A1. Временная сложность рекурсии

Демченко Георгий Павлович , БПИ-235

algorithm1

```
1  algorithm1(A, n)
2      if n <= 20
3          return A[n]
4      x = algorithm1(A, n - 5)
5
6      for i = 1 to ⌊n / 2⌋
7          for j = 1 to ⌊n / 2⌋
8              A[i]= A[i] - A[j]
9      x = x + algorithm1(A, n - 8)
10
11     return x
```

algorithm2

```
algorithm2(A, n):
    if n <= 50
        return A[n]
    x = algorithm2(A, ⌊n / 4⌋)

    for i = 1 to ⌊n / 3⌋
      A[i] = A[n - i] - A[i]

    x = x + algorithm2(A, ⌊n / 4⌋)

    return x
```

1. Временная сложность алгоритмов

Под "to m" будем воспринимать $\leq m$

"Предполагается, что все арифметические операции выполняются за постоянное время" - будем считать, что все арифм. операции выполняются за c_1

Все сравнения выполняются за c_2

Все инициализации/присвоения/return выполняются за c_3

algorithm1

Номер строки	Количество итераций	Затраты
2-3	1	c_2 (**return** невозможно отследить, опустим)
4	1	$T(n-5)+c_3+c_1$ - присвоение и вычитание
6	1	c_3 - инициализация
6	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$	c_2 - сравнение
6	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	c_1 - инкремент
7	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	c_3 - инициализация
7	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	c_2 - сравнение
7	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$	c_1 - инкремент
8	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$	c_3+c_1 - присвоение и вычитание
9	1	$T(n-8)+c_3+2c_1$ - присвоение, сумма и вычитание
11	1	c_3

$$\Rightarrow T(n) = T(n-5)+T(n-8)+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot (c_2+c_1+c_3+c_2)+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 \cdot (c_2+c_1+c_3+c_1)+(c_2+c_2+c_3+c_3+c_1+2c_1+c_3) =$$

$$= T(n-5)+T(n-8)+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot (2c_2+c_1+c_3)+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 \cdot (c_2+2c_1+c_3)+(2c_2+3c_3+3c_1)$$

Проведем замены констант, для красвого вида

- $2c_2 + c_1 + c_3 = c_4$
- $c_2 + 2c_1 + c_3 = c_5$
- $2c_2 + 3c_3 + 3c_1 = c_6$

$\Rightarrow T(n) = T(n-5) + T(n-8) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 \cdot c_5 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot c_4 + c_6$

algorithm2

Номер строки	Количество итераций	Затраты
2-3	1	c_2 (**return** невозможно отследить, опустим)
4	1	$T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + c_3 + c_1$ - присвоение и деление
6	1	c_3
6	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$	c_2 - сравнение
6	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	c_1 - инкремент
7	$\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$	$c_3 + c_1$ - присвоение и вычитание
9	1	$T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + c_3 + 2c_1$ - присвоение, сумма и деление
11	1	c_3

$\Rightarrow T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot (2c_1 + c_2 + c_3) + (2c_2 + 3c_1 + 4c_3)$

Проведем замены констант, для красвого вида

- $2c_1 + c_2 + c_3 = c_4$
- $2c_2 + 3c_1 + 4c_3 = c_5$

$\Rightarrow T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot c_4 + c_5$

2. $T(n) = \Theta(f(n))$

algorithm2

$T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot c_4 + c_5$

Предположение

Пусть $f(n) = n$, т. е $T(n) = \Theta(n)$

$\Rightarrow \exists\ d_1, d_2 \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbb{N} > N_0 : d_2 \cdot n \le T(n) \le d_1 \cdot n$

- Пусть $N_0 = 1$

Ограничение сверху

- Для точности ограничения сверху раскроем $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ и $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ как $\frac{n}{4}$ и $\frac{n}{3}$, так как $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \le \frac{n}{k}\ \forall k \in \mathbb{N}$

$T(n) \le d_1 \cdot n$

$\Rightarrow T(n) = 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot c_4 + c_5 \le 2 \cdot T(\frac{n}{4}) + \frac{n}{3} \cdot c_4 + c_5 \le 2 \cdot d_1 \cdot \frac{n}{4} + \frac{n}{3} \cdot c_4 + c_5 \le d_1 \cdot n$

$d_1 \cdot \frac{n}{2} + \frac{n}{3} \cdot c_4 + c_5 \le d_1 \cdot n$

$\frac{n}{3} \cdot c_4 + c_5 \le d_1 \cdot \frac{n}{2}$

$d_1 \ge \frac{2 \cdot c_4}{3} + \frac{2 \cdot c_5}{n}\ \forall \mathbb{N} \ge 2$

$\Rightarrow d_1 \geq \frac{2 \cdot c_4}{3} + c_5 \in \mathbb{R}^+$ - Предположение о верхней границе верно

Ограничение снизу

- Для точности ограничения снизу раскроем $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ и $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ как $(\frac{n}{4} - 1)$ и $(\frac{n}{3} - 1)$, так как $\frac{n}{k} - 1 < \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \ \forall k \in \mathbb{N}$

$d_2 \cdot n \leq T(n)$

$\Rightarrow d_2 \cdot n \leq 2 \cdot (\frac{n}{4} - 1) \cdot d_2 + (\frac{n}{3} - 1) \cdot c_4 + c_5 \leq 2 \cdot T(\frac{n}{4} - 1) + (\frac{n}{3} - 1) \cdot c_4 + c_5 \leq 2 \cdot T(\lfloor \frac{n}{4} \rfloor) + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor \cdot c_4 + c_5 = T(n)$

$d_2 \cdot n \leq \frac{n}{2} \cdot d_2 - 2 \cdot d_2 + \frac{n}{3} \cdot c_4 + c_5 - c_4$

$d_2 \cdot (\frac{n+4}{2}) \leq \frac{n}{3} \cdot c_4 + c_5 - c_4$

Вспомним про произведенные замены

$c_5 - c_4 = 2c_2 + 3c_1 + 4c_3 - (2c_1 + c_2 + c_3) = c_1 + c_2 + 3c_3 = c_6 > 0$

$\Rightarrow d_2 \cdot (\frac{n+4}{2}) \leq \frac{n}{3} \cdot c_4 + c_6$

(т.к $N_0 = 1$) $\forall \mathbb{N} \geq 2$:

$\Rightarrow d_2 \cdot (\frac{n+4}{2}) \leq d_2 \cdot \frac{5n}{2} \leq \frac{n}{3} \cdot c_4 + c_6$

$d_2 \leq \frac{2}{15} \cdot c_4 + \frac{2 \cdot c_6}{5n}$

$\Rightarrow d_2 \leq \frac{2}{15} \cdot c_4 \in \mathbb{R}^+$ - Предположение о нижней границе верно

Значит изначальное предположение верно и $T(n) = \Theta(n)$

algorithm1

$T(n) = T(n-5) + T(n-8) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 \cdot c_5 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot c_4 + c_6$

Невозможно сформировать ассимтотически-точную границу T(n) из-за неявной глубины рекурсии. Будем отдельно рассматривать верхнюю и нижнюю границы

Ограничение сверху

- Для точности ограничения сверху раскроем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ как $\frac{n}{2}$ так как $\lfloor \frac{n}{k} \rfloor \leq \frac{n}{k} \ \forall k \in \mathbb{N}$
- Также заменим $T(n-5) + T(n-8)$ на $2 \cdot T(n-5)$, т.к тогда мы имеем наибольшую глубину рекурсии и наибольшие затраты на подзадачи на уровне рекурсии

$\Rightarrow T(n) \leq 2 \cdot T(n-5) + (\frac{n}{2})^2 \cdot c_5 + \frac{n}{2} \cdot c_4 + c_6 = 2 \cdot T(n-5) + O(n^2)$

$\Rightarrow T(n) \leq 2 \cdot T(n-5) + r_1 \cdot n^2 \quad \forall \mathbb{N} > N_1$ - некоторый N_1 для $O(n^2)$

Докажем, что $T(n) = O(2^{\frac{n}{5}} \cdot n^2)$

$\Rightarrow \exists \ d_1 \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbb{N} > N_0 : T(n) \leq d_1 \cdot 2^{\frac{n}{5}} \cdot n^2$

Пусть $N_0 = \max(N_1; 9)$

$T(n) \leq 2 \cdot T(n-5) + r_1 \cdot n^2 \leq d_1 \cdot 2^{\frac{n}{5}} \cdot n^2$

$\Rightarrow 2 \cdot T(n-5) + r_1 \cdot n^2 \leq 2 \cdot d_1 \cdot 2^{\frac{n-5}{5}} \cdot (n-5)^2 + r_1 \cdot n^2 \leq d_1 \cdot 2^{\frac{n}{5}} \cdot n^2$

$d_1 \cdot (2^{\frac{n}{5}} \cdot n^2 - 2 \cdot 2^{\frac{n-5}{5}} \cdot (n-5)^2) \geq r_1 \cdot n^2$

$d_1 \cdot (2^{\frac{n}{5}} \cdot n^2 - 2 \cdot \frac{2^{\frac{n}{5}}}{2} \cdot (n^2 - 10n + 25)) \geq r_1 \cdot n^2$

$d_1 \cdot (2^{\frac{n}{5}} \cdot (n^2 - n^2 + 10n - 25)) \geq r_1 \cdot n^2$

$d_1 \cdot 2^{\frac{n}{5}} \cdot (10n - 25) \geq r_1 \cdot n^2$

$\forall \mathbb{N} > N_0 : (10n - 25) > n$

$\Rightarrow d_1 \cdot 2^{\frac{n}{5}} \cdot (10n - 25) \geq d_1 \cdot 2^{\frac{n}{5}} \cdot n \geq r_1 \cdot n^2$

$d_1 \geq \frac{r_1 \cdot n}{2^{\frac{n}{5}}}$

$\Rightarrow d_1 \geq \frac{5 \cdot r_1}{2} \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow T(n) = O(2^{\frac{n}{5}} \cdot n^2)$ - **верхняя граница**

Ограничение снизу

- Для точности ограничения сверху раскроем $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ как $(\frac{n}{2} - 1)$ так как $\frac{n}{k} - 1 \leq \lfloor \frac{n}{k} \rfloor \ \forall k \in \mathbb{N}$
- Также заменим $T(n-5) + T(n-8)$ на $2 \cdot T(n-8)$, т.к тогда мы имеем наименьшую глубину рекурсии и наименьшие затраты на подзадачи на уровне рекурсии

$\Rightarrow 2 \cdot T(n-8) + (\frac{n}{2} - 1)^2 \cdot c_5 + (\frac{n}{2} - 1) \cdot c_4 + c_6 \leq T(n) = T(n-5) + T(n-8) + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 \cdot c_5 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot c_4 + c_6$

$2 \cdot T(n-8) + (\frac{n}{2} - 1)^2 \cdot c_5 + (\frac{n}{2} - 1) \cdot c_4 + c_6 = 2 \cdot T(n-8) + (\frac{n^2}{4} - n + 1) \cdot c_5 + (\frac{n}{2} - 1) \cdot c_4 + c_6 =$

$= 2 \cdot T(n-8) + n^2 \cdot \frac{c_5}{4} + n \cdot (\frac{c_4}{2} - c_5) + (c_5 - c_4 + c_6)$

Произведем очередные замены для красоты:

- $\frac{c_5}{4} = c_7$
- $(\frac{c_4}{2} - c_5) = c_8$
- $(c_5 - c_4 + c_6) = c_9$

$\Rightarrow 2 \cdot T(n-8) + n^2 \cdot c_7 + n \cdot c_8 + c_9 \leq T(n)$

Очевидно, что $n^2 \cdot c_7 + n \cdot c_8 + c_9 = \Omega(n^2)$, можно подробно расписать, но думаю факт достаточно очевидный, получится $d_2 \leq c_7 \in \mathbb{R}^+ \ \forall \mathbb{N} > N_1$

$\forall \mathbb{N} > N_1$

$\Rightarrow 2 \cdot T(n-8) + d_2 \cdot n^2 \leq 2 \cdot T(n-8) + n^2 \cdot c_7 + n \cdot c_8 + c_9 \leq T(n)$

- **Можно расписать до дереву рекурсии и получить $\sum_{i=0}^{[\frac{n}{8}]-2} (2^i \cdot d_2(n-8i)^2)$, что достаточно тяжело оценить снизу из-за слагаемых в сумме (приедтся сильно ограничивать слагаемые, вплоть до константы, что ударить по оценке), либо полноценно раскрывать и считать 3 отдельные суммы.**
- **Иначе можно сделать менее точное предположение $T(n) = \Omega(n^2)$ и доказать его**

$\Rightarrow \exists \ d_1 \in \mathbb{R}^+ : \forall \mathbb{N} > N_0 : d_1 \cdot n^2 \leq T(n)$

Пусть $N_0 = \max(N_1, 20)$

$\Rightarrow d_1 \cdot n^2 \leq 2 \cdot T(n-8) + d_2 \cdot n^2 \leq T(n)$

$d_1 \cdot n^2 \leq 2 \cdot d_1 \cdot (n-8)^2 + d_2 \cdot n^2 \leq 2 \cdot T(n-8) + d_2 \cdot n^2$

$d_1 \cdot (n^2 - 2(n^2 - 16n + 64)) \leq d_2 \cdot n^2$

$d_1 \cdot (32n - n^2 + 128) \leq d_2 \cdot n^2$

$d_1 \cdot (32n - n^2 + 128) \leq d_1 \cdot n^2 \leq d_2 \cdot n^2$

$d_1 \leq d_2 \in \mathbb{R}^+$

$\Rightarrow T(n) = \Omega(n^2)$ - **нижняя грацница**