A1. Как построить минимальный остов?

Демченко Георгий Павлович , БПИ-235

1. Эффективная реализация алгоритмов, использование структур данных

Пусть дан граф $G = (V, E)$, где V - множество вершин графа, E - множество ребер графа.Для простоты написания символами V, E также будем обозначать мощности соотвествующих множеств.

Для всех алгоритмов будем считать, что граф передается в формате необходимых структур данных (пример - передается двусвязный список ребер).

Во всех "реализациях" алгоритмов на C++ используется тип int для определения вершины графа, на деле это может быть любой тип.

1. ALG_1

1.1

Для хранения ребер E графа в порядке невозрастания весов выгоднее всего использовать обычный отсортированный массив, так как на его построение (сортировку) потребуется $O(E \cdot log(E))$ с последующим доступом к максимальному (требуемому) ребру за $O(1)$ без необходимости в удалении.

1.2

Для эффективного удаления ребер из множества T будем хранить все ребра в двусвязном списке, в той же последовательности, что и в отсортированном множестве E, тогда на любом шаге мы знаем иттератор на элемент в списке и можем удалить его за $O(1)$

Примечание : Если под $T = E$ имелось в виду не только равенство множеств, но и равенство структур данных, которые хранят эти множества, то также используем двусвязный список для хранения ребер E.

1.3

Для определения связности графа после удаления ребра из множества T можно выбрать несколько подходов (также опишем неподходящие):

- После каждого удаления ребра проверять на связность при помощи DFS/BFS (считать кол-во компонент связяности, что дает идентичную ассимптотику) - $O(E+V)$
- Так как каждое ребро, приводящее к потере связности в графе является мостом, можно также находить мосты после каждого удаления ребра и удалять ребра, не являющиеся мостами на текущем шаге, что также потребует $O(E+V)$
- Использовать стандартный UNION-FIND (на основе "деревьев") для облегчения ассимптотики и проверки принадлежности вершин удаленного ребра одному множеству невозможно, так как структура не поддерживает удаление, что требуется по алгоритму.
- Можно заранее посчитать остовное дерево алгоритмом Краскала за $O(E \cdot log(E))$ (даже за $O(a(E))$ так как сортировка уже выполнена) и удалять только те ребра, что не входят в остовное дерево (так мы всегда будем иметь связный граф при удалении ребра), тогда проверка на удаление будет занимать $O(1)$, но не будем рассматривать данный вариант так как он является решением задачи для решения такой же задачи.
- Использовать Link-Cut Tree для определения принадлежности вершин удаленного ребра одной компоненте связности с амортизированным временем выполнения операций $O(log(V))$. **Будем использовать данный подход как самый оптимальный.**

Тогда для построения Link-Cut Tree нам понадобится

$$O(\sum_{i=1}^{E}(log(2i))) = O(log(\prod_{i=1}^{E}(2i))) = O(log(2^E \cdot E!)) =$$

$$= O((E-1) + log(E!)) \approx$$

$$\approx O((E-1) + E \cdot log(E) - E \cdot log(e) + O(log(E))) = O(E \cdot log(E))$$

операций (добавляем каждое реброе из E - (u, v) link(u, v), для оценки сверху считаем что при каждом добавлении кол-во имеющихся элементов увеличивается на 2, изначально элементов нет)

Можно было оценить чуть грубее, сказав что каждая операция добавления имеет асимптотику $O(log(V))$, тогда затраты на построение $= O(E \cdot log(V))$.

Каждая из операций: удаление ребра, присоединение ребра, удостоверение связности (поиск корней у вершин удаленного ребра) имеет асимптотику $O(log(V))$

1.4

Зная все вышеперечисленное, посчитаем наиболее эффективную ассимптотику, при использовании Link-Cut Tree:

$$T_{ALG_1} = O(E \cdot log(E) + E \cdot log(E) + E \cdot log(V)) = O(E \cdot log(E) + E \cdot log(V)) =$$

$$= O(E \cdot log(EV)) = O(E \cdot log(\frac{(V-1) \cdot V^2}{2})) = O(E \cdot log(V))$$

При использовании альтернативного подхода - DFS/BFS, асимптотика сильно деградирует:

$$T_{ALG_1} = O(E \cdot log(E) + E \cdot log(E) + E \cdot (E + V)) = O(E^2 + EV)$$

1.5

Исходный код представлен в файле ALG_1.cpp

2. ALG_2

Под $e \in E$, выбранное случайным образом, будем понимать, что исходное множество ребер E не преобразовано (как пример - отсортированно) и ребра в нем могут располагаться произвольно. (т.е на каждой итерации мы не берем произвольное ребро из всего множества, а идем подряд по списку всех "необработанных" ребер)

2.1

В качестве структуры данных для хранения множества T подойдет любая с добавлением за $O(1)$, будем использовать простой массив.

2.2

Для определения, образует ли множество $T \ \cup \ \{e\}$ граф без циклов, будем пользоваться структурой UNION-FIND на основе деревьев, с средним асимптотическим поведением операций $O(a(V))$, где $a(n)$ - функция, обратная к функции Аккермана $A(n, m)$, так как структура предназначена для работы с добавлением элементов (объединением вершин).

Ассимптотика инициализации UNION-FIND - $O(V)$, добавление всех вершин графа в качестве отдельных множеств за $O(1)$.

Проверка на цикл - $O(a(V))$

2.3

Зная все вышеперечисленное, посчитаем наиболее эффективную ассимптотику, при использовании UNION-FIND:

$$T_{ALG_2} = O(V + E \cdot a(V)) = O(E \cdot a(V))$$

2.4

Исходный код представлен в файле ALG_2.cpp

3. ALG_3

Под $e \in E$, выбранное случайным образом, будем понимать, что исходное множество ребер E не преобразовано (как пример - отсортированно) и ребра в нем могут располагаться произвольно. (т.е на каждой итерации мы не берем произвольное ребро из всего множества, а идем подряд по списку всех "необработанных" ребер)

В данной задаче требуется как добавление так и удаление ребер из множества T, скомбинируем подоходы ALG_1
и ALG_2 по использованию структур данных для определения циклов и поиска максимального ребра на пути между вершинами, т.е будем использовать UNION-FIND и Link-Cut Tree.

3.1

Для эффективного удаления ребер из множества T можем хранить все ребра в двусвязном списке, тогда удаление будет происходить за $O(1)$, но необходимо где-то сохранять итераторы для быстрого доступа к удаляемому ребру, однако хранить такие итераторы в вершинах UNION-FIND или Link-Cut Tree затруднительно и может потребовать $O(V)$ затрат на нахождение в случаях когда вершины имеют большую степень.

Поэтому выгоднее в данном случае использовать soft-delete (хэш таблица, ключ-ребро, значение-включено/не включено) для "удаления" за $O(1)$ из множества T с инициализацией и последующем составлении корректного T по удаленным ребрам за $O(E)$.

3.2

Для определения цикла из ребер $c \subseteq T$ будем использовать UNION-FIND на основе "деревьев" аналогично ALG_2, проверять на принадлежность одному множеству перед физическим добавлением.

Ассимптотика инициализации UNION-FIND - $O(V)$, добавление всех вершин графа в качестве отдельных множеств за $O(1)$.

Проверка на цикл, объединение множеств которым принадлежат вершины - $O(a(V))$

3.3

Так как перед добавлением такого ребра e в множество T, которое образует в нем цикл, T представляет из себя дерево и физического добавления мы не производим, то между вершинами (u, v) добавляемого ребра e существует путь, притом единственный, тогда нам необходимо найти макисмальное по весу ребро среди ребер в этом пути и добавляемым ребром при помощи Link-Cut Tree за $O(log(V))$ (операция path(u, v) и хранение веса ребер в вершинах LCT), и удалить его из LCT при помощи cut(u, v) за $O(log(V))$ или же не добавлять новое ребро вовсе (если оно максимальное).

При этом производить какие-то операции удаления с UNION-FIND не нужно, так как принадлежность вершин множествам не изменилась.

3.4

Зная все вышеперечисленное, посчитаем наиболее эффективную ассимптотику, при использовании UNION-FIND и Link-Cut Tree:

$$T_{ALG_3} = O(E + V + E \cdot (a(V) + log(V))) = O(E \cdot (a(V) + log(V))) = O(E \cdot log(V))$$

3.5

Исходный код представлен в файле ALG_3.cpp

2. Формирование MST

1. ALG_1

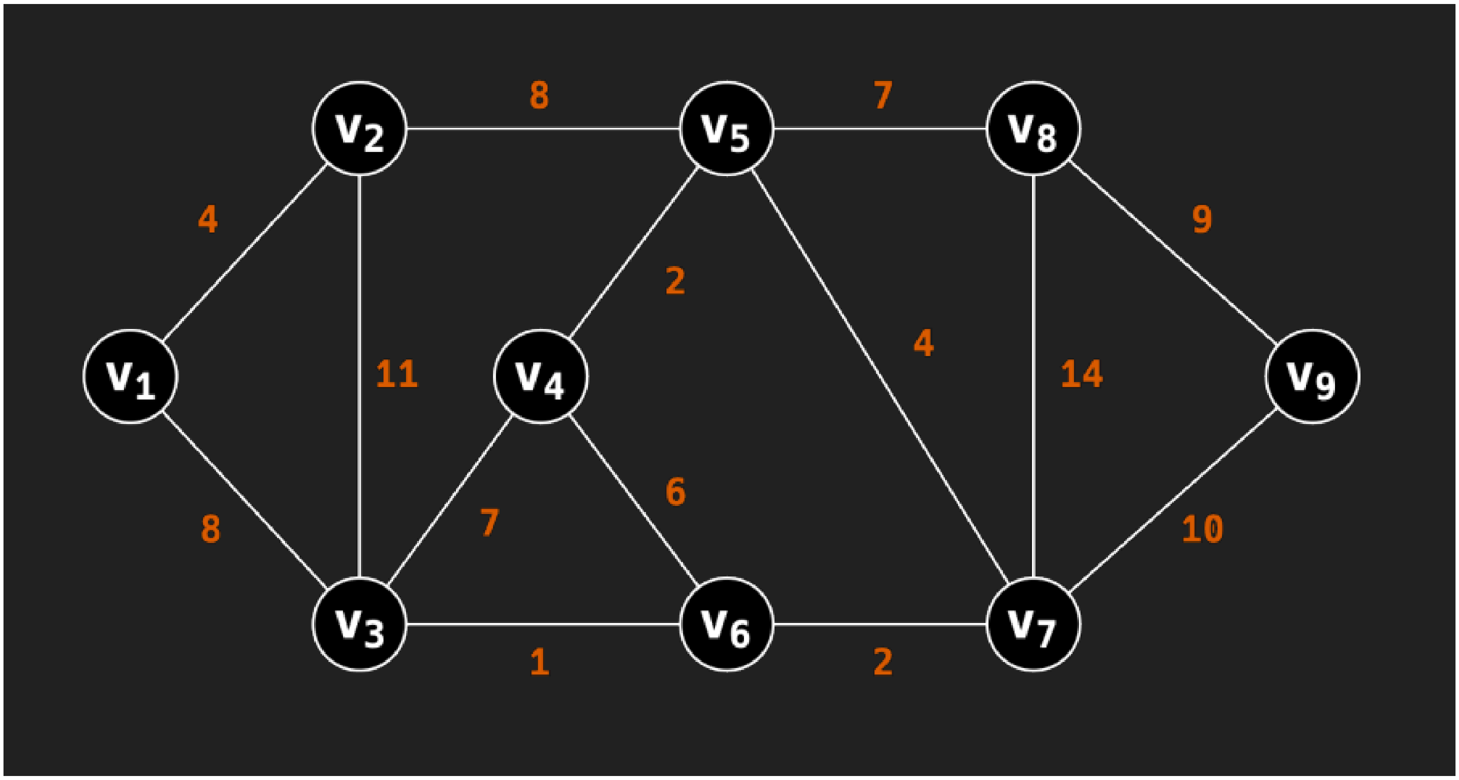
Формируется ли в множестве T MST? - **Да**

Обоснование :

Ребра удаляются в порядке невозрастания весов, сохраняя связность графа. Это равносильно выбору рёбер с минимальным весом, так как удаляются только те рёбра, которые не нарушают связность и не входят в MST.

Пример :

Пусть имеется следующий граф G



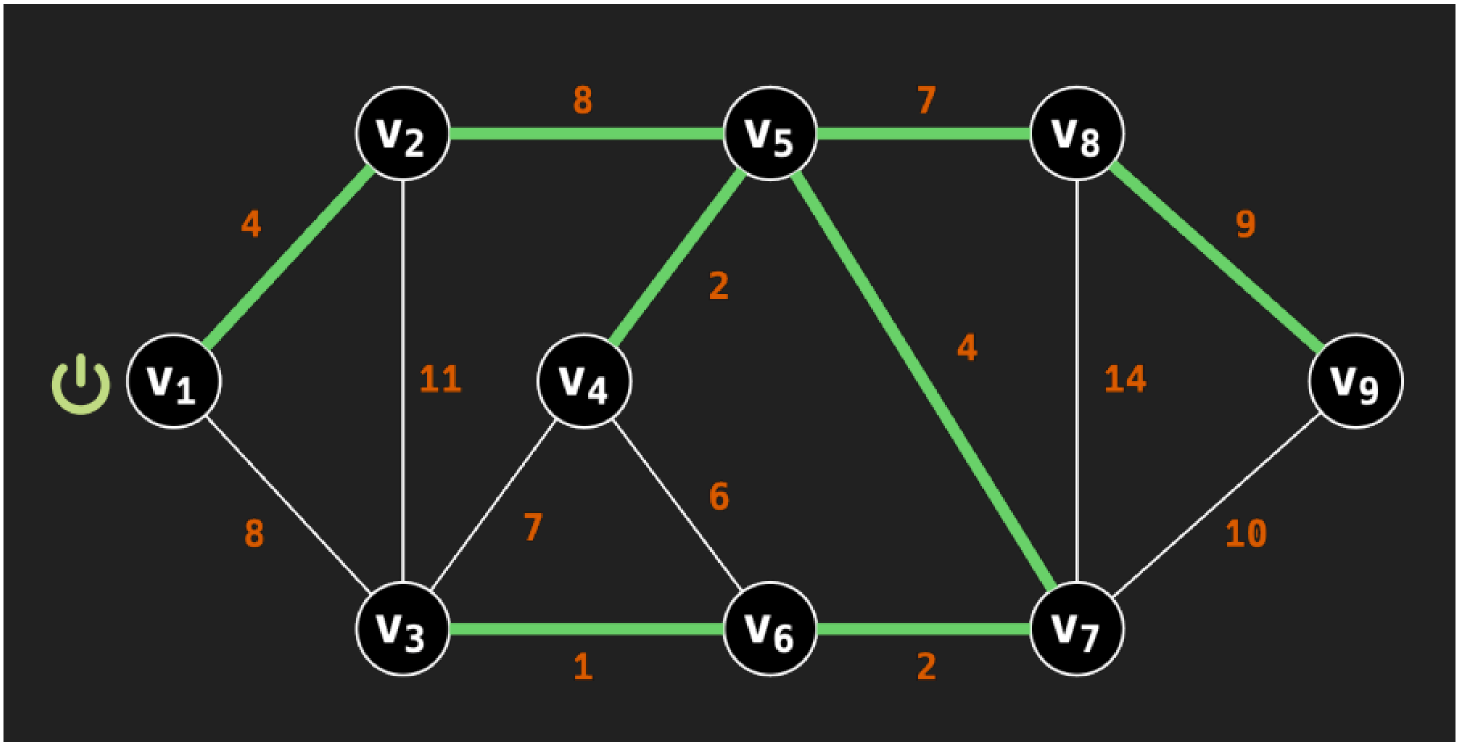
Тогда, отсортировав ребра E получим следующий список:

$$[V_7V_8, V_2V_3, V_7V_9, V_8V_9, V_2V_5, V_1V_3, V_3V_4, V_5V_8, V_4V_6, V_1V_2, V_5V_7, V_4V_5, V_6V_7, V_3V_6]$$

Удаляем ребра в последовательности:

- V_7V_8 - граф связный, убираем.
- V_2V_3 - граф связный, убираем.
- V_7V_9 - граф связный, убираем.
- V_8V_9 - граф не связный, оставляем.
- V_1V_3 - граф связный, убираем.
- V_2V_5 - граф не связный, оставляем.
- V_3V_4 - граф связный, убираем.
- V_5V_8 - граф не связный, оставляем.
- V_4V_6 - граф связный, убираем.
- V_1V_2 - граф не связный, оставляем.
- V_5V_7 - граф не связный, оставляем.
- V_4V_5 - граф не связный, оставляем.
- V_6V_7 - граф не связный, оставляем.
- V_3V_6 - граф не связный, оставляем.

После всего прохода по ребрам E остался в точности MST (в данном случае MST не единтвенен)



2. ALG_2

Формируется ли в множестве T MST? - **Нет**

Обоснование :

Так как ребра при попытке добавления выбираются случайно (расположены случайно при добавлении), то может произойти ситуация, когда тяжелое ребро, не входящее в MST, будет добавлено в начале прохода по ребрам (составления T) и не будет образовывать цикл (например, было выбрано первым).

Пример :

Пусть $G = (V; E) = (\{V_1, V_2, V_3\}; \{(V_1V_2, 1), (V_1V_3, 2), (V_2V_3, 3)\})$

Если первым ребром при добавлении будет выбрано V_2V_3, (а оно добавится так как T пустое и не может образовать циклов), то какое бы ребро не шло после него на добавление мы никогда не сможем добится MST = $\{V_1V_2, V_1V_3\}$ (из-за образования циклов и отсутсвия удаления тяжелых ребер)

3. ALG_3

Формируется ли в множестве T MST? - **Да**

Обоснование :

Строя дерево на каждом шаге (избавляясь от циклов, оставляя единую компоненту связности) и удаляя максимальное по весу ребро в цикле мы удволетворяем свойству MST - Cycle property, и строим его.

Пример :

Пусть $G = (V; E) = (\{V_1, V_2, V_3\}; \{(V_1V_2, 1), (V_1V_3, 2), (V_2V_3, 3)\})$

Если первым ребром при добавлении будет выбрано V_2V_3, то при последующих добавлениях ребер V_1V_2, V_1V_3 образуется цикл, из которого мы удалим V_2V_3 как самое тяжело ребро, образовав MST = $\{V_1V_2, V_1V_3\}$.