Петербургский Национальный Исследовательский Университет
Информационных Технологий, Механики и Оптики
ФКТиУ, кафедра Вычислительной техники

Лабораторная работа №2

по дисциплине

«Вычислительная математика»

Студент: Лазурин Евгений
Группа: P3210
Преподаватель: Перл О. В.

Санкт-Петербург
2020 г.

Задание

<u>Лабораторная работа 2 (Интегрирование)</u>

Варианты:

- Метод прямоугольников
  (должен быть реализован расчет 3мя модификациями: левые, правые, средние)
- Метод трапеций
- Метод Симпсона

Пользователь выбирает функцию, интеграл которой он хочет вычислить (3-5 функций), из тех, которые предлагает программа.

В численный метод должен быть передан параметр-агрегат на подпрограмму вычисления значения функции в точке x.

Пользователь задает пределы интегрирования и точность.

NOTE! Если нижний предел интегрирования >= верхнего предела - интеграл должен считаться корректно!

В результате должны получить:

- значение интеграла
- количество разбиений, на которое пришлось разбить
- полученную погрешность

Метод Симпсона

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}\sum_{k=1,2}^{n-1}(f(x_{k-1}) + 4f(x_k) + f(x_{k+1}) \quad (1)$$

Описание метода

Суть метода заключается в том, что на определенном промежутке дуга некоторой параболы в общем случае теснее прилегает кривой y = f(x), чем хорда, соединяющая концы дуги этой кривой (как в методе трапеций). В связи с этим значения площадей соответствующих элементарных трапеций, ограниченных сверху дугами парабол, являются более близкими к значениям площадей соответствующих частичных криволинейных трапеций, ограниченных сверху дугой кривой y = f(x), чем значения площадей соответствующих прямолинейных трапеций.

Мы делим подынтегральную функцию на n(четное) равных четное) равных отрезков, на каждом из которых аппроксимируем значение этой функции параболой, затем можем вычислить искомый интеграл по формуле (1)

При этом мы вычисляем значение интеграла по формуле для разбиения на n и 2n отрезков, после чего вычисляем погрешность по формуле Рунге:

$$\Delta_{2n} = \theta|I_{2n} - I_2| \ (2)$$

Где $\theta = \frac{1}{15}$, для метода Симпсона.

Исходный код численного метода

```
def __doubling_nsegment(func, x0, x1):
    nseg = Sympson.__nsegment
    dx = (x1 - x0) / nseg
    x = x0 + 0.5 * dx
    i = 0
    AddedSum = 0.0
    for i in range(nseg):
        AddedSum += func(x + i * dx)

    Sympson.__sum += AddedSum
    Sympson.__nsegment *= 2
    return Sympson.__sum * 0.5 * dx

def simpson(func, x0, x1, rtol=1.0e-10, nsegment0=1):
    old_sum = Sympson.__restart(func, x0, x1, nsegment0)
    new_sum = Sympson.__doubling_nsegment(func, x0, x1)
    ans = (4 * new_sum - old_sum) / 3
    old_ans = 0.0
    err_est = max(1, abs(ans))
    while err_est > abs(rtol * ans):
        old_ans = ans
        old_sum = new_sum
        new_sum = Sympson.__doubling_nsegment(func, x0, x1)
        ans = (4 * new_sum - old_sum) / 3
        err_est = abs(old_ans - ans)
    print("Ответ", ans)
    print("Погрешность", err_est)
    print("Количество разбиений", Sympson.__nsegment)
```

Примеры

```
Введите номер функции интеграл от которой вы хотите вычислить:
1)y = x
2)y = x^2
3)y = 2x+1/(sqrt(x+1/16))
4)y = sqrt(x)
5)y = x^3>? 3
Введите нижнюю границу>? 10
Введите верхнюю границу>? 20
Введите точность>? 0.001
Ответ -302.6140505465829
Погрешность 0.001204442769335401
Количество разбиений 4
Введите номер функции интеграл от которой вы хотите вычислить:
1)y = x
2)y = x^2
3)y = 2x+1/(sqrt(x+1/16))
4)y = sqrt(x)
5)y = x^3>? 3
Введите нижнюю границу>? 0
Введите верхнюю границу>? 500
Введите точность>? 1e-9
Ответ -250044.22416293822
Погрешность 0.00010051819845102727
Количество разбиений 32768
Введите номер функции интеграл от которой вы хотите вычислить:
1)y = x
2)y = x^2
3)y = 2x+1/(sqrt(x+1/16))
4)y = sqrt(x)
5)y = x^3>? 2
Введите нижнюю границу>? -20
Введите верхнюю границу>? 20
Введите точность>? 1e-5
```

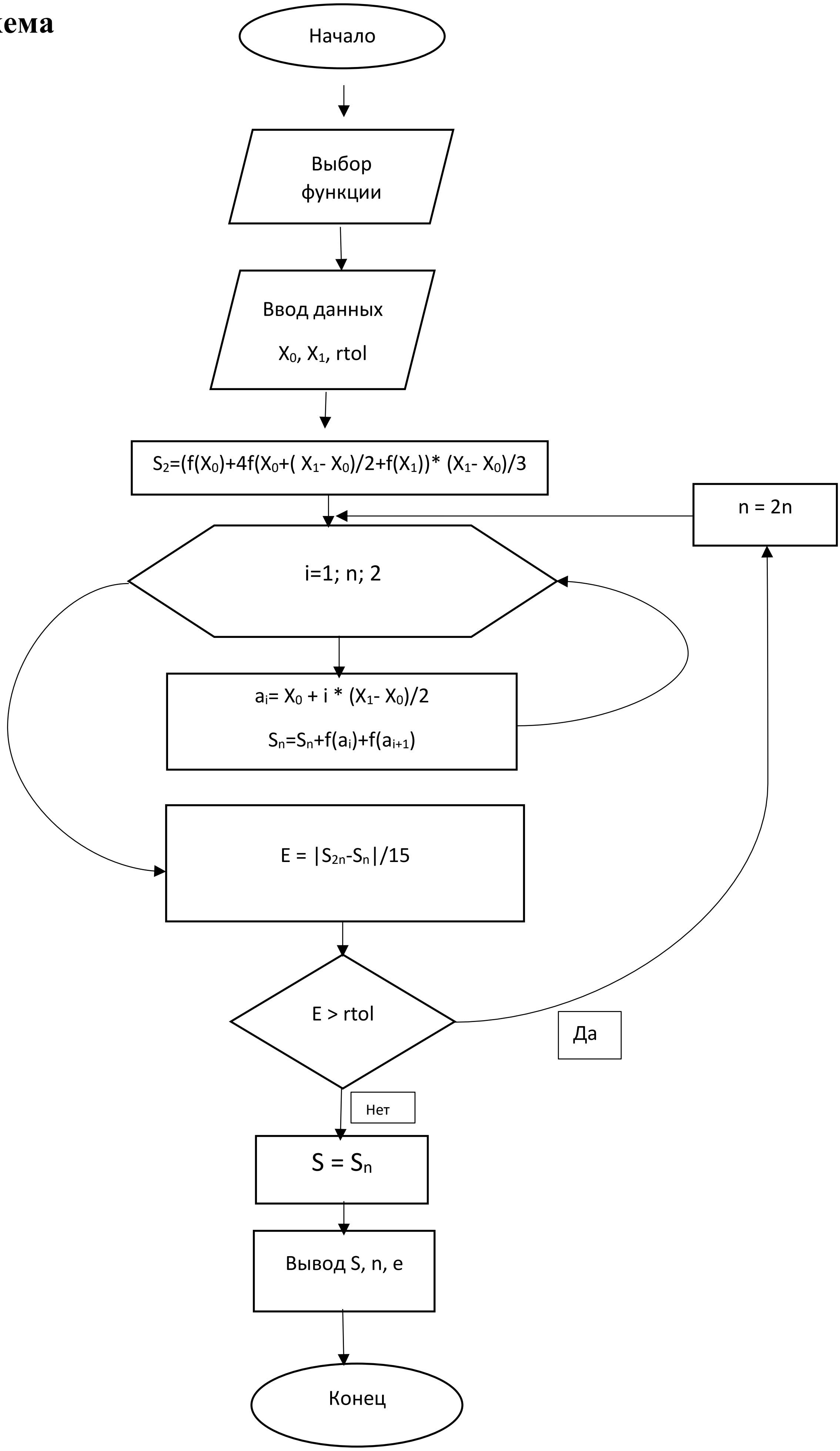
Ответ -5333.333333333333
Погрешность 0.0
Количество разбиений 4
Введите номер функции интеграл от которой вы хотите вычислить:
1)y = x
2)y = x^2
3)y = 2x+1/(sqrt(x+1/16))
4)y = sqrt(x)
5)y = x^3>? 1
Введите нижнюю границу>? -20
Введите верхнюю границу>? 20
Введите точность>? 1e-5
Ответ 0.0
Погрешность 0.0
Количество разбиений 4
Введите номер функции интеграл от которой вы хотите вычислить:
1)y = x
2)y = x^2
3)y = 2x+1/(sqrt(x+1/16))
4)y = sqrt(x)
5)y = x^3

Вывод

В ходе выполнения лабораторной работы пришлось вспомнить всю теорию с первого семестра. Все три метода рассмотренные, как варианты данной лабораторной работы схожи между собой. Методы заключаются в том, что всегда производится разбиение функции на n отрезков, а затем интерполирование на каждом из них.

- Метод прямоугольников (правые, левые, средние)
  Метод заключается в том, что мы разбиваем фигуру под графиком на прямоугольники и считаем интеграл как сумму площадей этих прямоугольников с учетом значения функции в левой верхней точке (метод левых прямоугольников) в средней точке (метод средних прямоугольников) и в правой верхней точке (метод правых прямоугольников). В силу того что в методе средних прямоугольников симметрия не нарушается, то погрешность у данного метода будет меньше чем у левых и правых прямоугольников.
- Метод трапеций
  В данном методе мы аппроксимируем функцию к прямой и считаем интеграл как площадь многоугольника образованного получившимися трапециями. Данный метод менее точный чем средние прямоугольники так как значение в средней точке точнее чем полусумма значений на концах.
- Метод Симпсона
  Метод Симпсона является самым точным из всех представленных методов, так как мы аппроксимируем функцию параболой (которая зачастую находится гораздо ближе к графику (в сравнении с прямой)), а значит интерполируется многочлен второй степени.

Блок-Схема


Начало
Выбор функции
Ввод данных
X_0, X_1, rtol
$S_2=(f(X_0)+4f(X_0+(X_1-X_0)/2+f(X_1))*(X_1-X_0)/3$
n = 2n
i=1; n; 2
$a_i= X_0 + i * (X_1- X_0)/2$
$S_n=S_n+f(a_i)+f(a_{i+1})$
$E = |S_{2n}-S_n|/15$
E > rtol
Да
Нет
$S = S_n$
Вывод S, n, e
Конец