

A3. Быстрее Штрассена!

Демченко Георгий Павлович , БПИ-235

Под "асимптотически более эффективный", будет пониматься верхняя оценка, т.е $O(f(n))$

1. $O(f(n))$ Штрассена

$$T_{\text{sht}}(n) = 7 \cdot T_{\text{sht}}\left(\frac{n}{2}\right) + \Theta(n^2) = 7 \cdot T_{\text{sht}}\left(\frac{n}{2}\right) + O(n^2)$$

Тогда, согласно мастер-теореме

$$\log_a(b) = \log_2(7) > 2 = k$$

$$\Rightarrow T_{\text{sht}}(n) = O(n^{\log_2(7)})$$

$$f_{\text{sht}}(n) = n^{\log_2(7)}$$

2. $O(f(n))$ алгоритма MULT

$$T_{\text{mult}}(n) = a \cdot T_{\text{mult}}\left(\frac{n}{4}\right) + \Theta(n^2) = a \cdot T_{\text{mult}}\left(\frac{n}{4}\right) + O(n^2)$$

Так как под a подразумевается "количество решаемых подзадач — количество блоков-подматриц размерности $\frac{n}{4} \times \frac{n}{4}$.", то будем считать, что $a \in \mathbb{N}$, кол-во блоков-подматриц и решаемых подзадач (рекурсивных умножений) не может быть нецелое количество

Тогда, согласно мастер-теореме

$$\log_b(a) = \log_4 a$$

$$k = 2$$

$$1. k = 2 > \log_4 a$$

$$a \in [1, 15]$$

$$\Rightarrow T_{\text{mult}}(n) = O(n^2)$$

$$\Rightarrow f_{\text{mult}}(n) = n^2 < n^{\log_2(7)} = f_{\text{sht}}(n) \quad \forall n > 1 \text{ (опустим константы)}$$

$$a \in [1, 15] - \text{Подходит}$$

$$2. k = 2 = \log_4 a$$

$$a = 16$$

$$\Rightarrow T_{\text{mult}}(n) = O(n^2 \cdot \log_2(n))$$

$$\Rightarrow f_{\text{mult}}(n) = n^2 \cdot \log_2(n) < n^{\log_2(7)} = f_{\text{sht}}(n) \quad \forall n > 1 \text{ (опустим константы)}$$

$$a = 16 - \text{Подходит}$$

$$3. k = 2 < \log_4 a$$

$$a \geq 17$$

$$\Rightarrow T_{\text{mult}}(n) = O(n^{\log_4(a)})$$

$$f_{\text{mult}}(n) = n^{\log_4(a)} <? n^{\log_2(7)} = f_{\text{shl}}(n) \text{ (опустим константы)}$$

$$\log_4(a) < \log_2(7)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \log_2(a) < \log_2(7)$$

$$\log_2(a) < 2 \cdot \log_2(7)$$

$$\log_2(a) < \log_2(49)$$

$a < 49$ (не ограничиваем $a \leq 32$ т.к. количество произведенных рекурсивных умножений может быть в теории больше чем количество возможных подматриц подобного размера (максимум 32))

$$a \in [17, 48] - \text{Подходит}$$

$$\text{Ответ } a \in \mathbb{N} \wedge a \in [1, 48]$$