Петербургский Национальный Исследовательский Университет
Информационных Технологий, Механики и Оптики
ФКТиУ, кафедра Вычислительной техники

Лабораторная работа №4

по дисциплине

«Вычислительная математика»

Студент: Лазурин Евгений
Группа: Р3210
Преподаватель: Перл О. В.

Санкт-Петербург
2020 г.

Задание

Решение ОДУ усовершенствованным методом Эйлера

Теория

Рассматривается задача Коши для одного дифференциального уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

Требуется найти решение на отрезке [a, b], где x_0 = a.

Численные методы решения ОДУ делятся на *Одношаговые* и *Многошаговые*:

- **Одношаговые**
  1. **Метод Эйлера**
     Метод Эйлера играет важную роль в теории численных методов решения ОДУ, хотя и не часто используется в практических расчетах из-за невысокой точности.
     График функции y^h, которая является решением задачи Коши, представляет собой гладкую кривую, проходящую через точку(x_0, y_0) согласно условию $y(x_0) = y_0$, и имеет в этой точке касательную. Тангенс угла наклона касательной к оси Ox равен значению производной от решения в точке (x_0, y_0) и равен значению правой части дифференциального уравнения в точке согласно выражению $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$. В случае небольшого шага разностной сетки h график функции и график касательной не успевают сильно разойтись друг от друга и можно в качестве значения решения в узле x_1 принять значение касательной y_1, вместо значения неизвестного точного решения $y_{1\text{ истенный}}$. При этом допускается погрешность $|y_1 - y_{1\text{истинный}}|$. Считая теперь точку начальной и повторяя все предыдущие рассуждения, получим значение y_2 в узле x_2.
  2. **Усовершенствованный метод Эйлера**
     Данный метод использует расчет приближенного значения производной от решения в точке на середине расчетного интервала. Значение производной в середине получают применением явного метода Эйлера на половинном шаге по x.

$$y_{k+1/2} = y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+\frac{1}{2}}, y_{k+\frac{1}{2}})$$

$$x_{k+1} = x_k + h$$

$$x_{k+1/2} = x_k + h/2$$

3. **Метод Рунге-Кутты**
   Все рассмотренные выше явные методы являются вариантами методов Рунге-Кутты. Семейство явных методов Рунге-Кутты p-го порядка записывается в виде совокупности формул:
   $$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$
   $$\Delta y_k = \sum_{i=1}^{p} c_i K_i^k$$
   $$K_i^k = hf(x_k + a_i h,\ y_k + h \sum_{j=1}^{i=1} b_{ij} K_j^k)$$

4. **Метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности**
   Метод Рунге-Кутты четвертого порядка является одним из самых широко используемых методов для решения Задачи Коши:
   $$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$$
   $$\Delta y_k = \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2k_3^k + K_4^k)$$
   $$K_1^k = hf(x_k, y_k)$$
   $$K_2^k = hf(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_1^k)$$
   $$K_3^k = hf\left(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}K_2^k\right)$$
   $$K_4^k = hf(x_k + h, y_k + K_3^k)$$

- **Многошаговые**
  Многошаговые методы характеризуются тем, что решение в текущем узле зависит от данных не в одном предыдущем узле, как это имеет место в одношаговых методах, а от нескольких предыдущих узлах.
  1. **Метод Адамса**
     При использовании интерполяционного многочлена 3-ей степени, построенного по значениям подынтегральной функции в последних четырех узлах, получим метод Адамса четвертого порядка точности:
     $$y_{k+1} = y_{k+1} + \frac{h}{24}(55f_k - 59f_{k-1} + 37f_{k-2} - 9f_{k-3})$$
     где f_k значение подынтегральной функции в узле x_k.
     Метод Адамса, как и все многошаговые методы не является самостартующим, то есть для того, что бы использовать метод Адамса необходимо иметь решения в первых четырех узлах. В узле x_0 решение y_0 известно из начальных условий, а в других трех узлах решения можно получить с помощью подходящего

одношагового метода, например: метода Рунге-Кутты четвертого порядка.

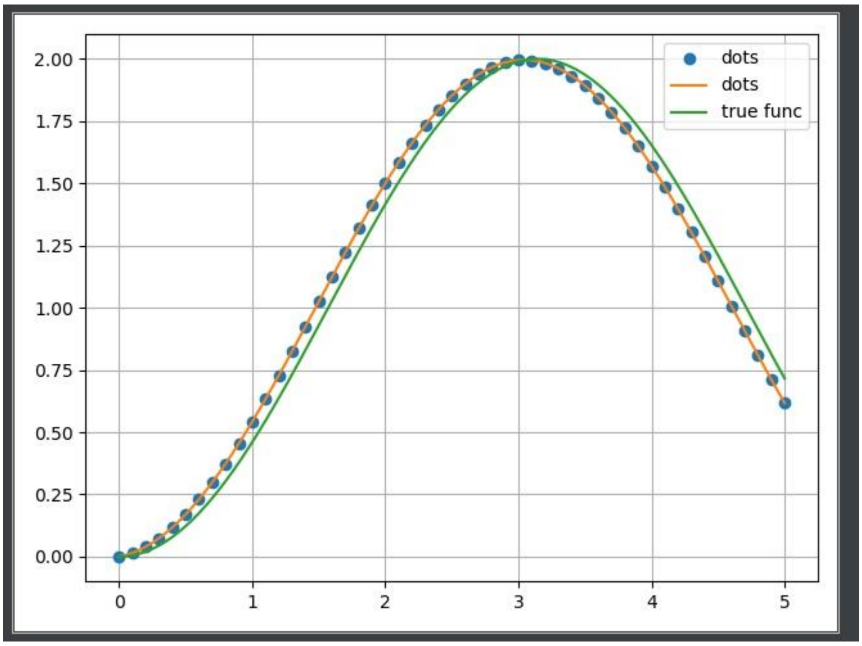
2. **Метод Милана**
   Решение в следующей точке находится в два этапа. На первом этапе осуществляется по специальной формуле прогноз значения функции, а затем на втором этапе - коррекция полученного значения. Если полученное значение y после коррекции существенно отличается от спрогнозированного, то проводят еще один этап коррекции. Если опять имеет место существенное отличие от предыдущего значения (т.е. от предыдущей коррекции), то проводят еще одну коррекцию и т.д. Однако очень часто ограничиваются одним этапом коррекции.

Численный метод

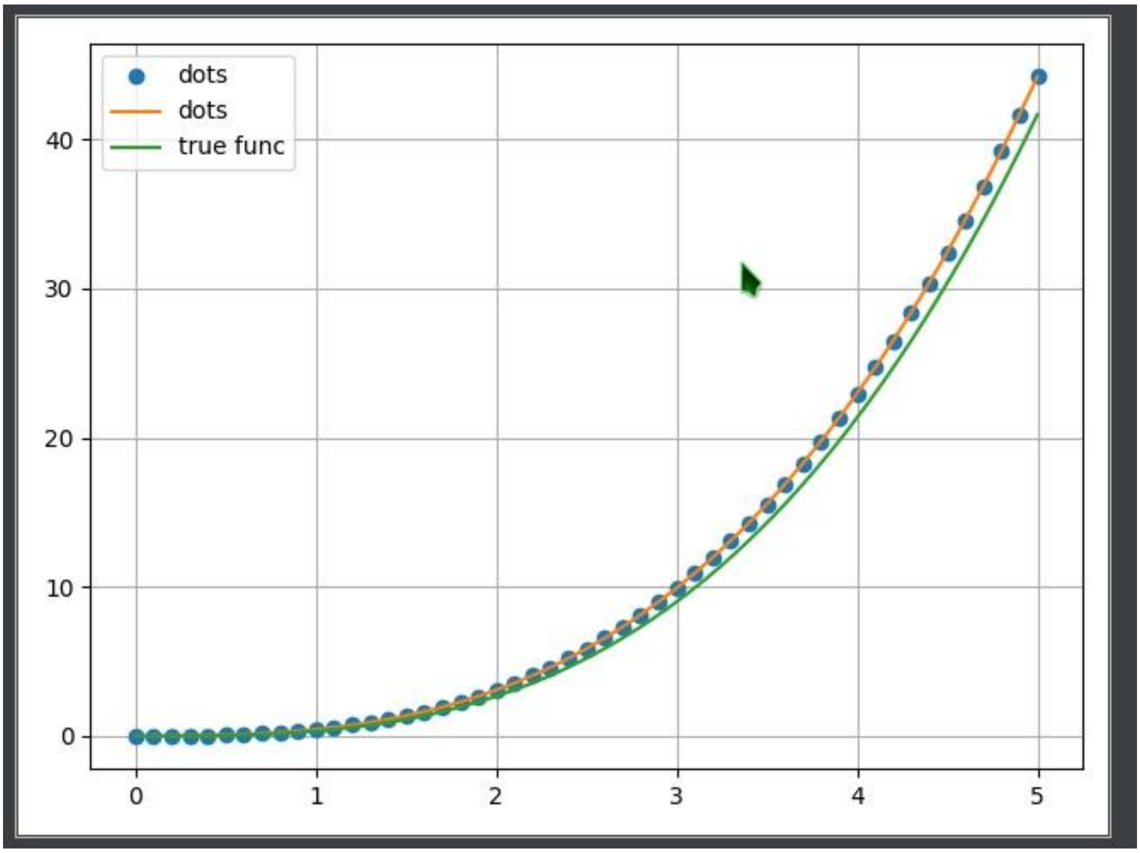
```
def euler_method():
    array_with_dots = [[x, y]]
    accuracy2 = accuracy/2
    for i in range(n):
        x += accuracy
        y += accuracy * function(x + accuracy2, y + accuracy2 * function(x, y))
        array_with_dots.append([x, y])
    return array_with_dots
```

Примеры работы программы

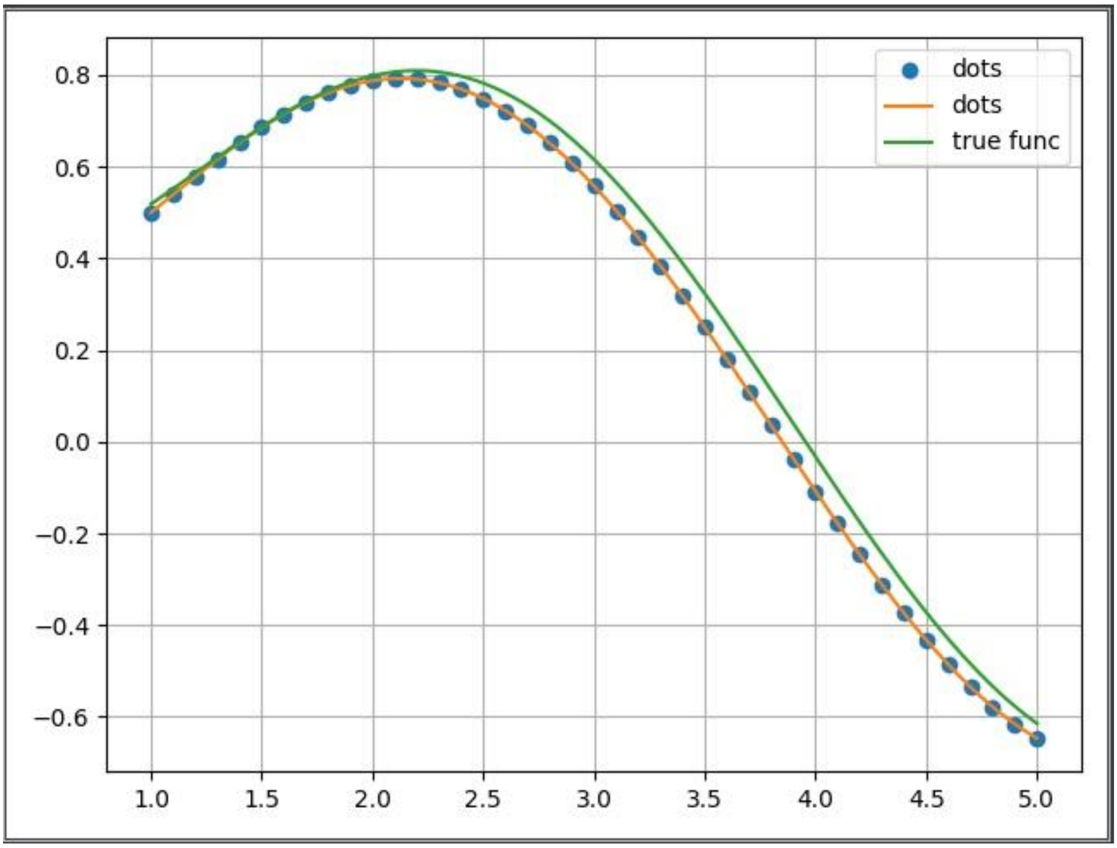
1) y’ = sin(x), погрешность 0.1



2) y’ = x^2, погрешность 0.1



3) y’ $= \sin(x) - y$, погрешность 0.1, стартовая точка (1, 0.5)



Заключение

Метод Эйлера работает достаточно быстро, ток как не требует сложных вычислений, но у него очень быстро накапливается погрешность.

Усовершенствованный метод Эйлера имеет большую точность h^2, следовательно даёт более точный ответ, однако на практике бывает требуется точность более 10го знака после запятой и тогда усовершенствованный метод Эйлера будет плох.

Метод Рунге-Кутты который имеет такую-же точность, но взамен требует больших вычислительных мощностей, в 4 раза больше, чем в методе Эйлера.

В многошаговых методах требуется ещё больше вычислительных мощностей, а также из-за того, что требуется хранить значения на предыдущих шагах увеличиваются затраты памяти.

Блок схема