А3. Точная функция $T(n)$ и порядок её роста

Демченко Георгий Павлович , БПИ-235

NESTED_LOOPS.cpp

```
int x = 100; //1
int y = 0;   //2

for (size_t outer = 1; outer <= n; outer *= 2) {   //3
    x = x + outer;                                 //4
    for (size_t inner = 2; inner < n; ++inner) {   //5
        if (x > y / inner) {                       //6
            y = y + outer / inner                  //7
        } else {
            --y;                                   //8
        }
    }
}
```

1. Функция временной сложности $T(n)$

- Как требует условие, считаем каждую арифметическую операцию, присваивание и сравнение отдельными элементарными операциями
- Считаем что $n = 2^k$ для упрощения вычислений $\Rightarrow$ иначе меняем $\log_2(n) = k$ на $\lfloor \log_2(n) \rfloor$
- Будем нумеровать каждую итерацию **outer** как i-ую итерацию, всего будет $\log_2(n) + 1 = k + 1$ итераций (не сравнений), тогда $i \in [0; k] \Rightarrow outer = 2^i$ на каждой i-ой итерации.
- $\Rightarrow x_i = 100 + \sum_{j=0}^{i}(2^j) = 100 + 2^{i+1} - 1 = 99 + 2^{i+1}$ на каждой i-ой итерации
- Зная x_i на каждой i-ой итерации , посчитать значение $y_{i_{inner}}$ для каждой i-ой итерации и для каждой $inner$ итерации внутри неё и вывести точную формулу зависимости $y_{i_{inner}}$ практически невозможно ввиду неочевидных условий ветвления и неоднозначно меняющегося $y_{i_{inner}}$.
- Поэтому будем считать что при i-ой итерации было $m_i \in [0; n-2]$ удволетворений условию ветвления и соответственно $(n - 2 - m_i)$ неудволетворений внутри цикла по **inner**

Номер строки	**Количество итераций**	**Затраты**
1	1	c_1 - присваивание
2	1	c_2 - присваивание
3	1	c_3 - присваивание (outer = 1)
3	$\log_2(n) + 2 = k + 2$	c_4 - сравнение (outer <= n)
3	$\log_2(n) + 1 = k + 1$	c_5 - арифметика (*= 2)
4	$\log_2(n) + 1 = k + 1$	$c_6 + c_7$ - присваивание и арифметика
5	$\log_2(n) + 1 = k + 1$	c_8 - присваивание (inner = 2)
5	$(n-1) \cdot (\log_2(n) + 1) = (n-1) \cdot (k+1)$	c_9 - сравнение
5	$(n-2) \cdot (\log_2(n) + 1) = (n-2) \cdot (k+1)$	c_{10} - инкремент
6	$(n-2) \cdot (\log_2(n) + 1) = (n-2) \cdot (k+1)$	$c_{11} + c_{12}$ - сравнение и арифметика (деление)
7	$\sum_{i=0}^{k}(m_i)$	$c_{13} + c_{14} + c_{15}$ - присваивание и 2 арифметические операции
8	$\sum_{i=0}^{k}(n - 2 - m_i)$	c_{16} - декремент

При $n = 2^k \Rightarrow \log_2(n) = k$

$T(n) = (c_1 + c_2 + c_3) + (k+2) \cdot c_4 + (k+1)(c_5 + c_6 + c_7 + c_8) + (n-1)(k+1) \cdot c_9 + (n-2)(k+1)(c_{10} + c_{11} + c_{12})$

$+ \sum_{i=0}^{k} (m_i) \cdot (c_{13} + c_{14} + c_{15}) + \sum_{i=0}^{k} (n - 2 - m_i) \cdot c_{16}$

$= nk(c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12}) + n(c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12}) + k(c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 - c_9 - 2c_{10} - 2c_{11} - 2c_{12}) + \sum_{i=0}^{k} (m_i) \cdot (c_{13} + c_{14} + c_{15})$

$+ \sum_{i=0}^{k} (n - 2 - m_i) \cdot c_{16} + (c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 - c_9 - 2c_{10} - 2c_{11} - 2c_{12})$

Произведем замены для красивого вида:

- $(c_9 + c_{10} + c_{11} + c_{12}) = c_{17}$
- $(c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 - c_9 - 2c_{10} - 2c_{11} - 2c_{12}) = c_{18}$
- $(c_{13} + c_{14} + c_{15}) = c_{19}$
- $(c_1 + c_2 + c_3 + 2c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 - c_9 - 2c_{10} - 2c_{11} - 2c_{12}) = c_{20}$

$\Rightarrow T(n) = nk \cdot c_{17} + n \cdot c_{17} + k \cdot c_{18} + \sum_{i=0}^{k} (m_i) \cdot c_{19} + \sum_{i=0}^{k} (n - 2 - m_i) \cdot c_{16} + c_{20}$

Для более точной оценки будем считать что m_i постоянная (усредним) для каждой i-ой итерации и равна $m_i = \frac{n-2}{2}$, тогда $(n - 2 - m_i) = \frac{n-2}{2}$

- $\sum_{i=0}^{k} (m_i) \cdot c_{19} \le (k+1)(n-2) \cdot c_{19} = \Theta(kn)$
- $\sum_{i=0}^{k} (n - 2 - m_i) \cdot c_{16} \le (k+1)(n-2) \cdot c_{16} = \Theta(kn)$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k} (m_i) \cdot c_{19} = (k+1)(\frac{n-2}{2}) \cdot c_{19} = kn \cdot \frac{c_{19}}{2} - k \cdot c_{19} + n \cdot \frac{c_{19}}{2} - c_{19}$

$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k} (n - 2 - m_i) \cdot c_{16} = (k+1)(\frac{n-2}{2}) \cdot c_{16} = kn \cdot \frac{c_{16}}{2} - k \cdot c_{16} + n \cdot \frac{c_{16}}{2} - c_{16}$

Итого:

$\Rightarrow T(n) = nk \cdot (c_{17} + \frac{c_{19}}{2} + \frac{c_{16}}{2}) + n \cdot (c_{17} + \frac{c_{19}}{2} + \frac{c_{16}}{2}) + k \cdot (c_{18} - c_{16} - c_{19}) + (c_{20} - c_{16} - c_{19})$

Произведем очередные замены для красивого вида:

- $(c_{17} + \frac{c_{19}}{2} + \frac{c_{16}}{2}) = c_{21}$
- $(c_{18} - c_{16} - c_{19}) = c_{22}$
- $(c_{20} - c_{16} - c_{19}) = c_{23}$

$\Rightarrow T(n) = nk \cdot c_{21} + n \cdot c_{21} + k \cdot c_{22} + c_{23}$

При $n \ne 2^k \Rightarrow \lfloor \log_2(n) \rfloor$

$T(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor \cdot n \cdot c_{17} + n \cdot c_{17} + \lfloor \log_2(n) \rfloor \cdot c_{18} + \sum_{i=0}^{k} (m_i) \cdot c_{19} + \sum_{i=0}^{k} (n - 2 - m_i) \cdot c_{16} + c_{20}$

Усредняя m_i

$T(n) = \lfloor \log_2(n) \rfloor \cdot n \cdot c_{21} + n \cdot c_{21} + \lfloor \log_2(n) \rfloor \cdot c_{22} + c_{23}$

2. $T(n) = \Theta(f(n))$

$\cdot\ f(n) = \log_2(n) \cdot n$

$\Rightarrow \exists\ c_{100}, c_{200} \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbb{N} > N_0 : c_{100} \cdot \log_2(n) \cdot n \le \lfloor \log_2(n) \rfloor \cdot n \cdot c_{21} + n \cdot c_{21} + \lfloor \log_2(n) \rfloor \cdot c_{22} + c_{23} \le c_{200} \cdot \log_2(n) \cdot n$

Для каждого из ограничений (≤ и ≥) можем взять максимум (с точки зрения элементарных операций) и минимум функции $T(n)$, взяв в качестве $m_i : n - 2$ или 0 соответсвенно (т.к $c_{19} = c_{13} + c_{14} + c_{15}$ - 3 операции , c_{16} - 1 операция), но в этом нет большого смысла , тк всё что поменяется - это элементарные константы c_n в выражении $T(n)$ (чуть больше или чуть меньше по своему количеству), поэтому будем работать с версией усредненной m_i

- Пусть $N_0 = 1$

Ограничение сверху

- Для точности ограничения сверху раскроем $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ как $\log_2(n)$

$\Rightarrow \log_2(n) \cdot n \cdot c_{21} + n \cdot c_{21} + \log_2(n) \cdot c_{22} + c_{23} \leq c_{200} \cdot \log_2(n) \cdot n$

$c_{200} \geq c_{21} + \frac{c_{21}}{\log_2(n)} + \frac{c_{22}}{n} + \frac{c_{23}}{n\log_2(n)}$ $\forall \mathbb{N} \geq 2$

$\Rightarrow c_{200} \geq (c_{21} + c_{21} + \frac{c_{22}}{2} + \frac{c_{23}}{2}) + 1 \in \mathbb{R}^+$

Ограничение снизу

- Для точности ограничения снизу раскроем $\lfloor \log_2(n) \rfloor$ как $\log_2(n) - 1$

$\Rightarrow c_{100} \cdot \log_2(n) \cdot n \leq (\log_2(n) - 1) \cdot n \cdot c_{21} + n \cdot c_{21} + (\log_2(n) - 1) \cdot c_{22} + c_{23} = \log_2(n) \cdot n \cdot c_{21} + \log_2(n) \cdot c_{22} + (c_{23} - c_{22})$

$c_{100} \leq c_{21} + \frac{c_{22}}{n} + \frac{c_{23} - c_{22}}{n\log_2(n)}$ $\forall \mathbb{N} \geq 2$

$\Rightarrow c_{100} \leq c_{21} \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n \cdot \log_2(n))$