Задача A1. Задача трёх кругов

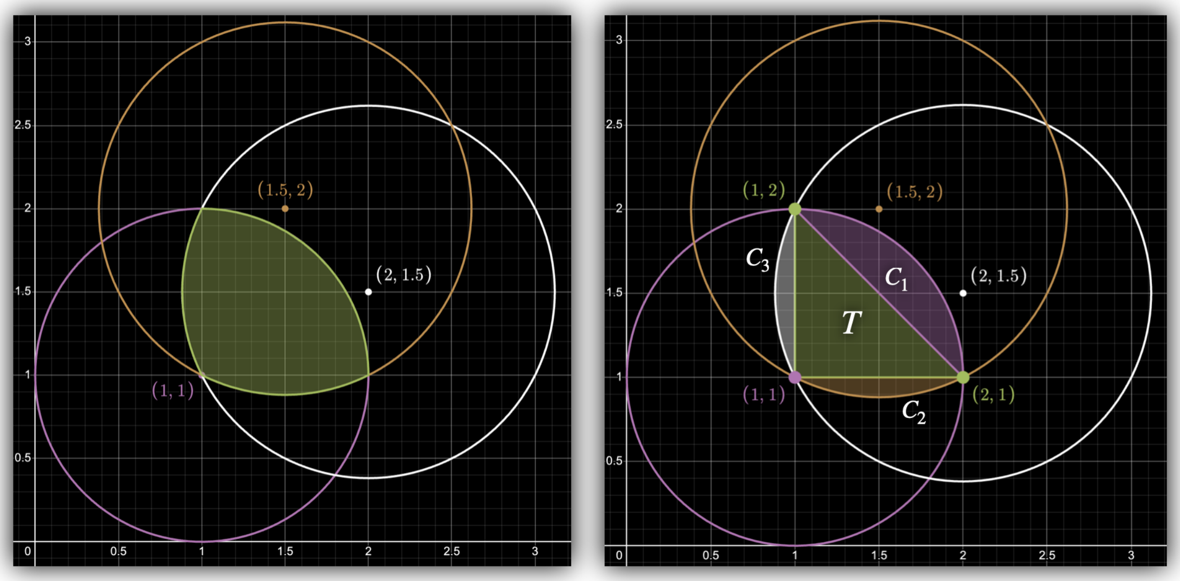
Среди множества возможных применений стохастического метода Монте-Карло особенно выделяется приближенная оценка площадей самых разных геометрических фигур, к которым в том числе относятся фигуры, образуемые пересечением кругов.

Постановка задачи

Нам даны три окружности:

- с центром в точке $\mathbf{(1,\ 1)}$ и радиусом $\mathbf{1}$,
- с центром в точке $\mathbf{(1.5,\ 2)}$ и радиусом $\boldsymbol{\sqrt{5}\,/\,2}$ и
- с центром в точке $\mathbf{(2,\ 1.5)}$ и радиусом $\boldsymbol{\sqrt{5}\,/\,2}$.

В рамках этой задачи требуется вычислить приближенное значение площади фигуры, образованной в результате пересечения соответствующих кругов (см. зеленую область на левом рисунке ниже). Кроме того, необходимо оценить, насколько приближенная оценка площади *отклоняется* от ее точного значения в зависимости от параметров работы алгоритма Монте-Карло.



Точное вычисление площади пересечения кругов

Вывод общей формулы для вычисления площади пересечения кругов — весьма сложная задача, поэтому для удобства вычислений мы разобьем целевую фигуру на прямоугольный треугольник и три круговых *сегмента*, как показано выше на правом рисунке, а именно на:

- прямоугольный треугольник T с вершинами в точках $\mathbf{(1,\ 1)}$, $\mathbf{(1,\ 2)}$ и $\mathbf{(2,\ 1)}$;
- сегмент C_1, ограниченный гипотенузой T и кругом с центром в $\mathbf{(1,\ 1)}$;
- сегменты C_2 и C_3, ограниченные катетами T и кругами с центрами в $\mathbf{(1.5,\ 2)}$ и $\mathbf{(2,\ 1.5)}$.

Площадь кругового сегмента равна $\dfrac{\theta - \sin(\theta)}{2} \cdot r^2$, где r — радиус, а θ — величина соответствующего центрального угла (в радианах).

Нетрудно заметить, что площади круговых сегментов C_2 и C_3 совпадают. Поэтому общая площадь фигуры, образованной пересечением заданных кругов, составит $S = S_T + S_{C_1} + 2S_{C_2} = S_T + S_{C_1} + 2S_{C_3}$. Рассмотрим вычисление площади каждого компонента S в отдельности:

1. Площадь прямоугольного треугольника T с единичными катетами равна 0.5.

2. Центральный угол, который образует сегмент C_1, составляет $90°$ — $\pi\,/\,2$ радиан. Тогда: $S_{C_1} = \dfrac{\pi\,/\,2 - \sin(\pi\,/\,2)}{2} \cdot 1^2 = 0.25 \cdot \pi - 0.5.$

3. Синус центрального угла, который образует сегмент C_2 (C_3), составляет 0.8. Его можно найти по теореме косинусов для треугольника с вершинами **(1, 1)**, **(1.5, 2)** и **(2, 1)**. Тогда: $2 \cdot S_{C_2} = 2 \cdot S_{C_3} = 2 \cdot \dfrac{\arcsin(0.8) - 0.8}{2} \cdot \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = 1.25 \cdot \arcsin(0.8) - 1.$

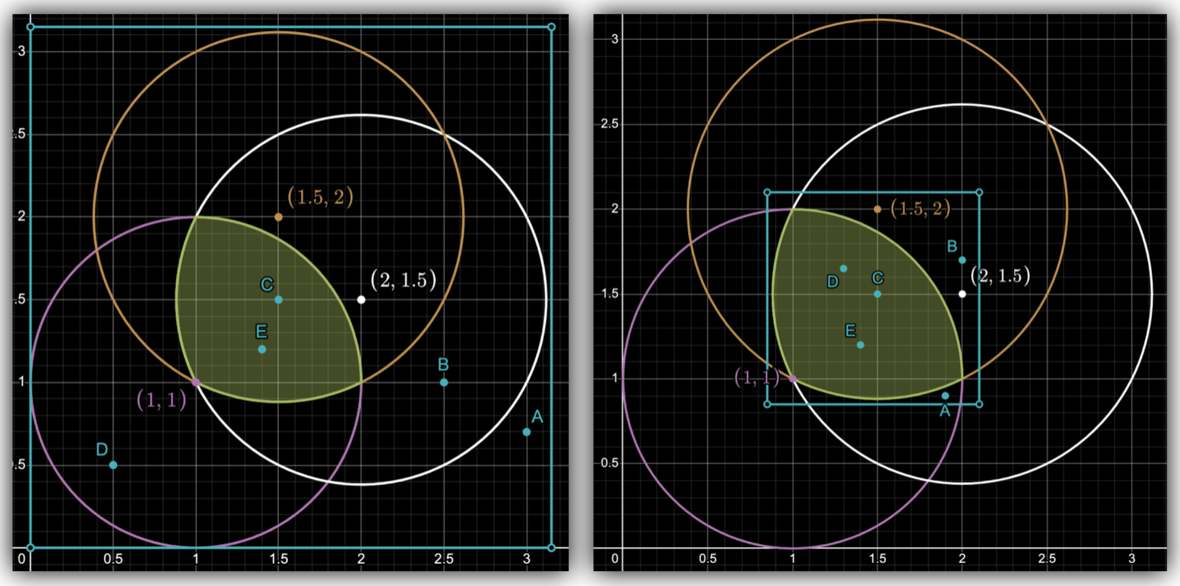
Итак, точная площадь фигуры пересечения трех заданных окружностей составляет:

$$\boxed{S = S_T + S_{C_1} + 2S_{C_2} = 0.5 + 0.25 \cdot \pi - 0.5 + 1.25 \cdot \arcsin(0.8) - 1 = 0.25 \cdot \pi + 1.25 \cdot \arcsin(0.8) - 1}$$

Приближенное вычисление площади пересечения кругов

Вычислить оценку площади фигуры, образованной пересечением трех заданных кругов, с помощью метода Монте-Карло можно как минимум двумя способами:

- путем случайной генерации точек в *широкой* прямоугольной области, которая охватывает все три круга полностью (см. на левом рисунке ниже) и
- путем случайной генерации точек в *узкой* прямоугольной области, которая более «плотно» ограничивает пересечение трех кругов (см. на правом рисунке ниже).



В обоих случаях, приближенная оценка отношения площади S целевой фигуры пересечения трех кругов к площади S_{rec} прямоугольной области составит $S\,/\,S_{rec} \approx M\,/\,N$, где N — общее число сгенерированных точек в рассматриваемой прямоугольной области, а M — число точек, которые попадают внутрь и на границу фигуры пересечения трех кругов. Таким образом, приближенная оценка площади пересечения трех кругов составит $\widetilde{S} = (M\,/\,N) \cdot S_{rec}$.

1. Реализуйте алгоритм Монте-Карло на основе случайной генерации точек в заданной прямоугольной области для приближенного вычисления площади пересечения трех кругов, заданных координатами центров и радиусами.

2. Проведите экспериментальные замеры точности вычисления площади фигуры, *рассмотренной в задаче*, в зависимости от масштаба прямоугольной области для случайной генерации точек, а также от количества случайно сгенерированных точек N, которое изменяется от **100** до **100000** с шагом **500**. Представьте результаты проведенных экспериментов в следующем виде:

   - график(-и) первого типа, которые отображают, как меняется приближенное значение площади в зависимости от указанных параметров алгоритма;
   - график(-и) второго типа, которые отображают, как меняется величина относительного отклонения приближенного значения площади от ее точной оценки в зависимости от указанных параметров алгоритма.

3. Опишите полученные вами результаты и сформулируйте содержательные выводы.

Язык программирования, который должен использоваться при реализации алгоритмов, — `C++`. Ограничений на используемые средства обработки и визуализации эмпирических данных нет. Помимо графиков и пояснений, приложите:

1. ID своей посылки по задаче `A1i` в системе `CodeForces` с реализацией алгоритма Монте-Карло.
2. Ссылку на публичный репозиторий с исходными данными, полученными в результате экспериментальных замеров.

Система оценки

1. 5 баллов Реализация алгоритма Монте-Карло для приближенного вычисления площади фигуры, образованной пересечением трех кругов.
2. 6 баллов Представление экспериментальных результатов работы алгоритма в зависимости от параметров его работы.
3. 4 балла Сравнительный анализ полученных эмпирических данных.

Обратите внимание, что загрузка реализации алгоритма в задачу `A1i` является *необходимым* условием для получения оценки по другим критериям.