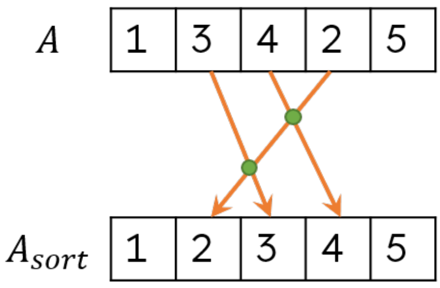
Задача A4. Значительные инверсии

Рассмотрим механизм подсчета так называемой «степени упорядоченности» некоторого целочисленного массива $A = [a_1, a_2, a_3, ..., a_n]$, заполненного уникальными значениями.

Элементы a_i и a_j массива A назовем *инвертированными*, если $i < j$, но $a_i > a_j$. Например, в массиве $A = [1, 3, 4, 2, 5]$ достаточно выполнить две *инверсии*, а именно $3 \leftrightarrow 2$ и $4 \leftrightarrow 2$ (см. количество пересечений стрелок на рисунке ниже), чтобы получить отсортированный массив $A' = [1, 2, 3, 4, 5]$.



1. <u>6 балла</u>
   Разработайте DaC-алгоритм `CINV`, временная сложность которого должна соответствовать $O(n \cdot logn)$, для подсчета степени упорядоченности массива путем вычисления количества необходимых перестановок. Описание алгоритма представьте в любом удобном формате. Опишите суть шагов *DIVIDE*, *CONQUER* и *COMBINE*, а также представьте рекуррентное соотношение для $T(n)$ и обоснуйте соответствие требуемой асимптотической верхней границе временной сложности. Проанализируйте, возвращает ли разработанный вами алгоритм `CINV` минимальное количество необходимых инверсий.

2. <u>3 балла</u>
   Элементы a_i и a_j массива A назовем *значительно* инвертированными, если $i < j$, но $a_i > 2 \cdot a_j$. Какие изменения и доработки необходимо внести в алгоритм `CINV`, разработанный на предыдущем шаге, чтобы в качестве степени упорядоченности велся подсчет количества пар значительно инвертированных элементов? Например, в массиве $A = [1, 3, 4, 2, 5]$ нет значительно переставленных элементов, а в массиве $A = [5, 3, 2, 4, 1]$ всего 4 пары значительно переставленных элементов: $5 \leftrightarrow 1$, $5 \leftrightarrow 2$, $4 \leftrightarrow 1$ и $3 \leftrightarrow 1$. Асимптотическая верхняя граница временной сложности измененного алгоритма должна остаться *неизменной*.