А3. Быстрее Штрассена!

Демченко Георгий Павлович , БПИ-235

Условие

Под "асимптотически более эффективный", будет пониматься верхняя оценка, т.е $O(f(n))$

1. $O(f(n))$ Штрассена

$T_{sht}(n) = 7 \cdot T_{sht}(\frac{n}{2}) + \Theta(n^2) = 7 \cdot T_{sht}(\frac{n}{2}) + O(n^2)$

Тогда, согласно мастер-теореме

$log_a(b) = log_2(7) > 2 = k$

$\Rightarrow T_{sht}(n) = O(n^{log_2(7)})$

$f_{sht}(n) = n^{log_2(7)}$

2. $O(f(n))$ алгоримта $MULT$

$T_{mult}(n) = a \cdot T_{mult}(\frac{n}{4}) + \Theta(n^2) = a \cdot T_{mult}(\frac{n}{4}) + O(n^2)$

Так как под a подразумевается "количество решаемых подзадач — количество блоков-подматриц размерности $\frac{n}{4}$ × $\frac{n}{4}$.", то будем считать, что $a \in \mathbb{N}$,кол-во блоков-подматриц и решаемых подзадач (рекурсивных умножений) не может быть нецелое количество

Тогда, согласно мастер-теореме

$log_b(a) = log_4 a$

$k = 2$

1. $k = 2 > log_4 a$

$a \in [1, 15]$

$\Rightarrow T_{mult}(n) = O(n^2)$

$\Rightarrow f_{mult}(n) = n^2 < n^{log_2(7)} = f_{sht}(n) \quad \forall \mathbb{N} > 1$ **(опустим константы)**

$a \in [1, 15]$ - **Подходит**

2. $k = 2 = log_4 a$

$a = 16$

$\Rightarrow T_{mult}(n) = O(n^2 \cdot log_2(n))$

$\Rightarrow f_{mult}(n) = n^2 \cdot log_2(n) < n^{log_2(7)} = f_{sht}(n) \quad \forall \mathbb{N} > 1$ **(опустим константы)**

$a = 16$ - **Подходит**

3. $k = 2 < log_4 a$

$a \geq 17$

$\Rightarrow T_{mult}(n) = O(n^{log_4(a)})$

$f_{mult}(n) = n^{log_4(a)} <? \, n^{log_2(7)} = f_{sht}(n)$ **(опустим константы)**

$log_4(a) < log_2(7)$

$\frac{1}{2} \cdot log_2(a) < log_2(7)$

$log_2(a) < 2 \cdot log_2(7)$

$log_2(a) < log_2(49)$

$a < 49$ (не ограничиваем $a \leq 32$ т.к количество произведенных рекурсивных умножений может быть в теории больше чем количество возможных подматриц подобного размера (максимум 32))

$a \in [17, 48]$ - **Подходит**

Ответ $a \in \mathbb{N} \land a \in [1, 48]$