

## A2. Применение мастер-теоремы

Демченко Георгий Павлович , БПИ-235

$$\forall T(n) : n = 1 \Rightarrow O(1)$$

$$1. T(n) = O(g(n))$$

1.

$$\bullet T(n) = 7 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2 = 7 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + O(n^2)$$

$$a = 7 \geq 1$$

$$b = 3 > 1$$

$$n^k = n^2, k = 1 > 0$$

$$f(n) = 1 - \text{константа}$$

$$\log_b(a) = \log_3(7) < 2 = k$$

$$\Rightarrow T(n) = O(n^2)$$

2.

$$\bullet T(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \log_2(n) = 4 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + O(n)$$

$$a = 4 \geq 1$$

$$b = 2 > 1$$

$$n^k = n^1, k = 1 > 0$$

$$f(n) = 1 - \text{константа}$$

$$\log_b(a) = \log_2(4) = 2 > 1 = k$$

$$\Rightarrow T(n) = O(n^2)$$

3.

$$\bullet T(n) = \frac{1}{2} \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n}$$

$$a = \frac{1}{2} < 1$$

$\Rightarrow$  Применение мастер-теоремы невозможно

4.

$$\bullet T(n) = 3 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + \frac{n}{2} = 3 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + O(n)$$

$$a = 3 \geq 1$$

$$b = 3 > 1$$

$$n^k = n^1, k = 1 > 0$$

$$f(n) = 1 - \text{константа}$$

$$\log_b(a) = \log_3(3) = 1 = k$$

$$\Rightarrow T(n) = O(n \cdot \log_2(n))$$

5.

$$\bullet T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n \cdot \log_2(n) = T(n-1) + T(n-2) + O(n \cdot \log_2(n))$$

$\Rightarrow$  Применение мастер-теоремы невозможно в виду неявной глубины рекурсии, т.е. разных  $b$

## 2. $T(n) = O(f(n))$ для неразрешимых мастер-теоремой

- Под методом итерации понят метод дерева рекурсии.

$$1. T(n) = \frac{1}{2} \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{1}{n}$$

$m = \log_2(n)$  - глубина рекурсии

$\left(\frac{1}{2}\right)^i$  - количество подзадач на  $i$ -ом уровне рекурсии (если так вообще можно сказать при данном значении)

$$\frac{1}{n} = \frac{2^i}{2^i} - \text{затраты на подзадачи на } i\text{-ом уровне рекурсии}$$

$$\Rightarrow T(n) = \sum_{i=0}^{\log_2(n)} \left(\frac{1}{2^i} \cdot \frac{2^i}{n}\right) = \sum_{i=0}^{\log_2(n)} \left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{\log_2(n)} (1) = \frac{1}{n} \cdot (\log_2(n) + 1) = \frac{\log_2(n)}{n} + \frac{1}{n} = O\left(\frac{\log_2(n)}{n}\right)$$

$$\Rightarrow T(n) = O\left(\frac{\log_2(n)}{n}\right)$$

$$2. T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n \cdot \log_2(n)$$

$$\Rightarrow T(n) = T(n-1) + T(n-2) + n \cdot \log_2(n) \leq 2 \cdot T(n-1) + n \cdot \log_2(n)$$

**Так как в данном случае имеем максимальную глубину рекурсии и наибольшие затраты на подзадачи на уровне рекурсии**

**Предположим, что  $T(n) = O(2^n \cdot n \cdot \log_2(n))$**

$$\Rightarrow \exists d_1 \in \mathbb{R}^+ : \forall N > N_0 : T(n) \leq d_1 \cdot 2^n \cdot n \cdot \log_2(n)$$

Пусть  $N_0 = 3$

$$T(n) = 2 \cdot T(n-1) + n \cdot \log_2(n) \leq 2 \cdot d_1 \cdot 2^{n-1} \cdot (n-1) \cdot \log_2(n-1) + n \cdot \log_2(n) \leq d_1 \cdot 2^n \cdot n \cdot \log_2(n)$$

$$d_1 \cdot (2^n \cdot n \cdot \log_2(n) - 2^n \cdot (n-1) \cdot \log_2(n-1)) \geq n \cdot \log_2(n)$$

$$d_1 \cdot 2^n (n \cdot \log_2(n) - (n-1) \cdot \log_2(n-1)) \geq n \cdot \log_2(n)$$

$$\forall \mathbb{N} > \mathbb{N}_0 (= 3)$$

$$d_1 \cdot 2^n (n \cdot \log_2(n) - n \cdot \log_2(n-1) + \log_2(n-1)) \geq d_1 \cdot 2^n (n \cdot \log_2(n) - n \cdot \log_2(n-1)) \geq n \cdot \log_2(n)$$

$$\Rightarrow d_1 \cdot 2^n \cdot n \cdot \log_2\left(\frac{n}{n-1}\right) \geq n \cdot \log_2(n)$$

$$d_1 \geq \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\log_2(n)}{\log_2\left(\frac{n}{n-1}\right)}$$

$$d_1 \geq 1 \in \mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow T(n) = O(2^n \cdot n \cdot \log_2(n))$$