$;

б) при темпе 5 сек $r_{12} = r_{23} = 0{,}7$, $r_{13} = 0{,}4$;

в) при темпе измерения 12 сек $r_{ij} = 0$, $j \neq i$.

Определить значения дисперсии среднего арифметического результата при измерениях с различным темпом, если ошибки отдельного измерения характеризуются дисперсией, равной 30 м^2.

19.29. Случайная величина X подчиняется закону распределения Максвелла, плотность вероятности которого

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{a^3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Плотность вероятности случайной величины Y задана формулой (закон распределения Рэлея)

$$f(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2}ye^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}, & \text{при } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X - Y$, если случайные величины X и Y независимы.

19.30. Случайная точка на плоскости имеет прямоугольные координаты (X, Y), причем $\overline{x} = 10$, $\overline{y} = -10$, $\sigma_x = 100$, $\sigma_y = 20$, $k_{xy} = 0$. Определить математическое ожидание и дисперсию расстояния Z от начала координат до проекции точки на ось Oz, образующую с осью Ox угол $\alpha = 30°$.

19.31. Определить коэффициент корреляции для случайных величин X и Y, если X — центрированная нормальная случайная величина, а $Y = X^n$, где n — целое положительное число.

19.32. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = X(Y - \overline{y})$, если плотность вероятности системы (X, Y) задана формулой

$$f(x,y) = \frac{x^2}{\sigma^3 \Delta \sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2\Delta^2}\left[(y-\overline{y})^2+\Delta^2\right]}.$$

19.33. Колесу, ось которого горизонтальна, придается вращение, которое затухает вследствие трения; фиксированный радиус a, останавливаясь, образует с горизонтом случайный угол Φ, который равномерно распределен в пределах от 0 до 360°. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния конца радиуса a от горизонтального диаметра.

19.34. Материальная точка под действием центральной силы описывает эллиптическую траекторию. Известны большая полуось a эллипса и его эксцентриситет e. Предполагая, что с одинаковой вероятностью возможно наблюдение за движущейся точкой в любой момент времени, определить математическое ожидание и дисперсию дальности в момент наблюдения, если наблюдатель находится в притягивающем центре, расположенном в одном из фокусов эллипса, а дальность R до точки определяется формулой $R = \frac{a(1-e^2)}{1-e\cos u}$, где u — угол, составленный радиусом-вектором R с большой осью эллипса a. (При движении в центральном поле секторная скорость $R^2 \frac{du}{dt} = \text{const}$.)

19.35. Составляющая скорости V_x прямолинейно и равномерно движущегося объекта определяется по значениям X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ его прямоугольной координаты, измеренным через равные промежутки времени τ, по формуле

$$V_x = \frac{12\sum_{j=1}^{n} jX_j - 6(n+1)\sum_{j=1}^{n} X_j}{n\tau(n^2-1)},$$

полученной методом наименьших квадратов. Систематические ошибки измерения координат отсутствуют, а случайные — характеризуются дисперсией $\mathrm{D}[X_j] = \sigma^2$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Найти $\mathrm{D}[V_x]$, если коэффициенты корреляции ошибок измерения определяются условиями $(i \neq j)$:

а) $r_{ij} = 0$;

б) $r_{ij} = r$;

в) $r_{ij} = \begin{cases} r, & \text{при } |i-j| = 1, \\ 0, & \text{при } |i-j| > 1; \end{cases}$

г) $r_{ij} = e^{-\alpha|i-j|\tau}$.

Определить, какие значения может принимать r для условий б) и в).

19.36. Для условий задачи 19.35 найти дисперсию в сглаженной координате X_c, соответствующей моменту последнего измерения, если

$$X_c = \frac{2(n+1)\sum_{j=1}^{n} X_j - 6\sum_{j=1}^{n} jX_j}{} + V_x n\tau.$$

19.37. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = \min(X, Y)$, если X, Y — независимые случайные величины, плотности вероятности которых заданы.

19.38. Электрическое напряжение в цепи измеряется тремя равноточными приборами, ошибки измерения которых независимы и подчиняются закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией σ^2. Цепь размыкается, когда два любых прибора покажут напряжение не менее заданного значения. Найти дисперсию ошибок напряжения в момент выключения цепи, если напряжение в цепи непрерывно возрастает.

19.39. Число дорожных происшествий за неделю есть случайная величина с математическим ожиданием $\overline{x}_1$ и дисперсией σ_1^2. Числа пострадавших при каждом происшествии — независимые случайные величины с математическим ожиданием $\overline{x}_2$ и дисперсией σ_2^2. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z — числа пострадавших за неделю.

19.40. Найти характеристическую функцию

$$Y = \sum_{m=1}^{n} X_m,$$

где $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ — система нормальных случайных величин, $\overline{x}_m = m$, $k_{ml} = n - |m - l|$.

19.41. Найти характеристическую функцию квадрата отклонения нормальной случайной величины от ее математического ожидания $Y = (X - \overline{x})^2$ и начальные моменты распределения Y.

19.42. Найти характеристическую функцию случайной величины $Y = \ln F(X)$, где X — случайная величина, а $F(x)$ — ее функция распределения. Определить начальные моменты распределения Y.

19.43. Найти характеристическую функцию случайной величины $Y = aF(X)+b$, где X — случайная величина, а $F(x)$ — ее функция распределения.

§ 20. ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Плотность вероятности $f_y(y)$ случайной величины Y, где $Y = \varphi(X)$ — монотонная функция, имеющая обратную функцию $X = \psi(Y)$, определяется формулой

$$f_y(y) = f_x[\psi(y)]|\psi'(y)|.$$

Если на интервале возможных значений X обратная функция $X = \psi(Y)$ неоднозначна, т. е. одному значению y соответствует несколько значений x: $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$, $\psi_3(y)$, $\ldots \psi_k(y)$ (рис. 6), то плотность вероятности случайной величины Y определяется формулой

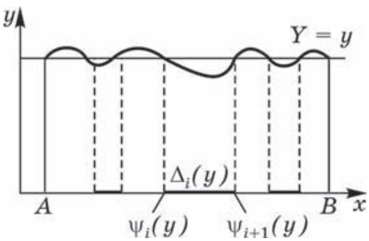

Рис. 6

$$f_y(y) = \sum_{j=1}^{k} f_x[\psi_j(y)] \left|\psi_j'(y)\right|,$$

где число слагаемых k может зависеть от y.

Для функции нескольких случайных аргументов удобнее исходить из формулы для функции распределения $F_y(y)$. Пусть, например, $Y = \varphi(X_1, X_2)$ и задана плотность вероятности $f_x(x_1, x_2)$ системы случайных величин (X_1, X_2). Если D_y — область на плоскости x_1Ox_2, для которой $Y < y$, то функция распределения

$$F_y(y) = \int\limits_{(D_y)}\int f_x(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

Если преобразование от случайных величин $(X_1, \ldots, X_n)$ к случайным величинам $(Y_1, \ldots, Y_n)$ взаимно однозначно, то

$$f_y(y_1, \ldots, y_n) = |J| f_x(x_1, \ldots, x_n),$$

где J — определитель Остроградского—Якоби

$$J = \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} \ldots \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}.$$

Задачи

20.1. Функция распределения случайной величины X есть $F_x(x)$. Найти функцию распределения случайной величины $Y = aX + b$.

20.2. Дана плотность вероятности $f(x)$ случайной величины X $(0 < x < \infty)$. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \ln X$.

20.3. Найти плотность вероятности случайной величины $Z = aX^2$, если X — нормальная случайная величина, $\overline{x} = 0$, $\mathrm{D}[X] = \sigma^2$, $a > 0$.

20.4. Определить плотность вероятности случайной величины $Y = |X|$, если X — нормальная случайная величина, у которой $\overline{x} = 0$, $\mathrm{D}[X] = \sigma^2$.

20.5. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(0, 1)$ и связана с Y функциональной зависимостью $\operatorname{tg} \frac{\pi Y}{2} = e^X$. Найти плотность вероятности случайной величины Y.

20.6. Найти плотность вероятности объема куба, ребро которого X — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $[0, a]$.

20.7. Через точку $(0, l)$ проведена прямая. Угол, образованный этой прямой с осью абсцисс равномерно распределен в интервале $[0, \pi]$. Найти плотность вероятности абсциссы точки пересечения этой прямой с осью Ox.

20.8. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $[-\frac{T}{2}; \frac{T}{2}]$. Определить плотность вероятности случайной величины $Y = a \sin \frac{2\pi}{T} X$.

20.9. Случайная величина X подчиняется закону распределения Коши

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найти плотность вероятности случайной величины Y, если: а) $Y = 1 - X^3$; б) $Y = aX^2$; в) $Y = \operatorname{arctg} X$; г) $Y = \frac{1}{X}$.

20.10. Определить плотность вероятности случайной величины $Y = X^n$, где n — целое положительное число, если плотность вероятности

$$f_x(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{a}{a^2 + x^2}\,.$$

20.11. Случайная величина X распределена в интервале $(0, \infty)$ с плотностью вероятности $f_x(x) = e^{-x}$. Определить плотность вероятности случайной величины Y, если: а) $Y^2 = X$, а знак Y равновероятен; б) $Y = +\sqrt{X}$.

20.12. Случайная величина X подчиняется закону распределения Пирсона

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1{,}5)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+1)}(1-x^2)^k, & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \arcsin X$.

20.13. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $[0, 1]$. Определить плотность вероятности случайной величины Y, если

а) $X = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^Y e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right]$;

б) $X = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\frac{Y-y}{\sigma_y}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\right]$.

20.14. Случайные величины X и Y связаны функциональной зависимостью $Y = F_x(X)$. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $[a, b]$, а $F_x(x)$ — ее функция распределения. Найти плотность вероятности случайной величины Y.

20.15. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $[0,1]$. Задана функция $f_t(t) \geqslant 0$, удовлетворяющая условию $\int_{-\infty}^{\infty} f_t(t)\,dt = 1$. Случайные величины X и Y связаны функциональной зависимостью $X = \int_{-\infty}^{Y} f_t(t)\,dt$. Доказать, что $f_t(y)$ есть плотность вероятности случайной величины Y.

20.16. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону нормального распределения

$$f(x,y) = \frac{1}{\sigma_x \sigma_y 2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}.$$

Какому закону распределения подчиняется случайная величина $Z = X - Y$?

20.17. Определить плотность вероятности случайной величины $Z = XY$, если:

а) задана плотность вероятности $f(x,y)$ системы случайных величин (X,Y);

б) X и Y — независимые случайные величины, плотности вероятности которых

$$f_x(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad (-\infty < 0 < \infty),$$

$$f_y(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}}, & \text{при } 0 \leqslant y < \infty, \\ 0, & \text{при } y < 0; \end{cases}$$

в) X и Y — независимые случайные величины с $\overline{x} = \overline{y} = 0$ и дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 соответственно;

г) X и Y — независимые случайные величины, плотности вероятности которых

$$f_x(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

$$f_y(y) = \begin{cases} ye^{-\frac{y^2}{2}}, & \text{при } 0 \leqslant y < \infty, \\ 0, & \text{при } y < 0; \end{cases}$$

д) плотность вероятности для системы двух случайных величин задана формулой

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{x^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right]}.$$

20.18. Найти плотность вероятности случайной величины $Z=\frac{X}{Y}$, если:

а) задана плотность вероятности $f(x,y)$ системы случайных величин (X,Y);

б) X и Y — независимые случайные величины, подчиняющиеся закону распределения Рэлея:

$$f_x(x)=\begin{cases}\frac{x}{a^2}\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, & \text{при } x\geqslant 0,\\ 0, & \text{при } x<0;\end{cases}$$

$$f_y(y)=\begin{cases}\frac{y}{a^2}\,e^{-\frac{y^2}{2a^2}}, & \text{при } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{при } y<0;\end{cases}$$

в) X и Y — независимые случайные величины, плотности вероятности которых

$$f_x(x)=\frac{1}{\sqrt{\frac{2\pi}{n}}}\,e^{-\frac{nx^2}{2}}\qquad(-\infty<x<\infty)$$

$$f_y(y)=\begin{cases}2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{y^{n-1}e^{-\frac{ny^2}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, & \text{при } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{при } y<0\end{cases}\qquad n=1,2,\ldots;$$

г) система случайных величин (X,Y) подчиняется нормальному закону распределения

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2}-2r\frac{xy}{\sigma_x\sigma_y}+\frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)};$$

д) X и Y — независимые случайные величины, подчиняющиеся показательному закону распределения

$$f_x(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & \text{при } x>0,\\ 0, & \text{при } x\leqslant 0;\end{cases}\qquad(\lambda>0)$$

$$f_y(y)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda y}, & \text{при } y>0,\\ 0, & \text{при } y\leqslant 0;\end{cases}\qquad(\lambda>0)$$

е) X и Y независимы и равномерно распределены в интервале $[0,1]$.

20.19. Найти плотность вероятности модуля радиуса-вектора $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$, если:

а) плотность вероятности $f(x, y)$ для системы случайных величин (X, Y) задана;

б) случайные величины X и Y независимы и подчиняются одному и тому же закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией σ^2;

в) плотность вероятности для системы случайных величин (x, y) задана формулой

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi a^2} & \text{при } x^2 + y^2 \leqslant a^2, \\ 0, & \text{при } x^2 + y^2 > a^2; \end{cases}$$

г) X и Y — независимые нормальные случайные величины, плотность вероятности которых

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\, e^{-\frac{(x-h)^2 + y^2}{2\sigma^2}};$$

д) случайные величины X и Y независимы и подчиняются закону нормального распределения с $\overline{x} = \overline{y} = 0$ и дисперсиями σ_x^2 и σ_y^2 соответственно.

20.20. Система случайных величин (X, Y) имеет плотность вероятности

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\left(\frac{x-\overline{x}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\overline{y}}{\sigma_y}\right)^2 - 2r\frac{(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sigma_x\sigma_y}\right]}.$$

Найти линейное преобразование случайных величин X, Y к независимым случайным величинам U и V. Определить средние квадратические отклонения новых случайных величин.

20.21. Корни X_1, X_2 квадратного уравнения $x^2 + \alpha x + \beta = 0$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[0, 1]$. Определить плотности вероятностей для коэффициентов α и β.

20.22. Прямоугольные координаты (X, Y) случайной точки — зависимые нормальные случайные величины; $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x, σ_y, r_{xy} даны. Найти плотность вероятности координат (R, Φ) этой точки, если

$$\frac{X - \overline{x}}{\sigma_x} = R\cos\Phi, \qquad \frac{Y - \overline{y}}{\sigma_y} = R\sin\Phi.$$

Каким законам распределения подчиняются R и Φ, если $r_{xy} = 0$?

20.23. Пусть $S = S_0 + V_0 t + \frac{At^2}{2}$, где S_0, V_0 и A — нормальные случайные величины, математические ожидания и корреляционная матрица которых известны. Определить плотность вероятности $f(s/t)$.

20.24. Найти плотность вероятности неотрицательного квадратного корня из среднего арифметического квадратов нормальных центрированных случайных величин

$$Y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j^2},$$

если дисперсии $\mathrm{D}[X_j] = \sigma^2$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

20.25. Прямоугольные координаты случайной точки $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ имеют плотность вероятности

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2}.$$

Найти плотность вероятности для n-мерных сферических координат этой точки R, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{n-1}$, если:

$$X_1 = R\sin\Phi_1,$$

$$X_2 = R\sin\Phi_2\cos\Phi_1,$$

$$X_3 = R\sin\Phi_3\cos\Phi_1\cos\Phi_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_{n-1} = R\sin\Phi_{n-1}\cos\Phi_1\cos\Phi_2\ldots,\cos\Phi_{n-2},$$

$$X_n = R\cos\Phi_1\cos\Phi_2\ldots,\cos\Phi_{n-1}.$$

20.26. Две системы $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ случайных величин связаны линейными зависимостями

$$X_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k_j} Y_j \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

причем $\Delta = |a_{l_j}| \neq 0$. Определить плотность вероятности $f_y(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, если плотность вероятности $f_x(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ задана.

20.27. Найти закон распределения системы случайных величин (R, θ), где $R = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ — радиус-вектор случайной точки в пространстве, а $\theta = \arcsin \frac{Y}{R}$ — широтный угол, если плотность вероятности прямоугольных координат (X, Y, Z) равна $f(x, y, z)$.

20.28. Найти плотность вероятности случайной величины $Y = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и случайной величины $Z = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, если X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — независимые случайные величины, плотность вероятности которых задана.

20.29. Напряжение в электрической цепи измеряется n равноточными приборами, ошибки измерения которых U_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ независимы и подчиняются закону нормального распределения с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной σ^2. Цепь автоматически выключается, после того как l $(l \leqslant n)$ приборов покажут напряжение не менее заданного значения. Найти плотность вероятности ошибок определения напряжения в момент выключения цепи.

20.30. Определить функцию распределения случайной величины Y, если она связана с нормальной случайной величиной $X(\overline{x}, \sigma_x)$ нелинейным соотношением $Y = \varphi(X)$, где

а) $\varphi(x) = \frac{x}{|x|}$;

$$\text{б) } \psi(x) = \begin{cases} ka, & a < x, \\ kx, & -a \leqslant x \leqslant a, \\ -ka, & x < -a; \end{cases}$$

$$\text{в) } \psi(x) = \begin{cases} k(b-a), & b < x, \\ k(x-a), & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & -a < x < a, \\ k(x+a), & -b \leqslant x \leqslant -a, \\ -k(b-a), & x < -b. \end{cases}$$

20.31. Коэффициенты уравнения $\lambda^2 + A_1\lambda + A_2 = 0$ — случайные величины, плотность вероятности которых $f(a_1, a_2)$ известна. Определить вероятность P того, что корни уравнения $\lambda_j = X_j + iY_j$ не выйдут за границы области S комплексной переменной $(x + iy)$.

20.32. Найти плотность вероятности модуля радиуса-вектора $R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$, если X, Y, Z независимы и нормально распределены: $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z} = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma$.

20.33. Найти плотность вероятности случайной величины $Z = X \sin Y$, если X имеет нормальное распределение с параметрами $\overline{x} = 0$ и σ, а Y равномерно распределена в интервале $[-\pi, \pi]$. Случайные величины X и Y независимы.

20.34. Дана система зависимых нормальных случайных величин $(X_1, \ldots, X_n)$.

Доказать, что случайная величина $Y = \sum_{j=1}^{n} a_j X_j + b$ также подчиняется нормальному закону распределения.

§ 21. КОМПОЗИЦИЯ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Нахождение закона распределения суммы независимых случайных величин по известным законам распределения слагаемых называется композицией законов распределения. Если X и Y — независимые дискретные случайные величины, то ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$ определяется формулой

$$\mathrm{P}(Z = z_i) = \sum_j \mathrm{P}(X = x_j)\mathrm{P}(Y = z_i - x_j) = \\ = \sum_k \mathrm{P}(Y = y_k)\mathrm{P}(X = z_i - y_k),$$

где суммирование ведется по тем значениям случайной величины X, для которых $z_i - x_j$ являются возможными значениями случайной величины Y (или соответственно, для тех значений случайной величины Y, для которых $z_i - y_k$ — возможные значения случайной величины X).

Если X и Y — непрерывные независимые случайные величины, то плотность вероятности для случайной величины $Z = X + Y$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_x(x) f_y(z - x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(y) f_x(z - y)\, dy.$$

Закон распределения суммы независимых случайных величин $Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ определяется путем последовательного применения формулы композиции для двух случайных величин или с помощью характеристической функции по формуле

$$f_y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iuy} \left\{ \prod_{j=1}^{n} E_{x_j}(u) \right\} du,$$

где

$$E_{x_j}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f_{x_j}(x)\, dx.$$

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — целочисленные независимые случайные величины, производящие функции которых $G_j(u_j)$, то случайная величина Y имеет производящую функцию

$$G_y(u) = G_{x_1}(u) \cdot G_{x_2}(u) \cdot \ldots \cdot G_{x_n}(u).$$

Тогда

$$\mathrm{P}(Y = k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{dU^k}\, G_y(u) \right]_{u=0}.$$

Задачи

21.1. Определить плотность вероятности суммы двух независимых величин, каждая из которых равномерно распределена в интервале (a, b).

21.2. Найти композицию двух законов равномерного распределения с математическими ожиданиями $\overline{x}$, $\overline{y}$ и параметрами a и b $(b > a)$, соответственно. (Параметром закона равномерного распределения называется половина интервала возможных значений случайной величины.)

21.3. Случайная величина X подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $\overline{x}$ и σ_x, а Y — закону равномерного распределения с параметром $\frac{b-a}{2}$ и $\overline{y} = \frac{a+b}{2}$.

Найти плотность вероятности случайной величины $Z = X + Y$, если X и Y независимы.

21.4. Найти плотность вероятности суммы трех независимых случайных величин, каждая из которых равномерно распределена в интервале $[a, b]$.

21.5. Найти композицию нормального закона (математическое ожидание $\overline{x}$, срединное отклонение E) и закона равномерного распределения, заданного в интервале $[\overline{x}-l, \overline{x}+l]$. Определить относительную ошибку, возникающую от замены суммарного закона нормальным законом, имеющим то же математическое ожидание и ту же дисперсию. (Расчет произвести для $\overline{x}=0,\ l=E,\ l=2E,\ l=3E,\ l=4E$.)

21.6. Найти плотность вероятности случайной величины $Z=X+Y$, если случайные величины X и Y независимы и подчиняются закону Коши ($-\infty<x<\infty;\ -\infty y<\infty$):

$$f_x(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{h}{1+h^2(x-a)^2}\,,\quad f_y(y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{k}{1+k^2(y-b)^2}\,.$$

21.7. Найти плотность вероятности суммы двух независимых случайных величин X и Y, подчиняющихся закону распределения гиперболического секанса ($-\infty<x<\infty$; $-\infty<y<\infty$):

$$f_x(x)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}x}\,,\quad f_y(y)=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}y}\,.$$

21.8. Найти плотность вероятности случайной величины $Z=X+Y$, если X и Y — независимые случайные величины, плотности вероятности которых заданы формулами

$$f_x(x)=\frac{1}{2}\,e^{-\frac{x}{2}}\quad(0<x<\infty),$$

$$f_y(y)=\frac{1}{3}\,e^{-\frac{y}{3}}\quad(0<y<\infty).$$

21.9. Найти плотность вероятности расстояния между случайными точками $A_1(X_1,Y_1)$ и $A_2(X_2,Y_2)$, если системы случайных величин (X_1,Y_1) и (X_2,Y_2) независимы и нормально распределены. Единичные эллипсы распределения точек A_1 и A_2 имеют главные полудиаметры (a_1,b_1) и (a_2,b_2). Угол между полудиаметрами a_1 и a_2 равен α. Центры единичных эллипсов совпадают.

21.10. Пусть X_j $(j=1,2,\ldots,n)$ — нормально распределенные независимые случайные величины, $\overline{x}_j=0$ и $\mathrm{D}[X_j]=1$.

Доказать, что для случайной величины $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j^2$ плотность вероятности определяется формулой (χ^2-распределение)

$$f_y(y) = \frac{y^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, e^{-\frac{y}{2}} \qquad (0 \leqslant y < \infty).$$

21.11. Прибор дает при измерении систематическую ошибку a и случайную ошибку, подчиненную нормальному закону распределения с дисперсией равной σ^2. Доказать, что при $\sigma \geqslant d$ вероятность $p(a)$ получения ошибки в пределах заданного допуска $\pm d$ приближенно определяется формулой

$$p(a) \approx \frac{\sqrt{2}\,d}{\sigma_x\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{\sigma_x}\right)^2}, \quad \text{где} \quad \sigma_x = \sqrt{\sigma^2 + \frac{d^2}{3}}.$$

21.12. Двое независимо один от другого стреляют в тире каждый по своей мишени до первого попадания. Определить математическое ожидание и дисперсию общего числа промахов и найти функцию распределения общего числа промахов, если вероятность попадания в мишень при каждом выстреле для первого стрелка равна p_1, а для второго — p_2.

21.13. Какой запас прочности должен иметь образец, чтобы вероятность того, что он выдержит нагрузку, была не менее 98%? Ошибки в определении заданной нагрузки и ошибки в определении предельной нагрузки подчиняются законам нормального распределения со средними квадратическими отклонениями $\sigma_1 = 10\%$ от $\overline{q}$ и $\sigma_2 = 5\%$ от $\overline{q}$, где $\overline{q}$ — математическое ожидание предельной нагрузки.

21.14. Для навигационного обслуживания судов, проходящих через пролив шириной L, на каждом берегу пролива установлено по одному радиомаяку. Наибольшие дальности, на которых сигналы каждого маяка могут быть приняты на судне, независимые случайные величины, имеющие закон нормального распределения с параметрами $\overline{x}$ и σ. Удаление курса судна от берегов пролива равновозможно и $2\overline{x} < L$.

Определить: а) вероятность обслужить судно двумя радиомаяками; б) вероятность обслужить судно хотя бы одним радиомаяком.

21.15. Наблюдатель A движется навстречу наблюдателю B. Дальность, на которой наблюдатель A впервые обнаруживает наблюдателя B — нормальная случайная величина с параметрами $\overline{x}_A$ и σ_A. Аналогичная дальность для наблюдателя B — нормальная случайная величина с параметрами $\overline{x}_B$ и σ_B. Найти вероятность наблюдателю A обнаружить B первым, если указанные случайные величины независимы и в момент начала сближения расстояние между наблюдателями исключает возможность взаимного обнаружения.

21.16. Найти композицию m экспоненциальных законов распределения с одинаковым параметром λ.

21.17. X и Y — независимые случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения i и j с вероятностями $\mathrm{P}(X = i) = (1-a)a^i$ и $\mathrm{P}(Y = j) = (1-b)b^j$, где a и b — положительные числа, меньшие единицы. Найти функцию распределения случайной величины $Z = X + Y$.

21.18. X и Y — независимые случайные величины; X принимает три возможных значения 0, 1, 3, с вероятностями 1/2, 3/8, 1/8, а Y — два возможных значения 0 и 1 с вероятностями 1/3, 2/3. Определить ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$.

21.19. X, Y — независимые случайные величины, каждая из которых имеет распределение Пуассона:

$$\mathrm{P}(X = m) = \frac{a^m}{m!}\, e^{-a}, \qquad \mathrm{P}(Y = m) = \frac{a^m}{m!}\, e^{-a}.$$

Найти ряд распределения случайной величины $Z = X + Y$.

21.20. X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ — независимые случайные величины, каждая из которых может принимать только два значения: единицу с вероятностью p и нуль с вероятностью $q = 1 - p$. Найти ряд распределения случайной величины $Y = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

21.21. X и Y — независимые дискретные случайные величины, принимающие целые положительные значения k от 1 до ∞ с вероятностями $(1/2)^k$. Найти функцию распределения случайной величины $Z = X + Y$.

21.22. Определить плотность вероятности случайной величины X, если

$$X = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^2,$$

где ξ_j — независимые нормальные случайные величины, $\mathrm{D}[\xi_j] = 1$, $\overline{\xi}_j = \overline{\xi} \neq 0$.

21.23. Смешаны две группы однотипных деталей, содержание n_1 и n_2 деталей каждая. Число бракованных деталей в каждой группе (соответственно X и Y) имеет биномиальное распределение с параметром p. Найти ряд распределения случайной величины.

21.24. Найти характеристическую функцию случайной величины

$$Z = \sum_{k=1}^{n} \frac{X_k}{2^k},$$

если X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — независимые случайные величины, каждая из которых может принимать значения $+1$ и -1 с вероятностями, равными $1/2$. Доказать, что при $n \to \infty$ распределение случайной величины Z стремится к равномерному распределению в интервале $[-1, 1]$.

§ 22. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Любая непрерывная дифференцируемая функция, производная которой не обращается в данной точке в бесконечность или нуль, при достаточно малых пределах изменения аргументов может быть приближенно заменена линейной путем разложения ее в ряд Тейлора с удержанием только линейных членов. Если вероятность того, что аргументы функции примут значения, лежащие вне области, в которой функцию можно считать линейной, мала, то функцию случайных аргументов можно линеаризировать в окрестности точки, соответствующей математическим ожиданиям ее аргументов. Приближенное значение математического ожидания и дисперсии при этом определяется формулами:

а) для функции одного случайного аргумента $Y = \varphi(X)$:

$$\overline{y} \approx \varphi(\overline{x}), \quad \mathrm{D}[Y] \approx [\varphi'(\overline{x})]^2 \mathrm{D}[X];$$

б) для функции $Y = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ нескольких случайных аргументов:

$$\overline{y} \approx \varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n),$$

$$\mathrm{D}[Y] \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}_1}\right)^2 \mathrm{D}[X_i] + 2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}_i}\right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}_j}\right) k_{ij},$$

где k_{ij} — корреляционный момент для случайных величин X_i и X_j, а через $\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}_i}$ условно обозначены производные, вычисленные для значений аргументов, равных их математическим ожиданиям.

Для уточнения результатов, полученных методом линеаризации, в разложении функции сохраняют последующие члены. Если удержаны квадратичные члены разложения функции в ряд, то математическое ожидание и дисперсия функции приближенно определяются по формулам:

а) для функции одного случайного аргумента $Y = \varphi(X)$:

$$\overline{y} \approx \varphi(\overline{x}) + \frac{1}{2}\varphi''(\overline{x})\mathrm{D}[X];$$

$$\mathrm{D}[Y] \approx [\varphi'(\overline{x})]^2 D[X] + \frac{1}{4}[\varphi''(\overline{x})]^2 \Big\{\mu_4[X] - D^2[X]\Big\} + \\ + \varphi'(\overline{x})\varphi''(\overline{x})\mu_3[X];$$

б) для функции нескольких случайных аргументов $Y = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

$$\overline{y} \approx \varphi(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}_i} \mathrm{D}[X_i] + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}_i \, \partial \overline{x}_j} k_{ij},$$

когда случайные аргументы взаимно независимы, то дисперсия определяется формулой

$$\mathrm{D}[Y] \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}_i}\right)^2 \mathrm{D}[X_i] + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}_i^2}\right) \Big\{\mu_4[X_i] - D^2[X_i]\Big\} + \\ + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}_i \, \partial \overline{x}_j}\right)^2 \mathrm{D}[X_i]\mathrm{D}[X_j] + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{x}_i}\right) \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{x}_i^2}\right) \mu_3[X_i].$$

Когда Y можно рассматривать как координату точки на плоскости (в пространстве), линеаризации можно придать следующий геометрический смысл: изменяя поочередно каждый из аргументов функции на величину среднего квадратического отклонения σ_j (знак изменения не играет роли), находим величину и направление смещения точки на плоскости (в пространстве) — $\overset{\leftrightarrow}{\Delta}_j$.

Приближенное значение дисперсии координаты Y при независимых между собой X_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определяется формулой

$$\sigma_y^2 \approx \sum_{j=1}^{n} \Delta_{jy}^2,$$

где Δ_{jy} — проекция $\overset{\leftrightarrow}{\Delta}_j$ на направление оси y.

Метод линеаризации обычно применим и в тех случаях, когда моменты функции при заданном законе распределения аргументов не существуют. Например, если $Y = \frac{1}{X}$, где X — нормальная случайная величина с заданным математическим ожиданием $\overline{x}$ и дисперсией σ_x^2, то $\mathrm{M}[Y]$ не существует. Однако применение метода линеаризации к данному случаю допустимо, поскольку эквивалентно замене закона нормального распределения (практически никогда точно не реализуемого на практике) законом распределения, для которого большие отклонения случайной величины от ее математического ожидания невозможны (а не маловероятны, как это имеет место для нормального закона распределения). Подобная замена, широко применяемая во многих приложениях (например, в теории ошибок), не является добавочным приближением и обычно объективнее отражает существо задачи, чем предположение о наличии нормального закона распределения.

Задачи

22.1. Количество тепла Q в калориях, выделяемое в проводнике с сопротивлением R при прохождении тока J в течение времени T, определяется формулой $Q = 0{,}24J^2RT$.

Ошибки измерения величин J, R, T являются независимыми случайными величинами с математическими ожиданиями $\overline{i} = 10$ A, $\overline{r} = 30$ Ом, $\overline{t} = 10$ мин и средними квадратическими отклонениями $\sigma_i = 0{,}1$ A, $\sigma_r = 0{,}2$ Ом, $\sigma_t = 0{,}5$ сек. Найти приближенное значение среднего квадратического отклонения случайной величины Q.

22.2. Частота основного тона струны определяется формулой

$$\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{ML}},$$

где P — сила натяжения;

M — масса струны;

L — длина струны.

Известны математические ожидания $\overline{p}$, $\overline{m}$, $\overline{l}$ и средние квадратические отклонения σ_p, σ_m и σ_l. Определить методом линеаризации дисперсию частоты основного тона струны из-за разброса силы натяжения, массы и длины струны, если соответствующие коэффициенты корреляции равны r_{pl}, r_{pm}, r_{ml}, а $\overline{p} \gg \sigma_p$, $\overline{m} \gg \sigma_m$, $\overline{l} \gg \sigma_l$.

22.3. Сопротивление участка электрической цепи определяется формулой

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2},$$

где R — омическое сопротивление;

L — индуктивность проводника тока;

C — его емкость;

Ω — частота тока.

Считая допустимым применение метода линеаризации, определить среднюю квадратическую ошибку вычисления величины сопротивления из-за ошибок измерения R, L, C и Ω, если заданы $\overline{r}$, $\overline{l}$, $\overline{c}$, $\overline{\omega}$ и средние квадратические отклонения σ_r, σ_l, σ_c и σ_ω. Ошибки измерений независимы.

22.4. При параллельном соединении гальванических элементов сила тока в цепи определяется формулой

$$J = \frac{E}{R + \frac{W}{n}},$$

где E — электродвижущая сила элемента;

W — его внутреннее сопротивление;

n — число элементов;

R — сопротивление внешней части цепи.

Пользуясь методом линеаризации, определить математическое ожидание и дисперсию силы тока, если случайные величины E, R, W независимы, $\overline{e}$, $\overline{r}$, $\overline{w}$, σ_e, σ_r, σ_w заданы и $\overline{e} \gg \sigma_e$, $\overline{r} \gg \sigma_r$, $\overline{w} \gg \sigma_w$.

22.5. Материальная точка движется в однородном постоянном поле тяготения в пустоте. Если начальная скорость точки V, а начальный угол наклона вектора скорости к горизонту Θ, то координаты точки X и Y через T сек движения определяются формулами

$$X = VT\cos\Theta, \qquad Y = VT\sin\Theta - \frac{gT^2}{2},$$

где g — ускорение силы тяжести.

Используя метод линеаризации, найти σ_x, σ_y и k_{xy}, если $\overline{v} = 800$ м/сек, $\sigma_v = 0{,}8$ м/сек, $\overline{t} = 40$ сек, $\sigma_t = 0{,}1$ сек, $\overline{\Theta} = 45^\circ$, $\sigma_\Theta = 4'$. Случайные величины V, T и Θ независимы.

22.6. Найти приближенное значение среднего квадратического отклонения ошибок определения проекции V_1 скорости судна на заданное направление вследствие ошибок измерения его скорости V и курсового угла q, если $V_1 = -V\cos q$, $\sigma_v = 1$ м/сек, $\sigma_q = 1^\circ$, а математические ожидания $\overline{v}$ и $\overline{q}$ соответственно равны 10 м/сек и 60°. Случайные величины V и q независимы.

22.7. Применим ли в условиях предыдущей задачи метод линеаризации, если ошибка расчетных формул не должна превосходить 0,2 м/сек?

22.8. Методом линеаризации найти приближенное значение средних квадратических отклонений прямоугольных координат случайной точки

$$X = H\operatorname{ctg}\varepsilon\cos\beta,$$

$$Y = H\operatorname{ctg}\varepsilon\sin\beta,$$

$$Z = H,$$

если случайные величины H, ε и β независимы, а математические ожидания и средние квадратические отклонения их соответственно равны: $\overline{h} = 6200$ м, $\overline{\varepsilon} = 45^\circ$, $\overline{\beta} = 30^\circ$, $\sigma_h = 25$ м, $\sigma_\beta = \sigma_\varepsilon = 0{,}001$ рад.

22.9. Переход от сферических координат к декартовым производится по формулам:

$$X = R\sin\Theta\cos\Phi,$$
$$Y = R\sin\Theta\sin\Phi,$$
$$Z = R\cos\Theta.$$

Ошибки в определении Θ, R и Φ независимы со средними квадратическими отклонениями $\sigma_r = 10$ м, $\sigma_\theta = \sigma_\Phi = 0{,}001$ рад. Методом линеаризации найти приближенное значение средних квадратических ошибок прямоугольных координат, если $\overline{\theta} = \overline{\varphi} = 45°$, $\overline{r} = 10\ 000$ м.

22.10. Приближенное выражение для скорости ракеты в момент окончания работы двигателя определяется формулой К. Э. Циолковского

$$V = U\ln\frac{q+\Omega}{q},$$

где U — эффективная скорость истечения газов;

q — вес ракеты без топлива;

Ω — вес топлива.

Рассеивание веса топлива характеризуется средним квадратическим отклонением σ_ω. Определить методом линеаризации приближенное значение среднего квадратического отклонения скорости из-за разброса веса топлива, если математическое ожидание $\mathrm{M}[\Omega] = \overline{\omega}$.

22.11. Высота горной вершины H определяется путем измерения дальности D и угла ε:

$$H = D\sin\varepsilon.$$

Используя метод линеаризации, найти приближенное значение среднего квадратического отклонения ошибок определения высоты, если $\sigma_d = 80$ м, $\sigma_\varepsilon = 0{,}001$, а математические ожидания соответственно равны $\overline{d} = 12\ 300$ м и $\overline{\varepsilon} = 31°,2$. Случайные величины D и ε независимы.

22.12. Путем разложения в ряд Тейлора функции $Z = \sin XY$ с удержанием линейных и квадратичных членов найти приближенное значение среднего квадратического отклонения случайной величины Z, если $\overline{x} = \overline{y} = 0$, $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}001$, а X и Y — независимы.

22.13. Высота горной вершины определяется по формуле $H = D\sin\varepsilon$. Плотность вероятности ошибок в определении дальности D и угла ε задана формулой

$$f(d,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi\sigma_d\sigma_\varepsilon\sqrt{0{,}91}}\exp\left\{-\frac{1}{1{,}82}\left[\left(\frac{d-\overline{d}}{\sigma_d}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon-\overline{\varepsilon}}{\sigma_\varepsilon}\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + 0{,}6\frac{(d-\overline{d})(\varepsilon-\overline{\varepsilon})}{\sigma_d\sigma_\varepsilon}\right]\right\},$$

где $\sigma_d = 40$ м, $\sigma_\varepsilon = 0{,}001$ рад, $\overline{d} = 10\ 000$ м, $\overline{\varepsilon} = 30°$. Методом линеаризации найти приближенное значение среднего квадратического отклонения ошибок определения высоты.

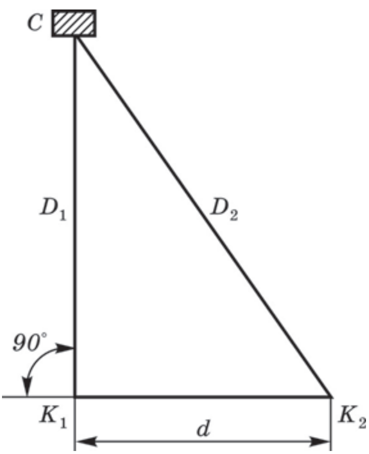

Рис. 7

22.14. Дальность D_1 (рис. 7) определяется радиолокационной станцией, ошибки измерения для которой заданы средним квадратическим отклонением $\sigma_p = 20$ м. Дальность D_2 может быть определена либо дальномером, средняя квадратическая ошибка которого $\sigma_{d_2} = 40$ м, либо рассчитана по формуле $D_2 = \sqrt{D_1^2 + d^2}$.

Методом линеаризации установить, какой способ нахождения дальности K_2C является более точным, если ошибки измерения расстояния между K_1 и K_2 характеризуются $\sigma_d = 50$ м, $\mathrm{M}[d] = 2{,}5$ км, $\mathrm{M}[D_1] = 10$ км.

22.15. Учитывая три первых члена разложения функции $Y = \varphi(X)$ в ряд Тейлора, определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины Y, если X подчиняется нормальному закону распределения.

22.16. Площадь треугольника определяется формулой

$$S = \frac{ab}{2}\sin\gamma \equiv \varphi(\gamma).$$

Учитывая члены разложения в ряд Тейлора функции $S = \varphi(\gamma)$ до γ^3 включительно, найти математическое ожидание и дисперсию площади треугольника, если случайная величина γ распределена нормально, причем $\overline{\gamma}$ и $\mathrm{D}[\gamma]$ заданы.

22.17. В треугольнике ABC (рис. 8) сторона a и противолежащий ей угол α — случайные величины, которые можно считать некоррелированными. Определить методом линеаризации приближенное значение математического ожидания угла X и его среднего квадратического отклонения, если сторона b известна, а математические ожидания и дисперсии случайных величин a и α заданы.

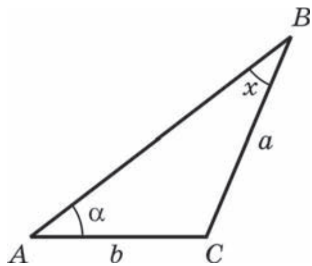

Рис. 8

22.18. Случайная величина X подчиняется закону нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x+5)^2}{2}}.$$

Используя метод линеаризации, найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y = \frac{1}{X}$, учитывая первые два и первые три члена разложения заданной функции в ряд Тейлора.

22.19. Радиус шара можно считать нормальной случайной величиной с математическим ожиданием $\overline{r}$ и дисперсией γ_r ($\overline{r} \gg \sigma_r$). Определить математическое ожидание и дисперсию объема шара по точным формулам. Сравнить полученные результаты с результатами, получаемыми методом линеаризации.

22.20. Для определения объема конуса измерены:

а) диаметр основания и высота;

б) диаметр основания и длина образующей.

В каком из этих двух случаев дисперсия ошибки определения объема конуса меньше, если математическое ожидание высоты конуса $\overline{h} = 8$ дм, диаметра основания $\overline{d} = 12$ дм, длины образующей $l = 10$ дм, а $\sigma_h = \sigma_d = \sigma_l = 0{,}1$?

22.21. При взвешивании вместо гирь использована дробь, диаметр которой в среднем равен 2 мм. Методом линеаризации определить ошибку взвешивания, если среднее квадратическое отклонение диаметра дроби 0,04 мм, удельный вес металла, из которого изготовлена дробь, равен 11,2 г/см^3. При взвешивании использовано 50 дробинок.

22.22. Ускорение силы тяжести вычисляется по формуле

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2},$$

где L — длина физического маятника; а T — его период. Методом линеаризации найти среднее квадратическое отклонение ошибок вычисления g, если измерение длины маятника с $\sigma_l = 5$ мм дало $L = 5$ м, а измеренный период колебаний оказался равным 4,5 сек. Период колебаний маятника найден по длительности времени $n = 10$ полных размахов. Точность измерения времени и определения момента прохождения маятника через положение равновесия характеризуется средними квадратическими отклонениями соответственно $\sigma_t = 0{,}1$ сек и $\sigma_{t_1} = 0{,}5\%$.

22.23. Используя метод линеаризации, определить приближенное значение дисперсии случайной величины $Z = \sqrt{kX^2 + Y^2}$, если $X = \sin V$, $Y = \cos V$, случайная величина V равномерно распределена в интервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, а k — известная постоянная.

22.24. Для нахождения длины стороны a треугольника ABC (рис. 9) измерены длины сторон b, c и угол α. Найти среднее квадратическое отклонение ошибок определения расстояния между точками B и C, если ошибки измерения величин a, b, α независимы и известны: $\overline{b} = 6000$ м, $\overline{c} = 9000$ м, $\overline{\alpha} = 120^\circ$, $\sigma_c = \sigma_b = 100$ м, $\sigma_\alpha = 4^\circ$.

Задачу решить, применяя аналитический и геометрический методы линеаризации.

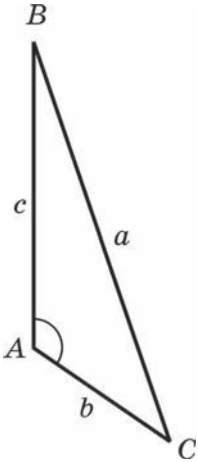

Рис. 9

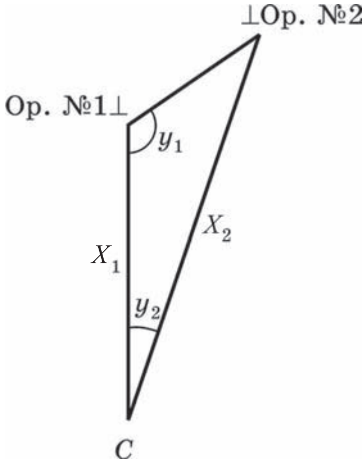

Рис. 10

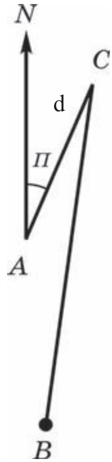

Рис. 11

22.25. Из точки C (рис. 10), географические координаты которой неизвестны, измерен угол между направлениями на ориентир № 1 и 2, а также азимут на ориентир № 1. Географические координаты ориентиров известны точно. Случайные ошибки измерений независимы. Методом геометрической линеаризации найти среднее квадратическое отклонение ошибок определения величин X_1 и X_2, если $b = 4$ км, $\overline{y}_2 = 30^\circ$, $\overline{y}_1 = 120^\circ$, $\sigma_{y_1} = 3',6$, $\sigma_{y_2} = 1',0$.

22.26. Геометрические координаты точек A и B (рис. 11) известны с ошибками, плотность вероятности которых

$$f(x,y) = \frac{1}{1250\pi}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{1250}}.$$

Из точки A измерены азимут на точку C и дальность до нее. Ошибки измерения независимы. Методом геометрической линеаризации найти среднее квадратическое отклонение ошибок определения расстояния между точками B и C, если $\overline{\Pi} = 30^\circ$, $\overline{d} = 2000$ м, $\sigma_d = 30$ м, $\sigma_\Pi = 4^\circ$.

Глава 5

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 23. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится в среднеквадратическом к величине X (случайной или нет, безразлично), если

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}\left\{|X_n - X|^2\right\} = 0,$$

а X называется средне-квадратическим пределом последовательности $\{X_n\}$ и обозначается

$$\mathrm{l.i.m}\, X_n = X.$$

Последовательность случайных величин $\{X_n\}$ сходится по вероятности к X, если

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{|X_n - X| \geqslant \varepsilon\right\} = 0$$

при любом $\varepsilon > 0$.

Для сходимости по вероятности применяют сокращенное обозначение

$$X_n \xrightarrow{p} X.$$

Если $\mathrm{D}[X]$ существует, то при любом $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство Чебышева

$$\mathrm{P}\big(|X - \overline{x}| \geqslant \varepsilon\big) \leqslant \frac{\mathrm{D}[X]}{\varepsilon^2}\,.$$

Если $\{X_k\}$ последовательность некоррелированных случайных величин, имеющих математические ожидания $\{\overline{x}_k\}$ и равномерно ограниченные дисперсии $\mathrm{D}[X_k] < C$ при всех k, то

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{x}_k \qquad \text{(теорема Чебышева).}$$

Та же сходимость по вероятности имеет место для последовательности зависимых случайных величин $\{X_k\}$, если выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathrm{D}\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = 0 \qquad \text{(теорема Маркова).}$$

Если случайные величины $\{X_k\}$ независимы и одинаково распределены, существует $\overline{x} = \mathrm{M}[X_k]$, то

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{p} \overline{x} \qquad \text{(теорема Хинчина).}$$

Если все случайные величины последовательности $\{X_i\}$ независимы, при всех i $\mathrm{M}[X_i] = \overline{x}$, а их дисперсии удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} i^{-2}\mathrm{D}[X_i] < \infty$ или все X_i одинаково распределены, то при любом $\varepsilon > 0$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\sup_{k\geqslant n}\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i - \overline{x}\right| > \varepsilon\right\} = 0,$$

именуемое усиленным законом больших чисел или сходимостью почти наверное

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} X_i \to \overline{x} \quad \text{п.н.}$$

Если существуют $\mathrm{M}[X_i] = \overline{x}$ и $\mathrm{D}[X_i] = \sigma_i^2$, а $\mu_k^{(i)}$ при всех k и i удовлетворяют условию

$$|\mu_k^{(i)}| = \left|\mathrm{M}[X_i - \overline{x}_i]^k\right| \leqslant \frac{\sigma_i^2}{2}\, H^{k-2}k!\,,$$

где H — постоянная величина, то справедливо неравенство Бернштейна

$$\mathrm{P}\left\{\left|\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{x}_i)\right| < 2t\sqrt{B}\right\} < 1 - 2e^{-t^2},$$

если только $0 < t < \frac{\sqrt{B}}{H}$, где $B = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2$, или

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_i\right| \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant 2e^{-\frac{n^2\varepsilon^2}{4B}}.$$

Задачи

23.1. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что нормально распределенная случайная величина отклонится от своего математического ожидания на величину, большую трех средних квадратических отклонений. Сравнить с точной оценкой.

23.2. Доказать, что при любом t и $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$\mathrm{P}(\varepsilon X > t^2 + \ln J) < e^{-t^2},$$

если $J = \mathrm{M}[e^{\varepsilon x}]$ существует.

23.3. Для неотрицательной случайной величины X, у которой $\mathrm{M}[X] = \overline{x}$ доказать неравенство

$$\mathrm{P}\left(X > \overline{x}t^2\right) < \frac{1}{t^2}.$$

23.4. Случайная величина X подчиняется показательно-степенному закону распределения

$$f(x) = \frac{x^m}{m!}\,e^{-x} \qquad (x \geqslant 0).$$

Доказать справедливость неравенства

$$\mathrm{P}\{0 < X < 2(m+1)\} > \frac{m}{m+1}.$$

23.5. С помощью неравенства Чебышева и Бернштейна оценить вероятность того, что при стократном бросании монеты частота появления герба будет отличаться от вероятности его появления при однократном бросании на величину, меньшую 0,05.

23.6. Случайные величины последовательности $\{X_k\}$ независимы и одинаково распределены

$$\mathrm{P}(X_k = -\sqrt{2}) = \mathrm{P}(X_k = \sqrt{2}) = \frac{1}{4}; \qquad \mathrm{P}(X_k = 0) = \frac{1}{2}.$$

Применим ли к этой последовательности закон больших чисел и в какой форме?

23.7. Случайные величины последовательности $\{X_k\}$ независимы и имеют распределения, зависящие от номера k

$$\mathrm{P}(X_k = k^s) = \mathrm{P}(X_k = -k^s) = \frac{1}{2}\,.$$

При каком s и в какой форме применим к этой последовательности закон больших чисел?

23.8. Применим ли закон больших чисел и в какой форме к последовательности $\{X_k\}$ независимых случайных величин, заданных распределениями

$$\mathrm{P}(X_k = \sqrt{\ln k}) = \mathrm{P}(X_k = -\sqrt{\ln k}) = \frac{1}{2}\,?$$

23.9. Установить, будут ли выполнены достаточные условия применимости закона больших чисел в форме Чебышева для последовательности взаимно независимых случайных величин $\{X_k\}$, с распределениями, задаваемыми формулами $(k = 1, 2, \ldots)$:

а) $\mathrm{P}(X_k = \pm 2^k) = \frac{1}{2}\,;$

б) $\mathrm{P}(X_k = \pm 2^k) = 2^{-(2k+1)}, \qquad \mathrm{P}(X_k = 0) = 1 - 2^{-2k}\,;$

в) $\mathrm{P}(X_k = \pm k) = \frac{1}{2\sqrt{k}}, \qquad \mathrm{P}(X_k = 0) = 1 - \frac{1}{\sqrt{k}}\,.$

23.10. Случайные величины последовательности $\{X_k\}$ имеют $\mathrm{M}[X_k] = \overline{x}$ и равномерно ограниченные дисперсии $\mathrm{D}[X_k] < C$. Коэффициент корреляции между случайными величинами X_k и X_{k+s} равен $r_s = e^{-\alpha|s|}$ $(\alpha > 0)$ при всех k и s. Сходятся ли $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ по вероятности к $\overline{x}$?

23.11. Доказать, что к последовательности случайных величин, в которой каждая случайная величина может зависеть только от случайных величин со смежными номерами, применим закон больших чисел, если только все случайные величины последовательности имеют конечные дисперсии и математические ожидания.

23.12. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ задана рядом распределения

$$\mathrm{P}(X_i = k) = \frac{1}{k^3 \xi(3)} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $\xi(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1,20256$ — значение функции Римана при аргументе 3. Проверить, применим ли к этой последовательности закон больших чисел.

23.13. Дана последовательность случайных величин X_1, $X_2, \ldots, X_n, \ldots$, для которых $\mathrm{D}[X_n] \leqslant C$ и $r_{ij} \to 0$ при $|i-j| \to \infty$ (r_{ij} — коэффициент корреляции между X_i и X_j). Доказать, что к данной последовательности применим закон больших чисел (теорема Бернштейна).

23.14. Последовательность независимых и одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_i, \ldots$ задана рядом распределения

$$\mathrm{P}\left[X_i = (-1)^{k-1}k\right] = \frac{6}{k^2\pi^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Проверить, применим ли к этой последовательности случайных величин закон больших чисел.

23.15. С помощью неравенства Бернштейна определить число бросаний игральной кости, при котором частота появления шестерки отличалась бы от вероятности ее появления в одном опыте на величину, меньшую 0,01, с вероятностью, бóльшей 0,9.

23.16. Сколько необходимо произвести опытов, чтобы частота появления события отличалась от ее вероятности на величину, меньшую 0,05, с вероятностью, большей P? Сравнить оценку числа опытов на основе неравенства Чебышева и Бернштейна при

а) $P = 0{,}90$; б) $P = 0{,}95$; в) $P = 0{,}99$.

23.17. Доказать, что если существуют средне квадратические пределы $\mathrm{l.i.m}\, X_n = X$ и $\mathrm{l.i.m}\, Y_n = Y$, то существует $\mathrm{l.i.m}(aX_n + bY_n) = aX + bY$, где a и b неслучайные величины.

23.18. Доказать, что если существуют средне квадратические пределы $\mathrm{l.i.m}\, X_n = X$ и $\mathrm{l.i.m}\, Y_m = Y$, а $\mathrm{M}[X^2]$ и $\mathrm{M}[Y^2]$ ограниченные величины, то

$$\lim_{n,m\to\infty} \mathrm{M}[X_n Y_m] = \mathrm{M}[XY].$$

23.19. Доказать, что если производная функции $\varphi(X_n)$ равномерно ограничена и существует средне квадратический предел $\mathrm{l.i.m}\, X_n = a$, то существует $\mathrm{l.i.m}\, \varphi(X_n) = \varphi(a)$.

§ 24. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Для серии n независимых испытаний, в каждом из которых событие A появляется с одной и той же вероятностью p $(0 < p < 1)$, согласно теореме Муавра—Лапласа справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left(a \leqslant \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < b\right) = \frac{1}{2}[\Phi(b)-\Phi(a)],$$

где m — число появлений события A в результате n испытаний. $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ — функция Лапласа (интеграл вероятностей), значения которой даны в таблице [8Т].

Вероятность того, что число появлений события A окажется в интервале $[m_1, m_2]$ в результате n независимых испытаний, с вероятностью p появления A в каждом из них, может быть вычислена по приближенной формуле:

$$\mathrm{P}(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \frac{1}{2}\left\{\Phi\left(\frac{m_2+0{,}5-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1-0{,}5-np}{\sqrt{npq}}\right)\right\}.$$

Для последовательности взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$, удовлетворяющей при некотором $\delta > 0$ условию

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2+\delta}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}\left\{|X_k - \overline{x}_k|^{2+\delta}\right\} = 0,$$

согласно теореме Ляпунова, выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{a < \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \overline{x}_k) < b\right\} = \frac{1}{2}[\Phi(b)-\Phi(a)],$$

где $\overline{x}_k = \mathrm{M}[X_k]$ — математическое ожидание X_k, $\sigma_k^2 = \mathrm{D}[X_k]$ — дисперсия X_k, $B_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2$.

Для применимости теоремы Ляпунова в случае одинаково распределенных случайных величин достаточно, чтобы дисперсия была конечна.

Если $\{X_k\}$ — последовательность непрерывных, одинаково распределенных случайных величин, у которых существуют моменты $\mathrm{M}[X_k] = \overline{x}$, $\mathrm{D}[X_k] = \sigma^2$ и $\mathrm{M}\left[(X_k - \overline{x})^\delta\right] = \mu_s$ для $s = 2, 3, 4, \ldots$ и всех k, то случайная величина

$$Y_n = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - a)$$

имеет плотность вероятности $f(y,t)$ и функцию распределения $F(y,t)$, зависящие от параметра $t = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Асимптотическое разложение плотности вероятности $f(y,t)$ имеет вид (ряд Эджворта):

$$\begin{aligned} f(y,t) = \varphi(y) - \frac{1}{3!}\frac{\mu_3}{\sigma^3}\varphi^{(3)}(y)t + \\ + \left[\frac{1}{4!}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)\varphi^{(4)}(y) + \frac{10}{6!}\left(\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)^2 \varphi^{(6)}(y)\right] t^2 - \\ - \left[\frac{1}{5!}\left(\frac{\mu_5}{\sigma^5} - 10\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)\varphi^{(5)}(y) + \frac{35}{7!}\frac{\mu_3}{\sigma^3}\left(\frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3\right)\varphi^{(7)}(y) + \right. \\ \left. + \frac{280}{9!}\left(\frac{\mu_3}{\sigma^3}\right)^3 \varphi^{(9)}(y)\right] t^3 + \mathrm{O}(t^4), \end{aligned}$$

где $\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$, а $\varphi^{(k)}(y)$ — производная k-го порядка от $\varphi(y)$.

Асимптотическое разложение для функции распределения $F(y,t)$ получается из формулы для $f(y,t)$ заменой $\varphi(y)$ на $F_0(y)$, где

$$F_0(y) = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi(y)\right].$$

Задачи

24.1. Вероятность появления события при одном опыте равна 0,3. С какой вероятностью можно утверждать, что частота этого события при 100 опытах будет лежать в пределах от 0,2 до 0,4?

24.2. Имеются 100 станков, приводы которых включаются независимо друг от друга. Какова вероятность того, что в данный промежуток времени окажутся включенными от 70 до 86 приводов, если для каждого привода вероятность быть включенным в момент времени, принадлежащий данному промежутку, равна 0,8?

24.3. Вероятность выхода из строя за время T одного конденсатора равна 0,2. Определить вероятность того, что за время T из 100 конденсаторов выйдут из строя: а) не менее 20 конденсаторов; б) менее 28 конденсаторов; в) от 14 до 26 конденсаторов.

24.4. Пользуясь теоремой Муавра—Лапласа, показать, что при достаточно большом числе независимых опытов

$$\mathrm{P}\left(p-\varepsilon \leqslant \frac{m}{n} \leqslant p+\varepsilon\right) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\right),$$

где $\frac{m}{n}$ — частота появления события, вероятность появления которого в одном опыте p.

24.5. Вероятность некоторого события определяется методом Монте-Карло. Определить число независимых опытов, обеспечивающих с вероятностью не менее 0,99 получение искомой вероятности с ошибкой, не превосходящей 0,01. Оценку произвести по теореме Чебышева и по теореме Муавра—Лапласа.

24.6. При изготовлении отливок вероятность получения дефектной равна 0,2. Сколько необходимо запланировать отливок к изготовлению, чтобы с вероятностью не менее 0,95 была обеспечена программа выпуска изделий, для выполнения которой необходимо 50 бездефектных отливок, если качество каждой из них не зависит от остальных?

24.7. Сколько необходимо произвести независимых испытаний для того, чтобы с вероятностью 0,9 утверждать, что частота интересующего нас события будет отличаться от вероятности появления этого события, равной 0,4, не более чем на 0,1?

24.8. Вероятность появления некоторого события в одном испытании равна 0,6. Какова вероятность того, что это событие появится в большинстве из 60 независимых испытаний?

24.9. Найти такое значение E, при котором

$$\mathrm{P}\{|m-np| \leqslant E\} = \frac{1}{2},$$

где m — число появлений события A в серии из $n = 45\,000$ независимых испытаний, а $p = \frac{1}{3}$ — вероятность появления A в каждом из них.

24.10. Если производить вычисление интеграла $J = \int_0^1 x^2 dx$ методом Монте-Карло на основании 1000 независимых опытов, то какова вероятность того, что абсолютная погрешность в определении величины J не превзойдет 0,01.

24.11. Сколько независимых испытаний надо произвести при вычислении интеграла $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, dx$ методом Монте-Карло для того, чтобы с вероятностью $P \geqslant 0{,}99$ можно было считать абсолютную погрешность вычисленного значения интеграла не превосходящей 0,1% от J?

24.12. Вероятность $\mathrm{P}(C) = \mathrm{P}(A + B)$ определяется методом Монте-Карло двумя способами:

а) приближенное значение $\mathrm{P}(C)$ определяется как частота появления события C в ряде из n независимых испытаний;

б) определяется частота $\frac{m}{n}$ появления события A в ряде из n независимых испытаний, а приближенное значение $\mathrm{P}(C)$ определяется по формуле

$$\mathrm{P}(C) = \frac{m}{n} + \left(1 - \frac{m}{n}\right) \mathrm{P}(B/\overline{A}),$$

где $\mathrm{P}(B/\overline{A})$ задана.

1. Доказать, что оба способа ведут к правильному результату.

2. Определить необходимое число испытаний в обоих случаях для получения ошибки в оценке $\mathrm{P}(C)$, не превосходящей 0,01, с вероятностью, не меньшей 0,95, если $\mathrm{P}(B/\overline{A}) = 0{,}3$, а $\mathrm{P}(A) = 0{,}4$.

24.13. Производится суммирование 100 многозначных чисел, округленных до целого числа единиц. Считая ошибки округления равномерно распределенными в интервале $[-0{,}5; 0{,}5]$, пользуясь центральной предельной теоремой, определить вероятность того, что ошибка окончательного результата не превзойдет по абсолютной величине 1, 5, 10 единиц. Уточнить полученный результат, используя ряд Эджворта.

24.14. В одном из вариантов метода Монте-Карло нормально распределенная случайная величина Y образуется как сумма независимых, равномерно распределенных в промежутке $[0;1]$ случайных величин X_k по формуле:

$$Y = \sqrt{\frac{12}{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \frac{1}{2} \right).$$

а) Найти первые три члена ряда Эджворта для функции распределения случайной величины Y.

б) Сравнить результаты вычислений вероятности $\mathrm{P}(|Y| < k)$, полученные с помощью ряда Эджворта, с теми, которые получаются в предположении о нормальной распределенности Y, при $k = 1, 2, 3$.

24.15. Найти первые три члена ряда Эджворта для функции распределения случайной величины χ^2, связанной соотношением

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{n} X_k^2,$$

с независимыми нормально распределенными случайными величинами X_k, имеющими нулевые математические ожидания и единичные дисперсии. Сравнить значения $\mathrm{P}(\chi^2 > \chi_q^2)$ для $\chi_q^2 = 8, 12, 16$, вычисленные с помощью ряда Эджворта с имеющимися в таблицах распределения хи-квадрат при $n = 8$.

Глава 6

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

§ 25. ОБЩИЕ СВОЙСТВА КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ И ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Неслучайная функция $\overline{x}(t)$, равная при каждом t математическому ожиданию $\mathrm{M}[x(t)]$ случайной величины $X(t)$, называется математическим ожиданием случайной функции $X(t)$. Случайная функция называется непрерывной в среднем квадратическом, если

$$\underset{\Delta\to 0}{\mathrm{l.i.m}}[X(t+\Delta)-X(t)]=0.$$

Корреляционная (автокорреляционная) функция $k_x(t_1,t_2)$ случайной функции $X(t)$ определяется формулой

$$K_x(t_1,t_2)=\mathrm{M}\left\{[X^*(t_1)-\overline{x}^*(t_1)][X(t_2)-\overline{x}(t_2)]\right\}=K_x^*(t_2,t_1),$$

где знаком * отмечены комплексно сопряженные величины[1].

Для стационарных случайных функций

$$K_x(t_1,t_2)=K_x(t_1-t_2)=K_x(\tau),\qquad \overline{x}(t)=\mathrm{const}.$$

Дисперсия ординаты случайной функции связана с $k_x(t_1,t_2)$ формулой $\mathrm{D}[X(t)]=\sigma^2_{x(t)}=k_x(t,t)$. Нормированная корреляционная функция определяется формулой

$$K_x(t_1,t_2)=\frac{K_x(t_1,t_2)}{\sigma_{x(t_1)}\sigma_{x(t_2)}}.$$

[1]В задачах, если не оговорено, $X(t)$ считается вещественной

Будем считать случайную функцию заданной, если известна совокупность законов распределения ординат случайной функции в моменты времени $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n$ («законы распределения различного порядка»), например, если известны плотности вероятности этих ординат

$$f(x_1 \mid t_1), f(x_1 x_2 \mid t_1 t_2), f(x_1 x_2 x_3 \mid t_1 t_2 t_3), \ldots$$

Математическое ожидание $\overline{x}(t)$ и корреляционная функция $K_x(t_1, t_2)$ определяются по формулам

$$\overline{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x \mid t)\, dx,$$

$$K_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 f(x_1 x_2 \mid t_1 t_2)\, dx_1\, dx_2 - \overline{x}(t_1)\overline{x}(t_2).$$

Для нормального случайного процесса совместное распределение ординат в n моментов времени (закон распределения n-го порядка) полностью определяется функциями $\overline{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$. Взаимная корреляционная функция (корреляционная функция связи) $R_{xy}(t_1, t_2)$ двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ определяется формулой

$$R_{xy}(t_1, t_2) = \mathrm{M}\left\{[X^*(t_1) - \overline{x}^*(t_1)][X(t_2) - \overline{y}(t_2)]\right\} = R^*_{xy}(t_2, t_1).$$

Для стационарно связанных процессов

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_2 - t_1) = R_{xy}(\tau).$$

Понятие корреляционной функции обобщается и на случайные функции нескольких переменных (случайные поля). Если, например, случайная функция $X(\xi, \eta)$ является функцией двух неслучайных аргументов, то

$$K_x(\xi_1,\xi_2;\eta_1,\eta_2) = \mathrm{M}\{[X^*(\xi_1,\eta_1) - \overline{x}^*(\xi_1,\eta_1)][X(\xi_2,\eta_2) - \overline{x}(\xi_2,\eta_2)]\}.$$

Задачи

25.1. Доказать, что:

а) $|K_x(t_1,t_2)| \leqslant \sigma_{x(t_1)}\sigma_{x(t_2)}$;

б) $|K_x(t_1,t_2)| \leqslant \frac{1}{2}\left[\sigma^2_{x(t_1)} + \sigma^2_{x(t_2)}\right]$.

25.2. Доказать, что $|R_{xy}(t_1,t_2)| \leqslant \sigma_{x(t_1)}\sigma_{y(t_2)}$.

25.3. Доказать, что корреляционная функция не изменяется от добавления к случайной функции любой неслучайной функции.

25.4. Найти дисперсию случайной функции $X(t)$, ординаты которой изменяются скачками на величины Δ_j в случайные моменты времени. Число скачков, происходящих в течение отрезка времени τ, подчиняется закону Пуассона с постоянной $\lambda\tau$, величины скачков Δ_j взаимно независимы, имеют одинаковые дисперсии σ^2 и нулевые математические ожидания, а $X(0)$ — неслучайная величина.

25.5. Найти корреляционную функцию случайной функции $X(t)$, которая может принимать два значения: $+1$ и -1; число перемен знака функции подчиняется закону Пуассона с постоянной временной плотностью λ, а $\overline{x}(t)$ можно считать равным нулю.

25.6. Случайная функция $X(t)$ состоит из отрезков горизонтальных прямых единичной длины, ординаты которых взаимно независимы, могут с одинаковой вероятностью иметь любой знак, а их абсолютные величины подчиняются закону распределения

$$f(|x|) = \frac{|x|^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}\, e^{-|x|} \qquad \text{(гамма-распределение)}.$$

Определить $K_x(\tau)$.

25.7. Корреляционная функция угла крена корабля $\theta(t)$ имеет вид $K_\theta(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau$. Определить вероятность того, что в момент времени $t_2 = t_1 + \tau$ угол крена $\theta(t_2)$ будет больше 15°, если $\theta(t)$ — нормальная случайная функция, $\overline{\theta} = 0$, $\theta(t_1) = 5^\circ$, $\tau = 2$ сек, $a = 30$ град^2, $\alpha = 0{,}02$ сек$^{-1}$, $\beta = 0{,}75$ сек$^{-1}$.

25.8. Использование эхолота с корабля, испытывающего бортовую качку, возможно, если угол крена $|\theta(t)| \leqslant \theta_0$. Момент первого измерения выбирается так, чтобы это условие выполнялось. Определить вероятность того, что второе измерение может быть произведено через время τ_0 сек, если $\theta(t)$ — нормальная функция, $\overline{\theta} = 0$, а дисперсия $\mathrm{D}[\theta(t)] = \sigma_\theta^2$ и нормированная корреляционная функция $k(\tau) = \frac{K_\theta(\tau)}{\sigma_\theta^2}$ даны.

25.9. Корреляционная функция угла крена корабля $\theta(t)$,

$$K_\theta(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

где $a = 36$ град^2, $\alpha = 0{,}25$ сек$^{-1}$, $\beta = 1{,}57$ сек$^{-1}$. В момент времени t угол крена равен 2°, $\theta(t) \geqslant 0$. Найти вероятность того, что в момент времени $(t+2)$ сек угол крена по величине будет меньше 10°, если $\theta(t)$ — нормальная случайная функция, $\overline{\theta} = 0$.

25.10. Определить математическое ожидание и дисперсию случайной функции $Y(t) = a(t)X(t) + b(t)$, где $a(t)$ и $b(t)$ — числовые (не случайные) функции, а $K_x(t_1, t_2)$ известны.

25.11. Случайная функция $X(t)$ имеет вид ступенчатой кривой, состоящей из горизонтальных участков, ординаты которых увеличиваются на постоянную величину a в случайные моменты времени, распределенные так, что вероятность появления m скачков в интервале времени t равняется $P_m = \frac{(\lambda t)^m}{m!}e^{-\lambda t}$ и не зависит от появления скачков в предыдущие интервалы времени (закон Пуассона).

Будет ли $X(t)$ непрерывной (в смысле среднего квадратического)?

25.12. Найти закон распределения первого порядка для ординат случайной функции

$$X(t) = A(t)\cos[\omega t + \Theta(t)],$$

если законы распределения первого порядка для случайных функций $A(t)$ и $\Theta(t)$ имеют вид

$$f_a(a \mid t) = \frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \quad (a \geqslant 0), \qquad f_\theta(\Theta \mid t) = \frac{1}{2\pi} \quad (0 \leqslant \Theta \leqslant 2\pi),$$

ω — постоянная, а для одного и того же момента времени $A(t)$ и $\Theta(t)$ взаимно независимы.

25.13. Случайные точки распределяются на временной оси таким образом, что вероятность P_n появления в заданном интервале τ на оси n точек определяется законом Пуассона $P_n = \frac{(\lambda_\tau)^n}{n!} e^{-\lambda t}$, где λ — положительная постоянная. Определить закон распределения первого порядка для случайной функции $X(m)$, дающей расстояние между m-й и $(m+n+1)$-й случайными точками.

25.14. Нормальный случайный процесс $X(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{\frac{-0,1\beta}{\pi}|\tau|} \cos\beta\tau.$$

Определить $P = \mathrm{P}\bigl\{|X(T)| \leqslant \sigma \mid X(0) = X(0{,}5T) = 0\bigr\}$, где $T = \frac{\pi}{\beta}$.

25.15. Определить закон распределения ординаты случайной функции $U(x,y)$ двух переменных x, y, если

$$U(x,y) = \zeta(x+\xi_0, y+\eta_0) - \zeta(x,y),$$

корреляционная функция $K_\zeta(\xi,\eta)$ определяемая равенством

$$K_\zeta(\xi,\eta) = \mathrm{M}\bigl\{[\zeta(x,y) - \overline{\zeta}(x,y)][\zeta(x+\xi, y+\eta) - \overline{\zeta}(x+\xi, y+\eta)]\bigr\},$$

дана в виде

$$K_\zeta(\xi,\eta) = ae^{-\alpha_1|\xi| - \alpha_2|\eta|} \cos\beta_1\xi \, \cos\beta_2\xi,$$

$\zeta(\xi,\eta)$— нормальная случайная функция, $a = 100$, $\alpha_1 = 0{,}2$, $\alpha_2 = 0{,}1$, $\beta_1 = 0{,}5$, $\beta_2 = 1{,}0$, $\xi_0 = 1$, $\eta_0 = 2$.

25.16. В условиях предыдущей задачи определить закон распределения ординаты U_0 поля $U(x,y)$ в точке $(0,0)$, если ординаты поля в точках $(\frac{\pi}{2\beta_1}, 0)$, $(0, -\frac{\pi}{2\beta_2})$, $(-\frac{\pi}{2\beta_1}, 0)$ и $(0, \frac{\pi}{2\beta_2})$ имеют значения U_1, U_2, U_3 и U_4, соответственно.

25.17. Дана двумерная плотность вероятности ординат процесса $X(t)$

$$f(x_1, x_2 \mid t_1, t_2) = \frac{1}{8\pi a^2\sqrt{1-g^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_1 x_2}} \times \\ \times \exp\left\{-\frac{(x_1 + x_2 - 2g\sqrt{x_1 x_2})}{2a^2(1-g^2)}\right\},$$

где

$$g = e^{-\alpha|t_2-t_1|}(1+\alpha|t_2-t_1|), \qquad (x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0).$$

Определить плотность вероятности системы случайных величин $X(t)$, $V(t) \equiv \frac{dX(t)}{dt}$ и плотность вероятности $V(t)$.

25.18. Шероховатость поверхности стекла задана двумерной корреляционной функцией $K(\xi,\eta)$. Определить плотность J светового потока, отражающегося от стекла в заданном направлении, если на стекло падает параллельный пучок света интенсивности J_0, направление пучка составляет угол ϑ с нормалью к стеклу, коэффициент отражения равен 1, а ординату поверхности стекла можно считать однородным нормальным изотропным полем.

§ 26. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД СЛУЧАЙНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Оператором называется совокупность математических операций, в результате выполнения которых данной функции приводится в соответствие другая функция[2]. Оператор L_0 называется линейным и однородным, если для него выполняются условия

$$L_0A\varphi(t) = AL_0\varphi(t), \qquad L_0[\varphi_1(t)+\varphi_2(t)] = L_0\varphi_1(t)+L_0\varphi_2(t),$$

где A — любая постоянная, а $\varphi(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — любые функции.

Линейным неоднородным оператором L называется оператор, связанный с линейным однородным оператором соотношением

$$LY(t) = L_0\varphi(t) + \psi(t),$$

где $\psi(t)$ — заданная функция.

Если $V(t) = L_0X(t)$ и оператор L_0 является линейным и однородным, то

$$\overline{y}(t) = L_0\overline{x}(t), \qquad K_y(t_1,t_2) = L^*_{0t_1}L_{0t_2}K_x(t_1,t_2),$$

[2]Более строгое определение понятия «оператор», см., например, в кн.: *Смирнов В.И.* Курс высшей математики, т. 5.

где L^* — оператор, полученный из L путем замены всех входящих в L комплексных выражений на комплексно сопряженные; индексы t_1 и t_2 в обозначении оператора L_0 показывают, что в первом случае оператор действует по переменной t_1, а во втором случае — по переменной t_2. (Возможность применения оператора к данной случайной функции должна быть проверена в каждом конкретном случае.)

Если L — неоднородный оператор, соответствующий однородному оператору L_0 и функции $\psi(t)$ и $Z(t) = LX(t)$, то

$$\overline{z}(t) = L\overline{x}(t) = L_0\overline{x}(t) + \psi(t), \quad K_z(t_1, t_2) = L^*_{0t_1} L_{0t_2} K_x(t_1, t_2).$$

В том случае, когда оператор, действующий на случайную функцию, определяется путем соответствующего предельного перехода, под пределом понимается предел в смысле среднего квадратического.

Непрерывный случайный процесс имеет производную с ограниченной дисперсией (дифференцируем один раз), если его математическое ожидание дифференцируемо, а его корреляционная функция имеет вторую смешанную частную производную при равных значениях ее аргументов, что для стационарных функций эквивалентно существованию второй производной от $k(\tau)$ при $\tau = 0$.

Если $X(t)$ — нормальная случайная функция (считаем $X(t)$ вещественной), а $Y(t) = X^2(t)$, то

$$\overline{y}(t) = \mathrm{M}[X^2(t)] = \mathrm{D}[X(t)] + [\overline{x}(t)]^2,$$

$$K_y(t_1, t_2) = 2K_x^2(t_1, t_2) + 4\overline{x}(t_1)\overline{x}(t_2)K_x(t_1, t_2).$$

Под интегралом $\int\limits_a^b \mathcal{F}[X(t), t]\, dx(t)$, где $\mathcal{F}(x, t)$ заданная, а $X(t)$ — случайная функция, далее понимается предел, определяемый равенством

$$\int\limits_a^b \mathcal{F}[X(t), t]\, dx(t) =$$

$$= \underset{\substack{n\to\infty \\ \max|t_j - t_{j-1}|\to 0}}{\mathrm{l.i.m}} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}\left[\frac{X(t_j) + X(t_{j-1})}{2}, t_j,\right] \Bigl[X(t_j) - X(t_{j-1})\Bigr],$$

где интервал интегрирования (a, b) разбит на n интервалов (t_{j-1}, t_j).

Задачи

26.1. Определить корреляционную функцию производной случайной функции $X(t)$, если $K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$.

26.2. Определить корреляционную функцию и дисперсию случайной функции

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt},$$

если $K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$.

26.3. Определить взаимную корреляционную функцию $X(t)$ и $V(t) \equiv \frac{DX(t)}{dt}$, если $X(t)$ стационарна, а $K_x(\tau)$ известна.

26.4. Сколько производных имеет случайная функция $X(t)$, обладающая корреляционной функцией $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$?

26.5. Сколько раз можно дифференцировать случайную функцию $X(t)$, если $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$?

26.6. До какого порядка существуют производные случайной функции $X(t)$, если ее корреляционная функция имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| - 2\alpha^2\tau^2 + \frac{1}{3}\alpha^3|\tau^3|\right)?$$

26.7. Случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Определить взаимную корреляционную функцию $\dot{X}(t+t_0)$ и $X(t)$.

26.8. Корреляционная функция случайной функции $X(t)$ имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Определить дисперсии функций $Y(t) = X(t + \tau)$ и $Z(t) = \dot{X}(t + \tau)$.

26.9. Дана корреляционная функция $K_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$:

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Найти корреляционную функцию

$$X(t) = a\,\frac{dX(t)}{dt}\,.$$

26.10. Определить вероятность P того, что производная $V(t)$ от нормальной стационарной функции $X(t)$ будет иметь значение, большее $b = \sqrt{5}$ м/сек, если

$$K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

где $a = 4$ м^2, $\alpha = 1$ сек$^{-1}$, $\beta = 2$ сек$^{-1}$.

26.11. Известны математические ожидания, корреляционные функции и взаимная корреляционная функция случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию случайной функции $Z(t) = X(t) + Y(t)$.

26.12. Для системы n случайных функций $X_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ заданы $\overline{x}(t)$, $K_{x_j}(t_1, t_2)$ и $R_{X_jX_l}(t_1t_2)$. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию

$$X(t) = \sum_{j=1}^{n} X_j(t).$$

26.13. Корреляционная функция $K_x(\tau)$ стационарной случайной функции $X(t)$ задана. Определить корреляционную функцию $Y(t)$, если

$$Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt} + \frac{d^2X(t)}{dt^2}\,.$$

26.14. Случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\,\alpha^2\tau^2\right).$$

Определить корреляционную функцию

$$Z(T) = X(t) + \frac{d^2X(t)}{dt^2}.$$

26.15. Известна корреляционная функция $K_x(\tau)$ случайной функции $X(t)$. Определить дисперсию $Y(t) = \int_0^t X(\xi)\,d\xi$.

26.16. Стационарная случайная функция $Y(t)$ связана с другой функцией $X(t)$ соотношением $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

Определить корреляционную функцию $X(t)$, если $X(t) = 0$ при $t = 0$, а $K_y(\tau)$ известна.

26.17. Определить взаимную корреляционную функцию между $X(t)$ и $Y(t) = \int_0^t X(\xi)\,d\xi$, если $K_x(t_1, t_2)$ известна.

26.18. Определить дисперсию $Y(t)$ при $t = 20$ сек, если

$$Y(t) = \int\limits_0^t X(t_1)\,dt_1, \quad K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

$$a = 10\ \frac{\text{см}^2}{\text{сек}^2}, \quad \alpha = 0{,}5\ \text{сек}^{-1}.$$

26.19. Определить корреляционную функцию и математическое ожидание

$$Y(t) = a_0X(t) + a_1\frac{dX(t)}{dt} + b_1\int\limits_0^t e^{-\lambda t_1}X(t_1)\,dt_1 + c,$$

если $\overline{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ известны, а постоянные c, a_0, a_1 и b_1 вещественные.

26.20. Определить взаимную корреляционную функцию $R_{yz}(t_1, t_2)$, если

$$Y(t) = aX(t) + b\frac{dX(t)}{dt}, \qquad Z(t) = c\frac{dX(t)}{dt} + d\frac{d^2X(t)}{dt^2},$$

где a, b, c, d — вещественные постоянные.

26.21. Скорость самолета определяется гироскопическим интегратором, который дает ошибку

$$\Delta V(t) = g\int\limits_0^t \sin\theta(t_1)\,dt_1,$$

где $\theta(t)$ — ошибка стабилизации оси интегратора, имеющая корреляционную функцию

$$K_0(\tau) = 4 \cdot 10^{-8} e^{-0,08|\tau|} \text{рад}^2 = a e^{-\alpha|\tau|},$$

а g — ускорение силы тяжести. Найти среднюю квадратическую ошибку определения скорости после 10 часов полета (τ дано в сек).

26.22. Случайная функция $\theta(t)$ является вещественной, нормальной и стационарной, $\overline{\theta} = 0$. Найти корреляционную функцию

$$X(t) = a\ddot{\theta}(t) + b\theta(t) + c\dot{\theta}^2(t),$$

где a, b, c — вещественные постоянные.

26.23. Возмущающий момент, действующий на ротор гироскопического прибора, установленного на корабле, связан с углом крена $\Theta(t)$ и углом дифферента $\Psi(t)$ корабля соотношением

$$\mathrm{M}(t) = a\Theta^2(t) + b\Psi^2(t) + c\Theta(t)\dot{\Psi}(t).$$

Определить корреляционную функцию $M(t)$, если $K_\Theta(\tau)$ и $K_\Psi(\tau)$ известны, $R_{\Theta\Psi}(\tau) \equiv 0$ а $\Theta(t)$ и $\Psi(t)$ нормальны.

26.24. Дано $K_\lambda(\tau) = e^{-\alpha^2\tau^2}$. Определить корреляционную функцию $K_y(\tau)$, если

$$Y(t) = X(t) + \frac{dX(t)}{dt}.$$

26.25. Дано $K_x(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} \left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right)$.

Определить взаимную корреляционную функцию между $X(t)$ и $\frac{d^2X(t)}{dt^2}$.

26.26. Дана корреляционная функция $K_x(\tau)$. Определить $K_y(t_1, t_2)$, если

$$Y(t) = a(t)X(t) + b(t)\frac{d^2X(t)}{dt^2},$$

где $a(t)$ и $b(t)$ — числовые (не случайные) функции.

26.27. Дано

$$Y(t) = \int\limits_0^t X(\xi)\,d\xi\,.$$

Существует ли отличная от нуля функция $X(\xi)$, при которой $Y(t)$ является стационарной случайной функцией?

26.28. Для уменьшения влияния случайных отклонений функции $X(t)$ от ее математического ожидания $\overline{x}(t)$ применяется сглаживание по формуле

$$Y(t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{t-a}^{t+a} X(t_1)\,dt_1.$$

Определить вносимую при этом систематическую ошибку $\delta = \overline{y}(t) = \overline{x}(t)$ и дисперсию $Y(t)$, считая $\overline{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ известными, а функцию $\overline{x}(t)$ дифференцируемой любое число раз.

26.29. Является ли функция $Z(t) = X(t) + Y$ стационарной в широком смысле, если $X(t)$ — стационарная случайная функция, а Y: а) случайная величина, не связанная с $X(t)$; б) $Y = X(t_0)$?

26.30. Считая, что мощность ветряного двигателя $W(t)$ пропорциональна квадрату скорости ветра $V(t)$:

$$W(t) = aV^2(t) \quad (a = \mathrm{const}).$$

определить математическое ожидание и дисперсию энергии $\mathcal{E}(t)$, вырабатываемой двигателем за время t, если компоненты скорости ветра $V_x(t)$, $V_y(t)$ — нормальные случайные функции, математические ожидания, корреляционные функции и взаимная корреляционная функция которых известны.

26.31. Колесо радиуса a катится по профилю, ордината которого является стационарной нормальной случайной функцией $X(\xi)$ абсциссы точки профиля ξ. Определить математическое ожидание $\overline{y}$ функции $Y(\xi)$ — ординаты центра колеса, если можно считать, что радиус кривизны профиля $R(\xi) \gg a$, а математическое ожидание $\overline{x}$ и корреляционная функция $K_x(\xi)$ заданы.

§ 27. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Для всякой стационарной функции $X(t)$ справедливо разложение

$$X(t) - \overline{x} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\Phi(\omega),$$

где в том случае, когда

$$\int_{-\infty}^{\infty} [K_x(\tau) \mid d\tau < \infty$$

приращения $d\Phi(\omega)$ удовлетворяют соотношениям

$$\mathrm{M}[d\Phi(\omega)] = 0, \qquad \mathrm{M}[d\Phi^*(\omega)\, d\Phi(\omega_1)] = S_x(\omega)\delta(\omega - \omega_1) d\omega\, d\omega_1.$$

Здесь $S_x(\omega)$ — спектральная плотность случайной функции, $X(t)$, $\delta(x)$ — обозначение дельта-функции (см. введение к § 11).

Корреляционная функция и спектральная плотность связаны взаимно обратными преобразованиями Фурье

$$K_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega)\, d\omega, \qquad S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_x(\tau)\, d\tau.$$

Спектральная плотность вещественна и не может иметь отрицательных ординат; для вещественных функций

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega).$$

Случайные функции, обладающие конечной дисперсией, имеют спектральные плотности, обращающиеся на бесконечности в нуль быстрее, чем $\frac{1}{\omega}$.

Спектральная плотность производной $X(t)$ связана с $S_x(\omega)$ формулой

$$S_x(\omega) = \omega^2 S_x(\omega).$$

Необходимым и достаточным условием дифференцируемости (один раз) случайной функции $X(t)$ является стремление $S_x(\omega)$ к нулю при росте $|\omega|$ быстрее, чем $\frac{1}{|\omega|^2}$.

Если случайные функции стационарны и стационарно связаны, то между взаимной корреляционной функцией $R_{xy}(\tau)$ и взаимной спектральной плотностью $S_{xy}(\omega)$ имеют место соотношения

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} S_{xy}(\omega)\, d\omega,$$

$$S_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} R_{xy}(\tau)\, d\tau.$$

Из определений $R_{xy}(\tau)$ и $S_{xy}(\omega)$ следует, что

$$R_{xy}(\tau) = R^*_{yx}(-\tau) \qquad S_{xy}(\omega) = S^*_{yx}(\omega).$$

Спектральная плотность произведения двух нормальных (вещественных) стационарных функций $X(t)$ и $Y(t)$

$$Z(t) = X(t) \cdot Y(t),$$

выражается через $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $S_{xy}(\omega)$ по формуле

$$S_z(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega-\omega_1)S_y(\omega_1)\, d\omega_1 + \overline{x}\,\overline{y}[S_{xy}(\omega) + S_{yx}(\omega)] +$$
$$+ \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega-\omega_1)S_{yx}(\omega_1)\, d\omega_1 + \overline{x}^2 S_y(\omega) + \overline{y}^2 S_x(\omega).$$

Задачи

27.1. Дана спектральная плотность

$$S(\omega) = \begin{cases} a, & \text{если } -b \leqslant \omega \leqslant b, \\ 0, & \text{если } b < |\omega|. \end{cases}$$

Определить корреляционную функцию $K(\tau)$.

27.2. Дана спектральная плотность

$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant |\omega| < \omega_0, \\ c^2, & \text{если } \omega_0 \leqslant |\omega| \leqslant 2\omega_0, \\ 0, & \text{если } 2\omega_0 < |\omega|. \end{cases}$$

Определить корреляционную функцию $K(\tau)$.

27.3. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

27.4. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|).$$

27.5. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 - |\tau|), & \text{при } |\tau| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |\tau| > 1. \end{cases}$$

27.6. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau.$$

27.7. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

27.8. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| - 2\alpha^2\tau^2 + \frac{1}{3}\alpha^3|\tau|^3\right).$$

27.9. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

27.10. По виду спектральной плотности случайной функции $X(t)$ определить, сколько производных имеет эта функция, если

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2|\tau|^2\right).$$

27.11. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \sigma^2\left(2e^{-\alpha|\tau|} - e^{-2\alpha|\tau|}\right).$$

27.12. Определить спектральную плотность $S(\omega)$, если

$$K(\tau) = \sum_{j=1}^{n} a_j e^{-\alpha_j |\tau|} \qquad \mathrm{Re}\alpha_j > 0.$$

27.13. Определить, для каких значений отношения $\frac{\alpha}{\beta}$ спектральная плотность

$$S(\omega) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi} \cdot \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}$$

имеет максимум при $\omega = 0$.

27.14. Определить дисперсию производной случайной функции $X(t)$, если

$$S_x(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}\,.$$

27.15. Определить взаимные спектральные плотности $S_{x\dot{x}}(\omega)$ и $S_{\dot{x}x}(\omega)$, если

$$K_x(\tau) = ae^{-\alpha^2\tau^2}.$$

27.16. Команда $\Delta(t)$, поступающая на органы управления автоматически управляемого объекта, определяется по формуле

$$\Delta(t) = K_1 U(t) + K_2 \dot{U}(t).$$

27.17. Динамическая система (упредитель) используется для получения значения входной случайной функции $X(t)$ в момент времени $t + \tau_0$, где τ_0 — время упреждения. Определить взаимную спектральную плотность между $X(t)$ и $Y(t) = X(t + \tau_0)$, если $K_x(\tau)$ дана.

27.18. На вход динамической системы поступает случайная функция $X(t)$, являющаяся суммой полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$:

$$X(t) = U(t) + V(t).$$

Задачей динамической системы является воспроизведение функции

$$Y(t) = \frac{d^k}{dt^k}\, U(t + \tau_0).$$

Определить взаимную спектральную плотность $S_{xy}(\omega)$, если $S_v(\omega)$, $S_u(\omega)$ и $S_{uv}(\omega)$ заданы.

27.19. Определить спектральную плотность $S_z(\omega)$, если $Z(t) = X(t)\dot{Y}(t)$, а $X(t)$ и $Y(t)$ — независимые случайные стационарные функции, корреляционные функции которых заданы:

$$K_x(\tau) = a_1 e^{-\alpha_1|\tau|}\left(\cos\beta_1\tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sin\beta_1|\tau|\right),$$

$$K_y(\tau) = a_2 e^{-\alpha_2|\tau|}\left(\cos\beta_2\tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\sin\beta_2|\tau|\right).$$

27.20. Определить спектральную плотность $S_z(\omega)$, если

$$Z(t) = X(t)Y(t),$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ — независимые случайные функции, $K_x(\tau) = a_1 e^{-\alpha_1|\tau|}$, $K_y(\tau) = a_2 e^{-\alpha_2|\tau|}$, а $\overline{x}$ и $\overline{y}$ даны.

27.21. «Карданова ошибка» $\Delta(t)$, возникающая при использовании карданова подвеса в некоторых стабилизационных корабельных устройствах, связана с углами крена $\Theta(t)$ и дифферента $\Psi(t)$ корабля соотношением

$$\Delta(t) = \Theta(t)\Psi(t).$$

Считая $\Theta(t)$ и $\Psi(t)$ независимыми случайными функциями, определить корреляционную функцию, дисперсию и спектральную плотность ошибки $\Delta(t)$, если $\overline{\theta} = \overline{\psi} = 0$,

$$K_\Theta(\tau) = a_1 e^{-\alpha_1|\tau|}\left(\cos\beta_1\tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sin\beta_1|\tau|\right),$$

$$K_\Psi(\tau) = a_2 e^{-\alpha_2|\tau|}\left(\cos\beta_2\tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\sin\beta_2|\tau|\right).$$

27.22. Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, если

$$Y(t) = X^2(t),$$

где $X(t)$ — нормальная случайная функция, а

$$K_x(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

27.23. Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, если

$$Y(t) = X^2(t),$$

где $X(t)$ — нормальная стационарная случайная функция, $\overline{x}$ известно, а

$$K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}.$$

27.24. Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, если

$$Y(t) = X(t)\frac{dX(t)}{dt},$$

где $X(t)$ — нормальная случайная функция, $S_x(\omega) = ae^{-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}}$, а $\overline{x} = \text{const}$ дано.

27.25. Поправка $\Delta(t)$ на качку корабля, поступающая в угол горизонтального наведения навигационной радиолокационной станции, определяется формулой

$$\Delta(t) = -\Phi(t) + \Psi(t)\Theta(t)\cos^2 q - \frac{1}{4}\left[\Theta^2(t) - \Psi^2(t)\right]\sin 2q.$$

Определить $S_\Delta(\omega)$, если q можно считать постоянным, а угол рыскания $\Phi(t)$, угол дифферента $\Psi(t)$ и угол крена $\Theta(t)$ — несвязанные нормальные случайные функции, корреляционные функции которых заданы:

$$K_\varphi(\tau) = a_1e^{-\alpha_1|\tau|}\left(\cos\beta_1\tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sin\beta_1|\tau|\right),$$

$$K_\psi(\tau) = a_2e^{-\alpha_2|\tau|}\left(\cos\beta_2\tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\sin\beta_2|\tau|\right).$$

$$K_\theta(\tau) = a_3e^{-\alpha_3|\tau|}\left(\cos\beta_3\tau + \frac{\alpha_3}{\beta_3}\sin\beta_3|\tau|\right), \quad \overline{\varphi} = \overline{\theta} = \overline{\psi} = 0.$$

27.26. Нормальная случайная функция $X(t)$ имеет корреляционную функцию $K_x(\tau) = \sigma_x^2e^{-\alpha|\tau|}$ и математическое ожидание $\overline{x}$. Найти максимум спектральной плотности $S_y(\omega)$, если $Y(t) = X^2(t)$.

27.27. На самолет, летящий со скоростью v, горизонтально вдоль оси ξ, действует аэродинамическая сила $Y(t) = aW(t)$, где $W(t)$ — вертикальная составляющая скорости ветра в месте нахождения самолета. Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$, если корреляционный момент K_ξ между значениями вертикальных составляющих скорости ветра в двух точках, расположенных на высоте полета самолета, удаленных друг от друга вдоль его траектории на расстояние ξ и взятых для одного и того же момента времени, определяется формулой $K(\xi) = \sigma^2 e^{-\alpha|\xi|}$, а неодновременностью прихода самолета в эти точки можно пренебречь.

§ 28. ЗАДАЧИ О ВЫБРОСАХ

Выбросом случайной функции $X(t)$ за данный уровень a называется пересечение снизу вверх графиком этой функции горизонтальной прямой, отстоящей от оси t на расстоянии a.

Вероятность того, что выброс произойдет в бесконечно малом интервале времени dt, расположенном вблизи точки t, равна $p(a \mid t)\,dt$; временна́я плотность вероятности $p(a \mid t)$ выражается через плотность вероятности $f(x, v \mid t)$ ординаты случайной функции $X(t)$ и ее производной $Y(t) = \dot{X}(t)$, вычисленной для момента времени t:

$$p(a \mid t) = \int\limits_0^\infty f(a, v \mid t) v\, dv.$$

Временна́я плотность вероятности пересечения случайной функцией уровня a сверху вниз

$$p_1(a \mid t) = -\int\limits_{-\infty}^0 f(a, v \mid t) v\, dv.$$

Для нормальных функций

$$\begin{aligned} p(a \mid t) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(a-\overline{x})^2}{2\sigma_x^2}} \cdot \frac{\sigma_v}{\sigma_x} \Biggl\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{a-\overline{x}}{\sigma_x} r + \frac{\overline{v}}{\sigma_v} \right) \times \\ \times \left[1 + \Phi\left(\frac{\sigma_x \overline{v} + r\sigma_v (a - \overline{x})}{\sigma_v \sigma_x \sqrt{1-r^2}} \right) \right] + \\ + \sqrt{1-r^2} \exp\left[-\frac{1}{2(1-r^2)} \left(\frac{\overline{v}}{\sigma_v} + r\, \frac{(a-\overline{x})^2}{\sigma_x} \right) \right] \Biggr\}, \end{aligned}$$

$$r = \frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}\left[K_x(t_1,t_2)\,\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}\right]^{-\frac{1}{2}}\Bigg|_{t_1=t_2=t}.$$

Для нормальных стационарных функций

$$p(a\mid t) = p_1(a\mid t) = p(a) = \frac{1}{2\pi}\,e^{\frac{(a-\overline{x})^2}{2\sigma_x^2}}\cdot\frac{\sigma_v}{\sigma_x}.$$

Среднее число выбросов N_a стационарной случайной функции в единицу времени равно $p(a)$.

Среднее число выбросов стационарной функции в течение промежутка времени T равно $\overline{N}_a = Tp(a)$.

Средняя длительность выброса $\overline{\tau}_a$ стационарной случайной функции и среднее время между выбросами $\overline{\theta}_a$ определяется формулами

$$\overline{\tau}_a = \frac{\int_a^\infty f(x)\,dx}{p(a)}, \qquad \overline{\theta}_a = \frac{\int_{-\infty}^a f(x)\,dx}{p(a)},$$

где $f(x)$ — плотность вероятности ординат случайной функции.

Для стационарного нормального процесса

$$\overline{\tau}_a = \pi\,\frac{\sigma_x}{\sigma_v}\,e^{\frac{(a-\overline{x})^2}{2\sigma_x^2}}\left[1-\Phi\left(\frac{a-\overline{x}}{\sigma_x}\right)\right].$$

Аналогичные формулы для нестационарных процессов

$$\overline{N}_a = \int\limits_0^T\int\limits_0^\infty vf(a,v\mid t)\,dv\,dt, \qquad \overline{\tau}_a = \frac{\int_a^T\int_a^\infty f(x\mid t)\,dx\,dt}{\int_a^T\int_0^\infty vf(a,v\mid t)\,dv\,dt}.$$

Если среднее время $\overline{\theta}_a$ между выбросами много больше времени корреляции процесса $X(t)$, то вероятность $P_m(T)$ появления m выбросов в течение времени T приближенно определяется формулой

$$P_m(T) \approx \frac{(\overline{N}_a)^m}{m!}\,e^{-\overline{N}_a}.$$

Для однородного нормального случайного поля $\zeta(x,y)$ можно получить ряд формул, являющихся в известном смысле обобщением формул для характеристик выбросов случайной функции одной переменной [30].

Средняя длина контура $\overline{l}$ пересечения поверхности $Z = \zeta(x, y)$ с плоскостью $z = a$, приходящаяся на единицу площади, определяется формулой

$$\overline{l} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{m_{20}+m_{02}}{m_{00}}}\exp\left[-\frac{(a-\overline{\zeta})^2}{2m_{00}}\right](1+\gamma^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{E}\left(\sqrt{1-\gamma^2}\right),$$

где

$$\gamma^2 = \frac{(m_{20}+m_{02}) - \sqrt{(m_{20}-m_{02})^2+4m_{11}^2}}{(m_{20}+m_{02}) + \sqrt{(m_{20}-m_{02})^2+4m_{11}^2}},$$

$\mathrm{E}(x)$ — обозначение полного эллиптического интеграла Лежандра второго рода, а

$$m_{jl} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \omega_1^j \omega_2^l S(\omega_1, \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2,$$

где $S(\omega_1, \omega_2)$ — спектральная плотность случайного поля.

Среднее число максимумов $\overline{n}_{\max}$ случайного поля $\zeta(x, y)$, приходящееся на единицу площади, определяется формулой

$$\overline{n}_{\max} = \frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\lambda_2\lambda_3}{\Delta_2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{E}(k) - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{K}(k)\right],$$

где $\mathrm{E}(k)$ и $\mathrm{K}(k)$ — полные эллиптические интегралы Лежандра второго и первого рода:

$$\mathrm{E}(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\, d\varphi; \qquad \mathrm{K}(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}\, d\varphi,$$

λ_j — корни уравнения $(\lambda_1 > \lambda_2 \geqslant \lambda_3)$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}m_{22}-\lambda & -m_{31} & \frac{1}{2}m_{40} \\ \frac{1}{2}m_{13} & -m_{22}-\lambda & \frac{1}{2}m_{31} \\ \frac{1}{2}m_{04} & -m_{13} & \frac{1}{2}m_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_2 = (m_{20}m_{02} - m_{11}^2), \quad \text{а} \quad k^2 = \frac{\lambda_1(\lambda_3-\lambda_2)}{\lambda_3(\lambda_1-\lambda_2)}.$$

Среднее число максимумов $\overline{n}_{\max}$, среднее число минимумов $\overline{n}_{\min}$ и среднее число седловых точек $\overline{n}_s$, приходящиеся на единицу площади, связаны соотношением (для однородного поля)

$$\overline{n}_{\max} + \overline{n}_{\min} = \overline{n}_s.$$

Задачи

28.1. Определить среднюю длительность выброса нормальной случайной функции $X(t)$ за уровень $a = 2$ см, если $\overline{x} = -8$ см, а $K_x(\tau) = 100e^{-0{,}1|\tau|}(1 + 0{,}1|\tau|)$ см^2, где τ выражено в секундах.

28.2. Среднее число выбросов нормальной стационарной случайной функции за уровень $a = \overline{x}$ в одну секунду равно 0,01. Определить дисперсию скорости изменения этой функции, если дисперсия самой функции равна 64 см^2.

28.3. Стационарные нормальные процессы $X(t)$ и $Y(t)$ имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии, но различные корреляционные функции

$$K_x(\tau) = \sigma^2\left(2e^{-\alpha|\tau|} - e^{-2\alpha|\tau|}\right); \quad K_y(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

Сравнить среднее число выбросов за уровень a для этих функций.

28.4. Корреляционная функция угла крена корабля $\theta(t)$ определяется формулой

$$K_\theta(\tau) = be^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

Считая процесс качки нормальным, определить, сколько раз в среднем за 20 мин хода корабля угол крена будет выходить за пределы $\pm 25°$, если $\overline{\theta} = 0$, $b = 100$ град^2, $\alpha = 0{,}1$ сек$^{-1}$, $\beta = 0{,}7$ сек$^{-1}$.

28.5. Ошибки на выходе динамической системы нормальны, имеют нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

где $\sigma^2 = 5$ квадратным угловым минутам, $\alpha = 1{,}5$ сек$^{-1}$.

Определить на сколько секунд в среднем будет выключаться система, если выключение производится автоматически при получении ошибки, превосходящей по абсолютной величине $3'$.

28.6. Корреляционная функция нормального случайного процесса

$$K_x(t_1, t_2) = \sigma^2 t_1 t_2 e^{-\alpha|t_2 - t_1|}(1 + \alpha|t_2 - t_1|).$$

Определить значение времени t, начиная с которого среднее число выбросов за уровень $a = \overline{x}$ в единицу времени станет больше заданного числа p_0.

28.7. Для устранения вредного воздействия, оказываемого внешним случайным возмущением, характеризуемым нормальной случайной функцией $X(t)$, необходимо затратить мощность $W(t)$, пропорциональную $\dot{X}^2(t)$:

$$W(t) = k\dot{X}^2(t).$$

Определить, сколько раз в среднем в единицу времени мощности двигателя будет не хватать для устранения возмущения, если максимально возможная его мощность равна W_0, $\overline{x} = 0$,

$$K_{\dot{x}}(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

а k, W_0, a, α, β — известные постоянные.

28.8. На самолете, движущемся горизонтально с постоянной скоростью v, установлен прибор (акселерометр), измеряющий горизонтальные ускорения, нормальные к оси фюзеляжа. Вследствие ошибок управления угол $\Psi(t)$, составленный направлением вектора скорости самолета с неизменной вертикальной плоскостью, является стационарной нормальной случайной функцией. Определить, сколько раз в среднем в единицу времени чувствительный элемент акселерометра будет доходить до упора, если это имеет место в том случае, когда мгновенный радиус кривизны траектории самолета в горизонтальной плоскости становится равным минимально допустимому радиусу циркуляции R_0. Скорость самолета v можно считать постоянной, а

$$K_{\dot{\Psi}}(\tau)' = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

28.9. Высота $H(t)$ полета автономно-управляемого летательного аппарата является случайной функцией, математическое ожидание которой h равно заданной высоте полета, а корреляционная функция

$$K_h(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

Считая высоту $H(t)$ нормальной, определить, какую наименьшую высоту $\overline{h}$ можно установить в системе приборов автономного полета, чтобы за время полета T вероятность аварии аппарата вследствие столкновения с поверхностью Земли была меньше $\delta = 0{,}01\%$, если $a = 400$ м^2, $\alpha = 0{,}01$ сек$^{-1}$, $\beta = 0{,}1$ сек$^{-1}$, $T = 5$ час.

28.10. Радиолиния управления может обеспечить передачу команды без искажения в том случае, если помеха $X(t)$, поступающая на вход приемника, по абсолютной величине ни разу за время передачи команды T не превзойдет уровня a. Определить вероятность P передачи команды без искажения, если $X(t)$ нормальная случайная функция, $\overline{x} = 0$;

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

28.11. Определить закон распределения ординат нормальной случайной функции $X(t)$ в точках ее максимумов, если

$$\overline{x} = 0, \qquad K_x(\tau) = ae^{-\alpha^2\tau^2}.$$

28.12. Дан нормальный случайный процесс $X(t)$. Найти закон распределения ординат его минимумов, если $\overline{x} = \text{const}$

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(1 + \alpha|\tau| + \frac{1}{3}\alpha^2\tau^2\right).$$

28.13. Определить среднее число точек перегиба нормальной случайной функции $X(t)$, приходящееся на время T, если $\overline{x} = \text{const}$,

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

28.14. Определить дисперсию числа выбросов нормального случайного процесса $X(t)$ в течение времени T за уровень математического ожидания $\overline{x}$, если корреляционная функция процесса $K(\tau)$ известна.

28.15. Определить среднюю площадь $\overline{s}$, заключенную между кривой $y = X(t)$ и прямой $y = a$, приходящуюся на один выброс (среднюю «площадь выброса»), если $X(t)$ — нормальный процесс,

$$\overline{x} = 0, \qquad K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|), \quad a = \sigma_x,\ 2\sigma_x,\ 3\sigma_x.$$

28.16. Однородное нормальное случайное поле $\zeta(x, y)$ имеет нулевое математическое ожидание и двумерную спектральную плотность

$$S(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sigma^2}{12\pi}\, e^{-\frac{\omega_1^2}{8} - \frac{\omega_2^2}{18}}.$$

Определить среднюю длину контура $\overline{l}$, возникающего при пересечении случайного поля плоскостью $\zeta = \sigma$, приходящуюся на единицу площади секущей плоскости.

28.17. В условиях предыдущей задачи определить среднее число максимумов, приходящееся на единицу площади секущей плоскости.

28.18. Для стационарной, дважды дифференцируемой нормальной случайной функции с заданным математическим ожиданием и корреляционной функцией, определить среднее число максимумов $P_{\max}(a)$, приходящихся на единицу времени, расположенных выше уровня a.

28.19. Считая ординату поверхности моря $\zeta(x, y)$ однородным нормальным полем, определить среднюю длину волны $\overline{\lambda}$ по заданному направлению, если спектральная плотность поля $S(\omega_1, \omega_2)$ известна.

У к а з а н и е: $\overline{\lambda}$ равна среднему расстоянию между выбросами случайной функции, получающейся при разрезе поверхности моря вертикальной плоскостью, проведенной в заданном направлении.

§ 29. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ НА ВЫХОДЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Для любого линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^nY(t)}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}Y(t)}{dt^{n-1}}+\ldots+a_n(t)Y(t)=X(t)$$

общее решение может быть представлено в виде

$$Y(t)=\sum_{j=1}^{n}C_jy_j(t)+Y_I(t),$$

где $y_j(t)$ — система независимых частных интегралов однородного уравнения; C_j — постоянные, определяемые начальными условиями; $Y_I(t)$ — частный интеграл неоднородного уравнения, удовлетворяющий нулевым начальным условиям и определяемый равенством

$$Y_I(t)=\int_0^t p(t,t_1)X(t_1)\,dt_1,$$

где $p(t,t_1)$ — весовая функция системы (импульсная переходная функция), определяемая частными интегралами $y_j(t)$ по формуле

$$p(t,t_1)=\begin{vmatrix} y_1(t_1) & \ldots & y_n(t_1)\\ y_1'(t_1) & \ldots & y_n'(t_1)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-2)}(t_1) & \ldots & y_n^{(n-2)}(t_1)\\ y_1(t) & \ldots & y_n(t)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix} y_1(t_1) & \ldots & y_n(t_1)\\ y_1'(t_1) & \ldots & y_n'(t_1)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ y_1^{(n-2)}(t_1) & \ldots & y_n^{(n-2)}(t_1)\\ y_1^{(n-1)}(t_1) & \ldots & y_n^{(n-1)}(t_1)\end{vmatrix}.$$

В том случае, когда коэффициенты уравнения постоянные, весовая функция зависит только от разности аргументов

$$p(t,t_1)=p(t-t_1).$$

Если система устойчива, $a_j(t)=\text{const}$, а $X(t)$ стационарна, то при достаточно большом t (сравнительно с временем переходного процесса) функцию $Y(t)$ можно считать также стационарной. В этом случае

$$\overline{y} = \frac{1}{a_n}\,\overline{x},$$

$$S_y(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\left|(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n\right|^2},$$

а $K_y(\tau)$ может быть найдена путем обращения $S_y(\omega)$ по Фурье.

В том случае, когда $X(t)$ связана со стационарной случайной функцией $Z(t)$ формулой

$$X(t) = b_0\frac{d^m Z(t)}{dt^m} + b_1\frac{d^{m-1}Z(t)}{dt^{m-1}} + \ldots + b_m Z(t),$$

имеем

$$S_y(\omega) = \frac{|b_0(i\omega)^m + b_1(i\omega)^{m-1} + \ldots + b_m|^2}{|(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n|^2}\cdot S_z(\omega),$$

причем последняя формула остается справедливой и в том случае, если $Z(t)$ не имеет производной m-го порядка, но выражение для $S_y(\omega)$ при росте $|\omega|$ убывает быстрее, чем $\frac{1}{|\omega|}$.

Если время t, прошедшее после начала работы системы невелико, система неустойчива, функция $X(t)$ нестационарна или коэффициенты уравнения зависят от времени, то (считаем для простоты C_j не связанными с $X(t)$):

$$\overline{y}(t) = \sum_{j=1}^{n}\overline{y}_j(t)C_j + \int\limits_0^t p(t,t_1)\overline{x}(t_1)\,dt_1,$$

$$K_y(t_1,t_2) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} y_j^*(t_1)y_l(t_2)k_{jl} + \\ + \int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{t_2} p^*(t_1,\xi)p(t_2,\eta)K_x(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi,$$

где $\|k_{jl}\|$ — корреляционная матрица системы случайных величин C_j.

Для уравнения с постоянными коэффициентами в последних формулах вместо $p(t_1, t_2)$ нужно подставить $p(t_1 - t_2)$.

Если $X(t)$ — стационарная функция, то

$$Y_I(t) = \int\limits_0^t p(t, t_1)\dot{\bar{x}}\, dt_1 + \int\limits_{-\infty}^{\infty} y(\omega, t)\, d\Phi(\omega),$$

где $y(\omega, t)$ — взятый при нулевых начальных условиях частный интеграл уравнения, в котором $X(t)$ заменена на $e^{i\omega t}$.

В этом случае

$$k_{y_I}(t_1, t_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y^*(\omega, t_1) y(\omega, t_2) S_x(\omega)\, d\omega.$$

Аналогичная формула имеет место и тогда, когда

$$X(t) = b(t) X_1(t),$$

где $X_1(t)$ стационарна. В этом случае под $y(\omega, t)$ нужно понимать частный интеграл уравнения, в котором правая часть заменена на $b(t)e^{i\omega t}$, т. е. по-прежнему стационарная функция заменена на $e^{i\omega t}$. Если задана система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, соответствующая устойчивой динамической системе,

$$\frac{dY_j(t)}{dt} + \sum_{l=1}^{n} a_{jl} Y_l(t) = X_j(t), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где a_{jl} — постоянные, $X_j(t)$ — стационарные случайные функции, то для достаточно большого t ее решения являются стационарными случайными функциями, спектральные плотности и взаимные спектральные плотности которых могут быть выражены через спектральные плотности и взаимные спектральные плотности правых частей уравнений:

$$S_{y_j}(\omega) = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{m=1}^{n} A_{lj}^* A_{mj} S_{x_l x_m}(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2},$$

$$S_{y_j y_k}(\omega) = \frac{\sum\limits_{l=1}^{n} \sum\limits_{m=1}^{n} A_{lj}^{*}(\omega) A_{mk}(\omega) S_{x_l x_m}(\omega)}{|\Delta(\omega)|^2}.$$

Здесь $\Delta(\omega)$ — определитель, составленный из коэффициентов левых частей уравнений:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} a_{11} + i\omega & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} + i\omega & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} + i\omega \end{vmatrix},$$

$A_{lj}(\omega)$ — алгебраическое дополнение элемента этого определителя, стоящего на пересечении l-й строки и j-го столбца, а $S_{x_j x_j}(\omega) \equiv S_{x_j}(\omega)$.

Математическое ожидание и центральные моменты μ_j решения $Y_I(t)$ линейного уравнения с детерминированными коэффициентами (системы уравнений) для любого t определяются формулами

$$\overline{y}_I = \int\limits_0^t p(t, t_1)\overline{x}(t_1)\, dt_1,$$

$$\mu_2 = \int\limits_0^t \int\limits_0^t p(t, t_1)p(t, t_2)K_x(t_1, t_2)\, dt_1\, dt_2,$$

$$\mu_3 = \int\limits_0^t \int\limits_0^t \int\limits_0^t p(t, t_1)p(t, t_2)p(t, t_3)K_x(t_1, t_2, t_3)\, dt_1\, dt_2\, dt_3,$$

$$\ldots$$

где $X(t)$ — случайная функция, стоящая в правой части уравнения, а

$$K_x(t_1, t_2, \ldots, t_j) = \mathrm{M}\left\{\prod_{l=1}^{j} [X(t_l) - \overline{x}(t_l)]\right\}.$$

Если правые части уравнений — нормальные функции, то $Y_I(t)$ является нормальной случайной функцией.

Задачи

29.1. Динамическая система первого порядка описывается уравнением

$$\frac{dY(t)}{dt} + \alpha Y(t) = X(t), \qquad \alpha > 0.$$

Определить корреляционную функцию $Y(t)$ при $t \gg \frac{1}{\alpha}$, если спектральная плотность функции $X(t)$ в полосе частот $|\omega| \leqslant \omega_0$, где $\omega_0 \gg \alpha$, может быть принята постоянной:

$$S_x(\omega) \approx c^2.$$

29.2. Определить спектральную плотность стационарного решения уравнения

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 2h\frac{dY(t)}{dt} + k^2Y(t) = \frac{dX(t)}{dt} + \alpha X(t) \qquad (h > 0),$$

если

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}\,.$$

29.3. Динамическая система описывается уравнением

$$a_0\frac{dY(t)}{dt} + a_1Y(t) = b_0\frac{dX(t)}{dt} + b_1X(t),$$

где $\overline{x} = \mathrm{const}$ дано, $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $\frac{a_1}{a_0} > 0$.

Определить математическое ожидание и дисперсию стационарного решения этого уравнения.

29.4. Отклонения $U(t)$ кренометра, расположенного в плоскости мидель-шпангоута корабля, определяются уравнением

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2} + 2h\frac{dU(t)}{dt} + n^2U(t) = n^2F(t) \qquad (n > h > 0),$$

где $F(t) = \frac{1}{q}[\ddot{\eta}_c(t) + c\ddot{\theta}(t)]$, угол крена $\theta(t)$ и скорость бокового смещения центра тяжести корабля $\dot{\eta}_c(t)$ вследствие орбитального движения можно считать несвязанными случайными функциями,

$$K_{\dot{\eta}_c}(\tau) = a_1e^{-\alpha_1|\tau|}\left(\cos\beta_1\tau + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sin\beta_1|\tau|\right),$$

$$K_\theta(\tau) = a_2 e^{-\alpha_2|\tau|}\left(\cos\beta_2\tau + \frac{\alpha_2}{\beta_2}\sin\beta_2|\tau|\right),$$

а все постоянные, входящие в формулы, известны. Определить $S_u(\omega)$ $(t \gg \frac{1}{h})$.

29.5. Астатический гироскоп с пропорциональной коррекцией расположен на корабле и используется в качестве указателя вертикали. Определить дисперсию отклонения его оси α от направления, даваемого физическим маятником, если угол α определяется уравнением

$$\dot{\alpha}(t) + \varepsilon\alpha(t) = \varepsilon U(t) \qquad (\varepsilon > 0),$$

где $U(t)$ — ошибка физического маятника, для определения спектральной плотности $S_u(\omega)$ которой воспользоваться решением задачи 29.4; принять время, прошедшее после включения гироскопа, достаточно большим, чтобы $\alpha(t)$ считать стационарным, а для определения спектральной плотности $S_u(\omega)$ воспользоваться результатом решения задачи 29.4, положив

$$\begin{array}{lll}
a_1 = 1{,}24\ \frac{\text{м}^2}{\text{сек}^2}; & \alpha_1 = 0{,}1\ \text{сек}^{-1}; & \beta_2 = 0{,}20\ \text{сек}^{-1};\\
a_2 = 3{,}8\cdot 10^{-2}\ \text{рад}^2; & \alpha_2 = 0{,}04\ \text{сек}^{-1}; & \beta_2 = 0{,}42\ \text{сек}^{-1};\\
h = 0{,}6\ \text{сек}^{-1}; & n = 6{,}28\ \text{сек}^{-1}; & c = 10\ \text{м};\\
 & & \varepsilon = 0{,}01\ \text{сек}^{-1}.
\end{array}$$

(Переходный процесс считать закончившимся.)

29.6. Определить спектральную плотность и корреляционную функцию стационарного решения уравнения

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 2h\frac{dY(t)}{dt} + k^2Y(t) = X(t) \qquad (k \geqslant h > 0),$$

если можно считать, что $X(t)$ обладает свойствами «белого шума», т. е. $S_x(\omega) = c^2 = \text{const}$.

29.7. Угловое отклонение рамки $\Theta(t)$ гальванометра от положения равновесия при разомкнутой цепи определяется уравнением

$$J\frac{d^2\Theta(t)}{dt^2} + r\frac{d\Theta(t)}{dt} + D\Theta(t) = M(t), \qquad 4JD \geqslant r^2,$$

где J — момент инерции рамки; r — коэффициент трения; D — коэффициент жесткости нити, на которой подвешена рамка;

$M(t)$ — возмущающий момент, вызываемый случайными ударами молекул окружающей среды.

Определить спектральную плотность и корреляционную функцию угла $\Theta(t)$, если спектральную плотность $M(t)$ можно считать постоянной, а согласно результатам статистической физики $\sigma_\Theta^2 D = kT$, где k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура среды.

29.8. Случайная стационарная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ уравнением

$$\frac{d^3Y(t)}{dt^3} + 6\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 11\frac{dY(t)}{dt} + 6Y(t) = 5X(t) + 7\frac{d^3X(t)}{dt^3}.$$

Определить спектральную плотность $S_y(\omega)$ для стационарного решения уравнения, если $S_x(\omega) = \frac{4}{\pi(\omega^2+1)}$.

29.9. Может ли уравнение

$$\ddot{Y}(t) - 2\dot{Y}(t) + 3Y(t) = X(t),$$

содержащее в правой части равенства стационарную функцию $X(t)$, иметь стационарное решение?

29.10. Определить дисперсию ординаты центра тяжести корабля $\zeta_c(t)$ на волнении, если

$$\ddot{\zeta}_c(t) + 2h\dot{\zeta}_c(t) + \omega_0^2\zeta_c(t) = \omega_0^2 X(t),$$

где ордината волнового профиля $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

h и ω_0 — постоянные, определяемые параметрами корабля; α — параметр, характеризующий нерегулярность волнения; β — преобладающая частота волнения; $\omega_0 \geqslant h > 0$.

29.11. Ошибка акселерометра, измеряющего горизонтальное ускорение самолета, определяется уравнением

$$\ddot{\varepsilon}(t) + 2h\dot{\varepsilon}(t) + n^2\varepsilon(t) = gn^2\gamma(t),$$

где $h = 0{,}6$ сек$^{-1}$, $n = 6{,}28$ сек$^{-1}$, $g = 9{,}81$ м/сек^2, угол крена $\gamma(t)$ — стационарная нормальная случайная функция, корреляционная функция которой дана:

$$K_\gamma(\tau) = 3\cdot 10^{-4}e^{-0{,}6|\tau|}\left(\cos 5\tau + 0{,}12\sin 5|\tau|\right).$$

Определить дисперсию $\varepsilon(t)$ при установившемся режиме работы акселерометра.

29.12. Доказать, что если на вход линейной устойчивой динамической системы, описываемой уравнением с постоянными коэффициентами, поступает случайная функция $X(t)$, обладающая свойствами «белого шума» ($S_x(\omega) = c^2$), то при достаточно большом времени после включения системы корреляционная функция выходного сигнала $Y(t)$ определяется равенством

$$K_y(\tau) = 2\pi c^2 \int\limits_0^\infty p^*(t)p(t+|\tau|)\,dt,$$

где $p(t)$ — весовая функция системы.

29.13. Стационарная случайная функция $Y(t)$ связана со стационарной функцией $X(t)$, спектральная плотность которой известна, уравнением

$$\ddot{Y}(t) + 2h\dot{Y}(t) + k^2Y(t) = k^2X(t),$$

где $k \geqslant h > 0$.

Определить взаимную спектральную плотность $S_{yx}(\omega)$ и взаимную корреляционную функцию $R_{yx}(\tau)$.

29.14. Дано:

$$\ddot{Y}(t) + 8\dot{Y}(t) + 7Y(t) = X(t), \qquad K_x(\tau) = 4e^{-\alpha^2\tau^2}.$$

Определить корреляционную функцию $Y(t)$ для моментов времени, превосходящих время переходного процесса.

29.15. На вход динамической системы с весовой функцией $p(t)$ поступает стационарная случайная функция $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием. Определить дисперсию отклонения выходного сигнала $Y(t)$ от некоторой стационарной функции $Z(t)$, если $K_x(\tau)$ и $R_{xz}(\tau)$ известны, $\overline{z} = 0$, а переходный процесс системы можно считать окончившимся.

29.16. Воспользовавшись спектральным разложением стационарной случайной функции $X(t)$, определить для момента времени $t \gg \frac{1}{a}$ дисперсию интеграла уравнения

$$\dot{Y}(t) + aY(t) = tX(t)$$

при нулевых начальных условиях, если

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}\,.$$

29.17. Вследствие случайного дебаланса гиромотора, установленного на платформе, имеющей случайное вертикальное ускорение $W(t)$, гироскоп направления совершает прецессию с угловой скоростью

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{PL}{H}\left[1 + \frac{1}{g}W(t)\right].$$

Определить математическое ожидание и дисперсию азимутального ухода $\alpha(t)$ в момент времени t, если $\mathrm{M}[L] = 0$, $\mathrm{D}[L] = \sigma_l^2$, $K_W(\tau)$ и $\overline{W}$ заданы, P, H, g — известные постоянные, а между L и $W(t)$ нет связи.

29.18. Определить корреляционную функцию частного интеграла $Y_I(t)$ уравнения

$$\ddot{Y}(t) + 2h\dot{Y}(t) + k^2 Y(t) = e^{-at}X(t)$$

при нулевых начальных условиях, если

$$S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2} \qquad (k \geqslant h > 0).$$

29.19. Случайная функция $Y(t)$ связана со случайной функцией $X(t)$ уравнением

$$\dot{Y}(t) - tY(t) = X(t).$$

Определить $K_y(t_1, t_2)$, если $K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}$, а при $t = 0$, $Y(t) = 0$.

29.20. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию частного интеграла уравнения

$$\dot{Y}(t) - a^2 tY(t) = bX(t)$$

при нулевых начальных условиях, если $\overline{x}(t) = t$, $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2}$.

29.21. Определить математическое ожидание и корреляционную функцию решения дифференциального уравнения

$$\dot{Y}(t) + \frac{1}{t}Y(t) = X(t),$$

если при $t = t_0 > 0 \quad Y(t) = y_0$, где y_0 — неслучайная величина, $\overline{x}(t) = \frac{1}{t}$;

$$K_x(t_1, t_2) = t_1 t_2 e^{-\alpha|t_2 - t_1|}.$$

29.22. Написать общее выражение для математического ожидания и корреляционной функции решения $Y(t)$ дифференциального уравнения n-го порядка, весовая функция которого $p(t_1, t_2)$, если в правой части уравнения стоит случайная функция $X(t)$; $\overline{x}(t)$ и $K_x(t_1, t_2)$ известны; начальные значения $Y(t)$ и первых $n-1$ ее производных — случайные величины, не связанные с ординатами случайной функции $X(t)$, с известными математическими ожиданиями e_j и корреляционной матрицей $\|k_{jl}\|$ $(l, j = 1, 2, \ldots, n)$.

29.23. Дана система

$$\dot{Y}_1(t) + 3Y_1(t) - Y_2(t) = X(t), \qquad \dot{Y}_2(t) + 2Y_1(t) = 0.$$

Определить дисперсию $Y_2(t)$ для $t = 0{,}5$ сек, если при $t = 0$ $Y_1(t)$ и $Y_2(t)$ являются случайными величинами, не связанными с $X(t)$; $\mathrm{D}[Y_1(0)] = 1$, $\mathrm{D}[Y_2(0) = 2]$, $\mathrm{M}\big\{[Y_1(0) - \overline{y}_1(0)][Y_2(0) - \overline{y}_2(0)]\big\} = -1$,

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi(\omega^2 + 1)^2} \ \text{сек}.$$

29.24. Определить дисперсии решений системы уравнений в момент времени t

$$\left.\begin{aligned} &\dot{Y}_1(t) + 3Y_1(t) - Y_2(t) = tX(t), \\ &\dot{Y}_2(t) + 2Y_1(t) = 0, \end{aligned}\right\}$$

если начальные условия нулевые, а

$$S_x(\omega) = \frac{2}{\pi(\omega^2 + 1)^2}.$$

29.25. Определить дисперсию решений системы уравнений при $t = 0{,}5$ сек:

$$\left.\begin{aligned}&\dot{Y}_1(t) + 3Y_1(t) - Y_2(t) = X(t),\\ &\dot{Y}_2(t) + 2Y_1(t) = 0,\end{aligned}\right\}$$

если $S_x(\omega) = \frac{2}{\pi(\omega^2+1)}$, а начальные условия нулевые.

29.26. На вход автоматического фрикциона, используемого в качестве дифференцирующе-сглаживающего устройства, поступает случайная функция $X(t)$. Определить дисперсию сглаженной функции $Z(t)$ и дисперсию сглаженной скорости ее изменения $Y(t)$, если работа фрикциона описывается системой уравнений

$$\left.\begin{aligned}&b\dot{Y}(t) + Y(t) = a\dot{X}(t),\\ &b\dot{Z}(t) + Z(t) = X(t),\end{aligned}\right\}$$

где a и b — постоянные масштабные коэффициенты, $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$, а переходный процесс закончился.

29.27. Определить для $t = 1$ закон распределения решения уравнения

$$\ddot{Y}(t) + 3\dot{Y}(t) + 2Y(t) = X(t),$$

если при $t = 0$ $Y(t) = Y_0$, $\dot{Y}(t) = \dot{Y}_0$, а Y_0, $\dot{Y}_0$ и $X(t)$ нормальны и взаимно не коррелированы, $\mathrm{M}[Y_0] = \mathrm{M}[\dot{Y}_0] = \overline{x} = 0$, $\mathrm{D}[Y_0] = 1{,}5$, $\mathrm{D}[\dot{Y}_0] = 0{,}2$, $K_x(\tau) = 2e^{-|\tau|}$.

29.28. Отклонение $U(t)$ от вертикали плоского физического маятника, плоскость качания которого совпадает с диаметральной плоскостью корабля, определяется уравнениями

$$\ddot{U}(t) + 2h\dot{U}(t) + Y(t)U(t) = X(t),$$

$$\begin{aligned}X(t) = -\frac{n^2}{g}\Big\{\ddot{\xi}_c(t) + \ddot{\eta}_c(t)\Phi(t) - \rho_x\left[\dot{\Phi}^2(t) + \dot{\Psi}^2(t) + \Psi(t)\ddot{\Psi}(t)\right] +\\ + \rho_z\left[\ddot{\Psi}(t) + \ddot{\Phi}(t)\Theta(t) + 2\dot{\Phi}(t)\dot{\Theta}(t)\right]\Big\},\end{aligned}$$

$$Y(t) = n^2\left[1 - \frac{\ddot{\zeta}_c(t) - \rho_x\ddot{\Psi}(t)}{g}\right],$$

где все коэффициенты постоянны, а угол рыскания $\Phi(t)'$, угол дифферента $\Psi(t)$, угол крена $\Theta(t)$ и скорости координат центра тяжести корабля $\dot{\xi}_c(t)$, $\dot{\eta}_c(t)$, $\dot{\zeta}_c(t)$ — нормальные стационарные, не связанные между собой случайные функции.

Выразить спектральные плотности $S_x(\omega)$, $S_y(\omega)$ и $S_{xy}(\omega)$ необходимые для нахождения вероятностных характеристик $U(t)$ на моделирующем устройстве, через спектральные плотности $S_\varphi(\omega)$, $S_\psi(\omega)$, $S_\theta(\omega)$, $S_{\dot{\xi}_c}(\omega)$, $S_{\dot{\eta}_c}(\omega)$, $S_{\dot{\zeta}_c}(\omega)$.

29.29. Для момента времени $t \gg \frac{1}{k}$ найти асимметрию Sk и эксцесс Ex частного интеграла уравнения

$$\dot{Y}(t) + kY(t) = X^2(t),$$

удовлетворяющего нулевым начальным условиям, если $X(t)$ — нормальная стационарная функция, $\overline{x} = 0$, $K_x(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}$.

29.30. Определить взаимную корреляционную функцию $R_{yz}(\tau)$ стационарных решений уравнений:

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 2h_1\frac{dY(t)}{dt} + k_1^2Y(t) = k_1^2X(t),$$

$$\frac{d^2Z(t)}{dt^2} + 2h_2\frac{dZ(t)}{dt} + k_2^2Z(t) = k_2^2X(t),$$

где случайная функция $X(t)$ обладает свойством белого шума ($S_x(\omega) \approx c^2$), $k_1 > h_1 > 0$, $k_2 > h_2 > 0$.

29.31. Определить дисперсию решения уравнения

$$\dot{Y}(t) + AY(t) = BX(t),$$

если начальные условия нулевые, случайная величина A нормальна, A, B и $X(t)$ — независимы, $\overline{x} = 0$, а σ_a, σ_b, $K_x(\tau)$, $\overline{a}$ и $\overline{b}$ даны.

29.32. Углы α и β отклонения физического маятника, находящегося на подвижном основании, определяются системой уравнений

$$\dot{\alpha} + a\alpha + TY(t)\beta = X_1(t),$$

$$\dot{\beta} + a\beta - TY(t)\beta = X_2(t),$$

где a и T — постоянные, а X_1, X_2 и Y — нормальные стационарные функции, математические ожидания и корреляционные функции которых известны, $\overline{y} = 0$. Определить $\overline{\alpha}$ и $\overline{\beta}$, считая начальные условия нулевыми.

29.33. Определить дисперсию ошибки $Y(t)$ «невозмущаемой» гироинерционной системы через час после ее включения, если $Y(t)$ определяется уравнением

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + \nu^2 Y(t) = X(t),$$

где $\nu = 1{,}24 \cdot 10^{-3}$ сек$^{-1}$ — частота М. Шулера, а $X(t)$ — ошибка акселерометра, которую можно считать стационарной нормальной функцией времени, $\overline{x} = 0$, $K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$, $\sigma_x = 0{,}01\ \frac{\text{м}}{\text{сек}^2}$, $\alpha = 0{,}1$ сек$^{-1}$.

29.34. Угловые отклонения α и β свободного гироскопа, используемого в качестве указателя вертикали на качающемся корабле, приближенно определяются системой уравнений

$$J_1\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = -k_1 \operatorname{sgn}[\dot{\Psi}(t)],$$
$$J_2\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} = k_1 \operatorname{sgn}[\dot{\Theta}(t)],$$

где моменты инерции J_1, J_2, кинетический момент ротора H и коэффициенты сухого трения k_1 и k_2 — постоянные, а угол крена корабля $\Theta(t)$ и угол дифферента $\Psi(t)$ можно считать независимыми стационарными нормальными функциями времени, корреляционные функции которых даны.

Определить $\mathrm{D}[\alpha(t)]$ и $\mathrm{D}[\beta(t)]$, если t велико.

У к а з а н и е. Ввести новую функцию

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{q}}\,\alpha(t) + \frac{i}{\sqrt{p}}\,\beta(t), \qquad q = \frac{H}{J_2}, \qquad p = \frac{H}{J_1}$$

и заменить $\operatorname{sgn}[\dot{\Psi}(t)]$ и $\operatorname{sgn}[\dot{\Theta}(t)]$ интегралами [69].

29.35. Определить дисперсию случайной функции $Z(t)$, определяемой уравнением $\dot{Z}(t) + a^2[1 + Y(t)]Z(t) = X(t)$, $Z(0) = 0$, где $a = \text{const}$, $X(t) = Y(t)$ — независимые стационарные нормальные функции, математические ожидания которых равны нулю, а корреляционные функции даны.

§ 30. ОПТИМАЛЬНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Будем понимать под оптимальной линейной динамической системой систему, которая по входной функции $X(t) = U(t) + V(t)$, где $U(t)$ — «полезный сигнал», а $V(t)$ — «помеха», получает на выходе функция

$$Y(t) = \mathrm{L}X(t) = \int\limits_0^\infty l(t, t_1)X(t_1)\, dt_1,$$

для которой

$$\mathrm{M}[Y(t) - Z(t)] = 0; \qquad \mathrm{D}[Y(t) - Z(t)] = \mathrm{D}[\varepsilon(t)] = \min,$$

где L — символ искомого линейного оператора, $Z(t) = \mathrm{N}U(t)$, N — символ известного оператора, который также линейный, т. е. $Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t, t_1)U(t_1)\, dt_1$. Будем считать, что:

а) случайные функции $U(t)$ и $V(t)$ стационарны и стационарно связаны, а операторы L и N не зависят от времени;

б) спектральная плотность $S_x(\omega) = S_u(\omega)+S_v(\omega)+S_{uv}(\omega)+ S^*_{uv}(\omega)$ является дробно-рациональной функцией своего аргумента, т. е. может быть представлена в виде

$$S_x(\omega) = a^2 \frac{|P_m(\omega)|^2}{|Q_n(\omega)|^2},$$

где полиномы $P_m(\omega)$ и $Q_n(\omega)$ имеют корни, расположенные только в верхней полуплоскости комплексного переменного, т. е.

$$P_m(\omega) = \prod_{j=1}^{\beta}(\omega - \mu_j)^{m_j}, \qquad Q_n(\omega) = \prod_{l=j}^{\gamma}(\omega - \nu_l)^{n_l},$$

где комплексные числа μ_j и ν_l имеют положительные мнимые части m_j и n_l — кратности соответствующих корней

$$\sum_{j=1}^{\beta} m_j = m, \qquad \sum_{l=1}^{\gamma} n_l = n;$$

в) значения ординат функции $X(t)$ используются за интервал времени $(-\infty, t)$.

Если система работает без запаздывания (т. е. $Z(t)$ является результатом применения некоторого оператора к текущим или будущим значениям ординат функции $X(t)$), то

$$L(i\omega) = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{Q_n(\omega)}{P_m(\omega)}\, \chi(\omega),$$

где

$$\chi(\omega) = \sum_{r=1}^{\alpha} \sum_{k=1}^{l_r} \frac{c_{kr}}{(\omega - \lambda_r)^k}\,,$$

$$c_{kr} = \frac{1}{(l_r - k)!} \cdot \frac{d_k^{l_r - k}}{d_\omega^{l_r - k}} \left[(\omega - \lambda_r)^{l_r} \cdot \frac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)}\, S_{xz}(\omega) \right] \Bigg|_{\omega=\lambda_r},$$

λ_r $(r = 1, 2, \ldots, \alpha)$ — полюс кратности l_r выражения $\frac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)}\, S_{xz}(\omega)$, лежащий в верхней полуплоскости.

Если оптимальная динамическая система должна работать с запаздыванием (т. е. функция $Z(t)$ является результатом применения некоторого оператора к ординатам функции $V(t)$ в момент времени, на τ_0 секунд предшествующий текущему времени t), то

$$\mathrm{L}(i\omega) = \frac{S_{xz}(\omega)}{S_x(\omega)} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{Q_n(\omega)}{P_m(\omega)}\, \Psi(\omega),$$

где

$$\Psi(\omega) = \sum_{r=1}^{\alpha'} \sum_{k=1}^{l'_r} \frac{c'_{kr}}{(\omega - \varkappa_r)^k}\,,$$

$$c'_{kr} = \frac{1}{(l'_r - k)!} \cdot \frac{d_k^{l - k}}{d_\omega^{l_r - k}} \left[(\omega - \chi_r)^{l_r} \cdot \frac{Q_n^*(\omega)}{P_m^*(\omega)}\, S_{xz}(\omega) \right] \Bigg|_{\omega=\chi_r},$$

χ_r $(r = 1, 2, \ldots, \alpha')$ — полюс кратности l'_r выражения $\frac{Q_n^*(\omega)}{P_m(\omega)}\, S_{xz}(\omega)$, лежащий в нижней полуплоскости.

Если динамическая система использует ординаты случайной функции за конечный интервал времени $(t - T, t)$, предшествующий текущему моменту времени t («система с конечной памятью»), а полезный сигнал является суммой полинома $R_k(t)$ заданной степени k (коэффициенты полинома — любые постоянные величины) и стационарной случайной функции

$U(t)$, т. е. функция $X(t)$, поступающая на вход системы, равна сумме

$$X(t) = U(t) + V(t) + R_k(t),$$

то при тех же предположениях о виде спектральной плотности $S_x(\omega)$ весовая функция $l(\tau)$ оптимальной динамической системы определяется формулой:

$$l(t) = \sum_{j=0}^{k} D_j t^j + \sum_{r=l}^{2m} c_r e^{\alpha_r t} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|Q_n(\omega)|^2}{|P_m(\omega)|^2} N(i\omega) S_{xu}(\omega) e^{i\omega t} d\omega +$$
$$+ \sum_{l=1}^{n-m} A_l \delta^{(l-1)}(t) + \sum_{l=1}^{n-m} B_l \delta^{(l-1)}(t-T) \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

Здесь α_r — корни уравнения $|P_m(i\alpha)|^2 = 0$, $\mathrm{N}(i\omega)$ — передаточная функция оператора N, а постоянные, входящие в правую часть равенства, определяются путем подстановки выражения $l(\tau)$ в уравнение

$$\int_{0-}^{T+} l(\tau) K_x(t-\tau)\, d\tau - R_{xz}(t) = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j t^j \qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

которому удовлетворяет весовая функция $l(\tau)$ оптимальной динамической системы и уравнивания коэффициентов как у одинаковых степеней t, так и у одинаковых показательных функций. К получаемым таким образом $2n + k + 1$ уравнениям необходимо добавить еще $n + 1$ уравнений, являющихся следствием требования равенства моментов функции $l(\tau)$ и весовой функции $h(\tau)$, соответствующей заданному оператору N, т. е. уравнения

$$\int_{0-}^{T+} l(\tau)\tau^j\, d\tau = \mu_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

где

$$\mu_j = \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau)\tau^j\, d\tau,$$

а дисперсия ошибки $\varepsilon(t)$ для оптимальной системы в данном случае

$$\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = \mathrm{D}[Z(t)] - R_{yz}(0) + \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \mu_j.$$

Аналогично решается задача определения весовой функции оптимальной динамической системы в том случае, если неслучайная часть полезного сигнала содержит линейную комбинацию (с постоянными, но неизвестными параметрами) тригонометрических или показательных функций времени. Отличие будет заключаться только в том, что в выражении для $l(\tau)$ появится аналогичная линейная комбинация, коэффициенты которой могут быть определены путем подстановки $l(\tau)$ в исходное интегральное уравнение.

Ряд нестационарных задач может быть решен методом Калмана: если[3] $X(t) = U(t) + V(t)$, а полезный сигнал $U(t)$ и помеха $V(t)$ нестационарны, но связаны с независимыми белыми шумами $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ ($K_{\xi_1}(\tau) = \delta(\tau)$, $K_{\xi_2}(\tau) = \delta(\tau)$, $\overline{\xi}_1 = \overline{\xi}_2 = 0$), уравнениями

$$\frac{dU(t)}{dt} = \varphi(t)U(t) + \sqrt{q(t)}\xi_1(t); \qquad V(t) = \sqrt{r(t)}\xi_2(t),$$

где $\varphi(t)$, $q(t)$ и $r(t)$ — заданные функции ($q \geqslant 0$, $r > 0$), то случайная функция $Y(t)$, аппроксимирующая наилучшим образом полезный сигнал $U(t)$ (в смысле среднего квадратического) является решением уравнения[4]

$$\frac{dY(t)}{dt} = \varphi(t)Y(t) + \varkappa(t)[X(t) - Y(t)],$$

где

$$\varkappa(t) = \frac{\lambda(t)}{r(t)}, \quad \frac{d\lambda(t)}{dt} = 2\varphi(t)\lambda(t) - \frac{1}{r(t)}\lambda^2(t) + q(t),$$
$$\lambda(0) = K_u(0,0).$$

---

[3] Обозначения, принятые в задачнике, отличаются от обозначений в работах Калмана.

[4] Аналогичные формулы получены Калманом и в том случае, когда полезный сигнал, помеха и наблюдаемый сигнал являются многомерными случайными процессами, линейно связанными с многомерными белыми шумами (см., например, [64]).

Если вид оператора L задан с точностью до числовых значений входящих в него параметров, то нахождение оптимальной линейной системы сводится к решению задачи на экстремум функции нескольких переменных.

Например, при определении значения функции $U(t)$ в момент времени $t+\tau$ в качестве функции $Y(t)$ можно принять

$$Y(t) = a_1 U(t) + a_2 \dot{U}(t)$$

и определить a_1 и a_2 так, чтобы при $\overline{y}(t) = \overline{z}(t)$

$$\mathrm{D}[Y(t) - Z(t)] = \min .$$

При такой постановке задачи определение вида оператора L (значений постоянных, входящих в выражение для этого оператора) сводится к определению экстремума функции нескольких переменных.

Задачи

30.1. На вход динамической системы поступает $X(t) = U(t) + V(t)$, где $U(t)$ — полезный сигнал, а $V(t)$ — помеха. Определить $S_x(\omega)$, если $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$ и $S_{uv}(\omega)$ известны.

30.2. На вход динамической системы, предназначенной для получения функции $Z(t) = \dot{U}(t)$, поступает случайная функция $X(t) = U(t)+V(t)$; $V(t)$ — помеха, возникающая при получении значений ординаты функции $U(t)$. Определить взаимную спектральную плотность $S_{xz}(\omega)$, если $S_u(\omega)$, $S_{uv}(\omega)$ и $S_v(\omega)$ известны.

30.3. Определить передаточную функцию $L(i\omega)$ оптимальной динамической системы, предназначенной для получения производной от случайной функции $X(t)$ за τ секунд до последнего наблюдения ординаты $X(t)$, если

$$S_x(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}.$$

Найти дисперсию ошибки определения скорости.

30.4. Определить передаточную функцию $L(i\omega)$ оптимальной дифференцирующей системы, если системы служат для определения производной случайной функции $U(t)$ в момент времени $t-\tau$ $(\tau > 0)$, а на вход системы поступает случайная функция $X(t)$, являющаяся суммой полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$, которая не связана с $U(t)$. Дано:

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{(\omega^2+\alpha^2)^2}\,, \qquad S_v(\omega) = \frac{b^2}{(\omega^2+\beta^2)^2}\,.$$

30.5. Определить передаточную функцию оптимального фильтра, предназначенного для получения текущего значения полезного сигнала, если на его вход поступает сумма полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$; $U(t)$ и $V(t)$ взаимно не коррелированы, а

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2+\alpha^2}\,, \qquad S_v(\omega) = \frac{b^2}{\omega^2+\beta^2}\,.$$

30.6. Выразить дисперсию ошибки оптимальной динамической системы, предназначенной для аппроксимации функции $Z(t) = \mathrm{N}U(t)$ через спектральные плотности $S_u(\omega)$, $S_v(\omega)$, $S_{uv}(\omega)$ ($U(t)$ — полезный сигнал, N — оператор, результат применения которого к функции $U(t)$ — система должна выработать с ошибкой, имеющей минимальную дисперсию, а $V(t)$ — помеха).

30.7. На вход динамической системы, предназначенной для получения производной $\dot U(t)$, поступает $X(t) = U(t) + V(t)$, где помеха $V(t)$ не связана с $U(t)$,

$$S_u(\omega) = \frac{\alpha^2}{(\omega^2-2\beta^2)^2+4\gamma^4}\,, \qquad S_v(\omega) = c^2 = \text{const}.$$

Определить оптимальную передаточную функцию системы и минимальную дисперсию ошибки определения $\dot U(t)$.

30.8. Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы для получения значения ординаты $U(t+\tau)$, если на вход системы поступает случайная функция $U(t)$,

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2+\alpha^2}\,, \qquad \alpha > 0, \quad \tau \geqslant 0.$$

30.9. Спектральная плотность входного сигнала

$$S_x(\omega) = \frac{l}{(\omega^2+1)^2},$$

время упреждения $\tau \geqslant 0$. Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы, если система проектируется для определения $Z(t) = X(t+\tau)$.

30.10. Спектральная плотность входного сигнала

$$S_x(\omega) = \frac{a^2(\omega^2+\alpha^2)}{\omega^4+2\beta^4}\,.$$

Найти оптимальную передаточную функцию динамической системы для определения $X(t+\tau)$ и дисперсию ошибки определения $X(t+\tau)$ при $\tau \geqslant 0$.

30.11. На вход динамической системы поступает сумма полезного сигнала $U(t)$ и помехи $V(t)$, не коррелированных между собой. Определить оптимальную передаточную функцию для получения значения сигнала в момент времени $t+\tau$, если $\tau \geqslant 0$,

$$S_u(\omega) = \frac{a^2}{\omega^2+\alpha^2}\,, \qquad S_v(\omega) = \frac{b^2}{\omega^2+\beta^2}\,.$$

30.12. На вход запаздывающего фильтра поступает сумма некоррелированных сигналов: полезного $U(t)$ и помехи $V(t)$, корреляционные функции которых известны:

$$K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}, \qquad K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\beta|\tau|}.$$

Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы и дисперсию ошибки фильтрации, если время запаздывания τ_0 $(\tau_0 \geqslant 0)$.

30.13. Спектральная плотность входного сигнала $S_x(\omega) = \frac{\alpha^2}{\omega^4+4\alpha^4}$, время упреждения τ $(\tau \geqslant 0)$. Определить оптимальную передаточную функцию динамической системы для нахождения $X(t+\tau)$.

30.14. Для определения текущего значения угловой скорости бортовой качки корабля $\dot\Theta(t)$ используется динамическая система, на вход которой поступает текущее значение угла крена $\Theta(t)$, искаженное ошибкой изменения $V(t)$. Определить дисперсию ошибки $\varepsilon(t)$ определения угловой скорости качки, если динамическую систему можно считать оптимальной, $\overline{\theta} = 0$, $\overline{v} = 0$, $K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha_v|\tau|}$, $R_{\theta v}(\tau) \equiv 0$, $K_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$, $\sigma_\theta = 0{,}1$ рад, $\alpha = 0{,}1$ сек$^{-1}$, $\beta = 0{,}75$ сек$^{-1}$, $\sigma_v = 2\cdot 10^{-2}$ рад, $\alpha_v = 0{,}5$ сек$^{-1}$.

30.15. Координата корабля, идущего прямым курсом при неизменной скорости, определяется с ошибкой $V(t)$, характеризуемой корреляционной функцией

$$K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

где $\sigma_v = 25$ м, $\alpha = 0{,}25$ сек$^{-1}$.

Определить наибольшую точность, достижимую при определении скорости изменения координаты корабля, если время наблюдения $T = 20$, 40 и 240 сек.

30.16. В условиях предыдущей задачи определить наибольшую точность, достижимую при определении скорости изменения координаты корабля, если

$$K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

а остальные условия те же.

30.17. Динамическая система проектируется для получения значения случайной функции $X(t)$ в момент $t + \tau_0$ по значениям ординат этой функции в течение интервала времени $(t-T, t)$. Определить оптимальную передаточную функцию системы и дисперсию ошибки определения $X(t+\tau_0)$, если измерение ординат функции $X(t)$ осуществляется практически без ошибок:

$$X(t) = c_1 + c_2 t + U(t),$$

где c_1 и c_2 — неизвестные постоянные, а $U(t)$ — случайная функция, корреляционная функция которой

$$K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$$

$\sigma_u = 1$, $\alpha = 0{,}1$ сек$^{-1}$, $\tau_0 = 10$ сек, $T = 40$ сек.

30.18. Динамическая система проектируется для получения производной случайной функции $X(t)$ в момент $t + \tau_0$. Определить оптимальную передаточную функцию системы, если

$$X(t) = c_1 + c_2 t + U(t), \qquad K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|),$$

где c_1 и c_2 — неизвестные постоянные, система обладает «конечной памятью T», т. е. учитывает значения $X(t)$ только за интервал времени $(t-T, t)$, $\sigma_u = 1$, $\alpha = 0{,}1$ сек$^{-1}$, $\tau_0 = 10$ сек, $T = 40$ сек.

30.19. Определить весовую функцию $l(\tau)$ оптимальной динамической системы с «конечной памятью Т», предназначенную для дифференцирования функции $X(t) = R_1(t) + U(t)$ и дисперсию ошибки определения $\dot{X}(t)$, где $R_1(t)$ — полином первой степени, а $K_u(\tau) = \sigma_u^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|)$.

30.20. Для автономного управления самолетами могут быть применены инерциальные системы приборов управления двух типов: в первом случае при работе системы определяется полезный сигнал

$$U_1(t) = c_1 + c_2 t + c_3 \sin \Omega t + c_4 \cos \Omega t,$$

где c_1, c_2, c_3, c_4 — некоторые (неизвестные) постоянные, а $\Omega = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$ сек, во втором случае полезный сигнал имеет вид

$$U_2(t) = c_3 \sin \Omega t + c_4 \cos \Omega t.$$

Найти оптимальные передаточные функции динамических систем, служащих для определения полезного сигнала в первом и втором случае, если системы обладают «конечной памятью Т», $T = 20$ сек, а полезный сигнал, поступающий в систему, искажен ошибкой $V(t)$,

$$K_v(\tau) = \sigma_v^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right),$$

$\overline{v} = 0$, $\alpha = 0{,}5$ сек$^{-1}$, $\beta = 3$ сек$^{-1}$, $\sigma_v^2 = 4 \cdot 10^{-4}$.

30.21. Полезный сигнал $U(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\frac{1}{2t}\, U(t) + a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^4 t^2}}\, \xi_1(t),$$

$a > 0$, $b > 1$, $\overline{\xi}_1 = 0$, $K_{\xi_1}(\tau) = \sigma(\tau)$.

Аддитивная помеха, возникающая при измерении $U(t)$, $V(t) = \frac{1}{a}\, \xi_2(t)$, где $\overline{\xi}_2 = 0$, $K_{\xi_2}(\tau) = \delta(\tau)$, $R_{\xi_1 \xi_2}(\tau) = 0$. Найти линейный оператор, преобразующий функцию $X(t) = U(t) + V(t)$в функцию $Y(t)$, удовлетворяющую условию $\mathrm{D}[Y(t) - U(t)] = \min$, если $U(0) = 0$, $Y(0) = 0$.

30.22. Оптимальная линейная динамическая система предназначена для определения полезного сигнала $U(t)$.

На вход системы поступает $X(t) = U(t) + V(t)$, где $V(t)$ — помеха. Выразить выходную функцию системы $Y(t)$ через $X(t)$, если полезный сигнал удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\frac{\alpha^2}{2}U(t) + \alpha\sqrt{e^{\alpha^2 t} + e^{-\alpha^2 t}}\xi_1(T), \quad U(0) = 0, Y(0) = 0,$$

помеха

$$V(t) = \frac{1}{\alpha}\, e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}}\xi_2(t),$$

где $\alpha > 0$, а $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — независимые центрированные функции, спектральные плотности которых можно считать постоянными:

$$S_{\xi_1}(\omega) = S_{\xi_2}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,.$$

30.23. На качающемся корабле необходимо определить такой момент времени t, чтобы через τ_0 секунд после него линейная функция угла крена $\Theta(t)$ и его производной $n_1\Theta(t) + n_2\dot{\Theta}(t)$ (где n_1 и n_2 — заданные постоянные) приняла бы заданное значение c. Определить оптимальную передаточную функцию упредителя и дисперсию σ_ε^2 ошибки, если $\overline{\theta} = 0$,

$$K_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

30.24. В качестве упрежденного значения случайной функции $X(t + \tau_0)$ взято $Y(t) = aX(t)$. Определить значение постоянной a, обращающей в минимум дисперсию ошибки $\varepsilon(t) = aX(t) - X(t + \tau_0)$ и величину минимальной дисперсии, если $\overline{x} = 0$.

$$S_x(\omega) = \frac{\alpha\sigma_x^2}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}\,.$$

30.25. В качестве упрежденного значения случайной функции $X(t+\tau)$ взята линейная комбинация $Z(t) = aX(t) + b\dot{X}(t)$. Определить значения постоянных a и b, обращающих в минимум дисперсию ошибки

$$\varepsilon(t) = aX(t) + b\dot{X}(t) - X(t + \tau),$$

и величину минимальной дисперсии, если $\overline{x} = 0$,

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right)$$

.

30.26. В качестве упрежденного значения случайной функции $U(t+\tau_0)$ взято $Y(t) = a[U(t)+V(t)]$, где $V(t)$ — ошибка определения текущего значения полезного сигнала $U(t)$. Определить значение постоянной a, обращающей в минимум дисперсию

$$\varepsilon(t) = Y(t) - U(t+\tau_0), \quad \text{где} \quad \mathrm{D}[\xi(t)]_{\min},$$

если

$$S_{uv}(\omega) = 0,\ S_u(\omega) = \frac{\alpha\sigma_u^2}{\pi(\omega^2+\alpha^2)},\ S_v(\omega) = \frac{\beta\sigma_v^2}{\pi(\omega^2+\beta^2)},\ \overline{u} = \overline{v} = 0.$$

30.27. Сигнал требуется подать в момент, упреждающий на τ_0 секунд нулевое значение производной $\dot{\Theta}(t)$. В действительности сигнал подается в момент обращения в нуль линейной комбинации

$$Y(t) = a\Theta(t) + b\dot{\Theta}(t) + c.$$

Определить оптимальные значения постоянных a, b, c и величину дисперсии $\dot{\Theta}(t+\tau_0)$, если $\overline{\theta} = 0$,

$$K_\theta(\tau) = \sigma_\theta^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

$\sigma_\theta = 5^\circ$, $\beta = 0{,}7$ сек$^{-1}$, $\alpha = 0{,}042$ сек$^{-1}$, $\tau_0 = 0{,}2$ сек.

30.28. В условиях предыдущей задачи определить оптимальные значения постоянных a, b, c, при которых

$$\mathrm{D}[\Theta(t+\tau_0) - Y(t)] = \min.$$

§ 31. СЛУЧАЙНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Случайная функция $X(t)$, аргумент t которой принимает дискретные значения t_j, называется случайной последовательностью.

Последовательность $X_j = X(t_j)$ $(t_j = j = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ называется стационарной в широком смысле, если

$$K_x(j,l) = K_x(l-j), \qquad \overline{x}_j = \overline{x} = \text{const}.$$

Всякая стационарная последовательность может быть представлена в виде спектрального разложения

$$X_j = \overline{x} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega j} d\Phi_x(\omega),$$

где

$$\mathrm{M}[d\Phi^*(\omega_1)\, d\Phi(\omega_2)] = S_x(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2)\, d\omega_1\, d\omega_2,$$

причем спектральная плотность $S_x(\omega) \geqslant 0$ имеет смысл только для $-\pi \leqslant \omega \leqslant \pi$.

Между $S_x(\omega)$ и $k_x(m)$ существуют соотношения

$$K_x(m) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega m} S_x(\omega)\, d\omega; \quad S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega m} K_x(m).$$

Аналогичными соотношениями связаны взаимная корреляционная функция $R_{xy}(m)$ и взаимная спектральная плотность $S_{xy}(\omega)$.

Вероятность выброса $p_j(a)$ за уровень a в интервале между j-м и $(j+1)$-м моментами времени определяется равенством

$$p_j(a) = \int\limits_{a}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{a} f(x_j, x_{j+1})\, dx_j\, dx_{j+1},$$

где $f(x_j, x_{j+1})$ — плотность вероятности системы случайных величин X_j и X_{j+1}. Для стационарных последовательностей $p_j(a) = p(a)$, т. е. не зависит от j.

Задача определения оптимальной линейной системы для случайной последовательности при конечном числе известных элементов последовательности сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений. Например, если известны элементы стационарной последовательности

$$X_{j-l} = \dot{U}_{j-l} + V_{j-l}, \qquad l = 1, 2, \ldots, n,$$

где U_j — полезный сигнал, а V_j — помеха, и требуется определить последовательность

$$Y_j = \sum_{l=1}^{n} a_l X_{j-l},$$

наилучшим образом аппроксимирующую значение полезного сигнала U_j в момент времени $(j+m)$, то для определения коэффициентов a_l имеем систему уравнений

$$\sum_{l=1}^{n} a_l K_x(r-l) = R_{xu}(m+r), \qquad r = 1, 2, \ldots, n;\ m \geqslant 0.$$

Дисперсия ошибки оптимальной аппроксимации определяется равенством

$$\mathrm{D}(Y_j - U_{j+m}) = \mathrm{D}(U_j) - \sum_{l=1}^{n} a_l R_{xu}(m+l).$$

Задачи

31.1. Дана последовательность взаимно независимых, центрированных и нормированных случайных величин: ξ_j, $j = 1, 2, \ldots$ Определить постоянные коэффициенты a_{jl} так, чтобы последовательность $X_j = \sum_{l=1}^{j} a_{kl}\xi_l$, $j = 1, 2, \ldots$ имела корреляционную функцию

$$K_x(m) = \sigma^2\alpha^m, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots$$

31.2. Последовательность X_j определяется системой рекуррентных соотношений

$$X_{j+1} = X_j - \alpha X_j + c\xi_j, \qquad \alpha > 0,\ j = 0, 1, 2, \ldots;\ x_0 = 0,$$

где ξ_j — взаимно независимые случайные величины, $\overline{\xi_j} = 0$, $\mathrm{D}(\xi_j) = 1$. Определить $K_x(j, j+m)$. Доказать, что при $j \to \infty$ последовательность X_j становится стационарной, если $\alpha < 2$.

31.3. Случайная последовательность X_j определяется рекуррентными соотношениями

$$X_{j+1} = X_j + A_j, \qquad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где A_j — взаимно независимые случайные величины,

$$\mathrm{P}\{A_j = 1\} = p, \qquad \mathrm{P}\{A_j = 0\} = 1 - p.$$

Определить математическое ожидание и корреляционную функцию последовательности, если $X_0 = c = \mathrm{const}$.

31.4. Нормальная стационарная случайная последовательность X_j имеет нулевое математическое ожидание, дисперсию σ^2 и $K_x(1) = \sigma_r^2$. Определить среднее число $\overline{n}$ перемен знака элементами последовательности за время T (T — целое) и среднее время $\overline{T}$ между двумя соседними переменами знака.

31.5. Определить среднее число $\overline{\nu}$ точек нормальной стационарной случайной последовательности X_j, для которых $X_{j-1} \leqslant X_j \geqslant X_{j+1}$ (среднее число «максимумов»), приходящееся на время T (T — целое), если $K_x(0) = \sigma^2$, $K_x(1) = 0{,}5\sigma^2$, $K_x(2) = 0{,}25\sigma^2$.

31.6. Корреляционная функция случайной последовательности

$$K(m) = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

Определить спектральную плотность $S(\omega)$ последовательности.

31.7. Корреляционная функция случайной последовательности

$$K(m) = \sigma^2 \alpha^{|m|}, \qquad |\alpha| < 1.$$

Определить спектральную плотность $S(\omega)$ последовательности.

31.8. Спектральная плотность стационарной последовательности

$$S(\omega) = \frac{(1-a^2)\sigma^2}{2\pi(1-2ab+b^2)} \cdot \frac{|e^{i\omega} - b|^2}{|e^{i\omega} - a|^2}, \qquad |a| < 1,\ |b| < 1.$$

(a, b — вещественны). Определить корреляционную функцию K_m.

31.9. Доказать, что последовательность

$$X_j = \sigma\sqrt{1-\alpha^2} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha^l \xi_{j-l}, \qquad |\alpha| < 1,$$

где ξ_j — независимые, центрированные и нормированные случайные величины, является стационарной. Определить ее спектральную плотность $S(\omega)$.

31.10. Определить корреляционную функцию $K(m)$ последовательности, если ее спектральная плотность

$$S(\omega) = \frac{c^2}{2\pi|e^{i\omega} - a_1|^2\,|e^{i\omega} - a_2|^2},$$

где c, a_1, a_2 — вещественные числа, $|a_1| < 1$, $|a_2| < 1$.

31.11. Случайная последовательность X_j имеет корреляционную функцию

$$K(m) = \sigma^2\alpha^{|m|},$$

где α — вещественное, $|\alpha| < 1$.

Найти линейную комбинацию трех известных элементов последовательности X_{j-3}, X_{j-2}, X_{j-1}, наилучшим образом аппроксимирующую элемент X_j.

31.12. Стационарная случайная последовательность X_j имеет корреляционную функцию

$$K(m) = \begin{cases} \sigma^2, & m = 0, \\ k\sigma^2\alpha^{|m|-1}, & m \neq 0. \end{cases}$$

(k, α — вещественны, $|k| < 1$, $|\alpha| < 1$).

Найти линейную комбинацию трех известных элементов последовательности X_{j-3}, X_{j-2}, X_{j-1}, аппроксимирующую X_j с наименьшей средней квадратической ошибкой.

31.13. Случайная последовательность X_j связана со случайными последовательностями U_j (полезный сигнал) и V_j (помеха) формулой:

$$X_j = U_j + V_j.$$

Найти наилучшее линейное приближение к U_{j+m} $(m \geqslant 0)$ по трем элементам последовательности X_{j-1}, X_{j-2}, X_{j-3}, если U_j и V_j независимы, $\overline{u}_j = \overline{v}_j = 0$,

$$K_u(m) = \sigma_u^2\alpha^{|m|}, \quad (|\alpha| < 1); \qquad K_v(m) = \begin{cases} \sigma_v^2, & m = 0, \\ 0, & m \neq 0. \end{cases}$$

31.14. Доказать, что требование наилучшей линейной экстраполяции по всему прошлому последовательности X_j ($\overline{x}_j = 0$)

$$X_{j+m} \approx \sum_{l=1}^{\infty} a_l X_{j-l}$$

эквивалентно выполнению условий

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\omega} \left[e^{im\omega} - \mathfrak{L}(\omega) \right] S_x(\omega)\, d\omega = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\mathfrak{L}(\omega) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l e^{-il\omega}.$$

(Предполагается, что все бесконечные суммы имеют смысл.)

31.15. Доказать, что если

$$X_j = U_j + V_j, \qquad (\overline{u}_j = \overline{v}_j = 0)$$

где U_j, V_j — стационарные некоррелированные последовательности, то требование наилучшей линейной аппроксимации элемента U_{j+m} в виде $\sum_{l=1}^{\infty} a_l X_{j-l}$ эквивалентно выполнению условий

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k} \left[e^{im\omega} S_u(\omega) - \mathfrak{L}(\omega) S_x(\omega) \right] d\omega = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

где $\mathfrak{L}(\omega) = \sum_{l=1}^{\infty} a_l e^{-il\omega}$, а все бесконечные суммы предполагаются имеющими смысл.

31.16. Случайная последовательность X_j имеет математическое ожидание $\overline{x}_j = \alpha j + \beta$ и корреляционную функцию

$$K_x(m) = \sigma_x^2 r_m.$$

Случайная последовательность Y_j связана с последовательностью X_j соотношениями

$$Y_0 = X_0; \quad Y_j = (1 - \lambda) Y_{j-1} + X_j - X_{j-1} \quad (j \geqslant 1,\ 0 < \lambda < 1).$$

Определить $\overline{y} = \lim\limits_{j\to\infty} \overline{y}_j$ и $\sigma_y^2 = \lim\limits_{j\to\infty} \mathrm{D}[Y_j]$, если $r_m = r^{|m|}$ $(|r| < 1)$.

31.17. Для случайной последовательности X_j дано математическое ожидание $\overline{x}_j = \alpha j + \beta$ и корреляционная функция $K_x(m) = \sigma_x^2 r_m$.

Случайная последовательность Y_j связана с X_j соотношениями

$$Y_0 = X_0; \qquad Y_1 = (1 - \gamma_1 - \gamma_2)Y_0 + X_1 - X_0,$$

$$Y_j = (1 - \gamma_1 - \gamma_2)Y_{j-1} + \gamma_2 Y_{j-2} + X_j - X_{j-1} \quad (j \geqslant 2),$$

где $\gamma_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$.

Определить, при каких значениях γ_1 и γ_2 существуют пределы:

$$\overline{y} = \lim_{j\to\infty} \overline{y}_j\,, \qquad \sigma_y^2 = \lim_{j\to\infty} \mathrm{D}[Y_j].$$

Найти эти пределы, если $r_m = e^{-\mu|m|}$, $\mu > 0$.

Глава 7

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 32. ЦЕПИ МАРКОВА

Последовательность испытаний, в каждом из которых может произойти лишь одно событие из полной группы несовместных событий $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$, образует цепь Маркова, если вероятность $p_{ij}(k)$ наступления события Q_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ при k-м испытании зависит только от того, какое событие Q_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ имело место при предыдущем $(k-1)$-м испытании $(k = 1, 2, \ldots)$.

Цепь Маркова называется однородной, если вероятности перехода $p_{ij}(k)$ не зависят от k, т. е. $p_{ij}(k) = p_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots)$. События $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ называются состояниями цепи Маркова или состояниями рассматриваемой системы, а k-е испытание можно рассматривать как изменение состояния в момент t_k.

Строка $p(n) = [p_1(n); p_2(n); \ldots; p_m(n)]$ абсолютных вероятностей перехода системы при n-м испытании в состояния $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ определяется формулой

$$p(n) = p(0)\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n,$$

а для однородной цепи

$$p(n) = p(0)\mathcal{P}^n,$$

где $\mathcal{P} = \|p_{ij}\|$; $p(0)$ — строка начальных вероятностей.

При любых n, но относительно небольших m, для вычисления $\mathcal{P}^n$ удобно использовать формулу Лагранжа–Сильвестра, которая при простых характеристических числах

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ (корнях уравнения $|\lambda\mathcal{E} - \mathcal{P}| = 0$, где $\mathcal{E}$— единичная матрица), имеет вид

$$\mathcal{P}^n = \sum_{k=1}^{m} \frac{(\mathcal{P}-\lambda_1\mathcal{E})\ldots(\mathcal{P}-\lambda_{k-1}\mathcal{E})(\mathcal{P}-\lambda_{k+1}\mathcal{E})\ldots(\mathcal{P}-\lambda_m\mathcal{E})}{(\lambda_k-\lambda_1)\ldots(\lambda_k-\lambda_{k-1})(\lambda_k-\lambda_{k+1})(\lambda_k-\lambda_m)}\,\lambda_k^n.$$

В общем случае при вычислении $\mathcal{P}^n$ целесообразно привести матрицу $\mathcal{P}$ к нормальной форме $\mathcal{P} = HJH^{-1}$, где при простых характеристических числах $J = \|\delta_{ik}\lambda_k\|$, а $\delta_{ik} = 0$ при $i \neq k$, $\delta_{kk} = 1$. Матрицы H и H^{-1} являются решениями алгебраических уравнений: $\mathcal{P}H = HJ$, $H^{-1}\mathcal{P} = JH^{-1}$, где $HH^{-1} = \mathcal{E}$. Тогда $\mathcal{P}^n = HJ^nH^{-1}$, где при простых характеристических числах $J^n = \|\delta_{ik}\lambda_k^n\|$.

Элементы $p_{ij}^{(n)}$ матрицы $\mathcal{P}^n$ определяются также по формуле Перрона

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{(\nu_s-1)!}\left.\left\{\frac{d^{\nu_s-1}}{d\lambda^{\nu_s-1}}\left[\frac{\lambda^n A_{ji}(\lambda)(\lambda-\lambda_s)^{\nu_s}}{|\lambda\mathcal{E}-\mathcal{P}|}\right]\right\}\right|_{\lambda=\lambda_s},$$

где r — число различных характеристических чисел, ν_s — их кратности $\left(\sum_{s=1}^{r}\nu_s = m\right)$, а $A_{ji}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента $\lambda\delta_{ji} - p_{ji}$ в определителе $|\lambda\mathcal{E} - \mathcal{P}|$ матрицы $\lambda\mathcal{E} - \mathcal{P}$.

Состояние Q_i называется существенным, если для каждого состояния Q_j, достижимого из Q_i, состояние Q_i достижимо из Q_j, т. е. при каждом Q_j, для которого $p_{ij}^{(n)} > 0$ при конечном n, можно указать такое ограниченное число s, что $p_{ji}^{(s)} > 0$. Состояние Q_i называется несущественным, если за конечное число испытаний n система может перейти из Q_i в какое-либо состояние Q_j, возвращение из которого в Q_i невозможно за любое число испытаний, т. е. $p_{ij}^{(n)} > 0$ при конечном n, а $p_{ji}^{(s)} = 0$ при любом $s \geqslant 1$.

При ограниченном m из состояний $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ разложимой цепи можно выделить независимые друг от друга группы $C_1, C_2, \ldots, C_l$ $(l \geqslant 1)$ существенных состояний; оставшиеся состояния образуют группу D несущественных состояний.

При соответствующей нумерации состояний матрица $\mathcal{P}$ приводится к виду

$$\mathcal{P} = \left\| \begin{matrix} R_1 & O & \ldots & O & O \\ O & R_2 & \ldots & O & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & R_l & O \\ U_1 & U_2 & \ldots & U_l & W \end{matrix} \right\|,$$

где $R_1, R_2, \ldots, R_l$ — матрицы вероятностей перехода групп состояний $C_1, C_2, \ldots, C_i$; W — квадратная матрица, соответствующая несущественным состояниям группы D. Через O обозначены нулевые матрицы различных порядков. Элементы в общем случае прямоугольной матрицы U_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$ являются вероятностями перехода из несущественных состояний в k-ю группу существенных состояний C_k. Когда $m = \infty$, все состояния могут быть несущественными.

Для матрицы $\mathcal{P}^n$ справедливо равенство

$$\mathcal{P}^n = \left\| \begin{matrix} R_1^n & O & \ldots & O & O \\ O & R_2^n & \ldots & O & O \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ O & O & \ldots & R_l^n & O \\ U_1^{(n)} & U_2^{(n)} & \ldots & U_l^{(n)} & W^n \end{matrix} \right\|,$$

где $U_k^{(n)}$ — прямоугольная матрица с тем же числом строк и столбцов, что и матрица U_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$. Имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$U_k^{(n)} = U_k R_k^{n-1} + W U_k^{(n-1)}; \qquad U_k^{(n)} = U_k^{(n-1)} R_k + W^{n-1} U_k.$$

Существенное состояние Q_j называется периодическим с периодом d_j, если возвращение в Q_j возможно только за число испытаний, кратное $d_j > 1$. Все состояния группы C_k имеют один и тот же период $\varkappa_k$. Наименьшее общее кратное $\varkappa$ чисел $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_l$ является периодом общей цепи Маркова.

Любую группу существенных состояний можно рассматривать как самостоятельную цепь Маркова. Группа может состоять из одного состояния Q_k; при этом $p_{kk} = 1$, а Q_k — состояние поглощения.

Матрица предельных вероятностей перехода $\mathcal{P}^\infty = \|p_{ij}^{(\infty)}\|$ и строка предельных абсолютных вероятностей $p(\infty)$ получаются из $\mathcal{P}^n = \|p_{ij}^{(n)}\|$ и $p(n) = p(0)\mathcal{P}^n$ при $n \to \infty$. Пределы существуют только для непериодической цепи Маркова, т. е. при $\varkappa = 1$; в этом случае среди характеристических чисел матрицы $\mathcal{P}$ имеется ровно l равных 1 (по числу групп существенных состояний), а все остальные характеристические числа этой матрицы по модулю меньше 1. Для матрицы $\mathcal{P}^\infty$ справедливо выражение

$$\mathcal{P}^\infty = \begin{Vmatrix} R_1^\infty & O & \ldots & O & O \\ O & R_2^\infty & \ldots & O & O \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ O & O & \ldots & R_l^\infty & O \\ U_1^{(\infty)} & U_2^{(\infty)} & \ldots & U_l^{(\infty)} & O \end{Vmatrix},$$

где $U_k^{(\infty)}$ — прямоугольная матрица с тем же числом строк и столбцов, что и U_k $(k = 1, 2, \ldots, l)$. Если при ограниченном m все состояния непериодической цепи Маркова существенные и не могут быть разбиты на группы (цепь неразложимая, $l = 1$), то в матрице $\mathcal{P}^\infty$ все m строк одинаковые, а элементы строки $p(\infty)$ совпадают с соответствующими элементами любой строки, т. е.

$$p_j(\infty) = p_{ij}^{(\infty)} = p_j^{(\infty)} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

В этом случае вероятности $p_j^{(\infty)}$ являются решением уравнений

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} p_i^{(\infty)} = p_j^{(\infty)} \ \ (j = 1, 2, \ldots, m), \quad \text{причем} \quad \sum_{j=1}^{m} p_j^{(\infty)} = 1.$$

Последняя система остается справедливой и при $m = \infty$, если система линейных уравнений $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ имеет ненулевое решение, для которого $\sum_{i=1}^{\infty} |u_i| < \infty$ (условие эргодичности цепи).

Для существенных состояний Q_i и Q_j из k-й группы C_k при $\varkappa_k = 1$ предельные вероятности $p_{ij}^{(\infty)} = p_j^{(\infty)}$ и находятся как решение алгебраических уравнений

$$\sum_{C_k} p_s^{(\infty)} p_{sj} = p_j^{(\infty)}, \qquad \sum_{C_k} p_s^{(\infty)} = 1,$$

где суммирование ведется только по номерам s состояний из группы C_k.

Предельная вероятность $p_{ij}^{(\infty)}$ перехода из несущественного состояния Q_i в существенное состояние Q_j из C_k равна $p_{ij}^{(\infty)} = \alpha_i^{(k)} p_j^{(\infty)}$, где $\alpha_i^{(k)}$ — вероятность перехода из несущественного состояния Q_i в группу существенных состояний C_k. Вероятности $\alpha_i^{(k)}$ являются решением алгебраической системы

$$\alpha_i^{(k)} = \sum_D p_{i\nu}\alpha_\nu^{(k)} + \sum_{C_k} p_{is},$$

где в первом слагаемом суммирование ведется по номерам ν несущественных состояний. Количество уравнений этой системы равно числу несущественных состояний. При ограниченном числе таких состояний алгебраическая система всегда имеет единственное решение.

Предельная вероятность β_i перехода из несущественного состояния Q_i в любое состояние из группы C, являющейся объединением нескольких групп существенных состояний, находится как решение системы уравнений

$$\beta_i = \sum_D p_{i\nu}\beta_\nu + \sum_C p_{is}.$$

Пусть $\varkappa_j$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ — число характеристических чисел (с учетом их кратности) матрицы R_j, по модулю равных единице. Наименьшее общее кратное этих чисел является периодом $\varkappa$ цепи Маркова. Если $l = 1$, то все состояния периодической цепи можно разбить на группы $G_0, G_1, \ldots, G_{\varkappa-1}$, так, что переход из состояния, входящего в G_r, за один шаг всегда приводит к состоянию, входящему в G_{r+1} $(G_\varkappa = G_0)$. В цепи Маркова с матрицей $\mathcal{P}^\varkappa$ каждую группу G_r можно рассматривать как самостоятельную цепь. Существуют пределы при $r = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1$:

$$\lim_{n\to\infty} p_{jk}^{(n\varkappa+r)} = \begin{cases} p_k^{(\varkappa\infty)}, & \text{если } Q_j \text{ из } G_\nu, \text{ а } Q_k \text{ из } G_{\nu+r}; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

при этом вероятности $p_k^{(\varkappa\infty)}$ определяются, как $p_j^{(\infty)}$ при $\varkappa = 1$ через элементы матрицы $\mathcal{P}^\varkappa$.

В общем случае существуют матрица $(\mathcal{P}^{\varkappa})^{\infty}$ и матрицы $\mathcal{P}_r = \mathcal{P}^r(\mathcal{P}^{\varkappa})^{\infty}$ $(r = 0, 1, \ldots, \varkappa{-}1)$. Матрица $\hat{\mathcal{P}} = \|\hat{p}_{ij}\|$ средних предельных вероятностей перехода определяется формулой

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{\varkappa}\,(\mathcal{E} + \mathcal{P} + \ldots + \mathcal{P}^{\varkappa-1})(\mathcal{P}^{\varkappa})^{\infty}.$$

Строка $\hat{p}$ средних предельных абсолютных вероятностей равна $\hat{p} = p(0)\hat{\mathcal{P}}$. При одной группе состояний средние предельные абсолютные вероятности $\hat{p}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ однозначно определяются равенствами: $\hat{p}\mathcal{P} = \hat{p}$, $\sum_{j=1}^{m} \hat{p}_j = 1$.

Математическое ожидание числа испытаний T_{jj}, затрачиваемых для возвращения впервые в периодическое с периодом $\varkappa_k$ состояние Q_j, определяется формулой

$$\overline{t}_{jj} = \frac{\varkappa_k}{p_j^{(\varkappa_k\infty)}}\,.$$

Если состояние Q_j непериодическое, то $\overline{t}_{jj} = \frac{1}{p_j^{(\infty)}}$.

Для одной группы существенных состояний математическое ожидание $\overline{t}_{ij}$ числа испытаний T_{ij}, затрачиваемых для перехода впервые из состояния Q_i в достижимое состояние Q_j, определяется из системы уравнений

$$\overline{t}_{ij} = 1 + \sum_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq j}}^{m} p_{i\nu}\overline{t}_{\nu j} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

Математическое ожидание $\overline{t}_i$ числа испытаний T_i, необходимых для перехода из несущественного состояния Q_i впервые в общую группу существенных состояний, определяется системой уравнений

$$\overline{t}_i = 1 + \sum_{D} p_{i\nu}\overline{t}_{\nu},$$

число которых совпадает с числом несущественных состояний.

Задачи

32.1. Показать, что для однородной цепи Маркова вероятности перехода $p_{ij}^{(n)}$ связаны равенством

$$p_{ij}^{(\alpha+\beta)} = \sum_{\nu=1}^{m} p_{i\nu}^{(\alpha)} p_{\nu j}^{(\beta)} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m).$$

32.2. Заданы строка начальных вероятностей $p(0) = [\alpha; \beta; \gamma]$ и матрицы вероятностей перехода для моментов времени t_1, t_2, t_3:

$$\mathcal{P}_1 = \begin{Vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{Vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \end{Vmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{Vmatrix} \alpha_3 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{Vmatrix}.$$

Определить строку абсолютных вероятностей $p(3)$.

32.3. По условиям соревнований спортсмен прекращает борьбу при потере двух очков, что может быть при одном проигрыше или при двух ничьих. При каждой встрече спортсмен, не имеющий ничьих, выигрывает с вероятностью α, делает ничью с вероятностью β и проигрывает с вероятностью $1 - \alpha - \beta$. Если ничейный исход был, то вероятность выигрыша в каждой встрече равна γ. Определить вероятность потери различного числа очков за n встреч для спортсмена, результат предыдущей встречи для которого известен.

32.4. При повышении напряжения в сети электрического тока с вероятностью α выходит из строя блокирующее устройство прибора, а с вероятностью β прекращается работа этого прибора. Если блокирующее устройство вышло из строя, то последующее повышение напряжения приводит к прекращению работы прибора с вероятностью γ. Определить вероятности исправной работы прибора, выхода из строя только блокирующего устройства и прекращения работы прибора после повышения напряжения n раз, если начальное состояние прибора известно.

32.5. В соревнованиях от каждой команды выступают по три спортсмена, которые встречаются только со спортсменами из других команд. По условиям состязаний ничьих не может быть, а проигравший один раз выбывает из соревнований. Пусть α, β и γ — вероятности того, что в очередном туре соответственно из одного, двух и трех оставшихся членов команды никто не проиграет: β_1 и γ_1 — вероятности того, что в очередном туре соответственно из двух и из трех оставшихся спортсменов проиграет один, а γ_2 — вероятность проигрыша в очередном туре двух из трех участников. Определить вероятности $P_{ik}^{(n)}$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$ того, что после n очередных туров в дальнейших соревнованиях от команды будут участвовать k спортсменов, если до этих туров в команде осталось i из трех ни разу не проигравших спортсменов.

32.6. Автоматическое устройство может работать, если из общего числа N однотипных элементов вышло на строя не больше $m-1$ элементов, которые могут выходить из строя только во время цикла работы устройства. Известны вероятности p_{ik} перехода системы за один цикл из состояния Q_i в состояние Q_k, где в качестве номера состояния взято число вышедших из строя элементов, так что при $k < i$ $p_{ik} = 0$ $(i, k = 0, 1, \ldots, m)$, $P_{mm} = 1$. Воспользовавшись формулой Перрона, найти вероятности перехода $p_{ik}^{(n)}$ за n циклов, в течение которых не производится замена неисправных элементов.

32.7. Доказать, что при верхней треугольной матрице перехода с различными диагональными элементами для любого n:

$$p_{ik}^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{при } i > k; \\ p_{kk}^{(n)}, & \text{при } k = i, \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

а при $k > i$ для вероятностей $p_{ik}^{(n)}$ справедлива следующая рекуррентная формула:

$$p_{ik}^{(n)} = \frac{1}{p_{kk} - p_{ii}} \left(\sum_{s=i+1}^{k} p_{is} p_{sk}^{(n)} - \sum_{s=i}^{k-1} p_{is}^{(n)} p_{sk} \right).$$

32.8. Из урны, содержащей N шаров белого и черного цвета, одновременно извлекают m шаров, вместо которых в урну кладут m черных шаров. Всего белых шаров в урне было i. Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ $(i, k = 0, 1, \ldots, m)$ того, что после дополнительных n извлечений в урне останется k белых шаров. Рассчитать эти вероятности при $N = 6$, $m = 3$.

32.9. При данной серии выстрелов каждый стрелок группы с равной вероятностью получает любое количество очков от $N+1$ до $N+m$. Определить вероятность того, что среди следующих n стрелков из этой группы хотя бы один стрелок получит $N+k$ очков, если наибольшее число очков, полученных предыдущими стрелками, равно $N+i$ $(m \geqslant k \geqslant i;\ i = 1, 2, \ldots, m)$.

32.10. На горизонтальной плоскости вдоль прямой AB через интервал l между центрами расположены вертикально одинаковые цилиндры с радиусом основания r. Перпендикулярно этой линии бросают шары радиуса R, причем пересечение линии движения шара с прямой AB равновозможно в любой части участка длины L, на котором стоят m цилиндров. Расстояние между центрами цилиндров $l > 2(r+R)$; каждое столкновение шара с цилиндром приводит к уменьшению числа цилиндров на один. Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ $(i, k = 0, 1, \ldots, m)$ того, что после очередных n бросков останется k цилиндров, если до этого их было i.

32.11. В области D, разделенной на m равновеликих частей, последовательно ставятся точки, положение каждой из которых равновозможно в любом месте области D. Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ $(i, k = 1, 2, \ldots, m)$ того, что после постановки новой серии из n точек число частей области D, в которых имеется хотя бы одна точка, увеличится с i до k.

32.12. В моменты $t_1, t_2, t_3, \ldots$ судно может изменять направление движения, выбирая один из m курсов: $Q_1, Q_2 \ldots, Q_m$. Вероятность P_{ij} того, что в момент t_r судно изменит курс Q_i на Q_j равна $P_{ij} = \alpha_{m-i+j+1}$, причем $\alpha_{m+k} = \alpha_k \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, $\sum_{k=1}^{m} \alpha_k = 1$. Определить вероятность $p_{jk}^{(n)}$ того, что при $t_n < t < t_{n+1}$ направление движения судна будет Q_k если начальное направление было Q_j $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$. Найти эту вероятность при $n = \infty$.

32.13. Частица может находиться только на отрезке AB в точках с координатами $x_k = X_A + k\Delta$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$, где $x_m = x_B$, перемещаясь скачками в соседнюю точку, причем по направлению к точке A из x_j с вероятностью $\frac{j}{m}$, а по направлению к точке B — с вероятностью $1 - \frac{j}{m}$. Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ $(i, k = 0, 1, \ldots, m)$ того, что после n скачков частица будет в точке x_k, если вначале она была в точке x_i.

32.14. Автомат для продажи билетов может работать при поступлении монет достоинством в 5 коп. и 10 коп. В первом случае автомат выдает билет, если приемник, вмещающий m пятикопеечных монет, не заполнен. При поступлении десятикопеечной монеты автомат выдает билет и 5 коп. сдачи, если в приемнике имеется хотя бы одна пятикопеечная монета.

В тех случаях, когда в приемнике нет пятикопеечных монет, а поступает монета достоинством в 10 коп., или имеется m пятикопеечных монет и поступает пятикопеечная монета, автомат возвращает последнюю поступившую монету, не выдавая билета. Известно, что монеты по 5 коп. и по 10 коп. в автомат поступают с вероятностями p и $q = 1 - p$. Определить вероятности $p_{ik}^{(n)}$ $(i, k, = 0, 1, \ldots, m)$ того, что после n требований билета в приемнике будет k монет по 5 коп., если вначале их там было i.

32.15. Два стрелка A и B поочередно стреляют по мишени, причем после каждого попадания стреляет A, а после каждого промаха стреляет B. Право первого выстрела стрелкам предоставляется на тех же условиях по результату предварительного выстрела, который производит наудачу выбранный стрелок. Определить вероятность попадания в мишень n-м выстрелом, если вероятности попадания в мишень при каждом выстреле для этих стрелков равны соответственно α и β. Произвести классификацию состояний цепи Q_1 и Q_2, если Q_1 — попадание в мишень при одном выстреле, а Q_2 — промах.

32.16. Определить предельные вероятности $p_j^{(\infty)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ при неразложимой, непериодической и дважды стохастической матрице перехода $\mathcal{P} = \|p_{ij}\|$, в которой суммы элементов каждого столбца и каждой строки равны единице.

32.17. m белых и m черных шаров перемешаны и поровну распределены между двумя урнами. Из каждой урны наудачу извлекается один шар и перекладывается в другую урну. Найти вероятности $p_{ik}^{(\infty)}$ $(i, k = 0, 1, \ldots, m)$ того, что после бесконечного числа таких обменов в первой урне окажется k белых шаров, если вначале там было i белых шаров.

32.18. Отрезок AB разделен на m равных интервалов. Частица может находиться только в серединах интервалов, перемещаясь скачками на величину интервала по направлению к точке B с вероятностью p, а по направлению к точке A — с вероятностью $q = 1 - p$. В крайних точках отрезка AB имеются отражающие экраны, которые при достижении частицей точки A или B возвращают ее в исходное положение.

Определить предельные абсолютные вероятности $p_k^{(\infty)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ нахождения частицы в каждом интервале.

32.19. Даны следующие вероятности перехода для цепи Маркова с бесконечным числом состояний:

$$p_{i1} = \frac{i}{i+1}, \qquad p_{i,i+1} = \frac{1}{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Определить предельные вероятности $p_j^{(\infty)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

32.20. Вероятности перехода для цепи Маркова с бесконечным числом состояний определяются равенствами $p_{i1} = q$, $p_{i,i+1} = p = 1 - q$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Определить предельные вероятности $p_j^{(\infty)}$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

32.21. Цепь Маркова с бесконечным числом состояний имеет следующие вероятности перехода:

$$p_{11} = \frac{1}{2}, \quad p_{12} = \frac{1}{2}, \quad p_{i1} = \frac{1}{i}, \quad p_{i,i+1} = \frac{i-1}{i} \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Определить предельные вероятности $p_{ik}^{(\infty)}$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$.

32.22. Случайное блуждание частицы происходит на положительной части оси Ox. За один шаг частица перемещается вправо на Δ с вероятностью α, влево на Δ с вероятностью β и остается на месте с вероятностью $1-\alpha-\beta$ в любой точке $x_j = j\Delta$ $(j = 2, 3, \ldots)$. В точке $x_1 = \Delta$ частица остается с вероятностью $1-\alpha$ и перемещается вправо на Δ с вероятностью α. Определить предельные вероятности $p_k^{(\infty)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, если состояние Q_j — частица находится в точке x_j $(j = 1, 2, \ldots)$.

32.23. Матрица перехода задана в виде

$$\mathcal{P} = \begin{Vmatrix} R & O \\ U & W \end{Vmatrix},$$

где R — матрица, соответствующая неразложимой непериодической группе C существенных состояний $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$, а квадратная матрица W соответствует несущественным состояниям $Q_{s+1}, Q_{s+2}, \ldots, Q_m$. Определить предельные вероятности α_j $(j = s+1, s+2, \ldots, m)$ того, что система перейдет в состояние из группы C.

32.24. Матрица перехода задана в виде

$$\mathcal{P} = \begin{Vmatrix} R & O & O \\ O & R_1 & O \\ U & U_1 & W \end{Vmatrix},$$

где R — матрица, соответствующая непериодической группе C существенных состояний $Q_1, Q_2, \ldots, Q_s$, а квадратная матрица W соответствует несущественным состояниям Q_{r+1}, $Q_{r+2}, \ldots, Q_m$. Определить вероятности α_j $(j = r+1, r+2, \ldots, m)$ того, что система перейдет в состояние, принадлежащее группе C, если все элементы матрицы W равны α, а сумма элементов любой строки матрицы U равна β.

32.25. Два игрока A и B продолжают игру до полного разорения одного из них. Вероятности выигрыша каждой партии для этих игроков равны соответственно p и q $(p+q=1)$. в каждой партии выигрыш одного (проигрыш другого) равен одному рублю, а общий капитал этих игроков составляет m рублей. Определить вероятности разорения игроков, если до игры A имел j $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$ рублей.

32.26. Даны вероятности перехода $p_{j,j+1} = 1$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$, $p_{m,1} = 1$. Определить вероятности перехода $p_{jk}^{(n)}$ и средние предельные вероятности перехода $\hat{p}_{jk}$ $(j, k = 1, 2 \ldots, m)$.

32.27. Матрица перехода

$$\mathcal{P} = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\alpha \neq 1$. Определить вероятности перехода $p_{jk}^{(n)}$ и средние предельные вероятности перехода $\hat{p}_{jk}$ $(j, k = 1, 2, 3, 4)$.

32.28. Даны элементы матрицы перехода $\mathcal{P}$:

$$p_{j,j+1} = p \qquad (j = 1, 2, \ldots, 2m-2), \qquad p_{2m,1} = p,$$

$$p_{j,j-1} = q = 1 - p \qquad (j = 2, 3, \ldots, 2m), \qquad p_{1,2m} = q.$$

Не определяя характеристических чисел матрицы $\mathcal{P}$, найти предельные вероятности и средние предельные абсолютные вероятности.

32.29. Частица перемещается по прямой под влиянием случайных толчков и может находиться в точках с координатами $x_j = x_A + j\Delta$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$. В крайних точках A и B $(x_B = x_m)$ находятся отражающие экраны. Каждый толчок перемещает частицу вправо с вероятностью p и влево с вероятностью $q = 1 - p$. Если частица находится у экрана, то любой толчок переводит ее внутрь промежутка между экранами на одно деление. Определить средние предельные абсолютные вероятности нахождения частицы в каждой точке деления отрезка AB.

32.30. Минное заграждение последовательно и независимо один от другого преодолевают n кораблей, для гибели каждого из которых достаточно срабатывания одной мины. Вероятность любому кораблю благополучно преодолеть минное заграждение, если оно состоит из $m - s$ мин, равна p_s ($s = 0, 1, \ldots, m - 1$). Определить вероятность $P_k(n)$ того, что на этом заграждении погибнет k из n кораблей ($k = 0, 1, \ldots, m$), если взрыв любой мины не вызывает взрыва других мин. Рассчитать вероятности $P_k(n)$ ($k = 0, 1, 2$) при $n = 10$, $m = 2$, если $p_0 = 0{,}90$, $p_1 = 0{,}95$.

32.31. Для обеспечения надежной работы прибора, отключение которого происходит при выходе из строя всех параллельно включенных элементов, поставлено m таких элементов. В течение одного цикла работы прибора с вероятностью $P_{m-s,j}$ выходит из строя j из s исправных элементов ($j = 0, 1, \ldots, s$); $\sum_{j=0}^{s} P_{m-s,j} = 1$ ($s = 1, 2, \ldots, m$). После окончания каждого цикла один из неисправных элементов заменяется на исправный. Определить предельные вероятности перехода $p_{ij}^{(\infty)}$ ($i, j = 0, 1, \ldots, m-1$), если состояние Q_i означает наличие в приборе i неисправных элементов перед началом очередного цикла. Найти математическое ожидание числа T_{ii} циклов, необходимых для возвращения впервые в состояние Q_i ($i = 0, 1, \ldots, m - 1$). Рассчитать эти характеристики при $m = 3$, если все элементы выходят из строя независимо один от другого, а вероятность выхода из строя каждого элемента за один цикл $p = 0{,}5$.

32.32. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле для первого стрелка p_1, для второго — p_2. Определить вероятности P_1 и P_2 попадания в мишень первым и вторым стрелками. Найти математическое ожидание числа T выстрелов до попадания в мишень.

32.33. Определить математическое ожидание числа T_{ij} испытаний, которые нужно провести для перехода впервые из состояния Q_i в Q_j $(i, j = 1, 2)$ для цепи Маркова с двумя возможными состояниями Q_1 и Q_2.

32.34. Случайная точка может находиться только в вершинах треугольника B_j $(j = 1, 2, 3)$. Известны вероятности перехода p_{ij} из B_i в B_j $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$, $p_{jj} = 0$ $(j = 1, 2, 3)$. Определить математическое ожидание числа шагов T_{ij}, необходимых для перехода случайной точки впервые из вершины B_i в B_j $(i, j = 1, 2, 3)$.

32.35. Условия задачи такие же, как в 32.14, только автомат выключается, когда при полностью заполненном приемнике в автомат поступает пятикопеечная монета и когда при отсутствии в приемнике пятикопеечных монет в автомат поступает десятикопеечная монета. Определить математическое ожидание числа T_i монет, при поступлении которых в приемник автомат выключается, если в приемнике было i пятикопеечных монет $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$.

32.36. Определить вероятность $p_j(n)$ того, что в результате n последовательных перемножений случайных чисел X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ получится число, оканчивающееся цифрой j $(j = 0, 1, \ldots, 9)$, если $\mathrm{P}(X_k = s) = 0{,}1$ $(s = 0, 1, \ldots, 9)$.

32.37. Определить вероятность $p_j(n)$ того, что число $Z = X^{Y_1, Y_2, \ldots, Y_n}$ оканчивается цифрой j $(j = 0, 1, \ldots, 9)$, если последняя цифра X_0 числа X и Y_k — случайные однозначные числа, $\mathrm{P}(X_0 = s) = \mathrm{P}(Y_k = s) = 0{,}1$ $(s = 0, 1, \ldots, 9;\ k = 1, 2, \ldots, n)$.

32.38. Известны столбец $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ и квадратная матрица $A = \|a_{kj}\|$ порядка n, все характеристические числа которой по модулю меньше единицы, а столбец $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является решением системы уравнений $x = Ax + f$. Вместо x_l при решении этой системы методом Монте-Карло находится реализация случайной величины

$$W_N = \varphi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_N) = f_l + \sum_{s=1}^{N} Z_s f_{Y_s},$$

где $Z_s = Z_{s-1} \gamma_{Y_{s-1}, Y_s} \quad (s = 1, 2, \ldots, N)$, $Z_0 = 1$, $Y_0 = l$.

Случайная величина Y_s — номер состояния цепи Маркова, в которое из состояния с номером Y_{s-1} переходит некоторая физическая система при s-м испытании ($s = 1, 2, \ldots, N$). Вероятность перехода $p_{kj} > 0$, если $a_{kj} > 0$;

$$\gamma_{kj} = \begin{cases} \frac{a_{kj}}{p_{kj}}, & \text{при } p_{kj} > 0; \\ 0, & \text{при } p_{kj} = 0; \end{cases} \qquad (k, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказать, что $x_l = \lim\limits_{N\to\infty} \overline{W}_N$.

§ 33. МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ С ДИСКРЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Поведение системы с возможными состояниями $Q_0, Q_1, \ldots, Q_m$ может быть описано случайной функцией $X(t)$, принимающей значение k, если в момент времени t система находилась в состоянии Q_k. Если переход системы из одного состояния в другое возможен в любой момент времени t, а вероятности $p_{ik}(t, \tau)$ перехода системы из состояния Q_i в момент времени t в состояние Q_k в момент времени $\tau (\tau \geqslant t)$ не зависят от поведения системы до момента времени t, то $X(t)$ является марковским случайным процессом с дискретным числом состояний. Процесс называется однородным, если

$$p_{ik}(t, \tau) = p_{ik}(\tau - t).$$

Вероятности $P_k(t)$ нахождения системы в состоянии Q_k в момент времени t определяются системами уравнений

$$\frac{dP_k(t)}{dt} = \sum_{j=0}^{m} p_{jk}(t) P_j(t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

где $p_{jk}(t)$ — временная плотность вероятности перехода в момент t из состояния Q_j в Q_k.

В случае однородных марковских процессов

$$p_{jk}(t) = p_{jk} = \text{const}.$$

Если начальное состояние Q_i задано, то

$$p_k(0) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

При однородном транзитивном марковском процессе существуют независящие от номеров исходного состояния пределы

$$\lim_{t\to\infty} p_{ik}(t) = \lim_{t\to\infty} P_k(t) = p_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Предельные вероятности p_k находятся из системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m} p_{jk} p_j = 0; \qquad \sum_{j=1}^{m} p_j = 1 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Дифференциальные уравнения для вероятностей могут быть получены также путем нахождения изменений этих вероятностей за малый интервал времени Δt с последующим переходом к пределу при $\Delta t \to 0$.

Предположения, сделанные в ряде задач, относительно реальных систем обслуживания (травматологический пункт, парикмахерская, мастерская срочного ремонта обуви и т. п.) следует рассматривать, как возможные математические модели этих систем, которые в реальных ситуациях требуют экспериментального подтверждения.

Задачи

33.1. Частицы, вылетающие из радиоактивного вещества в процессе его распада, образуют простейший поток с параметром λ. Каждая частица независимо от другой с вероятностью p регистрируется счетчиком. Определить вероятность того, что ее время t будет зарегистрировано n частиц.

33.2. По двум линиям связи в один пункт поступает два независимых простейших потока телеграмм. Найти вероятность того, что за время t в пункт приема придет n телеграмм, если параметры составляющих потоков равны λ_1 и λ_2.

33.3. Электронная эмиссия с катода электронной лампы представляет собой простейший поток электронов с параметром λ. Времена полета для различных электронов — независимые случайные величины, имеющие одну и ту же функцию распределения $F(x)$. Определить вероятность того, что спустя время t после включения, между электродами лампы будет ровно n электронов, и предельную вероятность того же события.

33.4. Для простейшего потока событий определить коэффициент корреляции между числами появлений событий в интервалах $(0, t)$ и $(0, t + \tau)$.

33.5. Для случайного момента времени T_n появления n-го события в простейшем потоке с параметром λ определить функцию распределения $F_n(t)$, плотность вероятности $f_n(t)$ и начальные моменты m_k.

33.6. Система может находиться в одном из состояний $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$, переходя за время Δt в состояние с номером, на единицу большим, с вероятностью $\lambda\Delta t + 0(\Delta t)$. Найти вероятности $P_{ik}(t)$ перехода системы из состояния Q_i в состояние Q_k $(k \geqslant i)$ за время t.

33.7. Клиенты, обращающиеся в мастерскую бытового обслуживания, образуют простейший поток с параметром λ.

Каждый клиент обслуживается мастером в течение случайного времени, подчиняющегося показательному закону с параметром μ. В случае отсутствия свободных мастеров клиент не ждет, а отказывается от обслуживания. Определить, сколько необходимо иметь мастеров, чтобы вероятность отказа клиенту в обслуживании не превосходила 0,015, если $\mu = \lambda$.

33.8. Один рабочий обслуживает m автоматических станков, которые при нормальной работе не требуют его вмешательства. Остановки каждого станка вследствие неполадок образуют независимый простейший поток с параметром λ. Для устранения неполадок рабочий тратит случайное время, распределенное по показательному закону с параметром μ. Найти предельные вероятности того, что n станков не работают (ремонтируются или ожидают ремонта), и математическое ожидание числа станков в очереди на ремонт.

33.9. Решить задачу 33.8 при условии, что число обслуживающих рабочих равно r $(r < m)$.

33.10. В электронно-вычислительной машине могут быть применены либо элементы A, либо B. Отказы этих элементов образуют простейший поток с параметрами $\lambda_A = 0{,}1$ ед./час и $\lambda_B = 0{,}01$ ед./час. Суммарная стоимость всех элементов A равна a, суммарная стоимость элементов B равна b $(b > a)$. Неисправность элемента вызывает простой машины на случайное время ремонта, подчиняющееся показательному закону распределения со средним временем $\mu^{-1} = 2$ часам. Стоимость каждого часа простоя машины равна c. Найти математическое ожидание экономии от применения более надежных элементов за 1000 часов работы машины.

33.11. В систему обслуживания, состоящую из n однотипных аппаратов, поступает простейший поток требований с параметром λ. Обслуживание требования начинается немедленно, если имеется хотя бы один свободный аппарат, и оно требует работы только одного аппарата, который тратит на обслуживание случайное время, подчиняющееся показательному закону распределения с параметром μ $(\mu n > \lambda)$. Если в момент поступления требования нет ни одного свободного аппарата, то требование становится в очередь.

Определить предельные значения:

а) вероятности p_k того, что в системе обслуживания находится ровно k требований (обслуживаемых и находящихся в очереди);

б) вероятности p^* того, что все аппараты заняты обслуживанием;

в) функции распределения $F(t)$ и математического ожидания $\bar{t}$ времени ожидания начала обслуживания;

г) математического ожидания m_1 числа требований, ожидающих начала обслуживания, m_2 числа требований, находящихся в системе обслуживания, m_3 числа свободных от обслуживания аппаратов.

33.12. Поток поступления неисправной аппаратуры в мастерскую гарантийного ремонта является простейшим с параметром $\lambda = 10$ ед./час. Продолжительность ремонта одной единицы является случайной величиной, имеющей показательный закон распределения с параметром $\mu = 5$ ед./час. Определить среднее время, проходящее от момента поступления неисправной аппаратуры до начала ремонта, если в мастерской четверо рабочих, каждый из которых одновременно ремонтирует только один прибор.

33.13. Сколько позиций должен иметь испытательный стенд для того, чтобы в среднем не более 1% изделий ожидало начала испытаний дольше 2/3 смены, если продолжительность испытаний — показательно распределенная случайная величина, имеющая среднее значение 0,2 смены, а поступающие на испытания приборы образуют простейший поток со средним числом поступлений 10 единиц в смену?

33.14. Система обслуживания состоит из n аппаратов, каждый из которых обслуживает одновременно лишь одно требование. Время его обслуживания является показательно распределенной случайной величиной с параметром μ. В систему поступает простейший поток требований с параметром $\lambda(\mu n > \lambda)$. Обслуживание требования начинается немедленно, если есть хотя бы один свободный аппарат. Если все аппараты заняты, а число требований в очереди на обслуживание менее m, то требование становится в очередь; если же в очереди m требований, то вновь поступившее требование получает отказ.

Определить предельные значения:

а) вероятности p_k того, что в системе обслуживания находится ровно k требований;

б) вероятности того, что поступившее требование получит отказ;

в) вероятности того, что все обслуживающие аппараты будут заняты;

г) функции распределения $F(t)$ времени ожидания начала обслуживания;

д) математического ожидания m_1 числа требований, ожидающих начала обслуживания, m_2 числа требований, находящихся в системе обслуживания, m_3 числа свободных от обслуживания аппаратов.

33.15. Парикмахерская имеет трех мастеров, каждый из которых в среднем на обслуживание одного клиента тратит 10 мин. Клиенты образуют простейший поток со средним числом поступлений 12 человек в час. Клиенты становятся в очередь, если к моменту их прихода в очереди менее трех человек, в противном случае они покидают парикмахерскую.

Определить вероятность p_0 отсутствия клиентов в парикмахерской; вероятность p того, что клиент покинет парикмахерскую необслуженным; вероятность p^* того, что все мастера будут заняты работой; среднее число m_1 клиентов в очереди; среднее число клиентов m_2 в парикмахерской вообще.

33.16. Электрическая линия обслуживает m однотипных машин, каждая из которых независимо от других может нуждаться в электроэнергии. Вероятность того, что в промежутке времени $(t, t+\Delta t)$ машина прекратит использование электроэнергии, равна $\mu\Delta t + 0(\Delta t)$, а вероятность того, что неработающей машине потребуется энергия в том же промежутке времени, равна $\lambda\Delta t + 0(\Delta t)$. Определить предельную вероятность того, что к линии будет подключено n машин.

33.17. Ливень космических частиц вызван попаданием в начальный момент времени в атмосферу одной частицы. Определить вероятность того, что спустя время t будет n частиц, если каждая частица в промежутке времени $(t, t+\Delta t)$ с вероятностью $\lambda\Delta t + 0(\Delta t)$может вызвать возникновение новой частицы, имеющей практически ту же самую вероятность размножения.

33.18. Ливень космических частиц вызван попаданием в начальный момент времени в атмосферу одной частицы. Определить вероятность того, что в момент времени t будет n частиц, если каждая частица в промежутке времени $(t, t+\Delta t)$ с вероятностью $\lambda\Delta t + 0(\Delta t)$ может вызвать возникновение новой частицы с теми же свойствами и с вероятностью $\mu\Delta t + 0(\Delta t)$ может исчезнуть.

33.19. В неоднородном процессе чистого размножения (размножение без гибели) n частиц в момент t могут превратиться либо в $n+1$ частицу в промежутке $(t, t+\Delta t)$ с вероятностью $\lambda_n(t)\Delta t + 0(\Delta t)$, где

$$\lambda_n(t) = \frac{1+an}{1+at},$$

либо оставаться в неизменном количестве. Определить вероятность того, что в момент t будет ровно n частиц, если

$$p_n(0) = \delta_{n0} = \begin{cases} 1, & \text{при } n = 0, \\ 0, & \text{при } n \geqslant 1. \end{cases}$$

33.20. В пункте химической чистки работают две приемщицы. В среднем за 40-часовую неделю в приемный пункт обращаются 480 клиентов, не покидающих его до завершения обслуживания. Среднее время обслуживания 5 мин. Считая поток клиентов простейшим, а время обслуживания показательным, найти:

а) вероятность простоя обеих приемщиц;

б) вероятность наличия очереди.

33.21. Клиенты, обращающиеся в пункт приема белья, образуют простейший поток с интенсивностью $\lambda = 35$ чел./час, причем каждый клиент дожидается обслуживания. Среднее время приемки белья от одного клиента 3 мин. Найти вероятность того, что при двух приемщицах время ожидания в очереди начала обслуживания будет менее 10 мин.

33.22. В травматологическом пункте работают два врача. С какой наибольшей интенсивностью могут поступать больные, образующие простейший поток, чтобы среднее число ожидающих в очереди не превосходило трех, если на оказание помощи больному затрачивается случайное время, подчиняющееся показательному закону со средним значением, равным 9 мин?

33.23. В мастерскую срочного ремонта обуви, имеющую двух мастеров, обращаются в среднем 18 клиентов в час, образующих простейший поток. Время обслуживания одного клиента случайное, подчиняется показательному закону, с математическим ожиданием, равным 5 минутам. Какова вероятность для клиента завершить починку обуви не более чем за полчаса?

33.24. На коммутатор, имеющий три внешние линии связи, поступает в среднем за час 60 требований на связь, образующих простейший поток. Продолжительность переговоров случайная и подчиняется показательному закону с математическим ожиданием, равным 3 мин. Определить: а) вероятность отказа абоненту; б) среднее число занятых линий.

33.25. Сколько необходимо иметь мест на станции обслуживания автомобилей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, автомашина, нуждающаяся в ремонте, обеспечивалась местом для ремонта, если поток заявок можно считать простейшим, а время обслуживания — подчиняющимся показательному закону? Среднее время ремонта — одни сутки. В течение суток на станцию поступают в среднем пять автомашин.

33.26. В ремонтную мастерскую, имеющую трех рабочих, поступает простейший поток заказов, в среднем 4 заказа в час. Среднее время выполнения заказа 0,5 часа. Время обслуживания заказа случайное, подчиняющееся показательному закону. Определить: а) среднее число заказов, ожидающих начала исполнения и б)среднее время пролеживания заказа в ожидании начала исполнения.

33.27. Покупатели гастрономического отдела образуют простейший поток с интенсивностью 150 человек в час. Время обслуживания покупателя продавцом случайное. Один продавец в среднем обслуживает 30 покупателей в час. Определить наименьшее число продавцов, при котором среднее число покупателей, ожидающих обслуживания, не превосходит трех, и определить при этом вероятность того, что в очереди будет более трех покупателей?

33.28. В инструментальной кладовой инструмент выдает один кладовщик, получающий 50 коп. в час. За 8-часовой рабочий день в кладовую обращается в среднем 152 рабочих, образующих простейший поток. Время обслуживания рабочего кладовщиком случайное, подчиняющееся показательному закону. Среднее время выдачи инструмента 3 мин. Простой рабочего в течение часа оценивается в 1 руб. убытка. Найти число кладовщиков, при котором суммарные потери предприятия от простоя рабочих и содержания кладовщиков были бы наименьшими.

33.29. Для разгрузки судов оборудованы пять причалов, на каждом из которых могут разгружаться одновременно только по одному транспорту. В среднем разгрузка транспорта занимает одни сутки, а прибывают в среднем за сутки пять транспортов. Предполагая поток прибывающих транспортов простейшим, найти:

а) вероятность отказа прибывшему транспорту в немедленном начале разгрузки;

б) как изменится эта вероятность, если разгрузку ускорить в 2,5 раза.

33.30. Имеется пятиканальная линия связи, расходы на эксплуатацию которой составляют 20 руб. в час. В среднем за одну минуту поступает два требования на связь, а средняя продолжительность передачи 3 мин. Требования на связь, не получившие немедленного удовлетворения, теряются. Считая поток требований на связь простейшим, найти:

а) вероятность отказа требованию на связь;

б) превышение среднечасового кассового сбора над эксплуатационными расходами, если плата за 1 мин. разговора составляет 15 коп.

33.31. В систему обслуживания с отказами поступает простейший поток требований с параметром λ. Известна вероятность p отказа требованию в обслуживании в стационарном режиме работы системы. Определить среднее число требований в единицу времени, покидающих систему после завершения обслуживания.

33.32. Определить среднее число требований в единицу времени, покидающих систему после завершения обслуживания, если в нее поступает простейший поток требований с параметром λ. Поступившее требование начинает немедленно обслуживаться если хотя бы один из m приборов системы свободен. Обслуживание ведется одним прибором и продолжается случайное время, подчиняющееся показательному закону с параметром μ. Если все приборы заняты, то требование становится в очередь и остается в системе до завершения обслуживания.

33.33. Для системы с отказами, в которую поступает простейший поток требований, известно $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ (λ — параметр потока требований, μ^{-1} среднее время обслуживания требования одним прибором) и вероятность p отказа в обслуживании, определить $\mathrm{M}(k)$ — среднее число приборов, занятых обслуживанием.

33.34. Определить вероятность того, что за время t ровно k требований получат отказ в обслуживании, если в систему поступает простейший поток требований с параметром λ, а вероятность отказа в обслуживании равна p.

33.35. Система состоит из двух однотипных блоков, соединенных параллельно, и работает, если исправен хотя бы один блок. Определить, для стационарного режима работы системы, математическое ожидание времени простоя за период времени T, если для каждого из блоков вероятность отказа за промежуток Δt равна $\lambda\Delta t + 0(t)$, а вышедший из строя блок ремонтируется заданное время t_0.

33.36. Система состоит из двух однотипных блоков, соединенных последовательно, и третьего блока, включаемого взамен любого вышедшего из строя. Вероятность отказа для каждого блока за время Δt равна $\lambda\Delta t + 0(t)$, а время ремонта неисправного блока равно t_0 независимо от их числа. Определить математическое ожидание времени простоя системы за время T, считая режим работы стационарным.

§ 34. НЕПРЕРЫВНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Непрерывный случайный процесс $U(t)$ называется марковским, если функция распределения $F(u_n \mid u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$ ординаты процесса $U(t)$ в момент t_n, вычисленная при условии, что значения ординат процесса $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ заданы $(t_1 < t_2 < \ldots < t_n)$, зависит только от значения последней ординаты, т. е.

$$F(u_n \mid u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}) = F(u_n \mid u_{n-1}).$$

Условная плотность вероятности $f(u_n \mid u_{n-1})$ является функцией $f(t, x, \tau, y)$ четырех переменных, где для краткости обозначено:

$$U(t) = x, \quad U(\tau) = y, \quad t \leqslant \tau.$$

Функция $f(t, x, \tau, y)$ удовлетворяет системе уравнений Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + a(t, x)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} b(t, x)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}[a(\tau, y) f] - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[b(\tau, y] = 0,$$

где

$$a(t, x) = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{\tau - t}\mathrm{M}\{[Y - X]/X = x\};$$

$$b(t, x) = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{\tau - t}\mathrm{M}\{[Y - X]^2/X = x\}.$$

Функция $f(t, x; \tau, y)$ удовлетворяет начальному условию $f(t, x; \tau, y) = \delta(y - x)$ при $\tau = t$. Если область изменения ординат случайной функции ограничена: $\alpha \leqslant U(t) \leqslant \beta$, то должны быть выполнены его граничные условия для функции

$$G(\tau, y) \equiv a(\tau, y)f - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[b(\tau, y)f],$$

которую можно рассматривать как «поток вероятности»: $G(\tau, \alpha) = G(\tau, \beta) = 0$ для любого τ.

Совокупность n случайных функций $U_1(t), U_2(t), \ldots, U_n(t)$ является марковским процессом, если плотность вероятности (функция распределения) ординат $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ этих функций в момент времени $\tau > t$, вычисленная при условии, что в момент времени t ординаты случайных функций имели значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не зависит от значений ординат случайных функций $U_1(t), U_2(t), \ldots, U_n(t)$ для моментов времени, предшествующих t. В этом случае функция f удовлетворяет системе многомерных уравнений Колмогорова

$$\begin{gathered}
\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial f}{\partial x_j} + \\
+ \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n} b_{jl}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_l} = 0; \\
\frac{\partial f}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_j}[a_j(\tau, y_1, y_2, \ldots, y_n)f] - \\
- \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial y_j\,\partial y_l}[b_{jl}(\tau, y_1, y_2, \ldots, y_n)f] = 0,
\end{gathered}$$

где коэффициенты a_j и b_j определяются равенствами

$$\begin{gathered}
a_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\
= \lim_{\tau\to t}\frac{1}{\tau - t}\,\mathrm{M}[(Y_j - X_j) \mid X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n], \\
b_{jl}(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) = \\
= \lim_{\tau\to t}\frac{1}{\tau - t}\,\mathrm{M}[(Y_j - X_j)(Y_l - X_l) \mid X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n],
\end{gathered}$$

а начальное условие

$$\begin{gathered}
f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n; \tau, y_1, y_2, \ldots, y_n) = \\
= \delta(y_1 - x_1)\,\delta(y_2 - x_2)\ldots\delta(y_n - x_n)
\end{gathered}$$

при $\tau = t$.

Если компоненты процесса $U_l(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dU}{dt} = \Psi_l(t, U_1, U_2, \ldots, U_n) + \sum_{m=1}^{n} g_{lm}(t, U_1, U_2, \ldots, U_n)\,\xi_m(t)$$

$$l = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\xi_m(t)$ — взаимно независимые случайные функции с независимыми ординатами («белый шум»), корреляционные функции которых $K_m(\tau) = \delta(\tau)$, то процесс n-мерный марковский, а коэффициенты уравнений Колмогорова определяются равенствами

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} g_{lj} g_{jm} = b_{lm};\ g_{lj} = g_{jl}, \\ &\Psi_l = a_l - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} g_{jm}\frac{\partial g_{lm}}{\partial x_j} \end{aligned}\right\} \qquad (l, m = 1, 2, \ldots, n).$$

Для решения уравнений Колмогорова могут быть использованы общие методы теории дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа.

Когда коэффициенты a_l, b_{lm} не зависят от t, имеет смысл задача нахождения стационарных решений уравнений Колмогорова, для которых $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \tau} = 0$.

Любой стационарный нормальный процесс, обладающий дробно-рациональной спектральной плотностью

$$S(\omega) = \frac{|P_m(i\omega)|^2}{|Q_n(i\omega)|^2}\,,$$

является компонентой n-мерного марковского процесса.

Вероятность $W(T)$ того, что ордината одномерного марковского процесса в течение времени $T = \tau - t$ после момента времени, для которого задана плотность вероятности ординат случайной функции $f_0(x)$, ни разу не выйдет за пределы интервала (k_1, k_2), определяется равенством

$$W(T) = \int_{k_1}^{k_2} w(\tau, y)\,dy, \quad \tau = t + T,$$

где $w(\tau, y)$ — плотность вероятности для $Y = U(t)$, вычисленная при условии, что в интервале времени (t, τ) ордината процесса $U(t)$ ни разу не вышла за пределы интервала (k_1, k_2), является решением второго уравнения Колмогорова при условиях:

$$w(\tau, y) = f_0(y) \qquad \text{при } \tau = t,$$
$$w(\tau, k_1) = w(\tau, k_2) = 0 \qquad \text{при } \tau \geqslant t.$$

В частном случае, когда начальное значение ординаты случайного процесса задано, $f_0(y) = \delta(y - x)$.

Плотность вероятности $f(T)$ времени пребывания случайной функции в интервале (k_1, k_2) определяется равенством

$$W(T) = -\int_{k_1}^{k_2} \frac{\partial w(\tau, t)}{\partial t}\, dy, \qquad T = \tau - t.$$

Среднее время пребывания $\overline{\tau}$ случайной функции в интервале (k_1, k_2) связано с $W(T)$ соотношением $\overline{\tau} = \int_0^\infty W(T)\, dT$. При $k_1 \neq \infty$, $k_2 = \infty$ последние формулы дают: вероятность $W(T)$ пребывания случайной функции выше заданного уровня k_1, плотность вероятности $f(\tau)$ времени выброса и среднее время выброса $\overline{\tau}$.

Среднее число выбросов за уровень k_1 в единицу времени для одномерного марковского процесса равно бесконечности, однако среднее число выбросов в единицу времени $n(\tau_0)$ для выбросов, длительность которых больше $\tau_0 > 0$, конечно и для стационарного процесса определяется формулой

$$n(\tau_0) = f(k_1) \int_{k_1}^{\infty} v(\tau_0, y)\, dy,$$

где $f(k_1)$ — плотность вероятности ординаты процесса, взятая при аргументе k_1, $v(\tau, y)$ — решение второго уравнения Колмогорова для случайного процесса при условиях:

$$\tau < t, \quad v(\tau, y) = 0; \qquad \tau \geqslant t, \quad v(\tau, k_1) = \delta(\tau - t),$$

что эквивалентно решению уравнения для преобразования $V(p, y)$ Лапласа—Карсона:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(bV) - aV\right] = pV;$$
$$V = p \ \text{ при } y = k_1, \quad V = 0 \text{ при } y = \infty.$$

Изображение $n(\tau_0)$ равно

$$N(p) = -\frac{1}{p} f(k_1) \left. \frac{\partial(bV)}{\partial y} \right|_{y=a} + f(k_1)\, a(k_1).$$

Если $U(t) = U_1(t)$ компонента n-мерного марковского процесса, то

$$W(T) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{k_1}^{k_2} w(\tau, y_1, \ldots, y_n)\, dy_1, \ldots, dy_n,$$

где $w(\tau, y_1, \ldots, y_n)$ удовлетворяет второму уравнению Колмогорова.

Задачи

34.1. Найти коэффициенты уравнений Колмогорова для двумерного марковского процесса, если его компоненты $U_1(t)$, $U_2(t)$ определяются системой уравнений

$$\frac{dU_1}{dt} = \sin \omega U_2 + c_1 e^{-(U_1+U_2)^2} \xi_1(t),$$
$$\frac{dU_2}{dt} = \cos \omega U_1 + c_2 e^{-(U_1-U_2)^2} \xi_2(t),$$

где $\xi_j(t)$ — независимые случайные функции, обладающие свойствами «белого шума»:

$$\overline{\xi}_j = 0,\ k_{\xi j}(\tau) = \delta(\tau), \quad j = 1, 2.$$

34.2. Дана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dU_j}{dt} = \Psi_j(t, U_1 \ldots, U_n, Z) \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где Ψ_j — заданные непрерывные функции своих аргументов, а $Z(t)$ — нормальный стационарный случайный процесс, имеющий спектральную плотность

$$S_z(\omega) = \frac{c^2}{2\pi(\omega^2 + \alpha^2)^3}\,.$$

Добавить к многомерному процессу $U_1(t), \ldots, U_n(t)$ необходимое количество компонент таким образом, чтобы полученный процесс был марковским. Составить для него уравнения Колмогорова.

34.3. Дано, что $U(t)$ — стационарный нормальный процесс, спектральная плотность которого

$$S_u(\omega) = \frac{c^2\omega^2}{[(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2 - 4\beta^2\omega^2]},$$

где c, α и β — постоянные.

Показать, что $U(t)$ можно рассматривать как компоненту многомерного марковского процесса, определить число измерений процесса и коэффициенты уравнений Колмогорова для этого процесса.

34.4. Определить коэффициенты уравнений Колмогорова для многомерного марковского процесса, заданного системой уравнений

$$\frac{dU_j}{dt} = \varphi_j(t, U_1 \ldots, U_n) + Z_j(t),$$

где

$$Z_j(t) = 0, \quad \mathrm{M}[Z_j(t)Z_l(t+\tau)] = \Psi_{jl}(t)\delta(\tau), \quad j,l = 1,2,\ldots,n,$$

а φ_j и Ψ_{jl} — заданные непрерывные функции своих аргументов.

34.5. Случайные функции $U_j(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dU_j}{dt} = \varphi_j(t, U_1 \ldots, U_r, Z), \qquad j = 1,2,\ldots,r,$$

где φ_j — заданные непрерывные функции своих аргументов, а $Z(t)$ — стационарная нормальная случайная функция с дробно-рациональной плотностью:

$$\overline{z} = 0, \qquad S_z(\omega) = \frac{|P_m(i\omega)|^2}{|Q_n(i\omega)|^2}, \quad n > m,$$

где полиномы

$$P_m(x) = \beta_0 x^m + \beta_1 x^{m-1} + \ldots + \beta_m,$$

$$Q_n(x) = x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n$$

имеют корни только в верхней полуплоскости.

Показать, что $U_1(t), \ldots, U_r(t)$ можно рассматривать как компоненты многомерного марковского процесса, определить число измерений этого процесса и найти для него коэффициенты уравнений Колмогорова.

34.6. Показать, что если для многомерного марковского процесса справедливо уравнение Колмогорова

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_j}\left[\left(\alpha_j-\sum_{m=1}^{n}\alpha_{jm}y_m\right)f\right]-\frac{1}{2}\sum_{j,m=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_m}(b_{jm}f)=0,$$

где α_j, α_{jm}, b_{jm} $(j, m = 1, 2, \ldots, n)$ — постоянные, то случайный процесс удовлетворяет системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dU_j}{dt} + \sum_{m=1}^{n} \alpha_{jm} U_m = \eta_j(t) \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$\overline{\eta_j} = \alpha_j, \quad K_{\eta j}(\tau) = b_{jj}\delta(\tau), \quad R_{\eta_j \eta_m}(\tau) = b_{jm}\delta(\tau).$$

34.7. Вывести систему дифференциальных уравнений для компонент двумерного марковского процесса $U_1(t)$, $U_2(t)$, если условная плотность вероятности $f(t, x_1, x_2; \tau, y_1, y_2)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial \tau}+\frac{1}{\mu}\left[y_2\frac{\partial f}{\partial y_1}+\varphi(y_1)\frac{\partial f}{\partial y_2}\right]-\frac{1}{\mu^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial y_1^2}(y_2 f)+\frac{\varkappa^2}{2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2}\right]=0,$$

$\mu = \mathrm{const}$, $\varkappa = \mathrm{const}$, а $\Psi(y)$ — заданная функция.

34.8. Определить закон распределения ординаты случайной функции $U(t)$ для установившегося режима, если

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \frac{\alpha^2}{2} \cdot \frac{dU}{dt} + \varphi(U) = \xi(t),$$

где α — постоянная, $\varphi(U)$ — заданная функция, обеспечивающая существование установившегося режима, $\overline{\xi}(t) = 0$, $K_\xi(\tau) = \sigma^2\delta(\tau)$. Решить задачу в частном случае $\varphi(U) = \beta^2 U^3$.

34.9. Определить стационарный закон распределения ординаты случайной функции $U(t)$, если

$$\frac{dU}{dt} = \varphi(U) + \Psi(U)\xi(t),$$

где $\varphi(t)$ и $\Psi(U)$ — заданные функции, а $\xi(t)$ — «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и $K_\xi(\tau) = \delta(\tau)$.

34.10. На вход диодного детектора, являющегося последовательным соединением нелинейного элемента с вольт-амперной характеристикой $F(V)$ и параллельной цепочкой RC, поступает случайный сигнал $\zeta(t)$. Определить стационарный закон распределения напряжения $U(t)$ на цепочке RC, если уравнение детектора имеет вид

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}\,U = \frac{1}{C}\,F(\zeta - U),$$

где R и C — постоянные, а $\zeta(t)$ — нормальная стационарная функция, для которой

$$\overline{\zeta}(t) = 0, \qquad K_\zeta(\tau) = \sigma^2 r^{-\frac{|\tau|}{RC}}.$$

Решить задачу для частного случая, когда

$$\mathcal{F}(v) = \begin{cases} kv, & v \geqslant 0, \\ 0, & v < 0. \end{cases}$$

34.11. Определить плотность вероятности ординаты случайной функции $U(t)$ для момента времени $\tau > 0$, если

$$\alpha\,\frac{dU}{dt} - \frac{\sigma^2}{2U} = \sigma\xi(t), \qquad \xi = 0, \qquad K_\xi(\tau) = \alpha\delta(\tau),$$

$$f_0(x) = \frac{x}{a^2}\,e^{-\frac{x^2}{2a^2}}, \qquad U(t) = X \quad \text{при } t = 0 \quad (x \geqslant 0).$$

34.12. Уравнение, определяющее напряжение $U(t)$ экспоненциального детектора, на вход которого поступает нормальный случайный процесс $\zeta(t)$, обладающий малым временем корреляции, имеет вид

$$\frac{dU}{dt} + \frac{1}{RC}\,U = \frac{i_0}{C}\,e^{\alpha\zeta - aU},$$

где R, C, a, i_0 — постоянные детектора, $\overline{\zeta} = 0$, $K_\zeta(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

Представляя приближенно $e^{\alpha\zeta(t)} = \mathrm{M}\left[e^{\alpha\zeta(t)}\right] + \xi(t)$ и считая $\xi(t)$ дельта-коррелированным процессом:

$$K_\zeta(\tau) \approx \sigma_\zeta^2 \delta(\tau),$$

где

$$\sigma_\zeta^2 = \int_{-\infty}^{\infty} K_\zeta(\tau)\,d\tau,$$

определить стационарный закон распределения для ординаты $U(t)$.

34.13. Случайный процесс $U(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU}{dt} = -\varphi(U) + \sigma\xi(t),$$

где $\varphi(U)$ — заданная функция, $\xi(t)$ — «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и $K_\xi(\tau) = \delta(\tau)$, а при заданном виде функции $\varphi(U)$ возможен установившийся режим. Определить плотность вероятности $f(y)$ для установившегося режима.

34.14. Случайная функция $U(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dU}{dt} = \alpha(t) + \beta(t)U + \gamma(t)\xi(t)$$

при начальных условиях $\tau = t$, $U(t) = x$.

Найти закон распределения ординат случайной функции для момента времени $\tau \geqslant t$, если $\alpha(t)$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ — заданные функции времени, $\xi(t)$ — «белый шум» с нулевым математическим ожиданием и $K_\xi(\tau) = \delta(\tau)$.

34.15. Отклонение руля высоты самолета, сообщаемое автопилотом для ликвидации воздействия пульсаций ветра, характеризуемых случайной функцией $\varepsilon(t)$, приближенно описывается дифференциальным уравнением

$$T_0\,\frac{d\Delta}{dt} + \Delta = i_0\varepsilon(t),$$

где T_0 и i_0 — постоянные.

Определить условную плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$ ординаты случайной функции $\Delta(t)$, если математическое ожидание $\overline{\varepsilon}(t) = 0$ и приближенно можно считать, что $K_\varepsilon(\tau) = \sigma_\varepsilon^2\delta(\tau)$, а $\Delta = x$ при $\tau = t$.

34.16. На вход динамической системы второго порядка поступает случайное возмущение $\zeta(t)$:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + 2h\,\frac{dU}{dt} + k^2U = \zeta(t), \qquad k > h > 0.$$

Определить условную плотность вероятности $f(t, x; \tau, y) \equiv f(\tau, y)$ случайного процесса $U(t)$ в момент времени $\tau \geqslant 0$, если $U(0) = x$, $\dot{U}(0) = 0$, $\overline{\zeta}(0) = 0$, $K_\zeta(\tau) = c^2\delta(\tau)$; c, h, k — заданные постоянные.

34.17. Уравнение, определяющее работу звена системы автоматического регулирования, имеет вид

$$\frac{dU}{dt} = -\alpha \operatorname{sgn} U + c\xi(t),$$

где α, c — постоянные, $\overline{\xi}(t) = 0$, $K_\xi(\tau) = \delta(\tau)$. Определить плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$ ординаты процесса $Y \equiv U(\tau)$ при условии, что ордината процесса $X \equiv U(t)$ задана $(t < \tau)$.

34.18. Ордината нормальной случайной функции $U(t)$ в начальный момент времени равняется x $(x > 0)$. Определить плотность вероятности времени θ, через которое $U(t)$ впервые обратится в нуль, если $\overline{u} = 0$, $K_u(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$.

34.19. Уравнение движения частицы имеет вид

$$\frac{dU}{dt} = -\beta U + \frac{\gamma}{U} + \alpha\xi(t).$$

Определить плотность вероятности $f(t, x; \tau, y)$ для величины скорости частицы $U(t)$, если α, β и γ — постоянные, $\xi(t) = 0$, $K_\xi(\tau) = \delta(\tau)$.

34.20. На вход радиоприемника поступает случайная помеха $U(t)$, которая воспринимается только в том случае, если абсолютная величина сигнала больше порога чувствительности приемника u_0. Определить вероятность $W(T)$ того, что в течение времени T не будет принято ни одного ложного сигнала, если $U(t)$ — нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K_u(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

где u_0, α и σ — постоянные, а $U(t) = 0$ при $t = 0$.

34.21. На вход радиоприемника поступает случайная помеха $U(t)$, которая воспринимается только в том случае, если величина сигнала больше порога чувствительности приемника u_0. Определить вероятность $W(T)$ того, что в течение времени T не будет принято ни одного ложного сигнала, если $U(t)$ — нормальный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией

$$K_u(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

где u_0, α и σ — постоянные, а $U(t) = 0$ при $t = 0$.

34.22. Нормальная случайная функция $U(t)$ имеет корреляционную функцию

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Определить вероятность $W(\tau)$ того, что в течение времени τ реализация случайной функции не будет иметь ни одного выброса длительностью большей τ_0 ни за уровень k_2 (снизу вверх), ни за уровень k_1 (сверху вниз), если $k_1 < U(0) < k_2$.

34.23. Координаты $U_1(t)$, $U_2(t)$ случайной точки на плоскости определяются равенствами

$$\dot{U}_1(t) = c\xi_1(t); \qquad \dot{U}_2(t) = c\xi_2(t),$$

где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — независимые случайные функции типа белого шума, $\overline{\xi}_1 = \overline{\xi}_2 = 0$, $K_{\xi_1}(\tau) = K_{\xi_2}(\tau) = \delta(\tau)$. Определить вероятность $W(T)$ того, что за время T случайная точка не выйдет за пределы круга радиуса r_0, если центр круга совпадает с начальным положением точки.

34.24. Определить вероятность того, что нормальная случайная функция $U(t)$, имеющая нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию

$$K_u(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

за время T ни разу не превысит значения $\beta e^{-\alpha t}$, если $U(0) = 0$.

34.25. Найти вероятность $W(\tau)$ того, что случайная точка за время τ ни разу не выйдет за пределы круга радиуса r_0 с центром в начале координат, если прямоугольные координаты точки $X(t)$, $Y(t)$ — независимые нормальные случайные функции, $\overline{x} = \overline{y} = 0$,

$$K_x(\tau) = K_y(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \qquad \sqrt{X^2(0) + Y^2(0)} = \frac{1}{2}\, r_0.$$

34.26. Нормальный случайный процесс $U(t)$ имеет нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию

$$K(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right).$$

Вероятность $W(\tau)$ пребывания ординаты $U(t)$ в течение времени τ в интервале (k_1, k_2) определяется формулой

$$W(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{k_1}^{k_2} w(\tau, y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2,$$

где $w(\tau, y_1, y_2)$ — плотность вероятности системы $Y_1 \equiv U(\tau)$; $Y_2 \equiv \dot{U}(\tau)$, вычисленная при условии, что за время τ ордината процесса ни разу не вышла за интервал (k_1, k_2).

Составить второе уравнение Колмогорова для $W(\tau, y_1, y_2)$ и сформулировать начальные и граничные условия для его решения, если $X_1 \equiv U(0)$ и $X_2 \equiv \dot{U}(0)$ — нормальные случайные величины с заданными математическими ожиданиями и корреляционной матрицей $\|k_{jl}\|$, $j, l = 1, 2$.

34.27. Уравнение движения гироскопического маятника с релейной коррекцией (в прецессионной теории) имеет вид

$$\dot{\alpha}(t) = c\,\mathrm{sign}[\chi(t) - \alpha(t)], \qquad c > 0,$$

где $\chi(t)$ — ошибка физического маятника. Определить плотность вероятности ошибки гироскопического маятника $\alpha(t)$ в стационарном режиме, если $\chi(t)$ — стационарная нормальная функция времени,

$$\overline{\chi} = 0, \qquad K_\chi(\tau) = \sigma_2^2 e^{-\mu|\tau|}.$$

34.28. Случайная функция $U(t)$ определяется уравнениями:

$$U(t) = U_2(t) - U_1(t);$$

$$\frac{dU_1}{dt} + \mu U_1 = \mu c \operatorname{sgn}(U_2 - U_1),$$

где $\mu = \text{const}$, $c = \text{const}$, а $U_2(t)$ — нормальная стационарная функция, имеющая нулевое математическое ожидание и корреляционную функцию

$$K_{u_2}(\tau) = \sigma^2 e^{-\mu|\tau|}.$$

Определить плотность вероятности $f(y)$ ординаты процесса $U(t)$ после окончания переходного процесса.

Глава 8

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

§ 35. ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРОВ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Значения параметров законов распределения случайных величин, получаемые в результате обработки опытов, называются оценками этих величин и обозначаются теми же буквами, что и оцениваемые параметры, но с волнистой чертой сверху (например, $\widetilde{\mathrm{M}}[X] = \widetilde{x}$, $\widetilde{\mathrm{D}}[X]$, $\widetilde{k}_{xy}$, $\widetilde{\sigma}$, $\widetilde{m}_k$, $\widetilde{\mu}_k$). В случае необходимости различные оценки одной и той же величины снабжаются индексами (например, $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ — различные оценки σ).

В методе моментов начальные моменты оцениваются как среднее арифметическое соответствующих степеней элементов выборки x_j, а затем через них выражаются параметры закона распределения.

В методе максимального правдоподобия оценки параметров $Q_1, Q_2, \ldots, Q_l$ распределения случайной величины X, находятся как решения системы l уравнений

$$\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \Theta_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, l),$$

где $\mathcal{L} = \prod_{j=1}^{n} f(x_j, Q_1, Q_2, \ldots, Q_l)$ — функция правдоподобия; $f(x_j, Q_1, Q_2, \ldots, Q_l)$ — плотность вероятности случайной величины X, взятой при аргументе x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

В регулярном случае существует нижняя граница дисперсии несмещенных оценок параметра Θ, определяемая формулами

$$\mathrm{D}_0 = \mathrm{D}[\widetilde{\Theta}^*] = \frac{1}{n\mathrm{M}\left\{\left[\frac{\partial \ln f(x)}{\partial \Theta}\right]^2\right\}} \quad \text{или} \quad \mathrm{D}_0 = -\frac{1}{n\mathrm{M}\left[\frac{\partial^2 \ln f(x)}{\partial \Theta^2}\right]}.$$

Несмещенная оценка математического ожидания

$$\widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j = c + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - c),$$

где c — произвольное число, вводимое для удобства расчетов («ложный нуль»).

При неизвестном $\overline{x}$ несмещенная оценка дисперсии

$$\mathrm{D}[X] = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - c)^2 - \frac{n}{n-1}(\widetilde{x} - c)^2 =$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - c)^2 - \frac{1}{n(n-1)}\left[\sum_{j=1}^{n}(x_j - c)\right]^2.$$

Если исследуемая случайная величина распределена нормально, то несмещенная оценка среднего квадратического отклонения

$$\widetilde{\sigma} = k_n\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1{,}45}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2},$$

$$\text{где } k_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Значения коэффициента k_n приведены в таблице [16].

При известном математическом ожидании несмещенная оценка дисперсии

$$\widetilde{\mathrm{D}}[X] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2.$$

Несмещенная оценка корреляционного момента случайных величин:

— при неизвестных математических ожиданиях X и Y

$$\widetilde{k}_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})(y_j - \widetilde{y});$$

— при известных математических ожиданиях

$$\widetilde{k}_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})(y_j - \overline{y}).$$

Оценка коэффициента корреляции находится по формуле

$$\widetilde{r}_{xy} = \frac{\widetilde{k}_{xy}}{\widetilde{\sigma}_x \widetilde{\sigma}_y}.$$

При большом объеме выборки ее элементы объединяют в группы (разряды), представляя результаты опыта в виде группированной выборки.

Оценки моментов в этом случае приближенно определяются формулами:

$$\widetilde{\mu}_s[X] \approx \sum_{i=1}^{l}(\widetilde{x}_i - \widetilde{x})^s \widetilde{p}_i,$$

$$\widetilde{m}_s[X] \approx \sum_{i=1}^{l}\widetilde{x}_i^s \widetilde{p}_i,$$

где $\widetilde{x}_i$ — среднее значение для разряда, $\widetilde{p}_i$ — частота разряда, или более точными формулами (с учетом поправок Шеппарда):

$$\widetilde{m}_2[X] \approx \sum_{i=1}^{l}\widetilde{x}_i^2 \widetilde{p}_i - \frac{h^2}{12},$$

$$\widetilde{m}_3[X] \approx \sum_{i=1}^{l}\widetilde{x}_i^3 \widetilde{p}_i - \frac{h^2}{4}\widetilde{x},$$

$$\widetilde{m}_4[X] \approx \sum_{i=1}^{l}\widetilde{x}_i^4 \widetilde{p}_i - \frac{h^2}{2}\sum_{i=1}^{l}\widetilde{x}_i^2 \widetilde{p}_i + \frac{7h^4}{240},$$

$$\widetilde{\mu}_2[X] \approx \sum_{i=1}^{l} (\widetilde{x}_i - \widetilde{x})^2 \widetilde{p}_i - \frac{h^2}{12},$$

$$\widetilde{\mu}_4[X] \approx \sum_{i=1}^{l} (\widetilde{x}_i - \widetilde{x})^4 \widetilde{p}_i - \frac{h^2}{2}, \sum_{i=1}^{l} (\widetilde{x}_i - \widetilde{x})^2 \widetilde{p}_i + \frac{7h^4}{240},$$

где h — длина интервала разряда.

Задачи

35.1. Для проверки точности работы высотомера произведено 12 независимых измерений известной высоты равной 232,38 м и получены следующие результаты: 232,50; 232,48; 232,15; 232,53; 232,45; 232,30; 232,48; 232,05; 232,45; 232,60; 232,47; 232,30. Предполагая, что ошибки измерений имеют нормальное распределение, определить несмещенную оценку среднего квадратического отклонения ошибок высотомера.

35.2. Восемь независимых измерений расстояния между двумя геодезическими знаками дали следующие результаты: 369, 378, 315, 420, 385, 401, 372, 383 м. Систематическая ошибка отсутствует. Найти несмещенную оценку дисперсии ошибок измерительного метода, если:

а) длина измеряемого расстояния известна: $\overline{x} = 375$ м;

б)длина измеряемого расстояния неизвестна.

35.3. Максимальная скорость самолета зафиксированная в 15 опытах имела следующие значения: 422,2; 418,7; 425,6; 420,3; 425,8; 423,1; 431,5; 428,2; 438,3; 434,0; 411,3; 417,2; 413,5; 441,3; 420,0 м/сек.

Определить несмещенные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения максимальной скорости самолета, полагая, что максимальная скорость самолета имеет нормальное распределение, а величиной ошибок ее измерения можно пренебречь.

35.4. В результате 6 независимых измерений постоянной величины получены следующие данные: 27, 38, 30, 37, 35, 31.

Полагая, что ошибки измерений распределены по закону нормального распределения с нулевым математическим ожиданием, найти несмещенные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения.

35.5. Чувствительность телевизора к видеопрограмме характеризуется группированной выборкой, приведенной в таблице 2.

Таблица 2

$\widetilde{x}_i$, мкВ	n_i	$\widetilde{x}_i$, мкВ	n_i	$\widetilde{x}_i$, мкВ	n_i
200	10	350	20	550	3
225	1	375	10	600	19
250	26	400	29	625	3
275	8	425	5	650	1
300	23	450	26	700	6
325	9	500	24	800	4

Определить оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения для чувствительности телевизора к видеопрограмме.

35.6. Для определения частоты события A производится n независимых опытов, в каждом из которых $\mathcal{P}(A)$ одна и та же.

Определить, при каком значении $\mathcal{P}(A)$ дисперсия частоты будет максимальной.

35.7. Дана выборка из нормальной совокупности объема n. Определить, какая из двух оценок дисперсии случайной величины X

$$\widetilde{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2 \quad \text{или} \quad \widetilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2$$

обладает меньшей дисперсией, если $\overline{x} = 0$.

35.8. Полученные в результате опыта значения случайной величины X разбиты на группы. Среднее значение $\widetilde{x}_i$ для каждой группы и число элементов в группе n_i даны в таблице 3.

Таблица 3

$\widetilde{x}_i$	n_i	$\widetilde{x}_i$	n_i	$\widetilde{x}_i$	n_i
44	7	47	48	50	1
45	18	48	33	52	1
46	120	49	5		

Определить оценки для асимметрии и эксцесса.

35.9. Дана выборка: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Для нахождения оценки дисперсии применяется формула

$$\widetilde{\sigma}_x^2 = k \sum_{j=1}^{n-1} (x_{j+1} - x_j)^2.$$

Каким должно быть k, чтобы $\widetilde{\sigma}_x^2$ являлась несмещенной оценкой σ_x^2?

35.10. Даны результаты независимых измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ неизвестной постоянной величины. Оценка среднего квадратического отклонения ошибок измерений определяется по формуле

$$\widetilde{\sigma} = k \sum_{j=1}^{n} |x_j - \widetilde{x}|,$$

где

$$\widetilde{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Определить значение k, при котором $\widetilde{\sigma}$ является несмещенной оценкой σ, если ошибки измерения — одинаково распределенные нормальные случайные величины.

35.11. Даны результаты независимых измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ известной постоянной величины $\overline{x}$. Ошибки измерений подчиняются одному и тому же закону нормального распределения с нулевым математическим ожиданием. Оценка среднего квадратического отклонения определяется по формуле

$$\widetilde{\sigma} = k \sum_{j=1}^{n} |x_j - \overline{x}|.$$

Каким должно быть k, чтобы были несмещенными оценки: а) среднего квадратического отклонения ошибок; б) дисперсии ошибок?

35.12. Произведено n независимых неравноточных измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одной и той же неизвестной постоянной величины. Оценка измеряемой величины определяется по формуле

$$\widetilde{x} = \sum_{j=1}^{n} g_j x_j.$$

Каким должно быть g_j, чтобы $\widetilde{x}$ была несмещенной оценкой $\overline{x}$ с минимальной дисперсией, если дисперсия ошибок j-го измерения равна σ_j^2?

35.13. В n независимых опытах получены значения x_k, y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ величин X, Y, образующих систему двух независимых нормальных случайных величин. Определить несмещенные оценки математических ожиданий и средних квадратических отклонений.

35.14. Решить задачу 35.13 для случая, когда результаты независимых испытаний, округленные до целых, даны в таблице 4.

Таблица 4

№ опыта (k)	x_k, м	y_k, м	№ опыта (k)	x_k, м	y_k, м
1	55	77	9	41	31
2	43	46	10	36	60
3	63	34	11	56	48
4	57	61	12	72	78
5	44	84	13	48	62
6	26	54	14	16	49
7	59	53	15	49	31
8	72	21	16	36	64

35.15. В n независимых опытах получены значения x_k, y_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ величин X, Y, образующих систему двух зависимых нормальных случайных величин. Определить несмещенные оценки параметров единичного эллипса распределения, т. е. эллипса, уравнение которого

$$\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\left(\frac{x-\overline{x}}{\sigma_x} \right)^2 + \left(\frac{y-\overline{y}}{\sigma_y} \right)^2 - 2r \, \frac{(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{\sigma_x \sigma_y} \right] = 1.$$

35.16. Решить задачу 35.15. для случая, когда результаты 16 независимых испытаний, округленные до целых, даны в таблице 5.

Таблица 5

№ опыта (k)	Отклонения, м		№ опыта (k)	Отклонения, м	
	x_k	y_k		x_k	y_k
1	+2	+59	9	+1	+7
2	+3	+88	10	–2	+57
3	+2	+32	11	–1	+42
4	–2	–24	12	+2	+23
5	+2	+72	13	+4	+103
6	0	+34	14	0	+65
7	+2	–12	15	+1	+16
8	+3	+50	16	+1	+28

35.17. Произведено n независимых наблюдений случайной величины X, имеющей закон нормального распределения. Полученная выборка подвергается обработке для нахождения оценки среднего квадратического отклонения по формуле

$$\widetilde{\sigma} = k\sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2}{n}},$$

где

$$\widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Определить, каким должно быть k, чтобы $\widetilde{\sigma}$ являлась несмещенной оценкой среднего квадратического отклонения σ.

35.18. Из таблицы случайных чисел взято 150 двузначных чисел (00 принималось за 100). Эти числа были разбиты по десяткам на интервалы (табл. 6).

Таблица 6

1-10	11-20	21-30	31-40	41-50	51-60	61-70	71-80	81-90	91-100
16	15	19	13	14	19	14	11	13	16

Построить гистограмму и график накопленной частоты. Определить оценки математического ожидания и дисперсии с учетом поправки Шеппарда.

35.19. Полученные в результате независимых опытов значения случайной величины X разбиты на разряды (группы). Среднее значение $\widetilde{x}_i$ и частота $\widetilde{p}_i$ для каждого разряда даны в таблице 7. Найти оценки математического ожидания и дисперсии с учетом поправки Шеппарда, если длина интервала разряда $h = 3$.

Таблица 7

$\widetilde{x}_i$	1,5	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5	19,5	22,5
$\widetilde{p}_i$	0,000	0,002	0,006	0,040	0,070	0,114	0,156	0,164
$\widetilde{x}_i$	25,5	28,5	31,5	34,5	37,5	40,5	43,5	
$\widetilde{p}_i$	0,180	0,122	0,108	0,030	0,004	0,004	0,000	

35.20. Произведено n независимых измерений одной и той же неизвестной постоянной величины. Систематические ошибки измерения равны нулю, а случайные ошибки распределены нормально. Для определения оценок дисперсии ошибок измерения были использованы две формулы:

$$\widetilde{\sigma}_1^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2}{n-1}, \qquad \widetilde{\sigma}_2^2 = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{j=1}^{n-1}(x_{j+1} - x_j)^2.$$

Являются ли $\widetilde{\sigma}_1^2$ и $\widetilde{\sigma}_2^2$ несмещенными оценками дисперсии? Какова эффективность второй оценки относительно первой?

35.21. Из нормальной генеральной совокупности сделана выборка объема n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В качестве оценок среднего квадратического отклонения предлагаются две величины

$$\widetilde{\sigma}_1 = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2} \quad \text{и} \quad \widetilde{\sigma}_2 = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2}.$$

Полагая $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ нормальными случайными величинами, найти для $n = 10$ и $n = 20$ вероятность уклонения каждой из оценок от оцениваемого параметра на величину не более $\varepsilon\sigma$, если $\varepsilon = 0{,}1$ т. е.

$$p_1 = \mathcal{P}(|\widetilde{\sigma}_1 - \sigma| \leqslant 0{,}1\sigma) \quad \text{и} \quad p_2 = \mathcal{P}(|\widetilde{\sigma}_2 - \sigma| \leqslant 0{,}1\sigma).$$

Доказать, что для малых ε

$$\frac{p_2}{p_1} \approx k_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\,.$$

35.22. Из генеральной совокупности, распределенной по закону

$$\mathcal{P}(X = k) = p^k(1-p)$$

извлечена выборка: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Найти оценку параметра p методом максимального правдоподобия.

35.23. Получена выборка объема n значений случайной величины X распределенной по закону Кэптейна

$$f(x) = \frac{\varphi'(x)}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{[\varphi(x)-a]^2}{2\sigma^2}}\,, \qquad (-\infty < x < \infty),$$

где $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям существования указанной плотности. Найти методом максимального правдоподобия:

а) оценку параметра a при известном σ;

б) оценку параметра σ^2 при известном a.

Доказать несмещенность оценки σ^2 и определить ее дисперсию.

35.24. Через равные промежутки времени τ измерены значения прямоугольной координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равномерно и прямолинейно движущегося объекта. Систематическая ошибка отсутствует, а случайные ошибки измерений подчиняются закону нормального распределения. Найти методом максимального правдоподобия скорость изменения координаты X, если измерения равноточны и независимы.

35.25. Произведено n независимых наблюдений случайной величины X, распределенной по закону «хи-квадрат»

$$f(x) = \frac{k^{\alpha+1}x^{\alpha}e^{-kx}}{\Gamma(\alpha+1)}\,, \qquad (x \geqslant 0).$$

Параметр α этого распределения известен.

а) Найти оценку параметра k методом максимального правдоподобия.

б) Установить, является ли найденная оценка несмещенной.

в) Вычислить дисперсию несмещенной оценки.

35.26. Из нормальной генеральной совокупности сделана выборка объема n. Известно математическое ожидание генеральной совокупности $\overline{x}$. Для нахождения оценки дисперсии использована формула

$$\widetilde{\mathrm{D}} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \overline{x})^2.$$

Является ли оценка $\widetilde{\mathrm{D}}$ эффективной?

35.27. Для условий задачи 35.21 установить, является ли оценка $\widetilde{\sigma}_1$ эффективной?

§ 36. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

Для выборки из нормальной генеральной совокупности доверительные интервалы определяются формулами:

а) для математического ожидания при известном σ

$$\alpha = \mathrm{P}\{|\widetilde{x} - \overline{x}| \leqslant \varepsilon\} = \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right);$$

при неизвестном σ $\varepsilon = \frac{\widetilde{\sigma}\, t_\alpha}{\sqrt{n}}$, где t_α находится из [16T] по α и $k = n - 1$;

б) для среднего квадратического отклонения

$$\mathrm{P}\{(1-q)\widetilde{\sigma} \leqslant \sigma \leqslant (1+q)\widetilde{\sigma}\} = \alpha,$$

где q находится по α и $k = n - 1$ из [20T].

Для доверительного интервала

$$\mathrm{P}\{\gamma_1\widetilde{\sigma} \leqslant \sigma \leqslant \gamma_2\widetilde{\sigma}\} = \alpha$$

с одинаковой вероятностью $\frac{1-\alpha}{2}$ выхода σ за правую и левую границы, значения γ_1 и γ_2 выбираются из [18T] или [19T] по α и $k = n - 1$.

Доверительный интервал для математического ожидания $\overline{x}$ экспоненциально распределенной случайной величины находится из условия

$$\mathrm{P}\{\nu_2\widetilde{x} \leqslant \overline{x} \leqslant \nu_1\widetilde{x}\} = \alpha,$$

где $\nu_1 = \frac{2n}{\chi^2_\delta}$, $\nu_2 = \frac{2n}{\chi^2_{1-\delta}}$.

Значения χ^2_δ и $\chi^2_{1-\delta}$ определяются из таблицы [18T] для вероятностей $\delta = \frac{1-\alpha}{2}$ и δ при $k = 2n$.

При объеме выборки $n > 15$ границы доверительного интервала для $\overline{x}$ приближенно рассчитываются по формулам

$$\frac{4\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}{\left(\sqrt{4n-1}+\varepsilon_0\right)^2}, \qquad \frac{4\sum\limits_{j=1}^{n} x_j}{\left(\sqrt{4n-1}-\varepsilon_0\right)^2},$$

где $\Phi(\varepsilon_0) = \alpha$.

Если из одной и той же генеральной совокупности произведено N выборок каждая объемом n и событие, вероятность появления которого согласуется с законом распределения Пуассона, происходило m_j раз в выборке № j $(j = 1, 2, \ldots, N)$, а оценка математического ожидания (параметра a) определена формулой $\widetilde{a} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{N} m_\nu}{N}$, то при $\widetilde{a} > 0$ границы a_1 и a_2 доверительного интервала определяются из соотношений

$$\mathcal{P}\{2N\widetilde{a} > \chi^2_\delta\} = \mathcal{P}\{2N\widetilde{a} < \chi^2_{1-\delta}\} = \frac{1-\alpha}{2} = \delta,$$

т. е. для нижней и верхней границ они соответственно равны

$$a_1 = \frac{\chi^2_{1-\delta}}{2N}, \qquad a_2 = \frac{\chi^2_\delta}{2N},$$

где $\chi^2_{1-\delta}$ и χ^2_δ при заданном δ выбираются из таблицы [18T], причем $\chi^2_{1-\delta}$ — для числа степеней свободы $k = 2\sum_{j=1}^{N} m_j$, а $\chi^2_{1-\delta}$ — для $k = 2\left(\sum\limits_{j=1}^{N} m_j + 1\right)$.

Для $\widetilde{a} = 0$ нижняя граница равна нулю, а верхняя равна

$$\frac{\chi^2_{2\delta}}{2N},$$

где $\chi^2_{2\delta}$ находится с помощью таблицы [18Т] для $k = 2$ и вероятности $\mathrm{P}\{2Na > \chi^2_{2\delta}\} = 2\delta$.

При $k = 30$ границы доверительного интервала приближенно определяются формулами:

нижняя

$$\frac{\left(\sqrt{4\sum\limits_{j=1}^{N} m_j - 1} - \varepsilon_0\right)^2}{4N},$$

верхняя

$$\frac{\left(\sqrt{4\sum\limits_{j=1}^{N} m_j - 1} + \varepsilon_0\right)^2}{4N},$$

где $\Phi(\varepsilon_0) = \alpha$.

Если при n независимых опытах некоторое событие, вероятность появления которого в каждом опыте равна p, имело место ровно m раз $(0 < m < n)$, то границы p_1, p_2 доверительного интервала для вероятности p определяются уравнениями:

$$\sum_{j=m}^{n} c_n^j p_1^j (1 - p_1)^{n-j} = \frac{1-\alpha}{2},$$

$$\sum_{j=0}^{m} c_n^j p_2^j (1 - p_2)^{n-j} = \frac{1-\alpha}{2}.$$

Величины p_1 и p_2 приведены в таблице [30Т].

Когда n достаточно велико, то приближенно

$$p_1 = \widetilde{p} - \varepsilon, \qquad p_2 = \widetilde{p} + \varepsilon,$$

где $\widetilde{p} = \frac{m}{n}$, а ε является решением уравнения

$$\alpha = \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{\widetilde{p}(1-\widetilde{p})}}\right).$$

Более точное приближение дают формулы

$$\left.\begin{matrix} p_2 \\ p_1 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{n+\varepsilon_0^2}\left[n\widetilde{p} + \frac{\varepsilon_0^2}{2} \pm \frac{1}{2} \pm \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\left(n\widetilde{p} \pm \frac{1}{2}\right)\left(n - n\widetilde{p} \mp \frac{1}{2}\right)}{n} + \frac{\varepsilon_0^2}{4}}\right]$$

и

$$\left.\begin{matrix} \arcsin\sqrt{p_2} \\ \arcsin\sqrt{p_1} \end{matrix}\right\} = \arcsin\sqrt{\frac{n\widetilde{p} \pm \frac{1}{2}}{n}} \pm \frac{\varepsilon_0}{2\sqrt{n}},$$

где $\Phi(\varepsilon_0) = \alpha$.

Одна из этих формул дает интервал с занижением, другая — с завышением того же порядка.

Если $m = 0$, то $p_1 = 0$, а $p_2 = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$.

Если $m = n$, то $p_2 = 1$, а $p_1 = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$.

Границы r_H и r_b доверительного интервала для коэффициента корреляции r, оценка которого получена из выборки нормальной генеральной совокупности объема n, определяются формулами

$$r_H = \operatorname{th} z_H, \qquad r_b = \operatorname{th} z_b,$$

где

$$z_H = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\widetilde{r}}{1-\widetilde{r}} - \frac{\widetilde{r}}{2(n-1)} - \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{n-3}};$$

$$z_b = \frac{1}{2}\ln\frac{1+\widetilde{r}}{1-\widetilde{r}} - \frac{\widetilde{r}}{2(n-1)} + \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{n-3}};$$

$$\varepsilon_0 = \Phi^{-1}(\alpha).$$

Значения величины $\frac{1}{2}\ln\frac{1+\widetilde{r}}{1-\widetilde{r}}$ приведены в таблице [31]. В случае больших n ($n > 50$) приближенно:

$$r_H = \widetilde{r} - \frac{\varepsilon_0(1-\widetilde{r}^2)}{\sqrt{n}}, \qquad r_b = \widetilde{r} + \frac{\varepsilon_0(1-\widetilde{r}^2)}{\sqrt{n}}.$$

Когда параметры закона распределения вычисляются по группированной выборке, применение формул данного параграфа является нестрогим и влечет ошибку, величина которой увеличивается с ростом интервала разряда.

Задачи

36.1. Постоянная величина измерена 25 раз с помощью прибора, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ м. Определить границы доверительного интервала для значения измеряемой величины при доверительной вероятности 0,99, если $\widetilde{x} = 100$ м.

36.2. Результаты измерений, не содержащие систематических ошибок, записаны в виде группированной выборки (табл. 8), $\widetilde{x}_i$ и n_i соответственно среднее значение и число элементов в i-м разряде.

Определить оценку измеряемой величины и доверительный интервал при доверительной вероятности 0,95, считая ошибки измерения нормальными независимыми величинами.

Таблица 8

i	$\widetilde{x}_i$, м	n_i	i	$\widetilde{x}_i$, м	n_i
1	114	2	4	117	4
2	115	5	5	118	3
3	116	8			

36.3. Произведено 40 измерений базы постоянной длины. По результатам опыта получены оценки измеряемой величины и среднего квадратического отклонения: $\widetilde{x} = 10400$ м и $\widetilde{\sigma}_x = 85$ м. Ошибки измерения подчиняются закону нормального распределения. Найти вероятности того, что доверительные интервалы $(0{,}999\widetilde{x}; 1{,}001\widetilde{x})$ и $(0{,}95\widetilde{\sigma}_x; 1{,}05\widetilde{\sigma}_x)$ содержат внутри себя неизвестные параметры $\overline{x}$ и σ_x соответственно.

36.4. Результаты 11 измерений постоянной величины даны в таблице 9. Ошибки измерений распределены по нормальному закону, систематические ошибки отсутствуют.

Таблица 9

№ измерения (j)	x_j, м	№ измерения (j)	x_j, м	№ измерения (j)	x_j, м
1	9,9	5	6,0	9	11,6
2	12,5	6	10,9	10	9,8
3	10,3	7	10,3	11	14,0
4	9,2	8	11,8		

Определить:

а) оценки измеряемой величины и среднего квадратического отклонения;

б) вероятность того, что абсолютное значение ошибки в определении истинного значения измеряемой величины меньше 2% от $\widetilde{x}$;

в) вероятность того, что абсолютное значение ошибки определения среднего квадратического отклонения меньше 1% от $\widetilde{\sigma}$.

36.5. На основании 100 опытов определено, что в среднем для производства детали требуется $\widetilde{t} = 5{,}5$ сек, а $\widetilde{\sigma}_t = 1{,}7$ сек. Сделав допущение, что время для производства детали есть нормальная случайная величина, определить границы, в которых лежат истинные значения для $\overline{t}$ и σ_t, с доверительной вероятностью 85 и 90% соответственно.

36.6. Определение скорости снаряда было проведено на 5 испытаниях, в результате которых вычислена оценка $\widetilde{v} = 870{,}3$ м/сек. Найти 95%-ный доверительный интервал, если известно, что рассеивание скорости подчинено нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma_v = 3{,}1$ м/сек.

36.7. Глубина моря измеряется прибором, систематическая ошибка которого равна нулю, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 30$ м. Сколько надо сделать независимых измерений, чтобы определить глубину с ошибкой не более 15 м при доверительной вероятности 90%?

36.8. Найти при доверительной вероятности 0,9 доверительные границы для расстояния до ориентира $\overline{x}$ и для среднего квадратического отклонения σ, если при 10 независимых измерениях были получены значения расстояния, приведенные в таблице 10, а ошибки измерения имеют нормальное распределение с математическим ожиданием, равным 0.

Таблица 10

№ опыта (j)	1	2	3	4	5
x_j, м	25 025	24 970	24 780	25 315	24 907
№ опыта (j)	6	7	8	9	10
x_j, м	24 646	24 717	25 354	24 912	25 374

36.9. Произведено 5 независимых равноточных измерений для определения заряда электрона. Опыты дали следующие результаты (в абсолютных электростатических единицах):

$$\begin{aligned} &4,781\cdot 10^{-10}, \quad 4,792\cdot 10^{-10},\\ &4,795\cdot 10^{-10}, \quad 4,779\cdot 10^{-10},\\ &4,769\cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Определить оценку величины заряда электрона и найти доверительные границы при доверительной вероятности 99%, считая, что ошибки нормальны и измерения не имеют систематических ошибок.

36.10. По 15 независимым равноточным измерениям были рассчитаны оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения средней скорости самолета $\widetilde{v} = 424{,}7$ м/сек и $\widetilde{\sigma}_v = 8{,}7$ м/сек.

Определить: а) доверительные границы для математического ожидания и среднего квадратического отклонения средней скорости при доверительной вероятности 0,9;

б) вероятности, с которыми можно утверждать, что абсолютное значение ошибки в определении $\overline{v}$ и $\widetilde{\sigma}_v$ не превзойдет 2 м/сек. (Считать выборку нормальной.)

36.11. В качестве оценки расстояния до навигационного знака принимают среднее арифметическое результатов независимых однократных измерений расстояния n дальномерами. Измерения не содержат систематической ошибки, а случайные ошибки распределены нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 10$ м. Сколько надо иметь дальномеров, чтобы абсолютная величина ошибки при определении дальности до навигационного знака с вероятностью 0,9 не превышала 15 м?

36.12. Известно, что измерительный прибор не имеет систематических ошибок, а случайные ошибки каждого измерения независимы и подчиняются одному и тому же закону нормального распределения. Сколько надо произвести измерений для определения оценки среднего квадратического отклонения прибора, чтобы с доверительной вероятностью 70% абсолютное значение ошибки в определении этой величины было не более 20% от σ?

36.13. Систематические ошибки измерительного прибора практически равны нулю, а случайные — независимы и распределены нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ м. Необходимо, чтобы абсолютное значение разности между оценкой измеряемой величины и истинным ее значением не превосходило 10 м. Определить, с какой вероятностью будет выполнено это условие, если число наблюдений 3, 5, 10, 25 (построить график)?

36.14. Оценка измеряемой величины определяется по формуле

$$\widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Результаты отдельных измерений x_j не содержат систематической ошибки, независимы и подчинены одному и тому же закону нормального распределения. Определить границы доверительного интервала с доверительной вероятностью 0,9 для значения измеряемой величины при следующих условиях:

а) $\sigma = 20$ м, $n = 3, 5, 10, 25$; б) $\widetilde{\sigma} = 20$ м, $n = 3, 5, 10, 25$.

36.15. При испытании 10 однотипных приборов зарегистрирован момент выхода каждого прибора из строя. Результаты наблюдений даны в таблице 11.

Таблица 11

№ прибора	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_i, час	200	350	600	450	400	400	500	350	450	550

Определить оценку математического ожидания $\widetilde{t}$ времени T безотказной работы прибора и доверительный интервал для $\overline{t}$ при доверительной вероятности 0,9, если случайная величина T имеет экспоненциальное распределение.

36.16. Случайно отобранная партия из 3 приборов была подвергнута испытаниям на срок безотказной работы. Количество часов, проработанных каждым прибором до выхода его из строя, оказалось равным 100, 170, 400, 250, 520, 680, 1500, 1200. Определить 80%-ный доверительный интервал для средней продолжительности работы прибора, если время безотказной работы прибора имеет экспоненциальный закон распределения.

36.17. Плотность вероятности для времени T между последовательными отказами радиоэлектронной аппаратуры задана формулой

$$f(t) = \frac{1}{\overline{t}}\, e^{-\frac{t}{\overline{t}}},$$

где $\overline{t}$ — математическое ожидание случайной величины T («наработка на отказ»).

При определении оценки параметра $\overline{t}$ наблюдалось 25 отказов, а общая продолжительность безотказной работы с начала испытаний до последнего отказа оказалась равной $\sum_{j=1}^{25} t_j = 1600$ час.

Определить границы доверительного интервала для параметра $\overline{t}$, полученного по результатам этого опыта, при доверительной вероятности $\alpha = 0{,}8$.

36.18. Для определения токсической дозы яд был введен 30 мышам, 8 из которых погибли. Определить границы доверительного интервала для вероятности того, что данная доза окажется смертельной, при доверительной вероятности 0,95, предполагая, что число смертельных исходов в данном опыте подчиняется биномиальному закону распределения.

36.19. Произведено 100 независимых опытов, в результате которых событие A наблюдалось 40 раз. Определить границы доверительного интервала для вероятности появления этого события в одном опыте при доверительной вероятности 0,95 и 0,99, если число появлений события A имеет биномиальное распределение.

36.20. При испытаниях каждого из 10 приборов не наблюдалось ни одного отказа. Определить границы доверительного интервала для вероятности отказа при доверительной вероятности 0,8; 0,9 и 0,99, если число отказов имеет биномиальное распределение.

36.21. Стрелок A при 10 выстрелах попал в цель 5 раз, а стрелок B после 100 выстрелов по той же цели имел 50 попаданий. Определить границы доверительных интервалов для вероятности попадания в цель каждым стрелком одним выстрелом при доверительной вероятности 0,99, если число попаданий в цель имеет биномиальное распределение.

36.22. За время испытаний, равное T час, в шести однотипных приборах было отмечено 12 отказов. Найти границы доверительного интервала для математического ожидания числа отказов за T час работы такого прибора при доверительной вероятности 0,9, если число отказов для проверяемых приборов имеет закон распределения Пуассона.

36.23. Число частиц, зафиксированное счетчиком в опыте Резерфорда, Чедвика и Эллиса за каждый из 2608 интервалов по 7,5 сек, дано в таблице 12. Считая, что число частиц, зафиксированное счетчиком, согласуется с законом распределения Пуассона, определить границы доверительного интервала для параметра этого закона, соответствующие доверительной вероятности 0,9999.

Таблица 12

Число частиц, достигших счетчика	Число наблюдений, в которых такое число имело место
0	57
1	203
2	383
3	525
4	532
5	408
6	273
7	139
8	45
9	27
10	16

36.24. При исследовании семян клевера было установлено, что выборка весом 100 г не содержит семян повилики. Найти 99%-ный доверительный интервал для среднего числа семян повилики в выборке весом 100 г, если число семян повилики, содержащихся в семенах клевера, имеет распределение Пуассона.

36.25. По результатам 190 испытаний образцов железа «армко» были определены оценки коэффициентов корреляции $\widetilde{r}_{12} = 0{,}55$, $\widetilde{r}_{13} = 0{,}30$, $\widetilde{r}_{14} = 0{,}37$ между коэрцитивной силой и соответственно баллом зерна, содержанием углерода и содержанием серы. Определить границы доверительных интервалов для определенных из этого опыта коэффициентов корреляции при доверительной вероятности 0,99 и 0,95, если можно считать, что рассматриваемые случайные величины имеют нормальное распределение.

36.26. В результате опыта получены 25 пар значений для системы случайных величин (x, y), имеющих нормальное распределение. По опытным данным рассчитаны оценки параметров этой системы: $\widetilde{x} = 10{,}5$; $\widetilde{y} = 74$; $\widetilde{\sigma}_x = 2{,}0$; $\widetilde{\sigma}_y = 10{,}0$; $\widetilde{r}_{xy} = 0{,}62$. Определить границы доверительных интервалов для параметров системы случайных величин (x, y) при доверительной вероятности 0,9.

§ 37. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Если требуется найти оценки $\widetilde{a}_k$ параметров a_k функции

$$y = Q(x; a_0; a_1; \ldots; a_m) \equiv Q(x), \qquad (m < n),$$

аппроксимирующей $(n+1)$ пар значений $(x_j; y_j)$, где значения y_j содержат случайные ошибки с нулевым математическим ожиданием и одинаковыми дисперсиями σ^2 (случай равноточных измерений), а значения x_j известны без ошибок, то $\widetilde{a}_k$ определяются как решение системы нормальных уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial \widetilde{a}_k} = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, m),$$

где

$$S = \sum_{j=0}^{n} [y_j - Q(x_j, \widetilde{a}_0, \widetilde{a}_1, \ldots, \widetilde{a}_m)]^2 = \sum_{j=0}^{m} [y_j - Q(x_j)]^2.$$

Для случая, когда функция $Q(x)$ зависит от параметров линейно:

$$Q(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x),$$

где $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ — заданные линейно независимые функции, система нормальных уравнений принимает вид

$$S_{l_0}\widetilde{a}_0 + S_{l_1}\widetilde{a}_1 + \ldots + S_{l_m}\widetilde{a}_m = v_l, \qquad (l = 0, 1, \ldots, m),$$

где

$$S_{lk} = \sum_{j=0}^{m} \varphi_l(x_j)\varphi_k(x_j) = S_{kl}; \qquad v_l = \sum_{j=0}^{n} y_j\varphi_l(x_j),$$
$$(k, l = 0, 1, \ldots, m).$$

Решение системы $(m + 1)$ нормальных уравнений может быть представлено в виде

$$\widetilde{a}_k = \sum_{l=0}^{m} M_{kl}v_l, \quad \text{где} \quad M_{kl} = \frac{\Delta_{kl}}{\Delta},$$

$\Delta = |S_{kl}|$ — определитель системы, Δ_{kl} — алгебраические дополнения элементов S_{kl} в определителе Δ. Числа M_{kl} служат коэффициентами в линейных зависимостях $\widetilde{a}_k$ от v_l, и их можно вычислить, если при решении системы не заменять v_l их числовыми значениями.

Если дисперсия σ^2 неизвестна, то ее оценка $\widetilde{\sigma}^2$ определяется формулой

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{S_{\min}}{n - m},$$

где

$$S_{\min} = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j^2, \quad \varepsilon_j = y_j - \widetilde{a}_0\varphi_0(x_j) - \widetilde{a}_1\varphi_1(x_j) - \ldots - \widetilde{a}_m\varphi_m(x_j).$$

Оценки дисперсий $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_k}$ и корреляционных моментов $\widetilde{k}_{\widetilde{a}_k, \widetilde{a}_l}$ величин $\widetilde{a}_k$ вычисляются по формулам

$$\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_k} = M_{kk}\widetilde{\sigma}^2; \qquad \widetilde{k}_{\widetilde{a}_k, \widetilde{a}_l} = M_{kl}\widetilde{\sigma}^2.$$

При нормально распределенных величинах y_j доверительные интервалы для a_k и $\overline{y}(x) = Q(x)$ определяются неравенствами

$$\widetilde{a}_k - \gamma\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_k} < a_k < \widetilde{a}_k + \gamma\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_k}$$

$$\widetilde{y}(x) - \gamma\widetilde{\sigma}_{\widetilde{y}}(x) < \overline{y}(x) < \widetilde{y}(x) + \gamma\widetilde{\sigma}_{\widetilde{y}}(x),$$

где γ определяется из таблиц [16Т] для распределения Стьюдента при $k = n - m$, а

$$\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{y}}(x) = \sum_{k=0}^{m} \widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_k} \varphi_k^2(x) + 2 \sum_{\substack{k,l \\ (k \neq l)}} \widetilde{k}_{\widetilde{a}_k, \widetilde{a}_l} \varphi_k(x) \varphi_l(x).$$

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ в этом случае имеет вид

$$\gamma_1 \widetilde{\sigma} < \sigma < \gamma_2 \widetilde{\sigma},$$

где γ_1 и γ_2 определяются из таблиц [19Т] для закона χ^2-распределения по доверительной вероятности β и числу степеней свободы $k = n - m$.

В частном случае, когда $\varphi_k(x) = x^k$ (параболическая регрессия), формулы для s_{lk} и V_l принимают вид

$$\left.\begin{aligned} s_{lk} &= \sum_{j=0}^{n} x_j^{l+k} = s_{l+k} \\ V_l &= \sum_{j=0}^{n} y_j x_j^l \end{aligned}\right\}, \qquad (l, k = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

При равноотстоящих значениях x_j аппроксимирующую функцию $Q(x)$ можно взять в виде линейной комбинации ортогональных полиномов Чебышева $P_{k,n}(x)$

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k P_{k,n}(x'),$$

где

$$x' = \frac{x - x_0}{h}, \quad h = x_{j+1} - x_j.$$

При этом

$$b_k = \frac{C_k}{S_k}, \quad \text{где} \quad C_k = \sum_{j=0}^{n} y_j P_{k,n}(x'_j),$$

$$S_k = \sum_{j=0}^{n} P^2_{kn}(x'_j); \quad \widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{b}_k} = \frac{\widetilde{\sigma}^2}{S_k}; \quad k_{\widetilde{b}_k \widetilde{b}_l} = 0 \quad (k \neq l).$$

В таблице [29Т] приведены значения $P_{k,n}(x')$ полиномов Чебышева, умноженных на целое число $P_{k,n}(0)_{\text{табл.}}$, т. е.

$$P_{k,n}(x') = \frac{P_{k,n}(x')_{\text{табл.}}}{P_{k,n}(0)_{\text{табл.}}}.$$

Приведенные выше формулы для $Q(x)$, c_k, $\widetilde{b}_k$, S_k, остаются справедливыми, если $P_{k,n}(x')$ всюду заменить на $P_{k,n}(x')_{\text{табл.}}$, при этом под $P_{k,n}(x')$ в формуле для $Q(x)$ следует понимать $P_{k,n}(x')_{\text{табл.}}$ или умножать коэффициенты $\widetilde{b}_k$ на $P_{k,n}(0)_{\text{табл.}}$.

Если

$$Q(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{m}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx),$$

то при $x_j = \frac{2\pi j}{n}$ имеют место формулы Бесселя:

$$\widetilde{\lambda}_0 = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j; \quad \widetilde{\lambda}_k = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \cos kx_j; \quad \widetilde{\mu}_k = \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n-1} y_j \sin kx_j;$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m), \qquad (2m + 1 < n).$$

В этом случае

$$\widetilde{\sigma}^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{y_j^2 - n\widetilde{\lambda}_0^2 - \frac{n}{2}\sum\limits_{n=1}^{m}(\widetilde{\lambda}_k^2 + \widetilde{\mu}_k^2)}{n - 2m - 1},$$

$$\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{\lambda}_0} = \frac{\widetilde{\sigma}^2}{n}; \quad \widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{\lambda}_k} = \widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{\mu}_k} = \frac{2\sigma^2}{n}.$$

Роль функций $\varphi_k(x)$ могут играть независимые переменные z_k.

При неравноточных измерениях, когда величины y_j имеют различные дисперсии σ_j^2, величины S, S_{lk}, V_l, ε_j следует заменить на S', S'_{lk}, V'_l, ε'_j соответственно:

$$S' = \sum_{j=0}^{n} {\varepsilon'_j}^2,$$

где

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon'_j &= g_j[y_j - Q(x_j)] = g_j\varepsilon_j; \\ S'_{lk} &= \sum_{j=0}^{n} g_j^2\varphi_l(x_j)\varphi_k(x_j); \\ V'_l &= \sum_{j=0}^{n} g_j^2 y_j\varphi_l(x_j); \end{aligned}\right\} \quad (l, k = 0, 1, \ldots, m),$$

g_j^2 — «веса» величин y_j, определяемые формулами: $g_j^2 = \frac{A^2}{\sigma_j^2}$, A^2 — произвольный коэффициент пропорциональности. При заданных «весах» g_j^2 получим

$$\widetilde{\sigma}_j^2 = \frac{\widetilde{\sigma}^2}{g_j^2}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\sigma}^2 = \frac{S'_{\min}}{n-m}, \quad S'_{\min} = \sum_{j=0}^{n} g_j^2[y_j - \overline{Q}(x_j)]^2.$$

Если при каждом x_j получено n_j равноточных измерений y_{jl}, имеющих дисперсию σ^2 и средние арифметические $\widetilde{y}_j$, то за «вес» g_j^2 можно принять n_j. В этом случае

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{S'_{\min}}{n-m}; \quad S'_{\min} = \sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j'^2; \quad \varepsilon_j'^2 = g_j[\widetilde{y}_j - \widetilde{Q}(x_j)]; \quad \widetilde{y}_j = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n_j} y_{jl}.$$

Функция, нелинейная относительно a_k, может быть иногда линеаризована заменой переменных (табл. 13)

Таблица 13

№	Исходная функция	К какому виду приводится	Замена переменных
1.	$y = Al^{kx}$	$z = a_0 + a_1 x$	$z = \ln y$; $a_0 = \ln A$; $a_1 = k$
2.	$y = Bx^b$	$z = a_0 + a_1 x$	$z = \lg y$; $u = \lg x$; $a_0 = \lg B$; $a_1 = B$
3.	$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$	$y = a_0 + a_1 u$	$u = \frac{1}{x}$
4.	$y = a_0 + \frac{a_1}{x^b}$	$y = a_0 + a_1 u$	$u = \frac{1}{x^b}$
5.	$y = A_0 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$z = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$	$z = \lg y$; $a_0 = \lg A - \frac{\lg l}{2\sigma^2}$; $a_1 = \frac{a \lg l}{\sigma^2}$
6.	$y = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$	$y = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots$	$u = \frac{1}{x}$
7.	$y = a_0 + a_1 x^b + a_2 x^{2b} + \ldots$	$y = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \ldots$	$u = x^b$
8.	$y = a_0 x^{-m} + a_1 x^n$	$z = a_0 + a_1 u$	$z = yx^m$; $u = x^{m+n}$

Если ошибки имеются и в величинах x_j, и в величинах y_j, причем величины x_j и y_j подчиняются законам нормального распределения, то в случае линейной зависимости $y = a_0 + a_1 x$ оценка $\widetilde{a}_1$ есть корень уравнения

$$\widetilde{a}_1^2 + \frac{[s_1^2 - (n+1)s_2]\,\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} - [r_1^2 - (n+1)r_2]}{s_1 r_1 - (n+1)v_1}\,\widetilde{a}_1 - \frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2} = 0,$$

а оценка $\widetilde{a}_0$ находится по формуле

$$\widetilde{a}_0 = \frac{r_1 - \widetilde{a}_1 s_1}{n+1},$$

где σ_x^2, σ_y^2 — дисперсии величин x_j и y_j;

$$S_k = \sum_{j=0}^{n} x_j^k; \quad r_k = \sum_{j=0}^{n} y_j^k \ \ (k = 1, 2); \quad v_1 = \sum_{j=0}^{n} x_j y_j.$$

Из двух корней квадратного уравнения для $\widetilde{a}_1$ выбирается один, исходя из конкретных условий задачи.

Задачи

37.1. В таблице 14 приведены опытные значения x_j, y_j. Дисперсии величин y_j одинаковы, величины x_j ошибок не содержат. Подобрать зависимость вида $y = a_0 + a_1 x$, найти оценки $\widetilde{a}_0$, $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{\sigma}^2$, $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_0}$, $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_1}$, $\widetilde{k}_{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_1}$, $\widetilde{r} = \frac{\widetilde{k}_{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_1}}{\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_0}\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_1}}$. Считая, что величины y_j распределены нормально, построить доверительные интервалы для a_0, a_1, σ при доверительной вероятности $\beta = 0{,}95$.

37.2. Две материальные точки движутся прямолинейно. Для каждой из них фиксируются расстояния l_j, пройденные ими в контрольные моменты $t_j = 0; 1; 3; 5; 7$ мин (l'_j для первой, l''_j — для второй точки — см. табл. 15).

Таблица 14

j	x_j	y_j
0	0	1,1
1	1	3,3
2	2	4,8
3	3	7,4
4	4	8,6
5	5	11,5

Таблица 15

j	t_j	l'_j	l''_j
0	0	0	0
1	1	0,59	0,61
2	3	1,66	1,92
3	5	2,91	3,00
4	7	4,24	4,34

Постоянство скорости оценивается величиной σ среднего квадратического отклонения величин l_j в предположении, что движение равномерно

$$l = a_0 + a_1 t.$$

Найти оценки величин $\widetilde{a}'_0$, $\widetilde{a}'_1$, $\widetilde{\sigma}'^2$, $\widetilde{a}''_0$, $\widetilde{a}''_1$, $\widetilde{\sigma}''^2$.

37.3. В таблице 16 приведены равноточные значения y_j, для различных значений x_j, которые известны без ошибок.

Таблица 16

j	x_j	y_j
0	1	2,9
1	2	7,7
2	3	15,5
3	4	23,3
4	5	35,8

Подобрать зависимость вида

$$y = a_0 + a_1 x^2,$$

найти оценки $\widetilde{a}_0$, $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{\sigma}^2$, $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_0}$, $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_1}$, $\widetilde{k}_{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_1}$, $\widetilde{r} = \frac{\widetilde{k}_{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_1}}{\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_0}\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_1}}$.

37.4. По данным, приведенным в таблице 17, подобрать зависимость вида

$$y = a_1 x + a_2 x^2,$$

найти оценки $\widetilde{a}_1$,$\widetilde{a}_2$, $\widetilde{\sigma}^2$, $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_1}$, $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_2}$, $\widetilde{k}_{\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2}$, $\widetilde{r} = \frac{\widetilde{k}_{\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2}}{\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_1}\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_2}}$.

Значения y_j предполагаются равноточными, а x_j свободны от ошибок.

Таблица 17

j	x_j	y_j
0	0	12,2
1	1	12,9
2	2	10,8
3	4	8,9
4	5	0,9

37.5. Результаты равноточных измерений глубины h проникновения тела в преграду при различных значениях его удельной энергии E (энергии, приходящейся на единицу площади соударения) приведены в таблице 18.

Таблица 18

j	E_j, $\frac{\text{кг м}}{\text{см}^2}$	h_j, мм	j	E_j, $\frac{\text{кг м}}{\text{см}^2}$	h_j, мм	j	E_j, $\frac{\text{кг м}}{\text{см}^2}$	h_j, мм
0	41	4	5	139	20	9	241	30
1	50	8	6	154	19	10	250	31
2	81	10	7	180	23	11	269	36
3	104	14	8	208	26	12	301	37
4	120	16						

Подобрать линейную зависимость вида

$$h = a_0 + a_1 E,$$

определить оценки $\widetilde{\sigma}^2_{a_k}$ дисперсий коэффициентов a_k и оценку $\widetilde{\sigma}^2$ дисперсии, характеризующей точность отдельных измерений.

37.6. Решить предыдущую задачу, перенеся для упрощения вычислений начала отсчетов величин E и h в точки, близкие к их средним арифметическим значениям.

37.7. Высота h падения тела в пустоте за время t определяется формулой

$$h = a_0 + a_1 t + a_2 t^2,$$

где a_0 — путь, пройденный телом к моменту начала отсчета времени, a_1 — скорость тела в момент начала отсчета времени, a_2 — половина ускорения силы тяжести g.

Определить оценки коэффициентов a_0, a_1, a_2 и оценить точность определения ускорения силы тяжести указанным методом на основании серии равноточных измерений, результаты которых приведены в таблице 19.

Таблица 19

t, сек	h, см	t, сек	h, см	t, сек	h, см	t, сек	h, см	t, сек	h, см
$\frac{1}{30}$	11,86	$\frac{4}{30}$	26,69	$\frac{7}{30}$	51,13	$\frac{10}{30}$	85,44	$\frac{13}{30}$	129,54
$\frac{2}{30}$	15,67	$\frac{5}{30}$	33,71	$\frac{8}{30}$	61,49	$\frac{11}{30}$	99,08	$\frac{14}{30}$	146,48
$\frac{3}{30}$	20,60	$\frac{6}{30}$	41,93	$\frac{9}{30}$	72,90	$\frac{12}{30}$	113,77		

37.8. Решить предыдущую задачу, используя ортогональные полиномы Чебышева.

37.9. Равноточные измерения некоторой величины через равные интервалы аргумента x дали результаты, приведенные в таблице 20.

Таблица 20

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	–0,71	–0,01	0,51	0,82	0,88	0,81	0,49

Считая, что y достаточно точно аппроксимируется многочленом второй степени

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

определить оценки коэффициентов $\widetilde{a}_k$, дисперсии отдельного измерения $\widetilde{\sigma}^2$ и дисперсий $\widetilde{\sigma}^2_{a_k}$ коэффициентов $\widetilde{a}_k$.

37.10. В таблице 21 даны значения y толщин резца (в миллиметрах) после его работы в течение t часов, характеризующие износ резца.

Таблица 21

t	y	t	y	t	y
0	30,0	6	27,5	12	26,1
1	29,1	7	27,2	13	25,7
2	28,4	8	27,0	14	25,3
3	28,1	9	26,8	15	24,8
4	28,0	10	26,5	16	24,0
5	27,7	11	26,3		

Подобрать с помощью ортогональных полиномов Чебышева зависимость y от t в виде многочленов первой и третьей степеней. Считая справедливой полученную зависимость, оценить в обоих случаях величину дисперсии σ^2 отдельного измерения и построить доверительный интервал для среднего квадратического отклонения σ при доверительной вероятности $\beta = 0{,}90$, считая, что величины y_j распределены нормально.

37.11. В таблице 22 приведены опытные равноточные значения y_j величин Y, отвечающие значениям x_j аргумента X, не содержащим ошибок. Требуется подобрать зависимость вида

$$y = \frac{a_0 + a_1 x}{1 + x^2}\,.$$

Считая величины y_j распределенными нормально с одинаковой дисперсией σ^2, найти оценки $\widetilde{a}_0$, $\widetilde{a}_1$, $\widetilde{\sigma}^2$, $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_0}$, $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_1}$, $\widetilde{k}_{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_1}$, $\widetilde{r} = \frac{\widetilde{k}_{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_1}}{\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_0}\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_1}}$, составить доверительные интервалы для a_0, a_1, σ при доверительной вероятности $\beta = 0{,}95$.

Таблица 22

j	x_j	y_j
0	0,1	2,794
1	0,2	2,533
2	0,3	2,169
3	0,4	1,845
4	0,5	1,631
5	0,6	1,297
6	0,7	1,106
7	0,8	0,833
8	0,9	0,671

Указание. Принять: $\varphi_0(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $\varphi_1(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

37.12. В таблице 23 даны величины сжатия x_j стального бруса при различных нагрузках, измеренные значения этих нагрузок y_j, а также дисперсии σ_j^2, характеризующие точность измерения y_j.

Таблица 23

j	0	1	2	3	4
x_j, мк	5	10	20	40	60
y_j, кг	51,33	78,00	144,3	263,6	375,2
σ_j^2	82,3	25,0	49,3	51,3	46,7

Найти линейную зависимость

$$y = a_0 + a_1 x,$$

отвечающую закону Гука; построить доверительные интервалы для коэффициентов a_k $(k = 0, 1)$, а также доверительные границы для неизвестного истинного значения нагрузки при x от 5 мк до 60 мк при доверительной вероятности $\beta = 0{,}90$, считая величины y_j распределенными нормально.

37.13. В таблице 24 приведены средние значения y_j, отвечающие значениям аргумента x_j, а также числа n_j измерений величины y при $x = x_j$.

Таблица 24

j	x_j	y_j	n_j	j	x_j	y_j	n_j
0	1	0,10	21	3	4	0,32	11
1	2	0,19	8	4	5	0,39	11
2	3	0,24	13	5	6	0,48	10

Построить аппроксимирующий многочлен второй степени и определить оценки средних квадратических отклонений $\widetilde{\sigma}_{a_k}$ коэффициентов $\widetilde{a}_k$.

37.14. Себестоимость y (в рублях) одного экземпляра книги в зависимости от тиража x (тысячи экземпляров) характеризуется данными, собранными издательством в течение ряда лет (табл. 25). Подобрать коэффициенты для гиперболической зависимости вида

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x}$$

и построить доверительные интервалы для коэффициентов a_k $(k = 0, 1)$, а также для величины y при различных значениях при доверительной вероятности $\beta = 0,90$,считая величины распределенными нормально.

Таблица 25

x	y	x	y	x	y
1	10,15	10	2,11	100	1,21
2	5,52	20	1,62	200	1,15
3	4,08	30	1,41		
5	2,85	50	1,30		

37.15. Конденсатор заряжен до напряжения U_0, отвечающего моменту начала отсчета времени, после чего он разряжается через некоторое сопротивление. Напряжение U измеряется с округлением до 5 В в различные моменты времени. Результаты измерений приведены в таблице 26.

Таблица 26

j	t_j, сек	U_j, В	j	t_j, сек	U_j, В	j	t_j, сек	U_j, В
0	0	100	4	4	30	8	8	10
1	1	75	5	5	20	9	9	5
2	2	55	6	6	15	10	10	5
3	3	40	7	7	10			

Известно, что зависимость U от t имеет вид

$$U = U_0 e^{-at}.$$

Найти оценки коэффициентов U_0 и a.

37.16. В результате продувок в аэродинамической трубе для модели самолета были получены данные (табл. 27) о зависимости угла отклонения руля высоты δ_b, обеспечивающего прямолинейный горизонтальный полет, от скорости воздушного потока v:

$$\delta_b = a_0 + \frac{a_1}{v^2}\,.$$

Найти оценки коэффициентов a_0 и a_1 и их средних квадратических отклонений.

Через n_j в таблице обозначены числа измерений угла δ_b при данном значении скорости v_j; значения v_j известны без ошибок.

Таблица 27

j	v_j, м/сек	δ_{b_j}	n_j	j	v_j, м/сек	δ_{b_j}	n_j
0	80	$-3^\circ 44$	8	5	140	$-0^\circ 38$	6
1	90	$-2^\circ 58$	12	6	160	$-0^\circ 07$	9
2	100	$-2^\circ 16$	11	7	180	$0^\circ 10$	12
3	110	$-1^\circ 39$	9	8	200	$0^\circ 35$	10
4	120	$-1^\circ 21$	14				

37.17. Результаты измерения размера x детали из данной партии разбиты на интервалы, и для них вычислены частоты $\widetilde{p}_j$, которые приведены в таблице 28 (величины x представляют собой отклонения от номинального размера в мк).

Таблица 28

Границы интервала x_{j-1}, x_j	$\widetilde{p}_j$	Границы интервала x_{j-1}, x_j	$\widetilde{p}_j$	Границы интервала x_{j-1}, x_j	$\widetilde{p}_j$
$50 \div 60$	0,00333	$100 \div 110$	0,18667	$140 \div 150$	0,06333
$60 \div 70$	0,00667	$110 \div 120$	0,20333	$150 \div 160$	0,05333
$70 \div 80$	0,03000	$120 \div 130$	0,16333	$160 \div 170$	0,01333
$80 \div 90$	0,07667	$130 \div 140$	0,08333	$170 \div 180$	0,00667
$90 \div 100$	0,11000				

Считая, что вероятность p_j попадания в j-й интервал аппроксимируется формулой

$$p_j = p_0 e^{-\frac{(\widetilde{x}_j \overline{x})^2}{2\sigma^2}},$$

где $\widetilde{x}_j$ — середина j-го интервала, подобрать по способу наименьших квадратов параметры p_0, $\overline{x}$ и σ^2. Использовать ортогональные полиномы Чебышева.

37.18. В таблице 29 приведены измеренные значения y_j некоторой величины y в зависимости от времени t (суток).

Считая, что

$$y = a\sin(\omega t - \varphi), \quad \text{где} \quad \omega = 360\frac{\text{град}}{\text{сутки}},$$

определить оценки параметров a и φ. Найти наибольшее отклонение измеренной величины y от аппроксимирующей функции $\widetilde{y}$.

Таблица 29

t_j	y_j	t_j	y_j	t_j	y_j
0,00	–25	0,35	26	0,70	–16
0,05	–26	0,40	32	0,75	3
0,10	–4	0,45	40	0,80	–21
0,15	7	0,50	32	0,85	–22
0,20	6	0,55	21	0,90	–29
0,25	13	0,60	11	0,95	–32
0,30	–30	0,65	–5		

Указание. Предварительно выбрать приближенное значение φ^o и представить y в виде

$$y = a\sin\theta + \cos\theta,$$

где

$$\theta = \omega t - \varphi^0,$$

$$b = -a(\varphi - \varphi^0).$$

37.19. В результате опыта получены следующие значения функции $y = f(x)$, имеющей период 360° (табл. 30).

Таблица 30

x_j, град.	y_j	x_j, град.	y_j	x_j, град.	y_j	x_j, град.	y_j
0	0,82	90	2,39	180	3,33	270	–1,98
15	1,31	105	2,12	195	2,89	285	–2,30
30	1,84	120	2,38	210	2,01	300	–2,22
45	2,33	135	2,98	225	0,92	315	–1,57
60	2,21	150	3,44	240	–0,24	330	–1,03
75	2,24	165	3,51	255	–1,23	345	–0,01

Найти представление этой функции многочленом

$$\widetilde{y} = \widetilde{a}_0 + \widetilde{a}_1\cos x + \widetilde{b}_1\sin x + \widetilde{a}_2\cos 2x + \widetilde{b}_2\sin 2x$$

и наибольшее отклонение измеренной величины y от аппроксимирующей функции $\widetilde{y}$.

37.20. В таблице 31 приведены уровни x и y воды в реке в пунктах A и B соответственно (пункт B на 50 км ниже по течению пункта A), замеренные в 12.00 в первые 15 дней апреля.

Таблица 31

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
x_j, м	12,1	11,2	9,8	10,4	9,2	8,5	8,8	7,4	6,6	7,0	6,4	6,0	6,5	5,8	5,4
y_j, м	10,5	9,3	8,3	9,6	8,6	7,1	6,9	5,8	5,2	5,0	5,1	4,6	4,4	4,4	3,9

Считая справедливой зависимость

$$y = a_0 + a_1 x,$$

определить оценки коэффициентов $\widetilde{a}_0$ и $\widetilde{a}_1$ и наибольшее отклонение y_j от расчетных значений $\widetilde{y}_j$, если известно, что ошибки измерения величин x и y характеризуются средним квадратическим отклонением $\sigma_x = \sigma_y = 0{,}5$ м.

§ 38. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ

Для проверки гипотезы H_0 по элементам выборки x_j вычисляется «статистика гипотезы» V. Критическая область W_α связана с уровнем значимости α уравнением

$$P(V \in W_\alpha \mid H_0) = \alpha.$$

Если V попадает в критическую область, то гипотеза H_0 отвергается.

Проверка гипотезы о значении математического ожидания нормально распределенной величины

Гипотеза $H_0\colon \overline{x} = \overline{x}_0$; гипотеза $H_1\colon \overline{x} \neq \overline{x}_0$. Статистика $V = \frac{\widetilde{x}-\overline{x}}{\widetilde{\sigma}}\sqrt{n}$, где

$$\widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j; \qquad \widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2,$$

подчиняется закону распределения Стьюдента $S(v)$ с числом степеней свободы $k = n - 1$.

При $\overline{x}_1 > \overline{x}_0$ (правосторонний критерий) критическая область определяется неравенством $V > \gamma_{1-2\alpha}$ или $\widetilde{x} > \overline{x}_0 + \gamma_{1-2\alpha} \cdot \frac{\widetilde{\sigma}}{\sqrt{n}}$, где значения $\gamma_{1-2\alpha}$ определяют из таблиц [16T] по входным величинам $1 - 2\alpha$ и k. Вероятность получения ошибки второго рода равна:

$$\beta = S\left(\gamma_{1-2\alpha} - \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_0}{\widetilde{\sigma}}\sqrt{n}\right).$$

Если $\overline{x}_1 < \overline{x}_0$ (левосторонний критерий), критическая область определяется неравенством $V < -\gamma_{1-2\alpha}$ или $\widetilde{x} > \overline{x}_0 - \gamma_{1-2\alpha} \cdot \frac{\widetilde{\sigma}}{\sqrt{n}}$, а для β получим

$$\beta = S\left(\gamma_{1-2\alpha} + \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_0}{\widetilde{\sigma}}\sqrt{n}\right).$$

Если гипотеза $H_1\colon \overline{x} \neq x_0$, то критическая область определяется неравенством $|V| > \gamma_{1-\alpha}$ или $|\widetilde{x} - \overline{x}_0| > \gamma_{1-\alpha}\,\frac{\widetilde{\sigma}}{\sqrt{n}}$, где $\gamma_{1-\alpha}$ — корень уравнения $S(\gamma_{1-\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. В этом случае

$$\beta = S\left(\gamma_{1-\alpha} + \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_0}{\widetilde{\sigma}}\sqrt{n}\right) + S\left(\gamma_{1-\alpha} - \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_0}{\widetilde{\sigma}}\sqrt{n}\right).$$

Если дисперсия σ^2 известна, то приведенные выше формулы сохраняются с заменой функции распределения Стьюдента $S(\gamma)$ на функцию нормального распределения $F(\gamma) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi(\gamma)$, где $\Phi(\gamma)$ — функция Лапласа.

Проверка гипотезы о равенстве математических ожиданий двух нормально распределенных случайных величин

Гипотеза $H_0\colon \overline{x} = \overline{y}$; гипотеза $H_1\colon \overline{x} \neq \overline{y}$. Статистика $V = \widetilde{x} - \widetilde{y}$.

а) Дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 известны; V имеет нормальное распределение с параметрами

$$\overline{V} = \overline{x} - \overline{y}; \qquad \mathrm{D}[V] = \frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y},$$

где n_x, n_y — объемы выборок для случайных величин x и y соответственно. Для случайной величины V применим любой из критериев для проверки гипотезы о значении математического ожидания нормально распределенной величины, рассмотренных выше.

б) Двойной критерий Стьюдента: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ — неизвестны. Критическая область при $\overline{x} > \overline{y}$ (правосторонний критерий) определяется неравенством

$$T = \frac{\widetilde{x} - \widetilde{y}}{\sqrt{(n_x - 1)\widetilde{\sigma}_x^2 + (n_y - 1)\widetilde{\sigma}_y^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_x n_y (n_x + n_y - 2)}{n_x + n_y}} > \gamma_{1-2\alpha};$$

при $\overline{x} < \overline{y}$ (левосторонний критерий) в числителе стоит $\widetilde{y} - \widetilde{x}$. Для двустороннего критерия критическая область

$$|T| > \gamma_{1-\alpha},$$

где $\gamma_{1-2\alpha}$ или $\gamma_{1-\alpha}$ находятся из таблиц [16T]. Отметим, что

$$n_x S_x^2 + n_y S_y^2 = (n_x - 1)\widetilde{\sigma}_x^2 + (n_y - 1)\widetilde{\sigma}_y^2.$$

Если равенство $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ не может быть обосновано из общих соображений, то оно подлежит предварительной проверке с помощью критерия Фишера (см. ниже).

Проверка гипотезы о значении дисперсии нормально распределенной случайной величины

Гипотеза $H_0 \colon \widetilde{\sigma}^2 = \sigma_0^2$; гипотеза $H_1 \colon \widetilde{\sigma}^2 = \sigma_1^2$

$$V = \frac{n-1}{\sigma_0^2} \cdot \widetilde{\sigma}^2.$$

Статистика подчинена закону χ^2-распределения с числом степеней свободы $k = n - 1$. При $\sigma_1^2 > \sigma_0^2$ критическая область $V > \chi_\alpha^2$, где значения χ_α^2 находят из таблиц [18T] для χ^2-распределения по α и k (при $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$ критическая область $V < \chi_{1-\alpha}^2$).

Если гипотеза $H_1 \colon \sigma^2 \neq \sigma_0^2$, то критическая область определяется неравенствами

$$V < \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \quad \text{или} \quad V > \chi^2_{\frac{\alpha}{2}},$$

где значения $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}$ и $\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$ находят из таблиц [18T] по $1 - \frac{\alpha}{2}$ или $\frac{\alpha}{2}$, соответственно, и k.

Критерий Фишера (критерий отношения дисперсий)

Имеются выборки для независимых нормальных величин X и Y объема n_x и n_y.

Гипотеза $H_0\colon \sigma_x^2 = \sigma_y^2$. Статистика $V = F = \frac{\widetilde{\sigma}_x^2}{\widetilde{\sigma}_y^2}$ имеет распределение Фишера–Снедекора. Через X обозначают ту из случайных величин, для которой оценка дисперсии больше $(\widetilde{\sigma}_x^2 > \widetilde{\sigma}_y^2)$.

Если гипотеза $H_1\colon \sigma_x^2 > \sigma_y^2$, то критическая область (критерий правосторонний) определяется неравенством $\mathcal{F} > \mathcal{F}_\alpha$, где значения $\mathcal{F}_\alpha$ находят из таблиц [35T] по α, $k_1 = n_x - 1$ и $k_2 = n_y - 1$; если гипотеза $H_0\colon \sigma_x^2 < \sigma_y^2$, то критическая область: $\mathcal{F}' > \mathcal{F}'_\alpha$, где $\mathcal{F}' = \frac{1}{\mathcal{F}}$ имеет распределение Фишера–Снедекора со степенями свободы $k_1 = n_y - 1$; $k_2 = n_x - 1$.

Если гипотеза $H_1\colon \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$, критической областью (критерий двусторонний) будут значения $F > F_{\frac{\alpha}{2}}$ или $F' > F'_{\frac{\alpha}{2}}$, где $F' = \frac{1}{F}$ имеет распределение Фишера–Снедекора со степенями свободы k_2 и k_1.

Гипотезы о равенстве трех и более дисперсий нормальных случайных величин

По l независимым выборкам объемов n_j $(j = 1, 2, \ldots, l)$ вычислены несмещенные оценки дисперсий $\widetilde{\sigma}_j^2$. Гипотеза $H_0\colon \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \ldots = \sigma_l^2$; гипотеза H_1: среди дисперсий σ_j^2 хотя бы одна отлична от остальных.

а) Критерий Батлетта.

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{n_j - 1}\sum_{j=1}^{n_j}(x_{jk} - \widetilde{x}_j)^2; \qquad \widetilde{x}_j = \frac{1}{n_j}\sum_{k=1}^{n_j} x_{jk},$$

где x_{jk} — k-й элемент j-й выборки.

Статистика

$$V = M = \frac{1}{C}\,2{,}303\left\{(N-l)\lg\widetilde{\sigma}^2 - \sum_{j=1}^{l}(n_j - 1)\lg\widetilde{\sigma}_j^2\right\},$$

где $\widetilde{\sigma}^2$ — средневзвешенная оценка дисперсии:

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N-l}\sum_{j=1}^{l}(n_j - 1)\widetilde{\sigma}_j^2; \qquad N = \sum_{j=1}^{l} n_j;$$

$$C = 1 + \frac{1}{3(l-1)}\left[\sum_{j=1}^{l}\frac{1}{n_j - 1} - \frac{1}{N-l}\right].$$

Критическая область определяется неравенством $M > \chi^2_\alpha$, где значения χ^2_α находятся из таблиц [18Т] по α и $k = l - 1$.

Критическая область $G > g_\alpha$, где g_α определяется из таблиц [36Т] для распределения Кочрена–Фишера по l и $n - 1$.

б) Критерий Хартли.

Критерий также применим в случае, когда $n_1 = n_2 = \ldots = n_l = n$. Статистика

$$V = h = \frac{\max \widetilde{\sigma}_j^2}{\min \widetilde{\sigma}_j^2} \qquad (1 \leqslant j \leqslant l).$$

Критическая область $h > h_\alpha$, где h_α определяется из таблиц [37Т] для распределения Хартли по l и $n - 1$.

Гипотеза о наличии грубых ошибок в элементах выборки из нормальной генеральной совокупности

Гипотеза $H_0\colon x_{\max} = x_n$ (или $x_{\min} = x_1$) принадлежит той же генеральной совокупности, т. е. не является результатом грубой ошибки.

а) Дисперсия σ^2 известна, а математическое ожидание $\overline{x}$ неизвестно. Тогда критическая область определяется неравенством $x_{\max} > x_\alpha$ (или $x_{\min} = x_1$), где $x_\alpha = \widetilde{x} \pm \sqrt{\frac{n-1}{n}}\, z_{1-\varepsilon}\sigma$; $z_{1-\varepsilon}$ — корень уравнения $\Phi(z_{1-\varepsilon}) = 1 - \varepsilon$.

$$\varepsilon = 2[1 - (1 - \alpha)^n] \approx \frac{2\alpha}{n}; \qquad \widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j;$$

$x_{\max}$ (или $x_{\min}$) включается в сумму.

б) Критерий Грэббса–Смирнова (дисперсия и математическое ожидание неизвестны).

Критическая область определяется неравенством $v > v_\alpha$, где

$$v = \frac{x_{\max} - \widetilde{x}}{S} \quad \text{или} \quad v = \frac{\widetilde{x} - x_{\min}}{S}, \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^2,$$

а значения v_α находятся из таблиц [39Т] по α и n.

Критерий отсутствия сползания центра рассеивания для нормальной случайной величины (критерий Аббе)

Гипотеза $H_0\colon \mathrm{M}[X_1] = \mathrm{M}[X_2] = \ldots = \mathrm{M}[X_n]$; гипотеза $H_1\colon |\mathrm{M}[X_{j+1}] - \mathrm{M}[X_j]| > 0$.

Образуем последовательные разности $\delta_j = x_{j+1} - x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Если дисперсии всех x_j равны σ^2, то величина $q^2 = \frac{1}{2(n-1)} \sum_{j=1}^{n-1} \delta_j^2$ — несмещенная оценка дисперсии σ^2.

Для статистики

$$r = \frac{q^2}{\widetilde{\sigma}^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum\limits_{j=1}^{n-1} \delta_j^2}{\sum\limits_{j=1}^{n} (x_j - \widetilde{x})^2}.$$

Критическая область определяется неравенством $r < r_\alpha$, где значения r_α находят из таблиц [40T] по α и n.

Проверка гипотезы о наличии грубых ошибок в элементах выборки из экспоненциальной генеральной совокупности (критерий Кочрена–Фишера)

Гипотеза H_0: $t_{\max}$ принадлежит той же генеральной совокупности, имеющей экспоненциальное распределение. Статистика

$$V = G = \frac{t_{\max}}{\sum\limits_{j=1}^{n} t_j}$$

имеет χ^2-распределение. Критическая область определяется неравенством: $G > g_\alpha$, где g_α находится из таблиц [36T] по входным величинам $n = l$ и $n - 1 = 2$.

Критерий параболической регрессии степени m

При использовании метода наименьших квадратов степень m многочлена $Q(x) = Q_m(x)$ часто не имеет теоретического обоснования. Гипотеза H_0 — степень многочлена $Q_m(x)$ равна m. Предполагается, что величины y_j распределены нормально.

а) Случай, когда все измерения равноточны и имеют дисперсию σ^2.

Тогда

$$\widetilde{\sigma}_{0n}^2 = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} (n_j - 1)\widetilde{\sigma}_j^2}{\sum\limits_{j=0}^{n} (n_j - 1)} = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} \sum\limits_{l=1}^{n_j} (y_{jl} - \widetilde{y}_j)^2}{N - n - 1},$$

где $N = \sum_{j=0}^{n} n_j$, есть несмещенная оценка дисперсии σ^2.

Метод наименьших квадратов позволяет получить другую несмещенную оценку дисперсии

$$\widetilde{\sigma}_p^2 = \frac{S_{\min}}{n-m} = \frac{1}{n-m}\sum_{j=0}^{n}(\widetilde{y}_j - \widetilde{a}_0 - \widetilde{a}_1 x_j - \ldots - \widetilde{a}_m x_j^m)^2.$$

Если величины y_{jl} — нормальны, то отношение этих оценок

$$F = \frac{\widetilde{\sigma}_p^2}{\widetilde{\sigma}_{0n}^2}$$

имеет распределение Фишера–Снедекора со степенями свободы $k_1 = n - m$, $k_2 = N - n - 1$. Если $F > F_\alpha$, где F_α определяется из таблиц [35Т] по α, k_1 и k_2, то степень m выбрана неправильно. Следует взять значение $(m+1)$ и повторить расчет (обычно начинают с $m = 1$, если нет оснований принять другое начальное значение m; в последнем случае при $F > F_\alpha$ можно отступить и в меньшую сторону).

Выбор значения m заканчивается, когда оказывается при данном m: $F \leqslant F_\alpha$.

б) Случай, когда при каждом значении x_j сделано одно измерение y_j, величины y_j распределены нормально с одинаковой дисперсией σ^2.

Вычисляем по методу наименьших квадратов оценки дисперсии σ^2 при m и $m+1$:

$$\widetilde{\sigma}_m^2 = \frac{(S_{\min})_m}{n-m}; \qquad \widetilde{\sigma}_{m+1}^2 = \frac{(S_{\min})_{m+1}}{n-m-1}.$$

Составляем отношение

$$F = \frac{\widetilde{\sigma}_m^2}{\widetilde{\sigma}_{m+1}^2},$$

которое имеет распределение Фишера–Снедекора со степенями свободы $k_1 = n - m$; $k_2 = n - m - 1$. Если $F \leqslant 1$, то различие дисперсий незначимо, если же $F > F_\alpha$, то различие дисперсий значимо и следует предпочесть степени $m+1$. Далее, аналогично сравнивают степени $m+1$ и $m+2$ и т. д.

Наиболее удобно применять этот критерий при использовании ортогональных полиномов Чебышева (в этом случае при увеличении m на единицу к прежнему многочлену $Q_m(x)$ прибавляется только один член, а полный пересчет многочлена не требуется).

З а м е ч а н и е. Если оказалось, что при $m+1$ по сравнению с m значение $F \leqslant 1$, то следует еще сравнить $m+$ $+1$ и $m+2$, так как в каждом конкретном случае наилучшим может оказаться многочлен четной или нечетной степени.

Проверка гипотезы об отсутствии корреляционной связи между нормальными случайными величинами

Гипотеза H_0: коэффициент корреляции $r_{xy} = 0$. Статистика

$$V = T = \frac{\overline{r}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

имеет критическую область, определяемую неравенством $|T| >$ $> \gamma_{1-\alpha}$, где $\gamma_{1-\alpha}$ есть корень уравнения $S(\gamma_{1-\alpha}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ при $k = n-2$ (см. [16Т]).

В таблице [46Т] даны критические значения r_α, определяющие критическую область: $|\widetilde{r}_{xy}| > r_\alpha$. Входными величинами в таблице являются α и число степеней свободы $k = n-2$.

Задачи

38.1. При проверке диаметра цапф выборка объема $n =$ $= 150$ отклонений от номинального размера дала $\widetilde{x} = 40{,}48$ мк; $\widetilde{\sigma}^2 = 32{,}59$ мк^2. Наибольшее допустимое отклонение составляет 40 мк. Предполагая диаметр X цапф нормально распределенной величиной, проверить, существенно ли превышает значение $\widetilde{x}$ допустимое значение 40 мк при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

38.2. Определить критическую область для правостороннего и двустороннего критериев проверки гипотезы о значении математического ожидания нормально распределенной величины X при известной дисперсии $\sigma^2 = 0{,}36$, если $x_0 \equiv 20{,}0$, объем выборки $n = 25$ и уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

38.3. Десять разных термометров сопротивления откалиброваны по стандартному. При показании стандартного термометра 1000 мВ, испытуемые термометры показали: 986, 1005, 991, 994, 983, 1002, 996, 998, 1002, 983. Можно ли считать эти отклонения допустимыми или на характеристики термометров повлиял некоторый фактор (при изготовлении или транспортировке)? Показания термометров считать распределенными нормально. Уровень значимости принять равным $\alpha = 0{,}05$.

38.4. Автоматический станок производит болты, длина X которых распределена нормально. Из партии болтов берется выборка объема $n = 20$, по которой найдены $\widetilde{x} = 18$ мм, $\widetilde{\sigma}^2 = 784$ мк^2.

За длительный срок работы установлено, что для исправного станка среднее квадратическое отклонение в длине болта не превышает 20 мк. Требуется ли регулировка станка на однородность продукции? Уровень значимости принять $\alpha = 0{,}05$.

38.5. Спроектированы и изготовлены две одинаковые опытные установки A и B для данного процесса. В таблице 32 приведены первые десять значений количеств X и Y продукта, полученного на каждой из установок, величины X и Y распределены нормально.

Таблица 32

Установка \ № опыта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	97,8	98,9	101,2	98,8	102,0	99,0	100,8	100,9	99,1	100,5
B	97,2	100,5	98,2	98,3	97,5	99,9	97,9	96,8	97,4	97,2

По этим данным вычислены значения оценок математических ожиданий и дисперсий; для установки A: $\widetilde{x} = 99{,}9$, $\widetilde{\sigma}_x^2 = 1{,}69$; для установки B: $\widetilde{y} = 98{,}1$, $\widetilde{\sigma}_y^2 = 1{,}44$. Требуется проверить: а) гипотезу H_0 об отсутствии существенных различий в стабильности работы установок A и B, т. е. гипотезу: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$;

б)гипотезу о равенстве математических ожиданий $\overline{x}$ и $\overline{y}$ при $\alpha = 0{,}05$.

38.6. Для проверки точности двух одинаковых станков произведены измерения некоторого размера X выпускаемых ими однотипных изделий. По результатам $n_1 = 25$ измерений для 1-го станка получена оценка дисперсии $\widetilde{\sigma}_1^2 = 63{,}68$, по $n_2 = 30$ измерений для 2-го станка — оценка дисперсии $\widetilde{\sigma}_2^2 = 32{,}60$. Можно ли заключить, что $\widetilde{\sigma}_1^2$ значимо превышает $\widetilde{\sigma}_2^2$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$? Распределение величины X считать нормальным.

38.7. В опытах Рэлея при одинаковых условиях определялся вес X одного и того же объема азота, полученного из азотистых соединений, и вес Y такого же объема азота, полученного из воздуха (табл. 33).

Таблица 33

j	x_j, мг	y_j, мг	j	x_j, мг	y_j, мг
1	2301,43	2310,17	6	2299,10	2310,10
2	2298,90	2309,86	7	2298,49	2310,28
3	2298,16	2310,10	8	2298,89	2310,35
4	2301,82	2310,01	9	—	2310,26
5	2298,69	2310,24	10	—	2310,24

Обработка результатов опыта дала $\widetilde{x}=2299{,}47$; $\widetilde{y} = 2310{,}16$; $\widetilde{\sigma}_x^2 = 1{,}9022$; $\widetilde{\sigma}_y^2 = 0{,}01931$.

Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}001$:

а)гипотезу о равенстве дисперсий $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$;

б)гипотезу о равенстве математических ожиданий $\overline{x} = \overline{y}$.

Распределение величин X и Y считать нормальным.

Указание. В случае, если $\sigma_x^2 \neq \widetilde{\sigma}_y^2$, можно вместо двойного критерия Стьюдента применить следующий приближенный критерий. Вычисляется величина

$$T_\alpha = \frac{v_x\gamma_{1-\alpha}(n_x-1) + v_y\gamma_{1-\alpha}(n_y-1)}{\sqrt{v_x+v_y}},$$

где

$$v_x = \frac{\widetilde{\sigma}_x^2}{n_x}; \quad v_y = \frac{\widetilde{\sigma}_y^2}{n_y}; \quad \gamma_{1-\alpha}(n_x-1), \quad \gamma_{1-\alpha}(n_y-1)$$

— значения γ из таблицы [16Т], которые находятся по α и числу степеней свободы $k_x = n_x - 1$ и $k_y = n_y - 1$ соответственно.

Критическая область имеет вид: $|\widetilde{x}-\widetilde{y}| > T_\alpha$ — для двустороннего критерия; для одностороннего критерия следует при вычислении T_α заменить α на 2α.

38.8. Среднемесячная выработка составляет: в дневную смену $\widetilde{x}$— 62,7 тыс. руб., в ночную смену $\widetilde{y}$ — 62,4 тыс.руб.

Оценки дисперсий равны соответственно: $\widetilde{\sigma}_x^2 = 0{,}66$; $\widetilde{\sigma}_y^2 = 0{,}80$. Считая распределение величин X и Y нормальным, проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$:

а) гипотезу о равенстве дисперсий $\widetilde{\sigma}_x^2 = \widetilde{\sigma}_y^2$;

б) гипотезу о равенстве математических ожиданий $\overline{x} = \overline{y}$.

38.9. Для сравнения двух марок стали A и B с точки зрения их предела текучести проверяется $n_x = 145$ проб стали марки A и $n_y = 200$ проб стали марки B. Получены следующие статистические характеристики: для марки A: $\widetilde{x} = 31{,}40$; $\widetilde{\sigma}_x^2 = 10{,}65$; $\widetilde{\sigma}_x = 3{,}26$; для марки B: $\widetilde{y} = 29{,}84$; $\widetilde{\sigma}_y^2 = 12{,}32$; $\widetilde{\sigma}_y = 3{,}51$. Считая распределение величин X и Y нормальным, проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$: а) гипотезу о равенстве дисперсий $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$; б) гипотезу о равенстве математических ожиданий $\overline{x} = \overline{y}$.

38.10. Суммарная наработка испытываемого прибора номер j между отказами вычисляется по одной из формул:

$S_j = (N - j + 1)(t_j - t_{j-1})$ — для случая, когда отказавший элемент не заменяется;

$S_j = N(t_j - t_{j-1})$ — для случая, когда отказавший элемент заменяется исправным;

N — число испытываемых приборов; t_j — момент j-го отказа.

Если наработки между отказами для каждого прибора подчиняются одному и тому же показательному закону распределения с параметром λ, то величины S_j независимы, а $2\lambda S_j$ имеют χ^2-распределение с числом степеней свободы $k = 2$.

Разбив общее число отказов за время испытаний m на два примерно равных слагаемых и применив критерий Фишера, построить критерий показательности распределения наработок между отказами.

38.11. Обработка результатов повторных измерений сопротивления пяти электрических проводников дала результаты, приведенные в таблице 34, где n_j — число измерений, $\widetilde{\sigma}_j^2$ — оценка дисперсии σ_j^2 для j-го проводника.

Таблица 34

j	1	2	3	4	5
n_j	9	13	17	17	11
$\widetilde{\sigma}_j^2$, Ом^2	0,17	0,40	0,38	0,62	0,54

Считая, что величины сопротивления распределены нормально, проверить с помощью критерия Бартлетта, одинакова ли точность измерения при различной величине измеряемого сопротивления, т. е. гипотезу

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = \sigma_4^2 = \sigma_5^2$$

при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

38.12. По данным, приведенным в таблице 35, проверить с помощью критерия Бартлетта гипотезу о равенстве дисперсий при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, предполагая, что величины X и Y распределены нормально.

Таблица 35

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_j	1,5	1,1	0,7	0,3	–0,1	–0,5	–1,0	–1,5	–2,0
y_j	6,20	3,5	2,00	1,80	2,40	4,55	8,85	15,70	24,40
n_j	10	20	20	20	20	20	20	10	5
$\widetilde{\sigma}_j^2$	0,502	0,694	0,824	0,586	0,816	0,708	0,684	0,424	0,222

38.13. Из текущей продукции горизонтально-ковочной машины за семь смен отобрано семь проб по 17 штамповок в каждой. Для этих проб подсчитаны оценки дисперсии некоторого размера X штамповки: $\widetilde{\sigma}_1^2 = 0{,}067$, $\widetilde{\sigma}_2^2 = 0{,}136$, $\widetilde{\sigma}_3^2 = 0{,}168$, $\widetilde{\sigma}_4^2 = 0{,}068$, $\widetilde{\sigma}_5^2 = 0{,}066$, $\widetilde{\sigma}_6^2 = 0{,}102$, $\widetilde{\sigma}_7^2 = 0{,}137$. Проверить гипотезу о равенстве дисперсий, т. е. об отсутствии разладки машины по рассеиванию рассматриваемого размера, используя: а) критерий Кочрена–Фишера; б) критерий Хартли. Уровень значимости принять равным $\alpha = 0{,}05$. Считать величину X распределенной нормально.

38.14. При исследовании точности технологической операции была получена выборка отклонений некоторого размера X детали от номинального: 0,07; 0,06; 0,10; 0,12; 0,13; 0,15; 0,16; 0,17; 0,25. Считая распределение величины X нормальным, проверить, не получилось ли значение 0,25 в результате грубой ошибки, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

38.15. В таблице 36 приведены результаты 20-ти микроизмерений штриха на масштабе.

Таблица 36

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	3,68	3,11	4,76	2,75	4,15	5,08	2,95	6,35	3,78	4,49
j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_j	2,81	4,65	3,27	4,08	4,51	4,43	3,43	3,26	2,48	4,84

Предполагая, что измерения равноточны и распределены нормально, оценить, следует ли отбросить значение $x_{\max} = 6{,}35$ как грубую ошибку измерения, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

38.16. Были зафиксированы моменты времени, в которых цифровая вычислительная машина давала отказы: $t_1 = 16$, $t_2 = 39$, $t_3 = 45$, $t_4 = 55$, $t_5 = 305$, $t_6 = 319$, $t_7 = 325$, $t_8 = 345$, $t_9 = 376$, $t_{10} = 420$. Используя критерий Кочрена–Фишера, проверить, не является ли результат $S_5 = 305 - 55 = 250$ грубой ошибкой, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, если считать, что время между отказами подчиняется экспоненциальному закону распределения.

38.17. В течение 45 дней производилось по одному испытанию для определения сопротивления сжатию x_j для контрольных кубов (табл. 37). Проверить, считая распределение величин x_j нормальным, имело ли место постепенное изменение генерального среднего, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Таблица 37

j	x_j	j	x_j	j	x_j	j	x_j	j	x_j
1	40	10	100	19	98	28	75	37	56
2	33	11	124	20	97	29	52	38	17
3	75	12	91	21	73	30	126	39	52
4	18	13	79	22	85	31	90	40	68
5	62	14	42	23	88	32	111	41	75
6	33	15	63	24	40	33	92	42	102
7	38	16	23	25	42	34	109	43	107
8	69	17	47	26	43	35	72	44	77
9	65	18	52	27	23	36	28	45	45

38.18. По данным задачи 37.10 определить оптимальную степень аппроксимирующего многочлена $Q(x)$, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ (проверить случаи $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$).

38.19. По данным таблицы 35 методом наименьших квадратов была вычислена оценка дисперсии отдельного измерения для случая квадратичной зависимости. Проверить, правильно ли выбрана степень регрессии ($m = 2$) при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, используя критерий регрессии степени m для случая, когда может быть вычислена выборочная оценка дисперсии $\widetilde{\sigma}^2_{0n}$.

38.20. Были исследованы результаты измерения угара кремния X и выхода Y для некоторого сорта стали в выборке объема $n = 15$. Оценка коэффициента корреляции оказалась равной $\widetilde{r}_{xy} = -0{,}5417$. Считая распределения величин X, Y нормальными, проверить, при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$, гипотезу об отсутствии корреляционной связи между X и Y, используя критерий, основанный на применении закона распределения Стьюдента.

38.21. Произведено $n = 150$ замеров x_j, y_j посадочного диаметра гильз в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и вычислена оценка коэффициента корреляции $\widetilde{r}_{xy} = 0{,}5273$. Проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, имеется ли корреляционная зависимость между посадочными диаметрами X и Y, о которых предполагается, что они распределены нормально, используя: а) метод, основанный на распределении Стьюдента; б) таблицу критических значений коэффициента корреляции.

§ 39. ПРОВЕРКА СТАТИСТИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ГИПОТЕЗЫ

Критерий χ^2 — К. Пирсона; гипотеза H_0 — случайная величина X имеет функцию распределения $F(x)$. Статистика

$$V = \chi^2 = \sum_{j=1}^{l} \frac{(n_j - np_j)^2}{np_j},$$

где l — число разрядов или интервалов; n_j — численности разрядов; n — объем выборки; p_j — вероятность попадания случайной величины в j-й разряд при гипотезе H_0: V приближенно подчиняется закону χ^2-распределения с числом степеней свободы $k = l - r - 1$, где r — число параметров теоретической функции распределения, определяемых по данной выборке.

Объем выборки n и численности разрядов n_i должны быть при этом достаточно велики ($n \geqslant 40$, $n_i \geqslant 5$). Число l интервалов рекомендуется выбирать от 6–8 до 16–20, в зависимости от объема выборки.

Критическая область определяется неравенством $\chi^2 > \chi^2_\alpha$, где χ^2_α находится из таблицы [18Т] по уровню значимости α и числу степеней свободы $k = l - r - 1$.

При больших k

$$\chi^2_\alpha = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2k-1} + z_{1-2\alpha}\right)^2,$$

где $z_{1-2\alpha}$ — решение уравнения $\Phi(z_{1-2\alpha}) = 1 - 2\alpha$, а $\Phi(z)$ — функция Лапласа.

Результат применения критерия χ^2 зависит от способа разбиения выборки на интервалы, числа интервалов и способа получения оценок параметров теоретического закона распределения, соответствующего гипотезе H_0.

Оптимальным является разбиение выборки на l равновероятных интервалов так, чтобы вероятности $p_i = \frac{1}{l}$; при этом рекомендуется число интервалов вычислять по формуле

$$l \approx A \cdot n^{\frac{2}{5}},$$

где $A = 1{,}75 \div 3{,}5$. На практике можно принимать $A = 1{,}75$ [37].

Разбиение на интервалы должно производиться à priori, независимо от данных конкретной выборки. Оценки параметров теоретического закона распределения рекомендуется выбирать асимптотически эффективными. Таковы достаточные оценки, вычисляемые по методу максимума правдоподобия Фишера. В связи со сложностью их вычисления приходится использовать оценки, вычисляемые по негруппированной выборке методом моментов. При практическом использовании критерия χ^2 от этих правил отступают, так как выборки обычно бывают заданы в группированном виде с интервалами одинаковой длины. В этом случае можно пользоваться оценками, полученными для группированной выборки по методу моментов с учетом поправок Шеппарда, которые вычисляются по формулам

$$\widetilde{x} = \widetilde{x}_0; \qquad \widetilde{\sigma}^2 = \widetilde{\mu}_2 = \widetilde{\mu}_{20} - \frac{1}{12}\,h^2$$

$$\widetilde{\mu}_3 = \widetilde{\mu}_{30}; \qquad \widetilde{\mu}_4 = \widetilde{\mu}_{40} - \frac{1}{2}\widetilde{\mu}_{20}h^2 + \frac{7}{240}h^4,$$

где $\widetilde{\mu}_{k0}$ — оценки центрального момента порядка k, вычисленные по методу моментов для группированной выборки, а $\widetilde{\mu}_k$ — оценки тех же моментов с учетом поправок Шеппарда; h — шаг (длина) интервала предполагается постоянным.

Критерий Колмогорова [7]; гипотеза H_0 — случайная величина имеет функцию распределения $F(x)$, параметры которой определены не по данным выборки.

Статистика $V = D_n = \sup\limits_x |\widetilde{F}_n(x) - F(x)|$, т. е.

$$D_n = \sup_j \left\{ \left| F(x_j) - \frac{j-1}{n} \right|; \ \left| \frac{j}{n} - F(x_j) \right| \right\},$$

где $\widetilde{F}_n(x)$ — выборочная функция распределения (функция эмпирического распределения).

Критическая область для $\lambda_n = \sqrt{n}\,D_n$ имеет вид:

$$\lambda_n > \lambda_{n_\alpha},$$

где λ_{n_α} даны в таблице [25T], имеющей входы n и α; при $n \geqslant 100$ можно пользоваться последней строкой таблицы, соответствующей $n = \infty$.

При применении критерия Колмогорова рекомендуется брать уровень значимости порядка $0{,}10 \div 0{,}20$.

Критерий Колмогорова применим для непрерывной случайной величины X и негруппированной выборки. В случае, когда задана группированная выборка, в качестве статистики приближенно берут значение D_n, определяемое формулой

$$D_n = \sup_j \left| \mathcal{F}(x_j) - \sum_{k=1}^{j} \frac{n_j}{n} \right|.$$

Значение D_n в этом случае может оказаться меньше истинного и при попадании статистики в критическую область мы получим большую надежность, т. е. проверка гипотезы производится не при выбранном, а при несколько увеличенном уровне значимости α.

При округлении выборочных данных некоторые элементы выборки могут оказаться одинаковыми, т. е. образуется группированная выборка. При двух одинаковых элементах изменение величины D_n не превосходит $\frac{1}{n}$, так как при округлении сдвиг элемента выборки может произойти не более, чем на половину длины интервала округления.

В тех случаях, когда по каким-либо причинам последние элементы вариационного ряда (начиная с x_{k+1}) неизвестны и значения функции эмпирического распределения могут быть вычислены лишь до некоторого наибольшего значения x_k, применение критерия Колмогорова допустимо, если $1 - \mathcal{F}(x_k) < \max|\Delta\mathcal{F}|$ и $1 - \widetilde{\mathcal{F}}(x_k) < \max|\Delta\mathcal{F}|$, где $\max|\Delta\mathcal{F}|$ — наибольшее по абсолютной величине расхождение между $\mathcal{F}(x)$ и $\widetilde{\mathcal{F}}(x)$ для $x \leqslant x_k$.

Критерий ω^2 Мизеса; гипотеза H_0 — случайная величина имеет функцию распределения $\mathcal{F}(x)$. Статистика

$$V = \omega^2 = \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathcal{F}(x_j) - \frac{2j-1}{n}\right]^2,$$

где $\mathcal{F}(x_j)$ — значение функции распределения для элемента вариационного ряда x_j при гипотезе H_0.

Критическая область определяется неравенством

$$\omega^2 > \frac{\Delta\alpha}{n},$$

где значения $\Delta\alpha$ находятся приближенно из таблицы [28T], пригодных для достаточно больших n $(n \geqslant 40)$.

Проверка гипотезы об экспоненциальности закона распределения

Проверка экспоненциальности закона распределения времени между соседними событиями (например, отказами) эквивалентна проверке равномерности распределения разностей между соседними моментами появления событий по времени.

Проверка гипотезы о принадлежности двух выборок одной и той же генеральной совокупности

Гипотеза H_0: независимые выборки $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ принадлежат одной и той же генеральной совокупности.

а) Критерий Смирнова.

Статистика

$$V = D_{n_1,n_2} = \sup_z |\widetilde{F}_1(z) - \widetilde{F}_2(z)|,$$

где $\widetilde{F}_1(z)$ и $\widetilde{F}_2(z)$ — выборочные функции распределения случайных величин X и Y.

При $\min(n_1; n_2) \to \infty$ (практически при $n_1 \geqslant 40$, $n_2 \geqslant 40$) критическая область определяется неравенством

$$\lambda = \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_2 + n_2}}\, D_{n_1,n_2} > \lambda_\alpha,$$

где λ_α находится из таблицы [25T] по α для $n = \infty$.

Критерий Смирнова может приближенно применяться и при округленных выборочных данных (см. соответствующее замечание к критерию Колмогорова).

б) Порядковые критерии — критерии, в которых используются соотношения вида $x > y$ и $x < y$.

1) Критерий знаков. Объемы выборок должны быть одинаковы $n_1 = n_2 = n$. За статистику V принимается число

$$m_n = \min\{m(+); m(-)\},$$

где $m(+)$, $m(-)$ — числа элементов в упорядоченных выборках $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $y_1, y_2, \ldots, y_n$, для которых разности $(x_j - y_j)$ имеют знак $(+)$ и $(-)$ соответственно. Критическая область определяется неравенством

$$m_n < m_\alpha,$$

где значения m_α находятся из таблицы [41T] по α и n $(n \geqslant 10)$.

При $n > 90$

$$m_\alpha \approx \frac{n-1}{2} - k_\alpha \sqrt{n+1},$$

где $k_\alpha = 1{,}288$ при $\alpha = 0{,}01$; $k_\alpha = 0{,}980$ при $\alpha = 0{,}05$; $k_\alpha = 0{,}822$ при $\alpha = 0{,}10$.

2) Критерий серий. За статистику V принимается число R серий в объединенном вариационном ряде, составленном из обеих выборок $x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{n_2}$ (может быть $n_1 \neq n_2$), т. е. число групп в объединенном вариационном ряде, содержащих элементы только первой или только второй выборки. Число серий может заключаться между числами 2 и $2n_2 + 1$ (при $n_1 > n_2$) или 2 и $2n_1$ (при $n_1 = n_2$).

Критическая область определяется неравенством

$$R < R_\alpha,$$

где значения R_α находятся из таблицы [42T] по α и $n_1 = n_2$. При $n_1 = n_2$ и достаточно больших объемах выборок ($n_1, n_2 \geqslant 100$):

$$R_\alpha \approx n_1 + 1 - (z_{1-2\alpha} + 0{,}5) \cdot \frac{\sqrt{2n_1 - 1}}{2},$$

где $z_{1-2\alpha}$ есть корень уравнения $\Phi(z_{1-2\alpha}) = 1 - 2\alpha$, $\Phi(z)$ — функция Лапласа.

3) Критерий Вилкоксона (Манна–Уитни). За статистику принимается число инверсий W, т. е. сумма чисел появления в объединенном вариационном ряде элементов второй выборки левее каждого из элементов первой выборки. Практически удобно за статистику V принять сумму рангов

$$V = \sum_{j=1}^{n_1} r_j.$$

Критическая область в этом случае будет:

$$V = V_\alpha \quad \text{или} \quad V > n_1(n_1 + n_2 + 1) - V_\alpha,$$

где значения V_α даны в таблице XXI приложения, а r_j — порядковый номер j-го элемента первой выборки в объединенной выборке (ранговое число).

При $n_1 \geqslant n_2 \geqslant 4$ и $n_1 + n_2 \geqslant 20$ распределение величины V близко к нормальному и

$$V_\alpha = \frac{n_1(n_1 + n_2 + 1)}{2} - z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1}{12}\, n_1 n_2 (n_1 + n_2 + 1)} - \frac{1}{2},$$

где $z_{1-\alpha}$ — корень уравнения $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1-\alpha$, $\Phi(z)$ — функция Лапласа.

4) Критерий Ван-дер-Вардена. За статистику V принимается величина X_b, определяемая равенством

$$V = X_b = \sum_{j=1}^{n_1} \Psi\left(\frac{r_j}{n_1+n_2-1}\right),$$

где r_j имеют тот же смысл, что и в п. а), а $\Psi(p)$ — функция, обратная стандартной функции нормального распределения $F_0(z)$ (при математическом ожидании, равном нулю, и дисперсии, равной единице) — см. таблицу [34Т]. Критическая область определяется неравенством

$$|X_b| > X_\alpha,$$

где значения X_α находятся из таблицы [44Т] по α, n_1 и $n_1 - n_2$, $(n_1 > n_2)$.

При $n_1 + n_2 > 50$ можно использовать нормальное приближение

$$x_\alpha \approx z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}Q}, \quad \text{где} \quad Q = \frac{1}{n_1+n_2}\sum_{j=1}^{n_1+n_2} \Psi^2\left(\frac{r_j}{n_1+n_2+1}\right),$$

где $z_{1-\alpha}$ — корень уравнения $\Phi(z_{1-\alpha}) = 1-\alpha$, $\Phi(z)$ — функция Лапласа, а значения Q находятся из таблицы [45Т].

Критерий независимости двух признаков, характеризуемых случайными величинами X и Y

По данным двумерной группированной выборки объема n вычисляется статистика V для гипотезы H_0 (величины X и Y независимы):

$$V = \chi^2 = \sum_{k=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y} \frac{(n_{kj} - m_{kj})^2}{m_{kj}},$$

где n_{kj} — число случаев, когда одновременно наблюдались значения X из k-го интервала и значения Y из j-го интервала (для дискретных случайных величин — когда $X = x_k$, $Y = y_k$);

$$m_{kj} = \frac{n_{k0} n_{0j}}{n};$$

n_{k0} (n_{0j}) — общее число значений X (значений Y), попавших в k-й (j-й) интервал; n_x, n_y — число интервалов по X и Y соответственно.

Критическая область определяется неравенством:

$$\chi^2 > \chi^2_\alpha,$$

где χ^2_α находятся из таблицы [18Т] по α и $k = (n_x - 1)(n_y - 1)$.

Если признаки качественные, то X и Y — числа появления соответствующих уровней первого и второго признаков; если признаки количественные, то X и Y — числовые значения первого и второго признаков соответственно.

Задачи

39.1. В таблице 38 приведены числа n_l участков равной площади (0,25 км^2) южной части Лондона, на каждый из которых приходилось по l попаданий самолетов — снарядов во время второй мировой войны. Проверить с помощью критерия χ^2 предположение, что вероятность p_l попадания на участок l снарядов подчиняется закону распределения Пуассона

$$p_l = \frac{a^l e^{-a}}{l!}$$

приняв за уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

Таблица 38

l	0	1	2	3	4	5 и более	Итого
n_l	229	211	93	35	7	1	$n = \sum_l n_l = 576$

39.2. Через равные промежутки времени в тонком слое раствора золота регистрировалось число частиц золота, попадавших в поле зрения микроскопа. Результаты наблюдений приведены в таблице 39.

Таблица 39

Число частиц	0	1	2	3	4	5	6	7	Итого
n_j	112	168	130	68	32	5	1	1	$\sum_j n_j = 517$

Проверить, используя критерий χ^2, согласие с законом распределения Пуассона, приняв за уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

39.3. По каждой из 100 мишеней произведено из спортивного пистолета по 10 выстрелов, причем фиксировались только попадания и промахи. Результаты приведены в таблице 40; через n_j обозначено число мишеней, в которых было j попаданий.

Таблица 40

Число попаданий	n_j	Число попаданий	n_j	Число попаданий	n_j
0	0	4	22	8	4
1	2	5	26	9	2
2	4	6	18	10	0
3	10	7	12		

Проверить, используя критерий χ^2, имелась ли при каждом из выстрелов одинаковая вероятность попадания, иными словами, подчиняются ли результаты стрельбы биномиальному закону распределения. Уровень значимости принять равным $\alpha = 0{,}10$.

39.4. Семь монет подбрасывались одновременно 1536 раз, причем каждый раз отмечалось число X выпавших гербов. В таблице 41 приведены числа n_j случаев, когда число выпавших гербов было равно x_j.

Таблица 41

x_j	0	1	2	3	4	5	6	7
n_j	12	78	270	456	386	252	69	13

Пользуясь критерием χ^2, проверить согласие гипотезы о наличии биномиального закона распределения с опытными данными. Учесть, что вероятность выпадания герба при бросании каждой из монет равна 0,5. Уровень значимости принять равным 0,05.

39.5. Для контрольных испытаний продукции ста однотипных станков, выпускавших за смену каждый, партию $N = 40$ изделий 1-м и 2-м сортом, отобрано по $n = 10$ изделий от каждой партии и для каждой выборки подсчитано имеющееся в ней число x_j изделий 2-го сорта.

Результаты испытаний приведены в таблице 42

Таблица 42

x_j	0	1	2	3	4	5	6 и более
n_j	1	10	27	36	25	1	0

Через n_j обозначено число выборок, имеющих x_j изделий 2-го сорта. Количество изделий, выпускаемых 2-м сортом, за длительный срок работы предприятия составляет 30% ($p = 0{,}30$).

Проверить, используя критерий χ^2, согласие результатов испытаний с гипергеометрическим и биномиальным законами распределения, приняв уровень значимости равным 0,10.

Для величины X, распределенной по гипергеометрическому закону, вероятность равна

$$P(X = j) = \frac{C_L^j C_{N-L}^{n-j}}{C_N^n},$$

где $L = 12$ — число изделий 2-го сорта в каждой партии.

Для биномиального закона распределения

$$P(X = j) = C_n^j p^j (1-p)^{n-j}.$$

39.6. В таблице 43 приведена группированная выборка отклонений диаметров валиков от заданного размера.

Таблица 43

Границы интервалов $x_{j-1} \div x_j$	$0 \div 5$	$5 \div 10$	$10 \div 15$	$15 \div 20$	$20 \div 25$
Численность разряда n_j	15	75	100	50	10
Частота $\tilde{p}_j$	0,06	0,30	0,40	0,20	0,04

Проверить гипотезу о нормальности распределения случайной величины X при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, с учетом поправок Шеппарда, используя:

а) критерий χ^2 Пирсона;

б) критерий проверки гипотезы нормальности по асимметрии и эксцессу [7], [38Т].

39.7. Образовано 250 чисел x, каждое из которых представляет собой сумму цифр пяти случайных однозначных чисел. Полученные суммы разбиты на 14 интервалов (см. табл. 44).

Таблица 44

Границы интервала	n_j	Границы интервала	n_j	Границы интервала	n_j
$0 \div 3$	0	$15 \div 18$	28,5	$30 \div 33$	27,0
$3 \div 6$	0,5	$18 \div 21$	39,0	$33 \div 36$	7,5
$6 \div 9$	1,5	$21 \div 24$	41,0	$36 \div 39$	1,0
$9 \div 12$	10,0	$24 \div 27$	45,0	$39 \div 42$	1,0
$12 \div 15$	17,5	$27 \div 30$	30,5	$42 \div 45$	0

Суммы, кратные трем, условно отнесены к обоим граничащим интервалам, к каждому из которых отнесена половина соответствующей суммы[1]. Установить, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, согласуется ли выборочное распределение, приведенное в таблице 44, с законом нормального распределения, за параметры которого приняты выборочные оценки математического ожидания и дисперсии, с учетом поправок Шеппарда, используя:

а) критерий проверки гипотезы нормальности по асимметрии и эксцессу [7], [38T].

б) критерий χ^2 Пирсона.

39.8. Результаты измерения 40 деталей дали отклонения x_j (в мк) от номинального размера, приведенные в таблице 45.

Таблица 45

j	I	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	−86	−28	38	146	−180	228	−60	23	138	98
j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
x_j	−68	−37	−107	−61	92	−79	60	57	96	49
j	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
x_j	−163	−73	−161	−170	79	179	77	−144	−29	−197
j	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
x_j	−99	58	37	83	−38	−162	16	180	214	6

[1]Учет элемента выборки, попадающего на границу двух интервалов может быть сделан, или как это указано в тексте, или путем жребия. По возможности границы интервалов следует выбирать так, чтобы элементы выборки на них не попадали.

Проверить с помощью критерия Колмогорова гипотезу о согласии опытных данных с законом нормального распределения, имеющим математическое ожидание $\overline{x} = 0$ (систематические ошибки отсутствуют) и $\sigma = 100$ мк (по данным за предшествовавший длительный срок) при $\alpha = 0{,}10$.

39.9. По данным задачи 39.8 проверить согласие выборочных данных с законом нормального распределения, вычислив оценки математического ожидания и дисперсии по несгруппированным данным, а затем составив группированную выборку с равновероятными интервалами при числе интервалов $l = 8$, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

39.10. Цифры $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ среди 800 однозначных чисел появились 74, 92, 83, 79, 80, 73, 77, 75, 91 раз соответственно. Проверить с помощью критерия χ^2 гипотезу о согласии этих данных с гипотезой одинаковой вероятности появления любой цифры при уровне значимости $\alpha = 0{,}10$.

39.11. Из большой партии ламп были наудачу отобраны 50 шт. и поставлены под нагрузку на 2000 часов. Фиксировались моменты t_j отказов ламп (в часах). За это время произошли отказы 45 ламп (табл. 46). Проверить с помощью критерия Колмогорова гипотезу о согласии времен отказов ламп с законом экспоненциального распределения при $\lambda = 0{,}001$ (по данным за предшествовавший период) при $\alpha = 0{,}10$.

Таблица 46

№№ ламп	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$t_{\text{отказа}}$ (в часах)	—	681	390	1666	218	518	354	807	1911	—
№№ ламп	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$t_{\text{отказа}}$ (в часах)	50	—	1244	1519	441	614	585	703	281	899
№№ ламп	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$t_{\text{отказа}}$ (в часах)	538	1790	406	843	331	38	1108	567	888	1181
№№ ламп	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$t_{\text{отказа}}$ (в часах)	407	1854	473	653	931	232	155	1993	754	1585
№№ ламп	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$t_{\text{отказа}}$ (в часах)	90	1715	491	863	772	—	1298	374	1041	736

39.12. Из таблицы случайных чисел выбрано 150 двузначных чисел (в совокупности двузначных чисел включается и 00). Результаты выборки приведены в таблице 47.

Таблица 47

Границы интервала	Численность разряда n_j	Частота $\widetilde{p}_j$
$0 \div 9{,}5$	16	0,107
$9{,}5 \div 19{,}5$	15	0,100
$19{,}5 \div 29{,}5$	19	0,127
$29{,}5 \div 39{,}5$	13	0,087
$39{,}5 \div 49{,}5$	14	0,093
$49{,}5 \div 59{,}5$	19	0,127
$59{,}5 \div 69{,}5$	14	0,093
$69{,}5 \div 79{,}5$	11	0,073
$79{,}5 \div 89{,}5$	13	0,087
$89{,}5 \div 99{,}5$	16	0,107

Проверить, используя критерий χ^2, гипотезу о согласии наблюдений с гипотезой об одинаковой вероятности попадания в интервалы равной длины при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

39.13. Решить предыдущую задачу, применяя приближенно критерий Колмогорова к группированной выборке в таблице 46 при уровне значимости $\alpha = 0{,}10$.

39.14. Отсчет по шкале измерительного прибора оценивается приближенно в десятых долях деления шкалы. Теоретически любое значение последней цифры равновероятно, но в ряде случаев производящий отсчет отдает предпочтение одним цифрам перед другими. В таблице 47 приведено 200 результатов отсчета последней цифры между соседними делениями шкалы. Установить, используя критерий χ^2, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, согласуются ли наблюдения с предположением, что вероятность появления любой цифры $p_j = 0{,}10$.

39.15. По данным таблицы 45 (см. задачу 39.8) проверить с помощью критерия ω^2 Мизеса гипотезу о согласии опытных данных с законом нормального распределения, имеющим $\overline{x} = 0$ и $\sigma = 100$ мк при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

39.16. Времена работы до первого отказа (в часах) для 40 электронных приборов приведены в таблице 48.

Таблица 48

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_j	0,193	0,764	15,38	0,658	92,04	0,362	3,388	0,030	0,652	0,235
j	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
t_j	0,268	0,027	4,335	2,035	0,144	0,156	0,025	1,125	27,42	0,938
j	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
t_j	0,032	2,582	17,26	6,676	8,872	10,00	0,035	0,159	0,048	10,12
j	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
t_j	1,380	0,061	41,30	0,469	1,746	0,282	11,86	0,150	0,510	0,370

Проверить с помощью критерия Колмогорова гипотезу о согласии выборочных данных с законом логарифмически нормального распределения, приняв $z = \lg t$, $\overline{z} = 0$, $\sigma_z = 1$ (по данным для ряда предыдущих партий), при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

39.17. В таблице 49 приведены наблюденные на опыте сроки устранения отказов электронной аппаратуры (в часах и минутах).

Таблица 49

Номер интервала j	Границы интервала $y_j \div y_{j+1}$	Численность разряда n_j
1	0ч. 0м.–0ч. 3м.	2
2	0ч. 3м.–0ч. 6м.	5
3	0ч. 6м.–0ч. 10м.	7
4	0ч. 10м.–0ч. 18м.	11
5	0ч. 18м.–0ч. 36м.	15
6	0ч. 36м.–1ч. 00м.	21
7	1ч. 00м.–1ч. 48м.	15
8	1ч. 48м.–3ч. 12м.	10
9	3ч. 12м.–5ч. 36м.	7
10	5ч. 36м.–10ч. 00м.	4
11	10ч. 00м.–18ч. 00м.	2
12	18ч. 00м.–30ч. 00м.	1
13	более 30ч.	0

По несгруппированным данным были получены оценки математического ожидания и дисперсии величины X: $\widetilde{x} = -0{,}1312$; $\sigma^2 = 0{,}3412$.

Проверить, используя критерий χ^2, согласие наблюденных данных с законом логарифмически нормального распределения, при котором $x = \lg y$ подчиняется закону нормального распределения, приняв за уровень значимости $\alpha = 0{,}05$.

39.18. По данным каталога Воронцова–Вельяминова распределение расстояний до планетарных туманностей представлено в таблице 50, где x_j — расстояние (в килопарсеках) до туманности, а n_j — число случаев (численность разряда).

Таблица 50

x_j	n_j	x_j	n_j	x_j	n_j	x_j	n_j
0÷0,5	9	3,0÷3,5	12	6,0÷6,5	3	9,0÷9,5	2
0,5÷1,0	11	3,5÷4,0	7	6,5÷7,0	2	9,5÷10,0	0
1,0÷1,5	8	4,0÷4,5	10	7,0÷7,5	1	10,0÷10,5	0
1,5÷2,0	12	4,5÷5,0	8	7,5÷8,0	0	$n = \sum_{j=1}^{21} n_j = 119$	
2,0÷2,5	13	5,0÷5,5	5	8,0÷8,5	0		
2,5÷3,0	16	5,5÷6,0	0	8,5÷9,0	0		

Проверить, используя критерий χ^2, гипотезу о согласии наблюденных данных с законом распределения, функция распределения $F(x)$ которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x-\overline{x}}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{x+\overline{x}}{\sigma}\right)\right],$$

где $\overline{x}$ и σ — математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, подчиненной закону нормального распределения, которые связаны с математическим ожиданием $\mathrm{M}[|X|]$ и начальным моментом второго порядка m_2 абсолютной величины $|X|$ формулами:

$$\sigma = \sqrt{\frac{m_2}{1+\nu^2}}, \qquad \overline{x} = \nu\sqrt{\frac{m_2}{1+\nu^2}}.$$

Здесь величина ν представляет собой корень уравнения

$$\frac{2[\varphi(\nu)+0{,}5\nu\Phi(\nu)]}{\sqrt{1+\nu^2}}=\frac{\mathrm{M}[|X|]}{\sqrt{m_2}},$$

где $\varphi(\nu)$ и $\Phi(\nu)$ определяются из таблиц [9Т], [8Т]. Уровень значимости принять равным 0,05. Учесть поправки Шеппарда.

39.19. В таблице 51 приведены значения случайной величины X, являющейся результатом измерения некоторой неизменной величины, округленные до целых значений.

Таблица 51

Границы интервала x_j	n_j	Границы интервала x_j	n_j	Границы интервала x_j	n_j
75÷77	2	85÷87	32	95÷97	8
77÷79	4	87÷89	24	97÷99	3
79÷81	12	89÷91	23	99÷101	1
81÷83	24	91÷93	22	$n=\sum_{j=1}^{13} n_j=200$	
83÷85	25	93÷95	20		

Проверить, используя критерий χ^2, согласие опытных данных с законом нормального распределения и с композицией законов нормального и равномерного распределений, параметры которых следует определить на основании результатов измерений. Принять уровень значимости $\alpha=0{,}05$.

Учесть, что для случайной величины $X=Y+Z$, где Y подчиняется закону нормального распределения с математическим ожиданием, равным нулю, и с дисперсией σ'^2, а Z — закону равномерного распределения в интервале $[a,b]$, плотность вероятности $\Psi(x)$ выражается формулой

$$\Psi(x)=\frac{1}{2(b-a)}\left[\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma'}\right)-\Phi\left(\frac{x-b}{\sigma'}\right)\right].$$

Для определения оценок параметров σ', α, β, входящих в формулу для $\Psi(x)$, необходимо на основании опытных данных определить оценки математического ожидания $\widetilde{x}$ и центральных моментов второго и четвертого порядков $\widetilde{\mu}_2$ и $\widetilde{\mu}_4$, после чего оценки величин σ', α, β определяются из уравнений:

$$\widetilde{\sigma}'^{\,2} = \widetilde{\mu}_2^2 \sqrt{\frac{5}{2}\widetilde{\mu}_2^2 - \frac{5}{6}\widetilde{\mu}_4},$$

$$\frac{(\widetilde{b} - \widetilde{a})^2}{12} = \sqrt{\frac{5}{2}\widetilde{\mu}_2^2 - \frac{5}{6}\widetilde{\mu}_4},$$

$$\frac{\widetilde{b} + \widetilde{a}}{2} = \widetilde{x}.$$

Учесть поправки Шеппарда.

39.20. С помощью контрольного прибора было измерено расстояние r (в микронах) центра тяжести детали от оси ее наружной цилиндрической поверхности для 602 деталей. Результаты измерений представлены в таблице 52.

Таблица 52

Границы интервала x_j	n_j	Границы интервала x_j	n_j
0÷16	40	80÷96	45
16÷32	129	96÷112	19
32÷48	140	112÷128	8
48÷64	126	128÷144	3
64÷80	91	144÷160	1

Проверить, используя критерий χ^2, согласуются ли наблюденные данные с законом распределения Рэлея

$$f(r) = \frac{1}{a^2}\, r e^{-\frac{r^2}{2a^2}},$$

оценку параметра a которого определить по оценке $\widetilde{r}$ математического ожидания, используя формулу

$$\mathrm{M}[r] = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,.$$

Принять уровень значимости равным 0,05.

39.21. В таблице 53 даны результаты 228 измерений чувствительности X телевизора (в микровольтах).

Таблица 53

$x_{k-1} \div x_k$	n_k	$x_{k-1} \div x_k$	n_k	$x_{k-1} \div x_k$	n_k
175–225	1	425–475	33	625–675	19
225–275	2	475–525	34	675–725	13
275–325	11	525–575	31	725–775	8
325–375	20	575–625	25	775–825	3
375–425	28				

Проверить, используя критерий χ^2, с каким законом распределения лучше согласуются результаты измерения: с законом нормального распределения (учесть поправки Шеппарда) или со смещенным законом распределения Максвелла, плотность вероятности которого определяется формулой

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{(x - x_0)^2}{a^3}\, e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2a^2}}, \qquad x \geqslant x_0,$$

причем математическое ожидание $\mathrm{M}[X]$ величины X связано с a формулой $\mathrm{M}[X] = x_0 + 1{,}596a$. За значение x_0 для простоты принять наименьшее наблюденное значение величины X. Уровень значимости $\alpha = 0{,}10$.

39.22. Испытания 200 ламп на продолжительность работы T (в часах) дали результаты, приведенные в таблице 54.

Таблица 54

Номер разряда j	Границы разряда $t_j \div t_{j+1}$	Численность разряда n_j
1	0÷300	53
2	300÷600	41
3	600÷900	30
4	900÷1200	22
5	1200÷1500	16
6	1500÷1800	12
7	1800÷2100	9
8	2100÷2400	7
9	2400÷2700	5
10	2700÷3000	3
11	3000÷3300	2
12	более 3300	0

Проверить, используя критерий χ^2, согласие опытных данных с экспоненциальным законом распределения, для которого плотность вероятности выражается формулой

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Уровень значимости принять равным 0,05.

Учесть, что несмещенная оценка параметра λ экспоненциального закона распределения связана с оценкой $\widetilde{t}$ математического ожидания случайной величины T формулой

$$\widetilde{\lambda} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{\widetilde{t}}, \quad \text{где } n \text{ — объем выборки.}$$

39.23. По данным задачи 39.16 проверить с помощью критерия ω^2 Мизеса гипотезу о согласии выборочных данных с законом логарифмически нормального распределения, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

39.24. Произведено испытание партии в 1000 электронных ламп на срок службы. В таблице 55 приведены интервалы сроков работы ламп до выхода из строя (t_i, t_{i+1}) и соответствующие численности разрядов n_i; величины t_i даны в часах.

Таблица 55

Номер интервала i	1	2	3	4	5	
Границы интервала $t_i \div t_{i+1}$	$0 \div 100$	$100 \div 200$	$200 \div 300$	$300 \div 400$	$400 \div 500$	
Численность разряда n_i	78	149	174	165	139	
Номер интервала i	6	7	8	9	10	11
Границы интервала $t_i \div t_{i+1}$	$500 \div 600$	$600 \div 700$	$700 \div 800$	$800 \div 900$	$900 \div 1000$	более 1000
Численность разряда n_i	107	77	50	32	27	2

Проверить с помощью критерия χ^2 гипотезу о согласии результатов испытаний с законом распределения Вейбулла. Функция распределения $F(t)$ для этого закона выражается формулой

$$F(t) = 1 - e^{-\left(\frac{b_m t}{\bar{t}}\right)^m},$$

где

$$b_m = \Gamma\left(\frac{1}{m} + 1\right),$$

$\Gamma(x)$ — гамма-функция, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Оценки параметров $\overline{t}$ и m вычислить на основании опытных данных. Учесть, что параметр m связан со средним квадратическим отклонением σ формулой

$$\sigma = v_m \overline{t},$$

где

$$v_m = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m} + 1\right)}{\Gamma^2\left(\frac{1}{m} + 1\right)} - 1};$$

$v_m = \frac{\sigma}{\overline{t}}$ — коэффициент вариации. Учесть поправки Шеппарда.

В таблице [32T]приведены значения b_m и v_m в зависимости от m. Зная v_m, можно из этой таблицы найти m и b_m. Приводим выдержку из этой таблицы (табл. 56).

Таблица 56

m	b_m	v_m
1,7	0,892	0,605
1,8	0,889	0,575

39.25 Положение точки M на плоскости определяется прямоугольными координатами X и Y. На опыте измеряется угол φ, составленный радиусом-вектором точки M с осью y (рис. 12). Результаты 1000 измерений величины φ, разбитые на интервалы в 15 град, и числа n_j появления данного значения φ_j приведены в таблице 57.

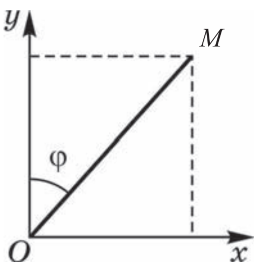

Рис. 12

Если величины X и Y независимы, нормальны, имеют нулевые математические ожидания и дисперсии, равные соответственно σ^2 и $\frac{1}{4}\sigma^2$, то величина $z = \operatorname{tg}\varphi$ должна подчиняться закону распределения Коши (закону арктангенса)

$$f(z) = \frac{2}{\pi(z^2 + 4)}.$$

Таблица 57

$\varphi_{j-1} \div \varphi_j$	n_j	$\varphi_{j-1} \div \varphi_j$	n_j	$\varphi_{j-1} \div \varphi_j$	n_j
$-90 \div -75$	115	$-30 \div -15$	49	$30 \div 45$	57
$-75 \div -60$	118	$-15 \div 0$	48	$45 \div 60$	66
$-60 \div -45$	73	$0 \div 15$	48	$60 \div 75$	111
$-45 \div -30$	59	$15 \div 30$	53	$75 \div 90$	153

Считая, что ошибки измерения φ отсутствуют, проверить, используя приближенно критерий согласия Колмогорова, при уровне значимости $\alpha = 0{,}10$ справедливость сделанных выше предположений о случайных величинах X и Y.

39.26. Для проверки точности хода специальных маятниковых часов в наудачу выбранные моменты времени фиксировались углы отклонения оси маятника от вертикали. Амплитуда колебаний поддерживалась постоянной и равной $\delta = 15^\circ$.

Результаты 1000 таких измерений, разбитые на интервалы в 3°, приведены в таблице 58.

Таблица 58

Результаты измерений в град. $\delta_{j-1} \div \delta_j$	n_j — число значений в j-м интервале
$-15 \div -12$	188
$-12 \div -9$	88
$-9 \div -6$	64
$-6 \div -3$	86
$-3 \div 0$	62
$0 \div 3$	74
$3 \div 6$	76
$6 \div 9$	81
$9 \div 12$	100
$12 \div 15$	181

Проверить приближенно с помощью критерия согласия Колмогорова гипотезу о согласии наблюдений с законом распределения арксинуса при уровне значимости $\alpha = 0{,}10$.

39.27. Для проверки стабильности работы станка через каждый час производится проба, состоящая в том, что измеряются 20 случайно отобранных деталей и по результатам измерений в каждой j-й выборке вычисляется несмещенная оценка дисперсии $\widetilde{\sigma}_j^2$. Значения $\widetilde{\sigma}_j^2$ по 47 таким выборкам приведены в таблице 59.

Таблица 59

j	$\widetilde{\sigma}_j^2$	j	$\widetilde{\sigma}_j^2$	j	$\widetilde{\sigma}_j^2$	j	$\widetilde{\sigma}_j^2$
1	0,1225	13	0,1444	25	0,1681	37	0,1089
2	0,1444	14	0,1600	26	0,1369	38	0,1089
3	0,1296	15	0,1521	27	0,1681	39	0,0784
4	0,1024	16	0,1444	28	0,0676	40	0, 1369
5	0,1369	17	0,1024	29	0,1024	41	0,0729
6	0,0961	18	0,0961	30	0,1369	42	0,1089
7	0,1296	19	0,1156	31	0,0576	43	0,0784
8	0,1156	20	0,1024	32	0,1024	44	0,5121
9	0,1764	21	0,1521	33	0,0841	45	0,1600
10	0,0900	22	0,1024	34	0,1521	46	0,1681
11	0,1225	23	0,1600	35	0,0676	47	0,1089
12	0,1156	24	0,1296	36	0,1225		

Проверить, используя критерий χ^2, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу об однородности ряда дисперсий, или, иными словами, предположение об отсутствии разладки станка в смысле изменения рассеивания по измеряемому размеру детали. Учесть то обстоятельство, что в случае справедливости этой гипотезы величина

$$q_j = \frac{(n_j - 1)\widetilde{\sigma}_j^2}{\widetilde{\sigma}^2}$$

приближенно подчиняется закону распределения χ^2 с $n_j - 1$ степенями свободы. Вместо неизвестной дисперсии σ^2 взять ее оценку $\widetilde{\sigma}^2$, которая вычисляется по формуле

$$\widetilde{\sigma}^2 = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} \widetilde{\sigma}_j^2 (n_j - 1)}{N - m},$$

где $n_j = n = 20$ — число элементов в каждой выборке, $m = 47$ — число выборок, $N = \sum_{j=1}^{m} n_j = 940$ — общее число элементов во всех выборках.

39.28. Результаты 300 измерений некоторой величины приведены в таблице 60.

Таблица 60

Границы интервала $x_{j-1} \div x_j$	n_j	Границы интервала $x_{j-1} \div x_j$	n_j	Границы интервала $x_{j-1} \div x_j$	n_j
$50 \div 60$	1	$100 \div 110$	56	$140 \div 150$	19
$60 \div 70$	2	$110 \div 120$	61	$150 \div 160$	16
$70 \div 80$	9	$120 \div 130$	40	$160 \div 170$	4
$80 \div 90$	23	$130 \div 140$	25	$170 \div 180$	2
$90 \div 100$	33				

Проверить, используя критерий χ^2, согласие опытных данных с законом нормального распределения, оценки параметров которого подобрать на основании опытных данных. Сгладить опытные данные с помощью закона распределения, который определяется А-рядом Шарлье, и проверить с помощью критерия χ^2 согласие опытных данных с полученным законом распределения, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Учесть поправки Шеппарда.

У к а з а н и е. Подставляя оценки первых четырех моментов в функцию распределения для А-ряда Шарлье получим

$$\mathcal{F}(z) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(z) - \frac{1}{6}\widetilde{\mathrm{Sk}} \cdot \varphi_2(z) + \frac{1}{24}\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{x}} \cdot \varphi_3(z),$$

где $\Phi(z)$ — функция Лапласа; $\varphi_2(z)$, $\varphi_3(z)$ — вторая и третья производные от стандартной нормальной плотности вероятности $(\overline{z} = 0, \mathrm{D}(z) = 1)$:

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}; \quad \varphi_2(z) = (z^2 - 1)\varphi(z); \quad \varphi_3(z) = -(z^3 - z)\varphi(z)$$

— см. [10T];

$$z = \frac{x - \widetilde{x}}{\widetilde{\sigma}}; \quad \widetilde{\mathrm{Sk}} = \frac{\widetilde{\mu}_3}{\widetilde{\sigma}^3}; \quad \widetilde{\mathcal{E}\mathrm{x}} = \frac{\widetilde{\mu}_4}{\widetilde{\sigma}^4} - 3;$$

$$\widetilde{\mu}_3 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^3; \quad \widetilde{\mu}_4 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \widetilde{x})^4;$$

$\widetilde{\mu}_3$, $\widetilde{\mu}_4$ — оценки 3-го и 4-го моментов.

39.29. Измерения скорости света c, произведенные в совместных опытах Майкельсоном, Пизом и Пирсоном, дали результаты, приведенные в таблице 61. Для сокращения записи первые три значащие цифры (299) значений c_j (в км/сек) в таблице опущены. Значения c_j независимы и определялись одним и тем же методом.

Таблица 61

Границы интервала	n_j	Границы интервала	n_j	Границы интервала	n_j	Границы интервала	n_j
735÷740	3	755÷760	17	775÷780	40	795÷800	5
740÷745	7	760÷765	23	780÷785	17	800÷805	2
745÷750	4	765÷770	29	785÷790	16	805÷810	3
750÷755	8	770÷775	45	790÷795	10	810÷815	4

Получены следующие оценки математического ожидания $\widetilde{c}$ и среднего квадратического отклонения $\widetilde{\sigma}$, вычисленные по несгруппированным данным:

$$\widetilde{c} = 299\,733,85 \text{ км/сек}; \qquad \widetilde{\sigma} = 14{,}7 \text{ км/сек}.$$

Сгладить наблюдения с помощью закона распределения, который определяется А-рядом Шарлье, и проверить, используя критерий χ^2, согласие опытных данных с полученным законом распределения при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$. Учесть поправки Шеппарда при вычислении $\widetilde{\mu}_3$ и $\widetilde{\mu}_4$.

У к а з а н и е. То же, что к задаче 39.28.

39.30. Из продукции двух станков извлечены две выборки по 50 изделий; результаты измерения одного из размеров (в мм) приведены в таблице 62.

Проверить, используя критерий Смирнова, гипотезу о том, что обе выборки принадлежат одной и той же генеральной совокупности, т. е. что распределение размера детали одинаково для обоих станков, при уровне значимости $\alpha = 0{,}20$.

39.31. Для сравнения двух микрометров, каждым из них было произведено измерение диаметров у $n = 25$ деталей (см. табл. 63); значения x_j соответствуют измерениям с помощью микрометра I, значения y_j — с помощью микрометра II (в делениях 0,01 мм). Проверить гипотезу об отсутствии систематических расхождений в показаниях микрометров I и II с помощью критерия знаков, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Таблица 62

№№ п/п	Ст.1	Ст.2	№№ п/п	Ст.1	Ст.2	№№ п/п	Ст.1	Ст.2
1	51,58	51,50	18	51,18	51,39	35	51,56	51,55
2	35	35	19	66	46	36	56	10
3	33	69	20	35	42	37	42	44
4	54	60	21	50	39	38	29	19
5	24	54	22	50	16	39	31	24
6	42	42	23	54	51	40	30	31
7	47	54	24	48	50	41	12	51
8	54	55	25	36	50	42	28	46
9	24	33	26	50	48	43	51	39
10	36	56	27	42	53	44	39	39
11	58	68	28	56	25	45	15	30
12	70	39	29	56	48	46	42	30
13	47	42	30	48	36	47	36	42
14	50	15	31	42	53	48	28	55
15	26	48	32	56	23	49	30	44
16	47	46	33	34	55	50	48	24
17	05	42	34	36	51			

Таблица 63

j	x_j	y_j	j	x_j	y_j	j	x_j	y_j
1	289	289	10	277	284	19	295	290
2	291	288	11	296	285	20	285	278
3	293	280	12	280	280	21	278	279
4	283	279	13	279	272	22	296	270
5	291	269	14	290	278	23	295	270
6	278	279	15	294	289	24	290	288
7	292	290	16	279	275	25	278	282
8	284	275	17	285	276			
9	294	270	18	285	285			

39.32. Для сравнения конденсаторов из двух различных партий по емкости из первой партии отбирают выборку объема $n_1 = 11$, из второй — объема $n_2 = 12$. Величины емкости обозначены: x_j — для первой партии, y_j — для второй (табл. 64).

Таблица 64

j	x_j	y_j	j	x_j	y_j	j	x_j	y_j
1	1,98	2,19	5	1,89	2,03	9	1,86	2,33
2	2,31	2,26	6	2,13	2,08	10	1,95	2,02
3	2,25	2,28	7	2,22	2,00	11	1,84	2,24
4	2,07	1,90	8	2,01	2,04	12	—	2,35

Проверить, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу о равенстве математических ожиданий, т. е. гипотезу $H_0\colon \overline{x} = \overline{y}$, используя:

а) критерий серий (принять $n_1 = n_2 = 11$, y_{12} отбросить);

б) критерий Вилкоксона (y_{12} учесть);

в) критерий Ван-дер-Вардена (y_{12} учесть).

39.33. При катализаторах A и B взяты для испытания независимые выборки отклонений прироста выхода от некоторого постоянного уровня (x_j — для A, y_j — для B, табл. 65). Проверить, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотезу об отсутствии существенного различия между влияниями катализаторов A и B на выход продукта, т. е. гипотезу $H_0\colon \overline{x} = \overline{y}$, используя:

а) критерий серий;

б) критерий Вилкоксона;

в) критерий Ван-дер-Вардена.

Таблица 65

j	1	2	3	4	5	6	7
x_j	−1,2	−1,4	0,2	−1,2	0,2	−0,2	−1,0
y_j	1,5	−0,3	0,5	2,4	0,9	0,7	0,8

39.34. Произведено измерение изделий в двух партиях по 100 деталей в каждой. Числа n_{lj} деталей с нормальными, заниженными и завышенными размерами приведены в таблице 66.

Таблица 66

№ партии изделий l	Размер деталей			
	Результаты измерений j			
	1 (заниженный)	2 (нормальный размер)	3 (завышенный размер)	h_{l0}
1	25	50	25	100
2	52	41	7	100
h_{0j}	77	91	32	200

Проверить с помощью критерия χ^2, одинаковы ли распределения размеров деталей в обеих партиях, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

§ 40. СТАТИСТИКА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Оценки математического ожидания и корреляционной функции по одной реализации стационарного процесса определяются формулами

$$\widetilde{x} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\,dt,$$

$$\widetilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau}[x(t)-\widetilde{x}][x(t+\tau)-\widetilde{x}]dt,$$

где T — полное время записи реализации.

Вместо последней формулы иногда используют практически эквивалентную ей формулу

$$\widetilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)dx - (\widetilde{x})^2.$$

Оценка спектральной плотности может быть найдена по формуле

$$\widetilde{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T} n(\tau)\widetilde{K}(\tau)e^{-i\omega\tau}\,d\tau,$$

где $\widetilde{K}(\tau)$ — оценка корреляционной функции, а для выбора «весовой функции» $n(\tau)$ в литературе имеется ряд рекомендаций (подробнее см. [69]).

Когда $\widetilde{x}$ и $\widetilde{K}_x(\tau)$ определяются по значениям ординат реализации случайной функции в дискретные моменты времени $t_j = j\Delta$, соответствующие формулы приобретают вид

$$\widetilde{x} = \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} x(t_j),$$

$$\widetilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{m-j+1}\sum_{j=0}^{m-j}[x(t_j) - \widetilde{x}][x(t_j+\tau) - \widetilde{x}]$$

или

$$\widetilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{m-j+1}\sum_{j=0}^{m-j}[x(t_j)x(t_j+\tau) - (\widetilde{x})^2,$$

где $\tau = j\Delta$, $T = m\Delta$.

Для нормальных случайных функций дисперсии $\widetilde{x}$ и $\widetilde{K}_x(\tau)$ могут быть выражены через $K_x(\tau)$. При практических расчетах вместо неизвестной корреляционной функции $K_x(\tau)$ в формулы для $\mathrm{D}[\widetilde{x}]$ и $\mathrm{D}[\widetilde{K}_x(\tau)]$ подставляют $\widetilde{K}_x(\tau)$.

При определении значения корреляционной функции по результатам обработки нескольких реализаций различной длительности за оценку координат $\widetilde{K}_x(\tau)$ следует взять сумму ординат, полученных при обработке отдельных реализаций, с весами, обратно пропорциональными дисперсиям этих ординат.

Задачи

40.1. Доказать, что условие

$$\lim_{\tau\to\infty} K_x(\tau) = 0$$

является достаточным условием для того, чтобы функция $X(t)$, была эргодичной (по отношению к $\tilde{x}$).

40.2. Проверить, можно ли в качестве оценки спектральной плотности взять выражение

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi T}\left|\int_0^T e^{i\omega t}X(t)\,dt\right|^2,$$

если $X(t)$ — нормальная стационарная случайная функция

$$(\overline{x}=0), \qquad \int\limits_0^\infty |K(\tau)|d\tau < \infty.$$

40.3. Для определения оценки корреляционной функции стационарного нормального случайного процесса $X(t)$ $(\overline{x}=0)$ используется коррелятор, работающий по формуле

$$\widetilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)\,dt.$$

Вывести формулу для $\mathrm{D}[\widetilde{K}_x(\tau)]$.

40.4. Определить математические ожидания и дисперсии оценок корреляционных функций, определяемых по одной из формул

$$\widetilde{K}_1(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau} x(t)x(t+\tau)\,dt - (\widetilde{x})^2,$$

$$\widetilde{K}_2(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau} [x(t)-\widetilde{x}][x(t+\tau)-\widetilde{x}]dt,$$

где

$$\widetilde{x} = \frac{1}{T-\tau}\int\limits_0^{T-\tau} x(t)\,dt$$

если $X(t)$ — нормальная случайная функция.

40.5. Корреляционная функция стационарного случайного процесса $X(t)$ имеет вид

$$K_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}.$$

Найти дисперсию оценки математического ожидания, определяемой по формуле

$$\widetilde{x} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\,dt.$$

40.6. Найти оценку математического ожидания стационарной случайной функции $X(t)$, обладающую наибольшей эффективностью (наименьшей дисперсией), если $K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}$, а длина реализации равна T. Определить дисперсию найденной оценки.

На сколько % уменьшится дисперсия оценки $\widetilde{x}$, если вместо формулы, приведенной в задаче 40.5 воспользоваться найденной оценкой при $T = \frac{1}{\alpha}, \frac{5}{\alpha}, \frac{10}{\alpha}$?

У к а з а н и е: свести задачу к нахождению оптимальной линейной системы (см. § 30).

40.7. Определить линейный оператор, позволяющий получить по реализации случайной функции $x(t)$ длиной T оценку $\widetilde{x}$, обладающую наименьшей дисперсией, если

$$S_x(\omega) = \frac{a_0^2}{|Q_n(i\omega)|^2} = \frac{a_0^2}{|(i\omega)^n + a_1(i\omega)^{n-1} + \ldots + a_n|^2},$$

а все корни полинома $Q_n(z)$ лежат в верхней полуплоскости.

40.8. Оценка спектральной плотности $S_x(\omega)$ найдена путем обращения по Фурье оценки корреляционной функции. Определить $\mathrm{D}[\widetilde{S}_x(\omega)]$ как функцию ω, если

$$\widetilde{K}_x(\tau) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)x(t+\tau)\,dt, \qquad \overline{x} = 0,$$

процесс нормальный (выразить через $K_x(\tau)$).

40.9. Корреляционная функция $K_x(\tau)$, определяемая из опыта, используется для нахождения дисперсии стационарного решения дифференциального уравнения

$$\dot{Y}(t) + 2Y(t) = X(t).$$

Определить, во сколько раз изменится σ_y, если вместо выражения

$$\widetilde{K}_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-0{,}21|\tau|}\left(\cos 0{,}75\tau + \frac{7}{25}\sin 0{,}75|\tau|\right),$$

достаточно точно аппроксимирующего $K_x(\tau)$, принять выражение

$$\widetilde{K}'_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2}\cos\beta\tau,$$

где α и β подобраны таким образом, чтобы положение первого нуля и ордината первого минимума выражения $\widetilde{K}'_x(\tau)$ совпали с соответствующими величинами для $K_x(\tau)$.

40.10. Оценка $\widetilde{K}_x(\tau)$ используется для нахождения $\mathrm{D}[Y(t)]$, где

$$Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}\,.$$

Определить, во сколько раз изменится σ_y, если вместо выражения

$$\widetilde{K}_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-0{,}1|\tau|}\left(\cos 0{,}7\tau + \frac{1}{7}\sin 0{,}7|\tau|\right),$$

достаточно точно аппроксимирующего выражение $K_x(\tau)$, принять

$$\widetilde{K}'_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha^2\tau^2}\cos\beta\tau,$$

где α и β подобраны так, что положение первого нуля и значение первого минимума у функций $\widetilde{K}_x(\tau)$ и $K'_x(\tau)$ совпадают.

40.11. Корреляционная функция угла крена корабля приближенно может быть представлена в виде

$$K_\theta(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right),$$

где $a = 36$ град^2, $\alpha = 0{,}05$ сек$^{-1}$, $\beta = 0{,}05$ сек$^{-1}$.

Определить $\mathrm{D}[\widetilde{K}_\theta(\tau)]$ при $\tau = 0$ и $\tau = 3$ сек, если $\Theta(t)$ — нормальная функция, а $\widetilde{K}_\theta(\tau)$ получена в результате обработки записи качки за время $T = 20$ мин.

40.12. Ордината оценки корреляционной функции при $\tau = 0$ равна 100 см^2, а при $\tau = \tau_1 = 4{,}19$ сек достигает наибольшего отрицательного значения, равного $-41{,}5$ см^2. По этим данным подобрать аналитическое выражение для $\widetilde{K}(\tau)$:

а) в виде

$$\widetilde{K}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\left(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|\right);$$

б) в виде

$$\widetilde{K}(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}\cos\beta\tau.$$

Определить, насколько отличается для этих двух случаев значение первого нуля функции $\widetilde{K}(\tau)$.

40.13. Оценка математического ожидания $\overline{x}$ случайной функции $X(t)$ по реализации длиной T определяется двумя способами:

а) по формуле

$$\widetilde{x}_1 = \frac{1}{m+1}\sum_{j=0}^{m} x(t_j), \qquad t_j = j\cdot\frac{T}{m} = j\Delta;$$

б) по формуле

$$\widetilde{x}_2 = \frac{1}{T}\int\limits_0^T x(t)\,dt.$$

Доказать, что

$$\mathrm{D}(\widetilde{x}_1) - \mathrm{D}(\widetilde{x}_2) \approx (a\Delta^2 - 2b\Delta)\frac{\sigma^2}{T^2},$$

где

$$a = \frac{1}{6}[1 + 5k(\tau) - T\dot{k}(0+)] + \frac{2}{T}\int\limits_0^T \left(1 - \frac{3\tau}{T}\right) k(\tau)\,d\tau,$$

$$b = \int\limits_0^T \left(1 - \frac{2\tau}{T}\right) k(\tau)\,d\tau, \qquad k(\tau) = \frac{1}{\sigma^2}\,K(\tau).$$

Определить: 1) шаг дискретности $\Delta_{\text{опт}}$, при котором $\mathrm{D}(\widetilde{x}_1) = \min$; 2) выигрыш $\varepsilon = \mathrm{D}(\widetilde{x}_2) - \mathrm{D}(\widetilde{x}_1)$ в дисперсии оценки при вычислении по формуле а) с оптимальным шагом дискретности, если

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha = 0{,}05\ \text{сек}^{-1}, \quad T = 25;\ 50;\ 150\ \text{сек};$$

3) при тех же данных определить максимальный шаг дискретности $\Delta_{\max}$, при котором увеличение дисперсии при расчете по формуле а) сравнительно с формулой б) было бы не более $\delta = 0{,}05$.

У к а з а н и е: при доказательстве рассматривать суммы, через которые выражаются $\mathrm{D}(\widetilde{x}_1)$ как интегралы, вычисленные методом трапеций.

40.14. Решить предыдущую задачу при

$$K_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 + \alpha|\tau|).$$

40.15. При записи реализации стационарной функции $z(t)$ делается ошибка $Y(t)$ в ординате функции и ошибка $X(t)$ — в абсциссе (по оси t). Определить систематическую ошибку δ в оценке $\widetilde{K}_z(\tau)$, если $\overline{y} = \overline{x} = 0$, $K_y(\tau)$ и $K_x(\tau)$ заданы, а вследствие малости $\mathrm{D}[X(t)]$ и дифференцируемости функции $Z(t)$ можно принять, что

$$Z[t + X(t)] \approx Z(t) + \dot{Z}(t)X(t).$$

40.16. Определить $\mathrm{D}[\widetilde{K}_\theta(\tau)]$ при $\tau = 0$; 2,09; 4,18 и 16,72 сек, если

$$\widetilde{K}_\theta(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int\limits_0^{T-\tau} \Theta(t)\Theta(t + \tau)\, d\tau,$$

$$K_\theta(\tau) = a e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau,$$

где $a = 25$ град^2, $\alpha = 0{,}12$ сек$^{-1}$, $\beta = 0{,}75$ сек$^{-1}$, $\Theta(t)$ — нормальная случайная функция, $\overline{\theta} = 0$. Для определения $K_\theta(\tau)$ использована запись реализации $\Theta(t)$ длиной 10 м, причем 1 см графика по оси времени соответствует 1 сек.

40.17. График реализации случайной функции $X(t)$, нанесенный на бумажную ленту проводящим электрический ток составом, протаскивается с постоянной скоростью под двумя контактами, смещенными один относительно другого по направлению оси времени на расстояние, соответствующее τ сек. Контакты соединены с релейной схемой таким образом, что реле включает секундомер в том случае, когда ординаты реализации в точках, где находятся контакты имеют одинаковые знаки, и выключает в противоположном случае.

Показать, что если $\overline{x} = 0$, а $X(t)$ — нормальная стационарная функция, то оценка ее нормированной корреляционной функции может быть определена по формуле

$$\widetilde{k}(\tau) = \cos \pi \left(1 - \frac{t_1}{t}\right),$$

где t_1 — суммарный отсчет секундомера, t — общее время движения ленты.

40.18. В условиях предыдущей задачи определить $\mathrm{D}[\widetilde{k}(5)]$, если для определения $\widetilde{k}(5)$ использован график реализации случайной функции, соответствующий времени записи $T = 10$ мин

$$k(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \qquad \alpha = 0{,}02 \text{ сек}^{-1}.$$

40.19. В результате обработки трех реализаций одной и той же стационарной случайной функции $X(t)$ длительностью T_1, T_2 и T_3 получено три графика оценок корреляционной функции. Предполагая процесс нормальным, вывести формулу для получения ординат оценки корреляционной функции $\widetilde{K}_x(\tau)$ с учетом всего опытного материала, исходя из требования минимальной дисперсии оценки, если для каждой реализации оценка корреляционной функции определялась по формуле

$$\widetilde{K}_j(\pi) = \frac{1}{T_j}\int\limits_0^{T_j} x(t)x(t+\tau)\,dt, \qquad j = 1, 2, 3 \quad (\overline{x} = 0).$$

40.20. Определить дисперсию оценки корреляционной функции нормального случайного процесса с нулевым математическим ожиданием, если для нахождения $\widetilde{K}_x(\tau)$ взяты ординаты реализации случайной функции через равные интервалы Δ, длительность записи $T = m\Delta$, а в окончательной формуле допустимо $K_x(\tau)$ заменить на $\widetilde{K}_x(\tau)$.

40.21. Ординаты случайной функции определяются путем фотографирования шкалы прибора через равные промежутки времени $\Delta = 1$ сек. Определить, во сколько раз изменится $\mathrm{D}[\widetilde{K}(0)]$ сравнительно с дисперсией, полученной при обработке непрерывного графика реализации, если

$$K_x(\tau) = ae^{-0{,}5|\tau|},$$

(τ дано в секундах), процесс нормальный, время наблюдения $T = 5$ мин.

40.22. Для приближенного определения ординаты реализации стационарной случайной функции $X(t)$, имеющей нулевое математическое ожидание и заданную корреляционную функцию $K_x(\tau)$, используется формула

$$X(t) = \sum_{j=0}^{m} \left(A_j \cos \frac{2\pi jt}{T} + B_j \sin \frac{2\pi jt}{T} \right) a_j,$$

где A_j, B_j — взаимно некоррелированные случайные величины с единичными дисперсиями и нулевыми математическими ожиданиями, T — заданное число. Определить постоянные a_j так, чтобы

$$\varepsilon \equiv \int\limits_0^T [K_x(\tau) - \widetilde{K}_x(\tau)]^2 d\tau = \min,$$

где $\widetilde{K}_x(\tau)$ — корреляционная функция, соответствующая написанному выше приближенному выражению для $X(t)$. Определить величину ε при оптимальных значениях постоянных.

40.23. При измерении слабого тока зеркальным гальванометром для уменьшения влияния случайного дрожания рамки гальванометра произведена запись показаний прибора длительностью $T = 10$ сек и значение j средней ординаты этой записи принято за искомое значение силы тока. Определить среднюю квадратическую ошибку результата, если дрожание рамки характеризуется корреляционной функцией силы тока $J(t)$:

$$K(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|},$$

где $a = 10^{-16}\ A^2$, $\alpha = 10^{-1}$ сек$^{-1}$.

40.24. Определить увеличение ε дисперсии оценки $\widetilde{K}(m\Delta)$ корреляционной функции нормального стационарного процесса $X(t)$, если оценка определяется по значениям реализации случайного процесса в моменты времени $t_j = j\Delta$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, искаженные ошибками η_j, являющимися независимыми нормальными величинами $\overline{\eta}_j = 0$, $\mathrm{D}(\eta_j) = \sigma^2$ $(\overline{x} = 0)$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблицы

Таблица I

Суммарные вероятности для распределения Пуассона

$$Q(m;\lambda) = \sum_{\nu=m}^{\infty} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!} e^{-\lambda}.$$

m \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,09516	0,18127	0,25918	0,32968	0,39347	0,45119	0,50341
2	00468	01752	03694	06155	09020	12190	15580
3	00016	00115	00360	00793	01439	02312	03414
4	0	00006	00027	00078	00175	00336	00575
5		0	00002	00006	00017	00039	00079
6					00001	00004	00009
							00001

m \ λ	0,8	0,9	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0
0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
1	0,55067	0,59343	0,63212	0,86466	0,98168	0,99752	0,99966
2	19121	22752	26424	59399	90842	98265	99698
3	04742	06286	08032	32332	76190	93803	98625
4	00908	01346	01899	14288	56653	84880	95762
5	00141	00234	00366	05265	37116	71494	90037
6	00018	00034	00059	01656	21487	55432	80876
7	00002	00004	00008	00453	11067	39370	68663
8		00001	00002	00110	05113	25602	54704
9				00024	02136	15276	40745
10				00005	00813	08392	28338
11				00001	00284	04262	18411
12					00092	02009	11192

Продолжение табл. I

m \ λ	0,8	0,9	1,0	2,0	4,0	6,0	8,0
13					00028	00883	06380
14					00008	00363	03418
15					00002	00140	01726
16					00001	00051	00823
17						00017	00372
18						00006	00159
19						00002	00065
20						00001	00025
21							00009
22							00003
23							00001
24							

Вероятность $P(m;\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}\,e^{-\lambda}$ может быть вычислена через вероятность $Q(m;\lambda)$ следующим образом:

$$P(m;\lambda) = Q(m-1;\lambda) - Q(m;\lambda) \qquad (m > 0);$$

$$P(0;\lambda) = 1 - Q(0;\lambda).$$

Таблица II

Стандартная нормальная плотность вероятности
$(\overline{z} = 0;\ \mathrm{D}(z) = 1)$**:**

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{z^2}{2}}; \qquad \varphi(-z) = \varphi(z).$$

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,	3989	3970	3910	3814	3683	3521	3332	3123	2897	2661
1,	2420	2179	1942	1714	1497	1295	1109	940	790	656
2,	540	440	355	283	224	175	136	104	79	60
3,	44	33	24	17	12	9	6	4	3	2

В таблице приведены значения $\varphi(z)\cdot 10^4$. В первом столбце указаны целые, а в верхней строке — десятые доли аргумента z. Например, при $z = -1{,}6$, $\varphi(z) = 0{,}1109$.

Таблица III

Функция Лапласа

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt; \qquad \Phi(-z) = -\Phi(z).$$

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,	0	797	1585	2358	3108	3829	4515	5161	5763	6319
1,	6827	7287	7699	8064	8385	8664	8904	9109	9231	9426
2,	9545	9643	9722	9786	9836	9876	9907	9931	9949	9963
3,	9973	9981	9986	9990	9993	9995	9997	9998	9999	9999

В таблице приведены значения $\Phi(z)\cdot 10^4$. В первом столбце указаны целые, а в верхней строке — десятые доли аргумента z. Например, при $z = -1,6$, $\Phi(z) = -0{,}8904$.

Значения z, отвечающие круглым значениям функции $\Phi(z)$

$\Phi(z)$	0,80	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
z	1,2816	1,6449	1,9600	2,2414	2,5758	2,8070	3,2905

Таблица IV

Стандартная функция нормального распределения

$$F_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt; \qquad F_0(-z) = 1 - F_0(z).$$

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,	5000	5398	5793	6179	6554	6915	7257	7580	7881	8159
1,	8413	8643	8849	9032	9192	9332	9452	9594	9641	9713
2,	9772	9821	9861	9893	9918	9938	9953	9965	9974	9981
3,	9986	9990	9993	9995	9997	9998	9998	9999	9999	9999

В таблице приведены значения $F_0(z)\cdot 10^4$. В первом столбце указаны целые, а в верхней строке — десятые доли аргумента z. Например, при $z = -1{,}6$, $F_0(z) = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548$.

Таблица V

Функция, обратная стандартной функции нормального распределения $\Psi(p) = z$, где $p = F_0(z)$

p	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,8	0,9
0,5	0,000	0,025	0,050	0,075	0,100	0,126	0,151	0,176	0,202	0,228
0,6	0,253	0,279	0,305	0,332	0,358	0,385	0,412	0,440	0,468	0,496
0,7	0,524	0,553	0,583	0,613	0,643	0,674	0,706	0,739	0,772	0,806
0,8	0,842	0,878	0,915	0,954	0,994	1,036	1,080	1,126	1,175	1,227
0,9	1,282	1,341	1,405	1,476	1,555	1,645	1,751	1,881	2,054	2,326
p	0,000	0,001	0,002	0,003	0,004	0,005	0,006	0,007	0,008	0,009
0,97	1,881	1,896	1,911	1,927	1,943	1,960	1,977	1,995	2,014	2,034
0,98	2,054	2,075	2,097	2,120	2,144	2,170	2,197	2,226	2,257	2,290
0,99	2,326	2,366	2,409	2,457	2,512	2,576	2,652	2,748	2,878	3,090

Функция $\Psi(p)$ (квантили стандартного нормального распределения) дана в таблице для значений p от 0,50 до 0,999. В первом столбце указаны десятые (в последних трех строках — сотые), а в верхней строке — сотые (в последних трех строках — тысячные) доли аргумента p. Для значений p от 0 до 0,50 функция $\Psi(p)$ вычисляется по формуле: $\Psi(p) = -\Psi(1-p)$.

Например, при $p = 0{,}37$ получаем: $\Psi(0{,}37) = -\Psi(0{,}63) = -0{,}332$.

Таблица VI

Приведенная функция Лапласа

$$\hat{\Phi}(z) = \frac{2\rho}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^z e^{-\rho^2 x^2}\, dx = \Phi(z\rho\sqrt{2})$$

z	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,0	0	538	1073	1603	2127	2641	3143	3632	4105	4562
1,0	5000	5419	5817	6194	6550	6883	7195	7485	7753	8000
2,0	8227	8433	8622	8792	8945	9082	9205	9314	9410	9495
3,0	9570	9635	9691	9740	9782	9818	9848	9874	9896	9915
4,0	9930	9954	9963	9970	9976	9981	9985	9985	9988	9990
5,0	9992	9994	9995	9996	9997	9998	9998	9999	9999	9999

В таблице приведены значения $\hat{\Phi}(z)\cdot 10^4$. В первом столбце указаны целые, а в верхней строке — десятые доли аргумента z.

Таблица VII

Функция распределения Стьюдента

$$S(t;k) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{k\pi}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dx$$

t \ k	1	2	3	4	6	8	10	12	14	16	18	∞
0,0	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500	500,00
0,1	532	535	537	537	538	539	539	539	539	539	539	539,83
0,2	563	570	573	574	576	577	577	578	578	578	578	579,26
0,3	593	604	608	610	613	614	615	615	616	616	616	617,91
0,4	621	636	642	645	648	650	651	652	652	653	653	655,42
0,5	648	667	674	678	683	685	686	687	688	688	688	691,46
0,6	672	695	705	710	715	717	719	720	721	722	722	725,75
0,7	694	722	733	739	745	748	750	751	752	753	754	758,04
0,8	715	746	759	766	773	777	779	780	781	782	783	788,14
0,9	733	768	783	790	799	803	805	807	808	809	810	815,94
1,0	750	789	804	813	822	827	830	832	833	834	835	841,34
1,2	779	823	842	852	862	868	871	873	875	876	877	884,93
1,4	803	852	872	883	894	900	904	907	908	910	911	919,24
1,6	822	875	896	908	920	926	930	932	934	935	936	945,20
1,8	839	893	915	927	939	945	949	952	953	955	956	964,07
2,0	852	908	930	942	954	960	963	966	967	969	970	977,25
2,4	874	931	952	963	973	978	981	983	985	986	986	991,80
2,8	891	946	966	976	984	988	991	992	993	994	994	997,44
3,2	904	957	975	984	991	994	995	996	997	997	997	999,31
3,6	914	965	982	989	994	996	998	998	999	999	999	999,84
4,0	922	971	986	992	996	998	999	999	999	999	999	999,97

В таблице приведены значения $S(t;k)\cdot 10^3$.

Таблица VIII

Значения χ^2_α для χ^2-распределения, определяемые формулой
$P\{\chi^2 \geqslant \chi^2_\alpha\} = \alpha$

k \ α	0,10	0,05	0,01	0,001	k \ α	0,10	0,05	0,01	0,001
1	2,7	3,8	6,6	10,8	19	27,2	30,1	36,2	43,8
2	4,6	6,0	9,2	13,8	20	28,4	31,4	37,6	45,3
3	6,3	7,8	11,3	16,3	21	29,6	32,7	38,9	46,8
4	7,8	9,5	13,3	18,5	22	30,8	33,9	40,3	48,3
5	9,2	11,1	15,1	20,5	23	32,0	35,2	41,6	49,7
6	10,6	12,6	16,8	22,5	24	33,2	36,4	43,0	51,2
7	12,0	14,1	18,5	24,3	25	34,4	37,7	44,3	52,6
8	13,4	15,5	20,1	26,1	26	35,6	38,9	45,6	54,1
9	14,7	16,9	21,7	27,9	27	36,7	40,1	47,0	55,5
10	16,0	18,3	23,2	29,6	28	37,9	41,3	48,3	56,9
11	17,3	19,7	24,7	31,3	29	39,1	42,6	49,6	58,3
12	18,5	21,0	26,2	32,9	30	40,3	43,8	50,9	59,7
13	19,8	22,4	27,7	34,5	35	46,1	49,8	57,3	66,5
14	21,1	23,7	29,1	36,1	40	51,8	55,8	63,7	73,6
15	22,3	25,0	30,6	37,7	45	57,5	61,7	70,0	80,1
16	23,5	26,3	32,0	39,2	50	63,2	67,5	76,2	86,5
17	24,8	27,6	33,4	40,8	75	91,1	96,2	106,4	118,5
18	26,0	28,9	34,8	42,3	100	118,5	124,3	135,6	149,0

Таблица IXа

Значения γ для доверительного интервала: $-\gamma < t < \gamma$, где величина t имеет распределение Стьюдента, при доверительной вероятности β

k \ β	γ		
	0,90	0,95	0,99
1	6,31	12,71	63,7
2	2,92	4,30	9,92
3	2,35	3,18	5,84
4	2,13	2,77	4,60
5	2,02	2,57	4,03
6	1,943	2,45	3,71
7	1,895	2,36	3,50
8	1,860	2,31	3,36
9	1,833	2,26	3,25
10	1,812	2,23	3,17
11	1,796	2,20	3,11
12	1,782	2,18	3,06
13	1,771	2,16	3,01
14	1,761	2,14	2,98
15	1,753	2,13	2,95
16	1,746	2,12	2,92
17	1,740	2,11	2,90
18	1,734	2,10	2,88
19	1,729	2,09	2,86
20	1,725	2,08	2,84
22	1,717	2,07	2,82
24	1,711	2,06	2,80
26	1,706	2,06	2,78
28	1,701	2,05	2,76
30	1,697	2,04	2,75
40	1,684	2,02	2,70
60	1,671	2,00	2,66
120	1,658	1,980	2,62
∞	1,645	1,960	2,58

Таблица IXб

Нижняя γ_1 и верхняя γ_2 границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения, вычисленные на основании χ^2-распределения: $\gamma_1\widetilde{\sigma} < \sigma < \gamma_2\widetilde{\sigma}$ при доверительной вероятности β

	γ_1			γ_2		
k \ β	0,90	0,95	0,99	0,90	0,95	0,99
1	0,510	0,446	0,356	15,9	31,9	159
2	0,578	0,521	0,434	4,40	6,28	14,1
3	0,620	0,566	0,483	2,92	3,73	6,47
4	0,649	0,599	0,519	2,37	2,87	4,39
5	0,672	0,624	0,546	2,09	2,45	3,48
6	0,690	0,644	0,569	1,916	2,20	2,98
7	0,705	0,661	0,588	1,797	2,04	2,66
8	0,718	0,675	0,604	1,711	1,916	2,44
9	0,729	0,688	0,618	1,645	1,826	2,28
10	0,739	0,699	0,630	1,593	1,755	2,15
11	0,748	0,708	0,641	1,550	1,698	2,06
12	0,755	0,717	0,651	1,515	1,651	1,976
13	0,762	0,725	0,660	1,485	1,611	1,910
14	0,769	0,732	0,669	1,460	1,577	1,854
15	0,775	0,739	0,676	1,437	1,548	1,806
16	0,780	0,745	0,683	1,418	1,522	1,764
17	0,785	0,750	0,690	1,400	1,499	1,727
18	0,790	0,756	0,696	1,385	1,479	1,695
19	0,794	0,760	0,702	1,370	1,460	1,666
20	0,798	0,765	0,707	1,358	1,444	1,640
22	0,805	0,773	0,717	1,335	1,416	1,595
24	0,812	0,781	0,726	1,316	1,391	1,558
26	0,818	0,788	0,734	1,300	1,371	1,526
28	0,823	0,794	0,741	1,286	1,352	1,499
30	0,828	0,799	0,748	1,274	1,337	1,475
40	0,847	0,821	0,774	1,228	1,279	1,390
60	0,871	0,849	0,808	1,179	1,217	1,299
120	0,925	0,912	0,887	1,106	1,110	1,150

Таблица X

Вероятности $\beta = P\left(\frac{\sqrt{k}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right)$ для χ-распределения

k \ q	0,01	0,02	0,06	0,10	0,15	0,20	0,25
1	10	19	58	97	145	193	241
2	15	29	88	147	219	290	358
4	22	43	129	214	317	414	504
6	27	54	160	264	388	501	599
8	31	62	186	305	444	567	669
10	35	70	208	340	491	620	722
15	44	86	254	412	583	717	812
20	50	100	293	470	652	784	868
30	61	122	356	559	749	867	930
40	72	142	408	628	815	913	957

В таблице приведены значения $P\left(\frac{\sqrt{k}}{1+q} < \chi < \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right) \cdot 10^3$. Для среднего квадратического отклонения нормально-распределенной величины доверительный интервал имеет вид: $(1-q)\widetilde{\sigma} < \sigma < (1+q)\widetilde{\sigma}$.

Таблица XI

Значения $\lambda_{n\alpha} = D_{n\alpha}\sqrt{n}$ для критерия Колмогорова

n \ α	0,20	0,10	0,05	0,01	n \ α	0,20	0,10	0,05	0,01
1	0,900	0,950	0,975	0,995	25	1,040	1,188	1,320	1,583
2	0,967	1,097	1,191	1,314	30	1,041	1,194	1,325	1,588
3	0,978	1,102	1,226	1,436	40	1,044	1,197	1,328	1,594
4	0,986	1,130	1,248	1,468	50	1,047	1,200	1,330	1,598
5	0,998	1,139	1,260	1,495	60	1,051	1,201	1,332	1,603
6	1,004	1,146	1,271	1,511	70	1,053	1,203	1,335	1,606
8	1,012	1,159	1,284	1,533	80	1,055	1,204	1,338	1,607
10	1,021	1,167	1,293	1,546	90	1,056	1,206	1,340	1,608
15	1,030	1,177	1,309	1,565	100	1,056	1,207	1,340	1,608
20	1,038	1,185	1,315	1,574	∞	1,073	1,224	1,358	1,627

Таблица XII

Критерий ω^2 Мизеса. Значения Δ_α для уравнения
$$P(n\omega^2 > \Delta_\alpha) = \alpha$$

α	0,50	0,40	0,30	0,20	0,10	0,05	0,03	0,02	0,01	0,001
Δ_α	0,1184	0,1467	0,1843	0,2412	0,3473	0,4614	0,5489	0,6198	0,7435	1,1700

Таблица XIII

Ортогональные полиномы Чебышева

n	k / x_i	1	2	3	4	5
5 (6 точек)	0	5	5	5	1	1
	1	3	–1	–7	–3	–5
	2	1	–4	–4	2	10
	3	–1	–4	4	2	–10
	4	–3	–1	7	–3	5
	5	–5	–5	–5	1	–1
S_k		70	84	180	28	252
7 (8 точек)	0	7	7	7	7	7
	1	5	1	–5	–13	–23
	2	3	–3	–7	– 3	17
	3	1	–5	–3	9	15
	4	–1	–5	3	9	–15
	5	–3	–3	7	–3	–17
	6	–5	1	5	–13	23
	7	–7	7	–7	7	–7
S_k		168	168	264	616	2184
9 (10 точек)	0	9	6	42	18	6
	1	7	2	–14	–22	–14
	2	5	–1	–35	–17	1
	3	3	–3	–31	3	11
	4	1	–4	–12	18	6
	5	–1	–4	–12	18	–6
	6	–3	–3	31	3	–11
	7	–5	–1	35	–17	–1
	8	–7	2	14	–22	14
	9	–9	6	–42	18	–6
S_k		330	132	8580	2860	780

Продолжение табл. XIII

n	x_i \ k	1	2	3	4	5
11 (12 точек)	0	11	55	33	33	33
	1	9	25	–3	–27	–57
	2	7	1	–21	–33	–21
	3	5	–17	–25	–13	29
	4	3	–29	–19	12	44
	5	1	–35	–7	28	20
	6	–1	–35	7	28	–20
	7	–3	–29	19	12	–44
	8	–5	–17	25	–13	–29
	9	–7	1	21	–33	21
	10	–9	25	3	–27	57
	11	–11	55	–33	33	–33
S_k		572	12 012	5148	8008	15 912
12 (13 точек)	0	6	22	11	99	22
	1	5	11	0	–66	–33
	2	4	2	–6	–96	–18
	3	3	–5	–8	–54	11
	4	2	–10	–7	11	26
	5	1	–13	–4	64	20
	6	0	–14	0	84	0
	7	–1	–13	4	64	–20
	8	–2	–10	7	11	–26
	9	–3	–5	8	–54	–11
	10	–4	2	6	–96	18
	11	–5	11	0	–66	33
	12	–6	22	–11	99	–22
S_k		182	2002	572	68 068	6188
13 (14 точек)	0	13	13	143	143	143
	1	11	7	11	–77	–187
	2	9	2	–66	–132	–132
	3	7	–2	–98	–92	28
	4	5	–5	–95	–13	139
	5	3	–7	–67	63	145
	6	1	–8	–24	108	60
	7	–1	–8	24	108	–60
	8	–3	–7	67	63	–145
	9	–5	–5	95	–13	–139
	10	–7	–2	98	–92	–28
	11	–9	2	66	–132	132
	12	–11	7	–11	–77	187
	13	–13	13	–143	143	–143
S_k		910	728	97 240	1 361 36	235 144

Продолжение табл. XIII

n	x_i \ k	1	2	3	4	5
16 (17 точек)	0	8	40	28	52	104
	1	7	25	7	–13	–91
	2	6	12	–7	–39	–104
	3	5	1	–15	–39	–39
	4	4	–8	–18	–24	36
	5	3	–15	–17	–3	83
	6	2	–20	–13	17	88
	7	1	–23	–7	31	55
	8	0	–24	0	36	0
	9	–1	–23	7	31	–55
	10	–2	–20	13	17	–88
	11	–3	–15	17	–3	–83
	12	–4	8	18	–24	–36
	13	–5	1	15	–39	39
	14	–6	12	7	–39	104
	15	–7	25	–7	–13	91
	16	–8	40	–28	52	–104
S_k		408	7752	3876	16 756	100 776

Таблица XIV

Значения $\mathcal{F}_\alpha$ для распределения Фишера $\alpha = 0{,}05$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	40	60	120	∞
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	241,9	243,9	246,0	248,0	250,1	251,1	252,2	253,2	254,3
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,40	19,41	19,43	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,50
3	10,13	9,552	9,277	9,117	9,014	8,941	8,887	8,845	8,786	8,745	8,703	8,660	8,617	8,594	8,572	8,549	8,526
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,964	5,912	5,858	5,802	5,746	5,717	5,688	5,658	5,628
5	6,608	5,786	5,410	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,735	4,678	4,619	4,558	4,496	4,464	4,431	4,398	4,365
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,060	4,000	3,938	3,874	3,808	3,774	3,740	3,705	3,669
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,500	3,438	3,347	3,284	3,218	3,150	3,079	3,043	3,005	2,967	2,928
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,136	3,072	2,978	2,913	2,845	2,774	2,700	2,661	2,621	2,580	2,538
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,753	2,687	2,617	2,544	2,466	2,426	2,384	2,341	2,296
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,707	2,641	2,544	2,475	2,404	2,328	2,247	2,204	2,160	2,114	2,066
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,589	2,514	2,447	2,348	2,278	2,203	2,124	2,039	1,994	1,946	1,896	1,843
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,420	2,334	2,266	2,165	2,092	2,015	1,932	1,841	1,792	1,740	1,684	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,450	2,336	2,249	2,180	2,077	2,004	1,924	1,839	1,793	1,693	1,637	1,577	1,509
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,166	2,097	1,993	1,917	1,836	1,748	1,700	1,594	1,534	1,467	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,087	2,016	1,910	1,834	1,750	1,659	1,608	1,495	1,429	1,352	1,254
∞	3,842	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	2,010	1,938	1,831	1,752	1,666	1,570	1,517	1,394	1,318	1,221	1,000

Продолжение табл. XIV

Значения $\mathcal{F}_\alpha$ для распределения Фишера $\alpha = 0{,}01$

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	10	12	15	20	30	40	60	120	∞
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6056	6106	6157	6209	6261	6287	6313	6339	6366
2	98,50	99,00	99,17	99,25	99,30	99,33	99,36	99,37	99,40	99,42	99,43	99,45	99,47	99,47	99,48	99,49	99,50
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,23	27,05	26,87	26,69	26,50	26,41	26,31	26,22	26,12
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,55	14,37	14,20	14,02	13,83	13,74	13,65	13,56	13,46
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,05	9,888	9,722	9,533	9,379	9,291	9,202	9,112	9,020
6	13,74	10,92	9,780	9,148	8,746	8,466	8,260	8,102	7,102	7,874	7,718	7,559	7,396	7,228	7,143	6,969	6,880
8	11,26	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178	6,029	5,814	5,667	5,515	5,359	5,198	5,116	5,032	4,946	4,859
10	10,04	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	6,200	5,057	4,849	4,706	4,558	4,405	4,247	4,165	4,082	3,996	3,909
12	9,330	6,927	5,953	5,412	5,064	4,821	4,640	4,499	4,296	4,155	4,010	3,858	3,701	3,619	3,536	3,449	3,361
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	5,318	4,142	4,004	3,805	3,666	3,522	3,372	3,214	3,132	3,047	2,960	2,868
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,699	3,564	3,368	3,231	3,088	2,937	2,778	2,695	2,608	2,517	2,421
30	7,562	5,390	4,510	4,018	3,699	3,474	3,304	3,173	2,979	2,843	2,700	2,549	2,386	2,299	2,208	2,111	2,006
40	7,314	5,178	4,313	3,828	3,514	3,291	3,124	2,993	2,800	2,665	2,522	2,369	2,203	2,114	2,019	1,917	1,805
60	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953	2,823	2,632	2,456	2,352	2,198	2,028	1,936	1,836	1,726	1,601
120	6,851	4,786	3,949	3,480	3,174	2,956	2,792	2,663	2,742	2,336	2,192	2,035	1,860	1,763	1,656	1,533	1,380
∞	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,639	2,511	2,321	2,185	2,038	1,878	1,696	1,592	1,473	1,325	1,000

Таблица XV

Критерий Кочрена. Значения $g_\alpha \cdot 10^4$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

l \ $n-1$	1	2	4	6	8	10	16	36	144	∞
2	9985	9750	9057	8534	8159	7870	7341	5502	5813	5000
4	9065	7679	6287	5598	5175	4884	4366	3720	3093	2500
7	7271	5612	4307	3726	3384	3154	2756	2278	1833	1429
10	6020	4450	3311	2823	2541	2353	2032	1655	1308	1000
15	4709	3346	2419	2034	1815	1671	1429	1144	889	667
20	3894	2705	1921	1602	1422	1303	1108	879	675	500
30	2929	1980	1377	1137	1002	921	771	604	457	333
40	2370	1576	1082	887	780	713	595	462	347	250
120	998	632	419	337	292	266	218	165	120	83
∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица XVI

Критерий Хартли. Значения h_α при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$

l \ $n-1$	2	4	6	8	10	15	20	30	60	∞
2	39,0	9,60	5,82	4,43	3,72	2,86	2,46	2,07	1,67	1,00
4	142	20,6	10,4	7,18	5,67	4,01	3,29	2,61	1,96	1,00
7	333	33,6	15,0	9,78	7,42	4,95	3,94	3,02	2,17	1,00
10	550	44,6	18,6	11,7	8,66	5,59	4,37	3,29	2,30	1,00
12	704	51,4	20,7	12,7	9,34	5,93	4,59	3,39	2,36	1,00

Таблица XVII

Значения v_α для критерия Грэббса–Смирнова

n \ α	0,001	0,01	0,05	0,10	n \ α	0,001	0,01	0,05	0,10
3	1,414	1,414	1,414	1,412	28	3,629	3,258	2,929	2,764
4	1,732	1,728	1,710	1,689	30	3,672	3,291	2,958	2,792
6	2,212	2,161	2,067	1,996	32	3,711	3,322	2,985	2,818
8	2,547	2,431	2,273	2,172	34	3,746	3,351	3,010	2,842
10	2,788	2,616	2,414	2,294	36	3,778	3,377	3,033	2,864
12	2,969	2,753	2,519	2,387	38	3,808	3,401	3,055	2,885
14	3,111	2,859	2,602	2,461	40	3,835	3,424	3,075	2,904
16	3,225	2,946	2,670	2,523	42	3,861	3,445	3,094	2,922
18	3,320	3,017	2,728	2,577	44	3,885	3,465	3,112	2,940
20	3,400	3,079	2,779	2,623	46	3,907	3,483	3,129	2,956
22	3,469	3,132	2,823	2,664	48	3,928	3,501	3,145	2,972
24	3,529	3,179	2,862	2,701	50	3,948	3,518	3,160	2,987
26	3,582	3,220	2,897	2,734	52	3,966	3,534	3,175	3,001

Таблица XVIII

Значения $r_\alpha \cdot 10^3$ для критерия Аббе

n \ α	0,001	0,01	0,05	n \ α	0,001	0,01	0,05	n \ α	0,001	0,01	0,05
4	295	313	390	17	355	487	624	36	521	629	733
5	208	269	410	18	368	499	633	38	532	638	740
6	182	281	445	19	381	510	642	40	542	647	746
7	185	307	468	20	393	520	650	42	552	655	752
8	202	331	491	21	404	530	657	44	562	662	758
9	221	354	512	22	414	539	665	46	570	669	763
10	241	376	531	23	424	548	671	48	578	676	768
11	260	396	548	24	433	556	678	50	585	681	772
12	278	414	564	26	451	571	689	52	592	687	776
13	295	431	578	28	467	585	700	54	599	692	780
14	311	447	591	30	482	598	709	56	605	697	784
15	327	461	603	32	496	609	718	58	611	702	787
16	341	475	614	34	509	619	726	60	617	707	791

Таблица XIX

Значения m_α для критерия знаков

$N \backslash \alpha$	0,01	0,05	0,10	$N \backslash \alpha$	0,01	0,05	0,10	$N \backslash \alpha$	0,01	0,05	0,10
10	0	1	1	38	10	12	13	66	22	24	25
12	1	2	2	40	11	13	14	68	22	25	26
14	1	2	3	42	12	14	15	70	23	26	27
16	2	3	4	44	13	15	16	72	24	27	28
18	3	4	5	46	13	15	16	74	25	28	29
20	3	5	5	48	14	16	17	76	26	28	30
22	4	5	6	50	15	17	18	78	27	29	31
24	5	6	7	52	16	18	19	80	28	30	32
26	6	7	8	54	17	19	20	82	28	31	33
28	6	8	9	56	17	20	21	84	29	32	33
30	7	9	10	58	18	21	22	86	30	33	34
32	8	9	10	60	19	21	23	88	31	34	35
34	9	10	11	62	20	22	24	90	32	35	36
36	9	11	12	64	21	23	24				

Таблица XX

Значения R_α для критерия серий

$n_1 = n_2$	5	10	15	20	25	30	40	50	60	70	80	90	100
$\alpha = 0{,}05$	3	6	11	15	19	24	33	42	51	60	70	79	88
$\alpha = 0{,}01$	2	5	9	13	17	21	30	38	47	56	65	74	84

Таблица XXI

Значения V_α для критерия Вилкоксона (Манна–Уитни)

n_2	$\alpha \backslash n_1$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
4	0,01	3	6	10	—	—	—	—	—	—
	0,05	3	6	11	—	—	—	—	—	—
	0,10	3	7	12	—	—	—	—	—	—
5	0,01	3	6	10	16	—	—	—	—	—
	0,05	3	7	12	18	—	—	—	—	—
	0,10	4	4	28	13	20	—	—	—	—

Продолжение табл. XXI

n_2	α \ n_1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	0,01	3	6	11	17	24	—	—	—	—
	0,05	3	8	13	19	27	—	—	—	—
	0,10	4	9	14	21	29	—	—	—	—
7	0,01	3	6	11	17	25	33	—	—	—
	0,05	3	8	14	21	28	37	—	—	—
	0,10	4	9	15	22	30	40	2	—	—
8	0,01	3	6	11	18	26	35	44	—	—
	0,05	4	9	15	22	30	39	50	—	—
	0,10	5	10	16	24	32	42	52	—	—
9	0,01	3	7	12	19	27	36	46	57	—
	0,05	4	9	15	23	32	41	52	63	—
	0,10	5	11	17	25	34	44	55	67	—
10	0,01	3	7	13	20	28	38	48	59	72
	0,05	4	10	16	24	33	43	54	66	79
	0,10	5	11	18	27	36	48	57	70	83

Таблица XXII

Критические значения r_α коэффициента корреляции, найденного по выборке объема $n = k + 2$, определяемые уравнением $P(r > r_\alpha) = \alpha$

k \ α	0,05	0,01	0,0027	0,001	k \ α	0,05	0,01	0,0027	0,001
5	0,75	0,87	0,93	0,95	90	0,21	0,26	0,31	0,34
10	0,58	0,71	0,78	0,82	100	0,19	0,25	0,29	0,32
15	0,48	0,61	0,68	0,72	120	0,18	0,23	0,27	0,30
20	0,42	0,53	0,61	0,65	150	0,16	0,21	0,24	0,26
25	0,38	0,49	0,55	0,60	200	0,14	0,18	0,21	0,23
30	0,35	0,45	0,51	0,55	300	0,11	0,15	0,17	0,19
35	0,32	0,42	0,48	0,52	400	0,10	0,13	0,15	0,17
40	0,30	0,39	0,45	0,49	500	0,09	0,11	0,13	0,15
50	0,27	0,35	0,41	0,44	700	0,07	0,10	0,11	0,12
60	0,25	0,33	0,37	0,41	900	0,06	0,09	0,10	0,11
70	0,23	0,30	0,35	0,38	1000 и более	0,06	0,09	0,10	0,11
80	0,22	0,28	0,33	0,36					

Таблица XXIII

Значение X_α для критерия Ван дер Вардена

α	0,05			0,01		
n_1+n_2	$n_1-n_2=0$ или 1	$n_1-n_2=2$ или 3	$n_1-n_2=4$ или 5	$n_1-n_2=0$ или 1	$n_1-n_2=2$ или 3	$n_1-n_2=4$ или 5
6	∞	∞	∞	∞	∞	∞
8	2,40	2,30	∞	∞	∞	∞
10	2,60	2,49	2,30	3,20	3,10	∞
12	2,86	2,79	2,68	3,60	3,58	3,40
14	3,11	3,06	3,00	3,94	3,88	3,76
16	3,39	3,36	3,28	4,26	4,25	4,12
18	3,63	3,60	3,53	4,60	4,58	4,50
20	3,86	3,84	3,78	4,94	4,92	4,85
22	4,08	4,06	4,01	5,26	5,24	5,17
24	4,29	4,27	4,23	5,55	5,53	5,48
26	4,50	4,48	4,44	5,83	5,81	5,76
28	4,69	4,68	4,64	6,09	6,07	6,03
30	4,88	4,87	4,84	6,35	6,34	6,30
32	5,07	5,06	5,03	6,60	6,58	6,55
34	5,25	5,24	5,21	6,84	6,82	6,79
36	5,42	5,41	5,38	7,06	7,05	7,02
38	5,59	5,58	5,55	7,28	7,27	7,24
40	5,75	5,74	5,72	7,50	7,49	7,47
42	5,91	5,90	5,88	7,72	7,71	7,69
44	6,06	6,06	6,04	7,93	7,92	7,90
46	6,21	6,21	6,19	8,13	8,12	8,10
48	6,36	6,35	6,34	8,32	8,31	8,29
50	6,50	6,50	6,48	8,51	8,50	8,48

Таблица XXIV

Вспомогательная таблица для критерия Ван дер Вардена.
Значения $Q = \frac{1}{n_1+n_2}\sum_{r=1}^{n_1+n_2}\left(\frac{r}{n_1+n_2+1}\right)$

n_1+n_2	Q	n_1+n_2	Q	n_1+n_2	Q	n_1+n_2	Q	n_1+n_2	Q
2	0,186	32	0,821	62	0,889	92	0,918	122	0,934
4	0,386	34	0,829	64	0,892	94	0,919	124	0,935
6	0,497	36	0,836	66	0,894	96	0,920	126	0,935
8	0,570	38	0,842	68	0,897	98	0,922	128	0,936
10	0,622	40	0,848	70	0,899	100	0,923	130	0,937
12	0,661	42	0,853	72	0,901	102	0,924	132	0,938
14	0,692	44	0,858	74	0,903	104	0,925	134	0,938
16	0,716	46	0,862	76	0,905	106	0,926	136	0,939
18	0,737	48	0,866	78	0,907	108	0,927	138	0,940
20	0,755	50	0,870	80	0,908	110	0,928	140	0,940
22	0,770	52	0,874	82	0,910	112	0,929	142	0,941
24	0,783	54	0,877	84	0,912	114	0,930	144	0,942
26	0,794	56	0,880	86	0,913	116	0,931	146	0,942
28	0,804	58	0,884	88	0,915	118	0,932	148	0,943
30	0,813	60	0,887	90	0,916	120	0,933	150	0,944

Используемые таблицы со ссылками на литературу

1Т. Биномиальные коэффициенты C_n^m: [7], [16], [24], [40], [56], [85].

2Т. Факториалы или логарифмы факториалов: [3], [6], [7], [10], [16], [40], [57], [58], [70], [76].

3Т. Степени некоторых десятичных дробей: [7], [40], [57].

4Т. Биномиальная функция распределения: [7], [21], [40], [58], [86].

5Т. Гамма-функция $\Gamma(x)$ или логарифм гамма-функции: [6], [7], [10], [56], [70], [91], [97].

6Т. Вероятности $P(m;\lambda)$ для закона распределения Пуассона: [1], [6], [7], [14], [16], [20], [24], [33], [36], [52], [57], [92], [93], [98], табл. I приложения.

7Т. Суммарные вероятности $Q(m;\lambda) = P(k \geqslant m)$ для закона распределения Пуассона: [1], [6], [15], [20], [24], [33], [52], [92], [98], табл. I приложения.

8Т. Функция Лапласа $\Phi(z)$: [2], [5], [10], [16], [18], [22], [30], [33], [36], [38], [39], [42], [43], [59], [63], [67], [76], [91], табл. III приложения; в некоторых книгах приведены таблицы $\frac{1}{2}\Phi(z)$: [1], [18], [19], [20], [27], [30], [33], [39],[40], [52], [60], [71].

9Т. Плотность вероятности нормального закона распределения при аргументе, выраженном в средних квадратических отклонениях (стандартная нормальная плотность вероятности) $\varphi(z)$: [1], [2], [6], [7], [12], [16], [19], [20], [24], [27], [30], [31], [33], [36], [37], [38], [39], [40], [50], [57], [63], [71], [76], [86], [91], [92], [93], [94], [98], табл. II приложения.

10Т. Производные от стандартной нормальной плотности вероятности: [7], [16], [57], [67], [91].

11Т. Приведенная функция Лапласа $\hat{\Phi}(z)$: [1], [14], [16], [23], [76].

12Т. Плотность вероятности нормального закона распределения при аргументе, выраженном в срединных отклонениях: [1], [16], [76].

13Т. Функция $P(z) = \hat{\Phi}(z) - 2z\hat{\Phi}'(z)$: [16], [76].

14Т. Функция распределения Стьюдента $S(t;k)$: [1], [16], [20], [33], [94], [98], табл. VII приложения.

15Т. Вероятность $P(|T| < t_\alpha) = 2S(t_\alpha;k)$ для закона распределения Стьюдента: [7], [91].

16Т. Значения γ (или t), отвечающие доверительной вероятности $\beta = P(|T| < \gamma)$ для закона распределения Стьюдента: [1], [2], [7], [13], [14], [16], [19], [30], [31], [32], [33], [37], [38], [39], [40], [42], [46], [48], [52], [57], [59], [67], [71], [73], [76], [81], [84], [86], [87], [91], табл. IX приложения.

17Т. Вероятности $P(\chi^2 \geqslant \chi^2_q)$ для закона χ^2-распределения: [7], [16], [20], [33], [39], [46], [52], [59], [63], [76], [86], [98].

18Т. Значения χ^2_α для закона χ^2-распределения: [6], [7], [13], [14], [19], [21], [31], [33], [37], [38], [39], [40], [42], [46], [52], [57], [59], [63], [67], [71], [73], [81], [84], [86], [87], [91], [92], [94], [98], табл. VIII приложения.

19Т. Границы доверительного интервала для среднего квадратического отклонения σ нормально распределенной величины: [16], [33], [36], [38], [48], [67], табл. IX приложения.

20Т. Вероятность $P\left(\frac{\sqrt{k}}{1+q} \leqslant \chi \leqslant \frac{\sqrt{k}}{1-q}\right)$ для закона χ-распределения: [16], [30], [76], табл. X приложения.

21Т. Плотность вероятности для χ-распределения: [91].

22Т. Вероятности $P(\chi \leqslant q\sqrt{k})$ для χ-распределения: [91].

23Т. Функция распределения Рэлея: [91].

24Т. Функция $P(x) = 1 - e^{-\rho^2 x^2}$: [16], [76].

25Т. Значения D_n или $\lambda_n = D_n\sqrt{n}$ для закона распределения Колмогорова: [7], [38], [63], [97], табл. XI приложения; функция $k(\lambda)$ распределения Колмогорова: [1], [2], [7], [16], [20], [21], [30], [33], [36], [52], [57], [59], [98].

26Т. Значения p-квантилей функции распределения Вальда: [4].

27Т. Таблицы равномерно распределенных случайных чисел: [7], [30], [40], [57], [58], [59], [63], [81], [91], [98].

28Т. Значения Δ_α для критерия ω^2 Мизеса: [7], [38], табл. XII приложения.

29Т. Ортогональные полиномы Чебышева: [7], [16], [38], [56], табл. XIII приложения.

30Т. Двусторонние доверительные интервалы для оценки вероятности при биномиальном распределении: [7], [21], [33], [58], [92].

31Т. Значения $z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+r}{1-r}$: [1], [33], [38], [57].

32Т. Соотношения между параметрами закона распределения Вейбулла: [91].

33Т. Функция нормального распределения при значениях аргумента, выраженных в средних квадратических отклонениях (стандартная нормальная функция распределения) $\mathcal{F}_0(z) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(z)$: [7], [15], [24], [31], [37], [38], [41], [57], [59], [73], [81], [84], [87], табл. IV приложения.

34Т. Функция, обратная стандартной нормальной функции распределения (квантили нормального распределения) $\Psi = \Psi(p)$: [7], [13], [21], [33], [38], [60], [63], [67], [71], [86], [92], табл. V приложения.

35Т. Значения $\mathcal{F}_\alpha$ для закона распределения Фишера–Снедокора: [2], [7], [13], [21], [33], [37], [38], [39], [40], [57], [59], [63], [71], [73], [84], [92], табл. XIV приложения.

36Т. Значения g_α для критерия Кочрена: [7], [9–19.20a], [33], [38], [59], [63], [71], [73], табл. XV приложения.

37Т. Значения h_α для критерия Хартли: [9–8.9], [21], [38], табл. XVI приложения.

38Т. Критические значения асимметрии и эксцесса: [7], [38].

39Т. Значения v_α для критерия исключения грубых ошибок в выборке из нормальной генеральной совокупности: [7], [38], [48], табл. XVII приложения.

40Т. Значения r_α для критерия Аббе: [7], [38], [48], табл. XVIII приложения.

41Т. Значения m_α для критерия знаков: [7], [13], [21], [38], [59], [71], табл. XIX приложения.

42Т. Значения R_α для критерия серий: [7], [38], [59], [84], табл. XX приложения.

43Т. Значения W_α для критерия Вилкоксона (Манна–Уитни): [7], [13], [21], [38], [84], табл. XXI приложения.

44Т. Значения X_α для критерия Ван дер Вардена: [7], [13], [38], табл. XXIII приложения.

45Т. Вспомогательная таблица значений Q для критерия Ван дер Вардена: [7], [13], [38], табл. XXIV приложения.

46Т. Критические значения r_α коэффициента корреляции: [7], [13], [38], [59], [63], табл. XXII приложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абезгауз Г. Г., Тронь А. П., Копейкин Ю. Н., Коровина И. А.* Справочник по вероятностным расчетам. — Военное издательство МО СССР, 1966.
2. *Арлей Н., Бух К.,* Введение в теорию вероятностей и математическую статистику. — ИЛ, 1951.
3. *Барлоу П.* Таблицы квадратов, кубов, квадратных корней, кубических корней и обратных величин. — Мир, 1965.
4. *Башаринов А. Е., Флейшман Б. С.* Методы статистического последовательного анализа и их приложения. 1962.
5. *Бернштейн С. Н.* Теория вероятностей. — Гостехиздат, 1946.
6. *Боев Г. П.* Теория вероятностей. — Гостехиздат, 1956.
7. *Большев А. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. — Наука, 1965.
8. *Боровков А. А.* Курс теории вероятностей. — Наука, 1972.
9. *Боярский Э. А.* Введение в теорию порядковых статистик. (ред.). — Статистика, 1970.
10. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике. — Наука, 1965.
11. *Бунимович В. И.* Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. — Советское радио, 1951.
12. *Вальд А.* Последовательный анализ. — Физматгиз, 1960.
13. *Ван дер Варден Б. Л.* Математическая статистика. 1960.
14. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. — Наука, ИЛ, 1969.
15. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей. — Наука, 1973.
16. *Володин Б. Г., Ганин М. П., Динер И. Я., Комаров Л. Б., Свешников А. А., Старобин К. Б.* Руководство для инженеров по решению задач теории вероятностей. — Судпромгиз, 1962.

17. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — Наука, 1968.
18. *Гливенко В. И.* Курс теории вероятностей. — ГОНТИ, 1939.
19. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Высшая школа, 1972.
20. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — Наука, 1969.
21. *Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д.* Математические методы в теории надежности. — Наука, 1965.
22. *Гнеденко Б. В., Хинчин А. Я.* Элементарное введение в теорию вероятностей. — Наука, 1964.
23. *Гончаров В. Л.* Теория вероятностей. — Оборонгиз, 1939.
24. *Горяинов В. Т., Журавлев А. Г., Тихонов В. И.* Примеры и задачи по статистической радиотехнике. — Советское радио, 1970.
25. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — Физматгиз, 1963.
26. *Гренандер У.* Случайные процессы и статистические выводы. — Иностранная литература, 1961.
27. *Гутер Р. С., Овчинский Б. В.* Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. — Физматгиз, 1962.
28. *Гюнтер Н. М., Кузьмин Р. О.* Сборник задач по высшей математике. Ч. III. — Гостехиздат, 1951.
29. *Давенпорт В. Б., Рут В. Л.* Введение в теорию случайных сигналов и шумов. — ИЛ, 1960.
30. *Длин А. М.* Математическая статистика в технике. — Советская наука, 1958.
31. *Доерфель К.* Статистика в аналитической химии. — Мир, 1969.
32. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. — Статистика, 1973.
33. *Дунин-Барковский И. В., Смирнов Н. В.* Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). — Гостехиздат, 1955.
34. *Дюге Д.* Теоретическая и прикладная статистика. — Наука, 1972.
35. *Ермаков С. М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. — Наука, 1971.

36. *Карасев А. И.* Теория вероятностей и математическая статистика. — Статистика, 1970.
37. *Кендалл М. Дж., Стьюарт А.* Т. I: Теория распределений. — Наука, 1966; Т. II: Статистические выводы и связи. — Наука, 1973.
38. *Комаров Л. Б.* Статистические методы обработки экспериментальных данных. — Изд-во Ленинградского Технологического ин-та им. Ленсовета, 1972.
39. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — Наука, 1968.
40. *Коуден Д.* Статистические методы контроля качества. — Физматгиз, 1961.
41. *Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.* Основные дифференциальные уравнения математической физики. — Физматгиз, 1962.
42. *Крамер Г.* Математические методы статистики. — ИЛ, 1948.
43. *Крамер Г., Лидбеттер М.* Стационарные случайные процессы. — Мир, 1969.
44. *Крылов А. Н.* Лекции о приближенных вычислениях. — Гостехиздат, 1954.
45. *Левин Б. Р.* Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. — Советское радио, 1957.
46. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. — Советское радио, кн. 1 (1966); кн. 2 (1968).
47. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. — Наука, 1964.
48. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. — Физматгиз, 1962.
49. *Лонге-Хиггинс М. С.* Статистический анализ случайной движущейся поверхности// Ветровые волны. — ИЛ, 1962.
50. *Лукомский Я. И.* Теория корреляции и ее применение к анализу производства. — Госстатиздат, 1961.
51. *Лэнинг Д. Х., Бэттин Р. Г.* Случайные процессы в задачах автоматического регулирования. — ИЛ, 1958.
52. *Маринеску И., Мойнягу Ч., Никулеску Р., Ранку Н., Урсяну В.* Основы математической статистики и ее приложение. — Статистика, 1970.

53. *Месяцев П. П.* Применение теории вероятностей и математической статистики при конструировании и производстве радиоаппаратуры. — Воениздат, 1958.
54. *Мешалкин Л. Д.* Сборник задач по теории вероятностей. — Изд-во МГУ, 1963.
55. *Миддлтон Д.* Введение в статистическую теорию связи. — Советское радио, Т. 1 (1961); Т. 2 (1962).
56. *Милн В. Э.* Численный анализ. — ИЛ, 1951.
57. *Митропольский А. К.* Техника статистических вычислений. — Наука, 1971.
58. *Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж.* Вероятность. — Мир, 1969.
59. *Налимов В. В.* Применение математической статистики при анализе вещества. — Физматгиз, 1960.
60. *Нейман Ю.* Вводный курс теории вероятностей и математической статистики. — Наука, 1968.
61. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей. — Наука, 1973.
62. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — Физматгиз, 1960.
63. *Пустыльник Е. И.* Статистические методы анализа и обработки наблюдений. — Наука, 1968.
64. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. — Наука, 1971.
65. *Романовский В. И.* Дискретные цепи Маркова. — Гостехиздат, 1949.
66. *Романовский В. И.* Математическая статистика. — ГОНТИ, 1938.
67. *Румшиский Л. З.* Элементы теории вероятностей. — Наука, 1970.
68. *Сарымсаков Т. А.* Основы теории процессов Маркова. — Гостехиздат, 1954.
69. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций. — Наука, 1968.
70. *Сегал Б. И., Семендяев К. В.* Пятизначные математические таблицы. — Физматгиз, 1962.

71. *Смирнов Н. В., Дунин–Барковский И. В.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — Наука, 1969.
72. *Солодовников В. В.* Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. — Гостехиздат, 1952.
73. *Спиридонов В. П., Лопаткин А. А.* Математическая обработка физико-химических данных. — Изд-во МГУ, 1970.
74. *Стратонович Р. Л.* Избранные вопросы теории флуктуации в радиотехнике. — Советское радио, 1961.
75. *Уилкс.* Математическая статистика. — Наука, 1967.
76. *Унковский В. А.* Теория вероятностей. — Военмориздат, 1953.
77. *Уорсинг А., Геффнер Д.* Методы обработки экспериментальных данных. — ИЛ, 1953.
78. *Фаддева В. Н., Терентьев Н. М.* Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента. 1954.
79. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — Мир, т. 1 (1964); т. 2 (1967).
80. *Хальд А.* Математическая статистика с техническими приложениями. — ИЛ, 1956.
81. *Хан Г., Шапиро С.* Статистические методы в инженерных задачах. — Мир, 1969.
82. *Хеннан Э.* Анализ временных рядов. — Наука, 1964.
83. *Хикс Ч.* Основные принципы планирования эксперимента. — Мир, 1967.
84. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами. — Мир, 1973.
85. *Хинчин А. Я.* Работы по математической теории массового обслуживания. — Физматгиз, 1963.
86. *Худсон Д.* Статистика для физиков. — Мир, 1970.
87. *Чернов Г., Мозес Л.* Элементарная теория статистических решений. — Советское радио, 1962.
88. *Хьютсон А.* Дисперсионный анализ. — Статистика, 1971.
89. *Шерстобитов В. В., Динер И. Я.* Сборник задач по стрельбе зенитной артиллерии. — Воениздат, 1948.

90. *Шеффе Г.* Дисперсионный анализ. — Физматгиз, 1963.
91. *Шор Я. Б.* Статистические методы анализа и контроля качества и надежности. — Советское радио, 1962.
92. *Шор Я. Б., Кузьмин Ф. И.* Таблицы для анализа и контроля надежности. — Советское радио, 1968.
93. *Щиголев Б. М.* Математическая обработка наблюдений. — Физматгиз, 1962.
94. *Юл Дж. и Кендалл М. Дж.* Теория статистики. — Гостехиздат, I960.
95. *Яглом А. М., Яглом И. М.* Вероятность и информация. — Физматгиз, 1973.
96. *Яглом А. М., Яглом И. М.* Неэлементарные задачи в элементарном изложении. — Гостехиздат, 1954.
97. *Янке Е., Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. — Гостехиздат, 1948.
98. *Янко Я.* Математико-статистические таблицы. 1961.
99. *Bachelier L.* Calcul des probabilites, Paris, 1942.
100. *Bertrand I.* Calcul des probabilites, Paris, 1897.
101. *Borel E.* Elements de la theorie des probabilites, Paris, 1924.
102. *Czuber E.* Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik und Lebensversicherung, Leipzig und Berlin, 1910.
103. *Kalman R., Bucy R.* New results in linear filtering and prediction theory, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. Journal of Basic Engineering, vol. 83, 1961.
104. *Saaty T. L.* Resume of useful formulas in guening theory, Operations Research, № 2, 1957.
105. *Takacs L.* Stochastic processes, Problems and solutions, New York, 1962.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава I
Случайные события

§ 1. Соотношения между случайными событиями

1.1. По определению $A + A = A$, $AA = A$.

1.2. Событие A совпадает с подмножеством для B.

1.3. $B = A_6$, $C = A_5$.

1.4. а) Достоверное событие; б) невозможное событие.

1.5. а) Взята хотя бы одна книга; б) взято хотя бы по одному тому из всех трех сочинений; в) взята одна книга из первого сочинения или три из второго или одна из первого и три из второго; г) взято по два тома из первого и второго сочинений; д) взят хотя бы один том из третьего сочинения и, кроме того, взяты один том из первого сочинения и три из второго или один из второго и три из первого.

1.6. Выбранное число оканчивается цифрой 5.

1.7. $\overline{A}$ — все изделия доброкачественные; $\overline{B}$ — бракованных изделий одно или нет ни одного.

1.8. $A = BC$.

1.9. а) Событие A — попадание точки в область S_A, $\overline{A}$ — вне S_A. Тогда $A + B = \Omega$, т. е. $A = \varnothing$, $B = \Omega$; б) AB — попадание в область S_{AB}, общую для S_A и S_B; $\overline{A}$ — вне S_A. Тогда $AB = \varnothing$, т. е. $A = \Omega$, $B = \varnothing$; в) AB — попадание в общую область S_{AB}; $A+B$ — в область S_{A+B}; равенство $S_{AB} = S_{A+B}$ возможно только при $S_A = S_B$, т. е. $A = B$.

1.10. $X = \overline{B}$.

1.11. Воспользоваться равенствами $\overline{A} = \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{B} = A\overline{B} + \overline{A}\,\overline{B}$.

1.12. Первое соотношение доказывается переходом от n к $n + 1$. Второе получается из первого переходом к противоположным событиям. Третье и четвертое следуют из первых двух по определению разности событий.

1.13. Нет, так как $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$.

1.14. Воспользоваться равенством $\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$.

1.15. C — ничейный исход.

1.16. $C = A(B_1 + B_2)$, $\overline{C} = \overline{A} + \overline{B}_1\overline{B}_2$.

1.17. $D = A(B_1+B_2+B_3+B_4)(C_1+C_2)$, $\overline{D} = \overline{A}+\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4+\overline{C}_1\overline{C}_2$.

1.18. $C = (A_1 + A_2)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)$.

§ 2. Непосредственный подсчет вероятностей

2.1. $p = \frac{rm}{n}$.

2.2. $\frac{4}{9}$.

2.3. $p = 0{,}25$, так как первая карта может быть любой масти.

2.4. $\frac{1}{6^5} \approx 0{,}00013$.

2.5. $\frac{23}{240}$.

2.6. Очередность извлечения при таких условиях не имеет значения, поэтому $p = \frac{2}{9}$.

2.7. Можно считать, что для контроля детали берутся из общей партии; $p = \frac{n-k}{n+m+k}$.

2.8. Можно рассматривать только однозначные числа: а) 0,2; б) 0,4; в) 0,04.

2.9. а) $N = a + 10b$. Условию удовлетворяют только случаи, когда a — четное и $a+b$ делится на 9; $p = \frac{1}{18}$; б) $N = a+10b+100c$. Это число должно делиться на 4 и на 9, т. е. $a + b + c$ делится на 9; $a + 2b$ — на 4 $(m = 22)$; $p = \frac{11}{360}$.

2.10. а) $\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{9999} = \frac{560}{1111}$; б) $\frac{480}{1111}$; в) $\frac{40}{1111}$; г) $\frac{30}{1111}$; д) $\frac{1}{1111}$.

2.11. $\frac{8\cdot 7!\cdot 3!}{10!} = \frac{1}{15}$.

2.12. $\frac{C_5^2}{C_8^2} = \frac{5}{14}$.

2.13. 0,3.

2.14. а) $\frac{5}{9}$; б) $\frac{2}{9}$; в) $\frac{7}{9}$.

2.15. $\frac{C_n^s C_m^{k-s}}{C_{n+m}^k}$.

2.16. $p_k = \frac{C_5^k}{C_{90}^k}$ $(k = 1, 2, 3, 4, 5)$; $p_1 = 0{,}0556$, $p_2 = 0{,}0025$, $p_3 = 0{,}85 \cdot 10^{-4}$, $p_4 = 0{,}2 \cdot 10^{-5}$, $p_5 = 0{,}2 \cdot 10^{-7}$.

2.17. а) $\frac{C_2^1 C_{2n-2}^{n-1}}{C_{2n}^n} = \frac{2}{2n-1}$; б) $\frac{C_2^2 C_{2n-2}^{n-2}}{C_{2n}^n} = \frac{n-1}{2n-1}$.

2.18. $p = \frac{C_{n+k-m}^{n-m}}{C_{n+k}^n}$.

2.19. а) $\frac{C_4^1 C_4^1 C_4^1}{C_{52}^3} = 0{,}0029$; б) $\frac{4\cdot 4\cdot 4}{52\cdot 51\cdot 50} = 0{,}483 \cdot 10^{-3}$; в) $\frac{4\cdot 4\cdot 4}{52\cdot 52\cdot 52} = 0{,}455 \cdot 10^{-3}$.

2.20. $n = C_{36}^3 = 7140$. Благоприятствующие комбинации: 1) (7,7,7); 2) (9,9,3); (9,6,6); 3) (2,8,11), (2,9,10), (3,7,11), (3,8,10), (4,6,1), (4,7,10), (4,8,9), (6,7,8), поэтому $m = 4 + 2 \cdot 4 \cdot C_4^2 + 4^3 \cdot 8 = 564$; $p = 0{,}079$.

2.21. а) $p = 1 - \frac{C_5^1 C_3^1 C_2^1}{C_{10}^3} = 0{,}75$; б) $p = \frac{C_5^1 C_3^2 + C_5^2 C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{7}{24}$.

2.22. $p = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=n-m}^{n+m} C_{2n}^k$ при $m < n$; $p = 1$ при $m \geqslant n$.

2.23. а) $p_{\text{осн}} = \frac{170\cdot 6\cdot 10}{100\ 000} = 0{,}102$; б) $p_{\text{доп}} = \frac{230\cdot 10}{100\ 000} = 0{,}023$; в) $p = \frac{(170\cdot 6+230)\cdot 10}{100\ 000} = 0{,}125$.

2.24. $p = \frac{1}{C_n^m} \prod_{j=1}^{k} C_{n_j}^{m_j}$.

2.25. а) $p_a = \frac{1}{m^n} C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \ldots C_{n-(n_1+n_2+\ldots+n_{m-2})}^{n_{m-1}} = \frac{n!}{m^n n_1! n_2! \ldots n_m!}$; б) при различных $n_1, n_2, \ldots, n_m$ число возможных перестановок между этими числами равно $m!$; $p = m!\ p_a = \frac{n!\,m!}{m^n n_1!\,n_2! \ldots n_m!}$.

2.26. $n = l!$, $p = \frac{m}{n} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{l-k} \frac{(-1)^j}{j!}$.

2.27. а) $\frac{1}{4^8} C_4^3 \sum_{j=0}^{2} (-1)^j C_3^j (3-j)^8 = 0{,}3538$; б) $\frac{4!\,8!}{4^8 3!\,4!} = 0{,}1025$; в) $\frac{8!}{4^8 (2!)^4} = 0{,}0384$.

2.28. $p_k = \frac{C_6^k C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6}$ $(k = 3, 4, 5, 6)$; $p_3 = 0{,}01765$, $p_4 = 0{,}9686 \cdot 10^{-3}$, $p_5 = 0{,}1845 \cdot 10^{-4}$, $p_6 = 0{,}7151 \cdot 10^{-7}$.

2.29. Вместо бюллетеней можно рассматривать последовательность из n точек a и m точек b, поставленных в произвольном порядке на окружности. Последовательность может начинаться с любой точки, поэтому число возможных исходов $n + m$. Исход неблагоприятный, если перед точкой b имеется k точек a. Такие исходы исключаются m раз выбрасыванием по $k + 1$ указанных точек последовательности, для чего окружность обходится в одном направлении несколько раз. $p = \frac{n+m-m(k+1)}{n+m} = \frac{n-km}{n+m}$.

§ 3. Геометрические вероятности

3.1. $p = 1 - \frac{l}{L}$.

3.2. $p = \frac{3}{9{,}5} \approx 0{,}316$.

3.3. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}134$.

3.4. Построение: AB — отрезок длиной $2h$, C — центр диска, AD и BE — касательные к диску, расположенные по одну сторону от прямой AC. Треугольники ADC, BEC совпадают при повороте на угол $\varphi = \angle DCE$, поэтому $\angle ACB = \varphi$, $h = l \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$; $p = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{h}{l}$.

3.5. $p = 1 - \left(1 - \frac{2r+d}{a}\right)\left(1 - \frac{2r+d}{b}\right)$.

3.6. а) 0,0185; б) $p = \frac{160+25\pi}{1000\pi} = 0{,}076$.

3.7. а) 0,16; б) 0,6.

3.8. $p = \frac{5}{9}$.

3.9. $\beta(2 - \beta)$.

3.10. $AL = x$; $AM = y$. $\Omega = \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant y \leqslant l\}$; $C = \{(x,y)\colon |y - x| \leqslant x\}$. $\mathrm{P}(C) = 0{,}75$.

3.11. Координаты точек относительно одного конца отрезка x и y.

$$\Omega = \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant y \leqslant l, y \geqslant x\};$$

$$A = \{(x,y)\colon x \leqslant 0{,}5l, y \geqslant 0{,}5l, y - x \leqslant 0{,}5l\}.$$

$$\mathrm{P}(A) = 0{,}25.$$

3.12. Угловые координаты двух точек относительно третьей x и y.

$$\Omega = \{(x,y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 2\pi, 0 \leqslant y \leqslant 2\pi, y \geqslant x\};$$

$$A = \{(x, y)\colon x \leqslant \pi, y \geqslant \pi, y - x \leqslant \pi\}.$$
$$\mathrm{P}(A) = 0{,}25.$$

3.13. Длины отрезков x, y, z.

$$\Omega = \{(x, y, z)\colon 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant y \leqslant l, 0 \leqslant z \leqslant l\};$$
$$A = \{(x, y, z)\colon x + y \geqslant z, x + z \geqslant y, y + z \geqslant x\}.$$
$$\mathrm{P}(A) = 0{,}5.$$

3.14. $AM = x$, $AN = y$.

$$\Omega = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant y \leqslant l, y \geqslant x\};$$
$$C = \{(x, y)\colon x < a, y - x < a, l - y < a\}.$$
$$\mathrm{P}(C) = \begin{cases} \left(1 - \frac{3a}{l}\right)^2, & \text{при } \frac{l}{3} \leqslant a \leqslant \frac{l}{2}; \\ 1 - 3\left(1 - \frac{a}{l}\right)^2, & \text{при } \frac{l}{2} \leqslant a \leqslant l. \end{cases}$$

3.15. Моменты прихода автобуса линии A: $x = 0; 4; 8$; линии B: y и $y + 6$, где $0 \leqslant y \leqslant 4$.

$$\Omega = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 12, 0 \leqslant y \leqslant 4\}.$$

а) $C = \{(x; y)\colon$ при $0 \leqslant y \leqslant 2$ $\;y < x \leqslant 4,\; 6 + y \leqslant x \leqslant 12$; при $y > 2$ $\;y < x < 8$ или $y + 6 < x < 12\}$. $\mathrm{P}(C) = \frac{2}{3}$.

б) $C = \{(x, y)\colon 2 \leqslant x \leqslant 4, 6 \leqslant x \leqslant 8, 10 \leqslant x \leqslant 12, 4 + y \leqslant x \leqslant 6 + y$; при $y < 2$ $\;0 \leqslant x \leqslant y$; при $y > 2$ $\;y - 2 \leqslant x \leqslant y\}$. $\mathrm{P}(C) = \frac{2}{3}$.

3.16. x и y — моменты прибытия пароходов.

$$\Omega = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 24, 0 \leqslant y \leqslant 24\};$$
$$A = \{(x, y)\colon x \leqslant y \leqslant x + 1, y \leqslant x \leqslant y + 2\}. \qquad \mathrm{P}(A) = 0{,}121.$$

3.17. $p = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2$.

3.18. x — расстояние от берега до первого судна, y — до второго.

$$\Omega = \{(x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant L, 0 \leqslant y \leqslant L\};$$
$$A = \left\{(x, y)\colon |x - y| \leqslant d\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}\right\}.$$
$$\mathrm{P}(A) = \begin{cases} 1 - \left[1 - \frac{d}{L}\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}\right]^2, & \text{при } L \geqslant d\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}; \\ 1, & \text{при } L \leqslant d\sqrt{1 + \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}. \end{cases}$$

3.19. а) $p = 1 - \left(\frac{19}{20}\right)^2 = 0{,}0975$; б) x, y, z — координаты точек излома.

$$\Omega = \{(x, y, z)\colon 0 \leqslant x \leqslant 200, 0 \leqslant y \leqslant 200, 0 \leqslant z \leqslant 200\};$$
$$A = \{(x, y, z)\colon |x - y| \leqslant 10, |x - z| \leqslant 10, |y - z| \leqslant 10\}.$$
$$\mathrm{P}(A) = 1 - \left(\frac{180}{200}\right)^3 = 0{,}0271.$$

3.20. $p = \frac{2\pi R^2(1 - \cos\alpha)}{4\pi R^2} = \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

3.21. $p = \left(R^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi \, d\varphi \, d\psi\right) : \left(2R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi \, d\varphi \, d\psi\right) = 0{,}21.$

3.22. x — расстояние от середины иглы до ближайшей линии; φ — угол между линией и иглой.

$$\Omega = \{x, y)\colon 0 \leqslant x \leqslant 0{,}5L, 0 \leqslant \varphi < \pi\};$$

$$A = \{(x, y)\colon x \leqslant 0{,}5l \sin\varphi\}.$$

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2l}{L\pi}.$$

3.23. $\Omega = \{(a, b)\colon |a| \leqslant n, |b| \leqslant n\}$.

а) $a = \{(a, b)\colon b^2 \leqslant a^2\}$.

$$\mathrm{p}(A) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{2mn} \int\limits_0^n a^2 da = \frac{1}{2} + \frac{n^2}{6m}, & \text{при } m \geqslant n^2; \\ 1 - \frac{1}{2mn} \int\limits_0^m \sqrt{b}\, db = 1 - \frac{\sqrt{m}}{3n}, & \text{при } m \leqslant n^2. \end{cases}$$

Корни будут положительными, если $a \leqslant 0$, $b \geqslant 0$; $p = \frac{n^2}{12m}$ при $m \geqslant n^2$, $p = \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{m}}{6n}$ при $m \leqslant n^2$.

б) $A = \{(a, b)\colon a \leqslant 0, a^3 + b^2 \leqslant 0\}$.

$$\mathrm{p}(A) = \begin{cases} \frac{1}{2mn} \int\limits_0^n a^{\frac{3}{2}} da = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{5m}, & \text{при } n^3 \leqslant m^2; \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2mn} \int\limits_0^m b^{\frac{2}{3}} db = 0{,}5(1 - 0{,}6\, \frac{m^{\frac{2}{3}}}{n}), & \text{при } n^3 \geqslant m^2. \end{cases}$$

3.24. Пусть A и B — положения движущейся точки и центра круга, $\vec{u}$ и $\vec{v}$ — их векторы скоростей, r — расстояние AB. Из точки B проводим окружность радиуса R. Считаем $\beta > 0$, если вектор $\vec{v}$ лежит левее линии AB, $-\pi \leqslant \beta \leqslant \pi$. Из точки A проводим касательные к окружности радиуса R. Точка A попадет в круг, если вектор относительной скорости попадет в получившийся сектор с углом при вершине 2ε, $\varepsilon = \arcsin \frac{R}{r}$. Из точки A проводим вектор $-\vec{v}$. Пусть точка O — конец этого вектора. Из точки O проводим окружность, радиус которой по величине совпадает со скоростью точки A. Точка A попадет в круг только в том случае, если вектор $\vec{u} - \vec{v}$ лежит в секторе. Пусть $u > v$. Тогда искомая вероятность будет (рис. 13) $p = \frac{\alpha}{2\pi}$. Для определения α положим $\delta = \angle OCA$, $x = \angle OCD$, $y = \angle ODC$, $\gamma = \angle ADO$. Тогда $\alpha = 2\varepsilon + \delta - \gamma$. Используя равенства $\frac{\sin\gamma}{v} = \frac{\sin(\beta - \varepsilon)}{u}$ и $\frac{\sin\delta}{v} = \frac{\sin(\beta+\varepsilon)}{u}$, получаем

$$p = \frac{1}{2\pi}\left\{2\varepsilon + \arcsin\left[\frac{v}{u}\sin(\beta + \varepsilon\right] - \arcsin\left[\frac{v}{u}\sin(\beta - \varepsilon)\right]\right\}.$$

Данная формула справедлива при любом β. При $v > u$ задача решается аналогично, но при этом нужно рассматривать несколько случаев: 1) $|\beta| \geqslant \varepsilon + \frac{\pi}{2}$; $p = 0$; 2) $\frac{\pi}{2} + \varepsilon \geqslant |\beta| \geqslant \varepsilon$:

а) при $u \leqslant v \sin(|\beta| - \varepsilon)$ будет $p = 0$;

б) при $v\sin(|\beta| - \varepsilon) \leqslant u \leqslant v\sin(|\beta| + \varepsilon$ имеем $p = \frac{1}{\pi}\arccos\left[\frac{v}{u}\sin(|\beta| - \varepsilon\right]$;

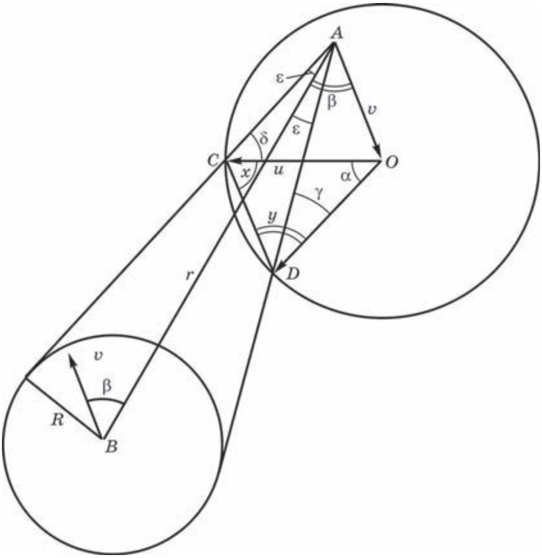

Рис. 13

в) при $u \geqslant v\sin(|\beta|+\varepsilon)$ будет

$$p = \frac{1}{\pi}\left\{\arccos\left[\frac{v}{u}\sin(|\beta|-\varepsilon\right] - \arccos\left[\frac{v}{u}\sin(|\beta|+\varepsilon)\right]\right\}.$$

3) $|\beta| \leqslant \varepsilon$: а) при $u \leqslant v\sin(\varepsilon-|\beta|)$ будет $p=1$; б) при $v\sin(\varepsilon - |\beta|) \leqslant u \leqslant v\sin(\varepsilon+|\beta|)$ имеем $p = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos\left[\frac{v}{u}\sin(\varepsilon-|\beta|)\right]$; в) при $u > v\sin(\varepsilon+|\beta|)$ будет

$$p = 1 - \frac{1}{\pi}\left\{\arccos\left[\frac{v}{u}\sin(\varepsilon-|\beta|\right] + \arccos\left[\frac{v}{u}\sin(\varepsilon+|\beta|)\right]\right\}.$$

§ 4. Условная вероятность. Вероятность произведения событий

4.1. $p = 1 - 0{,}3\cdot 0{,}2 = 0{,}94.$

4.2. $p = 1 - \prod_{k=1}^{n}(1-p_k).$

4.3. $p = (1-0{,}2)^3 = 0{,}512.$

4.4. $0{,}251.$

4.5. $p = 1-(1-0{,}3)(1-0{,}2^2) = 0{,}328.$

4.6. $p(1-p)^{n-1}$ при $n<N$; $p_N = (1+p)^{N-1}$.

4.7. $1-0{,}5^n \geqslant 0{,}9$; $n \geqslant 4$.

4.8. $1-(1-p)^4 = 0{,}5$; $p \approx 0{,}159$.

4.9. $p = \left(\frac{S_\Delta}{\pi R^2}\right)^4 = \frac{729}{256\pi^3} = 0{,}029.$

4.10. $p = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{5^2}\right)\left(1-\frac{1}{7^2}\right)\left(1-\frac{1}{11^2}\right)\ldots = \frac{6}{\pi^2} \approx 0{,}608$[1].

4.11. Из несовместности событий следует $\mathrm{P}(A/B) = 0$ и $\mathrm{P}(B/A) = 0$, т. е. события зависимы.

4.12. $p_1 p_2$.

4.13. $p = 0{,}7 \cdot 0{,}9^{12} = 0{,}197$.

4.14. $p = 0{,}7^2(1-0{,}6^2) = 0{,}314$.

4.15. 0,75.

4.16. $p_1 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 \approx 0{,}45$; $p_2 = 0{,}7^2 \cdot 0{,}8 \approx 0{,}39$.

4.17. а) $0{,}1 = (p_1p_3)^n$, т. е. $n = \frac{-1}{\lg p_1 p_3}$; б) $p = 1-(1-p_1p_3)^3(1-p_2p_4)^3$.

4.18. Следует из равенства $\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A/B)$.

4.19. $p = 2\left(\frac{k}{n}\right)^2\left[1-\left(\frac{k}{n}\right)^2\right]$.

4.20. $p = \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{360}$.

4.21. а) $p = 1-\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{8} = 0{,}3$; б) $p = 1-\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3} = 0{,}6$.

4.22. $p = 1-\frac{(n-m)!(n-k)!}{n!(n-m-k)!}$.

4.23. а) $p = 1-\frac{39\ 997!39\ 000!}{40\ 000!38\ 997!} \approx 1-\left(\frac{39}{40}\right)^3 = 0{,}073$; б) $0{,}5 \geqslant \frac{(40\ 000-N)(39\ 999-N)(39\ 998-N)}{40\ 000\cdot 39\ 999\cdot 39\ 998} \approx \left(\frac{40\ 000-N}{40\ 000}\right)^3$; $N \geqslant 8252$.

4.24. $p = \frac{n}{n}\cdot\frac{(n-1)}{n}\ldots\frac{(n-m+1)}{n} = \frac{(n-1)!}{n^{m-1}(n-m)!}$.

4.25. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(C) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(A/B) = \mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(C/A) = \mathrm{P}(A/C) = \mathrm{P}(B/C) = \mathrm{P}(C/B) = \frac{1}{2}$, т. е. события попарно независимы; $\mathrm{P}(A/BC) = \mathrm{P}(B/AC) = \mathrm{P}(C/AB) = 1$, т. е. события не являются независимыми в совокупности.

4.26. Нет (см., например, задачу 4.25).

4.27. $p = \frac{n!}{n^n}$.

4.28. $p = 2\frac{n}{2n}\cdot\frac{n}{(2n-1)}\cdot\frac{(n-1)(n-1)}{(2n-2)(2n-3)}\ldots\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{2(n!)^2}{(2n)!}$.

4.29. $p = \frac{C_5^1C_{10}^2}{C_{15}^3}\,\frac{C_4^1C_8^2}{C_{12}^3}\,\frac{C_3^1C_6^2}{C_9^3}\,\frac{C_2^1C_4^2}{C_6^2}\,1 = \frac{3^5\,5!10!}{15!} = 0{,}081$.

4.30. $p = \frac{C_n^1C_m^1}{C_{n+m}^2}\,\frac{C_{n-1}^1C_{m-1}^1}{C_{n+m-2}^2}\ldots\frac{1\cdot C_{m-(n-1)}^1}{C_{m-n+2}^2} = \frac{2^n n!\,m!}{(n+m)!}$.

4.31. $p = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(n-1)}\ldots\frac{1}{[n-(k-1)]} = \frac{(n-k)!}{n!}$.

4.32. $p = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\ldots\frac{99}{100} = \frac{100!}{2^{100}(50!)^2} \approx 0{,}08$.

4.33. Пусть в очереди с деньгами пятирублевого достоинства не n, а $n+1$ человек. Событие A — один из них первый в очереди, а событие B — все время будет запас пятирублевок для сдачи. $\mathrm{P}(A) = \frac{n+1}{n+1+m}$; $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B) = \frac{n+1-m}{n+1+m}$ (см. задачу 2.29); $P = \mathrm{P}(B/A) = \frac{n+1-m}{n+1}$.

4.34. $P = \frac{n+1-2m}{n+1+m} : \frac{n+1}{n+1+m} = \frac{n+1-2m}{n+1}$.

[1]Решение см. [96], стр. 314-315, задача 90.

4.35. Событие A — последнее из k изделий лучшее во всей совокупности, событие B — это изделие лучшее среди k выбранных; $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{l}$; $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{k}$; $P = \mathrm{P}(A/B) = \frac{\mathrm{P}(AB)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{\mathrm{P}(A)}{\mathrm{P}(B)} = \frac{k}{l}$.

§ 5. Вероятность суммы событий

5.1. 0,03. **5.2.** 0,55. **5.3.** $p_k = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}$. **5.4.** $2\left(\frac{r}{R}\right)^2$. **5.5.** $\frac{11}{26}$.

5.6. $p = 1 - \frac{1}{C_{17}^6}(C_{10}^6 + C_{10}^5 C_5^1 + C_{10}^5 C_2^1 + C_{10}^4 C_5^2 + C_{10}^4 C_5^1 C_2^1 + C_{10}^3 C_5^3) \approx \approx 0{,}4$.

5.7. $\mathrm{P}(A\overline{B}) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(AB)$; $\mathrm{P}(\overline{B}/\overline{A}) = 1 - \frac{\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB)}{1 - \mathrm{P}(A)}$.

5.8. $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(\overline{A}B) = [\mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(\overline{A})]\mathrm{P}(B/A) = \mathrm{P}(B/A)$.

5.9. $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B\overline{A}) \geqslant \mathrm{P}(A)$.

5.10. 0,323. **5.11.** 0,5. **5.12.** npq^{m-1}.

5.13. События A и B — число не делится на 2 и на 3; $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathrm{P}(B) = \frac{2}{3}$.

а) $\mathrm{P}(AB) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A/B) = \frac{1}{3}$.

б) $\mathrm{P}(A + B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

5.14. A — первый билет имеет равные суммы, B — второй.

а) $\mathrm{P}(A + B) = 2\mathrm{P}(A) = 0{,}1105$;

б) $\mathrm{P}(A + B) = 2\mathrm{P}(A) - \mathrm{P}^2(A) = 0{,}1075$.

5.15. Из $\mathrm{P}(A+B) \leqslant 1$ следует $\mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(AB) \leqslant \mathrm{P}(\overline{A})$ или $\mathrm{P}(A/B) \geqslant 1 - \frac{\mathrm{P}(\overline{A})}{\mathrm{P}(B)} = \frac{a+b-1}{b}$.

5.16. Из $Z = X + Y$ следует: $Z \leqslant X + |Y|$, $Z \geqslant X - |Y|$, $\mathrm{P}(Z \leqslant 11) \geqslant \mathrm{P}(X \leqslant 10$ и $|Y| \leqslant 1) = \mathrm{P}(X \leqslant 10) + \mathrm{P}(|Y| \leqslant 1) - \mathrm{P}(X \leqslant 10$ или $|Y| \leqslant 1) \geqslant 0{,}9 + 0{,}95 - 1 = 0{,}85$, $\mathrm{P}(Z \geqslant 9) \geqslant 0{,}05$, $\mathrm{P}(Z \leqslant 9) \leqslant 0{,}95$.

5.17. 0,44 и 0,35. **5.18.** $p(2-p)$. **5.19.** $p_B = 0{,}1 + 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}316$; $p_C = 0{,}9(0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4) = 0{,}3816$. **5.20.** $p = \frac{1}{n}\,\frac{1}{(n-1)} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{n} = \frac{n^2 - n + 1}{n^2(n-1)}$. **5.21.** $p_B = 0{,}797$, $p_C = 0{,}199$.

5.22. $G(m + n) = G(m) + [1 - G(m)]G(n/m)$;

$G(n/m) = \frac{G(n+m) - G(m)}{1 - G(m)}$.

5.23. $p_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \ldots = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \ldots = \frac{1}{3}$. Другое решение: $p_1 + p_2 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}p_1$, т. е. $p_1 = \frac{2}{3}$, $p_2 = \frac{1}{3}$.

5.24. $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}p_1$, $p_3 = \frac{1}{2}p_2$, т. е. $p_1 = \frac{4}{7}$, $p_2 = \frac{2}{7}$, $p_3 = \frac{1}{7}$.

5.25. $p + q = 1$, $q = \frac{1}{2}p$; $p = \frac{2}{3}$.

5.26. $p = \frac{n}{n+m} + \left(\frac{m}{n+m}\right)^2 p$; $p = \frac{n+m}{n+2m}$.

5.27. $p = 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}7p$; $p = 0{,}455$.

5.28. Воспользоваться условием задачи 1.12.

5.29. Подсчитывая количество одинаковых членов, получаем:

$$\mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = C_n^1 \mathrm{P}(A_1) - C_n^2 \mathrm{P}(A_1 A_2) + C_n^3 \mathrm{P}(A_1 A_2 A_3) - \ldots$$
$$+ (-1)^{n-1} \mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right).$$

5.30. Используя равенство $\prod_{k=1}^{n} A_k = \overline{\sum_{k=1}^{n} \overline{A_k}}$ из задачи 1.12 и общую формулу для вероятности суммы событий, получаем

$$\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{b} A_k\right) = 1 - \left\{\sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}(\overline{A_k} - \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^{n} \mathrm{P}(\overline{A}_{k\ j}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{n-2} \sum_{j=k+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} \mathrm{P}(\overline{A}_k \, \overline{A}_j \, \overline{A}_i) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{n} \overline{A_k}\right)\right\}.$$

Но согласно задаче 1.12 $\prod_{k=1}^{s} \overline{A}_k = \overline{\sum_{k=1}^{s} A_k}$, поэтому при любом s $\mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{s} \overline{A_k}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(\sum_{k=1}^{s} A_k\right)$. Учитывая еще равенство $1 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n = 0$, приходим к указанной в условии задачи формуле.

5.31. Воспользоваться равенством $\mathrm{P}\left(\overline{A_0} \prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) - \mathrm{P}\left(\prod_{k=0}^{n} A_k\right)$ и формулой из условия задачи 5.30.

5.32. $p = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}$.

5.33. Вероятность, что m человек из n займут свои места, есть $C_n^m \frac{(n-m)!}{n!} = \frac{1}{m!}$. Вероятность того, что оставшиеся $n - m$ человек будут сидеть не на своих местах, равна $\sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$; $p = \frac{1}{m!} \sum_{k=1}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}$.

5.34. Событие A_j — в j-й вагон не войдет ни один пассажир, $\mathrm{P}(A_j) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$, $\mathrm{P}(A_j A_i) = \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k$, $\mathrm{P}(A_j A_i A_s) = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^k$ и т. д. Используя формулу из ответа к задаче 5.29, получаем:

$$p = 1 - C_n^1 \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k + C_n^2 \left(1 - \frac{2}{n}\right)^k - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)^k.$$

5.35. Первый игрок выигрывает в следующих n случаях: 1) из m партий не проигрывает ни одной; 2) из m партий проигрывает одну, но $(m+1)$-ю партию выигрывает; 3) из $m+1$ партий проигрывает две, но $(m+2)$-ю партию выигрывает; $\ldots$; n) из $m+n-2$ партий проигрывает $n-1$, а затем $(m+n-1)$-ю выигрывает.

$$P = p^m (1 + C_m^1 q + C_{m+1}^2 q^2 + \ldots + C_{m+n-2}^{n-1} q^{n-1}).$$

5.36. Ставка делится пропорционально отношению $\frac{p_1}{p_2}$ вероятностей выигрыша для первого и второго игроков;

$$p_1 = \frac{1}{2^m}\left(1 + \frac{1}{2} C_m^1 + \frac{1}{2^2} C_{m+1}^2 + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} C_{m+n-2}^{n-1}\right),$$

$$p_2 = \frac{1}{2^n}\left(1 + \frac{1}{2} C_n^1 + \frac{1}{2^2} C_{n+1}^2 + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} C_{m+n-2}^{m-1}\right)$$

5.37. Событие A — первый сказал правду; B — четвертый передал правильную информацию; $p = \mathrm{P}(A/B) = \frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B/A)}{\mathrm{P}(B)}$. Пусть p_k — вероятность того, что (с учетом двойных искажений) k-й лгут передал правильную информацию; $p_1 = \frac{1}{3}$, $p_2 = \frac{5}{9}$, $p_3 = \frac{13}{27}$, $p_4 = \frac{41}{81}$, $\mathrm{P}(A) = p_1$, $\mathrm{P}(B/A) = p_3$, $\mathrm{P}(B) = p_4$, $p = \frac{13}{41}$.

5.38. Заменяем выпуклый контур многоугольником с n сторонами. Событие A — будет пересечение многоугольника, A_{ij} — пересечение по i-й и j-й сторонам; $A = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} A_{ij}$, $p' = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} p_{ij}$, где $p_{ij} = \mathrm{P}(A_{ij})$; $p' = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^*$, $p_k^* = \sum_{i=1}^{n} p_{ki} - p_{kk}$ — вероятность пересечения параллельных линий k-й стороной длины l_k. Из решения задачи Бюффона 3.22 $p_k^* = \frac{2l_k}{L\pi}$; $p' = \frac{1}{L\pi}\sum_{k=1}^{n} l_k$. Так как вероятность не зависит от числа и длин сторон, то $p = \frac{s}{L\pi}$.

5.39. $p = \frac{1}{C_n^s}\sum_{l=k+1}^{m} C_m^l C_{n-m}^{s-l} = 1 - \frac{1}{C_n^s}\sum_{l=0}^{k} C_m^l C_{n-m}^{s-l}$.

5.40. Событие A_k — затопление k-го отсека ($k = 1, 2, \ldots, n$).

$$P = \mathrm{P}\left(\prod_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k\mathrm{P}\left(\sum_{j=1}^{k} A_j\right) = \\ = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_n^k[1-(1-kp)^m].$$

§ 6. Формула полной вероятности

6.1. $p = \frac{11}{12}\cdot\frac{1}{11} + \frac{1}{12}\cdot\frac{2}{11} = \frac{13}{132}$.

6.2. $P = \frac{3}{4}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{9} = \frac{7}{18}$.

6.3. H_1 — среди извлеченных шаров нет белых; H_2 — один белый; H_3 — оба белых; $p = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1}{n_1+m_1} + \frac{m_2}{n_2+m_2}\right)$.

6.4. H_{j1} — из j-й урны извлекается белый шар; H_{j2} — из j-й урны извлекается черный шар; $\mathrm{P}(H_{11}) = \frac{m}{m+k}$, $\mathrm{P}(H_{12}) = \frac{k}{m+k}$, $\mathrm{P}(H_{21}) = \frac{m}{(m+k)}\frac{(m+1)}{(m+k+1)} + \frac{k}{(m+k)}\frac{m}{(m+k+1)} = \frac{m}{m+k}$, $\mathrm{P}(H_{22}) = \frac{k}{m+k}$. Считаем $\mathrm{P}(H_{j1}) = \frac{m}{m+k}$, $\mathrm{P}(H_{j2}) = \frac{k}{m+k}$. Тогда $\mathrm{P}(H_{j+1,1}) = \frac{m}{m+k}$. Поэтому $p = \frac{m}{m+k}$.

6.5. 0,7. **6.6.** $\frac{2}{9}$. **6.7.** 0,225.

6.8. Событие A_s — переход случайной точки из B_1 в B_4 не более, чем за s шагов, A — когда-либо. Гипотезы H_1 и H_2 — за первый шаг переход из B_1 в B_2 и B_3. $\mathrm{P}(A_3) = p_1(q_2 + p_2p_3) + q_1(p_3 + q_2q_3) = 1 - p_2q_3$; $\mathrm{P}(A_4) = p_1(q_2 + p_2p_3 + p_2q_2q_3) + q_1(p_3 + q_2q_3 + p_2p_3q_3) = 1 - p_2q_3(p_1p_2 + q_1q_3)$; $\mathrm{P}(A) = p_1\mathrm{P}(A/H_1) + q_1\mathrm{P}(A/H_2)$, $\mathrm{P}(A/H_2) = p_3 + q_3\mathrm{P}(A/H_1) = 1$, $\mathrm{P}(A/H_1) = q_2 + p_2[p_3 + q_3\mathrm{P}(A/H_1)] = 1$, $\mathrm{P}(A) = 1$.

6.9. 0,332.

6.10. Событие A — получение контакта. Гипотеза H_k — на k-й полосе возможен контакт ($k = 1, 2$). Пусть x — положение центра отверстия, y — точка приложения контакта. $\mathrm{P}(H_1) = \mathrm{P}(15 \leqslant x \leqslant 45) = 0{,}3$, $\mathrm{P}(H_2) = \mathrm{P}(60 \leqslant x \leqslant 95) = 0{,}35$. Контакт возможен на первой полосе, если:

при $25 \leqslant x \leqslant 35$ $\quad |x-y| \leqslant 5$; при $15 \leqslant x \leqslant 25$ $\quad 20 \leqslant y \leqslant x+5$; при $35 \leqslant x \leqslant 45$ $\quad x-5 \leqslant y \leqslant 40$. Поэтому $\mathrm{P}(A/H_1) = \frac{1}{15}$. Аналогично, $\mathrm{P}(A/H_2) = \frac{1}{14}$; $p = 0{,}045$.

6.11. Событие A — поступление s вызовов за промежуток $2t$. Гипотеза H_k $(k = 0, 1, \ldots)$ — за первый промежуток времени поступило k вызовов, $\mathrm{P}(H_k) = P_k(t)$. Вероятность поступления $s-k$ вызовов за второй промежуток будет $\mathrm{P}(A/H_k) = P_{s-k}(t)$, $P_s(2t) = \sum_{k=0}^{s} P_k(t)P_{s-k}(t)$.

6.12. Гипотеза H_k — имеется k бракованных лампочек, $\mathrm{P}(H_k) = \frac{1}{6}$ $(k = 0, 1, \ldots, 5)$. Событие A — все 100 лампочек исправные, $\mathrm{P}(A/H_k) = \frac{C_{1000-k}^{100}}{C_{1000}^{100}} \approx 0{,}9^k$ $(k = 0, 1, \ldots, 5)$; $p = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} \mathrm{P}(A/H_k) \approx 0{,}78$.

6.13. Гипотеза H_k — в урне было k белых шаров $(k = 0, 1, \ldots, n)$; событие A — из урны будет извлечен белый шар, $\mathrm{P}(H_k) = \frac{1}{n+1}$, $\mathrm{P}(A/H_k) = \frac{k+1}{n+1}$; $p = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

6.14. Гипотеза H_k $(k = 0, 1, 2, 3)$ — для первой игры взято k новых мячей. Событие A — для второй игры взято три новых мяча; $\mathrm{P}(H_k) = \frac{C_9^k C_6^{s-k}}{C_{15}^3}$, $\mathrm{P}(A/H_k) = \frac{C_{9-k}^3}{C_{15}^3}$; $p = 0{,}089$.

6.15. $p = \frac{2}{7} \cdot \frac{9}{14} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} = \frac{57}{98}$.

6.16. $p = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} + \left(\frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29} + \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29}\right) \cdot \frac{24}{28} = \frac{190}{203}$.

6.17. $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(AB) + \mathrm{P}(A\overline{B}) = \mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A/B) + \mathrm{P}(\overline{B})\mathrm{P}(A/\overline{B})$. Равенство возможно только при $A{=}V$, где V — невозможное событие.

6.18. Число извлечений из первой урны $m = 13$. При этом $p \approx 0{,}67$.

6.19. В первый район 8 вертолетов; $p \approx 0{,}74$.

§ 7. Формула Байеса

7.1. $p = \frac{0{,}1 \cdot 5/6}{0{,}9 \cdot 1/2 + 0{,}1 \cdot 5/6} = \frac{5}{32}$.

7.2. $p = 1 : \left[1 + \frac{k_2 m_2 (m_1 + n_1)}{k_1 m_1 (m_2 + n_2)}\right]$.

7.3. Гипотезы H_1 — изделие стандартное, H_2 — нестандартное. Событие A — изделие признается пригодным; $\mathrm{P}(H_1) = 0{,}96$, $\mathrm{P}(H_2) = 0{,}04$, $\mathrm{P}(A/H_1) = 0{,}98$, $\mathrm{P}(A/H_2) = 0{,}05$, $\mathrm{P}(A) = 0{,}9428$; $p = \mathrm{P}(H_1/A) = 0{,}998$.

7.4. Гипотезы H_k $(k = 0, 1, \ldots, 5)$ — имеется k бракованных изделий. Событие A — извлекается бракованное изделие, $\mathrm{P}(H_k) = \frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A/H_k) = \frac{k}{5}$, $\mathrm{P}(H_k/A) = \frac{\mathrm{P}(H_k)\mathrm{P}(A/H_k)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{k}{15}$. Наиболее вероятна гипотеза H_5, т. е. пять бракованных изделий.

7.5. $\mathrm{P}(H_0/A) = \frac{1}{6 \cdot 0{,}78} = 0{,}214$ (см. задачу 6.12).

7.6. Событие A — выигрыш игрока D; гипотезы H_1 и H_2 — противником был игрок B и C; $\mathrm{P}(H_k) = \frac{1}{2}$; $\mathrm{P}(A/H_1) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}5 = 0{,}327$; $\mathrm{P}(A/H_2) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}0992$; $\mathrm{P}(A) = 0{,}2131$; $\mathrm{P}(H_1/A) = 0{,}767$; $\mathrm{P}(H_2/A) = 0{,}233$.

7.7. Из второй урны.

7.8. Событие A — попали двое; H_1 — третий стрелок промахнулся, H_2 — попал. $\mathrm{P}(H_1) = \frac{1}{3}$, $\mathrm{P}(H_2) = \frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A/H_1) = \frac{3}{5}$, $\mathrm{P}(A/H_2) = \frac{7}{20}$, $\mathrm{P}(A) = \frac{13}{30}$; $p = \mathrm{P}(H_1/A) = \frac{6}{13}$.

7.9. Событие A — вепрь убит одной пулей, $\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}(H_k)$. Гипотеза H_k — попал только k-й стрелок ($k = 1, 2, 3$); $\mathrm{P}(H_1) = 0{,}048$, $\mathrm{P}(H_2) = 0{,}128$, $\mathrm{P}(H_3) = 0{,}288$, $\mathrm{P}(H_1/A) = 0{,}103$, $\mathrm{P}(H_2/A) = 0{,}277$, $\mathrm{P}(H_3/A) = 0{,}620$.

7.10. В четвертую часть.

7.11. $p = \frac{n^k}{1+2^k+\ldots+n^k}$.

7.12. События: A_1 — первый близнец — мальчик; A_2 — второй — тоже мальчик. Гипотезы: H_1 — оба мальчика; H_2 — мальчик и девочка; $\mathrm{P}(A_1) = a + \frac{1}{2}[1 - (a+b)]$; $p = \mathrm{P}(A_2/A_1) = \frac{2a}{1+a-b}$.

7.13. События A_k и B_k: k-м родился мальчик и k-й родилась девочка ($k = 1, 2$); $\mathrm{P}(A_1A_2) + \mathrm{P}(B_1B_2) + 2\mathrm{P}(A_1B_2) = 1$, $\mathrm{P}(A_1A_2 + B_1B_2) = 4P(A_1B_2)$. Поэтому $P(A_1A_2)+\mathrm{P}(B_1B_2) = \frac{2}{3}$, $\mathrm{P}(A_1B_2) = \frac{1}{6}$, $\mathrm{P}(A_1A_2) = 0{,}51 - \frac{1}{6}$; $p = \mathrm{P}(A_1/A_2) = \frac{103}{153}$.

7.14. $\frac{5}{11}$.

7.15. Одно появление.

7.16. Гипотезы: H_1 — второй студент учится третий год; H_2 — второй год. Событие A — второй студент учится дольше первого. $\mathrm{P}(H_1) = \frac{n_3}{n-1}$, $\mathrm{P}(H_2) = \frac{n_2}{n-1}$, $\mathrm{P}(A/H_1) = \frac{n_1+n_2}{n-1}$, $\mathrm{P}(A/H_2) = \frac{n_1}{n-1}$, $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{(n-1)^2}[n_3(n_1+n_2) + n_2n_1]$; $p = \mathrm{P}(H_1/A) = \dfrac{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}+\frac{1}{n_3}}$.

7.17. 1/4 и 2/11.

7.18. Гипотезы H_k ($k = 0, 1, \ldots, 8$) — из 8 деталей k штук исправных. Событие A — из взятых четырех деталей три исправные; $\mathrm{P}(H_k) = \frac{1}{9}$, $\mathrm{P}(H_j/A) = 0$ ($j = 0, 1, 2, 8$), $\mathrm{P}(H_k/A) = \dfrac{C_k^3 C_{8-k}^1}{C_8^4}$ ($k = 3, 4, 5, 6, 7$), $\mathrm{P}(A) = \frac{1}{5}$; $p = \mathrm{P}(H_4/A) \cdot \frac{3}{4} + \mathrm{P}(H_5/A) \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{14}$.

7.19. Событие A — выход прибора из строя. Гипотезы: H_0 — исправны оба блока, H_1 — отказал первый блок, H_2 — второй, H_3— отказали оба блока; $\mathrm{P}(A) = 1 - p_1p_2$; $\mathrm{P}(H_1/A) = \frac{(1-p_1)p_2}{1-p_1p_2}$; $\mathrm{P}(H_2/A) = \frac{p_1(1-p_2)}{1-p_1p_2}$; $\mathrm{P}(H_3/A) = \frac{(1-p_1)(1-p_2)}{1-p_1p_2}$.

§ 8. Независимые испытания с двумя возможными исходами

8.1. а) $0{,}9^4 \approx 0{,}656$; б) $0{,}9^4 + 4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 \approx 0{,}948$; в) $1 - 6 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 \approx 0{,}951$.

8.2. а) $C_{10}^5 \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256}$; б) $1 - \frac{1}{2^{10}}(1 + C_{10}^1 + C_{10}^2 + C_{10}^1 + 1) = \frac{957}{1024}$.

8.3. а) $p = C_{200}^3 \cdot 0{,}01^3 \cdot 0{,}99^{197} \approx \frac{4}{3}\,e^{-2} \approx 0{,}18$; б) $p \approx 0{,}09$.

8.4. 0,17. **8.5.** 0,64. **8.6.** а) 0,163; б) 0,353.

8.7. $p = 1-(0{,}8^4+4\cdot0{,}8^3\cdot0{,}2+5\cdot0{,}8^2\cdot0{,}2^2+2\cdot0{,}8\cdot0{,}2^3)\cdot0{,}7^2\cdot0{,}6 = 0{,}718$.

8.8. $W_n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^m\right] = 1 - \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^n$.

8.9. $p = 1 - (0{,}7^4 + 4 \cdot 0{,}7^3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4) = 0{,}595$.

8.10. Гипотезы: H_1 — стрелял первый стрелок, H_2 — второй. Событие A — произошло 116 попаданий. $\mathrm{P}(H_1/A) \approx 2\mathrm{P}(H_2/A) \approx \frac{2}{3}$.

8.11. См. таблицу 70.

Таблица 70

p	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
$R_{10;1}$	0,0956	0,4013	0,6513	0,8926	0,9718	0,9940	0,9990	0,999

8.12. 0,2. **8.13.** 0,73.

8.14. $R_{n;1} \approx 1 - e^{-0{,}02n}$ $(n > 10)$. См. таблицу 71.

Таблица 71

n	1	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$R_{n;1}$	0,02	0,18	0,33	0,45	0,55	0,63	0,70	0,75	0,80	0,84	0,86

8.15. $p = 1 - 0{,}95^{10} = 0{,}4$. **8.16.** $p = 1 - 0{,}9^5 = 0{,}41$.

8.17. $p = p_{10}^3 + 3p_{10}^2(p_9 + p_8) = 3p_{10}p_9^2 = 0{,}0935$.

8.18. а) $p = \sum_{k=0}^{3} P'_{3;k}P''_{3;k} = 0{,}321$; б) 0,243. **8.19.** 0,488.

8.20. Событие A — изготовлено два хороших изделия. Гипотеза H_k — изготовил k-й $(k = 1, 2, 3)$; $p = \sum_{k=1}^{3} \mathrm{P}(H_k/A)\mathrm{P}(A/H_k) \approx 0{,}22$.

8.21. а) $p = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0{,}794$; б) $3p^4 + 4p^3 + \frac{1}{2} = 0$; $p = 0,614$.

8.22. $P_I = p^4 + C_4^1 p^4 q + C_5^2 p^4 q^2 + C_6^3 p^3 q^3 (p^2 + 2p^2 q) = 0{,}723$; $P_{II} = 0{,}277$.

8.23. $p = \frac{1}{2^{2n-k}}\, C_{2n-k}^{n}$. **8.24.** 0,784. **8.25.** По 200 Вт ($R_{6;1} = 0{,}394$; $R_{10;2} = 0{,}117$).

8.26. 0,64. **8.27.** 0,2816.

8.28. $P_m = nC_{m-1}^{k-1} p^k q^{m-k}$ при $m \geqslant k$; $P_m = 0$ при $m < k$.

8.29. $p = \sum_{m=k}^{2k-1} P_m = np^k \sum_{m=k}^{2k-1} C_{m-1}^{k-1} q^{m-k}$.

8.30. Должно быть $0{,}1 \geqslant 0{,}8^n \left[1 + \frac{n}{4} + \frac{n(n-1)}{32}\right]$; $n \geqslant 25$.

8.31. Должно быть $0{,}99 \cdot 5^{10} = 4^{10} + C_{10}^1 4^9 + \ldots + C_{10}^n 4^{10-n}$; $n = 5$.

8.32. $P_{4;0} = 0{,}3024$, $P_{4;1} = 0{,}4404$, $P_{4;2} = 0{,}2144$, $P_{4;3} = 0{,}0404$, $P_{4;4} = 0{,}0024$.

8.33. 0,26. **8.34.** 0,16. **8.35.** $\frac{95}{144}$. **8.36.** $n = 29$. **8.37.** $n > 10$.

8.38. $n \geqslant 16$. **8.39.** 8. **8.40.** 8. **8.41.** $\mu = 4$; $p = 0{,}251$.

8.42. $\mu_+ = 3$, $\mu_- = 1$; $p = \frac{32}{81}$. **8.43.** 24 или 25.

8.44. Событие A — гибель корабля. Гипотеза H_k — в корабль попало k торпед $(k = 0, 1, \ldots, n)$; $\mathrm{P}(H_k) = C_n^k p^k q^{n-k}$; $\mathrm{P}(A/H_0) = \mathrm{P}(A/H_1) = 0$; $\mathrm{P}(A/H_k) = 1 - m\left(\frac{1}{m}\right)^k$ при $k \geqslant 2$; $\mathrm{P}(A) = \sum_{k=2}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}\left(1 - \frac{1}{m^{k-1}}\right)$.

8.45. $P = 1 - C_k^l \left(\sum_{r=s+1}^{n} C_n^r q^r p^{n-r}\right)^l \left(\sum_{r=0}^{s} C_n^r q^r p^{n-r}\right)^{k-l}$, где s — целая часть $\frac{n}{2}$.

§ 9. Независимые испытания с числом возможных исходов, большим двух. Рекуррентные уравнения для вероятностей

9.1. $p = P_{5;2,2,1} + 2P_{5;3,2,0} = \frac{50}{243}$.

9.2. $p = P_{3;1,1,1} + P_{3;2,1,0} + P_{3;1,2,0} = 0{,}245$.

9.3. а) $p = \frac{9!}{(3!)^3} \cdot \frac{1}{3^9} = 0{,}085$; б) $p = 6\,\frac{9!}{4!3!2!} \cdot \frac{1}{3^9} = 0{,}385$.

9.4. $p = \frac{10!}{6!3!}\,0{,}15^6 0{,}22^3 \cdot 0{,}13 \approx 0{,}13 \cdot 10^{-4}$.

9.5. а) $p = \frac{12!}{2^6 6^{12}} = 0{,}00344$; б) $p = \frac{6!}{2} \cdot \frac{12!}{2!2!3!4!} \cdot \frac{1}{6^{12}} = 0{,}138$.

9.6. а) $p_I = \frac{l^{l_1} m^{m_1} n^{n_1}}{(l+m+n)^{l_1+m_1+n_1}}$; б) $p = 6p_I$; в) $p = \frac{(l_1+m_1+n_1)!}{l_1!m_1!n_1!} \times$ $\times \frac{l^{l_1} m^{m_1} n^{n_1}}{(l+m+n)^{l_1+m_1+n_1}}$.

9.7. $P = 1 - p_0^n - \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^n C_n^s p_j^s p_0^{n-s}$.

9.8. $p = p_n$, $p_k = p_{k-1} \cdot \frac{1}{2} + (1 - p_{k-1}) \cdot \frac{1}{2} = 0{,}5$; $p = 0{,}5$.

9.9. Пусть p_k — вероятность ничейного исхода, когда сыграно $2k$ результативных партий; $p_{k+1} = \frac{1}{2} p_k$ $(k = 0, 1, \ldots)$, $p_0 = 1$, $p_{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$; $p = \frac{1}{2} p_{n-1} = \frac{1}{2^n}$.

9.10. Число n должно быть нечетным $n \geqslant 3$. Пусть p_k— вероятность того, что после $2k+1$ партий игра не закончилась; $p_0 = 1$, $p_k = \frac{3}{4} p_{k-1}$ $\left(k = 1, 2, \ldots, \frac{n-3}{2}\right)$; $p = \frac{1}{4} p_{\frac{n-3}{2}} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-3}{2}}$.

9.11. Пусть p_k — вероятность разорения I-го игрока, когда у него k рублей. По формуле полной вероятности $p_k = p p_{k+1} + q p_{k-1}$. Кроме того, $p + q = 1$, $p_0 = 1$, $p_{n+m} = 0$. Поэтому $q(p_k - p_{k-1}) = p(p_{k+1} - p_k)$. 1) $p = q$. Тогда $p_k = 1 - kc$, $c = \frac{1}{n+m}$, т. е. $p_I = \frac{m}{n+m}$, $p_{II} = \frac{n}{n+m}$. 2) $p \neq q$. Тогда $p_k - p_{k-1} = \left(\frac{p}{q}\right)^k (p_1 - 1)$. Суммируя эти равенства от 1 до n и от 1 до $n+m$, получаем

$$1 - p_n = (1 - p_1)\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \frac{q}{p}}, \qquad 1 - p_{n+m} = (1 - p_1)\frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}{1 - \frac{q}{p}}.$$

Поэтому

$$p_I = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^m}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{n+m}}, \qquad p_{II} = 1 - p_I = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+m}}.$$

9.12. $P = P_m$; $P_m = 0$ при $m < n$; $P_n = \frac{1}{2^{n-1}}$; $P_m = \frac{1}{2^n}$ при $n < m \leqslant 2n - 1$. В общем случае P_m определяется из рекуррентной формулы $P_m = \frac{1}{2}\,P_{m-1} + \frac{1}{2^2}\,P_{m-2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\,P_{m-n+1}$, которая получается по формуле полной вероятности. При этом гипотеза H_k — первый противник победителя выиграл k партий; $P_{m-k} = \mathrm{P}(H_k)(\frac{1}{2})^{n-k}$, $\mathrm{P}(A/H_k) = \frac{1}{2^n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$.

9.13. P_k — вероятность того, что придется играть ровно k партий. При $k = 1, 2, 3, 4, 5$ $P_K = 0$; $P_6 = 2p^6 = \frac{1}{2^5}$; $P_7 = 2C_6^1 p^6 q = \frac{3}{2^5}$; $P_8 = 2C_7^2 p^6 q^2 = \frac{21}{2^7}$; $P_9 = \frac{7}{2^5}$; $P_{10} = \frac{63}{2^8}$; в) $R = \sum_{k=1}^{10} P_k = \frac{193}{256}$; б) если n нечетное, то $P_n = 0$, когда $n \geqslant 11$. При четном n $P_n = \frac{1}{2}\,p_{\frac{n}{2}-1}$, где p_k — вероятность того, что после $2k$ партий противники имеют равное число очков; $p_5 = C_{10}^5 \frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{2^8}$, $p_{k+1} = \frac{1}{2} p_k$, т. е. $p_k = \frac{63}{2^{k+3}}$ $(k = 5, 6, \ldots)$; $P_n = \frac{63}{2^{\frac{n}{2}+3}}$.

9.14. $R(u) = \sum_{k=0}^{n-1} u^k \left(\sum_{j=k+1}^n P_{n;j}\right) = \frac{1 - G(u)}{1-u}$, где $G(u) = (q + pu)^n$.

9.15. $R(u)$ — как в задаче 9.14; $R_2(u) = \sum_{k=0}^{n} u^k \left(\sum_{j=0}^{k} P_{n;j}\right) = \frac{G(u)-u^{n+1}}{1-u}$, где $G(u) = \prod_{k=1}^{n}(q_k + p_k u)$.

9.16. Искомая вероятность равна свободному члену в производящей функции

$$G(u) = \frac{1}{4^n}\left(u + 2 + \frac{1}{u}\right)^n = \frac{(1+u)^{2n}}{4^n u^n}; \qquad p = \frac{1}{4^n} C_{2n}^{n}.$$

9.17. Искомая вероятность равна сумме коэффициентов при u в степени не меньше m в функции

$$G(u) = \left(\frac{1}{16}u^2 + \frac{1}{4}u + \frac{3}{8} + \frac{1}{4u} + \frac{1}{16u^2}\right)^n = \frac{(1+u)^{4n}}{(4u)^{2n}};$$

$$p = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{k=2n+m}^{4n} C_{4n}^{k}.$$

При $n = m = 3 \quad p = 0{,}073$.

9.18. Искомая вероятность

$$p = 2\sum_{k=0}^{8} P_{20;4+k,k,16-2k} = 2\,\frac{20!}{5^{20}} \sum_{k=0}^{8} \frac{3^{16-2k}}{(4+k)!k!(16-2k)!} = 0{,}104.$$

9.19. а) Искомые вероятности связаны равенствами: $p_r + p_{np} = 1$; $p_r = p_{np} + \Delta p$, где Δp — свободный член в производящей функции

$$G(u) = \left(\frac{1}{4}u + \frac{1}{4u} + \frac{1}{2}\right)^{24} = \frac{(1+u)^{48}}{4^{24}u^{24}};$$

$$\Delta p = \frac{1}{4^{24}} C_{48}^{24}; \qquad p_r = 0{,}5577, \quad p_{np} = 0{,}4423.$$

б) За 19 партий чемпион должен набрать 11 или $11\frac{1}{2}$ очков, а претендент $11\frac{1}{2}$ или 12;

$$G(u) = \frac{(1+u)^{38}}{4^{19}u^{19}}; \quad P_{20} = \frac{1}{4^{19}}\left(C_{38}^{22}\frac{1}{4} + C_{38}^{23}\frac{3}{4} + C_{38}^{23}\frac{1}{4} + C_{38}^{24}\frac{3}{4}\right) \approx 0{,}103.$$

9.20. а) Искомая вероятность P_m находится с помощью производящей функции

$$G(u) = \frac{1}{6^n}(u + u^2 + \ldots + u^6)^n = \frac{u^n(1-u^6)^n}{6^n(1-u)^n}.$$

Используя равенство $\frac{1}{(1-u)^n} = 1 + C_n^{n-1}u + C_{n+1}^{n-1}u^2 + \ldots$, получаем $P_m = \frac{1}{6^n}(C_{m-1}^{n-1} - C_n^1 C_{m-7}^{n-1} + C_n^2 C_{m-13}^{n-1} - \ldots)$, причем ряд обрывается, когда $m - 6k < n$; б) $R_m = \sum_{k=n}^{m} P_k$. Используя равенство $1 + C_n^{n-1} + \ldots + C_{s-1}^{n-1} = C_s^n$, получаем $R_m = \frac{1}{6^n}(C_m^n - C_n^1 C_{m-6}^n + C_n^2 C_{m-12}^n - \ldots)$. При $n = 10$, $m = 20$:

$$P_{20} = \frac{1}{6^{10}}(C_{19}^{9} - C_{10}^{1}C_{13}^{9}) = 0{,}0014, \quad R_{20} = \frac{1}{6^{10}}(C_{20}^{10} - C_{10}^{1}C_{14}^{10}) = 0{,}0029.$$

9.21. Искомая вероятность равна коэффициенту при u^{21} в функции

$$G(u) = \frac{1}{10^6}(1+u+\ldots+u^9)^6 = \frac{1}{10^6}\left(\frac{1-u^{10}}{1-u}\right)^6 =$$
$$= \frac{1}{10^6}(1 - C_6^1 u^{10} + C_6^2 u^{20} - \ldots)(1 + C_6^5 u + C_7^5 u^2 + \ldots);$$

$$p = \frac{1}{10^6}(C_{26}^5 - C_6^1 C_{16}^5 + C_6^2 C_6^5) \approx 0{,}04.$$

9.22. а) p_N равна коэффициенту при u^N в функции

$$G(u) = \frac{u^n}{m^n}\left(\frac{1-u^m}{1-u}\right)^n;$$

$$p_N = \frac{1}{m^n}(C_{N-1}^{n-1} - C_n^1 C_{N-m-1}^{n-1} + C_n^2 C_{N-2m-1}^{n-1} - \ldots,$$

причем ряд обрывается, когда $N - ms < n$;

б) $p = 1+p_N - \sum_{k=n}^N p_k = 1+p_n - \frac{1}{m^n}(C_N^n - C_n^1 C_{N-m}^n + C_n^2 C_{N-2m}^n - - \ldots)$ (ср. с 9.20).

9.23. а) $G_1(u) = \frac{u^{21}}{4^3}\left(\frac{1-u^4}{1-u}\right)^3$, $p = \frac{1}{4^3}(C_6^2 - 3) = 0{,}1875$; б) $G_2(v) = \frac{v^{21}}{8^3}(1+v)^9$, $p = \frac{1}{8^3}C_9^4 = 0{,}2461$; в) $G(u) = G_1(u)G_2(\frac{1}{u}) = = \frac{1}{32^3}\frac{(1+u^2)^3(1+u)^{12}}{u^9}$, $p = \frac{2}{32^3}(C_{12}^3 + 3C_{12}^5) = 0{,}1585$.

9.24. Гипотеза H_k — равное число гербов стало после k бросаний обеих монет ($k = 1, 2, \ldots, n$); событие A — после n бросаний будет равное число гербов, но оно могло быть и раньше. $\mathrm{P}(A) = \sum_{k=1}^n \mathrm{P}(H_k)\mathrm{P}(A/H_k)$, $p = \mathrm{P}(H_n)$, $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A/H_0)$, $\mathrm{P}(A/H_k) = \frac{1}{4^{n-k}}C_{2n-2k}^{n-k}$. Поэтому $C_{2n}^n = = \sum_{k=1}^n 4^k C_{2n-2k}^{n-k}\mathrm{P}(H_k)$. Задаваясь различными n, можно найти $p = = \mathrm{P}(H_n)$. Пусть $R(u) = \sum_{k=1}^\infty u^k P(H_k)$, $Q(u) = \sum_{j=0}^\infty u^j p_j$, где $p_{n-j} = = \mathrm{P}(A/H_j)$. Объединяя члены при u^n, получаем

$$Q(u)R(u) = \sum_{n=1}^\infty u^n \sum_{k=1}^n p_{n-k}\mathrm{P}(H_k) = \sum_{n=1}^\infty u^n \mathrm{P}_n(A) = Q(u) - 1;$$

$$Q(u) = \sum_{k=0}^\infty \left(\frac{u}{4}\right)^k \frac{(2k)!}{(k!)^2} = (1-u)^{-\frac{1}{2}};$$

$$P(u) = 1 - \sqrt{1-u} = \sum_{k=1}^\infty u^k \frac{(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}; \quad p = \frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}(n-1)!n!}.$$

9.25. Вероятность выигрыша одного очка для подающей команды равна $\frac{2}{3}$.

а) $P_k = C_{15}^1\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^{13+k} + C_{k-1}^1 C_{15}^2\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^{11+k} + C_{k-1}^2 C_{15}^3\left(\frac{1}{3}\right)^6 \times \times \left(\frac{2}{3}\right)^{9+k} + \ldots + C_{k-1}^{k-2}C_{15}^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{2k-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{17-k} + C_{15}^k\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}\left(\frac{2}{3}\right)^{15-k}$ или $P_k = \left(\frac{2}{3}\right)^{15}\frac{1}{6^k}(4^{k-1}C_{15}^1 + 4^{k-2}C_{k-1}^1 C_{15}^2 + 4^{k-3}C_{k-1}^2 C_{15}^3 + \ldots + 4C_{k-1}^1 C_{15}^{k-1} + +C_{15}^k)$; $Q_k = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{14}\frac{1}{6^k}(4^k + 4^{k-1}C_k^1 C_{14}^1 + 4^{k-2}C_k^2 C_{14}^2 + \ldots + 4C_k^{k-1}C_{14}^{k-1} + +C_{14}^k)$ $(k = 0, 1, \ldots, 13)$.

Числа P_k и Q_k приведены в таблице 72.

Таблица 72

k	0	1	2	3	4	5	6
P_k	0,00228	0,00571	0,01047	0,01623	0,02260	0,02915	0,03546
Q_k	0,00114	0,00342	0,00695	0,01159	0,01709	0,02312	0,02929
k	7	8	9	10	11	12	13
P_k	0,04118	0,04604	0,04986	0,05254	0,05407	0,05450	0,05392
Q_k	0,03524	0,04064	0,04525	0,04890	0,05148	0,05299	0,05345

б) $P_I = \sum_{k=0}^{13} P_k = 0{,}47401$, $Q_I = \sum_{k=0}^{13} Q_k = 0{,}42056$;

в) пусть α_k — вероятность набрать $14+k$ очков из $28+2k$ для первой (подающей) команды, выиграв последний мяч, β_k — аналогичная вероятность для второй команды: $\beta_0 = Q_{13}$, $\alpha_0 = C_{14}^1 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{26} + C_{13}^1 C_{14}^2 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \left(\frac{2}{3}\right)^{24} + \ldots + C_{13}^1 C_{14}^{13} \left(\frac{1}{3}\right)^{26} \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^{28} = 0{,}05198$, $\alpha_{k+1} + \beta_{k+1} = \frac{1}{3}(\alpha_k + \beta_k)$, $\alpha_{k+1} - \beta_{k+1} = -\frac{1}{9}(\alpha_k - \beta_k)$, т. е. $(\alpha_k + \beta_k) = \frac{1}{3^k}(\alpha_0 + \beta_0)$, $(\alpha_k - \beta_k) = \frac{(-1)^k}{9^k}(\alpha_0 - \beta_0)$; $p_k = \frac{\alpha_0+\beta_0}{3^{k+1}} + \frac{(-1)^k}{9^{k+1}}(\alpha_0 - \beta_0)$, $q_k = \frac{\alpha_0+\beta_0}{3^{k+1}} - \frac{(-1)^k}{9^{k+1}}(\alpha_0 - \beta_0)$; $p_k = \frac{0{,}10543}{3^{k+1}} - \frac{(-1)^k 0{,}00148}{9^{k+1}}$, $q_k = \frac{0{,}10543}{3^{k+1}} + \frac{(-1)^k 0{,}00148}{9^{k+1}}$;

г) $P_{II} = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 0{,}05257$, $Q_{II} = \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 0{,}05286$;

д) $P = P_I + P_{II} = 0{,}52658$, $Q = Q_I + Q_{II} = 0{,}47342$.

9.26. Вероятность получения серии из m появлений события A только при k-м испытании p_k; вероятность того, что при первых k испытаниях такой серии не будет α_k; $\alpha_k - \alpha_{k-1} = -p_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

$$R(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k; \qquad G(u) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k u^k = 1 - (1-u)R(u).$$

При $k \geqslant m$ справедливы равенства $\alpha_k = q\sum_{s=1}^{m} p^{s-1}\alpha_{k-s}$, с помощью которых находится

$$R(u) = \frac{1-(pu)^m}{1-u+qp^m u^{m+1}};$$

$$G(u) = \frac{(pu)^m(1-pu)}{1-u+qp^m u^{m+1}}; \quad p_n = \frac{1}{n!}\left.\frac{d^n G(u)}{du^n}\right|_{u=0}.$$

Если $m = 2$, $n = 5$, то $p_5 = p^2 q^2 (1+p)$.

9.27. Событие A — повторного голосования не будет. Гипотеза $H_{s,j}$ — среди l избранных по s голосов имеют j кандидатов:

$$\mathrm{P}(H_{s,j}) = C_l^j P_{N;s}^j R_{N;s+1}^{l-j}; \qquad \mathrm{P}(A/H_{s,j}) = (1 - R_{N;s})^{k-l},$$

где

$$P_{N;s} = C_N^s p^s q^{N-s}; \qquad R_{N;s} = \sum_{\nu=s}^{n} P_{N;\nu}.$$

Искомая вероятность $P = C_k^l \sum_{s=n}^{N} \sum_{j=1}^{l} \mathrm{P}(H_{s,j})\mathrm{P}(A/H_{s,j}) = C_k^l \times \sum_{s=n}^{N}(R_{N,s}^l - R_{N,s+1}^l)(1 - P_{N;s})^{k-l}$. Если $N = k = 3$, $n = 2$, $l = 1$, $p = 0{,}5$, то $P = \frac{291}{512} \approx 0{,}568$.

Глава II
Случайные величины

§ 10. Ряд распределения, функция распределения, производящая функция дискретной случайной величины. Основные типы распределений

10.1. См. таблицу 73.

Таблица 73

x_i	0	1
p_i	0,7	0,3

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}7, & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 1, & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

10.2. См. таблицу 74.

Таблица 74

x_i	0	1	2	3
p_i	0,125	0,375	0,375	0,125

$$\mathcal{F}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 0{,}125 & \text{при } 0 < x \leqslant 1, \\ 0{,}500 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}875 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

10.3. См. таблицу 75.

Таблица 75

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

10.4. $P(X = m) = p(1-p)^m$ для целых $m \geqslant 0$ $\quad G(u) = \frac{p}{1-(1-p)u}$.

10.5.

$$\left.\begin{array}{l} P(X_1 = m) = (p_1 + q_1 p_2)(q_1 q_2)^{m-1} \\ P(X_2 = 0) = p_1, P(X_2 = m) = (p_2 + q_2 p_1) q_1^m q_2^{m-1} \end{array}\right\} m \geqslant 1$$

$$G_1(u) = \frac{(p_1 + q_1 p_2)u}{1 - q_1 q_2 u}; \qquad G_2(u) = \frac{p_1 + q_1 p_2 u}{1 - q_1 q_2 u},$$

где $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$.

10.6. См. таблицу 76.

Таблица 76

x_i	-3	3	8	9	14	15	19	20	25	30
p_i	0,008	0,036	0,060	0,054	0,180	0,027	0,150	0,135	0,225	0,125

10.7. $P(X = m) = q^{m-4}p = \frac{1}{2^{m-3}}$ для всех $m \geqslant 4$, так как минимальное случайное число включений равно четырем и будет меть место тогда, когда первый же включенный прибор сработает.

$$G(u) = \frac{pu^4}{1-(1-p)u} = \frac{u^4}{2-u}.$$

10.8. а)

$$P(X = m) = \begin{cases} q^{n-1}, & \text{при } m = 0, \\ pq^{n-m-1}, & \text{при } 0 < m \leqslant n-1; \end{cases}$$

$$G(u) = (1-p)^{n-1} + \tfrac{pu}{1-p-u}[(1-p)^{n-1} - u^{n-1}].$$

б)

$$P(X = m) = \begin{cases} pq^{m-1}, & \text{для } 1 \leqslant m \leqslant n-1 \\ q^{n-1}, & \text{для } m = n. \end{cases}$$

$$G(u) = \tfrac{pu}{1-(1-p)u}\left\{1 - [(1-p)u]^{n-1}\right\} + (1-p)^{n-1}u^n.$$

10.9. $P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ для всех $0 \leqslant m \leqslant n$. $G(u) = (pu+q)^n$, где $q = 1-p$.

10.10. $P(X = m) = 1 - 2 \cdot 0{,}25^m$ для всех $m \geqslant 1$.

10.11. $P(X = k) = \left(1 - \frac{p}{\omega}\right)^{k-1} \frac{p}{\omega}$ для всех $k \geqslant 1$.

10.12. $P(X = m) = \frac{(np)^m}{m!}\, e^{-np}$ для всех $m \geqslant 0$.

10.13. См. таблицу 77.

Таблица 77

x_i	1	1,2	1,25	1,33	1,5	1,67	2	2,5	3	4	5	6
$36p_i$	6	2	2	2	4	2	6	2	4	2	2	2

10.14. См. таблицу 78.

Таблица 78

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$10^3 p_i$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69	73	75

для $i > 14 \quad p_i = p_{27-i}$.

10.15. $P(X{=}m){=}C_{m-1}^{r-1}p^r(q{-}p)^{m-r}$, $m{\geqslant}r$; $G(u){=}\left[\frac{pu}{1-(1-p)u}\right]^r$.

10.16. $G(u) = e^{a(u-1)}$.

10.17. $P(X = k) = \frac{C_m^k C_{n-m}^{r-k}}{C_n^r}$, где k — целые неотрицательные числа в интервале

$$\max(0, m+r-n) \leqslant k \leqslant \min(m, r).$$

10.18. $P(X{=}m){=}C^{r-1}_{r+m-1}p^r(1{-}p)^m,\ m{\geqslant}0;\ G(u){=}\left[\frac{p}{1-(1-p)u}\right]^r.$

10.19. $G(u) = \frac{\ln(1-au)}{\ln(1-a)}.$

10.20. $\lim\limits_{\substack{p\to 0\\ n\to\infty}}[1+p(u-1)]^n = \lim\limits_{np\to a} e^{np(u-1)} = e^{a(u-1)}.$

10.21. $p = \frac{3^4}{4!}\,e^{-3} \approx 0{,}17.$

10.22. $p = 1 - e^{-1} \approx 0{,}63.$

10.23. 1) 0,95958; 2) 0,95963.

10.24. 0,143.

10.25. а) $\frac{(\lambda p)^k}{k!}\,e^{-\lambda p}$; б) $1 - e^{-\lambda p}$.

10.26. $\lim\limits_{\substack{p\to 1\\ r\to\infty}}[\frac{p}{1-(1-p)u}]^r = \lim\limits_{r(1-p)\to a} e^{r(1-p)(u-1)} = e^{a(u-1)}.$

10.27. $p_0(t) = e^{-\pi r^2\nu t(1+\frac{v}{u}\cos\gamma)}.$

§ 11. Моменты и характеристическая функция дискретной случайной величины

11.1. $\overline{x} = p.$

11.2. $\overline{x}_а = 1{,}8$; $\overline{x}_б = 1{,}7$; $\overline{x}_в = 2{,}0$; наименьшее среднее число гирь будет при системе б).

11.3. $\mathrm{M}[X] = 2$; $\mathrm{D}[X] = 1{,}1$.

11.4. $G(u) = \prod_{i=1}^3(p_iu+q_i)$; $\mathrm{M}[X] = p_1+p_2+p_3$.

11.5. $G(u) = (pu+q)^n$; $\mathrm{M}[X] = np$.

11.6. $\frac{2}{N}\sum_{i=1}^n m_ik_i.$

11.7. Для первого $\frac{7}{11}$, для второго $-\frac{7}{11}$ монет, т. е. игра проигрышная для второго игрока.

11.8. Ввести в рассмотрение величины a, b, c — математические ожидания выигрыша игроков A, B, C соответственно при условии, что игрок A выиграл у B. Для этих величин справедливы равенства $a = \frac{m}{2}+\frac{b}{2}$, $c = \frac{a}{2}$, $b = \frac{c}{2}$, которые составляют систему уравнений для нахождения неизвестных a, b и c. Решая систему, получим $a = \frac{4}{7}m$, $b = \frac{1}{7}m$, $c = \frac{2}{7}m$. Во втором случае для игроков A, B и C соответственно получим $\frac{5}{14}m$, $\frac{5}{14}m$, $\frac{2}{7}m$.

11.9. $\overline{x}_A = \frac{2}{2^2}+\left(\frac{4}{2^4}+\frac{5}{2^5}\right)+\left(\frac{7}{2^7}+\frac{8}{2^8}\right)+\ldots = \sum_{m=2}^\infty\frac{m}{2^m} - {}$ $-3\sum_{m=1}^\infty\frac{m}{2^{3m}} = \frac{3}{2}-\frac{24}{49} = 1\frac{1}{98}$; $\overline{x}_C = \frac{3}{2^2}+\frac{6}{2^5}+\frac{9}{2^8}+\ldots = \frac{3}{4}\sum_{m=0}^\infty\frac{m+1}{8^m} = {}$ $= \frac{3}{4}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{8}\right)^2} = \frac{48}{49}.$

11.10. $G(u) = \frac{pu}{1-(1-p)u}$; $\mathrm{M}[X] = \frac{1}{p}$.

11.11. $G(u) = \frac{pu^4}{1-(1-p)u}$; $\mathrm{M}[X] = 3+\frac{1}{p} = 8$.

11.12. $G(u) = \left[\frac{pu}{1-(1-p)u}\right]^k$; $\mathrm{M}[X] = \frac{k}{p}$; $\mathrm{D}[X] = \frac{k(1-p)}{p^2}$.

11.13. а) $G(u) = \sum_{m=1}^\infty[P(X=m)-P(X=m-1)]u^m = \frac{u(1-e^{-\alpha})}{1-ue^{-\alpha}}$, $\mathrm{M}(m) = \omega$, $\omega = \frac{1}{1-e^{-\alpha}}$;

б) $G(u) = \frac{u^2(1-e^{-\alpha})}{1-ue^{-\alpha}}$; $\mathrm{M}[m] = \omega + 1$.

11.14. $\mathrm{M}[X] = \frac{1}{p_1+p_2p_3(1-p_1)} = 4,55$, где $p_1 = 0{,}18$; $p_3 = p_2 = 0{,}22$.

11.15. $\mathrm{M}[X] = 4\frac{2}{3}$.

11.16. $\mathrm{M}[n] = n + m\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

11.17. Исследовать на максимум дисперсию как функцию вероятности появления события.

11.18. $\mu_3 = np(1-2p)(1-p)$ обращается в нуль при $p = 0$, $p = 0{,}5$ и $p = 1$.

11.19. Рассмотреть дисперсию как функцию вероятности появления события.

11.20. В обоих случаях математическое ожидание числа черных шаров во второй урне равно 5, а белых — в первом случае $4 + \frac{1}{2^{10}}$, во втором случае $4 + e^{-5}$.

11.21. Два рубля.

11.22. При $p < \frac{3}{4}$.

11.23. $\mathrm{M}[X] = \frac{n^2-1}{3n}a$. При отыскании вероятностей $p_k = P(X = ka)$ того, что случайная длина перехода равна ka, воспользоваться формулой полных вероятностей, приняв в качестве гипотезы A_i то, что рабочий в данный момент стоит у i-го станка.

11.24. $q = 0{,}9$; $a = \frac{1}{10}$; $P(X \leqslant 10) = 1 - q^{10} \approx 0{,}651$.

11.25. $\mathrm{M}[X] = \frac{3}{2}$.

11.26. $\mathrm{M}[X] = 2\ln 2 - 1$.

11.27. $y = \frac{1}{2p}$; $y = 6{,}5$ руб.

11.28. $\mathrm{M}[X] = \frac{n}{m}$; $\mathrm{D}[X] = \frac{n(m+n)}{m^2}$.

11.29. $X_k = \frac{M+M_1}{N+N_1}N + \frac{MN_1-NM_1}{N+N_1}\left(1 - \frac{1}{N} + \frac{1}{N_1}\right)^k$; $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = \frac{M+M_1}{N+N_1}N$. Составить конечноразностное уравнение для математического ожидания числа белых шаров X_k, находящихся в первой урне после k опытов:

$$X_{k+1} - X_k = \frac{M+M_1}{N_1} - \left(\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N}\right)X_k.$$

11.30. $p = C_m^k\left(\frac{1}{n}\right)^k\left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-k}$; $\overline{x} = \frac{m}{n}$; $\mathrm{D}[X] = \frac{m(n-1)}{n^2}$.

11.31. $\overline{x} = \frac{q}{p}$; $\mathrm{D}[X] = \frac{q^2}{p^2} + \frac{q}{p}$, где $q = 1 - p$.

11.32. $\mathrm{M}[X] = \mathrm{D}[X] = \mu_3 = a$.

11.33. а) $\mathrm{M}[X] = np$; $\mathrm{D}[X] = npq$;

б) $\mathrm{M}[X] = \frac{1-p}{p}$; $\mathrm{d}[X] = \frac{1-p}{p^2}$;

в) $\mathrm{M}[X] = \frac{r}{p}$; $\mathrm{D}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$;

г) $\mathrm{M}[X] = \frac{r(1-p)}{p}$; $\mathrm{D}[X] = \frac{r(1-p)}{p^2}$;

д) $\mathrm{M}[X] = -\frac{p}{(1-p)\ln(1-p)}$; $\mathrm{D}[X] = \frac{p}{(1-p)^2\ln(1-p)}\left[1 + \frac{p}{\ln(1-p)}\right]$.

11.34. $p = e^{-0,05} \approx 0,61$.

11.35. 0,9.

11.36. $p = \frac{1}{e}\sum_{m=3}^{500}\frac{1}{m!} \approx 1 - \frac{1}{e}\sum_{m=0}^{2}\frac{1}{m!} \approx 0,08$.

11.37. 0,4.

11.38. $\mathrm{Sk} = \frac{1}{\sqrt{a}}$.

11.39. $\mathrm{M}[X] = \mathrm{D}[X] = \frac{\lg 2}{\lg e}\,\frac{MN_0}{AT_n}$.

Составить дифференциальное уравнение для среднего числа частиц в момент времени t. Приравнять среднее число частиц половине первоначального. Полученное в результате этого уравнение дает возможность найти вероятность распада данной частицы; умножая ее на число частиц, получим $\mathrm{M}[X]$.

11.40. а) $p = \frac{n^{10}}{10!}\,e^{-10} \approx 1,02\cdot 10^{-10}$;
б) $p = 1 - e^{-n} - ne^{-n} \approx 0,673$, где $n = \frac{MN_0pts}{4\pi r^2 A} \approx 0,475$.

11.41. $E(u) = q + pe^{iu}$, где $q = 1 - p$.

11.42. $E(u) = \prod_{k=1}^{n}(q_k + p_k e^{iu})$, где $p_k + q_k = 1$.

11.43. а) $E(u) = (q + pe^{iu})^n$; $\mathrm{M}[X] = np$; $\mathrm{D}[X] = npq$.
б) $E(u) = \frac{1}{1+a(1-e^{iu})}$; $\mathrm{M}[X] = a$; $\mathrm{D}[X] = a(1+a)$.
в) $E(u) = \exp\{a(e^{iu} - 1)\}$; $\mathrm{M}[X] = \mathrm{D}[X] = a$.

§ 12. Функция распределения и плотность вероятности непрерывной случайной величины

12.1. а)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0;1], \\ 0, & \text{если } x \widetilde{\in} [0;1]. \end{cases}$$

б) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2}}$.

12.2.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < -1, \\ \frac{x+1}{3}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ -x, & \text{если } x > 2. \end{cases}$$

12.3. $2^{\frac{1}{\alpha}}x_0$.

12.4. а) $p = \frac{1}{e}$; б) $f(t) = \frac{1}{T}\,e^{-\frac{t}{T}}$.

12.5. а) $f(x) = \frac{x}{\sigma^2}\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$; б) $\sigma\sqrt{\frac{2\lg 2}{\lg e}} \approx 1,18\sigma$; в) σ.

12.6. а) $f(x) = \frac{m}{x_0}\,x^{m-1}e^{-\frac{x^m}{x_0}}$ $(x \geqslant 0)$; б) $x_p = \{-x_0\ln(1-p)\}^{\frac{1}{m}}$; в) $\left(\frac{m-1}{m}\,x_0\right)^{\frac{1}{m}}$.

12.7. а) 10^{-5}; б) $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t_B} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, где $t_B = \frac{\lg x - \lg x_0}{\sigma}$.

12.8. а) $c = \frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{\pi}$; б) $f(x) = \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$; в) $P(\alpha < X < \beta) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{a(\beta-\alpha)}{a^2+\alpha\beta}$.

12.9. $a = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

12.10. а) $\mathcal{F}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x$; б) $P(|X| < 1) = \frac{1}{2}$.

12.11. $p = \frac{1}{2}$.

12.12. $p = \frac{1}{3}$.

12.13. Ввести случайную величину X — промежуток времени, в течение которого лампа теряет работоспособность. Составить дифференциальное уравнение для $\mathcal{F}(x) = P(X < x)$ — функции распределения случайной величины X. Решение этого уравнения при $x = l$ имеет вид $\mathcal{F}(l) = 1 - e^{-kl}$.

12.14. а) $\frac{z^2}{L^4}(6L^2 - 8Lz + 3z^2)$; б) $1 - \left(\frac{z-x}{L-x}\right)^{h+1}$.

12.15. $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}\,\delta(x - i)$.

12.16. $\mathcal{F}(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos x, \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$.

12.17. $\mathcal{F}(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{gx}{v_0^2}, \quad (0 \leqslant x \leqslant \frac{v_0^2}{g})$, где v_0 — начальная скорость снаряда, g — ускорение силы земного притяжения.

12.18. $\mathcal{F}(t) = \frac{gt^2}{4\pi^2}, \quad (0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{g}})$.

12.19. $\mathcal{F}(v) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{c - p_0 v^k}{\varepsilon v^k}\right)$, $\left(\frac{c}{p_0+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant v \leqslant \left(\frac{c}{p_0-\varepsilon}\right)^{\frac{1}{k}}$.

§ 13. Моменты непрерывной случайной величины. Характеристическая функция

13.1. $\mathrm{M}[X] = a$; $\mathrm{D}[X] = \frac{l^2}{3}$; $E = \sigma\,\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13.2. $\mathrm{M}[X] = 0$; $\mathrm{D}[X] = \frac{1}{2}$.

13.3. $\mathrm{M}[X] = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$; $\mathrm{D}[X] = \sigma^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$.

13.4. $\mathrm{D}[X] = \frac{a^2}{2}$; $E = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

13.5. $P(a < \overline{a}) = 1 - e^{-\frac{\pi}{4}}$; $P(a > \overline{a}) = e^{-\frac{\pi}{4}}$; $\frac{P(a<\overline{a})}{P(a>\overline{a})} = \frac{0{,}544}{0{,}456} = 0{,}19$.

13.6. $a = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}$; $\mathrm{M}[V] = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}$; $\mathrm{D}[V] = \frac{1}{h^2}\left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)$.

13.7. $\mathrm{M}[X] = \mathrm{D}[X] = m + 1$.

13.8. $\mathrm{M}[X] = \frac{3}{2}\,x_0$; $\mathrm{D}[X] = \frac{3}{4}\,x_0^2$.

13.9. $\mathrm{M}[X] = 0$; $\mathrm{D}[X] = 2$.

13.10. $a = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$; $\mathrm{M}[X] = \frac{\alpha}{\beta}$; $\mathrm{D}[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

13.11. $c = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$; $\mathrm{M}[X] = \frac{a}{a+b}$; $\mathrm{D}[X] = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$.

13.12. $a = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$; $\mathrm{M}[X] = 0$; $\mathrm{D}[X] = \frac{1}{n-2} \quad (n > 2)$.

Для вычисления интеграла $\int_0^{\infty}(1 + x^2)^{-\frac{n+1}{2}}dx$ воспользоваться подстановкой $x = \sqrt{\frac{y}{1-y}}$, приводящей к бета-функции, а последнюю выразить через гамма-функцию.

13.13. $a = \frac{1}{2^{\frac{n-2}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$; $\mathrm{M}[X] = \frac{\sqrt{2}\,\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$; $\mathrm{D}[X] = n - \overline{x}^2$.

13.14. Воспользоваться соотношением $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = -\frac{d[1-F(x)]}{dx}$.

13.15. $\mathrm{M}[T] = \frac{1}{\gamma}$. Обратить внимание на то, что $p(t)$ является функцией распределения случайного времени поисков (T), необходимого для обнаружения судна.

13.16. $m(t) = m_0 e^{-pt}$. Учесть, что вероятность распада любого фиксированного атома за промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ равна $p\Delta t$, и составить дифференциальное уравнение для $m(t)$.

13.17. $T_n = \frac{1}{p}\frac{\lg 2}{\lg e}$. Воспользоваться решением задачи 13.16.

13.18. $\frac{P(T<\overline{t})}{P(T>\overline{t})} = 1{,}247$, т. е. научных работников, имеющих возраст меньше среднего (среди научных работников), больше, чем имеющих возраст больше среднего. Средний возраст среди научных работников $\overline{t} = 41{,}25$ года.

13.19. $m_{2\nu} = \frac{(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots 5\cdot 3\cdot 1}{(n-2)(n-4)\ldots(n-2\nu)}\, n^{\nu}$ при $n \geqslant 2\nu+1$, $m_{2\nu+1} = 0$. При вычислении интегралов вида $\int_0^\infty x^{2\nu}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} dx$ произвести замену переменных $x = \sqrt{n\,\frac{y}{1-y}}$, приводящую к бета-функции, а последнюю выразить через гамма-функцию.

13.20. $m_k = \frac{\Gamma(p+k)\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(p+q+k)}$.

13.21. $\mathrm{M}[X] = 0$; $\mathrm{D}[X] = \frac{\pi^2}{12} + \frac{1}{2}$.

13.22. $\mu_k = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{k-j} C_k^j\, \overline{x}^{\,k-j}\, m_j$, где $m_j = \mathrm{M}[X^j]$.

13.23. $m_k = \sum_{j=0}^{k} C_k^j\, \overline{x}^{\,k-j} \mu_j$, где $\mu_j = \mathrm{M}[(X-\overline{x})^j]$.

13.24. $\mathrm{M}[X] = n$; $\mathrm{D}[X] = 2n$.

13.25. $E(u) = \exp\left(iu\overline{x} - \frac{\sigma^2 u^2}{2}\right)$.

13.26. $E(u) = \frac{1}{1-iu}$; $m_k = k!$

13.27. $E(u) = \frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}$; $m_k = \frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}$.

13.28. $E(u) = 1 + iv\sqrt{\pi}W(v)$, где $v = \frac{u}{2h}$ и $W(v) = e^{-v^2} \times \left(1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int_0^v e^{t^2} dt\right)$ — табличная функция, называемая интегралом вероятности от комплексного аргумента [78]. Представить характеристическую функцию в виде $E(u) = -iH'(v)$, где $H(v) = \int_0^\infty e^{ivz-\frac{z^2}{2}} dz$. Интегрированием по частям функции $H'(v)$ получить уравнение $H'(v)+vH(v) = i$, из которого следует, что $H(v) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}W\left(\frac{v}{\sqrt{2}}\right)$.

13.29. $E(u) = \left(1 - \frac{iu}{\beta}\right)^{-\alpha}$, $m_k = \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)\beta^{-k}$.

13.30. $E(u) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{iau\cos\varphi} d\varphi = J_0(au)$. Перейти к полярным координатам и воспользоваться одним из интегральных представлений функции Бесселя [97].

13.31. $E(u) = \exp\{icu - a|u|\}$. Путем замены переменных приводится к виду $E(u) = e^{icu}\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixu}}{x^2+a^2}\, dx$. Входящий в формулу интеграл вычисляется с помощью теории вычетов, для чего необходимо рассмотреть интеграл по замкнутому контуру $\frac{a}{\pi}\oint \frac{e^{izu}}{z^2+a^2}\, dz$. При положительных u интегрирование осуществляется по замкнутой диаметром полуокружности в верхней полуплоскости, при отрицательных u — по такому же контуру в нижней полуплоскости.

13.32. а) $E_y(u) = \exp\left\{iu(b+ax) - \frac{u^2}{2}a^2\sigma^2\right\}$; б) $E_x(u) = e^{-\frac{u^2\sigma^2}{2}}$.

13.33. $\mu_{2k} = \sigma^{2k}(2k-1)!!$; $\mu_{2k+1} = 0$.

13.34. $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ (закон Коши).

13.35.

$$f_1(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{при } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } x < 0; \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x > 0, \\ e^0, & \text{при } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Решать с помощью теории вычетов, рассматривая в отдельности случаи положительных и отрицательных значений x.

13.36. $P(X = k) = 2^{-k}$, где $k = 1, 2, \ldots$ Разложить характеристическую функцию в ряд по степеням $\frac{1}{2}e^{iu}$ и воспользоваться аналитическим представлением дельта-функции, приведенным во введении к § 12.

13.37. Указание: воспользоваться тождеством

$$E(u)\,\frac{d}{du}[\ln E(u)] = \frac{d}{du}[E(u)].$$

13.38. $\mathrm{Sk} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$, $Ex = \frac{6}{\alpha}$.

13.39. $E(u) = \frac{e^{i\alpha u}}{1+\beta^2u^2}$, $\mathrm{Sk} = 0$, $\mathcal{E}\mathrm{x} = 3$.

§ 14. Закон нормального распределения

14.1. $p = 0{,}053$.

14.2. $p_{\text{ниже}} = 0{,}18$; $p_{\text{внутри}} = 0{,}48$; $p_{\text{выше}} = 0{,}34$.

14.3. $p = 0{,}782$.

14.4. $n \geqslant 7$.

14.5. $E_x = 2\rho\sqrt{\frac{2}{3}}E_y \approx 0{,}78E_y$.

14.6. См. таблицу 79.

Таблица 79

x	-60	-45	-30	-15	0	15	30	45
$10^4F(x)$	14	228	1587	5000	8413	9772	9986	9999

14.7. $\sigma \approx 58$ м. Получающееся трансцендентное уравнение проще всего решать графически.

14.8. $E_1 = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

14.9. 1) 0,1587; 0,0228; 0,00135; 2) 0,3173; 0,0455; 0,0027.

14.10. $p \approx 0{,}091$.

14.11. $p = 0,25$.

14.12. а) 0,5196; б) 0,1281.

14.13. $M[\mathrm{X}] = 3$ изделия.

14.14. Не менее 30 мк.

14.15. $\sim 8{,}6$ км.

14.16. а) 1,85 мм; б) 1,08 мм.

14.17. а)

$$\mathcal{F}_a(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x-\overline{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{b-\overline{x}}{\sigma}\right)}{1 - \Phi\left(\frac{b-\overline{x}}{\sigma}\right)} \quad \text{для} \quad x > b;$$

б)

$$\mathcal{F}_б(x) = \frac{\Phi\left(\frac{x-\overline{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\overline{x}}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{b-\overline{x}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\overline{x}}{\sigma}\right)} \quad \text{для} \quad a < x < b.$$

14.18. $\sigma = \sqrt{\frac{b^2-a^2}{2\ln\frac{b}{a}}}$.

§ 15. Формулы полной вероятности и Байеса для непрерывных случайных величин

15.1. $p = \frac{b}{l(\Theta_2-\Theta_1)}\left(\ln\operatorname{tg}\frac{\Theta_2}{2} - \ln\operatorname{tg}\frac{\Theta_1}{2}\right)$.

15.2. $p = \frac{D(2l-D)}{l^2} = 0{,}4375$.

15.3. $p = 0{,}15$.

15.4. $p = \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{L-\overline{x}}{\sigma}\right)\right] + \frac{\sigma}{L\sqrt{2\pi}}\left\{e^{-\rho^2\frac{\overline{x}^2}{\sigma^2}} - e^{-\rho^2\frac{(L-\overline{x})^2}{\sigma^2}}\right\} + \frac{\overline{x}}{2L}\left[\dot{\Phi}\left(\frac{L-\overline{x}}{\sigma}\right) + \dot{\Phi}\left(\frac{\overline{x}}{\sigma}\right)\right] \approx 0{,}67$.

15.5. В обоих случаях один и тот же результат $p_1 = p_2 = 0{,}4$.

15.6. $p = 1 - \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{z+r}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{z-r}{\sigma}\right)\right]\right\}^n dz$.

15.7. $\mathcal{F}(w) = n\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\left\{\int_y^{y+w} f(x)dx\right\}^{n-1} dy$.

15.8. $p = 1 - \frac{128}{45\pi^2} \approx 0{,}712$.

15.9. $p_i = \frac{r_i}{\sum_{i=1}^n r_i}$, где $r_i = \int_{-\infty}^{\infty} f_i(x) f_p(x - x_0)\, dx$.

15.10. $f(a/m_0) = \frac{2(2a)^{m_0+1}}{(m_0+1)!}\, e^{-2a}$.

15.11. $P(X=k) = A_k\frac{\beta^\alpha}{(\beta+1)^{\alpha+1}}$, где $A_0 = 1$, $A_k = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+k-1)}{k!}$ при $k \geqslant 1$.

15.12. $P(t) = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\prod_{i=1}^{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{y-a_i-t\overline{x}_i}{t\sigma_i}\right)\right] dy$.

15.13. $f(\lambda/A) = \frac{ae^{-\lambda}}{e^{-a\lambda_1} - e^{-a\lambda_2}}$, где $a = nt_0$, $\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2$.

15.14. $f(x/A) = Cf(x)p^k(x)[1-p(x)]^{n-k}$, где

$$C = \left\{ \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)p^k(x)[1-p(x)]^{n-k}dx \right\}^{-1}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}},$$

$$p(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x+d}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{x-d}{\sigma_y}\right)\right].$$

15.15. $f(x/A) = Cf(x)\prod_{i=1}^{k} p_i(x)\prod_{i=k+1}^{n} q_i(x)$, где

$$C = \left\{ \int\limits_{0}^{\infty} f(x)\prod_{i=1}^{k} p_i(x) \prod_{i=k+1}^{n} q_i(x)\, dx \right\}^{-1},$$

$$p_i(x) = \frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{x_i+d}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{x_i-d}{\sigma_y}\right)\right],$$

$$q_i(x) = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{x_i-d}{\sigma_y}\right)\right], \qquad x_i = x(i-1).$$

Глава III
Системы случайных величин

§ 16. Законы распределения, моменты и характеристические функции системы случайных величин

16.1.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)}, & \text{при } a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d, \\ 0, & \text{вне прямоугольника.} \end{cases}$$

$\mathcal{F}(x,y) = \mathcal{F}_1(x)\mathcal{F}_2(y)$, где

$$\mathcal{F}_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x \geqslant b, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{при } a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & \text{при } x \leqslant a; \end{cases} \qquad \mathcal{F}_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } y \geqslant d, \\ \frac{y-c}{d-c}, & \text{при } c \leqslant y \leqslant d, \\ 0, & \text{при } x \leqslant c. \end{cases}$$

16.2. а) $A = 20$; б) $\mathcal{F}(x,y) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y}{5} + \frac{1}{2}\right)$.

16.3. $f(x,y,z) = abce^{-(ax+by+cz)}$.

16.4. Треугольник с координатами вершин: $\left(\frac{1}{a}\ \ln\frac{abc}{f_0}, 0, 0\right)$; $\left(0, \frac{1}{b}\ \ln\frac{abc}{f_0}, 0\right)$; $\left(0, 0, \frac{1}{c}\ \ln\frac{abc}{f_0}\right)$.

16.5. а) $\mathcal{F}(i,j) = P(X < i, Y < j) = P(X \leqslant i-1, Y \leqslant j-1)$. Значения $\mathcal{F}(i,j)$ см. в таблице 80.

б) $1 - P(X \leqslant 6, Y \leqslant 1) = 1 - 0{,}887 = 0{,}113$;

в) $\mathrm{M}[X] = 1{,}947$; $\mathrm{M}[Y] = 0{,}504$; $\|k_{ij}\| = \left\|\begin{matrix} 2{,}610 & 0{,}561 \\ 0{,}561 & 0{,}548 \end{matrix}\right\|$.

Таблица 80

$j-1$ \ $i-1$	0	1	2	3	4	5	6
0	0,202	0,376	0,489	0,551	0,600	0,623	0,627
1	0,202	0,475	0,652	0,754	0,834	0,877	0,887
2	0,202	0,475	0,683	0,810	0,908	0,964	0,982
3	0,202	0,475	0,683	0,811	0,911	0,971	1,000

16.6. $\mathcal{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_i(\xi_i)\, d\xi_i$.

16.7. $P = \frac{f(u,v)}{f(u,v)+f(v,u)}$.

16.8. $P = f(u,v,w) : [f(u,v,w) + f(u,w,v) + f(v,u,w) + f(v,w,u) + f(w,u,v) + f(w,v,u)]$.

16.9. $P = \mathcal{F}(a_1, b_3) - \mathcal{F}(a_2, b_5) + \mathcal{F}(a_2, b_1) - \mathcal{F}(a_2, b_3) + \mathcal{F}(a_3, b_4) - \mathcal{F}(a_3, b_2) + \mathcal{F}(a_4, b_2) - \mathcal{F}(a_4, b_4) + \mathcal{F}(a_5, b_5) - \mathcal{F}(a_5, b_1)$.

16.10. $P = a^{-3} - a^{-6} - a^{-9} + a^{-12}$.

16.11.

$$P = \begin{cases} \frac{\pi R^2}{4ab}, & \text{при } 0 \leqslant R \leqslant b, \\ \frac{R^2}{4ab}(\pi - 2\beta + \sin 2\beta), & \text{при } b \leqslant R \leqslant a, \\ \frac{R^2}{4ab}(\pi - 2\alpha - 2\beta + \sin 2\alpha + \sin 2\beta), & \text{при } a \leqslant R \leqslant \sqrt{a^2+b^2}, \\ 1, & \text{при } R \geqslant \sqrt{a^2+b^2}. \end{cases}$$

При этом $\alpha = \arccos \frac{a}{R}$, $\beta = \arccos \frac{b}{R}$.

16.12. а) $c = \frac{3}{\pi R^3}$; б) $p = \frac{3a^2}{R^2}\left(1 - \frac{2a}{3R}\right)$.

16.13. а) $r_{xy} = \begin{cases} +1, & \text{при } \frac{n}{m} < 0, \\ -1, & \text{при } \frac{n}{m} > 0; \end{cases}$
б) $\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \left|\frac{n}{m}\right|$.

16.14. Рассмотреть математические ожидания квадратов выражений $\sigma_y = (X - \overline{x}) + \sigma_x(Y - \overline{y})$ и $\sigma_y = (X - \overline{x}) - \sigma_x(Y - \overline{y})$.

16.15. Воспользоваться соотношением $k_{xy} = \mathrm{M}[XY] - \overline{x}\,\overline{y}$.

16.16. $\|r_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{matrix} \right\|$.

16.17. а) $\mathrm{M}[X] = \alpha + \gamma = 0{,}5$; $\mathrm{M}[Y] = \alpha + \beta = 0{,}45$;
б) $\mathrm{D}[X] = (\alpha+\gamma)(\beta+\delta) = 0{,}25$; $\mathrm{D}[Y] = (\alpha+\beta)(\gamma+\delta) = 0{,}2475$;
в) $k_{xy} = \mathrm{M}[XY] - \mathrm{M}[X]\mathrm{M}[Y] = \alpha - (\alpha+\gamma)(\alpha+\beta) = 0{,}175$.

16.18. $\mathrm{M}[X] = \mathrm{M}[Y] = 0$; $\|k_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{matrix} \right\|$.

16.19. $f(x,y) = \cos x \cos y$; $\mathrm{M}[X] = \mathrm{M}[Y] = \frac{\pi}{2} - 1$; $\|k_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} \pi-3 & 0 \\ 0 & \pi-3 \end{matrix} \right\|$.

16.20. $p = \frac{2l}{\pi L}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{L^2}{l^2}} + \frac{L}{l} \arccos \frac{L}{l}\right]$.

16.21. $p = \frac{l}{\pi ab}[2(a+b) - l]$. Указание. Воспользоваться формулой $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где событие A — пересечение иглой стороны a, событие B — пересечение стороны b.

16.22. $f(y, z_n) = n(n-1)f(y)f(z)[\mathcal{F}(z) - \mathcal{F}(y)]^{n-2}$.

16.23. $p(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \ldots, X_m = n_m) = \dfrac{C_{N_1}^{n_1} C_{N_2}^{n_2} \ldots C_{N_{m+1}}^{n_{m+1}}}{C_N^n}$.
m-мерное гипергеометрическое распределение;
$\mathrm{M}[X_i] = np_i$; $\mathrm{D}[X_i] = np_i(1-p_i)\frac{N-n}{N-1}$; $k_{ij} = -np_ip_j\frac{N-n}{N-1}$, где $p_i = \frac{N_i}{N}$.

16.24.
$\mathrm{M}[X_1^{r_1}, X_2^{r_2} \ldots, X_n^{r_n}] = \frac{\Gamma(\nu_1+r_1)\Gamma(\nu_2+r_2)\ldots\Gamma(\nu_n+r_n)\Gamma(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{n+1})}{\Gamma(\nu_1+\ldots+\nu_{n+1}+r_1+\ldots+r_n)\Gamma(\nu_1)\Gamma(\nu_2)\ldots\Gamma(\nu_n)}$;
$\mathrm{M}[X_i] = \frac{\nu_i}{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{n+1}}$; $\mathrm{D}[X_i] = \frac{\nu_i(\nu_1+\ldots+\nu_{n+1}-\nu_i)}{(\nu_1+\ldots+\nu_{n+1})^2(\nu_1+\ldots+\nu_{n+1}+1)}$;
$k_{ij} = \frac{\nu_i\nu_j}{(\nu_1+\ldots+\nu_{n+1})^2(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{n+1})}$.

16.25. $G(u_1, u_2, \ldots, u_n) = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i(u_i-1)}$.
При $j = l = m$ $\quad \mathrm{M}[X_jX_lX_m] = \mathrm{M}[X_j^3] = \lambda_j + 3\lambda_j^2 + \lambda_j^3$.
При $j \neq l \neq m$ $\quad \mathrm{M}[X_jX_lX_m] = \lambda_j\lambda_m\lambda_l$.
При $m = l \neq j$ $\quad \mathrm{M}[X_l^2X_j] = \lambda_j\lambda_l(1+\lambda_l)$.

16.26. $p(i_1, i_2, \ldots, i_r) = \dfrac{\Gamma\left(k + \sum_{j=1}^r i_r\right)}{\Gamma(k)\prod_{j=1}^r i_j!} p_0^k \prod_{j=1}^r p_j^{ij}$.

16.27. 1) $G(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \dfrac{p_0^k}{\left(1 - \sum_{j=1}^r u_jp_j\right)^k}$,
2) $\mathrm{M}[i_j] = \frac{kp_j}{p_0}$, $\mathrm{M} = \frac{k}{p_0}$.

16.28. $E_{x,y}(u_1u_2) = \exp\left[i(\overline{x}u_1 + \overline{y}u_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2u_1^2 + 2\sigma_1\sigma_2ru_1u_2 + \sigma_2^2u_2^2)\right]$.

16.29. $E_{x_1,x_2,\ldots,x_n}(u_1,u_2,\ldots,u_n) = \exp\Big[ai\sum_{m=1}^n u_m - \frac{\sigma^2}{2}\sum_{m=1}^n u_m^2 - {}$
${} - \alpha\sigma^2\sum_{m=1}^{n-1} u_mu_{m+1}\Big]$.

16.30. $\mathrm{M}[(X_1^2 - \sigma^2)(X_2^2 - \sigma^2)] = 2k_{12}^2$.

16.31. а) $\mathrm{M}[X_1^2X_2^2X_3^2] = 8k_{12}k_{13}k_{23} + 2\sigma^2(k_{12}^2 + k_{13}^2 + k_{23}^2) + \sigma^2$;
б) $\mathrm{M}[(X_1^2 - \sigma^2)(X_2^2 - \sigma^2)(X_3^2 - \sigma^2)] = 8k_{12}k_{13}k_{23}$.

16.32. $\mathrm{M}[X_1X_2X_3] = 0$.

16.33. $\mathrm{M}[X_1X_2X_3X_4] = k_{12}k_{34} + k_{13}k_{24} + k_{13}k_{23}$.

16.34. Для доказательства воспользоваться разложением характеристической функции $E_{x_1,x_2,\ldots,x_n}(u_1,u_2,\ldots,u_n) = \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{m=1}^n\sum_{l=1}^n k_{ml}u_mu_l\right]$ в бесконечный ряд по степеням $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

16.35. $E(u_1, u_2) = (p_1e^{iu_1s_1} + q_1e^{iu_1s_2})^{N_1}(p_2e^{i(u_1+u_2)s_1} + q_2 \times$
$\times e^{i(u_1+u_2)s_2})^{N_2}(p_3e^{i(u_1+u_2)s_1} + q_3e^{i(u_1+u_2)s_2})^{N_3}(p_4e^{iu_2s_1} + q_4e^{iu_2s_2})^{N_4}$;
$k_{xy} = -2s_1s_2(N_2p_2q_2 + N_3p_3q_3)$.

16.36. $E_{x_1,x_2,\ldots,x_r}(u_1,u_2,\ldots,u_r) = G_{x_1,x_2,\ldots,x_r}(e^{iu_1}, e^{iu_2}, \ldots, e^{iu_r})$.

16.37. $E(u_1, u_2, \ldots, u_m) = (p_1e^{iu_1} + p_2e^{iu_2} + \ldots + p_me^{iu_m} + p_{m+1})^n$;
$\mathrm{M}[X_1X_2^2X_3^3] = \frac{n!}{(n-6)!}p_1p_2^2p_3^3$.

16.38. $E(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \frac{p_0^k}{\left(1-\sum_{m=0}^{r} p_m e^{iu_m}\right)^k}$; $\mathrm{D}[A_j] = \frac{kp_j(p_0+p_j)}{p_0^2}$.

§ 17. Закон нормального распределения системы случайных величин

17.1. $\mathcal{F}(x,y) = \frac{1}{4}\left[1+\hat{\Phi}\left(\frac{x-\overline{x}}{\rho\sigma_x\sqrt{2}}\right)\right]\left[1+\hat{\Phi}\left(\frac{y-\overline{y}}{\rho\sigma_y\sqrt{2}}\right)\right]$.

17.2. $f(x,y) = \frac{1}{182\pi\sqrt{3}}\, e^{-\frac{2}{3}\left[\frac{(x-26)^2}{196}+\frac{(x-26)(y+12)}{182}+\frac{(y+12)^2}{169}\right]}$.

17.3. а) $c = 1{,}39$; б) $\|k_{ij}\|| = \left\| \begin{matrix} 0{,}132 & -0{,}026 \\ -0{,}026 & 0{,}105 \end{matrix} \right\|$; в) $S_{\text{эл}} = 0{,}162$.

17.4. $f(2,2) = \frac{1}{2\pi e^3\sqrt{2}} = 0{,}00560$.

17.5. $f(x,y,z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}}\, e^{-\frac{1}{230}(39x^2+36y^2+26z^2-44xy+36xz-38yz)}$. $f_{\max} = \frac{1}{2\pi\sqrt{230\pi}} = 0{,}00595$.

17.6. а)

$$\|k_{ij}^{-1}\| = \left\| \begin{matrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|$$

б) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})^2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$, где $x_0 = 0$.

17.7.

$$\|k_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} 10 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 10 \end{matrix} \right\|;$$

$f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{1}{384\pi^2}\, e^{-\frac{5}{96}(x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2)+\frac{1}{48}(x_1x_2+y_1y_2)}$.

17.8. $P(k) = 1 - e^{-\frac{k^2}{2}}$.

17.9. $P(k) = \hat{\Phi}(k) - \frac{2\rho k}{\sqrt{\pi}}\, e^{-\rho^2 k^2}$.

17.10. $P(R) = e^{-\frac{d^2}{2\sigma^2}} \int_0^{\frac{R}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{\sqrt{2}d\sqrt{t}}{\sigma}\right) e^{-t}dt$, где $I_0(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента.

17.11. а) $P(X < Y) = \frac{1}{2}$; б) $P(X > -Y) = \frac{1}{2}$.

17.12. $P = \frac{1}{4}\left[\Phi\left(\frac{c-\overline{x}}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a-\overline{x}}{\sigma_x}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{d-\overline{y}}{\sigma_y}\right) - \Phi\left(\frac{b-\overline{y}}{\sigma_y}\right)\right] = 0{,}0655$.

17.13. а) $P_{\text{круг}} = 1 - e^{-\frac{1}{2}} = 0{,}3935$; б) $P_{\text{кв}} = \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\right]^2 = 0{,}3890$; в) $P_{\text{прям}} = \left[\Phi\left(\frac{\sqrt{0{,}1\pi}}{2}\right)\Phi\left(\frac{\sqrt{10\pi}}{2}\right)\right]^2 = 0{,}2194$;

17.14. $p = 0{,}5\left(1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}}\right)$.

17.15. $P = \dfrac{\alpha\left(e^{-\rho^2\dfrac{R_1^2}{E^2}} - e^{-\rho^2\dfrac{R_2^2}{E^2}}\right)}{2\pi}.$

17.16. $A = 4dk;\ \alpha = E_x\sqrt{1+\frac{2\rho^2 d^2}{3E_x^2}};\ \beta = E_z\sqrt{1+\frac{2\rho^2 k^2}{3E_z^2}}.$

17.17. $P = \hat{\Phi}\left(\frac{d}{\alpha}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{R}{\beta}\right) < \hat{\Phi}\left(\frac{d}{E_x}\right)\hat{\Phi}\left(\frac{k}{E_z}\right)$, так как $\alpha > E_x,\ \beta > E_z$.

17.18. $P_{\text{вып}} = 1 - q^3 - 3q^2(1-q) - 3q[(p_2+p_3)^2 + 2p_2p_4] - p_2^3 = 0{,}379$, $P_{\text{отл}} = p_5^3 + 3p_5^2(p_3+p_4) + 3p_4^2p_5 = 0{,}007$, где $p_2 = 0{,}196$, $p_3 = 0{,}198$, $p_4 = 0{,}148$, $p_5 = 0{,}055$, $q = 0{,}403$.

17.19. $P = \frac{1}{8}[\Phi(k)]^2.$

17.20. $P = \Phi\left(\frac{R}{\sigma}\right) - \frac{\sqrt{2}\,R}{\sigma\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} - \left[\Phi\left(\frac{a}{2\sigma}\right)\right]^3.$

17.21. а) $P = 0{,}5\left(1 - e^{\frac{R^2}{2\sigma^2}}\right)\cdot\left[\Phi\left(\frac{mh}{(m+n)B}\right) + \Phi\left(\frac{nh}{(m+n)B}\right)\right];$

б) $P = \frac{h}{2H}\left(1 - e^{\frac{R^2}{2\sigma^2}}\right).$

17.22. $P = 0{,}5\left[\Phi\left(\frac{h}{a}\right) - \frac{h\sigma}{\sqrt{h^2\sigma^2+R^2a^2}}\,\Phi\left(\frac{\sqrt{h^2\sigma^2+R^2a^2}}{\sigma a}\right)\right].$

17.23. $25(x_1-10)^2 + 36(x_1-10)(x_2-10) + 36(x_2-10)^2 = 7484,6.$

17.24. $16(x_1-2)^2 + 5x_2^2 + 16(x_3+2)^2 + 8(x_1-2)(x_3+2) = 805{,}1.$

17.25. $\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i=1})^2 = \frac{2}{\ln e}\left[5 - \frac{n}{2}\lg(2\pi)\right]$. Задача не имеет решений при $n > 12$.

17.26. $R = 2,\ f(\xi, n) = \frac{1}{2\pi}\,e^{-\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2)}.$

§ 18. Законы распределения подсистем случайных величин. Условные законы распределения. Условные моменты. Корреляционное отношение

18.1.

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{1}{(a_2-a_1)(b_2-b_1)(c_2-c_1)}, & \text{при } a_1 \leqslant x \leqslant a_2, b_1 \leqslant y \leqslant b_2, c_1 \leqslant z \leqslant c_2, \\ 0, & \text{вне параллелепипеда.} \end{cases}$$

$$f(y,z) = \begin{cases} \frac{1}{(b_2-b_1)(c_2-c_1)}, & \text{при } b_1 \leqslant y \leqslant b_2,\ c_1 \leqslant z \leqslant c_2, \\ 0, & \text{вне прямоугольника.} \end{cases}$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{(c_2-c_1)}, & \text{при } c_1 \leqslant z \leqslant c_2, \\ 0, & \text{вне интервала. Случайные величины } X,\ Y,\ Z \\ & \text{независимы.} \end{cases}$$

18.2. При $|x| \leqslant r$, $|y| \leqslant r$, $f_x(x) = \frac{2\sqrt{r^2-x^2}}{\pi r^2}$, $f_y(y) = \frac{2\sqrt{r^2-y^2}}{\pi r^2}$,

$$F_x(x) = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{r}\sqrt{1-\frac{x^2}{r^2}}\right] + \frac{1}{2},$$

$$F_y(y) = \frac{1}{\pi}\left[\arcsin\frac{y}{r} + \frac{y}{r}\sqrt{1-\frac{y^2}{r^2}}\right] + \frac{1}{2},$$

X и Y независимы, так как $f(x,y) \neq f_x(x)f_y(y)$.

18.3.

$$f(x \mid y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2-x^2}}, & \text{при } |x| < R,\\ \delta(y), & \text{при } |x| = R, \end{cases}$$

$\delta(y)$ — дельта-функция.

18.4. $\|k_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} \frac{r^2}{4} & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{4} \end{matrix} \right\|$; X и Y не коррелированы.

18.5. а)

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & \text{внутри квадрата},\\ 0, & \text{вне квадрата}. \end{cases}$$

Внутри квадрата:

б) $f_x(x) = \frac{a\sqrt{2}-2|x|}{a^2}$, $f_y(y) = \frac{a\sqrt{2}-2|y|}{a^2}$;

в) $f(y \mid x) = \frac{1}{a\sqrt{2}-2|x|}$, $f(x \mid y) = \frac{1}{a\sqrt{2}-2|y|}$;

г) $\mathrm{D}[X] = \mathrm{D}[Y] = \frac{a^2}{12}$, $k_{xy} = 0$;

д) случайные величины X и Y зависимы, но не коррелированы.

18.6. $f_z(z) = \frac{3(r^2-z^2)}{4r^3}$ при $|z| < r$; $f(x,y \mid z) = \frac{1}{\pi(r^2-z^2)}$ при $|z| < r$.

18.7. $k = 4$; $f_x(x) = 2xe^{-x^2}$ $(x \geqslant 0)$; $f_y(y) = 2ye^{-y^2}$ $(y \geqslant 0)$; $f(x \mid y) = f_x(x)$; $f(y \mid x) = f_y(x)$; $f(y \mid x) = f_y(y)$; $\mathrm{M}[X] = \mathrm{M}[Y] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$; $\mathrm{D}[X] = \mathrm{D}[Y] = 1 - \frac{\pi}{4}$; $k_{xy} = 0$.

18.8. $\mathrm{M}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{M}[X \mid y] f_y(y)\,dy$; $\mathrm{D}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{D}[X \mid y] f_y(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} \{\overline{x} - \mathrm{M}[X \mid y]\}^2 f_y(y)\,dy$.

18.9. Так как $\mathrm{M}[X] = 5$, $\mathrm{M}[Y] = -2$, $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 2\sigma$, $r = -0{,}8$, то:

а) $\mathrm{M}[X \mid y] = 5 - \frac{0{,}8}{2}(y+2) = 4{,}2 - 0{,}4y$, $\mathrm{M}[Y \mid x] = -2 - 0{,}8 \cdot 2(x - 5) = 6 - 1{,}6x$, $\sigma_{x|y} = 0{,}6\sigma$, $\sigma_{y|x} = 1{,}2\sigma$;

б) $f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-5)^2}{2\sigma^2}}$, $f_y(y) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y+2)^2}{8\sigma^2}}$;

в) $f(x \mid y) = \frac{1}{0{,}6\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x+0{,}4y-4{,}2)^2}{0{,}72\sigma^2}}$,

$f(y \mid x) = \frac{1}{1{,}2\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y+1{,}6x-6)^2}{2{,}88\sigma^2}}$.

18.10. $f_x(x) = A\sqrt{\frac{\pi}{c}}\, e^{-\left(a-\frac{b^2}{4c}\right)x^2}$; $f_y(y) = A\sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\left(a-\frac{b^2}{4a}\right)y^2}$. Для независимости X и Y необходимо, чтобы было $\frac{\sqrt{ac}}{\pi A}\, e^{-\frac{b^2}{4}\left(\frac{x^2}{c}-\frac{4xy}{b}+\frac{y^2}{a}\right)} = 1$. Это условие выполняется при $b = 0$. При этом $A = \frac{\sqrt{ac}}{\pi}$.

18.11. $k = \frac{3\sqrt{3}}{\pi}$; $k_{xy} = -\frac{1}{18}$; $f(x \mid y) = \frac{2}{\pi}\, e^{-(2x+1{,}5y)^2}$; $f(y \mid x) = \frac{3}{\sqrt{\pi}}\, e^{-(x+3y)^2}$.

18.12. а) $f_x(x) = \frac{1}{40\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-125)^2}{3200}}$;

б) $f_y(y) = \frac{1}{30\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y+30)^2}{1800}}$;

в) $f(x \mid 0) = \frac{1}{32\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-149)^2}{2048}}$;

г) $f(y \mid 25) = \frac{1}{24\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y+75)^2}{1152}}$.

18.13. $\mathrm{M}[X \mid y] = 0{,}8y + 149$; $\mathrm{M}[Y \mid x] = 0{,}45x - 86{,}25$.

18.14. $f(r) = \frac{2r^2}{a^3\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{r^2}{2a^2}}$; $\overline{r} = \mathrm{M}(R) = \frac{4a}{\sqrt{2\pi}}$.

18.15. $f(\varphi) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi(1-\rho\sin 2\varphi)}$.

18.16. X и Y зависимы; $f(\rho) = \frac{\rho}{\sqrt{(1+\rho^2)^3}}$.

18.17. $f(r) = \frac{4}{\pi}\,\frac{r^2}{(1+r^2)^2}$; $f(y, z/x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1+x^2}{(1+x^2+y^2+z^2)^2}$.

18.18. $f_{x_1,x_3}(x_1, x_3) = \frac{1}{2\pi\sqrt{96}}\, e^{-\frac{1}{96}(5x_1^2-2x_1x_3+5x_3^2)}$;

$f_{x_1,x_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{20\pi}\, e^{-\frac{x_1^2+x_2^2}{20}}$.

18.19. $f(x_3, x_4 \mid 0; 10) = \frac{5}{96\pi}\, e^{-\frac{5}{96}[x_3^2+(x_4-2)^2]}$; $\mathrm{M}[X_3 \mid 0; 10] = 0$; $\mathrm{M}[X_4 \mid 0; 10] = 2$; $\mathrm{D}[X_3 \mid 0; 10] = \mathrm{D}[X_4 \mid 0; 10] = 9{,}6$.

18.20. Нормальный закон распределения с математическим ожиданием $\overline{x} = \overline{x}_n + \frac{1}{\Delta}\sum_{j,s=1}^{n-1}(x_j - \overline{x}_j)k_{sn}A_{js}$ и дисперсией $\sigma_x^2 = \sigma_x^2 - \frac{1}{\Delta}\sum_{j,s=1}^{n-1} k_{jn} \times k_{sn}A_{js}$, где Δ — определитель, составленный из элементов корреляционной матрицы подсистемы случайных величин $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-2}, X_{n-1})$, а A_{js} — алгебраические дополнения этого определителя.

18.21. Возвести в квадрат и найти математические ожидания левой и правой частей тождества.

18.22. В первом случае $\sigma_{y/x}^2 = \sigma_y^2$, $\eta_{y/x}^2 = 0$, а во втором $\sigma_{y/x}^2 = 0$, $\eta_{y/x}^2 = 1$.

18.23. $\mathrm{D}[Y] = a^2\mathrm{D}[X]$, $k_{xy} = a\mathrm{D}[X]$, $r_{xy} = 1$, $\eta_{y/x} = 1$.

18.24. $\mathrm{D}[Y] = m_{2k} - m_k^2$; $k_{xy} = m_{k+1} - m_1m_k$; $|r_{xy}| = \frac{|m_{k+1}-m_1m_k|}{\sqrt{(m_2-m_1^2)(m_{2k}-m_k^2)}} = 1$. $\eta_{y/x} = 1$, так как Y однозначная функция X.

18.25. $f_1(x) = \frac{2x}{a^2}$; $f_2(x) = \frac{2y}{a^2}$; $f(y \mid x) = \frac{1}{x}$; $f(x \mid y) = \frac{1}{y}$; X и Y зависимы $\overline{x}_x = \frac{x}{2}$; $\overline{y} = \frac{2a}{3}$; $\sigma_{y/x}^2 = \frac{x^2}{12}$; $\sigma_y^2 = \frac{a^2}{18}$; $\eta_{y/x}^2 = 1 - \frac{3x^2}{2a^2}$.

Глава IV
Моменты и законы распределения функций случайных величин

§ 19. Моменты и характеристические функции функций случайных величин

19.1. $\frac{4a}{\pi}$.

19.2. $\pi\frac{a}{2}$.

19.3. $\mathrm{M}[G] = 4{,}1$ г, $\mathrm{D}[G] = 0{,}08$ г^2.

19.4. $\mathrm{M}[\Phi] = \operatorname{arctg}\frac{l}{h} - \frac{h}{2l}\ln\left(1+\frac{l^2}{h^2}\right)$.

19.5. $\frac{40}{\pi}$ см.

19.6. $\mathrm{M}[Y] = 1$.

19.7. 1,15 м.

19.8. $\frac{a^2}{2}$.

19.9. $(n-2)pq^2$ (при $n \geqslant 3$).

19.10. $\mathrm{M}[R] = \frac{\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$; $\mathrm{D}[R] = 2\sigma^2\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$.

19.11. $\frac{11a^2}{18\pi}$.

19.12. $\frac{3}{2\pi}$.

19.13. $\chi\overline{\omega}$,

19.14. $\sum_{k=1}^{n} p_k$.

19.15. $n\left[1-\left(1-\frac{p}{n}\right)^m\right]$.

19.16. $n[1-(1-p)^m]$.

19.17. $\overline{t} = T\left[1-e^{-a(1-e^{-\gamma})}\right]$; $\overline{s} = kT^2\left[1-2e^{-a(1-e^{-\gamma})}+e^{-a(1-e^{-2\gamma})}\right]$.

19.18. $n\left[1-\left(1-\frac{p}{n}\right)^m\right]+\sum_{k=0}^{m}(n-k)\left[1-\left(1-\frac{1}{n-k}\right)^m\right]P_n^m(k)$, где $P_n^m(k)$ — вероятность того, что после первой серии циклов будут повреждены хотя бы один раз ровно k блоков;

$P_n^m(k) = C_n^k\sum_{i=0}^{k}(-1)^i C_k^i\left[1-\frac{p(n-k+i)}{n}\right]^m$.

19.19. а) $mp+\sum_{k=0}^{4}\left\{(m-2k)p+k[1-(1-p)^2]\right\}P_n^m(k)+P_n^m(5)\times$ $\times[3-(1-p)^2-2(1-p)^3]+2P_n^m(6)[1-(1-p)^4]+P_n^m(7)[1-(1-p)^8]$, где $P_n^m(k) = C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ для $n = m = 8$;

б) $2mp$ для $n > 2m$.

19.20. $\frac{a^2}{6b}\ln\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a}+\frac{b^2}{6a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}+\frac{1}{3}\sqrt{a^2+b^2}$.

19.21. $\frac{b^2}{a}\ln\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}+\frac{a^2-2b^2}{3a^2}\sqrt{a^2+b^2}+\frac{2}{3}\frac{b^3}{a^2}$.

19.22. $\sum_{k=1}^{n} p_k$; $\sum_{k=1}^{n} p_k(1-p_k)$.

19.23. 0,316 г.

19.24. $\frac{l}{3}$; $\frac{l^2}{18}$.

19.25. $\mathrm{M}[Z] = 5a$; $\mathrm{D}[Z] = 100a^2 + 225b^2 - 150ab$.

19.26. $\mathrm{M}[Y] = \frac{E_x}{\rho\sqrt{\pi}}$; $\mathrm{D}[Y] = \frac{E_x^2}{\rho^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\right)$.

19.27. $\mathrm{M}[Y] = e^{-\overline{x}(1-\cos b)}\cos(\overline{x}\sin b)$;
$\mathrm{D}[Y] = \frac{1}{2}\left[1 + e^{-\overline{x}(1-\cos 2b)}\cos(\overline{x}\sin 2b)\right] - \overline{y}^2$

19.28. а) $26,7$ м^2; б) $22,0$ м^2; в) 10 м^2;

19.29. $\mathrm{M}[Z] = 2\tilde{a}\sqrt{\frac{2}{\pi}} - \frac{\sigma}{\sqrt{2}}\sqrt{\pi}$; $\mathrm{D}[Z] = a^2\left(3 - \frac{8}{\pi}\right) + \frac{\sigma^2}{2}(4 - \pi)$.

19.30. $\mathrm{M}[Z] = 5(\sqrt{3} - 1)$; $\mathrm{D}[Z] = 7600$.

19.31. $r_{xy} = \frac{n!!}{\sqrt{(2n-1)!!}}$, если n нечетное; $r_{xy} = 0$, если n четное.

19.32. $\mathrm{M}[Z] = 0$; $\mathrm{D}[Z] = 2\Delta^2\sigma^2$.

19.33. $\frac{2a}{\pi}$; $a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\right)$.

19.34. $\overline{r} = a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right)$; $\mathrm{D}[R] = \frac{a^2r^2}{2}\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)$ (где e — эксцентриситет).

19.35. а) $\mathrm{D}[V_x] = \frac{12\sigma^2}{n\tau^2(n^2-1)} = \sigma_0^2$;

б) $\mathrm{D}[V_x] = \sigma_0^2(1 - r)$, $0 \leqslant r \leqslant 1$;

в) $\mathrm{D}[V_x] = \sigma_0^2\left[1 + 2r\left(1 - \frac{3}{n}\right)\right]$, $-\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant \frac{1}{2}$, $(n > 2)$;

г) $\mathrm{D}[V_x] = \sigma_0^2\Big\{1 + \frac{2}{n(n^2-1)(e^{-\alpha\tau}-1)^4}\big[-3(n-1)^2e^{-\alpha\tau(n+3)} + 6(n^2 - 1)e^{-\alpha\tau(n+2)} - 3(n+1)^2e^{-\alpha\tau(n+1)} - n(n^2 - 1)e^{-4\alpha\tau} + 3(n^2 - 1)(n - 1)e^{-3\alpha\tau} - 3(n^3 - 2n - n - 2)e^{-2\alpha\tau} + (n^2 - 1)(n - 3)e^{-\alpha\tau}\big]\Big\}$.

19.36. $\mathrm{D}_n[X_c] = \frac{2\sigma^2(2n-1)}{n(n+1)}\Big\{1 + \frac{2}{(2n-1)(n-1)}\Big[\frac{n+1}{n(n-1)}\sum_{i\neq j}^{n} r_{ij}(2n + 1 - 3i)(2n + 1 - 3j) + 9n^2\sum_{i\neq j}^{n}(2i - n - 1)(2j - n - 1) + \frac{6}{n-1}\sum_{i\neq j}^{n} r_{ij}(2n + 1 - 3i)(2j - n - 1)\Big]\Big\}$.

19.37. $\overline{z} = \mathrm{M}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty}\overline{x}f_x(x)[1 - F_y(x)]dx + \int_{-\infty}^{\infty} yf_y(y)[1 - F_x(y)]dy$,
$\mathrm{D}[Z] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2f_x(x)[1 - F_y(x)]dx + \int_{-\infty}^{\infty} y^2f_y(y)[1 - F_x(y)]dy - \overline{z}^2$.

19.38. $\mathrm{D}[\tilde{U}] = \sigma^2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\right) \approx 0{,}45\sigma^2$.

19.39. $\mathrm{M}[Z] = \overline{x}_1\,\overline{x}_2$, $\mathrm{D}[Z] = \overline{x}_1^2\sigma_2^2 + \overline{x}_2^2\sigma_1^2$. У к а з а н и е. Случайное число дорожных происшествий X_1 и число пострадавших X_2 можно представить в виде сумм вида $X_1 = \sum_{j=0}^{\infty} X_{1j}$, $X_2 = \sum_{j=0}^{\infty} X_{2j}$, где

$$X_{1j} = \begin{cases} 1, & \text{если произошло } j\text{-е происшествие,} \\ 0, & \text{если не произошло } j\text{-е происшествие;} \end{cases}$$

X_{2j} — число жертв в j-м происшествии. Тогда общее число жертв $Z = \sum_{j=0}^{\infty} X_{1j}X_{2j}$.

19.40. $E_y(u) = \exp\left[iu\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(2n^2+1)}{6}u^2\right]$.

19.41. $E_y(u) = (1 - 2iu\sigma_x^2)^{-\frac{1}{2}}$; $m_r = \mathrm{M}[Y^2] = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2r - 1)\sigma_x^{2r}$.

19.42. $E_y(u) = (1 + iu)^{-1}$; $m_r = \mathrm{M}[Y^2] = (-1)^r r!$

19.43. $E_y(u) = \frac{e^{iu(a+b)} - e^{iub}}{iua}$.

§ 20. Законы распределения функций случайных величин

20.1.
$$F_y(y)=\begin{cases}F_x\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{при } a>0,\\ 1-F_x\left(\frac{y-b}{a}\right), & \text{при } a<0.\end{cases}$$

20.2. $f_y(y)=f_x(e^y)e^y$.

20.3.
$$f_z(z)=\begin{cases}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi a z}}\,e^{-\frac{z}{2a\sigma^2}}, & \text{при } z\geqslant 0,\\ 0, & \text{при } z<0.\end{cases}$$

20.4.
$$f_y(y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sigma}\right)^2}, & \text{при } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{при } y<0.\end{cases}$$

20.5.
$$f_y(y)=\begin{cases}\frac{\pi}{\sin\pi y}, & \text{при } \frac{1}{2}\leqslant y\leqslant\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}e,\\ 0, & \text{при } y<\frac{1}{2} \text{ или } y>\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}e.\end{cases}$$

20.6.
$$f_v(v)=\begin{cases}\frac{1}{3av^{\frac{2}{3}}}, & \text{при } 0\leqslant v\leqslant a^3,\\ 0, & \text{при } v<0 \text{ или } v>a^3.\end{cases}$$

20.7. $f_x(x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{l}{l^2+x^2}\quad(-\infty\leqslant x\leqslant\infty)$.

20.8.
$$f_y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-y^2}}, & \text{при } |y|\leqslant a,\\ 0, & \text{при } |y|>a\end{cases}\qquad \text{(закон распределения арксинуса).}$$

20.9. а) $f_y(y)=\dfrac{1}{3\pi\left[1+(1-y)^{\frac{2}{3}}\right](1-y)^{\frac{2}{3}}}$;

б) если $a>0$, то
$$f_y(y)=\begin{cases}\frac{\sqrt{a}}{\pi(a+y)\sqrt{y}}, & \text{при } y\geqslant 0,\\ 0, & \text{при } y<0.\end{cases}$$

если $a<0$, то
$$f_y(y)=\begin{cases}\frac{-\sqrt{a}}{\pi(a+y)\sqrt{y}}, & \text{при } y\leqslant 0,\\ 0, & \text{при } y>0.\end{cases}$$

в)
$$f_y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\pi}, & \text{при } |y|\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{при } |y|>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

г) $f_y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}\quad(-\infty\leqslant y\leqslant\infty)$.

20.10. Для нечетного n
$$f_y(y)=\frac{ay^{\frac{1}{n}-1}}{\pi n(a^2+y^{\frac{2}{n}})}\quad(-\infty\leqslant y\leqslant\infty);$$

для четного n

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{2ay^{\frac{1}{n}-1}}{n\pi(a^2+y^{2/n})}, & \text{при } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

20.11. а) $f_y(y) = |y|e^{-y^2} \quad (-\infty \leqslant y \leqslant \infty)$;
б)

$$f_y(y) = \begin{cases} 2ye^{-y^2}, & \text{при } y \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

20.12.

$$f_y(y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(k+1{,}5)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(k+1)} \cos^{2k+1} y, & \text{при } |y| \leqslant \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{при } |y| > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

20.13. а) $f_y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{y^2}{2}}$; б) $f_y(y) = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-\overline{y})^2}{2\sigma_y^2}}$.

20.14.

$$f_y(y) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } y < 0 \text{ или } y > 1. \end{cases}$$

20.16. $f_z(z) = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2\sigma_z^2}}$, где $\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$.

20.17. а) $f_z(z) = \int_0^\infty \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right)\, dx - \int_{-\infty}^0 \frac{1}{x} f\left(x, \frac{z}{x}\right)\, dx$;
б) $f_z(z) = \frac{1}{2}\, e^{-|z|}$,
в) $f_z(z) = \frac{1}{\pi\sigma_x\sigma_y}\, K_0\left(\frac{z}{\sigma_x\sigma_y}\right)$, где K_0 — функция Макдональда;
г) $f_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{z^2}{2}}$;
д) $f_z(z) = \frac{1}{\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}\, e^{\overline{\frac{zr}{\sigma_x\sigma_y(1-r^2)}}}\, K_0\left[\frac{z}{\sigma_x\sigma_y(1-r^2)}\right]$.

20.18. а) $f_z(z) = \int_0^\infty yf(zy, y)\, dy - \int_{-\infty}^0 yf(zy, y)\, dy$;
б) $f_z(z) = \frac{2z}{(1+z^2)^2}$;
в) $f_z(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{\pi}}(1 + z^2)^{-\frac{n+1}{2}}$ (закон распределения Стьюдента);
г) $f_z(z) = \frac{\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}}{\pi(\sigma_y^2 z^2 - 2rz\sigma_x\sigma_y + \sigma_x^2)}$, при $r = 0$ $f_z(z) = \frac{\frac{\sigma_x}{\sigma_y}}{\pi\left[z^2 + \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\right)^2\right]}$ (закон распределения Коши);
д)

$$f_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{(z+1)^2}, & \text{при } z \geqslant 0, \\ 0, & \text{при } z < 0; \end{cases}$$

е)

$$f_z(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z < 0, \\ \frac{1}{2}, & \text{при } 0 < z \leqslant 1, \\ \frac{1}{2z^2}, & \text{при } z > 1. \end{cases}$$

20.19. а) $f_r(r) = r\int_{-r}^{r} \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}[f(x,\sqrt{r^2-x^2})+f(x,-\sqrt{r^2-x^2})]dx = r\int_0^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$;

б)

$$f_r(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\sigma}\right)^2}, & \text{при } r \geqslant 0,\\ 0, & \text{при } r < 0; \end{cases}$$

в)

$$f_r(r) = \begin{cases} \frac{2r}{a^2}, & \text{при } 0 \leqslant r \leqslant a,\\ 0, & \text{при } r > a \text{ или } r < a; \end{cases}$$

г) $f_r(r) = \frac{r}{\sigma^2}\,e^{-\frac{r^2+h^2}{2\sigma^2}}\,J_0\left(\frac{rh}{\sigma^2}\right)$, где $J_0(z)$ — бесселева функция нулевого порядка от мнимого аргумента;

д) $f_r(r) = \frac{r}{\sigma_x\sigma_y}\,e^{-\frac{r^2(\sigma_x^2+\sigma_y^2)}{4\sigma_x^2\sigma_y^2}}\,J_0\left[\frac{r^2(\sigma_x^2-\sigma_y^2)}{4\sigma_x^2\sigma_y^2}\right]$.

20.20. $U = (X-\overline{x})\cos\alpha + (Y-\overline{y})\sin\alpha$; $V = -(X-\overline{x})\sin\alpha + (Y-\overline{y})\cos\alpha$; $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\,\frac{r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2-\sigma_y^2}$; $\sigma_u^2 = \sigma_x^2\cos^2\alpha + \sigma_y^2\sin^2\alpha + r\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha$; $\sigma_v^2 = \sigma_x^2\sin^2\alpha + \sigma_y^2\cos^2\alpha - r\sigma_x\sigma_y\sin 2\alpha \quad (\sigma_x^2+\sigma_y^2 = \sigma_u^2+\sigma_v^2)$.

20.21.

$$f_\alpha(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-|\alpha|), & \text{при } |\alpha| \leqslant 2,\\ 0, & \text{при } |\alpha| > 2; \end{cases}$$

$$f_\beta(\beta) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\ln|\beta|, & \text{при } |\beta| \leqslant 1,\\ 0, & \text{при } |\beta| > 1. \end{cases}$$

20.22. $f(r,\varphi) = \frac{r}{2\pi\sqrt{1-r_{xy}^2}}\,e^{-\frac{r^2(1-r_{xy}\sin 2\varphi)}{2(1-r_{xy}^2)}}$. При $r_{xy} = 0$ Φ равномерно распределена в интервале $(0, 2\pi)$, а случайная величина R подчиняется закону Рэлея.

20.23. $f(s \mid t)$ — плотность вероятности закона нормального распределения с параметрами $\mathrm{M}[S \mid t] = \overline{s}_0 + \overline{v}_0 t + \overline{a}\frac{t^2}{2}$; $\mathrm{D}[S \mid t] = \mathrm{D}[S_0] + t^2\mathrm{D}[V_0] + \frac{t^4}{4}\mathrm{D}[a] + 2tk_{s_0v_0} + t^2k_{s_0a} + t^3k_{v_0a}$.

20.24. $f_y(y) = \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sigma^n}\,y^{n-1}e^{-\frac{ny^2}{2\sigma^2}}$. Характеристическая функция случайной величины Z_j^2, если $Z_j = \frac{X_j}{\sigma}$, равна $E_{z_j^2}(u) = (1-2ui)^{-\frac{1}{2}}$. Тогда характеристическая функция случайной величины $V = \sum_{j=1}^n Z_j^2$ будет $E_v(u) = (1-2ui)^{-\frac{n}{2}}$, а плотность вероятности $f_v(v) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ivu}(1-2ui)^{-\frac{n}{2}}\,du = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}}\,V^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{v}{2}}$. Если случайные величины X_j имеют одну и ту же дисперсию σ^2, а $\overline{x}_j = 0$, то случайная величина $Y = +\sqrt{\frac{\sigma^2 V}{n}}$. Поэтому $f_y(y) = f_v[\psi(y)]|\psi'(y)|$, $\psi(y) = \frac{y^2 n}{\sigma^2}$.

20.25. $f(r,\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_{n-1}) = \frac{r^{n-1}\cos^{n-2}\varphi_1\cos^{n-3}\varphi_2\ldots\cos\varphi_{n-2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}\,e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$.

20.26. $f_y(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_x\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}y_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{nj}y_j\right)|\Delta|$, $\Delta = |a_{ij}|$.

20.27. $f(r, v) = r^2 \cos v \int_0^{2\pi} f(r\cos v\cos\varphi, r\cos v\sin\varphi, r\sin v)\,d\varphi$.

20.28. $f_y(y) = \sum_{j=1}^n \frac{f_{xy}(y)}{F_{x_j}(y)} \prod_{j=1}^n Fx_j(y)$;

$f_z(z) = \sum_{j=1}^n \frac{f_{x_j}(z)}{1-F_{x_j}(z)} \prod_{i=1}^n [1 - F_{x_j}(z)]$.

20.29. $f(u) = \frac{n}{2^{n-1}} C_{n-1}^{l-1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} \left[\Phi\left(\frac{u}{\sigma}\right)+1\right]^{l-1} \left[1-\Phi\left(\frac{u}{\sigma}\right)\right]^{n-l}$.

20.30. а)

$$F(y) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \leqslant -1, \\ \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{u}{\sigma_x}\right)\right], & \text{при } -1 < y \leqslant 1, \\ 1, & \text{при } y > 1 \end{cases}$$

(дискретная случайная величина);

б)

$$F(y) = \begin{cases} 1, & \text{при } ka < y, \\ \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{y-k\overline{x}}{k\sigma_x}\right)\right], & \text{при } -ka < y \leqslant ka, \\ 0, & \text{при } y \leqslant -ka \end{cases}$$

(случайная величина смешанного типа);

в)

$$F(y) = \begin{cases} 1, & \text{при } y > k(b-a), \\ \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{y-k\overline{x}+ka}{k\sigma_x}\right)\right], & \text{при } 0 < y \leqslant k(b-a), \\ \frac{1}{2}\left[1 + \Phi\left(\frac{y-k\overline{x}-ka}{k\sigma_x}\right)\right], & \text{при } -k(b-a) < y \leqslant 0, \\ 0, & \text{при } y \leqslant -k(b-a) \end{cases}$$

(случайная величина смешанного типа);

20.31. $P = 4 \int\limits_{(S)}\int f(-2x, x^2 + y^2)|y|\,dx\,dy$.

20.32. $f_r(r) = \frac{r^2}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$.

20.33. $f_z(z) = \frac{e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}}}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2} cht} dt = e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} \frac{K_0\left(\frac{z^2}{4\sigma^2}\right)}{\pi\sigma\sqrt{2\pi}}$, K_0 — функция Бесселя чисто мнимого аргумента, второго рода, нулевого порядка.

20.34. Для доказательства воспользоваться свойством характеристической функции $E_z(u) = E(u_1, u_2, \ldots, u_n)|_{u_1=u_2=\ldots=u_n=u}$, где $Z = \sum_{j=1}^n X_j$, $E(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ — характеристическая функция системы, которая для нормальных случайных величин имеет вид

$E(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \exp\left\{i\sum_{r=1}^n u_r\overline{x}_r - \frac{1}{2}\sum_{r-1}^n \sum_{s=1}^n k_{rs}u_r u_s\right\}$.

§ 21. Композиция законов распределения

21.1.

$$f_z(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \leqslant 2a, \\ \frac{z-2a}{(b-a)^2}, & \text{при } 2a \leqslant z \leqslant a+b, \\ \frac{2b-z}{(b-a)^2}, & \text{при } a+b \leqslant z \leqslant 2b, \\ 0, & \text{при } z \geqslant 2b. \end{cases}$$

21.2.

$$f_z(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \geqslant \overline{x}+\overline{y}+a+b, \\ \frac{\overline{x}+\overline{y}+a+b-z}{(4ab)}, & \text{при } \overline{x}+\overline{y}+b-a \leqslant z \leqslant \overline{x}+\overline{y}+a+b, \\ \frac{1}{2b}, & \text{при } \overline{x}+\overline{y}+a-b \leqslant z \leqslant \overline{x}+\overline{y}+b-a, \\ \frac{a+b-\overline{x}-\overline{y}+z}{4ab}, & \text{при } \overline{x}+\overline{y}-a-b \leqslant z \leqslant \overline{x}+\overline{y}+a-b, \\ 0, & \text{при } z \leqslant \overline{x}+\overline{y}-a-b, \end{cases}$$

при $\overline{x} = \overline{y} = 0 \quad f_z(z) = (|a+b+z|+|a+b-z|-|a-b+z|-|a-b-z|)\,\frac{1}{8ab}$.

21.3. $f_z(z) = \frac{1}{2(b-a)}\left[\Phi\left(\frac{z-a-\overline{x}}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{z-b-\overline{x}}{\sigma_x}\right)\right]$, где $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

21.4.

$$f_z(z) = \begin{cases} 0, & \text{при } z \leqslant 3a, \\ \frac{(z-3a)^2}{2(b-a)^3}, & \text{при } 3a \leqslant z \leqslant 2a+b, \\ \frac{(z-3a)^2-3[z-(b+2a)]^2}{2(b-a)^3}, & \text{при } 2a+b \leqslant z \leqslant a+2b, \\ \frac{(3b-z)^2}{2(b-a)^3}, & \text{при } a+2b \leqslant z \leqslant 3b, \\ 0, & \text{при } z \geqslant 3b. \end{cases}$$

21.5. Композиция закона нормального распределения с законом равной вероятности имеет плотность вероятности

$$f_z(z) = \frac{1}{4l}\left[\hat{\Phi}\left(\frac{z-2\overline{x}+l}{E}\right) - \hat{\Phi}\left(\frac{z-2\overline{x}-l}{E}\right)\right].$$

Уравняв математическое ожидание и дисперсию для $f_z(z)$ и для плотности вероятностей закона нормального распределения $f'_z(z)$, получим: $f'_z(z) = \frac{1}{\sigma_z\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(z-\overline{z})^2}{2\sigma_z^2}}$, где $\overline{z} = 2\overline{x}$, $\sigma_z = \sqrt{\frac{E^2}{2\rho^2}+\frac{l^2}{3}}$. Если $\overline{x} = 0$, то относительная ошибка такой замены в точке $z = 0$ равна $\Delta\% = \frac{f_z(0)-f'_z(0)}{f_z(0)}\,100\%$ (табл. 81).

Таблица 81

l	E	$2E$	$3E$	$4E$
$\Delta\%$	$-0{,}30$	$-3{,}02$	$-9{,}70$	$-17{,}10$

21.6. $f_z(z) = \frac{1}{\pi}\,\frac{l}{1+l^2(z-c)^2}$, где $c = a+b$; $l = \frac{hk}{h+k}$ (для решения использовать характеристические функции случайных величин X и Y).

21.7. $f_z(z) = \frac{2}{\pi^2}\,\frac{z}{\operatorname{sh} z}$.

21.8.

$$f_z(z) = \begin{cases} e^{-\frac{z}{3}}\left(1 - e^{-\frac{z}{6}}\right), & \text{при } z \geqslant 0,\\ 0, & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

21.9. $f_r(r) = \frac{r}{\sqrt{\Delta}}\, e^{-\frac{(k_{11}+k_{22})r^2}{4\Delta}}\, J_0\left[\frac{r^2}{4\Delta}\sqrt{(k_{22}-k_{11})^2 + 4k_{12}^2}\right]$, где $J_0(z)$ — функция Бесселя нулевого порядка; $\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22}\end{vmatrix}$;

$k_{11} = \frac{1}{2\rho^2}[a_1^2 + a_2^2 + (b_2^2 - a_2^2)\sin^2\alpha]$;

$k_{22} = \frac{1}{2\rho^2}[b_1^2 + b_2^2 + (a_2^2 - b_2^2)\sin^2\alpha]$;

$k_{12} = \frac{1}{4\rho^2}(a_2^2 - b_2^2)\sin 2\alpha = k_{21}$;

21.12. $\mathrm{M}[X] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - 2$; $\mathrm{D}[X] = \frac{1}{p_1}\left(\frac{1}{p_1} - 1\right) + \frac{1}{p_2}\left(\frac{1}{p_2} - 1\right)$; $F_n(x) = \frac{1}{p_2 - p_1}\{(1-p_1)p_2[1-(1-p_1)^n] - (1-p_2)p_1[1-(1-p_2)^n]\}$.

21.13. Требуемый запас прочности $0{,}231\overline{q}$.

21.14. а) $P = \frac{1}{4L}\int_0^L \left[1 - \Phi\left(\frac{y-\overline{x}}{\sigma}\right)\right]\left[1 + \Phi\left(\frac{y-L+\overline{x}}{\sigma}\right)\right] dy - {}$ $- \frac{1}{2L}\left\{(L-\overline{x})\Phi\left(\frac{L-\overline{x}}{\sigma}\right) - \overline{x}\hat{\Phi}\left(\frac{\overline{x}}{\sigma} + \frac{\sigma\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L-\overline{x}}{\sigma}\right)^2} - e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{x}}{\sigma}\right)^2}\right]\right\}$.

б) $P = 0{,}75 - \frac{(L-\overline{x})}{2L}\Phi\left(\frac{L-\overline{x}}{\sigma}\right) + \frac{\overline{x}}{2L}\Phi\left(\frac{\overline{x}}{\sigma}\right) - \frac{\sigma}{\sqrt{2}L\sqrt{\pi}}\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{L-\overline{x}}{\sigma}\right)^2} - {}\right.$ $\left.- e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{x}}{\sigma}\right)^2}\right] + \frac{1}{4L}\int_0^L \Phi\left(\frac{y-\overline{x}}{\sigma}\right)\Phi\left(\frac{y-L+\overline{x}}{\sigma}\right) dy$.

21.15. $P(X_A > X_B) = \frac{1}{2}\left[1 + \hat{\Phi}\left(\frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}}\right)\right]$.

21.16. $f_z(z) = \frac{z^{m-1}\lambda^m}{(m-1)!}\, e^{-\lambda z}$.

21.17. $F_z(z) = \frac{1}{a-b}[a(1-b)(1-a^n) - b(1-a)(1-b^n)]$.

21.18. См. таблицу 82.

Таблица 82

z_i	0	1	2	3	4
$P(Z = z_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{11}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$

21.19. $P(Z = m) = \frac{(2a)^m}{m!}\, e^{-2a}$.

21.20. Случайная величина Y имеет биномиальное распределение.

21.21. $F_z(n) = P(Z < n) = 1 - \frac{n}{2^{n-1}}$, $(n = 1, 2, \ldots)$.

21.22. $f(x) = \frac{(1+n\overline{\xi}^2)^{\frac{n}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\, x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{(1+n\overline{\xi}^2)x}{2}}$.

21.23. Воспользоваться равенством $\sum_{s=0}^{k} C_{n_1}^s C_{n_2}^{k-s} = C_{n_1+n_2}^k$, $\mathrm{P}(Z = z) = C_{n_1+n_2}^z p^z (1-p)^{n_1+n_2-z}$, $z = 0, 1, 2, \ldots, n_1 + n_2$.

21.24. $E_z(u) = \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{u}{2^k} = \frac{1}{2\sin\frac{u}{2^n}}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{u}{2^k}\sin\frac{u}{2^{n-1}} = \frac{\sin\frac{u}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{u}{2^n}}\prod_{k=1}^{n-1}\cos\frac{u}{2^k} = \frac{\sin\frac{u}{2^{n-2}}}{4\sin\frac{u}{2^n}}\prod_{k=1}^{n-2}\cos\frac{u}{2^k} = \ldots = \frac{\sin u}{2^n \sin\frac{u}{2^n}}$.

§ 22. Линеаризация функций случайных величин

22.1. $\sigma_Q \approx 9100$ кал.

22.2. $\mathrm{D}[\Omega] \approx \frac{\overline{p}}{16\overline{m}\,\overline{l}}\left[\left(\frac{\sigma_p}{\overline{p}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_m}{\overline{m}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_l}{\overline{l}}\right)^2 - \frac{2\sigma_p\sigma_m r_{pm}}{\overline{p}\,\overline{m}} - \right.$
$\left. - \frac{2\sigma_p\sigma_l r_{pl}}{\overline{p}\,\overline{l}} + \frac{2\sigma_m\sigma_l r_{ml}}{\overline{m}\,\overline{l}}\right]$.

22.3. $\sigma_z \approx \frac{\sqrt{\overline{r}^2\sigma_R^2 + \left(\overline{\omega}\,\overline{l} - \frac{1}{\overline{\omega}\,\overline{c}}\right)^2\left[\overline{\omega}^2\sigma_l^2 + \frac{\sigma_c^2}{\overline{\omega}^2\overline{c}^4} + \left(\overline{l} + \frac{1}{\overline{\omega}^2\overline{c}}\right)^2\sigma_\omega^2\right]}}{\sqrt{\overline{r}^2 + \left(\overline{\omega}\,\overline{l} - \frac{1}{\overline{\omega}\,\overline{c}}\right)^2}}$.

22.4. $\mathrm{D}[J] \approx \overline{i}^2\left[\frac{\sigma_E^2}{\overline{e}^2} + \frac{\sigma_R^2}{\left(\overline{r} + \frac{\overline{\omega}}{N}\right)^2} + \frac{\sigma_W^2}{N^2\left(\overline{r} + \frac{\overline{\omega}}{N}\right)^2}\right]$, где $\overline{i} = \frac{\overline{e}}{\overline{r} + \frac{\overline{\omega}}{N}}$.

22.5. $k_{xy} \approx 674$ м^2; $\sigma_x \approx 66{,}66$ м; $\sigma_y \approx 38{,}60$ м.

22.6. $\sigma_{v_1} \approx 0{,}52$ м/сек.

22.7. Для принятых условий функция $V_1 = -V\cos q$ не может быть линеаризована.

22.8. $\sigma_x \approx 24{,}37$ м; $\sigma_y \approx 14{,}95$ м; $\sigma_z = \sigma_h$.

22.9. $\sigma_x = \sigma_y \approx 8{,}66$ м; $\sigma_z \approx 10$ м.

22.10. $\sigma_v \approx \frac{U}{q+\overline{\omega}}\,\sigma_\omega$.

22.11. $\sigma_h \approx 43$ м.

22.12. $\sigma_z = 10^{-6}$.

22.13. $\sigma_h \approx 12{,}98$ м.

22.14. Средняя квадратическая ошибка определения дальности по формуле с использованием данных радиолокационной станции $\approx 22{,}85$ м.

22.15. $\overline{y} \approx \varphi(\overline{x}) + \frac{1}{2}\varphi''(\overline{x})\mathrm{D}[X]$; $\mathrm{D}[Y] \approx [\varphi'(\overline{x})]^2\mathrm{D}[X] +$
$+\frac{1}{2}[\varphi''(\overline{x})]^2\mathrm{D}^2[X]$.

22.16. $\mathrm{M}[S] \approx \frac{ab}{2}\left(1 - \frac{\sigma_\gamma^2}{2}\right)\sin\overline{\gamma}$; $\mathrm{D}[S] \approx \frac{a^2b^2}{4}\left[\sigma_\gamma^2\cos^2\overline{\gamma} + \right.$
$\left. + \frac{\sigma_\gamma^4}{2}(1 - 3\cos^2\overline{\gamma}) + \frac{5}{12}\sigma_\gamma^6\cos^2\overline{\gamma}\right]$.

22.17. $\sigma_x = \frac{b\sqrt{\frac{\sigma_a^2}{\overline{a}^2}\sin^2\overline{\alpha} + \sigma_\alpha^2\cos^2\overline{\alpha}}}{\sqrt{\overline{a}^2 - b^2\sin^2\overline{\alpha}}}$; $\overline{z} = \arcsin\left(\frac{b}{a}\sin\overline{\alpha}\right)$.

22.18. а) При удержании двух первых членов разложения в ряд Тейлора функции $Y = \frac{1}{X}$ будем иметь $\overline{y} \approx -0{,}2$; $\mathrm{D}[Y] \approx \frac{1}{625}$; б) при удержании трех первых членов разложения в ряд Тейлора функции $Y = \frac{1}{X}$ будем иметь $\overline{y} \approx -\frac{26}{125}$; $\mathrm{D}[Y] \approx \frac{27}{15625}$.

22.19. а) По точным формулам $\overline{v} \approx \frac{4\pi\overline{r}}{3}(3\sigma_r^2 + \overline{r}^2)$; $\mathrm{D}[V] =$
$= \frac{16\pi^2}{3}\left[\frac{5}{3}\sigma_r^6 + 12\overline{r}^2\sigma_r^4 + 3\overline{r}^4\sigma_r^2\right]$;

б) по формулам метода линеаризации $\overline{v} \approx \frac{4\pi\overline{r}^3}{3}$ $\mathrm{D}[V] = 16\pi^2\overline{r}^4\sigma_r^2$.

22.20. а) При изменении высоты конуса $\mathrm{D}[V] \approx 4\pi^2$ дм^6;

б) при измерении длины образующей $\mathrm{D}[V] \approx 3{,}57\pi^2$ дм^6.

22.21. 19,9 мг.

22.22. $\sigma_g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}\sqrt{\frac{4}{n^2T^2}(\sigma_t^2 + 2\sigma_{t'}^2) + \frac{\sigma_l^2}{L^2}} = 4{,}58$ см/сек^2.

22.23. $\mathrm{D}[Z] \approx \frac{(1-k)^2\pi^2}{96(1+k)}$.

22.24. Оба метода линеаризации дают $\sigma_\alpha \approx 295$ м.

22.25. $\sigma_{x_1} \approx 7{,}44$ м; $\sigma_{x_2} \approx 5{,}39$ м.

22.26. $\sigma_x \approx 82{,}61$ м.

Глава V
Предельные теоремы

§ 23. Закон больших чисел

23.1. По Чебышеву $P(|X - \overline{x}| \geqslant 3\delta) \leqslant \frac{1}{9}$, точная оценка 0,0027.

23.2. Доказывается так же, так неравенство Чебышева. В ходе доказательства использовать очевидное неравенство $\int_\Omega f(x)dx \leqslant \int_\Omega \frac{1}{J} e^{\varepsilon x - t^2} f(x)dx$, где Ω — множество всех x, удовлетворяющих условию $x > \frac{t^2 + \ln J}{\varepsilon}$.

23.3. Аналогично доказательству неравенства Чебышева.

23.4. Воспользоваться неравенством Чебышева, учтя при этом, что $\overline{x} = m+1$, а $\mathrm{M}[X^2] = (m+1)(m+2)$ и, следовательно, $P(0 < X < 2(m+1)) = P(|X - \overline{x}| < m+1) > 1 - \frac{\mathrm{D}[X]}{(m+1)^2}$.

23.5. По Чебышеву $P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0{,}5\right| \leqslant 0{,}05\right\} \geqslant 0$, по Бернштейну $P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0{,}5\right| < 0{,}05\right\} > 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}265$.

23.6. X_k независимы, одинаково распределены и имеют $\overline{x}_k = 0$. Применим усиленный закон больших чисел, т. е. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \to 0$ п.н.

23.7. X_k независимы, $\overline{x}_k = 0$, $\mathrm{D}[X_k] = k^{2s}$.

Условие применимости усиленного закона больших чисел $\sum_{k=1}^\infty \frac{\sigma_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{2(1-s)}} < \infty$ выполняется при $s < \frac{1}{2}$. В этом случае $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \to 0$ п.н.

23.8. X_k независимы, $\overline{x}_k = 0$, $\mathrm{D}[X_k] = \ln k$. Ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{\sigma_k^2}{k^2} = \sum_{k=1}^\infty \frac{\ln k}{k^2}$ сходится, так как $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}\,dx = 1$. Применим усиленный закон больших чисел $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \to 0$ п.н.

23.9. а) Не выполняются, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4(4^n-1)}{3n^2} = \infty$;

б) выполняются, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right] = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$;

в) не выполняются, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{D}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right\} > \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}$.

23.10. $\mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right] < \frac{c}{n}\left\{1 + \frac{2r}{(1-r)^2}\left[\frac{r^n-1}{n} + 1 - r\right]\right\}$, где $r = e^{-\alpha} < 1$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right] = 0$, то по теореме Маркова $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow{p} \overline{x}$.

23.11. Для доказательства достаточно оценить $\mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\left\{\sum_{k=1}^{n}\sigma_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n-1} r_{k,k+1}\sigma_k\sigma_{k+1}\right\}$, где $\sigma_k^2 = \mathrm{D}[X_k]$, а $r_{k,k+1} = \frac{\mathrm{M}[(X_k - \overline{x}_k)(X_{k+1} - \overline{x}_{k+1})]}{\sigma_k\sigma_{k+1}}$. Заменяя все σ_k их наибольшим значением b, получим $\mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] < \frac{3n-2}{n^2}b^2$, откуда следует $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = 0$.

23.12. Применим, так как выполнены условия теоремы Хинчина.

23.13. $\mathrm{D}[Z_n] = \mathrm{D}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right] = \frac{1}{n^2}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\sigma_i\sigma_j\right| < \frac{c}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|r_{ij}|$, где σ_i — среднее квадратическое отклонение случайной величины X_i. Так как $r_{ij} \to 0$ при $|i-j| \to \infty$, то по любому $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для всех $|i-j| > N$ справедливо неравенство $|r_{ij}| < \varepsilon$. Это значит, что в матрице $\|r_{ij}\|$, насчитывающей n^2 элементов, не более $2Nn - N^2$ элементов превосходит ε (их мы заменим единицей), остальные же меньше ε. Из сказанного следует равенство

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|r_{ij}| < \varepsilon + \frac{2nN - N^2}{n}(1-\varepsilon).$$

Его правая часть будет меньше 2ε при $n > \frac{2N(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$.

23.14. Закон больших чисел неприменим, так как ряд $\frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$, определяющий $\mathrm{M}[X_i]$, не является абсолютно сходящимся.

23.15. $n \simeq 1{,}67 \cdot 10^4$ бросаний.

23.16. По Чебышеву а) $n = 10^3$; б) $n = 2\cdot 10^3$, в) $n = 10^4$.

По Бернштейну а) $n = 1{,}2\cdot 10^3$, б) $n = 1{,}47\cdot 10^3$, в) $n = 2{,}12\cdot 10^3$.

Так как вероятность события неизвестна, то применяется оценка $\sigma^2 \leqslant \sigma^2_{\max} = \frac{1}{4}$.

23.17. Воспользоваться неравенством $\mathrm{M}[XY] \leqslant \sqrt{\mathrm{M}[X^2]\mathrm{M}[Y^2]}$.

23.18. Воспользоваться тождеством $X_nY_m - XY = (X_n - X)(Y_m - Y) + Y(X_n - X) + X(Y_m - Y)$ и неравенством $|\mathrm{M}[X] \leqslant \mathrm{M}[|X|]$.

23.19. Воспользоваться теоремой Лагранжа $\varphi(X_n) - \varphi(a) = \varphi'(Y_n)(X_n - a)$, где $a < Y_n < X_n$.

§ 24. Центральная предельная теорема

24.1. $P(0{,}2 \leqslant \frac{m}{n} < 0{,}4) = 0{,}98$.

24.2. $P(70 \leqslant m < 86) = 0{,}944$.

24.3. а) $P(m \geqslant 20) = 0{,}55$; б) $P(m < 28) = 0{,}98$; в) $P(14 \leqslant m < 26) = 0{,}9$.

24.4. В предельном равенстве теоремы Муавра–Лапласа положить $b = -a = \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$, а затем воспользоваться интегральными представлениями функций $\Phi(x)$ и $\hat{\Phi}(x)$.

24.5. Ввиду того, что вероятность события неизвестна, дисперсию числа появлений события следует принять максимальной, т. е. положить $pq = 0{,}25$. При этом допущении: а) $n \approx 250\ 000$; б) $n = 16\ 600$.

24.6. ~ 70.

24.7. $n \approx 65$.

24.8. $p = 0{,}956$.

24.9. $E = 67$.

24.10. $J = \int_0^1 x^2 dx$ можно рассматривать как начальный момент второго порядка случайной величины, равномерно распределенной в интервале $[0, 1]$; тогда его статистическим аналогом, определяемым методом Монте–Карло, будет величина $J_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k^2$, где X_k — случайные числа из интервала $[0, 1]$. С помощью теоремы Ляпунова находим $P(|J_{1000} - J| < 0{,}01) = 0{,}71$.

24.11. $n \approx 1{,}55 \cdot 10^6$. Положить $J_n = \frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin X_k$, где X_k — случайные числа из интервала $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

24.12. 1) Так как разность $P(C) - P_n(C) = \left[\frac{m}{n} - P(A)\right][1 - P(B/\overline{A})]$, то с точки зрения закона больших чисел оба метода приводят к правильным результатам; 2) в первом случае потребуется более 9750 опытов, во втором случае — 4500 опытов.

24.13. $P(|X| < k)$ равны:

	по Ляпунову	по ряду Эджворта
$k = 1$	0,2706	0,2703
$k = 2$	0,9164	0,9164
$k = 3$	0,9994	0,9994

В ряде Эджворта удержаны первые три члена.

24.14. а) $F\left(y, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2}[1 + \Phi(y)] - \frac{1}{20n}\varphi^{(3)}(y) + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$;
б) $P(|Y| < k)$ равны:

	при нормальном законе	на основании ряда Эджворта
$k = 1$	0,6827	0,6787
$k = 2$	0,9545	0,9536
$k = 3$	0,9973	0,9966

24.15. $P\left(\frac{\chi^2 - n}{\sqrt{2n}} < y\right) = \frac{1}{2}[1 + \Phi(y)] - \frac{\sqrt{2}}{3}\varphi^{(2)}(y)\frac{1}{\sqrt{n}} + \left[\frac{1}{2}\varphi^{(3)}(y) + \frac{1}{9}\varphi^{(5)}(y)\right]\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$,
значения $P(\chi^2 > \chi_q^2)$

	табличные	по ряду Эджворта
$\chi_q^2 = 8$	0,4335	0,4335
$\chi_q^2 = 12$	0,1512	0,1516
$\chi_q^2 = 16$	0,0424	отрицательная

Глава VI
Корреляционная теория случайных функций

§ 25. Общие свойства корреляционных функций и законов распределения случайных функций

25.1. Обозначая закон распределения второго порядка для случайной функции $X(t)$ через $f(x_1, x_2 \mid t_2, t_2)$, по определению $K_x(t_1, t_2)$ имеем

$$K_x(t_2, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \overline{x}_1)(x_2 - \overline{x}_2) f(x_1 x_2 \mid t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2.$$

Применение неравенства Буняковского дает

$$|K_x(t_1, t_2)|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \overline{x}_1)^2 f(x_1 x_2 \mid t_1, t_2)\, dx_1\, dx_2 \times$$
$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_2' - \overline{x}_2)^2 f(x_1' x_2' \mid t_1, t_2)\, dx_1'\, dx_2' = \sigma^2_{x(t_1)} \sigma^2_{x(t_2)},$$

что эквивалентно первому неравенству. Для доказательства второго неравенства достаточно рассмотреть очевидное соотношение

$$\mathrm{M}\{|[X(t_1) - \overline{x}(t_1)] - [X(t_2) - \overline{x}(t_2)|^2\} \geqslant 0.$$

25.2. Доказывается аналогично предыдущему.

25.3. Следует из определения корреляционной функции.

25.4. Так как $X(t) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_j + c$, где c — неслучайная постоянная, а n — число скачков за время t, то $\mathrm{D}[X(t)] = \mathrm{M}[n\sigma^2] = \lambda t \sigma^2$.

25.5. Корреляционная функция $K_x(\tau)$ равна вероятности того, что за время $|\tau|$ произойдет четное число перемен знака, за вычетом вероятности нечетного числа перемен знака, т. е.

$$K_x(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda\tau)^{2n}}{(2n)!} e^{-\lambda|\tau|} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda|\tau|)^{2n+1}}{(2n+1)!} e^{-\lambda|\tau|} = e^{-2\lambda|\tau|}.$$

25.6. Так как $\mathrm{M}[X(t)X(t+\tau)]$ отлично от 0 только в том случае, когда оба конца интервала τ попадают в один единичный интервал, вероятность чего равна 0 при $|\tau| > 1$ и $(1 - |\tau|)$ при $|\tau| \leqslant 1$, то при $|\tau| \leqslant 1$, $K_x(\tau) = (1 - |\tau|)\mathrm{M}[X^2] = (1 - |\tau|) \int_0^\infty x^2 \frac{x^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)} e^{-x}\, dx = (\lambda+2)(\lambda+1)(1 - |\tau|)$. Следовательно,

$$K_x(\tau) = \begin{cases} (\lambda+2)(\lambda+1)(1-|\tau|), & \text{при } |\tau| \leqslant 1, \\ 0, & \text{при } |\tau| > 1. \end{cases}$$

25.7. Обозначая $\theta_1 = \theta(t_1)$, $\theta_2 = \theta(t_1 + \tau)$, для условного закона распределения θ_2 имеем $f(\theta_2 \mid \theta_1 = 5^\circ) = \frac{f(\theta_1, \theta_2)}{f(\theta_1)}$, где $f(\theta_1, \theta_2)$ — нормальный закон распределения системы случайных величин с корреляционной матрицей $\left\| \begin{smallmatrix} K_\theta(0) & K_\theta(\tau) \\ K_\theta(\tau) & K_\theta(0) \end{smallmatrix} \right\|$. Подставляя данные из условия задачи, получим

$$P = \int\limits_{15}^{\infty} f(\theta_2 \mid \theta_1 = 5^\circ)\, d\theta_2 = \frac{1}{2}[1 - \Phi(2{,}68)] = 0{,}0037.$$

25.8. Обозначая углы крена в моменты t и $t+\tau$ через θ_1 и θ_2 соответственно, а их закон распределения через $f(\theta_1, \theta_2)$, для условного закона распределения угла крена в момент второго измерения получим

$$f(\theta_2 \mid -\theta_0 \leqslant \theta_1) = \frac{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} f(\theta_1\theta_2)\, d\theta_1}{\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(\theta_1\theta_2)\, d\theta_2\, d\theta_1}.$$

Искомая вероятность

$$p = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\sigma_\theta \Phi\left(\frac{\theta_0}{\sigma_\theta}\right)} \int\limits_{-\theta_0}^{\theta_0} e^{-\frac{\theta_2^2}{2\sigma_\theta^2}} \left[\Phi\left(\frac{\theta_0 + k\theta_2}{\sigma_\theta\sqrt{1-k^2}}\right) + \Phi\left(\frac{\theta_0 - k\theta_2}{\sigma_\theta\sqrt{1-k^2}}\right)\right] d\theta_2.$$

25.9. Обозначая $X_1 = \theta(t)$, $X_2 = \dot\theta(t)$, $X_3 = \theta(t + \tau_0)$, для корреляционной матрицы системы X_1, X_2, X_3 получим

$$\|k_{jl}\| = \begin{Vmatrix} K_\theta(0) & 0 & K_\theta(\tau_0) \\ 0 & -\ddot K_\theta(0) & -\dot K_\theta(\tau_0) \\ K_\theta(\tau) & -\dot K_(\tau_0) & K_\theta(0) \end{Vmatrix},$$

что после подстановки чисел дает

$$\|k_{jl}\| = \begin{Vmatrix} 36 & 0 & 36e^{-0{,}5} \\ 0 & 36(0{,}25^2 + 1{,}57^2) & 0 \\ 36e^{-0{,}5} & 0 & 36 \end{Vmatrix}.$$

Определяя по закону распределения $f(x_1, x_2, x_3)$ условный закон распределения

$$f(x_3 \mid x_1 = 2, x_2 > 0) = \left.\frac{\int_0^\infty f(x_1, x_2, x_3)\, dx_2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_0^\infty f(x_1, x_2, x_3)\, dx_2\, dx_3}\right|_{x_1 = 2},$$

для искомой вероятности, получим $P = \int_{-10}^{10} f(x_3 \mid x_1 = 2, x_2 > 0) dx_3 = 0{,}958$.

25.10. $\overline{y}(t) = a(t)\overline{x}(t) + b(t)$; $K_y(t_1, t_2) = a^*(t_1)a(t_2)K_x(t_1, t_2)$.

25.11. $X(t)$ — непрерывна, так как $\lim\limits_{\Delta\to 0} \mathrm{M}\{[X(t+\Delta) - X(t)]^2\} = \lim\limits_{\Delta \to 0} a^2[\lambda\Delta + (\lambda\Delta)^2] = 0$.

25.12. $f(x)\, dx = \iint_{x \leqslant a\cos\theta \leqslant x + dx} f_a(a) f_\theta(\theta)\, da\, d\theta$; $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$.

25.13. Вероятность того, что интервал T будет заключен между τ и $\tau + d\tau$ равна вероятности того, что в интервале $(0, \tau)$ будет n точек, а в интервале $(\tau, \tau + d\tau)$ — одна точка. Так как по условию эти события независимы, то $P(\tau \leqslant T \leqslant \tau + d\tau) = \frac{(\lambda\tau)^n}{n!} e^{-\lambda\tau} d\tau$, т. е. $f(\tau) = \frac{\lambda^{n+1}\tau^n}{n!} e^{-\lambda\tau}$.

25.14. $p = 0{,}981$.

25.15. $f(u) = \frac{1}{15{,}8\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{u^2}{498}}$.

25.16. Нормальный закон, $\mathrm{M}(U_0) = \sum_{j=1}^{4} U_j$, $\mathrm{D}(U_0) = a$.

25.17. $f(x,v) = \lim\limits_{\tau\to 0} \tau f(x_1, x + v\tau | t, t+\tau) = \frac{1}{8\pi\alpha a^2} e^{-\left(\frac{x}{2a^2} + \frac{v^2}{8\alpha^2 a^2 x}\right)} \cdot \frac{1}{x}$; $f(v) = \frac{1}{4\pi\alpha a^2} K_0\left(\frac{v}{2\alpha a^2}\right)$, где $K_0(x)$ — функция Макдональда нулевого порядка.

25.18. Выбрав в качестве полярной оси нормаль к пластинке и обозначив через φ, θ долготу и, соответственно, полярное расстояние заданного направления, замечаем, что в этом направлении свет может отразиться только в том случае, если долгота β и полярное расстояние α нормали к элементарной площадке поля имеют значения: $\beta = \frac{1}{2}\varphi$, $\alpha = \frac{1}{2}(v + \theta)$. Следовательно, $J = J_0\, f(\alpha,\beta)\big|_{\alpha=\frac{1}{2}(v+\theta),\ \beta=\frac{1}{2}\varphi}$.

Так как $\frac{\zeta_x}{\sqrt{1-\zeta_x^2+\zeta_y^2}} = \sin\alpha\cos\beta$; $\frac{\zeta_y}{\sqrt{1-\zeta_x^2+\zeta_y^2}} = \sin\alpha\sin\beta$; а ζ_x и ζ_y — нормальны, то $f(\alpha,\beta) = f_{\zeta_x\zeta_y}(\operatorname{tg}\alpha\cos\beta, \operatorname{tg}\alpha\sin\beta)\operatorname{tg}\alpha\cos\beta$, где

$$f_{\zeta_x\zeta_y}(\zeta_x,\zeta_y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{\zeta_x^2}{\sigma_1^2} + \frac{\zeta_y^2}{\sigma_2^2} - 2r\frac{\zeta_x\zeta_y}{\sigma_1\sigma_2}\right)\right\},$$

$\sigma_1^2 = -\left.\frac{\partial^2 K(\xi\eta)}{\partial\xi^2}\right|_{\xi=\eta=0}$, $\sigma_2^2 = -\left.\frac{\partial^2 K(\xi\eta)}{\partial\eta^2}\right|_{\xi=\eta=0}$, $r = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2}\left.\frac{\partial^2 K(\xi\eta)}{\partial\xi\partial\eta}\right|_{\xi=\eta=0}$.

§ 26. Линейные операции над случайными функциями

26.1. Так как $\dot K_x(\tau)$ не имеет разрыва при $\tau = 0$, то $K_{\dot x}(\tau) = -\frac{d^2}{d\tau^2} K_x(\tau) = a\alpha^2 e^{-\alpha|\tau|}(1 - \alpha|\tau|)$.

26.2. $K_y(\tau) = a(\alpha^2 + \beta^2)e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|)$, $\mathrm{D}[Y(t)] = K_y(0) = a(\alpha^2 + \beta^2)$.

26.3. Пользуясь определением, получим $R_{x\dot x}(\tau) = \mathrm{M}\left\{[X^*(t) - \overline{x}^*] \times \frac{dX(t+\tau)}{d\tau}\right\} = \frac{d}{d\tau}\mathrm{M}\{X^*(t) - \overline{x}^*][X(t+\tau) - \overline{x}\} = \frac{d}{d\tau} K_x(\tau|)$.

26.4. Так как любая производная $K_x(\tau)$ непрерывна в нуле, то $X(t)$ дифференцируема любое число раз.

26.5. Два раза, так как $\left.\frac{d^2}{d\tau^2} K_x(\tau)\right|_{\tau=0}$ и $\left.\frac{d^4}{d\tau^4} K_x(\tau)\right|_{\tau=0}$ существуют, $\frac{d^5}{d\tau^5} K_x(\tau)$ терпит разрыв в нуле.

26.6. Существует только первая производная, так как $\frac{d^2}{d\tau^2} K_x(\tau)$ существует при $\tau = 0$, а $\frac{d^3}{d\tau^3} K_x(\tau)$ терпит разрыв в этой точке.

26.7. $R_{x\dot x}(\tau) = \alpha^2\sigma_x^2(\tau - t_0)e^{-\alpha|\tau - t_0|}$.

26.8. $\mathrm{D}[Y(t)] = \sigma_x^2$; $\mathrm{D}[Z(t)] = \alpha^2\sigma_x^2$.

26.9. $K_y(\tau) = 2a^2\sigma_x^2\alpha^2 e^{-\alpha^2\tau^2}(1 - 2\alpha^2\tau^2)$.

26.10. Закон распределения $f(v)$ нормальный с дисперсией $\sigma_v^2 = a(\alpha^2 + \beta^2)$ и $\overline{v} = 0$, $P = 0{,}3085$.

26.11. $\overline{z}(t) = \overline{x}(t) + \overline{y}(t)$; $K_z(t_1,t_2) = K_x(t_1,t_2) + K_y(t_1,t_2) + R_{xy}(t_1,t_2) + R_{yx}(t_1,t_2)$.

26.12. $\overline{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} \overline{x}_j(t)$; $K_x(t_1,t_2) = \sum_{j=1}^{n} K_{x_j}(t_1,t_2) + \sum_{l=1,l\neq j}^{n} \sum_{j=1}^{n} R_{x_l x_j}(t_1,t_2)$.

26.13. $K_y(\tau) = K_x(\tau) + \frac{d^2}{d\tau^2} K_x(\tau) + \frac{d^4}{d\tau^4} K_x(\tau)$.

26.14. $K_z(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}\Big\{1-\alpha|\tau|+\frac{1}{3}\alpha^2\tau^2+\frac{2\alpha^2}{3}(\alpha^2\tau^2-\alpha|\tau|-1)+ +\frac{\alpha^4}{3}(\alpha^2\tau^2 - 5\alpha|\tau| + 3)\Big\}$.

26.15. Так как $K_y(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_x(t_2' - t_1')\,dt_2'\,dt_1'$, то, полагая $t_1 = t_2 = t$, переходя к новым переменным интегрирования и выполняя одно интегрирование, получим $\mathrm{D}[Y(t)] = K_y(t,t) = 2\int_0^t (t-\tau)K_x(\tau)\,d\tau$.

26.16. Решая задачу аналогично предыдущей, после преобразования двойного интеграла получим

$$K_x(t_1,t_2) = \int\limits_0^{t_2}(t_2-\tau)K_y(\tau)\,d\tau + \int\limits_0^{t_1}(t_1-\tau)K_y(\tau)\,d\tau - \\ - \int\limits_0^{t_2-t_1}(t_2-t_1-\tau)K_y(\tau)\,d\tau.$$

26.17. $R_{xy}(t_1,t_2) = \int_0^{t_2} K_x(t_1,\xi)\,d\xi$.

26.18. $\mathrm{D}[Y(20)] = 1360$ см^2.

26.19. $\overline{y}(t) = a_0\overline{x}(t) + a_1\frac{d\overline{x}(t)}{dt} + b_1\int_0^t e^{-\lambda t_1}\overline{x}(t_1)\,dt_1 + c$;

$K_y(t_1,t_2) = a_0^2K_x(t_1,t_2) + a_0a_1\left[\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1} + \frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right] + a_1^2\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} + + a_0b_1\left[\int_0^{t_1} e^{-\lambda t_1'}K_x(t_1',t_2)\,dt_1' + \int_0^{t_2} e^{-\lambda t_2'}K_x(t_1,t_2')\,dt_2'\right] + + a_1b_1\left[\int_0^{t_1} e^{-\lambda t_1'}\frac{\partial K_x(t_1',t_2)}{\partial t_2}\,dt_1' + \int_0^{t_2} e^{-\lambda t_2'}\frac{\partial K_x(t_1,t_2')}{\partial t_1}\,dt_2'\right] + + b_1^2\int_0^{t_2}\int_0^{t_1} e^{-\lambda(t_1'+t_2')}K_x(t_1',t_2')\,dt_1'\,dt_2'$.

26.20. $R_{yz}(t_1,t_2) = ac\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2} + ad\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_2^2} + bc\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} + + bd\frac{\partial^3 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2}$.

26.21. Так как дисперсия $\mathrm{D}[\theta(t)]$ мала, то $\sin\theta \approx \theta$; $\mathrm{D}[\Delta V(t)] = 2g^2\int_0^t(t-\tau)K_\theta(\tau)\,d\tau = \frac{2g^2a}{\alpha}\left[t - \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})\right]$, что после подстановки числовых величин дает $\sigma_{\Delta v} = 1{,}18$ м/сек.

26.22. Используя определение корреляционной функции как математического ожидания произведения отклонений ординат случайной функции и формулы для моментов нормальных случайных величин, получим $K_x(\tau) = a^2K_\theta^{(IV)}(\tau) + b^2K_\theta(\tau) + 2c^2\ddot{K}_\theta^2(\tau) - 2ab\ddot{K}_\theta(\tau)$.

26.23. $K_m(\tau) = 2a^2K_\theta^2(\tau) + 2b^2K_\psi^2(\tau) - c^2K_\theta^2(\tau)\ddot{K}_\psi(\tau)$.

26.24. $K_y(\tau) = e^{-\alpha^2\tau^2}[1 + 2\alpha^2(1-2\alpha^2\tau^2)]$.

26.25. $R_{xy}(\tau) = -\frac{1}{3}a\alpha^2e^{-\alpha|\tau|}(1+\alpha|\tau| - \alpha^2\tau^2)$.

26.26. $K_y(t_1,t_2) = a^*(t_1)a(t_2)K_x(\tau) + b^*(t_1)b(t_2)\frac{d^4K_x(\tau)}{d\tau^4} + [a^*(t_1)b(t_2)+b^*(t_1)a(t_2)]\frac{dK_x^2(\tau)}{d\tau^2}$.

26.27. Не существует.

26.28. $\delta = \frac{1}{2a}\int_{t-a}^{t+a}\overline{x}(t_1)\,dt_1 - \overline{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^{2n}}{(2n+1)!}\,\frac{d^{2n}\overline{x}(t)}{dt^{2n}}$;
$\mathrm{D}[Y(t)] = \frac{1}{4a^2}\int_{t-a}^{t+a}\int_{t-a}^{t+a}K_x(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2$.

26.29. а) Стационарна; б) не стационарна.

26.30. $\mathrm{M}[\mathcal{E}(t)] = a\int_0^t[\overline{v}_x^2(t_1)+\overline{v}_y^2(t_1)+K_{v_x}(t_1,t_1)+K_{v_y}(t_1,t_1)]dt_1$,
$\mathrm{D}[\mathcal{E}(t)] = a^2\int_0^t\int_0^t K_{v^2}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2$, где $K_{v^2}(\tau_1,\tau_2) =$
$= 2[K_{v_x}^2(\tau_1,\tau_2)+K_{v_y}^2(\tau_1,\tau_2)+R_{v_xv_y}^2(\tau_1,\tau_2)+R_{v_yv_x}^2(\tau_1,\tau_2)]+$
$+4[\overline{v}_x(\tau_1)\overline{v}_x(\tau_2)K_{v_x}(\tau_1,\tau_2)+\overline{v}_y(\tau_1)\overline{v}_y(\tau_2)K_{v_y}(\tau_1,\tau_2)+$
$+\overline{v}_x(\tau_1)\overline{v}_y(\tau_2)Rv_xv_y(\tau_1,\tau_2)+\overline{v}_x(\tau_2)\overline{v}_y(\tau_1)Rv_xv_y(\tau_2,\tau_1)]$.

26.31. $Y(\xi) = X(\xi + a\sin\alpha) + a\cos\alpha$, где α — угол наклона касательной к $X(\xi)$ в точке касания круга.

$$\overline{y} = \mathrm{M}\{\mathrm{M}[X(\xi+a\sin\alpha)\mid\alpha]\}+\mathrm{M}[a\cos\alpha] = \overline{x}+\frac{a}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{v^2}{2\sigma_0^2}}\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}},$$
$$\sigma_0^2 = -\left.\frac{d^2K_x(\xi)}{d\xi^2}\right|_{\xi=0}.$$

§ 27. Спектральное разложение стационарных случайных функций

27.1. $K(\tau) = 2a\frac{\sin b\tau}{\tau}$.

27.2. $K(\tau) = 2c^2(2\cos\omega_0\tau - 1)\frac{\sin\omega_0\tau}{\tau}$.

27.3. Обозначив $J(\alpha,\omega) = \frac{a}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha|\tau|-i\omega\tau}d\tau = \frac{a\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$, имеем $S(\omega) = J - \alpha\frac{\partial J}{\partial\alpha} = \frac{2a}{\pi}\,\frac{a^2}{(\omega^2+a^2)^2}$.

27.4. $S(\omega) = \frac{2\sigma^2\alpha\omega^2}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}$.

27.5. $S(\omega) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\left(\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right)^2$.

27.6. $S(\omega) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi}\,\frac{\omega^2+\alpha^2+\beta^2}{(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2} = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi}\,\frac{\omega^2+\alpha^2+\beta^2}{(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\omega^2} = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi}\,\frac{\omega^2+\alpha^2+\beta^2}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$.

27.7. $S(\omega) = \frac{2\sigma^2}{\pi}\,\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2} = \frac{2\sigma^2}{\pi}\,\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\omega^2} = \frac{2\sigma^2}{\pi}\,\frac{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2}$.

27.8. Решая задачу аналогично 27.3, получим $S(\omega) = \frac{\sigma^2}{\pi}\,\frac{16\alpha^3\omega^4}{(\omega^2+\alpha^2)^4}$.

27.9. $S(\omega) = \frac{2a\alpha\omega^2}{\pi[(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)^2-4\beta^2\omega^2]}$.

27.10. Две производные, так как $S_x(\omega)$ с ростом ω убывает, как $\frac{1}{\omega}$.

27.11. $S(\omega) = \frac{6\sigma^2\alpha^3}{\pi(\omega^2+\alpha^2)(\omega^2+4\alpha^2)}$.

27.12. $S(\omega) = \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{n}\frac{a_j\alpha_j}{\omega^2+\alpha_j^2}$.

27.13. $\frac{dS(\omega)}{d\omega} = \frac{2\alpha\sigma^2\omega}{\pi[(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]^2}\{4\beta^2(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha^2+\beta^2+$ $+\omega^2)^2\}$.

Следовательно, при $\omega = 0$ всегда будет экстремум. Если при $\omega = 0$ выражение в фигурных скобках отрицательно или 0, то знак производной в этой точке меняется с плюса на минус; в этой точке будет максимум, и других максимумов не может быть. Таким образом, условием отсутствия максимумов, кроме нулевой точки, будет $\alpha^2 \geqslant 3\beta^2$. Таким образом, если $\alpha^2 \geqslant 3\beta^2$, то имеется один максимум в начале; если $\alpha^2 < 3\beta^2$, то в начале будет минимум и появятся два максимума в точках $\omega = \pm\omega_2$, $\omega_2 =$ $= \sqrt[n]{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{2\sqrt{\beta^2}-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

27.14. Так как $S_{\dot{x}}(\omega) = \frac{a^2\omega^2}{(\omega^2+\alpha^2)^2}$, то $\mathrm{D}[\dot{X}(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\dot{x}}(\omega)d\omega = \frac{\pi a}{2\alpha}$.

27.15. Так как $S_x(\omega) = \frac{a}{2\alpha\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}}$, а $R_{x\dot{x}}(\tau) = \frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \times$ $\times S_x(\omega)\,d\omega$, то $S_{x\dot{x}}(\omega)' = i\omega S_x(\omega) = \frac{ia\omega}{2\alpha\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} = -S_{\dot{x}x}(\omega)$.

27.16. Так как $K_\Delta(\tau) = ae^{-\alpha|\tau|}[k_1^2(1+\alpha|\tau|)+\alpha^2k_2^2(1-\alpha|\tau|)]$, то преобразование Фурье дает $S_\Delta(\omega) = \frac{2a\alpha^3}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}(k_1^2+k_2^2\omega^2)$.

27.17. $R_{xy}(\tau) = K_x(\tau+\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau+\tau_0)}S_x(\omega)\,d\omega$; $S_{xy}(\omega) =$ $= e^{i\omega\tau_0}S_x(\omega)$.

27.18. $S_{xy}(\omega) = (i\omega)^k e^{i\omega\tau_0}[S_u(\omega)+S_{vu}(\omega)]$.

27.19. Так как $K_z(\tau) = K_{\dot{x}}(\tau)K_{\dot{y}}(\tau) = a_1a_2(\alpha_1^2+\beta_1^2)(\alpha_2^2+\beta_2^2) \times$ $\times e^{-(\alpha_1+\alpha_2)|\tau|}\left(\cos\beta_1\tau - \frac{\alpha_1}{\beta_1}\sin\beta_1|\tau|\right)\left(\cos\beta_2\tau - \frac{\alpha_2}{\beta_2}\sin\beta_2|\tau|\right)$, то обращение по Фурье дает $S_z(\omega) = a\left\{\frac{\alpha\cos\gamma'+(\omega-\beta')\sin\gamma'}{(\omega-\beta')^2+\alpha^2} - \frac{\alpha\cos\gamma'+(\omega+\beta')\sin\gamma'}{(\omega+\beta')^2+\alpha^2}+\right.$ $\left.+\frac{\alpha\cos\gamma''+(\omega-\beta'')\sin\gamma''}{(\omega-\beta'')^2+\alpha^2} - \frac{\alpha\cos\gamma''+(\omega+\beta'')\sin\gamma''}{(\omega+\beta'')^2+\alpha^2}\right\}$; где $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$, $\beta' =$ $= \beta_1+\beta_2$, $\beta'' = \beta_1-\beta_2$, $\gamma' = \gamma_1+\gamma_2$, $\gamma'' = \gamma_1-\gamma_2$, $\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$, $a = \frac{a_1a_2\beta_1^2\beta_2^2}{4\pi\cos^3\gamma_1\cos^3\gamma_2}$.

27.20. Так как $K_z(\tau) = K_x(\tau)K_y(\tau)+\overline{x}^2K_y(\tau)+\overline{y}^2K_x(\tau)$, то $S_z(\omega) =$ $= \frac{a_1a_2(\alpha_1+\alpha_2)}{\pi[\omega^2+(\alpha_1+\alpha_2)^2]} + \frac{\overline{x}^2a_2\alpha_2}{\pi(\omega^2+\alpha_2^2)} + \frac{\overline{y}^2a_1\alpha_1}{\pi(\omega^2+\alpha_1^2)}$.

27.21. Так как $K_\Delta(\tau) = K_\psi(\tau)K_\theta(\tau)$, то $\mathrm{D}(\Delta) = a_1a_2$, а преобразование Фурье дает $S_\Delta(\omega) = \frac{a_1a_2}{4\pi\cos\gamma_1\cos\gamma_2}\left\{\frac{\alpha\cos\gamma'-(\omega-\beta')\sin\gamma'}{(\omega-\beta')^2+\alpha^2}-\right.$ $\left.-\frac{\alpha\cos\gamma'-(\omega-\beta')\sin\gamma'}{(\omega+\beta')^2+\alpha^2} + \frac{\alpha\cos\gamma''-(\omega-\beta'')\sin\gamma''}{(\omega-\beta'')^2+\alpha^2} - \frac{\alpha\cos\gamma''-(\omega+\beta'')\sin\gamma''}{(\omega+\beta'')^2+\alpha^2}\right\}$, где $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$, $\beta' = \beta_1+\beta_2$, $\beta'' = \beta_1-\beta_2$, $\gamma' = \gamma_1+\gamma_2$, $\gamma'' = \gamma_1-\gamma_2$, $\operatorname{tg}\gamma_1 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\operatorname{tg}\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$.

27.22. Применяя общую формулу $S_y(\omega) = 2\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_1)^2S_x(\omega-\omega_1)\times$ $\times\omega_1^2S_x(\omega)\,d\omega_1$ и результаты задачи 27.17, получим $S_y(\omega) = \frac{2a^2\alpha\beta^4}{\pi\cos^2\gamma}\times$ $\times\left\{\frac{1}{\omega^2+4\alpha^2} + \frac{4(\alpha^2+\beta^2)}{(\omega^2+4\alpha^2-4\beta^2)^2+16\alpha^2\beta^2}\right\}$, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$.

27.23. $S_y(\omega) = \frac{4a\alpha}{\pi}\left(\frac{a}{\omega^2+4\alpha^2} + \frac{\overline{x}^2}{\omega^2+\alpha^2}\right)$.

27.24. $S_y(\omega) = \omega^2 \left(a^2\alpha \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha^2}} + 2a\overline{x}^2 e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha^2}} \right)$.

27.25. $S_\Delta(\omega) = S_\varphi(\omega) + \cos^4 q \int_{-\infty}^{\infty} S_\psi(\omega-\omega_1) S_\theta(\omega_1)\, d\omega_1 + \frac{1}{8}\sin^2 2q \times$ $\times \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_\theta(\omega-\omega_1) S_\theta(\omega_1)\, d\omega_1 + \int_{-\infty}^{\infty} S_\psi(\omega-\omega_1) S_\psi(\omega_1)\, d\omega_1 \right]$, где $S_\varphi(\omega) =$ $= S_1(\omega)$, $S_\theta(\omega) = S_3(\omega)$, $S_\psi(\omega) = S_2(\omega)$ $S_j(\omega) = \frac{2a_j\alpha_j}{\pi} \frac{\alpha_j^2+\beta_j^2}{(\omega^2+\alpha_j^2+\beta_j^2)^2 - 4\beta^2\omega^2}$, $j = 1, 2, 3$, а все интегралы могут быть вычислены в конечном виде, однако ввиду громоздкости окончательного результата в данном случае предпочтительней прибегнуть к численным методам интегрирования.

27.26. Так как $K_y(\tau) = 2K_x^2(\tau) + 4\overline{x}K_x(\tau)$, то $S_y(\omega) = \frac{4\sigma_x^4}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2+4\alpha^2} +$ $+ 4\overline{x}^2 \frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$ имеет один максимум при $\omega = 0$.

27.27. $S_y(\omega) = \frac{\sigma^2\alpha v a^2}{\pi(\omega^2+\alpha^2 v^2)}$.

§ 28. Задачи о выбросах

28.1. $\overline{\tau}_a = 10\pi[1 - \Phi(1)]e^{\frac{1}{2}} = 16{,}45$ сек.

28.2. $\mathrm{D}[V(t)] = 0{,}25$ см^2/сек^2.

28.3. $p_x(a) = p_y(a)\sqrt{2}$.

28.4. Число выбросов снизу вверх за уровень $a = 25^\circ$ равно числу выбросов сверху вниз за уровень $a_1 = -25^\circ$; следовательно, искомое число выбросов $2T\frac{1}{2\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\, e^{-\frac{a^2}{2b}} = 11{,}9$ раза.

28.5. $\frac{\pi}{1{,}5}\, e^{0{,}9} \left[\left(1 - \Phi\frac{3\sqrt{5}}{5} \right) \right] = 0{,}91$ сек.

28.6. Начиная с $t = \frac{2\pi}{\alpha}\, p_0$.

28.7. Задача сводится к определению числа выбросов случайной функции $\dot{X}(t)$ за уровни $\sqrt{\frac{W_0}{k}}$ (вверх) и $-\sqrt{\frac{W_0}{k}}$ (вниз). Ответ: $\frac{1}{\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}e^{-\frac{W_0}{2ka}}$.

28.8. Так как радиус кривизны R равен $\left|\frac{v}{\dot{\Psi}(t)}\right|$, то чувствительный элемент будет доходить до упора, когда $\dot{\Psi}(t)$ выйдет за пределы полосы $\pm\frac{v}{R_0}$, что дает в единицу времени $\frac{1}{\pi}\sqrt{a^2+b^2}\,\exp\left\{ -\frac{v^2}{2\sigma R_0^2} \right\}$ сек$^{-1}$.

28.9. При $h \geqslant 54{,}5$ м.

28.10. $P \approx \exp\left\{ -\frac{\alpha T}{\pi}\, e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} \right\}$.

28.11. Обозначив плотность вероятности системы нормальных величин $X(t)$, $\dot{X}(t)$ и $\ddot{X}(t)$ через $f(x, x_1, x_2)$ для искомой плотности вероятности получим $f(x) = \frac{\int_{-\infty}^{0} x_2 f(x,0,x_2)\, dx_2}{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{0} x_2 f(x,0,x_2)\, dx_2\, dx}$.

Учитывая, что корреляционная матрица системы имеет вид $\|k_{jl}\| =$ $= \left\| \begin{matrix} K_x(0) & 0 & \ddot{K}_x(0) \\ 0 & -\ddot{K}_x(0) & 0 \\ \ddot{K}_x(0) & 0 & K_x^{IV}(0) \end{matrix} \right\|$, после интегрирования получим $f(x) =$ $= \frac{1}{\sqrt{3\pi a}}\, e^{-\frac{x^2}{2a}} \left\{ e^{-\frac{x^2}{4a}} + \frac{x}{2\sqrt{a}}\sqrt{\pi}\left[1 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2a}} \right) \right] \right\}$.

28.12. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{3\sigma}e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{2\sigma^2}}\left\{2\sqrt{2}e^{-\frac{(x-\overline{x})^2}{16\sigma^2}} + \frac{x-\overline{x}}{\sigma}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[1 + \Phi\left(\frac{x-\overline{x}}{2\sigma\sqrt{2}}\right)\right]\right\}$.

28.13. Искомое число равно числу выбросов (в обе стороны) $X(t)$ за нулевой уровень; следовательно, $\frac{T}{\pi}\sqrt{\frac{\mathrm{D}[X^{III}(t)]}{\mathrm{D}[\ddot{X}(t)]}} = \frac{T_\alpha}{\pi}\sqrt{10}$.

28.14. Разбив интервал T на n равных интервалов и обозначая число выбросов на интервале j через N_j, для общего числа выбросов N_a имеем $N_a = \sum_{j=1}^n N_j$. Так как $\mathrm{M}[N_a^2] = \sum_{j,l=1}^n \mathrm{M}[N_jN_l]$, то при $n \to \infty$

$$\mathrm{M}[N_a^2] = \int_0^T\int_0^T\int_0^\infty\int_0^\infty v_1v_2 f(0,0,v_1,v_2 \mid t_1,t_2)\,dv_1\,dv_2\,dt_1\,dt_2 + \mathrm{M}[N_a].$$

$$\mathrm{D}[N_a]=\frac{1}{2\pi^2}\int_0^T\left[\frac{\Delta}{A_{33}A_{44}-A_{34}^2}\right]^{\frac{3}{2}}\left[\sqrt{A_{33}A_{44}-A_{34}^2}-A_{34}\operatorname{arctg}\frac{A_{34}}{\sqrt{A_{44}A_{33}-A_{34}^2}}\right]\times$$

$\times(T-\tau)\,d\tau + \overline{N}_a(1-\overline{N}_a)$, где Δ — определитель, а A_{jl} — алгебраическое дополнение матрицы

$$\begin{Vmatrix} \sigma^2 & K(\tau) & 0 & \dot{K}(\tau) \\ K(\tau) & \sigma^2 & -\dot{K}(\tau) & 0 \\ 0 & -\dot{K}(\tau) & \ddot{K}(0) & -K(\tau) \\ \dot{K}(\tau) & 0 & -\ddot{K}(\tau) & -K(0) \end{Vmatrix}, \qquad \overline{N}_a = \frac{T}{2\pi}\sqrt{\frac{-\ddot{K}(0)}{K(0)}}.$$

28.15. Представив площадь S в виде $S = \frac{1}{2}\int_0^T [X(t)-a]\{1+\operatorname{sgn}[X(t)-a]\}dt$ и заменив $\operatorname{sgn}(X-a)$ разрывным интегралом, после нахождения математического ожидания и деления на среднее число выбросов, имеющих место за время T, получим $\overline{s} = \frac{\sigma_x^2\sqrt{2\pi}}{\sigma_v} - \frac{a\sigma_x\pi}{\sigma_v}\left[1-\Phi\left(\frac{a}{\sigma_x}\right)\right]e^{\frac{a^2}{2\sigma_x^2}}$ или, учитывая, что в данном случае $\sigma_v^2 = \alpha^2\sigma_x^2$, $\overline{s} = \frac{\sigma_x^2\sqrt{2\pi}}{\alpha} - \frac{a\pi}{\alpha}\left[1-\Phi\left(\frac{a}{\sigma_x}\right)\right]e^{\frac{a^2}{2\sigma_x^2}}$, что после подстановки значение a дает: $0{,}863\frac{\sigma_x}{\alpha}$; $0{,}394\frac{\sigma_x}{\alpha}$; $0{,}216\frac{\sigma_x}{\alpha}$.

28.16. Необходимые моменты спектральной плотности имеют значения: $m_{00} = \sigma^2$; $m_{20} = 4\sigma^2$; $m_{02} = 9\sigma^2$; $m_{11} = 0$. По формулам, приведенным в начале параграфа, имеем $\overline{l} = \frac{3}{\pi}e^{-\frac{1}{2}}E\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = 0{,}757$.

28.17. Находя необходимые моменты спектральной плотности $S(\omega_1,\omega_2)$ имеем $m_{22} = 36\sigma^2$; $m_{40} = 48\sigma^2$; $m_{04} = 243\sigma^2$. Корни λ_1, λ_2 λ_3 (см. сводку формул) имеют значения: $\lambda_1 = 72\sigma^2$; $\lambda_2 = -36\sigma^2$; $\lambda_3 = -36\sigma^2$. Следовательно, $k^2 = 0$. Учитывая решение предыдущего примера $\Delta_2^{\frac{1}{2}} = (m_{20}m_{02}-m_{11}^2)^{\frac{1}{2}} = 6\sigma^2$. Подстановка в общую формулу дает $\overline{n}_{\max} = \frac{1}{2\pi^2}\sqrt{36}\left[\sqrt{3}E(0) - \frac{1}{\sqrt{3}}K(0)\right] = 0{,}55$, т. е. в среднем 0,55 максимумов на единицу площади.

28.18. $p_{\max}(a)\,dt = P\{X(t) \geqslant a, \dot X(t) \geqslant 0, \dot X(t+dt) \leqslant 0\}$.

$$p_{\max}(a) = \frac{\sigma_\omega}{4\pi\sigma_v} \left\{ \left[1 - \Phi\left(\frac{a-\overline{x}}{\sigma_x\sqrt{1-r^2}}\right)\right] + \right.$$
$$\left. + r\left[1 - \Phi\left(r - \frac{a-\overline{x}}{\sigma_x\sqrt{1-r^2}}\right)\right] e^{-\frac{(a-\overline{x})^2}{2\sigma_x^2}} \right\},$$

$r = \frac{\sigma_v^2}{\sigma_x\sigma_\omega}$, $\sigma_v^2 = -\ddot K_x(0)$, $\sigma_\omega^2 = K_x^{IV}(0)$, $\sigma_x^2 = K_x(0)$.

28.19. $\overline{\lambda} = \frac{\sigma_v}{2\pi\sigma_\zeta}$, где $\sigma_\zeta^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1,\omega_2)\,d\omega_1\,d\omega_2$, $\sigma_{\dot v}^2 = \iint_{-\infty}^{\infty} (\omega_1\cos v + \omega_2\sin v)^2 S(\omega_1,\omega_2)\,d\omega_1\,d\omega_2$.

§ 29. Вычисление вероятностных характеристик случайных функций на выходе динамических систем

29.1. $Y(t)$ — стационарная функция; следовательно, $S_y(\omega) = \frac{c^2}{\omega^2+\alpha^2}$, что после обратного преобразования Фурье дает $K_y(\tau) = \frac{\pi c^2}{\alpha}\,e^{-\alpha|\tau|}$.

29.2. $S_y(\omega) = \frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi[(\omega^2-k^2)^2+4h^2\omega^2]}$.

29.3. Так как $Y(t)$ стационарна, то, находя математические ожидания обеих частей уравнения, получаем $\overline{y} = \frac{b_1}{a_1}\,\overline{x}$. Для спектральной плотности имеем $S_y(\omega) = \frac{b_0^2\omega^2+b_1^2}{a_0^2\omega^2+a_1^2}\,S_x(\omega) = \frac{\sigma_x^2\alpha}{\pi}\,\frac{b_0^2\omega^2+b_1^2}{(a_0^2\omega^2+a_1^2)(\omega^2+\alpha^2)}$, что после интегрирования в бесконечных пределах дает $\mathrm{D}[Y(t)] = \frac{\sigma_x^2}{a_0\alpha}\,\frac{a_1b_0^2\alpha+a_0b_1^2}{a_1+a_0\alpha}$.

29.4. $S_u(\omega) = \frac{n^4\omega^2[S_{\dot\eta_c}(\omega)+c^2\omega^2S_\theta(\omega)]}{g^2[(\omega^2-n^2)^2+4h^2\omega^2]}$, где
$S_{\dot\eta_c}(\omega) = \frac{2a_1\alpha_1(\alpha_1^2+\beta_1^2)}{\pi[(\omega^2-\beta_1^2-\alpha_1^2)^2+4\alpha_1^2\omega^2]}$, $S_\theta(\omega) = \frac{2a_2\alpha_2(\alpha_2^2+\beta_2^2)}{\pi[(\omega^2-\beta_2^2-\alpha_2^2)^2+4\alpha_2^2\omega^2]}$.

29.5. Так как по условию задачи $\alpha(t)$ можно считать стационарной, то $S_\alpha(\omega) = \frac{\varepsilon^2}{\omega^2+\varepsilon^2}\,S_u(\omega)$, где $S_u(\omega)$ получена в задаче 29.3. Интегрируя $S_\alpha(\omega)$ в бесконечных пределах с помощью вычетов, получим $\sigma_\alpha^2 = 2{,}13\cdot10^{-6}$ рад$^{-6}$, $\sigma_\alpha = 1{,}46\cdot10^{-3}$ рад.

29.6. $S_y(\omega) = \frac{2\sigma^2\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\pi[(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\omega^2]}$, где обозначено: $\alpha = h$, $\beta = \sqrt{k^2-h^2}$, $\sigma^2 = \frac{\pi c^2}{2hk^2}$. Применение обратного преобразования Фурье к $S_y(\omega)$ дает $K_y = \sigma^2e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|)$.

29.7. $S_\theta(\omega) = \frac{2\sigma_\theta^2\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\pi[(\omega^2-\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\omega^2]}$; $K_\theta = \sigma_\theta^2e^{-\alpha|\tau|}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta|\tau|)$, где $\sigma_\theta^2 = \frac{KT}{D}$, $\alpha = \frac{1}{2}\,\frac{r}{J}$, $\beta = \frac{1}{2J}\sqrt{4JD-r^2}$.

29.8. $S_y(\omega) = \frac{4(49\omega^6+25)}{\pi(\omega^2+1)(\omega^2+4)(\omega^2+9)}$.

29.9. Не может, так как корни характеристического уравнения имеют положительные вещественные части и, следовательно, система, описываемая уравнением, неустойчива.

29.10. Так как $\zeta_c(t)$ стационарна, то $S_{\zeta_c}(\omega) = \frac{\omega_0^4 S_x(\omega)}{|-\omega^2+2hi\omega+\omega_0^2|^2}$, $\mathrm{D}[\zeta_c(t)]=$

$$=\frac{a\alpha(\alpha^2+\beta^2)\omega_0^4}{[(\beta_1-\beta)^2+(\alpha_1-\alpha)^2][(\beta_1+\beta)^2+(\alpha_1+\alpha)^2][(\beta_2-\beta)^2+(\alpha_1+\alpha)^2][(\beta_1+\beta)^2+(\alpha_1+\alpha)^2]}\times$$

$$\times\left\{\frac{(-\beta_1^2+\beta^2+\alpha^2+\alpha_1^2)^2+4(\alpha^2\beta_1^2-2\alpha_1^2\beta_1^2+\alpha_1^4-2\alpha^2\alpha_1^2+\alpha_1^2\beta^2)}{\alpha_1(\alpha_1^2+\beta_1^2)}+\right.$$

$$\left.+\frac{(-\beta^2+\beta_1^2+\alpha_1^2+\alpha^2)^2+4(\alpha_1^2\beta^2-2\alpha^2\beta^2+\alpha^4-2\alpha_1^2\alpha^2+\alpha^2\beta_1^2)}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}\right\},$$

$\alpha_1 = h$, $\beta_1 = \sqrt{\omega_0^2 - h^2}$.

29.11. Обозначив $\omega_0 = n$, $a = 3\cdot 10^{-4}g^2$, получим $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = \mathrm{D}[\zeta_c(t)]$, где $\mathrm{D}[\zeta_c(t)]$ указана в ответе к задаче 29.9. Подставляя числовые данные, получим $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = 0{,}06513$; $\sigma_\varepsilon = 0{,}255$.

29.12. Формула является следствием общей формулы, данной во введении.

29.13. $S_{yx}(\omega)=\frac{k^2 S_x(\omega)}{(k^2-\omega^2)-2hi\omega}$, $R_{yx}(\tau)=k^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau}\frac{S_x(\omega)}{(k^2-\omega^2)-2hi\omega}\,d\omega$.

29.14. Независимые частные интегралы однородного уравнения e^{-t}, e^{-7t}, весовая функция $p(t) = \frac{1}{6}(e^{-t} - e^{-7t})$, $\frac{336}{\sqrt{\pi}}K_y(\tau) = 7e^{-\tau+\frac{1}{4\alpha^2}}\times$ $\times\left\{1+\Phi\left[\sqrt{2}\left(\alpha\tau-\frac{1}{2\alpha}\right)\right]\right\} - e^{-7\tau+\frac{12{,}25}{\alpha^2}}\left\{1+\Phi\left[\sqrt{2}\left(\alpha\tau-\frac{3{,}5}{\alpha}\right)\right]\right\} + $ $+e^{\tau+\frac{1}{4\alpha^2}}\left\{1-\Phi\left[\sqrt{2}\left(\alpha\tau+\frac{1}{2\alpha}\right)\right]\right\} - e^{7\tau+\frac{12{,}25}{\alpha^2}}\left\{1-\Phi\left[\sqrt{2}\left(\alpha\tau+\frac{3{,}5}{\alpha}\right)\right]\right\}$.

29.15. $\mathrm{D}[Y(t) - Z(t)] = \mathrm{D}[Z(t)] + \int_{0-}^{\infty}\int_{0-}^{\infty} p^*(\tau_1)p(\tau_2)K_x(\tau_2 - -\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2 - 2\,\mathrm{Re}\int_{0-}^{\infty} p^*(\tau|)\,d\tau$, где знак минус в нижних пределах интегрирования обозначает, что точка 0 включена в область интегрирования.

29.16. $\mathrm{D}[Y(t)] = \frac{\sigma_x^2}{a(a+\alpha)}\left[t^2 + \frac{2a+\alpha}{2a^2(a+\alpha)}(1-2at)\right]$.

29.17. $\alpha = \mathrm{const}$, значение которой можно принять равным нулю, выбрав соответствующим образом начало отсчета; $\mathrm{D}[\alpha(t)] = \frac{\sigma_l^2 P^2}{H^2}\left(1+\frac{\overline{\omega}}{g}\right)^2 t^2 + + \frac{2\sigma_l^2 P^2}{g^2 H^2} + \int_0^t (t-\tau)K_\omega(\tau)\,d\tau$.

29.18. Заменяя $X(t)$ спектральным разложением, получим спектральное разложение для $Y_I(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{-\omega^2+2hi\omega+k^2}\left[e^{-at+i\omega t} + \right.$ $\left.+\frac{-(\omega+\omega_0)+(a-h)i}{2\omega_0}e^{-(h-i\omega_0)t} + \frac{-(\omega_0-\omega)-(a-h)i}{2\omega_0}e^{-(h+i\omega_0)t}\right]d\Phi(\omega)$, где $\omega_0 = \sqrt{k^2-h^2}$. Отсюда следует

$$K_{yI}(t_1,t_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{S_x(\omega)}{(\omega^2-k^2)^2+4h^2\omega^2}\times\left\{e^{-a(t_1+t_2)+i\omega(t_2-t_1)}+\right.$$

$$+\frac{1}{4\omega_0^2}e^{-h(t_1-t_2)}\Big[[(\omega-\omega_0)^2+(a-h)^2]e^{-i\omega_0(t_2-t_1)}+$$

$$+[(\omega+\omega_0)^2+(a-h)^2]e^{-i\omega_0(t_2-t_1)}+[\omega_0^2-(\omega-ai+hi)^2]e^{-i\omega_0(t_1+t_2)}+$$

$$+[\omega_0^2-(\omega+ai-hi)^2]e^{-i\omega_0(t_1+t_2)}\Big]+$$

$$+\frac{1}{2\omega_0}\,e^{-(a+i\omega)t_1-ht_2}[(\omega-\omega_0+ai-hi)e^{-i\omega_0 t_2}+ \\ +(-\omega-\omega_0+ai-hi)e^{-i\omega_0 t_2}]+ \\ +\frac{1}{2\omega_0}\,e^{-(a-i\omega)t_2-ht_1}[(\omega-\omega_0-ai+hi)e^{i\omega_0 t_1}+ \\ +(-\omega-\omega_0-ai+hi)e^{-i\omega_0 t_1}]\Big\}\,d\omega,$$

что после подстановки выражения $S_x(\omega)$ и интегрирования с помощью вычетов дает окончательный результат в конечном виде

$$K_{yI}(t_1,t_2)=\sigma_x^2\alpha\left\{\frac{[e^{(\alpha-a)t_1}-M_1\alpha-N_1][e^{-(\alpha+a)t_2}+M_2\alpha-N_2]}{\alpha[(a^2+k^2-2ha+\alpha^2)^2-4\alpha^2(h-a)^2]}+\right.$$

$$\left.+\operatorname{Re}\frac{[e^{(\gamma-a-i\beta)t_1}+M_1(i\beta-\gamma)-N_1][e^{(i\beta-\gamma-a)t_2}-M_2(i\beta-\gamma)-N_2]}{2\gamma\beta[(\beta^2-\gamma^2+\alpha^2)+2i\beta\gamma](\beta+i\gamma)}\right\},$$

$M_j=e^{-ht_j}\frac{\sin\beta t_j}{\beta}$, $N_j=e^{-ht_j}(\cos\beta t_j+\frac{h-a}{\beta}\,\sin\beta t_j)$, $j=1,2$; $\gamma=|h-a|$, $\beta=\omega_0$.

29.19. $K_y(t_1,t_2)=\frac{a\pi}{2}e^{\frac{1}{2}(t_1^2+t_2^2+2\alpha^2)}\Big\{[\Phi(t_1-\alpha)+\Phi(\alpha)][\Phi(t_2+\alpha)+ + \Phi(t_1+\alpha)]-\frac{4}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{t_1}e^{-\frac{1}{2}(\xi-\alpha)^2}\Phi(\xi+\alpha)\,d\xi\Big\}$, $t_2\geqslant t_1$.

29.20. $\overline{y}=\frac{b}{a^2}\left(-1+e^{\frac{a^2t^2}{2}}\right)$; $K_y(t_1,t_2)=\frac{\sigma_x^2b^2\sqrt{2\pi}}{2\sqrt{a^2+2\alpha^2}}\,e^{\frac{a^2}{2}(t_1^2+t_2^2)}\times \times\int\limits_0^{t_2}e^{\frac{a^2(a^2+4\alpha^2)t^2}{2(a^2+2\alpha^2)}}\left\{\Phi\left[\frac{(a^2+2\alpha^2)t_1-2\alpha^2t}{\sqrt{a^2+2\alpha^2}}\right]+\Phi\left[\frac{2\alpha^2t}{\sqrt{a^2+2\alpha^2}}\right]\right\}dt.$

29.21. $\overline{y}=\frac{t_0}{t}\,y_0+\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t}\overline{x}(\xi)\xi\,d\xi=1+\frac{t_0}{t}(y_0-1)$;

$$K_y(t_1,t_2)=\frac{1}{t_1t_2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_2}K_x(\xi,\eta)d\xi d\eta=\frac{1}{t_1t_2}\left\{\frac{4}{3\alpha^3}(t_1^3-t_0^3)+\frac{1}{\alpha^2}(t_1^4-t_0^4)+\right.$$

$$+\frac{2}{5\alpha}(t_1^5-t_0^5)\left[\left(\frac{t_1^2}{\alpha}-\frac{2}{\alpha^2}t_1+\frac{2}{\alpha^3}\right)e^{\alpha t_1}-\left(\frac{t_0^2}{\alpha}-\frac{2}{\alpha^2}t_0+\frac{2}{\alpha^3}\right)e^{\alpha t_0}\right]\times$$

$$\left.\times\left[\left(\frac{t_1^2}{\alpha}+\frac{2}{\alpha^2}\,t_1+\frac{2}{\alpha^3}\right)e^{-\alpha t_1}+\left(\frac{t_2^2}{\alpha}+\frac{2}{\alpha^2}\,t_2+\frac{2}{\alpha^3}\right)e^{-\alpha t_2}\right]\right\},$$

$t_2\geqslant t_1$.

29.22. $\overline{y}(t)=\frac{1}{\Delta}\sum_{k,j=1}^{n}A_{jk}y_k(t)e_j+\int_0^t p(t,\xi)\overline{x}(\xi)\,d\xi$;

$K_y(t_1,t_2) = \frac{1}{\Delta^2}\sum_{k,j,l,m=1}^{n} A_{jm}A_{lk}y_m^*(t_1)y_k(t_2)k_{jl} + \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} p(t_1,\xi) \times$ $\times p(t_2,\eta)K_x(\xi,\eta)d\xi d\eta$, где $y_1(t), \ldots, y_m(t)$ — независимые частные интегралы соответствующего однородного уравнения

$$\Delta = \begin{Vmatrix} y_1(0) & y_2(0) & \ldots & y_n(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) & \ldots & y_n'(0) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)}(0) & y_2^{(n-1)}(0) & \ldots & y_n^{(n-1)}(0) \end{Vmatrix},$$

а A_{jl} — алгебраические дополнения этого определителя.

29.23. Так как решение системы дает $Y_2(t){=}{-}2\int_0^t [e^{-(t-t_1)}{-}e^{-2(t-t_1)}]\times$ $\times X(t_1){+}2[Y_2(0){-}Y_1(0)]e^{-t}{+}[2Y_1(0){-}Y_2(0)]e^{-2t}$, а $K_x(\tau) = 2e^{-|\tau|}$, то $\mathrm{D}[Y_2(t)] = 4\left[\frac{2}{9} + (1-2t)e^{-2t} + \left(\frac{4}{3}t - \frac{20}{9}\right)e^{-3t} + e^{-4t}\right] + (2e^{-t} - e^{-2t})^2 \times$ $\times \mathrm{D}[Y_2(0)] + (2e^{-2t} - 2e^{-t})^2 \mathrm{D}[Y_1(0)] + 2(2e^{-t} - e^{-2t})(2e^{-2t} - 2e^{-t}) \times$ $\times K_{y_1(0),y_2(0)}$; $\mathrm{D}[Y_2(0{,}5)] = 0{,}624$.

29.24. $\mathrm{D}[Y_1(t)] = \frac{3}{2}e^{-4t} + \frac{4}{9}\left(-t^2+4t-\frac{20}{3}\right)e^{-3t} + \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + \frac{5}{4}\right)e^{-2t} +$ $+\left(\frac{1}{9}t^2 - \frac{1}{6}t + \frac{23}{108}\right)$;

$\mathrm{D}[Y_2(t)] = \frac{3}{2}e^{-4t} - \frac{8}{27}(3t^2 - 6t + 14)e^{-3t} + (2t^2 - 4t + 1)e^{-2t} +$ $+\left(\frac{8}{9}t^2 - \frac{20}{9}t + \frac{89}{54}\right)$.

29.25. $\mathrm{D}[Y_1(0{,}5)] = 0{,}01078$; $\mathrm{D}[Y_2(0{,}5)] = 0{,}00150$.

29.26. Так как $Y(t)$ и $Z(t)$ по условию можно считать стационарными, то $S_y(\omega) = \frac{a^2\alpha\sigma_x^2\omega^2}{\pi b^2(\omega^2+\alpha^2)\left(\omega^2+\frac{1}{b^2}\right)}$, $S_z(\omega) = \frac{a\sigma_x^2}{\pi b^2(\omega^2+\alpha^2)\left(\omega^2+\frac{1}{b^2}\right)}$, что после интегрирования дает $\mathrm{D}[Y(t)] = \frac{a^2\alpha\sigma_x^2}{b(ab+1)}$, $\mathrm{D}[Z(t)] = \frac{\sigma_x^2}{ab+1}$.

29.27. Нормальный закон с параметрами $\overline{y} = 0$, $\sigma_y = 0{,}78$.

29.28.

$$S_x(\omega) = \frac{n^4}{g^2}\left\{\omega^2 S_{\dot{\xi}_c}(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^2 S_{\dot{\eta}_c}(\omega_1)S_\varphi(\omega-\omega_1)\,d\omega_1 + \right.$$

$$+\rho_x^2\left[2\int_{-\infty}^{\infty} \omega_1^2(\omega-\omega_1)^2 S_\varphi(\omega-\omega_1)S_\varphi(\omega_1)\,d\omega_1 + \right.$$

$$+3\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_1)^2 S_\psi(\omega-\omega_1)\omega_1^2 S_\psi(\omega_1)d\omega_1 + \int_{-\infty}^{\infty} S_\psi(\omega-\omega_1)\omega_1^4 S_\psi(\omega_1)d\omega_1 +$$

$$\left. +4\int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_1)^3\omega_1^3 S_\psi(\omega-\omega_1)S_\psi(\omega_1)\,d\omega_1\right] +$$

$$+\rho_z^2\left[\omega^4 S_\psi(\omega) + \int_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_1)^4 S_\varphi(\omega-\omega_1)S_\theta(\omega_1)\,d\omega_1 + \right.$$

$$+4\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_1)^2 S_\psi(\omega-\omega_1)\omega_1^2 S_\theta(\omega_1)\,d\omega_1+$$

$$\left.\left.+4\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_1)^3\omega_1 S_\varphi(\omega-\omega_1)S_\theta(\omega_1)\,d\omega_1\right]\right\};$$

$$S_y(\omega)=\frac{n^4}{g^2}\,\omega^2\left[S_{\dot\zeta_c}(\omega)+\rho_x^2\omega^2 S_\psi(\omega)\right];\quad S_{xy}(\omega)=\frac{n^4}{g^2}\rho_x\rho_z\omega^4 S_\psi(\omega).$$

29.29. Для нахождения асимметрии и эксцесса нужно определить моменты $Y(t)$ до четвертого включительно. При вычислении этих моментов необходимо определить математические ожидания: $\mathrm{M}[X^2(t_1)X^2(t_2)]$, $\mathrm{M}[X^2(t_1)X^2(t_2)X^2(t_3)]$ и $\mathrm{M}[X^2(t_1)X^2(t_2)X^2(t_3)X^2(t_4)]$, для определения которых нужно взять производные соответствующих порядков от характеристической функции системы нормальных случайных величин. Например, $\mathrm{M}[X^2(t_1)X^2(t_2)] = \frac{\partial^4}{\partial u_1^2\,\partial u_2^2}\left\{\exp\left[-\frac12\sum_{j,l=1}^2 k_{jl}u_ju_l\right]\right\}\Big|_{u_1=u_2=0}$, где $\|k_{jl}\|$ — корреляционная матрица системы случайных величин $X(t_1)$, $X(t_1)$, $X(t_2)$, $X(t_2)$. $\mathrm{M}[X^2(t_1)X^2(t_2)] = 2K_x^2(t_2-t_1)+K_x^2(0)$; $\mathrm{M}[X^2(t_1)X^2(t_2)X^2(t_3)] = K_x^3(0)+2K_x^2(t_2-t_1)K_x(0)+2K_x^2(t_3-t_2)K_x(0)+$ $+2K_x^2(t_3-t_1)K_x(0)+8K_x(t_2-t_1)K_x(t_3-t_1)K_x(t_3-t_2)$;

$$\begin{gathered}\mathrm{M}[X^2(t_1)X^2(t_2)X^2(t_3)X^2(t_4)] = K_x^2(0)+2K_x^2(0)[K_x^2(t_3-t_4)+\\ +K_x^2(t_2-t_4)+K_x^2(t_2-t_1)+K_x^2(t_3-t_2)+K_x^2(t_4-t_1)+K_x^2(t_3-t_1)]+\\ +4[K_x^2(t_2-t_1)K_x^2(t_4-t_3)+K_x^2(t_3-t_1)K_x^2(t_4-t_2)+K_x^2(t_4-t_1)K_x^2(t_3-t_2)]+\\ +8K_x(0)[K_x(t_3-t_2)K_x(t_4-t_2)K_x(t_4-t_3)+K_x(t_1-t_3)K_x(t_1-t_4)\times\\ \times K_x(t_4-t_3)+K_x(t_2-t_1)K_x(t_2-t_4)K_x(t_4-t_1)+K_x(t_3-t_1)K_x(t_3-t_2)\times\\ \times K_x(t_2-t_1)]+16[K_x(t_1-t_2)K_x(t_1-t_3)K_x(t_2-t_4)K_x(t_3-t_4)+\\ +K_x(t_2-t_1)K_x(t_-t_4)K_x(t_2-t_3)K_x(t_3-t_4)+\\ +K_x(t_1-t_3)K_x(t_1-t_4)K_x(t_2-t_3)K_x(t_2-t_4)].\end{gathered}$$

Подставляя полученные выражения в общие формулы для моментов решения дифференциального уравнения, получим $\mathrm{Sk}=\frac{2}{k+\alpha}\sqrt{2k(k+2\alpha)}$; $\mathcal{E}\mathrm{x}=$ $=3\left[\frac{15k^2+25k\alpha+2\alpha^2}{(k+\alpha)(3k+2\alpha)}-1\right]$.

29.30. При $\tau\geqslant 0$ будем иметь

$R_{yx}=\frac{2\pi(k_1k_2c)^2}{\omega_2}\,e^{-h_2\tau}\,\frac{2\omega_2(h_1+h_2)\cos\omega_2\tau-[\omega_2^2-\omega_1^2-(h_1+h_2)^2]\sin\omega_2\tau}{[(\omega_2-\omega_1)^2+(h_1+h_2)^2][(\omega_2+\omega_1)^2+(h_1+h_2)^2]}$;

при $\tau\leqslant 0$ будет

$R_{yx}=\frac{2\pi(k_1k_2c)^2}{\omega_1}\,e^{-h_1\tau}\,\frac{2\omega_1(h_1+h_2)\cos\omega_1\tau+[(\omega_2^2-\omega_1^2)+(h_1+h_2)^2]\sin\omega_1\tau}{[(\omega_2-\omega_1)^2+(h_1+h_2)^2][(\omega_2+\omega_1)^2+(h_1+h_2)^2]}$;

$\omega_1=\sqrt{k_1^2-h_1^2}$, $\omega_2=\sqrt{k_2^2-h_2^2}$.

29.31. $\mathrm{D}[Y(t)] = \frac{(\overline{b}^2+\sigma_b^2)\sqrt{2\pi}}{i\cdot 2\sigma_a}\int\limits_0^t K_x(\tau)\Big\{\exp\left[\frac{1}{2\sigma_a^2}(2\sigma_a^2t-\sigma_a^2\tau-\overline{a})\right]\times$ $\times\, w\left[\frac{\sigma_a^2(2t-\tau)-\overline{a}}{\sigma_a\sqrt2}\right]-\exp\left[\frac{1}{2\sigma_a^2}(\sigma_a^2\tau-\overline{a})\right]w\left(\frac{\sigma_a^2\tau-\overline{a}}{\sigma_a\sqrt2}\right)\Big\}\,d\tau$, где $w(z)$ —

табулированная функция (см. В. Н. Фадеева и Н. М. Терентьев. Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента, Гостехиздат, 1954).

29.32. $\overline{\alpha}(t)+i\overline{\beta}(t) = (\overline{x}_1+i\overline{x}_2)\int_0^t \exp\{-at_1-T^2\sigma_z^2\}dt_1$; $\sigma_z^2 = 2\int_0^{t_1}(t_1-\tau)K_y(\tau)\,d\tau$.

29.33. При $t \gg T$ $\sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{\nu^2(\alpha^2+\nu^2)}\left[\alpha t + \frac{3\nu^2-\alpha^2}{2(\alpha^2+\nu^2)} - \frac{\alpha}{2\nu}\sin\nu t + \frac{1}{2}\cos\nu t\right]$, $\sigma_y|_{t=1\text{ час}} \approx 1{,}5$ км.

29.34. $\mathrm{D}[\alpha(t)] \approx a_1 t$; $\mathrm{D}[\beta(t)] \approx b_1 t$;

$a_1 = \frac{2}{\pi p}\int_0^\infty \left[(\cos\lambda\tau+2)\frac{1}{p}k_1^2 \arcsin k_{\dot\psi}(\tau) + k_2^2\frac{\cos\lambda\tau}{q}\arcsin k_{\dot\theta}(\tau)\right]d\tau$;

$b_1 = \frac{2}{\pi q}\int_0^\infty \left[(\cos\lambda\tau+2)\frac{1}{q}k_2^2 \arcsin k_{\dot\theta}(\tau) + k_1^2\frac{\cos\lambda\tau}{p}\arcsin k_{\dot\psi}(\tau)\right]d\tau$.

$k_{\dot\psi(\tau)}$ и $k_{\dot\theta}(\tau)$ — нормированные корреляционные функции $\dot\Psi(t)$ и $\dot\Theta(t)$, $\lambda = \sqrt{pq}$.

29.35. $\mathrm{D}[Z(t)] = \int_0^t\int_0^t \exp\left\{a^2(\tau_1+\tau_2) + \frac{a^4}{4}[3\varphi(\tau_1)+3\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_2-\tau_1)]\right\}K_x(\tau_2-\tau_1)\,d\tau_1\,d\tau_2$, где $\varphi(\tau) = 2\int_0^\tau(\tau-\tau_1)K_y(\tau_1)\,d\tau_1$,

§ 30. Оптимальные линейные динамические системы

30.1. Определяя $K_x(\tau)$ как корреляционную функцию суммы связанных случайных функций и применяя к полученному равенству обратное преобразование Фурье, получим $S_x(\omega) = S_u(\omega) + S_v(\omega) + S_{uv}(\omega) + S_{uv}^*(\omega)$.

30.2. $S_{xz}(\omega) = i\omega[S_u(\omega) + S_{vu}(\omega)]$.

30.3. $L(i\omega) = i\omega e^{-i\omega\tau}$; $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = 0$.

30.4. $L(i\omega) = \frac{ia^2}{a^2(\omega^2+\beta^2)^2+b^2(\omega^2+\alpha^2)^2}\Big\{\omega(\omega^2+\beta^2)^2 e^{-i\omega\tau} - \frac{(\omega-i\alpha)^2(\omega-i\beta)^2}{2m}\times\Big[(m-in)\left(\frac{m-in+i\beta}{m-in-i\alpha}\right)^2 e^{-(n-im)\tau}(\omega+m+in) + (m+in)\left(\frac{m+in-i\beta}{m+in+i\alpha}\right)^2 e^{-(n-im)\tau}(\omega-m-in)\Big]\Big\}$, где $m=\sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2+\nu^2}-\mu}{2}}$, $n = \sqrt{\frac{\sqrt{\mu^2+\nu^2}+\mu}{2}}$, $\mu = \frac{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}{a^2+b^2}$, $\nu = \frac{ab|\beta^2-\alpha^2|}{a^2+b^2}$.

30.5. $L(i\omega) = \frac{a^2(\alpha+\beta)(\omega-i\beta)}{c^2(\alpha+d)(\omega-id)}$, где $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $d=\frac{1}{c}\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2}$.

30.6. $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = \int_{-\infty}^\infty |N(i\omega)|^2 S_u(\omega)\,d\omega - \int_{-\infty}^\infty |L(i\omega)|^2[S_u(\omega)+S_v(\omega) + S_{uv}(\omega)+S_{uv}^*(\omega)]d\omega$.

30.7. $L(i\omega) = \frac{i\alpha^2}{2mc^2}\left\{\frac{m+in}{[m+i(n+n_1)]^2-m_1^2}\cdot\frac{\omega+m-in}{(\omega-m_1-in_1)(\omega+m_1-in_1)} - \frac{-m+in}{[m-i(n+n_1)]^2-m_1^2}\cdot\frac{\omega-m-in}{(\omega-m_1-in_1)(\omega+m_1-in_1)}\right\}$, где $m = \sqrt{\sqrt{\beta^4+\gamma^4}+\beta^2}$, $n = \sqrt{\sqrt{\beta^4+\gamma^4}-\beta^2}$, $m_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4+\gamma^4+\frac{\alpha^2}{4c^2}}+\beta^2}$, $n_1 = \sqrt{\sqrt{\beta^4+\gamma^4+\frac{\alpha^2}{4c^2}}-\beta^2}$;

$\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = \frac{\pi\alpha^2}{2n} - \frac{\alpha^4\pi}{2m^2c^2}\left[\frac{|A|^2}{n} + \mathrm{Im}\left(\frac{A^2}{m+in}\right)\right]$, где
$A = \frac{m+in}{[m^2-m_1^2-(n+n_1)^2]+2im(n+n_1)}$.

30.8. $L(i\omega) = e^{-\alpha\tau}$.

30.9. $L(i\omega) = e^{-\tau}[i\omega\tau + (1+\tau)]$.

30.10. $L(i\omega) = \frac{e^{-\beta\tau}}{\omega - i\alpha}\left\{\omega\left[\cos\beta\tau - \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\sin\beta\tau\right] + i[(2\beta-\alpha)\sin\beta\tau - \right.$ $\left. - \alpha\cos\beta\tau]\right\}$;

$\mathrm{D}[\varepsilon(\tau)] = \frac{\pi a^2}{2\beta}\left\{\frac{(\alpha^2+2\beta^2)}{2\beta^2} - e^{-2\beta\tau}\left[\cos\beta\tau - \left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\sin\beta\tau\right]^2 - \right.$ $\left. - \frac{\alpha^2}{2\beta^2}e^{-2\beta\tau}\left[\cos\beta\tau + \left(1-\frac{2\beta}{\alpha}\right)\sin\beta\tau\right]^2\right\}$.

30.11. $L(i\omega) = \frac{a^2(\alpha^2+\beta^2)}{c^2(d+\alpha)}e^{-\alpha\tau}\frac{\omega - i\beta}{\omega - id}$, где $c^2 = a^2 + b^2$, $d = \frac{1}{c^2}(a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)$.

30.12. $L(i\omega) = \frac{c^2}{a^2(\omega^2+b^2)}\left\{(\omega^2+\beta^2)e^{-i\omega\tau_0} - \frac{(b-\beta)}{(\alpha+b)}e^{-b\tau_0}(\omega - i\alpha)\times\right.$ $\left.\times(\omega - i\beta)\right\}$, где $a^2 = \frac{1}{\pi}(\alpha\sigma_u^2 + \beta\sigma_v^2)$, $b^2 = \frac{1}{a^2}\frac{\alpha\beta}{\pi}(\beta\sigma_u^2 + \alpha\sigma_v^2)$, $c^2 = \frac{\alpha\sigma_u^2}{\pi}$.

30.13. $L(i\omega) = e^{-\tau}\left(\cos\alpha\tau + \sin\alpha\tau + i\frac{\omega}{\alpha}\sin\alpha\tau\right)$.

30.14. $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = \sigma_\theta^2(\alpha^2 + \beta^2) - \frac{\pi k_1^4}{a^2}\left\{\frac{c_1^2}{\alpha_v} + \frac{2|c_2|^2}{\alpha} + \frac{2c_1}{\beta^2+(\alpha+\alpha_v)^2}\times\right.$ $\left.\times[\beta b' - (\alpha+\alpha_v)a']\right\}$, где

$a^2 = \frac{\sigma_v^2\alpha_v}{\pi}$; $k^2 = \frac{2\sigma_\theta^2\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{\sigma_v^2\alpha_v}$; $k_1^2 = \sigma_v^2\alpha_v k^2$;

$c_1 = -\frac{\alpha_v}{(\alpha_v+\alpha_1)(\alpha_v+\beta_1)[\beta^2+(\alpha_v-\alpha)^2]}$;

$c_2 = \frac{-\alpha+i\beta}{2\beta(\beta+i\alpha+i\alpha_1)(\beta+i\alpha+i\beta_1)(\beta+i\alpha-i\alpha_v)} = a' + ib'$;

$\alpha_1^2 = \alpha^2 - \beta^2 + \frac{k^2}{2} + \sqrt{\left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{k^2}{2}\right)^2 - (\alpha^2+\beta^2) - k^2\alpha_v^2}$;

$\beta_1^2 = \alpha^2 - \beta^2 + \frac{k^2}{2} - \sqrt{\left(\alpha^2 - \beta^2 + \frac{k^2}{2}\right)^2 - (\alpha^2+\beta^2) - k^2\alpha_v^2}$.

30.15. Искомая величина характеризуется средней квадратической ошибкой оптимальной динамической системы, равной соответственно 1,67; 0,738; 0,0627 м/сек. $\sigma_\varepsilon = 2\sigma_v\sqrt{\frac{6\alpha}{T(12+6\alpha T+\alpha^2T^2)}}$.

30.16. $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = 4\sigma_v^2\alpha^2 d$, где $d = \frac{1}{4+4\gamma+\gamma^2+\frac{1}{12}\gamma^3}$, $\gamma = \alpha T$, что дает для σ_ε значения 1,62; 0,829; 0,0846 м/сек.

30.17.

$$L(i\omega) = \frac{(\omega^2+\alpha^2)^2}{4\alpha^3}\left\{\frac{\beta}{\alpha+i\omega} + \frac{\gamma}{(\alpha+i\omega)^2} + \frac{\lambda_1}{i\omega} - \frac{\lambda_2}{\omega^2} - \right.$$
$$\left. - e^{-i\omega T}\left[e^{-\alpha T}\left(\frac{\beta+\gamma T}{\alpha+i\omega} + \frac{\gamma}{(\alpha+i\omega)^2}\right) + \frac{\lambda_1+\lambda_2 T}{i\omega} - \frac{\lambda_2}{\omega^2}\right]\right\} -$$
$$- \frac{(\omega - i\alpha)^2}{4\alpha^3}[3\alpha\gamma - \gamma + 2\alpha\lambda_1 - \lambda_2 - i\omega(\beta+\lambda_1)] -$$
$$- \frac{(\omega + i\alpha)^2}{4\alpha^3}e^{-i\omega T}\{e^{-\alpha T}[\alpha(\beta+\gamma T) + \gamma] + 2\alpha(\lambda_1 + \lambda_2 T) +$$
$$+ \lambda_2 + i\omega[(\beta+\gamma T)e^{-\alpha T} + (\lambda_1 + \lambda_2 T)]\},$$

где $\lambda_1 = \frac{4(\mu_1-\beta)}{4+\alpha T} - \frac{T}{2}\lambda_2 = -0{,}015202$ сек$^{-1}$,

$\lambda_2 = \frac{4[\alpha^2\mu_2-\alpha\beta+\gamma+\frac{\alpha^2 T}{2}(\mu_1-\beta)]}{-\frac{1}{12}\alpha^3T^3+\alpha^2T^2+4\alpha T+4} = -0{,}0112$ сек$^{-1}$, $\mu = 1$,

$\mu_2 = \tau_0$, $\beta = (1+\alpha\tau_0)e^{-\alpha\tau_0}$, $\gamma = \alpha e^{-\alpha\tau_0}$;

$\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = \sigma_u^2\left[1+\lambda_1\mu_1+\lambda_2\mu_2-\frac{\beta}{\alpha}(2\alpha\beta-2\gamma+\alpha\lambda_1-\lambda_2)-\frac{\gamma}{\alpha^2}(\gamma+\lambda_2)\right] = 0{,}4525$.

30.18. Общая формула для $L(i\omega)$ та же, что и в предыдущей задаче, но $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 1$; $\beta = \alpha^2\tau_0 e^{-\alpha\tau_0}$; $\gamma = -\alpha^2 e^{-\alpha\tau_0}$; $\lambda_1 = 4{,}58\cdot 10^{-3}$; $\lambda_2 = -2{,}54\cdot 10^{-4}$; $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = \sigma_u^2\left[\alpha^2+\lambda_2\mu_2-\frac{\beta}{\alpha}(2\alpha\beta-2\gamma+\alpha\lambda_1-\lambda_2) - \frac{\gamma}{\alpha^2}(\gamma+\lambda_2)\right] = 0{,}0110$ сек$^{-2}$.

30.19. $l(\tau) = \delta(\tau)$; $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = 0$.

30.20. Для первой системы

$$\begin{aligned}L(i\omega)=&[(\omega^2+\alpha^2-\beta^2)^2+4\alpha^2\beta^2]\left\{\frac{\lambda_1}{i\omega}-\frac{\lambda_2}{\omega^2}+\frac{\lambda_3+i\lambda_4}{2(\Omega-\omega)}+\frac{\lambda_3-i\lambda_4}{2(\Omega+\omega)}-\right.\\ &\left.-e^{-i\omega T}\left[\frac{\lambda_1+\lambda_2 T}{i\omega}-\frac{\lambda_2}{\omega^2}+\frac{\lambda_3+i\lambda_4}{2(\Omega-\omega)}e^{i\Omega T}+\frac{\lambda_3-i\lambda_4}{2(\Omega+\omega)}e^{-i\Omega T}\right]\right\}-\\ &-[\omega^2-(\alpha^2+\beta^2)-2i\alpha\omega][2\alpha(\lambda_1+\lambda_4)-\lambda_2-\lambda_3\Omega-i(\lambda_1+\lambda_4)\omega]-\\ &-e^{-i\omega T}[\omega^2-(\alpha^2+\beta^2)+2i\alpha\omega][2\alpha(\lambda_1+\lambda_2T+\lambda_3\sin\Omega T+\lambda_4\cos\Omega T)+\lambda_2+\\ &+\lambda_3\Omega\cos\Omega T-\lambda_4\Omega\sin\Omega T+i\omega(\lambda_1+\lambda_2T+\lambda_3\sin\Omega T+\lambda_4\cos\Omega T)],\end{aligned}$$

где постоянные λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4 определяются системой:

$$\begin{aligned}&\lambda_1+10\lambda_2+0{,}1244\lambda_3+0{,}9903\lambda_4=0{,}000578,\\ &\lambda_1+13{,}4034\lambda_2+0{,}1728\lambda_3+0{,}9620\lambda_4=0,\\ &\lambda_1-0{,}8752\lambda_2+0{,}1657\lambda_3+0{,}9837\lambda_4=0,\\ &\lambda_1+10{,}1831\lambda_2+0{,}1236\lambda_3+0{,}9889\lambda_4=0{,}000584,\end{aligned}$$

которая имеет решение: $\lambda_1 = -0{,}0018$; $\lambda_2 = 0{,}000011$; $\lambda_3 = -0{,}0106$; $\lambda_4 = 0{,}0036$. Дисперсия для оптимальной системы первого типа $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = 0,135\cdot 10^{-4}$. Для второй системы вид $L(i\omega)$ сохраняется тем же, но $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, а λ_3 и λ_4 определяются из системы

$$\begin{aligned}&\lambda_3+5{,}937\lambda_4=0,\\ &\lambda_3+8{,}003\lambda_4=0{,}0047,\end{aligned}$$

что дает $\lambda_3 = -0{,}0136$; $\lambda_3 = 0{,}0023$. Дисперсия для этой системы $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = 0{,}266\cdot 10^{-4}$.

30.21. $Y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t \exp\left\{-\int_{t_2}^t \varkappa(t_1)\,dt_1\right\}\sqrt{t_2}\varkappa(t_2)X(t_2)\,dt_2$, где $\varkappa(t)=\frac{bI_{\text{в}}(a^2t)+a^2tI_{\text{вн}}(a^2t)}{tI_{\text{в}}(a^2t)}$, $I_{\text{в}}(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента.

У к а з а н и е: составить уравнение Калмана для $\lambda(t)$, при его решении перейти к новой неизвестной, положив $\lambda(t) = \frac{z'(a^2t)}{z(a^2t)}$.

30.22. $Y(t) = e^{-\frac{\alpha^2 t}{2}} \int_0^t \exp\left\{\frac{1}{2}\alpha^2 t_2 - \int_{t_2}^t \varkappa(t_1)\,dt_1\right\} \varkappa(t_2) X(t_2)\,dt_2$, где $\varkappa(t) = -\alpha^2 + \alpha^2 e^{\alpha^2 t} \frac{I_0(e^{\alpha^2 t}) - cK_0(e^{\alpha^2 t})}{I_1(e^{\alpha^2 t}) + cK_1(e^{\alpha^2 t})}$,
$I_p(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента;
$K_p(x)$ — функция Макдональда, а $c = \frac{I_0(1) - I_1(1)}{K_0(1) + K_1(1)}$.

У к а з а н и е: см. указание к 33.21. Сделать подстановку $\lambda(t) = \frac{z'(e^{\alpha^2 t})}{z(e^{\alpha^2 t})}$.

30.23.

$$L(i\omega) = \frac{1}{2\beta(\omega - i\gamma)}\, e^{-\alpha\tau_0} \Big\{ e^{-i\beta\tau_0}[\beta - i(\alpha - \gamma)](\omega - \beta - i\alpha) + \\ + e^{i\beta\tau_0}[\beta + i(\alpha - \gamma)](\omega + \beta - i\alpha) \Big\};$$

$\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = [n_1^2 + n_2^2(\alpha^2 + \beta^2)]\sigma_\theta^2 - 2a^2 n_2^2 \pi \left[\frac{1}{2}|A|^2 - \mathrm{Im}\left(\frac{A^2}{\beta + i\alpha}\right)\right]$, где $a^2 = \frac{2\sigma_\theta^2}{\pi}\alpha(\alpha^2 + \beta^2) n_2^2$, $A = \frac{1}{2\beta}\, e^{-(\alpha - i\beta)\tau_0}(\beta + i\alpha - i\gamma)$, $\gamma = \frac{n_1}{n_2}$.

30.24. $a = e^{-\alpha\tau_2}$; $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = (1 - e^{-2\alpha\tau_0})\sigma_x^2$.

30.25. $a = e^{-\alpha\tau}(\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau)$; $b = \frac{1}{\beta}e^{-\alpha\tau}\sin\beta\tau$; $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = \sigma_x^2\left[1 - e^{-2\alpha\tau}\left(1 + 2\frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau\cos\beta\tau + 2\frac{\alpha^2}{\beta^2}\sin^2\beta\tau\right)\right]$.

30.26. $a = \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}\, e^{-\alpha\tau_0}$; $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = \sigma_u^2\left(1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_u^2 + \sigma_v^2}\, e^{-2\alpha\tau_0}\right)$.

30.27. $a = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta}\, e^{-\alpha\tau_0}\sin\beta\tau_0 = -0{,}09721$ сек$^{-1}$;
$b = e^{-\alpha\tau_0}(\cos\beta\tau_0 - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau_0) = 0{,}9736$; $c = 0$; $\mathrm{D}[\varepsilon(t)] = 0{,}404\,\frac{\text{град}}{\text{сек}^2}$.

30.28. $a = e^{-\alpha\tau_0}(\cos\beta\tau_0 + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta\tau_0) = 0{,}99$; $b = \frac{1}{\beta}e^{-\alpha\tau_0}\sin\beta\tau_0 = 0{,}20$ сек; $c = 0$.

§ 31. Случайные последовательности

31.1. Коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями $\sum_{l=1}^{j} a_{jl} a_{j+m,l} = \sigma^2\alpha^m$, $j = 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots$

31.2. $K(j, j+m) = c^2(1-\alpha)^m \cdot \frac{1 - (1-\alpha)^{2j}}{\alpha(2-\alpha)} \xrightarrow[j\to\infty]{} c^2(1-\alpha)^m = K(m)$.

31.3. $\overline{x}_j = c + jp$, $K(j, j+m) = jp(1-p)$, $m \geqslant 0$.

31.4. $\overline{n} = 0{,}5T\left(1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\right)$; $\overline{\tau} = \frac{2}{1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}}$.

31.5. $\overline{\nu} = T\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{x_j}\int_{-\infty}^{x_j} f(x_{j-1}, x_j, x_{j+1})\,dx_{j-1}\,dx_{j+1}\,dx_j = \frac{T}{2\pi}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

31.6. $S(\omega) = \frac{1}{2\pi}$.

31.7. $S(\omega) = \frac{\sigma^2(1-\alpha^2)}{2\pi(1 + \alpha^2 - 2\alpha\cos\omega)}$.

31.8.

$$K(m) = \begin{cases} \sigma^2, & m = 0, \\ \frac{a^{m-1}(a-b)(1-ab)\sigma^2}{1 - 2ab + b^2}, & m \neq 0. \end{cases}$$

31.9. Так как $\lim\limits_{j\to\infty} K(j,j+m)=\sigma^2\alpha^{|m|}$, то X_j — стационарна. $S(\omega)=$ $=\frac{\sigma^2(1-\alpha^2)}{2\pi(1+\alpha^2-2\alpha\cos\omega)}$.

31.10. $K(m)=\frac{c^2}{(a_1-a_2)(1-a_1a_2)}\left[\frac{a_1^{|m|+1}}{1-a_1^2}-\frac{a_2^{|m|+1}}{1-a_2^2}\right]$.

31.11. $X_j=\alpha X_{j-1}$.

31.12. $X_j=a_1X_{j-1}+a_2X_{j-2}+a_3X_{j-3}$; $a_1=k(1-a_2-\alpha a_3)$; $a_2=$ $=\frac{k(1-\alpha k)(\alpha-k)}{(1-k\alpha)(1+k\alpha-2k^2)}$; $a_3=\frac{k(\alpha-k)^2}{(1-k\alpha)(1+k\alpha-2k^2)}$.

31.13. $a_1=\frac{1}{\Delta}\,\alpha^{m+1}\left\{(1+\varepsilon^2)^2-\alpha^2[2-\alpha^2+\varepsilon^2(\alpha^2+1)]\right\}$; $\varepsilon=\frac{\sigma_u}{\sigma_u}$; $a_2=\frac{1}{\Delta}\,\varepsilon^2\alpha^{m+2}(1+\varepsilon^2-\alpha^2)$; $a_3=\frac{\alpha^{m+3}}{\Delta}\,\varepsilon^4$; $\Delta=(1+\varepsilon^2)^3-(1+\varepsilon^2)\alpha^2(\alpha^2+$ $+2)+2\alpha^4$.

31.14. У к а з а н и е. Вывести условия, которым должна удовлетворять корреляционная функция случайной последовательности $Y_j=\sum_{l=1}^{n}a_lX_{j-l}$, перейти к спектральной плотности и положить $n\to\infty$.

31.15. См. указание к 31.14.

31.16. У к а з а н и е. Умножить обе части уравнения связи Y_j с X_j и X_{j-1} на $(1-\lambda)^{-j}$ и, просуммировав по j от 1 до s, получить явное выражение для Y_s: $Y_s=X_s-\lambda\sum_{j=0}^{s-1}(1-\lambda)^{s-j-1}X_j$. $\overline{y}=\frac{\alpha}{\lambda}$, $\sigma_y^2=\frac{2\sigma_x^2(1-r)}{(2-\lambda)[1-r(1-\lambda)]}$.

31.17. Предел существует, если корни λ_1, λ_2 уравнения $\lambda^2-(1-\gamma_1-$ $-\gamma_2)\lambda-\gamma_2=0$ по модулю меньше 1.

$\overline{y}=\frac{\alpha}{\gamma_1}$; $\sigma_y^2=\frac{2\sigma_x^2}{(\lambda_2-\lambda_1)(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}\left[\lambda_1-\lambda_2+\frac{(1-\lambda_1)(1+\lambda_2)}{1-\lambda_1e^{-\mu}}-\right.$ $\left.-\frac{(1-\lambda_2)(1+\lambda_1)}{1-\lambda_2e^{-\mu}}\right]$.

У к а з а н и е. Показать, что между производящими функциями $Q_y(u)=$ $=\sum_{j=0}^{\infty}Y_ju^j$ и $Q_x(u)=\sum_{j=0}^{\infty}X_ju^j$ существует соотношение $Q_y(u)=$ $=\frac{1-u}{1-(1-\gamma_1-\gamma_2)u-\gamma_2u^2}\,Q_x(u)$, пользуясь которым доказать справедливость равенства $Y_j=\frac{1}{\lambda_2-\lambda_1}\sum_{l=0}^{j}\left[(1-\lambda_1)\lambda_1^l-(1-\lambda_2)\lambda_2^l\right]X_{j-l}$.

Глава VII
Марковские процессы

§ 32. Цепи Маркова

32.1. Следует из равенства $\mathcal{P}^{\alpha+\beta}=\mathcal{P}^{\alpha}\mathcal{P}^{\beta}$.

32.2. $p(3)=p(0)R$, где $R=\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3=\|r_{ij}\|$;
$r_1=r_{11}=r_{22}=r_{33}=a_1^3+a_2^3+a_3^3+6\alpha_1\alpha_2\alpha_3$;
$r_2=r_{12}=r_{31}=r_{23}=3(\alpha_1^2\alpha_2+\alpha_2^2\alpha_3+\alpha_1\alpha_3^2)$;
$r_3=r_{13}=r_{21}=r_{32}=3(\alpha_1\alpha_2^2+\alpha_1^2\alpha_3+\alpha_2\alpha_3^2)$;
$p(3)=[r_1\alpha+r_3\beta+r_2\gamma;r_2\alpha+r_1\beta+r_3\gamma;r_3\alpha+r_2\beta+r_1\gamma]$.

32.3. Состояния: Q_1 — все встречи выиграны, Q_2 — имеется один ничейный исход; Q_3 — спортсмен выбыл из соревнований. По формуле Перрона $p_{21}^{(n)}=p_{31}^{(n)}=p_{32}^{(n)}=0$, $p_{33}^{(n)}=1$, $p_{11}^{(n)}=\alpha^n$, $p_{22}^{(n)}=\gamma^n$, $p_{23}^{(n)}=1-\gamma^n$,

$p_{13}^{(n)} = 1 - p_{11}^{(n)} - p_{12}^{(n)}$,

$$p_{12}^{(n)} = \begin{cases} \beta \frac{\alpha^n - \gamma^n}{\alpha - \gamma}, & \text{при } \gamma \neq \alpha, \\ n\beta\alpha^{n-1}, & \text{при } \gamma = \alpha. \end{cases}$$

32.4. Состояния: Q_1 — прибор исправен, Q_2 — вышло из строя блокирующее устройство, Q_3 — прибор не работает: $p_{21}^{(n)} = p_{31}^{(n)} = p_{32}^{(n)} = 0$, $p_{11}^{(n)} = (1-\alpha-\beta)^n$, $p_{22}^{(n)} = (1-\gamma)^n$, $p_{33}^{(n)} = 1$, $p_{32}^{(n)} = 1-(1-\gamma)^n$, $p_{13}^{(n)} = 1 - p_{11}^{(n)} - p_{12}^{(n)}$,

$$p_{12}^{(n)} = \begin{cases} \frac{\alpha}{\gamma-\alpha-\beta}[(1-\alpha-\beta)^n - (1-\gamma)^n], & \text{при } \alpha+\beta \neq \gamma, \\ n\alpha(1-\gamma)^{n-2}, & \text{при } \alpha+\beta = \gamma. \end{cases}$$

32.5. Состояние Q_j $(j = 0,1,2,3)$ — в соревнованиях участвуют j членов команды. При $i < k$ $p_{ik}^{(n)} = 0$ $(i,k = 0,1,2,3)$, $p_{00}^{(n)} = 1$, $p_{11}^{(n)} = \alpha^n$, $p_{22}^{(n)} = \beta^n$, $p_{33}^{(n)} = \gamma^n$, $p_{10}^{(n)} = 1-\alpha^n$, $p_{21}^{(n)} = \beta_1 f(\alpha,\beta)$, $p_{20}^{(n)} = 1-p_{22}^{(n)}-p_{21}^{(n)}$, $p_{32}^{(n)} = \gamma_1 f(\beta,\gamma)$, $p_{31}^{(n)} = \gamma_2 f(\alpha,\gamma)+\beta_1\gamma_1\varphi(\alpha,\beta,\gamma)$, $p_{30}^{(n)} = 1-p_{33}^{(n)}-p_{32}^{(n)} - p_{31}^{(n)}$, где $f(a,b) = \frac{a^n-b^n}{a-b}$, $f(a,a) = na^{n-1}$, $\varphi(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{f(\alpha,\gamma)-f(\beta,\gamma)}{\alpha-\beta}$, $\varphi(\alpha,\alpha,\gamma) = \frac{n\alpha^{n-1}}{\alpha-\gamma} - \frac{\alpha^n-\gamma^n}{(\alpha-\gamma)^2}$, $\varphi(\alpha,\alpha,\alpha) = \frac{1}{2}n(n-1)\alpha^{n-2}$.

32.6. Так как $|\lambda\varepsilon - \mathcal{P}| = \prod_{\nu=0}^{m}(\lambda - p_\nu)$, где $p_\nu = p_{\nu\nu}$, то характеристические числа $\lambda_k = p_k$ $(k = 0,1,2,\ldots,m)$. Алгебраические дополнения: $A_{kk}(\lambda) = \frac{|\lambda\varepsilon-\mathcal{P}|}{\lambda-p_k}$; при $i > k$ $a_{ki}(\lambda) = 0$; при $k > i$ $A_{ki}(\lambda) = \frac{|\lambda\varepsilon-\mathcal{P}|D_{ki}(\lambda)}{\prod_{\nu=i}^{k}(\lambda-p_\nu)}$, где

$$D_{ki}(\lambda) = \begin{vmatrix} p_{i,i+1} & p_{i,i+2} & p_{i,i+3} & \cdots & p_{i,k-1} & p_{ik} \\ p_{i+1}-\lambda & p_{j+1,j+2} & p_{i+1,i+3} & \cdots & p_{i+1,k-1} & p_{i+1,k} \\ 0 & p_{i+2}-\lambda & p_{i+2,i+3} & \cdots & p_{i+2,k-1} & p_{i+2,k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{k-2,k-1} & p_{k-2,k} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p_{k-1}-\lambda & p_{k-1,k} \end{vmatrix}.$$

По формуле Перрона: $p_{kk}^{(n)} = p_k^{(n)}$ $(k = 0,1,2,\ldots,m)$; при $i > k$ $p_{ik}^{(n)} = 0$ $(i,k = 0,1,2,\ldots,m)$, а при $k > i$

$$p_{ik}^{(n)} = \sum_{s=1}^{r} \frac{1}{(\nu_s-1)!} \left\{ \frac{d^\nu s^{-1}}{d\lambda^\nu s^{-1}} \left[\frac{\lambda^n(\lambda-p_s)^{\nu_s} D_{ki}(\lambda)}{\prod_{j=i}^{k}(\lambda-p_i)} \right] \right\}_{/\lambda=p_s},$$

где r — число различных вероятностей $p_k = p_{kk}$ $(k = 0,1,2,\ldots,m)$, ν_s — кратность характеристического числа $\lambda = p_s$.

Когда характеристическое число $\lambda = p$ имеет кратность m, а характеристическое число $\lambda = 1$ простое, $|\lambda\mathcal{E} - \mathcal{P}| = (\lambda-p)^m(\lambda-1)$; $A_{mm}(\lambda) = \frac{|\lambda\mathcal{E}-\mathcal{P}|}{\lambda-1}$; $A_{kk}(\lambda) = \frac{|\lambda\mathcal{E}-\mathcal{P}|}{\lambda-p}$; $(k = 0,1,2,\ldots,m-1)$.

При $i > k$ $A_{ki}(\lambda) = 0$, $A_{mi}(\lambda) = \frac{|\lambda\mathcal{E}-\mathcal{P}|D_{mi}(\lambda)}{(\lambda-p)^{m-1}(\lambda-1)}$.

При $k > i$, $k \neq m$ $A_{ki}(\lambda) = \frac{|\lambda\mathcal{E}-\mathcal{P}|D_{ki}(\lambda)}{(\lambda-p)^{k-i+1}}$.

В этом случае $p_{im}^{(n)} = \frac{1}{(m-i-1)!}\left\{\frac{d^{m-i-1}}{d\lambda^{m-i-1}}\left[\frac{\lambda^n}{\lambda-1}D_{mi}(\lambda)\right]\right\}_{/\lambda=p} + \frac{D_{mi}(1)}{(1-p)^{m-i}} = 1 - \sum_{j=i}^{m-1} p_{ij}^{(n)}$.

При $k > i$, $k \neq m$ $\quad p_{ik}^{(n)} = \frac{1}{(k-i)!}\left\{\frac{d^{k-i}}{d\lambda^{k-i}}[\lambda^n D_{ki}(\lambda)]\right\}_{/\lambda=p}$.

32.7. См. задачу 32.6. Рекуррентная формула следует из сравнения двух выражений для вероятности $p_{ik}^{(n+1)}$ в соотношении $\mathcal{P}\mathcal{P}^n = \mathcal{P}^n\mathcal{P}$; $p_{ik}^{(n+1)} = \sum_{s=i}^{k} p_{is}p_{sk}^{(n)} = \sum_{s=i}^{k} p_{is}^{(n)}p_{sk}$.

32.8. Состояние Q_j — в урне j белых шаров. При $j > i$ $\quad p_{ij} = 0$; при $i \geqslant j$ $\quad p_{ij} = \frac{C_i^{i-j}C_{N-i}^{m-i+j}}{C_N^m}$. Характеристические числа $\lambda_0 = 1$, $\lambda_k = \frac{C_{N-k}^m}{C_N^m}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ простые. Транспонированная матрица $\mathcal{P}'$ — верхняя треугольная; вероятности $p_{ji}^{(n)}$ определяются с помощью формул из условия задачи 32.7. При $N = 6$, $m = 3$ $\quad p_{01}^{(n)} = p_{02}^{(n)} = p_{03}^{(n)} = p_{12}^{(n)} = p_{13}^{(n)} = p_{23}^{(n)} = 0$, $p_{00}^{(n)} = 1$, $p_{11}^{(n)} = \frac{1}{2^n}$, $p_{22}^{(n)} = \frac{1}{5^n}$, $p_{33}^{(n)} = \frac{1}{20^n}$, $p_{10}^{(n)} = 1 - \frac{1}{2^n}$, $p_{20}^{(n)} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{5^n}$, $p_{21}^{(n)} = 2\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{5^n}\right)$, $p_{30}^{(n)} = 1 - \frac{3}{2^n} + \frac{3}{5^n} - \frac{1}{20^n}$, $p_{31}^{(n)} = 3\left(\frac{1}{2^n} - \frac{2}{5^n} + \frac{1}{20^n}\right)$, $p_{32}^{(n)} = 3\left(\frac{1}{5^n} - \frac{1}{20^n}\right)$.

32.9. Состояние Q_j — наибольшее число выбитых очков равно $N + j$; $p_{ii} = \frac{i}{m}$, $p_{ij} = 0$ при $i > j$; $p_{ij} = \frac{1}{m}$ при $i < j$; $p_{ii}^{(n)} = \left(\frac{1}{m}\right)^n$; $p_{ik}^{(n)} = 0$ при $i > k$; $p_{ik}^{(n)} = \left(\frac{k}{m}\right)^n - \left(\frac{k-1}{m}\right)^n$ при $i < k$.

32.10. Состояние Q_j — на участке длины L осталось j цилиндров $(j = 0, 1, \ldots, m)$. Вероятность столкновения шара с цилиндром равна $j\alpha$, где $\alpha = \frac{2(r+R)}{L}$; $p_{j,j-1} = j\alpha$; $p_{jj} = 1 - j\alpha$; $p_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $i \neq j-1$ $(i, j = 0, 1, \ldots, m)$.

Характеристические числа $\lambda_k = 1 - k\alpha$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$. $p_{ik}^{(n)} = 0$ при $i < k$. При $i \geqslant k$ $\quad A_{ki}(\lambda) = \alpha^{i-k}\frac{i!}{k!}\frac{|\lambda\mathcal{E} - \mathcal{P}|}{\prod_{\nu=k}^{i}(\lambda - 1 + \nu\alpha)}$.

По формуле Перрона при $i \geqslant k$

$p_{ik}^{(n)} = \alpha^{i-k}\frac{i!}{k!}\sum_{j=0}^{m}\left[\frac{\lambda^n(\lambda-\lambda_j)}{\prod_{\nu=k}^{i}(\lambda-1+\nu\alpha)}\right]_{/\lambda=\lambda_j} = \frac{i!}{k!}\sum_{j=k}^{i}\frac{(-1)^{j-k}(1-j\alpha)^n}{(j-k)!(i-j)!} = C_i^k\sum_{\nu=0}^{i-k}(-1)^\nu C_{i-k}^\nu[1-(k+\nu)\alpha]^n$.

32.11. Состояние Q_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — поставленные точки находятся в j частях области D; $p_{jj} = \frac{j}{m}$, $p_{j,j+1} = 1 - \frac{j}{m}$. Характеристические числа $\lambda_r = \frac{r}{m}$ $(r = 1, 2, \ldots, m)$. Из $\mathcal{P}H = HJ$ следует $h_{rk} = \frac{C_{k-1}^{r-1}}{C_{m-1}^{r-1}}(h_{1k} = 1)$, а из $H^{-1}\mathcal{P} = JH^{-1}$ и $H^{-1}H = \mathcal{E}$ следует $h_{ir}^{(-1)} = (-1)^{r-i}C_{m-i}^{r-i}C_{m-1}^{i-1}$. $\mathcal{P}^n = HJ^nH^{-1}$. $p_{ik}^{(n)} = 0$ при $i > k$, а при $i \leqslant k$ $\quad p_{ik}^{(n)} = C_{m-1}^{k-1} \times \sum_{r=0}^{k-i}(-1)^{k-i-r}\left(\frac{r+i}{m}\right)^n C_{k-i}^r$ (другое решение — см. задачу 32.10).

32.12. Положить $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Тогда $H = \|h_{jk}\| = \|\varepsilon^{(j-1)(k-1)}\|$, $H^{-1} = \|h_{jk}^{(-1)}\| = \frac{1}{m}\|\varepsilon^{-(k-1)(j-1)}\|$. $\mathcal{P}^n = H\|\delta_{jk}\lambda_k^n\|H^{-1}$, где $\lambda_k = \sum_{r=1}^{m}\alpha_r\varepsilon^{(r-1)(k-1)}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. $p_{jk}^{(n)} = \frac{1}{m}\sum_{r=1}^{m}\lambda_r^n\varepsilon^{(r-1)(j-k)}$, $p_k^{(\infty)} = \frac{1}{m}$ $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$.

32.13. Состояние Q_i — частица находится в точке x_i; $p_{i,i-1} = \frac{i}{m}$, $p_{i,i+1} = 1 - \frac{i}{m}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$. Матричное равенство $H^{-1}\mathcal{P} = \|\delta_{ij}\lambda_i\|H^{-1}$ эквивалентно уравнениям $(1-\xi^2)R_i'(\xi) = m(\lambda_2 - \xi)R_i(\xi)$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$, где $R_i(\xi) = \sum_{k=0}^{m} \xi^k h_{ik}^{(-1)} = C_i(1-\xi)^{\frac{m}{2}(1-\lambda_i)}(1+\xi)^{\frac{m}{2}(1+\lambda_i)}$. Так как $R_i(\xi)$ — многочлен, то характеристические числа $\lambda_i = 1 - \frac{2i}{m}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$. Из $HH^{-1} = \mathcal{E}$ следует $\xi^i = \sum_{k=0}^{m} \delta_{ik}\xi^k = \sum_{j=0}^{m} h_{ij}R_j(\xi)$. Полагая $\zeta = \frac{1-\xi}{1+\xi}$, $C_j = 2^{-\frac{m}{2}}$, для определения элементов $h_{ij} = h_{ij}^{(-1)}$ матриц $H = H^{-1}$ получим выражения:
$\sum_{j=0}^{m} h_{ij}\zeta^j = \sum_{j=0}^{m} h_{ij}^{(-1)}\zeta^j = 2^{-\frac{m}{2}}(1-\zeta)^i(1+\zeta)^{m-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, m)$.
$h_{ij} = 2^{-\frac{m}{2}} \sum_{s=0}^{j} (-1)^s C_r^s C_{m-i}^{j-s}$ $\quad (C_\nu^s = 0$ при $s > \nu)$;
$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{m} \left(1 - \frac{2k}{m}\right)^n h_{ik}h_{ij}$.

32.14. Состояние Q_j — в приемнике автомата j монет по 5 коп.; $p_{00} = q$, $p_{mm} = p$, $p_{j,j+1} = p$, $p_{j,j-1} = q$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$. Характеристические числа: $\lambda_0 = 1$, $\lambda_k = 2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{m+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

$\mathcal{P} = H\|\delta_{ik}\lambda_k\|H^{-1}$, где $h_{j0} = 1$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$,

$$h_{jk} = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j}{2}} \sin\frac{(j+1)k\pi}{m+1} - \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{j+1}{2}} \sin\frac{jk\pi}{m+1}$$
$$(j = 0, 1, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$h_{0k}^{(-1)} = C_0\left(\frac{p}{q}\right)^k$$
$$(k = 0, 1, \ldots, m),$$
$$h_{jk}^{(-1)} = C_j\left[\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k}{2}} \sin\frac{(k+1)j\pi}{m+1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{k-1}{2}} \sin\frac{kj\pi}{m}\right]$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m; k = 0, 1, \ldots, m).$$

Постоянные C_j определяются из условия $H^{-1}H = \mathcal{E}$: $C_0 \dfrac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{m+1}}$,

$C_k = \frac{2p}{m+1}\left[1 - 2\sqrt{pq}\cos\frac{k\pi}{m+1}\right]^{-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$,
$p_{ik}^{(n)} = \sum_{j=0}^{m} h_{ij}\lambda_j^n h_{jk}^{(-1)}$ $(i, k = 0, 1, \ldots, m)$.

32.15. $p_{11} = \alpha$, $p_{21} = \beta$, $p_1(0) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $p_2(0) = 1 - \frac{1}{2}(\alpha+\beta)$, $[p_1(n); p_2(n)] = [p_1(0); p_2(0)]\mathcal{P}^n$.

Характеристические числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha - \beta$. По формуле Лагранжа–Сильвестра при $\lambda_2 \neq 1$ $\quad \mathcal{P}^n = \frac{1}{1-\alpha+\beta}[\mathcal{P} - (\alpha-\beta)\mathcal{E} - (\alpha-\beta)^n(\mathcal{P} - \mathcal{E})]$, $p_1(n) = \frac{1}{2(1-\alpha+\beta)}[2\beta + (1-\alpha-\beta)(\alpha-\beta)^{n+1}]$. Если $\lambda_2 = 1$, то $\mathcal{P}^n = \mathcal{E}$, $p_1(n) = \frac{1}{2}$.

Если $0 \leqslant \alpha < 1$ и $0 < \beta < 1$ или $0 < \alpha < 1$ и $\beta = 1$, то состояния Q_1 и Q_2 существенные непериодические из одной группы. Когда $\alpha = 1$ и $0 < \beta < 1$, состояние Q_2 несущественное, а Q_1 — существенное состояние поглощения. При $\beta = 0$ и $0 < \alpha < 1$ состояние Q_1 несущественное, а Q_2 — существенное состояние поглощения. Если $\alpha = 0$, а $\beta = 1$, то Q_1 и Q_2 — существенные периодические состояния с периодом $\varkappa = 2$. При $\alpha = 1$ и $\beta = 0$ имеются две изолированные группы существенных состояний Q_1 и Q_2.

32.16. Из $\sum_{j=1}^{m} p_j^{(\infty)} = 1$, $\sum_{i=1}^{m} p_{ij} p_i^{(\infty)} = p_j^{(\infty)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ следует, что $p_j^{(\infty)} = \frac{1}{m}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

32.17. Состояние Q_j — в первой урне j белых шаров; $p_{jj} = \frac{2j(m-j)}{m^2}$, $p_{j,j+1} = \frac{(m-j)^2}{m^2}$, $p_{j,j-1} = \frac{j^2}{m^2}$ $(j = 0, 1, \ldots, m)$. Цепь неразложимая и непериодическая, $p_{ik}^{(\infty)} = p_k^{(\infty)}$. Из системы $p_k^{(\infty)} = p_{k-1}^{(\infty)} p_{k-1,k} + p_k^{(\infty)} p_{kk} + p_{k+1}^{(\infty)} p_{k+1,k}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$ получается $p_k^{(\infty)} = (C_m^k)^2 p_0^{(\infty)}$; $\frac{1}{p_0^{(\infty)}} = \sum_{k=0}^{m} (C_m^k)^2 = C_{2m}^m$, $p_{ik}^{(\infty)} = p_k^{(\infty)} = \frac{(C_m^k)^2}{C_{2m}^m}$ $(k = 0, 1, \ldots, m)$.

32.18. Состояние C_j — частица находится в середине j-го интервала деления отрезка; $p_{11} = q$, $p_{mm} = p$, $p_{j,j+1} = p$, $p_{j,j-1} = q$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Цепь неразложимая и непериодическая. Вероятности $p_k^{(\infty)}$ находятся из системы:

$$qp_1^{(\infty)} + qp_2^{(\infty)} = p_1^{(\infty)},$$
$$pp_{m-1}^{(\infty)} + pp_m^{(\infty)} = p_m^{(\infty)},$$
$$p = p_{k-1}^{(\infty)} + qp_{k+1}^{(\infty)} = p_k^{(\infty)} \quad (k = 2, 3, \ldots, m-1).$$

Тогда $p_k^{(\infty)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} p_k^{(\infty)}$, $\sum_{k=1}^{m} p_k^{(\infty)} = 1$.

При $p = q$ $\quad p_k^{(\infty)} = \frac{1}{m}$, а при $p \neq q$ $\quad p_k^{(\infty)} = \frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^m} \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$.

Вероятности $p_k^{(\infty)}$ можно также получить из $= p_{ik}^{(n)}$ при $n \to \infty$ (см. задачу 32.14.).

32.19. Цепь неразложимая и непериодическая. Из системы $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ следует, что $u_j = \frac{1}{j!} u_1$, $u_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{i+1} u_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)!} u_1$. Так как $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{i}{(i+1)!} = 1$ то ненулевое решение существует. При этом $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| = |u_1| \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} = |u_1|(e-1) < \infty$, т. е. цепь эргодическая.

$p_j^{(\infty)} = \frac{1}{j!} p_1^{(\infty)}$, $\frac{1}{p_1^{(\infty)}} = e - 1$, $p_j^{(\infty)} = \frac{1}{(e-1)j!}$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

32.20. Цепь неразложимая и непериодическая. Из системы $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ следует, что $u_1 = q \sum_{i=1}^{\infty} u_i$, $u_j = u_1 p^{j-1}$. При этом $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| = |u_1| \sum_{j=1}^{\infty} p^{j-1} = \frac{|u_1|}{q} < \infty$, поэтому цепь эргодическая; $p_j^{(\infty)} = p^{j-1} p_1^{(\infty)}$, $p_1^{(\infty)} = q$, т. е. $p_j^{(\infty)} = qp^{j-1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$.

32.21. Цепь неразложимая и непериодическая. Из системы $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ следует, что $u_j = \frac{u_1}{2(j-1)}$ $(j = 2, 3, \ldots)$. Ряд $\sum_{j=1}^{\infty} |u_j| = |u_1| \left[1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{u_1}{2(j-1)}\right]$, расходится, т. е. цепь неэргодическая. Это нуль-регулярная цепь, для которой $p_{ik}^{(\infty)} = 0$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$.

32.22. $p_{11} = 1-\alpha$, $p_{j-1,j} = \alpha$, $p_{j,j-1} = \beta$, $p_{jj} = 1-\alpha-\beta$ $(j = 2, 3, \ldots)$. Цепь неразложимая и непериодическая. Из системы $\sum_{i=1}^{\infty} u_i p_{ij} = u_j$ следует, что $u_k = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-1} u_1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. При $\frac{\alpha}{\beta} < 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| =$

$= \frac{|u_1|}{1-\frac{\alpha}{\beta}} < \infty$, поэтому цепь эргодическая; $p_k^{(\infty)} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-1} p_1^{(\infty)}$, $p_1^{(\infty)} = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$, т. е. $p_k^{(\infty)} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{k-1} (1 - \frac{\alpha}{\beta})$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Когда $\frac{\alpha}{\beta} \geqslant 1$, цепь Маркова нуль-регулярная; $p_{jk}^{(\infty)} = 0$ $(j, k = 1, 2, \ldots)$.

32.23. Так как $W^\infty = 0$, то $\alpha_j = \sum_{\nu=1}^{s} p_{j\nu}^{(\infty)} = 1$ $(j = s+1, s+2, \ldots, m)$.

32.24. Из системы $\alpha_j = \alpha \sum_{\nu=r+1}^{m} \alpha_\nu + \beta$ $(j = r+1, r+2, \ldots, m)$ получается $\alpha_j = \frac{\beta}{1-\alpha(m-r)}$ $(j = r+1, r+2, \ldots, m)$.

32.25. Состояние Q_j — у игрока A имеется j рублей $(j = 0, 1, \ldots, m)$; $p_{00} = 1$, $p_{mm} = 1$, $p_{j,j+1} = p$, $p_{j,j-1} = q$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$. Вероятности $\alpha_j = p_{j0}^{(\infty)}$ разорения игрока A определяются из системы $\alpha_1 = \alpha_2 p + q$, $\alpha_{m-1} = q\alpha_{m-2}$, $\alpha_j = q\alpha_{j-1} + p\alpha_{j+1}$ $(j = 2, 3, \ldots, m-2)$.

Положив $\alpha_j = a - b\left(\frac{q}{p}\right)^j$, находим: при $p \neq q$ $\quad \alpha_j = \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{m-j}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{m}}$, а при $p = q$ $\quad \alpha_j = 1 - \frac{j}{m}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$. Вероятности разорения игрока B $\alpha_j(B) = 1 - \alpha_j(A)$. Другое решение задачи получается из выражения для $p_{j0}^{(n)}$ при $n \to \infty$.

32.26. $H = \|h_{jk}\| = \|\varepsilon^{(j-1)(k-1)}\|$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{m}}$. Тогда $\mathcal{P}H = H\|\delta_{jk}\lambda_k\|$, где $\lambda_k = \varepsilon^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Так как $|\lambda_k| = 1$, то период $\varkappa = m$. $H^{-1} = \frac{1}{m}\|\varepsilon^{-(j-1)(k-1)}\|$. $p_{jk}^{(n)} = \frac{1}{m}\sum_{\nu=1}^{m} \varepsilon^{(\nu-1)(n+j-k)}$, т. е. $p_{jk}^{(n)} = 1$, если $n + j - k$ делится на m, и $p_{jk}^{(n)} = 0$ в противном случае $(j, k = 1, 2, \ldots, m)$. $p_{jk}^{(mn+r)} = 1$, если $r + j - k$ делится на m, и $p_{jk}^{(mn+r)} = 0$ в противном случае $(r = 0, 1, \ldots, m-1)$.

$$\hat{p}_{jk} = \frac{1}{m} \lim_{n\to\infty} \sum_{r=0}^{m-1} p_{jk}^{(mn+r)} = \frac{1}{m} \ (j, k = 1, 2, \ldots, m).$$

32.27. $\mathcal{P}^n = \left\| \begin{matrix} \alpha^n & U_n \\ O & R^n \end{matrix} \right\|$; $|\lambda\mathcal{E} - \mathcal{P}| = (\lambda - \alpha)(\lambda^3 - 1)$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \alpha$, $\lambda_3 = \varepsilon$, $\lambda_4 = \varepsilon^2$, где $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Период $\varkappa = 3$. При $j, k = 2, 3, 4$ $\quad p_{jk}^{(n)} = 1$, если $n + j - k$ делится на 3, и $p_{jk}^{(n)} = 0$ в противном случае. По формуле Перрона

$$p_{12}^{(n)} = \frac{1}{3} - \frac{\alpha^n(\alpha^2\beta+\alpha\delta+\gamma)}{1-\alpha^3} + \frac{\varepsilon^{n-1}(\beta\varepsilon^2+\delta\varepsilon+\gamma)}{(\alpha-\varepsilon)(1-\varepsilon)^2} - \frac{\varepsilon^{2n-1}(\beta\varepsilon^4+\delta\varepsilon^2+\gamma)}{3(\alpha-\varepsilon^2)},$$

$$p_{13}^{(n)} = \frac{1}{3} - \frac{\alpha^n(\alpha^2\gamma+\alpha\beta+\delta)}{1-\alpha^3} + \frac{\varepsilon^{n-1}(\gamma\varepsilon^2+\beta\varepsilon+\delta)}{(\alpha-\varepsilon)(1-\varepsilon)^2} - \frac{\varepsilon^{2n-1}(\gamma\varepsilon^4+\beta\varepsilon^2+\gamma)}{3(\alpha-\varepsilon^2)},$$

$$p_{14}^{(n)} = \frac{1}{3} - \frac{\alpha^n(\alpha^2\delta+\alpha\gamma+\beta)}{1-\alpha^3} + \frac{\varepsilon^{n-1}(\delta\varepsilon^2+\gamma\varepsilon+\beta)}{(\alpha-\varepsilon)(1-\varepsilon)^2} - \frac{\varepsilon^{2n-1}(\delta\varepsilon^4+\gamma\varepsilon^2+\beta)}{3(\alpha-\varepsilon^2)} = 1 - \alpha^n - p_{12}^{(n)} - p_{13}^{(n)},$$

$$\hat{p}_{jk} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} [p_{jk}^{(3n)} + p_{jk}^{(3n+1)} + p_{jk}^{(3n+2)}],$$

$$\hat{p}_{j1} = 0 \ (j = 1, 2, 3, 4), \ \hat{p}_{jk} = \frac{1}{3} \ (k = 2, 3, 4; j = 1, 2, 3, 4).$$

32.28. Цепь неразложимая и периодическая с периодом $\varkappa = 2$. Первая группа — состояния с нечетными номерами, вторая — с четными. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(2n)} = p_k^{(2\infty)}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(2n+1)} = 0$, если $j + k$ — четное число, и $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(2n)} = 0$, а $\lim\limits_{n\to\infty} p_{jk}^{(2n+1)} = p_k^{(2\infty)}$, если $j + k$ — нечетное число.

Средние предельные абсолютные вероятности $\hat{p}_k = \frac{1}{2m}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2m)$ определяются с помощью равенства $\hat{p}\mathcal{P} = \hat{p}$, $p_k^{(2\infty)} = \varkappa\hat{p}_k = \frac{1}{m}$ $(k = 1, 2, \ldots, 2m)$.

32.29. Состояние Q_j — частица находится в точке x_j $(j = 0, 1, \ldots, m)$; $p_{01} = 1$, $p_{m,m-1} = 1$, $p_{j,j+1} = p$, $p_{j,j-1} = q$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$. Цепь неразложимая и периодическая с периодом $\varkappa = 2$; $q\hat{p}_1 = \hat{p}_0$, $\hat{p}_0 + q\hat{p}_2 = \hat{p}_1$, $p\hat{p}_{m-2} + \hat{p}_m = \hat{p}_{m-1}$, $p\hat{p}_{m-1} = \hat{p}_m$, $p\hat{p}_{k-1} + q\hat{p}_{k+1} = \hat{p}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$.

При $p \neq q$ $\hat{p}_0 = \frac{1}{2}\frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^m}$, $\hat{p}_m = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{q}\right)^{m-1}\frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^m}$, $\hat{p}_k = \frac{1}{2p}\left(\frac{p}{q}\right)^k\frac{1-\frac{p}{q}}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^m}$, $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$.

При $p = q$ $\hat{p}_1 = \hat{p}_m = \frac{1}{2m}$, $\hat{p}_k = \frac{1}{m}$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$.

32.30. Состояние Q_s — минное заграждение состоит из $m - s$ мин $(s = 0, 1, \ldots, m)$; $p_{ss} = p_s$ $(s = 0, 1, \ldots, m-1)$, $p_{m,m} = 1$, $p_{s,s+1} = 1 - p_s = q_s$ $(s = 0, 1, \ldots, m-1)$.

Для определения вероятностей $P_k(n) = p_{0k}^{(n)}$ воспользоваться формулой Перрона или решением задачи 32.6. $P_0(n) = p_0^n$,

$$P_k(n) = \left(\prod_{s=0}^{k-1} q_s\right)\sum_{j=0}^{k}\frac{p_j^n}{(p_j - p_0)(p_j - p_1)\ldots(p_j - p_{j-1})(p_j - p_{j+1})\ldots(p_j - p_k)}$$

$(k = 1, 2, \ldots, m)$. При $n = 10$, $m = 2$: $P_0 = 0{,}9^{10} \approx 0{,}349$, $P_1 = q_0\frac{p_1^{10} - p_0^{10}}{p_1 - p_0} \approx 0{,}500$, $P_2 = 1 - P_0 - P_1 \approx 0{,}151$.

32.31. $p_{00} = P_{0,0} + P_{0,1}$; $p_{0j} = P_{0,j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-1)$; $p_{ij} = P_{i,j-i+1}$ $(j = i-1, i, \ldots, m-1; i = 1, 2, \ldots, m-1)$. Цепь неразложимая и непериодическая. Вероятности $p_{ij}^{(\infty)} = p_j^{(\infty)}$ $(i, j = 0, 1, \ldots, m-1)$ являются решением уравнений: $(P_{0,0} + P_{0,1})p_0^{(\infty)} + P_{1,0}p_1^{(\infty)} = p_0^{(\infty)}$;

$\sum_{s=0}^{j+1} P_{s,j-s+1}p_s^{(\infty)} = p_j^{(\infty)}$ $(j = 1, 2, \ldots, m-2)$;
$\sum_{s=0}^{m-1} P_{s,m-s}p_s^{(\infty)} = p_{m-1}^{(\infty)}$;
$\sum_{j=0}^{m-1} p_j^{(\infty)} = 1$.
$\overline{t}_{jj} = \mathrm{M}[T_{jj}] = \frac{1}{p_j^{(\infty)}}$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$.

При $m = 3$ вероятность $P_{3-s,j} = C_s^j p^j q^{s-j}$. Система алгебраических уравнений: $\frac{1}{2}p_0^{(\infty)} + \frac{1}{4}p_1^{(\infty)} = p_0^{(\infty)}$; $\frac{3}{8}p_0^{(\infty)} + \frac{1}{2}p_1^{(\infty)} + \frac{1}{2}p_2^{(\infty)} = p_1^{(\infty)}$; $\frac{1}{8}p_0^{(\infty)} + \frac{1}{4}p_1^{(\infty)} + \frac{1}{2}p_2^{(\infty)} = p_2^{(\infty)}$; $p_0^{(\infty)} + p_1^{(\infty)} + p_2^{(\infty)} = 1$.

$p_0^{(\infty)} = \frac{4}{17}$, $p_1^{(\infty)} = \frac{8}{17}$, $p_2^{(\infty)} = \frac{5}{17}$; $\overline{t}_{00} = \frac{17}{4}$, $\overline{t}_{11} = \frac{17}{8}$, $\overline{t}_{22} = \frac{17}{5}$.

32.32. Состояние Q_1 — попаданий нет, Q_2 — попал первый стрелок, Q_3 — второй. $p_{11} = q_1q_2$, $p_{12} = p_1$, $p_{13} = q_1p_2$, $p_{22} = p_{33} = 1$. Q_1 — несущественное состояние, Q_2 и Q_3 — существенные состояния поглощения. $P_1 = p_{12}^{(\infty)}$, $P_2 = p_{13}^{(\infty)}$,

$P_1 = p_{11}P_1 + p_{12}$, $P_2 = p_{11}P_2 + p_{13}$, $\overline{t} = 1 + p_{11}\overline{t}$,
$P_1 = \frac{p_1}{1 - q_1q_2}$, $P_2 = \frac{q_1q_2}{1 - q_1q_2} = 1 - P_1$, $\overline{t} = \frac{1}{1 - q_1q_2}$.

32.33. Когда $p_{11} = p_{12} = 1$, $\overline{t}_{11} = \overline{t}_{12} = 1$.

При $p_{11} = 1$; $0 < p_{22} < 1$, состояние Q_1 существенное, Q_2 — несущественное; $\overline{t}_{11} = 1$, $\overline{t}_{21} = \overline{t}_2 = 1 + p_{22}\overline{t}_2$, т. е. $\overline{t}_{21} = \frac{1}{p_{21}}$.

При $p_{22} = 1$; $0 < p_{11} < 1$: $\overline{t}_{22} = 1$, $\overline{t}_{12} = \frac{1}{p_{12}}$.

В остальных случаях Q_1 и Q_2 — существенные состояния, $\overline{t}_{ij} = 1 + \sum_{\nu=1,\nu\neq j}^{2} p_{i\nu}\overline{t}_{\nu j}$ $(i,j = 1,2)$, т. е. $\overline{t}_{12} = \frac{1}{p_{12}}$, $\overline{t}_{21} = \frac{1}{p_{21}}$, $\overline{t}_{11} = 1 + \frac{p_{12}}{p_{21}}$, $\overline{t}_{22} = 1 + \frac{p_{21}}{p_{12}}$.

32.34. $\overline{t}_{ij} = 1 - \sum_{\nu=1,\nu\neq j}^{3} p_{i\nu}\overline{t}_{\nu j}$ $(i,j = 1,2,3)$,

$\overline{t}_{12} = \frac{1+p_{13}}{1-p_{13}p_{31}}$, $\overline{t}_{13} = \frac{1+p_{12}}{1-p_{12}p_{21}}$, $\overline{t}_{21} = \frac{1+p_{23}}{1-p_{23}p_{32}}$,

$\overline{t}_{23} = \frac{1+p_{21}}{1-p_{12}p_{21}}$, $\overline{t}_{31} = \frac{1+p_{32}}{1-p_{23}p_{32}}$, $\overline{t}_{32} = \frac{1+p_{31}}{1-p_{13}p_{31}}$,

$\overline{t}_{11} = \frac{\Delta}{1-p_{23}p_{32}}$, $\overline{t}_{22} = \frac{\Delta}{1-p_{13}p_{31}}$, $\overline{t}_{33} = \frac{\Delta}{1-p_{12}p_{21}}$,

$\Delta = 2 + p_{12}p_{23} + p_{13}p_{32} + p_{23}p_{32}$.

32.35. Параметры $\overline{t}_i = \mathrm{M}[T_i]$ являются решением уравнений $\overline{t}_i = 1 + \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij}\overline{t}_j$ $(i = 1,2,\ldots,m-1)$, т. е. $\overline{t}_1 = 1 + p\overline{t}_2$, $\overline{t}_{m-1} = 1 + q\overline{t}_{m-2}$, $\overline{t}_i = 1 + q\overline{t}_{i-1} + p\overline{t}_{i+1}$ $(i = 2,3,\ldots,m-2)$.

При $p \neq q$ $\overline{t}_1 = \frac{1-m\left(\frac{p}{q}\right)^{m-1}+(m+1)\left(\frac{p}{q}\right)^{m}}{(q-p)\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)^{m}\right]}$, $\overline{t}_2 = \frac{(1-p\overline{t}_1)\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)^{m-i}\right]}{q-p} + \frac{p}{(q-p)^2}\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)^{m-i} - (m-i)\left(1-\frac{p}{q}\right)\left(\frac{p}{q}\right)^{m-i-1}\right]$ $(i = 2,3,\ldots,m-1)$.

Если $p = q$, то $\overline{t}_i = i(m-i)$ $(i = 1,2,\ldots,m-1)$.

32.36. $p_j(n) = 0{,}1\sum_{s=0}^{9} p_{sj}^{(n)}$ $(j = 0,1,\ldots,9)$, где p_{sj} — вероятность того, что в результате одного умножения s на случайное число получится число, последняя цифра которого равна j. Характеристические числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0{,}8$, $\lambda_3 = 0{,}5$, $\lambda_4 = 0{,}4$, $\lambda_5 = \lambda_6 = \ldots = \lambda_{10} = 0$.

Не равные нулю вероятности перехода:

$p_{00}^{(n)} = 1$; $p_{k0}^{(n)} = 1 - 0{,}8^n - 0{,}5^n + 0{,}4^n$ $(k = 1,3,7,9)$;

$p_{k0}^{(n)} = 1 - 0{,}8^n$ $(k = 2,4,6,8)$; $p_{55}^{(n)} = 0{,}5^n$; $p_{50}^{(n)} = 1 - 0{,}5^n$;

$p_{kj}^{(n)} = \frac{1}{4}\,0{,}4^n$ $(k,j = 1,3,7,9)$; $p_{k5}^{(n)} = 0{,}5^n - 0{,}4^n$ $(k = 1,3,7,9)$;

$p_{kj}^{(n)} = \frac{1}{4}(0{,}8^n - 0{,}4^n)$ $(k = 1,3,7,9; j = 2,4,6,8)$;

$p_{kj}^{(n)} = \frac{1}{4}0{,}8^n$ $(k,j = 2,4,6,8)$.

$p_0(n) = 1 - 0{,}8^{n+1} - 0{,}5^{m+1} + 0{,}4^{n+1}$,

$p_1(n) = p_3(n) = p_7(n) = p_9(n) = \frac{1}{4}\,0{,}4^{n+1}$,

$p_2(n) = p_4(n) = p_6(n) = p_8(n) = \frac{1}{4}(0{,}8^{n+1} - 0{,}4^{n+1})$,

$p_5(n) = 0{,}5^{n+1} - 0{,}4^{n+1}$.

Решение можно упростить, так как в матрице перехода имеются одинаковые строки.

32.37. $p_j(n) = 0{,}1\sum_{s=0}^{9} p_{sj}^{(n)}$ $(j = 0,1,\ldots,9)$, где p_{sj} — вероятность того, что при возведении числа s в случайную степень Y_ν получится число, оканчивающееся на j. Характеристические числа: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$,

$\lambda_3 = \lambda_4 = 0{,}9$, $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = \lambda_8 = 0{,}5$, $\lambda_9 = \lambda_{10} = 0{,}1$. Не равные нулю вероятности перехода: $p_{00}^{(n)} = p_{11}^{(n)} = 1$; $p_{k1}^{(n)} = 1 - 0{,}9^n$ ($k = 2, 4, 5, 6, 8$); $p_{91}^{(n)} = 1 - 0{,}5^n$; $p_{k1}^{(n)} = 1 - 0{,}5^n - 0{,}2 \cdot n \cdot 0{,}5^n$ ($k = 3; 7$); $p_{kk}^{(n)} = 0{,}5(0{,}5^n + 0{,}1^n)$ ($k = 2, 3, 7, 8$); $p_{kk}^{(n)} = 0{,}5^n$ ($k = 4; 9$); $p_{kk}^{(n)} = 0{,}9^n$ ($k = 5; 6$); $p_{28}^{(n)} = p_{37}^{(n)} = p_{73}^{(n)} = p_{82}^{(n)} = 0{,}5(0{,}5^n - 0{,}1^n)$; $p_{24}^{(n)} = p_{39}^{(n)} = p_{79}^{(n)} = p_{84}^{(n)} = 0{,}2 \cdot n \cdot 0{,}5^{n-1}$; $p_{26}^{(n)} = p_{86}^{(n)} = 0{,}9^n - 0{,}5^n - 0{,}2 \cdot n \cdot 0{,}5^{n-1}$; $p_{46}^{(n)} = 0{,}9^n - 0{,}5^n$.

$p_0(n) = 0{,}1$, $p_1(n) = 0{,}9 - 0{,}5 \cdot 0{,}9^n - 0{,}3 \cdot 0{,}5^n - 0{,}04 \cdot n \cdot 0{,}5^{n-1}$, $p_2(n) = p_3(n) = p_7(n) = p_8(n) = 0{,}1 \cdot 0{,}5^n$, $p_4(n) = p_9(n) = 0{,}1 \cdot 0{,}5^n + 0{,}04 \cdot n \cdot 0{,}5^{n-1}$, $p_5(n) = 0{,}1 \cdot 0{,}9^n$, $p_6(n) = 0{,}4 \cdot 0{,}9^n - 0{,}3 \cdot 0{,}5^n - 0{,}04 \cdot n \cdot 0{,}5^{n-1}$.

32.38. Решение исходной системы уравнений $x = (\mathcal{E} - A)^{-1} f = f + \lim\limits_{N\to\infty} \left(\sum_{s=1}^N A^s\right) f$. Если $A^s = \|a_{k,j}^{(s)}\|$, то $x_l = f_l + \lim\limits_{N\to\infty} \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^n a_{l,j}^{(s)} f_j$.
Математическое ожидание случайной величины W_N:

$$\overline{W}_N = \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \ldots \sum_{k_N=1}^n \varphi(k_1, k_2, \ldots, k_N) \prod_{j=1}^N p_{k_{j-1},k_j} = \\ = f_l + \sum_{s=1}^N \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \ldots \sum_{k_s=1}^n a_{l,k_1} a_{k_1,k_2} \ldots a_{k_{s-1},k_s} f_{k_s}.$$

Так как $\|a_{l,k_1}\| \cdot \|a_{k_1,k_2}\| = \|\sum_{k_1=1}^n a_{l,k_1} a_{k_1,k_2}\| = A^2 = \|a_{l,k_2}^{(2)}\|$, то

$$\sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2=1}^n \ldots \sum_{k_{s-1}=1}^n a_{l,k_1} a_{k_1,k_2} \ldots a_{k_{s-1},k_s} = a_{l,k_s}^{(s)}.$$

Тогда $\overline{W}_N = f_l + \sum_{s=1}^N \sum_{j=1}^n a_{l,j}^{(s)} f_j$.

§ 33. Марковские процессы с дискретным числом состояний

33.1. $P_n(t) = e^{-\lambda pt} \frac{(\lambda pt)^n}{n!}$.

33.2. $P_n(t) = \frac{[(\lambda_1+\lambda_2)t]^n}{n!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}$.

33.3. $P_n(t) = \frac{[\Lambda(t)]^n}{n!} e^{-\Lambda(t)}$, где $\Lambda(t) = \lambda \int_0^t [1 - F(x)]dx$; $p_n(t) = \lim\limits_{t\to\infty} P_n(t) = \frac{(\lambda\overline{t})^n}{n!} e^{-\lambda\overline{t}}$, где $\overline{t} = \int_0^\infty [1 - F(x)]dx$ — математическое ожидание времени полета электрона.

33.4. $\rho = \sqrt{\frac{t}{t+\tau}}$.

33.5.

$$F_n(t) = \begin{cases} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } t < 0; \end{cases}$$

$$f_n(t) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } t < 0; \end{cases}$$

$m_k = \frac{n(n+1)\ldots(n+k-1)}{\lambda^k}$.

33.6. Решая систему уравнений $\frac{dP_{ik}(t)}{dt} = -\lambda P_{ik}(t) + \lambda P_{i,k-1}(t)$ при начальных условиях $P_{ik}(0) = \delta_{ik}$ методом индукции от $P_{i,k+1}(t)$ к $P_{ik}(t)$, получим

$$P_{ik}(t) = \begin{cases} \frac{(\lambda t)^{k-i}}{(k-i)!}\, e^{-\lambda t}, & \text{если } 0 \leqslant i \leqslant k, \\ 0, & \text{если } i > k. \end{cases}$$

33.7. При $\lambda = \mu$ неравенство $p_m = \frac{\frac{1}{m!}}{\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!}} \leqslant 0{,}015$ дает $m = 4$.

33.8. Система уравнений для предельных вероятностей p_n:

$$\left.\begin{aligned} & m\lambda p_0 = \mu p_1, \\ & [(m-n)\lambda + \mu]\, p_n = (m-n+1)\lambda p_{n-1} + \mu p_{n+1}, \\ & \mu p_m = \lambda p_{m-1}, \end{aligned}\right\}$$

имеет решения: $p_n = \frac{m!}{(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0$, где p_0 определяется из условия $\sum_{n=0}^{m} p_n = 1$. Математическое ожидание числа автоматов в очереди $L_q = m - \frac{\lambda+\mu}{\lambda}(1 - p_0)$.

33.9. Система уравнений для предельных вероятностей p_n:

$$m\lambda p_0 = \mu p_1,$$

$$\left.\begin{aligned} & [(m-n)\lambda + n\mu] p_n = (m-n+1)\lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1} && \text{для } 1 \leqslant n < r \\ & [(m-n)\lambda + r\mu] p_n = (m-n+1)\lambda p_{n-1} + r\mu p_{n+1} && \text{для } r \leqslant n \leqslant m-1 \end{aligned}\right\}$$

$$r\mu p_m = \lambda p_{m-1},$$

имеет решения:

$$p_n = \begin{cases} \frac{m!}{n!(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, & \text{если } 1 \leqslant n \leqslant r, \\ \frac{m!}{r^{n-r} r!(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, & \text{если } n > r. \end{cases}$$

Математическое ожидание числа автоматов в очереди на ремонт

$$L_q = p_0 \frac{m!}{r!} \sum_{n=r}^{m} \frac{n-r}{r^{n-r}(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n.$$

33.10. Вероятность того, что электронно-вычислительная машина работает, равна предельной вероятности отсутствия в системе требований на обслуживание $p_0 = e^{-\lambda/\mu}$, где μ — среднее число ремонтов в час. Математическое ожидание экономии от применения более надежных элементов за 1000 часов работы

$$\delta = \left[a + 1000c\left(1 - e^{-\frac{\lambda_A}{\mu}}\right)\right] - \left[b + 1000c\left(1 - e^{-\frac{\lambda_B}{\mu}}\right)\right] = 161c - (b-a).$$

33.11. а) Система уравнений для предельных вероятностей:

$$\left.\begin{aligned} & \lambda p_0 = \mu p_1, \\ & (\lambda + k\mu) p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} \quad (1 \leqslant k < n), \\ & (\lambda + n\mu) p_k = \lambda p_{k-1} + n\mu p_{k+1} \quad (k \geqslant n) \end{aligned}\right\}$$

имеет решения:

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0, & \text{при } 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \frac{1}{n!n^{k-n}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n p_0, & \text{при } k \geqslant n, \end{cases}$$

где p_0 — вероятность того, что все аппараты будут свободны от обслуживания, определяемая из условия $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, — равна

$$p_0 = \left\{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{\mu}{(n-1)!(n\mu-\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\right\}^{-1}$$

при условии, что $\lambda < n\mu$;

б) $p^* = \sum_{k=n}^{\infty} p_k = \frac{\mu p_0}{(n-1)!(n\mu-\lambda)}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$;

в) $1 - F(t) = \sum_{k=n}^{\infty} p_k P_k(T > t)$, где $P_k(T > t)$ — вероятность того, что ожидание в очереди продлится более t при условии, что в системе k требований: $P_k(T > t) = \sum_{j=0}^{k-n} \frac{(\mu n t)^j}{j!} e^{-\mu n t}$.

Подставляя это значение, получим $1-F(t)=\sum_{k=0}^{\infty} p_k \sum_{j=0}^{k-n} \frac{(\mu n t)^j}{j!} e^{-\mu n t}$; учитывая, что $\frac{p_k}{p_n} = \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n}$, и меняя порядок суммирования, получим в результате

$$1 - F(t) = p_n e^{-\mu n t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \sum_{k=n+j}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{k-n-j} = \frac{n\mu p_n}{n\mu-\lambda} e^{-(n\mu-\lambda)t},$$

а так как $\frac{p_n}{p^*} = 1 - \frac{\lambda}{n\mu}$, то $F(t) = 1 - p^* e^{-(n\mu-\lambda)t}$ (для $t \geqslant 0$); $\overline{t} = -\int\limits_0^{\infty} t\, dF(t) = \frac{p^*}{n\mu-\lambda}$;

г) $m_1 = \sum_{k=n}^{\infty}(k-n)p_k = p_n \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^k = p_n \frac{\lambda}{n\mu\left(1-\frac{\lambda}{n\mu}\right)^2}$,

$m_2 = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = m_1 + \frac{np_n}{1-\frac{\lambda}{n\mu}} + p_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$,

$m_3 = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)p_k = p_0 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$.

33.12. Применить формулы задачи 33.11; $\overline{t} = \frac{2}{115}$ часа.

33.13. Подобрать n так, чтобы $p^* e^{-(n\mu-\lambda)} < 0{,}01$; $n = 4$ (см. задачу 33.11).

33.14. а) Система уравнений для предельных вероятностей

$$\left.\begin{array}{l} \lambda p_0 = \mu p_1, \\ (\lambda + k\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1} \quad (1 \leqslant k < n), \\ (\lambda + n\mu)p_k = \lambda p_{k-1} + n\mu p_{k+1} \quad (n \leqslant k < l-1), \\ \lambda p_{l-1} = n\mu p_l, \end{array}\right\}$$

где $l = n + m$, имеет решения:

$$p_k = \begin{cases} \frac{p_0}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, & \text{если } 1 \leqslant k \leqslant n, \\ \frac{p_0}{n!n^{k-n}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, & \text{если } n \leqslant k \leqslant l, \end{cases}$$

где p_0 — вероятность отсутствия требований в системе:

$$p_0 = \left\{ \frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1-\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1}}{1-\frac{\lambda}{n\mu}} \right\}^{-1};$$

б) вероятность отказа $p_l = \frac{p_0}{n!n^{l-n}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^l$;

в) вероятность занятости всех аппаратов $p^* = \sum_{k=n}^{n+m} p_k = p_n \frac{1-\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1}}{1-\frac{\lambda}{n\mu}}$, где $p_n = \frac{p_0}{n!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n$;

г) $F(t) = 1 - \frac{p^* e^{-\mu t}}{1-\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1}} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(\mu n t)^j}{j!} \left[\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^j - \left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^m\right]$ $(t \geqslant 0)$;

д) $m_1 = \frac{p_n}{\left(1-\frac{\lambda}{n\mu}\right)^2} \left[\frac{\lambda}{n\mu} - (m+1)\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1} + m\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+2}\right]$;

$m_2 = m_1 + \frac{1-\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^{m+1}}{1-\frac{\lambda}{n\mu}} n p_n + p_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k$;

$m_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0$.

33.15. $p_0 = \frac{81}{665}$; $p = \frac{32}{665}$; $p^* = \frac{52}{133}$; $m_1 = \frac{264}{665}$; $m_2 = \frac{1550}{665} \approx 2{,}33$.

33.16. Система уравнений для предельных вероятностей

$$\left.\begin{aligned} & m\lambda p_0 = \mu p_1, \\ & [(m-n)\lambda + n\mu]p_n = (m-n+1)\lambda p_{n-1} + (n+1)\mu p_{n+1}, \\ & m\mu p_m = \lambda p_{m-1} \end{aligned}\right\}$$

имеет решения $p_n = C_m^n \left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{m-n} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^n$.

33.17. Система уравнений для вероятностей $P_n(t)$: $\frac{dP_n(t)}{dt} = -n\lambda P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t)$, при начальных условиях $P_n(0) = \delta_{n1}$ имеет решение $P_n(t) = e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{n-1}$.

33.18. Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} & \frac{dP_0(t)}{dt} = \mu P_1(t), \\ & \frac{dP_n(t)}{dt} = -n(\lambda+\mu)P_n(t) + (n-1)\lambda P_{n-1}(t) + (n+1)\mu P_{n+1}(t) \ (n \geqslant 1) \end{aligned}\right\}$$

при начальных условиях $P_n(0) = \delta_{n1}$ решается с помощью производящей функции $G(t,u) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)u^n$, для которой получается дифференциальное уравнение $\frac{\partial G(t,u)}{\partial t} = (\lambda u - \mu)(u-1)\frac{\partial G(t,u)}{\partial u}$ с начальным условием $G(0,u) = u$. Оно имеет решение $G(t,u) = \frac{\mu\varkappa + u[1-(\lambda+\mu)\varkappa]}{1-u\lambda\varkappa}$, где

$$\varkappa = \begin{cases} \frac{1-e^{(\lambda-\mu)t}}{\mu-\lambda e^{(\lambda-\mu)t}}, & \text{если } \lambda \neq \mu, \\ \frac{t}{1+\mu t}, & \text{если } \lambda = \mu, \end{cases}$$

из которого следует, что $P_0(t) = \mu\varkappa$, $P_n(t) = (1-\lambda\varkappa)(1-\mu\varkappa)(\lambda\varkappa)^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$.

33.19. Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} & \frac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda_0(t)P_0(t), \\ & \frac{dP_n(t)}{dt} = -\lambda_n(t)P_n(t) + \lambda_{n-1}(t)P_{n-1}(t) \quad (n \geqslant 1) \end{aligned}\right\}$$

при начальном условии $P_n(0) = \delta_{n0}$ имеет решения: $P_0(t) = (1+at)^{-\frac{1}{a}}$, $P_n(t) = t^n(1+at)^{-\left(n+\frac{1}{a}\right)} \frac{(1+a)(1+2a)\ldots[1+(n-1)a]}{n!}$.

33.20. а) $p_0 = \left\{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\mu}{2\mu-\lambda}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\right\}^{-1} = \frac{1}{3}$;

б) $p_{\geqslant 3} = 1 - (p_0 + p_1 + p_2) = \frac{1}{6}$.

33.21. $F\left(\frac{1}{6}\right) = 0{,}645$; применить формулу $F(t) = 1 - \frac{2\mu p_2}{2\mu-\lambda} e^{-(2\mu-\lambda)t}$ при $t = \frac{1}{6}$ часа.

33.22. $\lambda = 10{,}7$ больных за час. Решить уравнение $\frac{p_2\lambda}{2\mu\left(1-\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2} = 3$ относительно $\frac{\lambda}{\mu}$.

33.23. $p \approx 0{,}94$.

$$p = \int_0^T \mu e^{-\mu t}\left\{1 - \frac{n\mu p_n}{n\mu-\lambda}\, e^{-(n\mu-\lambda)(T-t)}\right\} dt =$$

$$= 1 - e^{-\mu T} - \frac{n\mu^2 p_n}{(n\mu-\lambda)[(n-1)\mu-\lambda]}\left\{e^{-\mu T} - e^{-(n\mu-\lambda)T}\right\},$$

где T — время, которым располагает клиент. По условию задачи $T = 30$ минутам.

33.24. а) $p_3 = 0{,}346$; б) 1,96 линий.

33.25. Не менее 8 мест.

33.26. а) $m_1 = 0{,}888$ заказа; б) $\overline{t} = 13{,}3$ минуты. Применить формулы: $m_1 = p_n \frac{\lambda}{n\mu}\left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right)^{-2}$; $\overline{t} = \frac{n\mu p_n}{(n\mu-\lambda)^2}$.

33.27. Минимально необходимое число продавцов $n = 6$. Вероятность того, что в очереди будет более трех человек, $p = 0{,}28$. Величину n искать как решение системы неравенств $n > \frac{\lambda}{\mu}$ и $p_n \frac{\lambda}{\mu n}\left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right)^{-2} \leqslant 3$ величину p — по формуле $p = \sum_{k=n+4}^{\infty} p_k = p_n\left(\frac{\lambda}{n\mu}\right)^4\left(1 - \frac{\lambda}{n\mu}\right)^{-1}$.

33.28. Суммарные потери предприятия за рабочий день при одном, двух и трех кладовщиках соответственно равны 156 руб., 17,8 руб., 19,9 руб. Отсюда оптимальное число кладовщиков — два. Суммарные потери оценивать по формуле: $8\lambda\left(\overline{t} + \frac{1}{\mu}\right) + 0{,}5n$, где n — число кладовщиков, $\overline{t} = \frac{n\mu p_n}{(n\mu-\lambda)^2}$ — среднее время пребывания рабочего в очереди.

33.29. а) $p = 0{,}285$; б) $p = 0{,}07$.

33.30. а) $p = 0{,}36$; б) 14,56 руб.

33.31. $\lambda(1-p)$.

33.32. λ.

33.33. $\mathrm{M}(k) = \rho(1-p)$.

33.34. $P_k(t) = \frac{(\lambda p t)^k}{k!}\, e^{-\lambda p t}$.

33.35. $\mathrm{M}(\tau) = T\left(\frac{\lambda t_0}{1+\lambda t_0}\right)^2$. Рассмотреть замкнутую систему со случайным временем обслуживания, подчиняющимся показательному закону распределения с параметром $\mu = \frac{1}{t_0}$, так как результат не зависит от вида закона.

33.36. $\mathrm{M}(\tau) = T\,\frac{(3+\lambda t_0)(\lambda t_0)^2}{(1+\lambda t_0)^3}$ (см. пояснение к ответу 33.35).

§ 34. Непрерывные марковские процессы

34.1. $a_1 = \sin\omega x_2 - c_1c_2(x_1+x_2)\exp\{-2(x_1+x_2)^2\}$;
$a_2 = \cos\omega x_1 - c_1c_2(x_1-x_2)\exp\{-2(x_1-x_2)^2\}$;
$b_{11} = c_1^2\exp\{-2(x_1+x_2)^2\}$; $b_{12}=0$; $b_{22} = c_2^2\exp\{-2(x_1-x_2)^2\}$.

34.2. $a_j = \psi_i(t, x_1\ldots, x_{n+1})$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $a_{n+1} = x_{n+2}$; $a_{n+2} = x_{n+3}$; $a_{n+3} = -\alpha^3x_{n+1} - 3\alpha^2x_{n+2} - 3\alpha x_{n+3}$; $b_{n+3,n+3} = c^2$ остальные $b_{jl} = 0$.

34.3. $U(t) \equiv U_1(t)$ — компонента двумерного марковского процесса, для которого $a_1 = x_2$; $a_2 = -(\alpha^2+\beta^2)x_1 - 2\alpha_2$; $b_{11} = c^2$; $b_{12} = -2\alpha c^2$; $b_{22} = 4\alpha^2c^2$.

34.4. $a_j = \varphi_j(t, x_1\ldots, x_n)$; $b_{jl} = \psi_{jl}(t)$; $j, l = 1, 2, \ldots, n$.

34.5. Марковский процесс имеет $r+n$ измерений;
$a_j = \varphi_j(t, x_1, \ldots, x_{r+1})$; $j = 1, 2, \ldots, r$;
$a_{r+l} = x_{r+l+1}$, $l = 1, 2, \ldots, n-1$; $a_{r+n} = -\sum_{j=1}^n c_{r+n+1-j}x_j$; $b_{r+p,r+q} = c_{r+p}c_{r+q}$; $p, q = n-m, \ldots, n$, остальные $b_{jl} = 0$; здесь $c_{r+k} = \beta_{k+m-n} - \sum_{j=n-m}^{k-1}\alpha_{k-j}c_{j+r}$.

34.7. $\dot U_1 = \frac{1}{\mu}U_2 + \frac{1}{\mu}\sqrt{2U_2}\xi_1(t)$; $\dot U_2 = \frac{1}{\mu}\varphi(U_1) + \frac{\varkappa}{\mu}\xi_2(t)$; где $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — взаимно независимые случайные функции, обладающие свойством «белого шума».

34.8. $f(y_1, y_2) = c\exp\left\{-\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\int_{x_1}^{y_1}\varphi(\eta)\,d\eta - \frac{\alpha}{2\sigma^2}\,y_2^2\right\}$, где c определяется из условий нормировки. При $\varphi(u) = \beta^2u^3$

$$f = c_1\exp\left\{-\frac{\alpha^2\beta^2}{4\sigma^2}\,y_1^4 - \frac{\alpha^2}{2\sigma^2}\,y_2^2\right\}, \qquad c_1^{-1} = \frac{2\sigma^{\frac{3}{2}}}{\alpha}\,\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha\beta}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^4}\,d\eta.$$

34.9. $f(y) = \frac{c}{\psi(y)}\int_{y_1}^{y}\exp\left\{2\int_0^y\frac{\varphi(\eta)}{\psi^2(\eta)}\,d\eta\right\}\,\frac{dy_1}{\psi(y_1)}$, где c определяется из условия $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,dy = 1$.

34.10. Обозначив $U_1 = \zeta(t)$, $U_2 = U_1 - U$, для U_2 получаем уравнение, не зависящее от U_1. Уравнение Колмогорова для U_2 будет $\frac{\partial f}{\partial\tau} - \frac{\partial}{\partial y_2}\left\{\left[\frac{y_2}{RC} + \frac{1}{C}\,\mathcal{F}(y_2)\right]f\right\} - \frac{\sigma^2}{RC}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y_2^2} = 0$, его стационарное решение: $f(y_2) = c\exp\left\{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2} - \frac{R}{\sigma^2}\int_0^{y_2}\mathcal{F}(\eta)\,d\eta\right\}$, где c определяется из условия нормировки. Искомая плотность вероятности $f(y)$ есть композиция $f(y_2)$ и нормального закона распределения с нулевым математическим ожиданием.

В упомянутом частном случае $f(y_2) = c_1 \exp\left\{-\frac{y_2^2}{2\sigma^2} - \frac{R}{4\sigma^2}\, y_2^2(1+\operatorname{sgn} y_2)\right\}$, где $c_1 = \frac{2\sqrt{1+kR}}{\sigma\sqrt{2\pi}(1+\sqrt{1+kR})}$;

$$f(u) = c_1 \left\{ \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[1 - \Phi\left(\frac{u}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right] e^{-\frac{u^2}{4\sigma^2}} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2+kR}} \left[1 + \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2+kR}}\right)\right] e^{-\frac{(1+kR)u^2}{2\sigma^2(2+kR)}} \right\}.$$

34.11. $f(\tau, y) = \frac{\alpha y}{\alpha a^2+\tau\sigma^2}\, e^{-\frac{\alpha y^2}{2(\alpha a^2+\tau\sigma^2)}}$.

34.12. Уравнение Колмогорова для $U = \exp\{-aV\}$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \frac{1}{RC}\,\frac{\partial}{\partial y}\left[(y\ln y - ai_0R)e^{\frac{a^2\sigma^2}{2}} f\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{ai_0}{c}\right)^2 \sigma^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Стационарное решение: $f(y) = N^{-1}\exp\left\{-\frac{RC}{(ai_0R)^2\sigma_\xi^2}\left[y^2\left(\ln y - \frac{1}{2}\right) - \right.\right.$ $\left.\left. - 2ai_0Re^{-a^2\sigma^2}y\right]\right\}$, где $\sigma_\xi^2 = \frac{2}{\alpha}e^{a^2\sigma^2}\left[E_i(-a^2\sigma^2) - 2\ln a\sigma - 0{,}57721\ldots\right]$ (ср. [74] стр. 243).

34.13. $f(y) = c\exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2}\int_0^y \varphi(\eta)\,d\eta\right\}$, где $c^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2}{\sigma^2} \times\right.$ $\left.\times \int_0^y \varphi(\eta)\,d\eta\right\} dy$.

34.14. Уравнение Колмогорова: $\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial y}\{[\alpha(\tau) + \beta(\tau)y]f\} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial y^2}[\gamma^2(\tau)f] = 0$; уравнение для характеристической функции

$E(\tau, z)$: $\frac{\partial E}{\partial \tau} - iz\alpha(\tau)E - z\beta(\tau)\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\gamma^2}{2}\, z^2E = 0$,

$E(\tau, z) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\sigma_y^2 z^2 + iz\overline{y}\right\}$,

$\overline{y} = e^{\int_t^\tau \beta(\tau_1)\,d\tau_1}\left\{x + \int_t^\tau \exp\left[-\int_t^{\tau_2}\beta(\tau_1)\,d\tau_1\right]\alpha(\tau_2)\,d\tau_2\right\}$,

$\sigma_y^2 = \int_t^\tau \exp\left\{-2\int_t^{\tau_2}\beta(\tau_1)\,d\tau_1\right\}\gamma^2(\tau_2)\,d\tau_2$.

34.15. Уравнение Колмогорова: $\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{T_0}\,\frac{\partial}{\partial y}(yf) - \frac{1}{2}\,\frac{i_0^2\sigma_\varepsilon^2}{T_0^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$;

$f = \frac{1}{\sigma_y\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(y-\overline{y})^2}{2\sigma_y^2}}$; $\overline{y} = xe^{-\frac{\tau-t}{T_0}}$;

$\sigma_y^2 = \frac{i_0^2\sigma_\varepsilon^2}{2T_0}\left[1 - e^{-\frac{2(\tau-t)}{T_0}}\right]$.

34.16. Обозначив $U_1(t) = U(t)$, $U_2(t) = U_1(t)$, для коэффициентов Колмогорова получим: $a_1 = x_2$; $a_2 = -2hx_2 - k^2x_1$; $b_{11} = 0$; $b_{12} = 0$; $b_{22} = c^2$; $f(\tau, y_1) = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(y_1-\overline{y}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right\}$, где

$\overline{y}_1 = xe^{-h\tau}\left[\cos\omega_0\tau + \frac{h}{\omega_0}\sin\omega_0\tau\right]$;

$\sigma_1^2 = \frac{c^2}{4hk^2}\left\{\left(1 - \frac{k^2}{\omega_0^2}e^{-2h\tau}\right) + \frac{h^2}{\omega_0^2}e^{-2h\tau}(h\cos^2\omega_0\tau - \omega_0\sin 2\omega_0\tau)\right\}$;

$\omega_0 = \sqrt{k^2 - h^2}$.

34.17. $f(\tau, y) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2\tau}{2c^2} - \frac{(y-x)^2}{2c^2\tau} - \frac{(|y|-|x|)\alpha}{c^2}\right\}$. У к а з а н и е: при решении уравнения Колмогорова перейти к безразмерным переменным $\tau_1 = \frac{2\alpha^2}{c^2}\,\tau$, $y_1 = \frac{2\alpha}{c^2}\,y$ и сделать подстановку $f = e^{-\frac{1}{2}|y_1|}\omega$.

34.18. $f(\theta) = \frac{2\alpha x e^{-\alpha\theta}}{\sigma\sqrt{2\pi}(1-e^{-2\alpha\theta})^{3/2}}\, e^{-\frac{x^2 e^{-2\alpha\theta}}{2\sigma^2(1-e^{-1\alpha\theta})}}$.

34.19. $f(t,x;\tau,y) = \left(\frac{\beta y^2}{\alpha^2}\right)^{2\mu+\frac{1}{2}} \frac{2\sqrt{\beta}}{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\beta\tau} e^{-\frac{\beta y^2}{\alpha^2}} \frac{n!}{\Gamma(n+2\mu+1)} \times$ $\times L_n^{(2\mu)}\left(\frac{\beta x^2}{\alpha^2}\right) L_n^{(2\mu)}\left(\frac{\beta y^2}{\alpha^2}\right)$, где $\mu = \frac{1}{2}\left(\frac{\gamma}{\alpha^2} - \frac{1}{2}\right)$, а $L_n^{(\nu)}(x)$ — обобщенные полиномы Лагерра.

34.20. $W(T) = \int_{-\beta}^{\beta} w(\alpha T, y_1)\,dy_1$; $w(\tau_1, y_1) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j^2\tau_1} e^{-\frac{1}{4}y_1^2} \times$ $\times D_a(y_1)c_j$, где $D_a(x)$ — четное решение уравнения Вебера[2] (функция параболического цилиндра): $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{4}\,x^2 - a\right)y = 0$; $\lambda_j^2 = a_j - 0{,}5$; a_j — корень уравнения $D_a(\beta) = 0$; $\tau_1 = \alpha\tau$; $y_1 = \frac{\sqrt{2\alpha}}{c}y$; $\beta = \frac{\sqrt{2\alpha}}{c}\,u_0$; $c_j =$ $= \frac{\sqrt{\alpha}}{c}\,\frac{1}{N_j}\,D_{a_j}(0)$; $N_j = \int_{-\beta}^{\beta} D_{a_j}^2(y)\,dy$.

34.21. $W(T) = \int_{-\infty}^{\beta} w(\alpha T, y_1)\,dy_1$; $w(\tau_1, y_1) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j^2\tau_1} \times$ $\times e^{-\frac{1}{4}\,y_1^2} V(y_1)c_j$, где $V_a(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^{-\frac{a}{2}} \left\{2^{-\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,a\right) D_a^{(1)}(x) \times\right.$ $\left.\times \sin\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,a\right) + 2^{\frac{1}{4}}\Gamma\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\,a\right) D_a^{(2)}(x)\cos\pi\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\,a\right)\right\}$; $D_a^{(1)}(x)$ и $D_a^{(2)}(x)$ — соответственно четное и нечетное решения уравнения Вебера: $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{1}{4}\,x^2 - a\right)y = 0$; a_j — корень уравнения $V_{a_j}(\beta) = 0$; $\lambda_j^2 = a_j -$ $- 0{,}5$; $\tau_1 = \alpha\tau$; $y_1 = \frac{\sqrt{2\alpha}}{c}\,y$; $\beta = \frac{\sqrt{2\alpha}}{c}\,u_0$; $c_j = \frac{\sqrt{\alpha}}{c}\,\frac{1}{N_j}\,V_{a_j}(0)$; $N_j =$ $= \int_{-\infty}^{\beta} e^{-\frac{1}{2}\,y_1^2} V_{a_j}(y_1)\,dy_1$.

34.22. $W(\tau) = \int_{k_1}^{k_2} w(\tau, y)\,dy$, где $w(\tau, y)$ — решение уравнения $\frac{\partial w}{\partial\tau} -$ $- \alpha\,\frac{\partial}{\partial y}(yw) - \sigma^2\alpha\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$ при условиях: $w|_{\tau=0} = \delta(y - x)$, $w(\tau, k_2) =$ $= \int_0^{\tau_0} v_1(\tau, k_2)\,d\tau$, $w(\tau, k_1) = \int_0^{\tau_0} v_2(\tau, k_1)\,d\tau$, где v_1, v_2 решения уравнений $\frac{\partial v_{1,2}}{\partial\tau} - \alpha\frac{\partial}{\partial y}(yv_{1,2}) - \sigma^2\alpha\frac{\partial^2 v_{1,2}}{\partial y^2} = 0$ при условиях: $v_{1,2}(\tau, y) = 0$, $\tau < 0$; $v_1(\tau, k_1) = \delta(\tau)f_0(k_2)$; $v_2(\tau, k_2) = \delta(\tau)f_0(k_1)$; $f_0(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(y-\overline{y})^2}{2\sigma^2}}$.

34.23. Составить уравнение Колмогорова для двумерного марковского процесса $U_1(t), U_2(t)$ и перейти к полярным координатам. $W(T) =$ $= 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{J_1(\mu_m)}\,e^{-\frac{c^2\mu_m^2}{2r_0^2}\,\tau}$, где $J_0(\mu_m) = 0$, а $J_n(z)$ — функция Бесселя 1-го рода порядка n.

34.24. Подобрать два решения уравнения Колмогорова для неограниченной области, удовлетворяющих различным начальным условиям, алгебраическая сумма которых дает нуль на указанной границе. $W(T) =$ $= \Phi\left(\frac{\beta e^{-\alpha T}}{\sigma\sqrt{1-e^{-2\alpha T}}}\right)$.

34.25. $W(\tau) = \int_0^{r_0} w(\tau, r)\,dr$, где $w(\tau, r)$ удовлетворяет уравнению $\frac{\partial w}{\partial\tau} -$ $- 2\alpha\frac{\partial}{\partial r}(rw) - 4\sigma^2\alpha\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0$, $w(0, r) = \delta(r - \frac{1}{2}\,r_0)$, $w(\tau, r_0) = 0$.

---

[2] J.C.P.Miller, Tables of Weber Parabolic Cylinder Functions, London, 1955.

$$w(\tau, r) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}\sqrt{1-e^{-2\tau_1}}}\left[e^{-\frac{(r_1-\beta e^{-\tau_1})^2}{2(1-e^{-2\tau_1})}} - e^{-\frac{(r_1-3\beta e^{-\tau_1})^2}{2(1-e^{-2\tau_1})}}\right];$$
$\tau_1 = \frac{1}{2\alpha}\,\tau$, $r_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}\,r$, $\beta = \frac{r_0}{2\sigma\sqrt{2}}$.
$$W(\tau) = \frac{1}{2}\left\{\left[\Phi\left(\frac{2\beta-\beta e^{-\tau_1}}{\sqrt{1-e^{-2\tau_1}}}\right) + \Phi\left(\frac{\beta e^{-\tau_1}}{\sqrt{1-e^{-2\tau_1}}}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \left[\Phi\left(\frac{2\beta-3\beta e^{-\tau_1}}{\sqrt{1-e^{-2\tau_1}}}\right) + \Phi\left(\frac{3\beta e^{-\tau_1}}{\sqrt{1-e^{-2\tau_1}}}\right)\right]\right\}$$ (ср. с примером 34.8).

34.26. $\frac{\partial w}{\partial \tau} + y_2\frac{\partial w}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}\{-[2\alpha y_2 + (\alpha^2+\beta^2)y_1]w\} - 2\sigma^2\alpha(\alpha^2+\beta^2)\frac{\partial^2 w}{\partial y_2^2} = 0$,

$w(\theta, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Delta}}\exp\{-\frac{1}{2\Delta}[k_{22}(y_1-\overline{y}_1)^2 + k_{11}(y_2-\overline{y}_2)^2 - 2k_{12} \times (y_1-\overline{y}_1)(y_2-\overline{y}_2)]\}$, $\Delta = k_{11}k_{22} - k_{12}^2$, $w(r,k_2)|_{y_2<0} = 0$; $w(\tau,k_1)|_{y_2>0} = 0$.

34.27. $f(\alpha) = \frac{1}{\sigma_2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left\{e^{\frac{n\mu\alpha}{c}}\int_{\frac{\alpha}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{\eta_2^2}{2}} D_{-n}\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right)d\eta_2 + e^{-\frac{n\mu\alpha}{c}} \times \int_{-\infty}^{\frac{\alpha}{\sigma}} e^{-\frac{\eta_2^2}{2}} D_{-n}\left(-\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right)d\eta_2\right\}$, где $D_{-n}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-\frac{x^2}{4}} \times \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{e^{\frac{x^2}{2}}\left[1-\Phi\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right\}$, а коэффициенты a_n определяются бесконечной системой уравнений:

$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{jn}a_n = \frac{\mu\sigma}{c}\,\delta_{j1}$;

$\alpha_{jn} = \sigma\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\eta_2^2}{2}+\frac{n\mu\alpha}{c}} D_{-n}\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right) H_j\left(\frac{\eta_2}{\sqrt{2}}\right)[1+(-1)^j]d\eta_2$.

34.28. $f(y) = c_1 e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}+c|y|}$; $c_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{c}{2}}[1-\Phi(\sqrt{c})]^{-1}$.

Глава VIII
Математическая статистика

§ 35. Оценки параметров законов распределения случайных величин

35.1. 16,08 м.

35.2. а) 814,87 м^2 б) 921,84 м^2.

35.3. $\widetilde{v} = 424{,}73$ м/сек; $\widetilde{\sigma}_v = 8{,}84$ м/сек.

35.4. $\widetilde{x} = 33$; $\widetilde{\sigma}_x = 4{,}58$.

35.5. $\widetilde{x} = 404{,}85$ мкВ; $\widetilde{\sigma}_x = 133$ мкВ.

35.6. При $P(A) = 0{,}5$; $\mathrm{D}_{\max} = \frac{1}{4n}$.

35.7. $\mathrm{D}[\widetilde{\sigma}_1^2] = \frac{2(n-1)}{n^2}\,\mathrm{D}^2[X]$; $\mathrm{D}[\widetilde{\sigma}_2^2] = \frac{2}{n-1}\,\mathrm{D}[X]$.

35.8. $\widetilde{\mathrm{Sk}} = 0{,}85$; $\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{x}} = 2{,}70$; с учетом поправок Шеппарда $\widetilde{\mathrm{Sk}} = 0{,}94$; $\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{x}} = 3{,}12$.

35.9. $k = \frac{1}{2(n-1)}$.

35.10. $k = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}$.

35.11. а) $k = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$; б) $k = \frac{1}{n\left[1+\frac{2}{\pi}(n-1)\right]}$.

35.12. $q_i = \frac{1}{\sigma_i^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2}}$.

35.13. $\widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$; $\widetilde{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$;

$\widetilde{\sigma}_x = k_n\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\widetilde{x})^2}$; $\widetilde{\sigma}_y = k_n\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\widetilde{y})^2}$, значения k_n даны в таблице [16].

35.14. $\widetilde{x} = 48{,}31$ м; $\widetilde{y} = 53{,}31$ м; $\widetilde{\sigma}_x = 15{,}55$ м; $\widetilde{\sigma}_y = 18{,}22$ м.

35.15. $\widetilde{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$; $\widetilde{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k$;

$\widetilde{\sigma}_\xi = \sqrt{\widetilde{\sigma}_x^2\cos^2\alpha + \widetilde{k}_{xy}\sin 2\alpha + \widetilde{\sigma}_y^2\sin^2\alpha}$;

$\widetilde{\sigma}_\eta = \sqrt{\widetilde{\sigma}_x^2\sin^2\alpha - \widetilde{k}_{xy}\sin 2\alpha + \widetilde{\sigma}_y^2\cos^2\alpha}$, где

$\widetilde{\sigma}_x = \sqrt{\frac{k_n^2}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\widetilde{x})^2}$; $\widetilde{\sigma}_y = \sqrt{\frac{k_n^2}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(y_k-\widetilde{y})^2}$;

$\widetilde{k}_{xy} = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\widetilde{x})(y_k-\widetilde{y})$, а угол α определяется решением уравнения $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\widetilde{k}_{xy}}{\widetilde{\sigma}_x^2-\widetilde{\sigma}_y^2}$.

35.16. $\widetilde{x} = 1{,}125$ м; $\widetilde{y} = 40$ м; $\widetilde{E}_y = 23{,}14$ м; $\widetilde{E}_x = 1{,}18$ м; $\widetilde{k}_{xy} = 26{,}47$ м^2.

35.17. $k = \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\sqrt{\frac{n}{2}}$. Предварительно доказать, что плотность вероятности случайной величины $\widetilde{\sigma}$ определяется формулой

$$f_n(\widetilde{\sigma}) = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}(\widetilde{\sigma})^{n-2}e^{-\frac{n(\widetilde{\sigma})^2}{2\sigma^2}}.$$

35.18. См. таблицу 83.

Таблица 83

J_j	1–10	11–20	21–30	31–40	41–50	51–60	61–70	71–80	81–90	91–100
$\widetilde{p}_j$	0,107	0,100	0,127	0,087	0,093	0,127	0,093	0,073	0,087	0,107
$\widetilde{\mathfrak{F}}(x)$	0,107	0,207	0,334	0,421	0,514	0,641	0,734	0,807	0,894	1,0

$\widetilde{\mathrm{D}}[X] = 831{,}04$; $\widetilde{x} = 48{,}96$; с учетом поправки Шеппарда $\widetilde{\mathrm{D}}[X] = 824{,}29$.

35.19. $\widetilde{x} = 22{,}85$; $\widetilde{\mathrm{D}}[X] = 40{,}08$; с учетом поправки Шеппарда $\widetilde{\mathrm{D}}[X] = 39{,}33$.

35.20. $\widetilde{\sigma}_1^2$ и $\widetilde{\sigma}_2^2$ являются несмещенными оценками дисперсии; $\mathrm{D}[\widetilde{\sigma}_1^2] = \frac{2\sigma^4}{n-1}$; $\mathrm{D}[\widetilde{\sigma}_2^2] = \frac{3n-4}{(n-1)^2}\sigma^4$; $\frac{\mathrm{D}[\widetilde{\sigma}_2^2]}{\mathrm{D}[\widetilde{\sigma}_1^2]} = \frac{3n-4}{2(n-1)}$, т. е. при любом $n > 2$ $\mathrm{D}[\widetilde{\sigma}_1^2] < \mathrm{D}[\widetilde{\sigma}_2^2]$.

35.21. Для $n = 10$: $p_1 = 0{,}325$, $p_2 = 0{,}332$; для $n = 20$: $p_1 = 0{,}458$; $p_2 = 0{,}462$; $\frac{p_2}{p_1} \approx k_n = \sqrt{\frac{n-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

35.22. $\widetilde{p} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j$.

35.23. а) $\widetilde{a} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(x_j)$; б) $\widetilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}[\varphi(x_j)-a]^2$, $\mathrm{D}[\widetilde{\sigma}^2] = \frac{2\sigma^4}{n}$.

35.24. $V_x = \frac{6\sum_{j=1}^{n}(2j-3n-3)x_j}{n\tau(n^2-1)}$.

35.25. а) $\widetilde{k} = \frac{n(\alpha+1)}{x_1+x_2+\ldots+x_n} = \frac{\alpha+1}{\widetilde{x}}$; б) $\mathrm{M}[\widetilde{k}] = k[1 + \frac{1}{n(\alpha+1)-1}]$; в) $\mathrm{D}[\widetilde{k}\frac{n(\alpha+1)-1}{n(\alpha+1)}] = \frac{k^2}{n(\alpha+1)-2}$.

35.26. $\mathrm{D}[\widetilde{D}] = D_0 = \frac{2\sigma^4}{n}$, т. е. оценка эффективная.

35.27. $\mathrm{D}[\widetilde{\sigma}_1] = \frac{n}{2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\frac{\sigma^2}{2n} + 0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]$; $\mathrm{D}_0 = \frac{\sigma^2}{2n}$ и, следовательно, оценки $\widetilde{\sigma}_1$ и $\widetilde{\sigma}_2$ эффективны только асимптотически.

§ 36. Доверительные вероятности и доверительные интервалы

36.1. (94,9 м; 105,1 м).

36.2. $\widetilde{x} = 116\frac{1}{22}$ м; (115,53 м; 116,57 м).

36.3. 0,55; 0,34.

36.4. а) $\widetilde{x} = 10{,}57$ м, $\widetilde{\sigma}_x = 2{,}05$ м; б) 0,27; в) 0,035.

36.5. (5,249 сек, 5,751 сек); (1,525 сек; 1,928 сек).

36.6. (867,6 м/сек, 873,0 м/сек).

36.7. Не менее 11 измерений.

36.8. (24 846 м; 25 154 м); (195,3 м; 440,2 м).

36.9. $(4{,}761 \cdot 10^{-10}; 4{,}805 \cdot 10^{-10})$; $\widetilde{x} = 4,783 \cdot 10^{-10}$.

36.10. а) (420,75 м/сек; 428,65 м/сек); (6,69 м/сек; 12,70 м/сек); б) 0,61; 0,76.

36.11. Не менее двух дальномеров.

36.12. Не менее 15 измерений.

36.13. 0,61; 0,74; 0,89; 0,99.

36.14. См. таблицу 84.

Таблица 84

n	3	5	10	25
$\sigma = 20$ м	$\widetilde{x} \pm 18{,}98$ м	$\widetilde{x} \pm 14{,}71$ м	$\widetilde{x} \pm 10{,}40$ м	$\widetilde{x} \pm 6{,}58$ м
$\widetilde{\sigma} = 20$ м	$\widetilde{x} \pm 33{,}72$ м	$\widetilde{x} \pm 19{,}05$ м	$\widetilde{x} \pm 11{,}59$ м	$\widetilde{x} \pm 6{,}84$ м

36.15. $\widetilde{t} = 425$ час; (270,70 часа; 779,82 часа).

36.16. (410,21 часа; 1036,56 часа).

36.17. (50,75 часа; 85,14 часа).

36.18. (0,123; 0,459).

36.19. (0,303, 0,503); (0,276, 0,534).

36.20. (0,000; 0,149); (0,000; 0,206); (0,000, 0,369).

36.21. Для стрелка A $(0,128;\ 0,872)$, для стрелка B $(0,369;\ 0,631)$.

36.22. (1,15; 3,24).

36.23. (3,721; 4,020).

36.24. (0; 4,6).

36.25.

При $\alpha = 0{,}99$	при $\alpha = 0{,}95$
для r_{12} (0,42; 0,68),	для r_{12} (0,45; 0,65);
для r_{13} (0,13; 0,47),	для r_{13} (0,17; 0,43);
для r_{14} (0,21; 0,53),	для r_{14} (0,25, 0,49).

36.26. $9{,}82 < \overline{x} < 11{,}18$; $1{,}624 < \sigma_x < 2{,}632$; $70{,}58 < \overline{y} < 77{,}42$; $8{,}12 < \sigma_y < 13{,}16$; $0{,}35 < r_{xy} < 0{,}79$.

§ 37. Метод наименьших квадратов

37.1. $\widetilde{a} = 1{,}08$; $\widetilde{a}_1 = 2{,}014$; $\widetilde{\sigma}^2 = 0{,}158$; $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_0} = 0{,}083$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_1} = 0{,}0091$; $k_{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_1} = -0{,}014$; $\widetilde{r} = -0{,}506$.

37.2. $\widetilde{a}_0 = -0{,}044$; $\widetilde{a}'_1 = 0{,}601$; $\widetilde{\sigma}' = 0{,}087$; $\widetilde{a}''_0 = 0{,}006$; $\widetilde{a}''_1 = 0{,}615$; $\widetilde{\sigma}'' = 0,0641$.

37.3. $\widetilde{a}_0 = 12{,}85$; $\widetilde{a}_1 = -0{,}492$; $\widetilde{\sigma}^2 = 0{,}199$; $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_0} = 0{,}0753$; $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_1} = 0{,}000419$; $\widetilde{k}_{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_1} = -0{,}0033$; $\widetilde{r} = -0{,}584$.

37.4. $\widetilde{a}_1 = 1{,}682$; $\widetilde{a}_2 = 1{,}073$; $\widetilde{\sigma}^2 = 0{,}311$; $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_1} = 0{,}0945$; $\widetilde{\sigma}^2\widetilde{a}_2 = 0{,}00531$; $\widetilde{k}_{\widetilde{a}_1\widetilde{a}_2} = -0{,}0218$; $\widetilde{r} = -0{,}97$.

37.5. $\widetilde{h} = 0{,}609 + 0{,}1242E$; $V_{0,0} = 0{,}3896$; $M_{1,1} = 0{,}00001156$; $\widetilde{\sigma}^2 = 1{,}464$; $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_0} = 0{,}5704$; $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_1} = 0{,}0000169$.

37.6. $\widetilde{h} = 0{,}679 + 0{,}124E$; $\widetilde{\sigma}^2 = 1{,}450$; $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_0} = 0{,}5639$; $\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{a}_1} = 0{,}00001672$.

Совпадение с результатами задачи 37.5 вполне удовлетворительное. Результаты вычислений в задаче 37.6 несколько отличаются от результатов для задачи 37.5, так как при решении задачи 37.5 производилось большое количество вычислительных операций, в том числе вычитание близких по величине чисел, и поэтому вычислительные ошибки оказались больше.

37.7. $\widetilde{h} = 9{,}14 + 65{,}89t + 489{,}28t^2$; $\widetilde{\sigma}^2 = 0{,}001245$; $\widetilde{\sigma}_y = 1{,}177$ см/сек^2.

37.8. $\widetilde{h} = 65{,}021 + 5{,}176P_{1,13}(x)\cdot 13 + 1{,}087P_{2,13}(x)\cdot 13$, где $x = 30t - 1$ или $\widetilde{h} = 9{,}133 + 65{,}895t + 489{,}28t^2$; $\widetilde{\sigma}_g = 1{,}167$ см/сек^2.

37.9. $\widetilde{y} = 0{,}8057 + 0{,}2004x - 0{,}1018x^2$; $\widetilde{\sigma}^2 = 0{,}0002758$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_0} = 0{,}00009192$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_1} = 0{,}000009848$, $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_2} = 0,000003283$.

37.10. $\widetilde{y} = 26{,}97 + 0{,}3012P_{1,16}(t) = 29{,}38 - 0{,}3012t$; $\widetilde{y} = 26{,}97 + 0{,}3012P_{1,16}(t) - 0{,}000916P_{2,16}(t) + 0{,}01718P_{3,16}(t) = 29{,}82 - 0{,}7133t + 0{,}06782t^2 - 0{,}002864t^3$, где $P_{k,16}(t)$ — табличные значения полиномов Чебышева. Для линейной зависимости $\widetilde{\sigma} = 0{,}3048$; при $\beta = 0{,}90$ имеем $0{,}2362 < \sigma < 0{,}4380$. Для зависимости третьей степени $\widetilde{\sigma} = 0{,}1212$; при $\beta = 0{,}90$ имеем $0{,}0924 < \sigma < 0{,}1800$.

37.11. $\widetilde{a}_0 = 3{,}012$; $\widetilde{a}_1 = -2{,}031$; $\widetilde{\sigma}^2 = 0{,}001196$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_0} = 0{,}0282$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_1} = 0{,}0596$; $\widetilde{k}_{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_1} = -0{,}00135$; $\widetilde{r} = -0{,}804$.

37.12. $\widetilde{y} = 21{,}07 + 5{,}954x$; $\sigma_{\widetilde{a}_0} = 3{,}09$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_1} = 0{,}0949$; $\widetilde{k}_{\widetilde{a}_0\widetilde{a}_1} = -0{,}2324$. Доверительные интервалы для a_k при $\beta = 0{,}90$: $13{,}8 < a_0 < 28{,}4$;

$5{,}74 < q_1 < 6{,}17$; $\widetilde{\sigma}_y^2 = 9{,}576 - 0{,}4649x + 0{,}008992x^2$. Доверительные границы для $y = Q(x)$ при $\beta = 0{,}90$ приведены в таблице 85.

Таблица 85

j	0	1	2	3	4
$\widetilde{y}_j - \gamma\widetilde{\sigma}_{\widetilde{y}}(x_j)$	44,2	74,6	134,8	252,7	368,7
$\widetilde{y}_j + \gamma\widetilde{\sigma}_{\widetilde{y}}(x_j)$	56,3	86,4	145,3	265,6	388,0

37.13. $\widetilde{y} = 0{,}03548 + 0{,}06574x + 0{,}00130x^2$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_0} = 0{,}0147$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_1} = 0{,}0106$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_2} = 0{,}00156$.

37.14. $\widetilde{y} = 1{,}1188 + \frac{8{,}9734}{x}$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_0} = 0{,}2316$; $\widetilde{\sigma}\widetilde{a}_1 = 0{,}6157$; при $\beta = 0{,}95$ имеем: $1{,}065 < a_0 < 1{,}172$; $8{,}831 < a_1 < 9{,}115$; $\widetilde{k}_{\widetilde{a}_0,\widetilde{a}_1} = -0{,}0854$. Доверительные границы для $y = Q(x)$ при $\beta = 0{,}95$ даны в таблице 86.

Таблица 86

j	1	2	3	5	10	20	30	50	100	200
$y_j - \gamma\widetilde{\sigma}_{\widetilde{y}}(x_j)$	10,03	5,55	4,06	2,87	1,97	1,52	1,37	1,25	1,16	1,11
$y_j + \gamma\widetilde{\sigma}_{\widetilde{y}}(x_j)$	10,27	5,66	4,16	2,96	2,06	1,62	1,47	1,35	1,26	1,22

$\widetilde{\sigma}^2_{\widetilde{y}}(x) = 0{,}05364 - \frac{0{,}1708}{x} + \frac{0{,}3790}{x^2}$.

37.15. $U = 100{,}8e^{-0{,}3127t}$; $89{,}97 < U_0 < 112{,}9$; $0{,}2935 < a < 0{,}3319$.

37.16. $\delta_B = 204'{,}9 - \frac{34205}{v^2}$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_0} = 4'{,}36$; $\widetilde{\sigma}_{\widetilde{a}_1} = 504$.

37.17. $p_j = 0{,}1822e^{-\frac{(\widetilde{x}_j - 117{,}25)^2}{2\cdot 462{,}91}}$.

37.18. $\varphi^0 = 62^\circ$ подобрано по формуле $y = a^\circ \sin(\omega t - \varphi^0)$, где приближенное значение a^0 принято равным среднему арифметическому из наибольших опытных значений y_j (при $t = 0{,}05$; $0{,}45$; $0{,}95$).

$a^0 = \frac{|y_{0,05}| + |y_{0,45}| + |y_{0,95}|}{3} = 33$; $\widetilde{y} = 30{,}75\sin(\omega t - 59^\circ 59')$; $|\widetilde{y} - y|_{\max} = 18{,}4$.

37.19. $\widetilde{y} = 1{,}088 - 1{,}252\cos x + 2{,}080\sin x + 0{,}962\cos 2x + 0{,}466\sin 2x$; $|\varepsilon|_{\max} = 0{,}24$ при $x = 120^\circ$.

37.20. $\widetilde{t} = -3{,}924 + 1{,}306x$; $|\varepsilon|_{\max} = 1{,}141$.

§ 38. Проверка статистических гипотез. Параметрические гипотезы

38.1. $k = n - 1 = 149$; $\gamma_{0,95} = 1{,}97$; $V_\alpha = 0{,}91$; $\widetilde{x} - 40 = 0{,}48 < V_\alpha$; отклонение незначимо, превышение можно считать случайным.

38.2. $z_{1-\alpha} = 1{,}96$; $z_{1-2\alpha} = 1{,}645$; критическая область: для правостороннего критерия: $\widetilde{x} > x_0 + z_{1-2\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20{,}0 + 0{,}20 = 20{,}2$; для двустороннего критерия: $|\widetilde{x} - 20{,}0| > z_{1-\alpha}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0{,}2$;

38.3. $x = 994{,}0$; $\sigma^2 = 64{,}9$; $k = 9$; $\gamma_{1-\alpha} = 2{,}26$; $V_\alpha = 5{,}76$; $|\widetilde{x} - x_0| = 6{,}0 > V_\alpha$, гипотеза H_0 опровергается (при $\alpha = 0{,}01$ — не опровергается; желательно увеличить объем выборки для получения более надежного результата).

38.4. $\chi^2 = 37{,}24$; $k = 19$; $\chi^2_\alpha = 30{,}1$; $\chi^2 > \chi^2_\alpha$ — гипотеза H_0 отвергается.

38.5. а) $\mathcal{F} = 1{,}17$; $k_1 = 9$; $k_2 = 9$; $\mathcal{F}_\alpha = 4{,}03$; $\mathcal{F} < \mathcal{F}_\alpha$, гипотеза H_0 не опровергается; б) $T = 3{,}219$; $k = 18$; $\gamma_{0,95} = 2{,}10$; $|T| > \gamma_0$. Гипотеза $\overline{x} = \overline{y}$ опровергается, различие в производительности установок значимо.

38.6. $\mathcal{F} = 1{,}95$; $k_1 = 24$; $k_2 = 29$; $\mathcal{F}_\alpha = 1{,}90$; $\mathcal{F} > \mathcal{F}_\alpha$, гипотеза H_0 отвергается, 1-й станок точнее, чем 2-й станок.

38.7. $K_x = 7$; $\gamma_{0,99}(7) = 5{,}41$; $k_y = 9$; $\gamma_{0,99}(9) = 4{,}78$; $T_\alpha = 2{,}65$; $|x - y| = 10{,}69 > 2{,}65$; расхождение между весами азота из воздуха и азота из соединений существенно; более тщательное исследование позволило обнаружить в азоте из воздуха небольшое количество тяжелого газа — аргона.

38.8. а) $\mathcal{F} = 1{,}21$; $k_1 = 29$; $k_2 = 29$; $\mathcal{F}_\alpha = 1{,}8$, гипотеза о равенстве дисперсий не опровергается; б) $T = 1{,}38$; $k = 58$; $\gamma_{1-\alpha} = \gamma_{0,05} = 2{,}00$; видим, что $|T| < \gamma_{1-\alpha}$, гипотеза о равенстве математических ожиданий также не опровергается.

38.9. а) $\mathcal{F} = 1{,}16$; $k_1 = 144$; $k_2 = 199$; $\mathcal{F}_\alpha = 1{,}27$ (линейная экстраполяция); гипотеза $\sigma^2_x = \sigma^2_y$ не опровергается; б) $T = 4{,}20$; $k = 343 \approx \infty$; $\gamma_{0,95} = 1{,}96$; $T > \gamma_{0,95}$ — гипотеза H_0 отвергается, сталь марки A обладает более высоким пределом текучести, чем сталь марки B.

38.10. $\mathcal{F} = \dfrac{d_2 \sum_{j=1}^{d_1} s_j}{d_1 \sum_{j=d_1+1}^{d_2} s_j}$; $k_1 = 2r_1$; $k_2 = 2r_2$; критическая область $\mathcal{F} > \mathcal{F}_{\alpha/2}$; где $\mathcal{F}_{\alpha/2}$ находят по $\frac{\alpha}{2}$, k_1, k_2 (если $\mathcal{F} < 1$, то $\mathcal{F} < \frac{1}{\mathcal{F}_{\alpha/2}}$, где $\mathcal{F}_{\alpha/2}$ находят по $\frac{\alpha}{2}$, k_2, k_1).

38.11. $\widetilde{\sigma}^2 = 0{,}444$; $C = 1{,}035$; $N = 67$; $B = 3{,}99$; $k = 4$; $\chi^2_\alpha = 9{,}5$; $B < \chi^2_\alpha$; гипотеза H_0 не опровергается.

38.12. $N = 145$; $\widetilde{\sigma}^2 = 0{,}6702$; $C = 1{,}032$; $B = 1{,}66$; $k = 8$; $\chi^2_\alpha = 15{,}5$; $B < \chi^2_\alpha$ — гипотеза H_0 не опровергается.

38.13. а) $G = 0{,}2258$; $k = n - 1 = 16$; $m = 7$; $g_\alpha = 0{,}2756$; $G < g_\alpha$; гипотеза H_0 не опровергается; б) $h = 2{,}55$; $k = 16$; $m = 7$; $h_\alpha = 4{,}14$; $h < h_\alpha$, гипотеза H_0 не опровергается.

38.14. $\widetilde{x} = 0{,}138$; $s = 0{,}051$; $v = 2{,}196$; $n = 9$; $v_\alpha = 2{,}344$; $v < v_\alpha$ — нет оснований считать результат 0,25 грубо ошибочным.

38.15. $\widetilde{x} = 3{,}943$; $s = 0{,}943$; $v = 2{,}552$; $n = 20$; $v_\alpha = 2{,}623$; значение 6,55 следует признать допустимым.

38.16. $s_5 = 250$; $\sum_{j=1}^{10} s_j = 420$; $G = 0{,}59$; $m = 10$; $n - 1 = 2$; $g_\alpha = 0{,}455$; $G > g_\alpha$ — результат является грубой ошибкой, более тщательное исследование показало, что в течение 10 дней отказы не регистрировались.

38.17. $\widetilde{x} = 66{,}8$; $\sum_{j=1}^{45}(x_j - \widetilde{x})^2 = 37336$; $\sum_{j=1}^{44} \delta_j^2 = 42819$; $r = 0{,}573$; $n = 45$; $r_\alpha = 0{,}760$; $r < r_\alpha$ — гипотеза H_0 об отсутствии сползания центра рассеивания отвергается.

38.18. При $m = 1$: $\widetilde{\sigma}_1^2 = 0{,}0929$; $\widetilde{y} = 26{,}97 + 0{,}3012p_{1,16}(t)$; при $m = 2$: $\widetilde{\sigma}_2^2 = 0{,}08963$; при $m = 3$: $\widetilde{\sigma}_3^2 = 0{,}01468$; $\widetilde{y} = 26{,}97 + 0{,}3012P_{1,16}(t) - 0{,}000916P_{2,16}(t) + 0{,}01718P_{3,16}(t)$; при переходе от $m = 1$ к $m = 2$ изменение $\widetilde{\sigma}^2$ незначительно; при переходе от $m = 2$ к $m = 3$: $\mathcal{F} = 6{,}1$; $k_1 = 16 - 2 = 14$; $k_2 = 16 - 3 = 13$; $\mathcal{F}_\alpha = 2{,}56$; $\mathcal{F} > \mathcal{F}_\alpha$ — видим, что оптимальным является значение $m = 3$.

38.19. $\widetilde{\sigma}_{0n}^2 = 0{,}6702$; $\widetilde{\sigma}_p^2 = 0{,}736$; $\mathcal{F} = 1{,}098$; $k_1 = 6$; $k_2 = 136$; $\mathcal{F}_\alpha = 2{,}10$; $\mathcal{F} < \mathcal{F}_\alpha$ — нет оснований считать, что регрессия степени $m = 2$ требует улучшения.

38.20. $T = -2{,}32$; $k = 13$; $\gamma_{0,99} = 3{,}01$; $|T| < \gamma_{0,99}$ — гипотеза об отсутствии корреляционной связи не опровергается; учитывая большое значение $\widetilde{r}_{xy}$, желательно увеличить объем выборки для получения более надежного результата.

38.21. а) $T = 7{,}55$; $k = 148 \approx \infty$; $\gamma_{0,95} = 1{,}96$; $|T| > \gamma_{0,95}$ — гипотеза: $r_{xy} = 0$ отвергается; б) $r_\alpha = 0{,}16$; $r_{xy} r_\alpha$ — гипотеза: $r_{xy} = 0$ отвергается.

§ 39. Проверка статистических гипотез. Непараметрические гипотезы

39.1. $\widetilde{a} = 0{,}9288$; $\chi^2 = 0{,}997$; $k = 3$; $\chi_\alpha^2 = 7{,}8$; $\chi^2 < \chi_\alpha^2$. Отклонение не значимо, гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Пуассона не опровергается.

39.2. $\widetilde{a} = 1{,}54$; $\chi^2 = 7{,}326$; $k = 3$; $\chi_\alpha^2 = 9{,}5$; $\chi^2 < \chi_\alpha^2$. Отклонение не значимо.

39.3. $\widetilde{x} = 5$; $\widetilde{p} = 0{,}5$; $\chi^2 = 3{,}156$; $k = 9$; $\chi_\alpha^2 = 14{,}7$; $\chi^2 < \chi_\alpha^2$. Гипотеза о том, что при каждой из стрельб имелась постоянная вероятность попадания одним выстрелом, не опровергается.

39.4. $\chi^2 = 10{,}32$; $k = 7$; $\chi_\alpha^2 = 14{,}1$; $\chi^2 < \chi_\alpha^2$. Отклонения не значимы.

39.5. $\chi_{\text{гип}}^2 = 3{,}05$; $\chi_{\text{бин}}^2 = 7{,}13$; $k = 3$; $\chi_\alpha^2 = 6{,}3$; $\chi_{\text{гип}}^2 < \chi_\alpha^2$; $\chi_{\text{бин}}^2 > \chi_\alpha^2$. Гипотеза о согласии наблюдений с гипергеометрическим законом распределения не опровергается; отклонение выборочное закона распределения от биномиального значимо, и гипотезу о согласии с биномиальным законом распределения следует отвергнуть.

39.6. а) $\widetilde{x} = 11{,}8$ мк; $\widetilde{\sigma}_0 = 4{,}691$ мк; $\widetilde{\sigma} = 4{,}464$; $\chi^2 = 1{,}07$; $k = 2$; $\chi_\alpha^2 = 6{,}0$; $\chi^2 < \chi_\alpha^2$ — гипотеза нормальности не опровергается; б) $\widetilde{\mathrm{Sk}} = 0{,}134$; $\mathcal{E}\mathrm{x} = -0{,}34$; $n = 250$; $\widetilde{\mathrm{Sk}}_\alpha = 0{,}255$; $\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{x}}_\alpha = -0{,}45$; $\widetilde{\mathrm{Sk}} < \mathrm{Sk}_\alpha$; $\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{x}} > \mathcal{E}\mathrm{x}_\alpha^-$, гипотеза нормальности не опровергается.

39.7. а) $\widetilde{x} = 22{,}85$; $\widetilde{\sigma}_0 = 6{,}394$; $\widetilde{\sigma} = 6{,}335$; $\widetilde{\mathrm{Sk}} = 0{,}16$; $\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{x}} = -0{,}72$; $n = 250$; $\mathrm{Sk}_\alpha = 0{,}255$; $\mathcal{E}\mathrm{x}_\alpha^- = -0{,}45$ $\widetilde{\mathrm{Sk}} < \mathrm{Sk}_\alpha$; $\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{x}} < \mathcal{E}\mathrm{x}_\alpha^-$; критерий не дает однозначного ответа; б) $\chi^2 = 5{,}997$; $k = 6$; $\chi_\alpha^2 = 12{,}6$; $\chi^2 < \chi_\alpha^2$ — гипотеза нормальности не опровергается.

39.8. $D_n = 0{,}119$; $\lambda_n = 0{,}752$; $\lambda_{n\alpha} = 1{,}197$; $\lambda_n < \lambda_{n\alpha}$; гипотеза о согласии выборочного распределения с законом нормального распределения не опровергается.

39.9. $\widetilde{x} = 8{,}8$; $\widetilde{\sigma} = 113{,}8$; $\chi^2 = 4{,}3$; $k = 4$; $\chi^2_\alpha = 9{,}5$ $\chi^2 < \chi^2_\alpha$; гипотеза нормальности не опровергается.

39.10. $\chi^2 = 5{,}012$; $k = 9$; $\chi^2_\alpha = 14{,}7$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$. Отклонения не значимы; гипотеза о том, что первые 800 десятичных знаков в числе π подчиняются закону равномерного распределения, не опровергается.

39.11. $|\Delta\mathcal{F}| = 0{,}142$; $1 - \mathcal{F}(x_{45}) = 0{,}136 < |\Delta\mathcal{F}|_{\max}$; $1 - \frac{45}{50} = 0{,}100 < < |\Delta\mathcal{F}|_{\max}$; $D_n = |\Delta\mathcal{F}|_{\max}$; $\lambda_n = 1{,}004$; $\lambda_\alpha = 1{,}200$; $\lambda < \lambda_\alpha$. Гипотеза о согласии распределения 800 чисел с законом равномерного распределения не опровергается.

39.12. $\chi^2 = 4$; $k = 9$; $\chi^2_\alpha = 16{,}9$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом равномерного распределения не опровергается.

39.13. $D = 0{,}041$; $\lambda = 0{,}5021$; $\lambda_\alpha = 1{,}224$; $\lambda < \lambda_\alpha$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом равномерного распределения не опровергается, так как отклонения не значимы.

39.14. $\chi^2 = 24{,}9$; $k = 9$; $\chi^2_\alpha = 16{,}9$; $\chi^2 > \chi^2_\alpha$. Отклонения значимы; гипотезу о согласии опытных данных с законом равномерного распределения следует отвергнуть. Результаты отсчетов содержат систематическую ошибку.

39.15. $n\omega^2 = 0{,}13335$; $n = 40$; $\Delta_\alpha = 0{,}4614$; $n\omega^2 < \Delta_\alpha$; гипотеза о нормальности распределения не опровергается.

39.16. $D_n = 0{,}097$; $\lambda_n = 0{,}653$; $\lambda_{n\alpha} = 1{,}197$; $\lambda_n < \lambda_{n\alpha}$; гипотеза о согласии выборочных данных с законом логарифмически нормального распределения не опровергается.

39.17. $x = \lg y$; $\widetilde{x} = -0{,}1312$; $\widetilde{\sigma}^2_x = 0{,}3412$; $\widetilde{\sigma}_x = 0{,}5841$; $n = 9$; $\chi^2 = = 2{,}27$; $k = 6$; $\chi^2_\alpha = 12{,}6$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$. Гипотеза о согласии опытных данных с законом логарифмически нормального распределения не опровергается (отклонения не значимы).

39.18. $\widetilde{x} = 2{,}864$; $\widetilde{m}_{20} = 11{,}469$; $\widetilde{m}_2 = 11{,}448$; $\mathrm{M}[X] = \nu\widetilde{\sigma}$; $\widetilde{\sigma} = \sqrt{\frac{\widetilde{m}_2}{1+\nu^2}}$, где ν — корень уравнения $T(\nu) = 0{,}4232$; $T(\nu) = = \frac{\varphi(\nu)+0{,}5\nu\Phi(\nu)}{\sqrt{1+\nu^2}} = \frac{x}{2\sqrt{m_2}}$; при $\nu = 1{,}2$: $T(\nu) = 0{,}4200$; при $\nu = 1{,}3$: $T(\nu) = 0{,}4241$; $\nu \approx 1{,}278$; $\mathrm{M}[X] = 2{,}2665$; $\widetilde{\sigma} = 2{,}085$; $\chi^2 = 5{,}309$; $k = = 9$; $\chi^2_\alpha = 16{,}9$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$. Гипотеза о том, что X есть абсолютное значение нормально распределенной величины, не опровергается.

39.19. $\widetilde{x} = 87{,}46$; $\widetilde{\sigma}_0 = 4{,}955$; $\widetilde{\sigma} = 4{,}821$; $\widetilde{a} = 80{,}02$; $\widetilde{b} = 94{,}90$; $\chi^2_{\text{н}} = = 10{,}42$; $k_{\text{н}} = 7$; $\chi^2_\alpha = 14{,}1$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$. Плотность вероятности $\Psi(x)$ для композиции законов нормального и равномерного распределений имеет вид

$$\Psi(x) = \frac{1}{2 \cdot 14{,}88}\left[\Phi\left(\frac{x - 80{,}02}{2{,}402}\right) + \Phi\left(\frac{94{,}90 - x}{2{,}402}\right)\right];$$

$\chi^2_\psi = 2{,}842$; $k_\psi = 6$; $\chi^2_\alpha = 12{,}6$; $\chi^2_\psi < \chi^2_\alpha$. Гипотеза о согласии опытных данных с законом нормального распределения не опровергается. Гипотеза о согласии опытных данных с композицией законов нормального и равномерного распределения также не опровергается, причем согласие лучше, чем с законом нормального распределения.

39.20. $\widetilde{r} = 50{,}13$; $\widetilde{\sigma} = \widetilde{r}\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 40{,}0$; $\chi^2 = 2{,}73$; $k = 6$; $\chi^2_\alpha = 12{,}6$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Рэлея не опровергается.

39.21. $\widetilde{x} = 508{,}6$; $\widetilde{\sigma}_0 = 123{,}7$; $\widetilde{\sigma} = 122{,}9$; $\chi^2_{\text{н}} = 3{,}45$; $k_{\text{н}} = 7$; $\chi^2_\alpha = 14{,}1$ при $\alpha = 0{,}05$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$. Параметр $\widetilde{a}$ для закона распределения Максвелла определяется из формулы $\widetilde{a} = \frac{\widetilde{x}=x_0}{1{,}596} = 193{,}4$; $\chi^2_{\text{м}} = 1{,}383$; $k_{\text{м}} = 7$; $\chi^2_{\text{м}} < \chi^2_\alpha$. Наблюдения лучше согласуются с законом распределения Максвелла, чем с законом нормального распределения.

39.22. $\widetilde{t} = 871{,}5$ часа; $\widetilde{\lambda} = 0{,}001148$; $k = 8$; $\chi^2 = 4{,}495$; $\chi^2_\alpha = 15{,}5$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$. Гипотеза о согласии наблюдений с экспоненциальным законом распределения не опровергается (отклонения не значимы).

39.23. $n\omega^2 = 0{,}08534$; $\Delta_\alpha = 0{,}4614$; $n\omega^2 < \Delta_\alpha$; гипотеза о согласии выборочных данных с законом логарифмически нормального распределения не опровергается.

39.24. $\widetilde{t} = 394{,}5$ часа; $\widetilde{\sigma}_0 = 2281$ часа; $v_m = 0{,}5736$; $m = 1{,}801$; $\widetilde{b}_m = 0{,}8889$; $\chi^2 = 13{,}44$; $\widetilde{\sigma} = 226{,}3$; $k = 7$; $\chi^2_\alpha = 14{,}1$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения Вейбулла не опровергается.

39.25. Функция распределения арктангенса $\mathcal{F}(z) = \int_{-\infty}^{z} f(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$; $D = 0{,}0195$; $\lambda = 0{,}6166$; $\lambda_\alpha = 1{,}224$; $\lambda < \lambda_\alpha$. Гипотеза о согласии статистического распределения величин z с законом распределения Коши и, следовательно, величин Y с законом нормального распределения не опровергаются.

39.26. Функция распределения арксинуса $\mathcal{F} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{z}{a}$; $D = 0{,}0290$; $\lambda = 0{,}917$; $\lambda_\alpha = 1{,}224$; $\lambda < \lambda_\alpha$. Гипотеза о том, что маятник совершает гармонические колебания, не опровергается.

39.27. $\widetilde{\sigma}^2 = 0{,}1211$; $k = 2$; $\chi^2 = 1{,}629$; $\chi^2_\alpha = 6{,}0$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$. Отклонения не значимы; гипотеза о согласии наблюденных значений с законом χ^2-распределения с числом степеней свободы $k' = 19$ и, следовательно, гипотеза об однородности ряда дисперсий не опровергается. У к а з а н и е. Значения a_j следует расположить в порядке возрастания и разбить на интервалы с тем, чтобы в каждый попало не менее пяти значений a_j.

39.28. $\widetilde{x} = 115{,}3$; $\widetilde{\sigma}_0 = 21{,}43$; $\widetilde{\sigma} = 21{,}23$; $\chi^2_{\text{н}} = 11{,}82$; $k_{\text{н}} = 7$; $\chi^2_\alpha = 14{,}1$; $\chi^2 < \chi^2_\alpha$; $\widetilde{\mu}_3 = 2046$; $\widetilde{\mu}_{40} = 6137 \cdot 10^2$; $\widetilde{\mu}_4 = 5937 \cdot 10^2$; $\widetilde{\mathrm{Sk}} = 0{,}2138$; $\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{x}} = -0{,}0797$. Функция распределения для A-ряда Шарлье:

$$\mathcal{F}(z) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(z) - 0{,}03563\varphi_2(z) - 0{,}00332\varphi_3(z),$$

где $z = \frac{x - 115{,}3}{21{,}23}$; $\chi^2_{\text{ш}} = 8{,}507$; $k_{\text{ш}} = 5$; $\chi^2_\alpha = 14{,}1$; $\chi^2_{\text{ш}} < \chi^2_\alpha$. Гипотезы о согласии наблюдений с законами нормального распределения и распределения, определяемого A-рядом Шарлье, не опровергаются, причем последний не улучшает существенно согласия наблюдений с теоретическим законом распределения.

39.29. $\widetilde{\mu}_3 = 221{,}12$; $\widetilde{\mu}_{40} = 1560 \cdot 10^2$; $\widetilde{\mu}_4 = 1533 \cdot 10^2$; $\widetilde{\mathrm{Sk}} = -0{,}06961$; $\widetilde{\mathcal{E}\mathrm{x}} = 0{,}2836$. Функция распределения для A-ряда Шарлье $\mathcal{F}(z) = 0{,}5 + 0{,}5\Phi(z) + 0{,}01160\varphi_2(z) + 0{,}0118\varphi_3(z)$, где $z = \frac{c-299773{,}85}{14{,}7}$; $\chi^2 = 17{,}58$; $k = 6$; $\chi^2_\alpha = 12{,}6$; $\chi^2 > \chi^2_\alpha$. Отклонения значимы. Гипотеза о согласии наблюдений с законом распределения, определяемым A-рядом Шарлье, опровергается.

39.30. $D_{n_1;n_2} = 0{,}18$; $\lambda = 0{,}90$; $\lambda_\alpha = 1{,}224$; $\lambda < \lambda_\alpha$; гипотеза о принадлежности обеих выборок одной и той же генеральной совокупности не опровергается.

Элементы выборки округлены до 0,01, что приводит к появлению в таблице одинаковых элементов в одной из выборок (для данного x_j). Тем не менее, применение критерия Смирнова допустимо, так как это может исказить значение $D_{n_1;n_2}$ не более, чем на $0{,}02 = \frac{1}{50}$.

39.31. $n = 25$; $m(+) = 22$; $m(-) = 4$; $m_N = 4$; $m_\alpha = 6$; $m_N < m_\alpha$ — гипотеза H_0 отвергается, между свойствами микрометров имеется существенное различие.

39.32. а) $R = 16$; $R_\alpha = 7$; $R > R_\alpha$ — гипотеза H_0 не опровергается; б) $V = 106$; $V_\alpha = 100{,}15$ (по формуле при использовании нормального распределения); $V > V_\alpha$ — гипотеза H_0 не опровергается; в) $X_{\text{в}} = 3{,}71$; $X_\alpha = 4{,}18$; $X_{\text{в}} < X_\alpha$ — гипотеза H_0 не опровергается.

39.33. а) $R = 4$; $R_\alpha = 4{,}2$; $R < R_\alpha$ — гипотеза H_0 опровергается; б) $V = 31$; $V_\alpha = 37$; $V < V_\alpha$ — гипотеза H_0 опровергается; в) $X_{\text{в}} = -4{,}331$; $X_\alpha = 3{,}11$; $X_{\text{в}} < -X_\alpha$ — гипотеза H_0 опровергается.

39.34. $\chi^2 = 20{,}48$; $k = 2$; $\chi^2_\alpha = 6{,}0$; $\chi^2 > \chi^2_\alpha$. Отклонения значимы. Гипотеза о независимости характера размеров от номера партии опровергается. Следует признать, что для второй партии характерно систематическое занижение размеров.

§ 40. Статистика случайных процессов

40.1. Нужно доказать, что если $\widetilde{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt$, то $\mathrm{M}[\widetilde{x}] = \overline{x}$, $\lim\limits_{T\to\infty} \mathrm{D}[\widetilde{x}] = 0$.

40.2. Нет, так как $\lim\limits_{T\to\infty} \mathrm{M}[J(\omega)] = S_x(\omega)$, но $\mathrm{D}[J(\omega)] = S_x^2(\omega)$ и, следовательно, не стремится к нулю при росте T.

40.3. $\mathrm{D}[\widetilde{K}_x(\tau)] = \frac{2}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)[K_x^2(\tau_1)+K_x(\tau_1+\tau)K_x(\tau_1-\tau)]d\tau_1$.

40.4. $\mathrm{M}[\widetilde{K}_1(\tau)] = K(\tau) - \frac{2}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)K(\tau_1)\,d\tau_1$;

$\mathrm{M}[\widetilde{K}_2(\tau)] = K(\tau) - \frac{2}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)K(\tau+\tau_1)\,d\tau_1$.

$D[\widetilde{K}_1(\tau)] = \frac{2}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)[K^2(\tau_1)+K(\tau_1+\tau)\times$ $\times K(\tau_1-\tau)]d\tau_1 + \frac{8}{(T-\tau)^4}\left[\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)K(\tau_1)\,d\tau_1\right]^2 - \frac{4}{(T-\tau)^3}\times$ $\times\int_0^{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\int_0^{T-\tau}K(t_3-t_1)K(t_2-t_1-\tau)\,dt_1\,dt_2\,dt_3;$

$D[\widetilde{K}_2(\tau)] = \frac{2}{(T-\tau)^2}\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)[K^2(\tau_1)+K(\tau_1+\tau)K(\tau_1-\tau)+$ $+K(\tau)K(\tau+\tau_1)+K(\tau)K(\tau_1-\tau_1)]d\tau_1 - \frac{2}{(T-\tau)^3}\int_0^{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\int_0^{T-\tau}[K(t_2-t_1)\times$
$\times$
$\times K(t_3-t_1)+K(t_2-t_1+\tau)K(t_3-t_1-\tau)]\,dt_1\,dt_2\,dt_3 + \frac{2}{(T-\tau)^4}\times$ $\times\left\{\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)\,[\,K\,(\tau_1+\tau\,)+K\,(\tau_1-\tau)\,]\,d\tau_1\right\}^2 + \frac{4}{(T-\tau)^4}\times$ $\times\left\{\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)K(\tau_1)d\tau_1\right\}^2 - \frac{4}{(T-\tau)^4}\left\{\int_0^{T-\tau}(T-\tau-\tau_1)K(\tau+\tau_1)d\tau_1\right\}^2.$

40.5. $D[\widetilde{x}] = \frac{2\sigma_x^2}{\alpha T}\left(1-\frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha T}\right).$

40.6. Сведя задачу к определению оптимальной линейной системы с конечной памятью (см. § 30), получим

$$\widetilde{x}_{\text{оп}} = \frac{\alpha}{\alpha T+2}\left[\int\limits_0^T x(t)\,dt + \frac{1}{\alpha}\,x(0) + \frac{1}{\alpha}\,x(T)\right].$$

$$\frac{D(\widetilde{x}_{\text{от}})}{D(\widetilde{x})} = \left(\frac{\alpha T}{2+\alpha T}\right)^2\frac{2+\alpha T-e^{-\alpha T}}{\alpha T-1+e^{-\alpha T}}.$$

Дисперсия уменьшится на 20,5%; 10,7%; 7,5%.

40.7. $\widetilde{X} = \frac{1}{a_nT+2a_{n-1}}\left\{a_n\int_0^T x(t)\,dt + \sum_{\nu=0}^{n-1}a_{n-\nu-1}[(-1)^\nu x^{(\nu)}(0) + x^{(\nu)}(T)]\right\}.$

40.8. $D[\widetilde{S}_x(\omega)] = \frac{1}{2\pi^2T^2}\int_0^T(T-t)\left\{\int_0^T[K_x(t+\eta)+K_x(t-\eta)]\times\sin(T-\eta)\omega\,d\eta + \left|\int_{-T}^T e^{-i\tau\omega}K_x(t-\tau)\,d\tau\right|^2\right\}dt.$

40.9. σ_y уменьшится на 2%.

40.10. τ_y уменьшится на 3%.

40.11. $D[\widetilde{K}_\theta(0)] = 22$ град^4; $D[\widetilde{K}_\theta(3)] = 2{,}8$ град^4.

40.12. Значение первого нуля функции $\widetilde{K}(\tau)$ равно: а) 2,20 сек; б) 2,30 сек.

40.13. 1) $\Delta_{\text{опт}} = 4{,}96$; 5,20; 3,12 сек;

2) $\varepsilon \approx \frac{B\Delta_{\text{опт}}}{T^2}\sigma^2 = 2{,}8\cdot10^{-3}\sigma^2;\ 1{,}12\cdot10^{-3}\sigma^2;\ 1{,}20\cdot10^{-3}\sigma^2;$

3) $\Delta \approx \frac{b+\sqrt{b^2+ac}}{a} = \Delta_{\text{опт}} + \sqrt{\Delta_{\text{опт}}^2+\frac{c}{a}},\ \ c = \delta\cdot T\left(1-\frac{1-e^{-\alpha T}}{\alpha T}\right).$

40.14. 1) 22,0; 26,2; 45,3 сек;

2) $\varepsilon = 1{,}16\cdot10^{-2}\sigma^2;\ 9{,}1\cdot10^{-2}\sigma^2;\ 3{,}2\cdot10^{-2}\sigma^2;$

3) $\Delta \approx \Delta_{\text{опт}} + \sqrt{\Delta_{\text{опт}}^2+\frac{c}{a}},\ \ c = \frac{2\delta}{T_0^2}\left\{(2T_0-3)+(T_0+3)e^{-T_0}\right\},\ T_0 = \alpha T.$

40.15. $M[\widetilde{K}_z(\tau)] - K_z(\tau) = -\frac{d^2K_z(\tau)}{d\tau^2}K_x(\tau) + K_y(\tau).$

40.16. $D[\widetilde{K}_\theta(\tau)] = \frac{a^2}{2(T-\tau)}\left\{\frac{2\alpha^2+\beta^2}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)} + e^{-2\alpha\tau}\left[2\tau\cos 2\beta\tau + \frac{1}{\beta}\sin 2\beta\tau + \frac{1}{\alpha}\cos 2\beta\tau + \frac{a\cos 2\beta\tau - \beta\sin 2\beta\tau}{\alpha^2+\beta^2}\right]\right\}$;

$D[\widetilde{K}_\theta(0)] = 5{,}82$ град^4; $D[\widetilde{K}_\theta(2{,}09)] = 5{,}35$ град^4; $D[\widetilde{K}_\theta(4{,}18)] = 4{,}80$ град^4; $D[\widetilde{K}_\theta(16{,}72)] = 2{,}92$ град^4, а соответствующие средние квадратические отклонения равны 2,41; 2,32; 2,19 и 1,71 град^2.

40.17. При росте t отношение $\frac{t_1}{t}$ сходится по вероятности к вероятности p совпадения знаков ординат случайных функций $X(t)$ и $X(t+\tau)$, связанной для нормального процесса с нормированной корреляционной функцией $k(\tau)$ соотношением $k(\tau) = \cos\pi(1-p)$, которое может быть доказано путем интегрирования двумерного нормального закона распределения ординат случайной функции в соответствующих пределах.

40.18. Обозначая $Z(t) = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{X(t)X(t+\tau)}{|X(t)X(t+\tau)|}\right]$, p — вероятность совпадения знаков $X(t)$ и $X(t+\tau)$ имеем $\overline{z} = p$; $\widetilde{k}(\tau) = \cos\pi(1-\widetilde{z}) \approx \pi\cos(1-\overline{z}) + \pi(\widetilde{z}-\overline{z})\sin(1-\overline{z})$.

Следовательно, $D[\widetilde{k}(\tau)] \approx \pi^2 D[\widetilde{z}]\sin^2\pi(1-p) = \pi^2[1-k_x^2(\tau)]D[\widetilde{z}]$;

$D[\widetilde{z}] = \frac{2}{T^2}\int_0^T (T-\tau_1)K_z(\tau_1)\,d\tau_1$;

$K_z(\tau) = \left\{\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty + \int_0^\infty\int_0^\infty\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0 + \int_{-\infty}^0\int_{-\infty}^0\int_0^\infty\int_0^\infty\right\} f(x_1,x_2,x_3,x_4)\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4 - \overline{z}^2$, где $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ — плотность вероятности системы нормальных величин $X(t_1)$, $X(t_1+\tau)$, $X(t_2)$, $X(t_2+\tau)$.

40.19. $\widetilde{K}_x(\tau) = g_1\widetilde{K}_1(\tau) + g_2\widetilde{K}_2(\tau) + g_3\widetilde{K}_3(\tau)$, где приближенно

$$g_j = \frac{\frac{1}{\sigma_j^2}}{\frac{1}{\sigma_1^2}+\frac{1}{\sigma_2^2}+\frac{1}{\sigma_3^2}} \quad (j=1,2,3); \quad \sigma_j^2 = \frac{2}{T_j^2}\int_0^{T_j}(T_j-\tau)\widetilde{K}_j(\tau)\,d\tau.$$

При T_j, значительно превосходящих время затухания $K_x(\tau)$, приближенно можно считать $\sigma_j^2 = \frac{2}{T_j}\left(a - \frac{b}{T_j}\right)$, где $a = \int_0^\infty \widetilde{K}(\tau)\,d\tau$, $b = \int_0^\infty \tau\widetilde{K}(\tau)\,d\tau$, а за значение $\widetilde{K}(\tau)$ можно принять оценку $K(\tau)$, полученную по любой из реализаций.

40.20. $D[\widetilde{K}_x(\tau)] = \frac{2}{(m-l)^2}\sum_{s=1}^{m-l-1}[\widetilde{K}_x^2(s\Delta) + \widetilde{K}_x(s\Delta + l\Delta)\times\widetilde{K}_x(s\Delta - l\Delta)](m-l-s) + \frac{1}{m-l}[\widetilde{K}_x^2(0) + \widetilde{K}_x^2(l\Delta)]$.

40.21. На 9%.

40.22. $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T K_x(\tau)\,d\tau$; $a_j = \frac{2}{T}\int_0^T K_x(\tau)\cos\frac{2\pi j\tau}{T}\,d\tau$, $j>0$;

$\Delta_{\text{опт}} = \int_0^T K_x^2(\tau)\,d\tau - Ta_0^2 - \frac{T}{2}\sum_{j=1}^m a_j^2$.

40.23. Так как $\widetilde{j} = \frac{1}{T}\int_0^T j(t)\,dt$, то $D[\widetilde{j}] = \frac{2a}{\alpha T}\left[1 - \frac{1}{\alpha T}(1-e^{-\alpha T})\right] = \sigma_j^2 = (0{,}86\cdot 10^{-8})^2A^2$.

$\sigma_j = 0{,}86\cdot 10^{-8}A$.

40.24. $\varepsilon = \frac{\sigma_0^2}{n-m+1}[2K(0) + \sigma_0^2(1+\delta_{0,m}] + \frac{2\sigma_0^2(n-2m+1)}{(n-m+1)^2}K(2m\Delta)$.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ И ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Учебное пособие

Под общей редакцией
А. А. СВЕШНИКОВА

Издание пятое,
стереотипное

Зав. редакцией физико-математической
литературы *О. Ю. Краснокутская*

ЛР № 065466 от 21.10.97
Гигиенический сертификат 78.01.07.953.П.007216.04.10
от 21.04.2010 г., выдан ЦГСЭН в СПб

Издательство «ЛАНЬ»
lan@lanbook.ru; www.lanbook.com
192029, Санкт-Петербург, Общественный пер., 5.
Тел./факс: (812)412-29-35, 412-05-97, 412-92-72.
Бесплатный звонок по России: 8-800-700-40-71

Подписано в печать 29.01.13.
Бумага офсетная. Гарнитура Литературная. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Печать офсетная. Усл. п. л. 23,52. Тираж 1000 экз.

Заказ № .

Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленных диапозитивов
в ОАО «Издательско-полиграфическое предприятие «Правда Севера».
163002, г. Архангельск, пр. Новгородский, д. 32.
Тел./факс (8182) 64-14-54; www.ippps.ru