Петербургский Национальный Исследовательский Университет
Информационных Технологий, Механики и Оптики
ФКТиУ, кафедра Вычислительной техники

Лабораторная работа №4

по дисциплине

«Вычислительная математика»

Студент: Лазурин Евгений

Группа: P3210

Преподаватель: Перл О. В.

Санкт-Петербург

2020 г.

Задание

Интерполирование многочленом Ньютона

Теория

Интерполяцией называют такую разновидность аппроксимации, при которой кривая построенной функции проходит через имеющиеся точки.

В данной лабораторной работе мне достался метод Ньютона.
Интерполирующий полином ищется в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + a_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

Построение многочлена сводится к определению коэффициентов a_i При записи коэффициентов пользуются конечными разностями. Конечные разности первого порядка пишутся в виде:

$$\Delta^k y_0 = \Delta^{k-1} y_1 - \Delta^{k-1} y_0$$

$$\Delta^k y_1 = \Delta^{k-1} y_2 - \Delta^{k-1} y_1$$

$$\dots$$

$$\Delta^k y_{n-2} = \Delta^{k-1} y_{n-1} - \Delta^{k-1} y_{n-2}$$

Коэффициенты a_nнаходятся из $P_n(x_i) = y_i$. Находим a_0полагая, что x = x_0

$$a_0 = P(x_0) = y_0$$

Далее подставляем значение x = x_1, получим

$$P_n(x_1) = y_1 = y_0 + a_1(x - x_0)$$

$$a_1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h}$$

Общая формула нахождения a_i:

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i!\,h^i}$$

В результате самая первая формула примет вид

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta \ y_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + \frac{\Delta^i y_0}{i!\,h^i}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$$

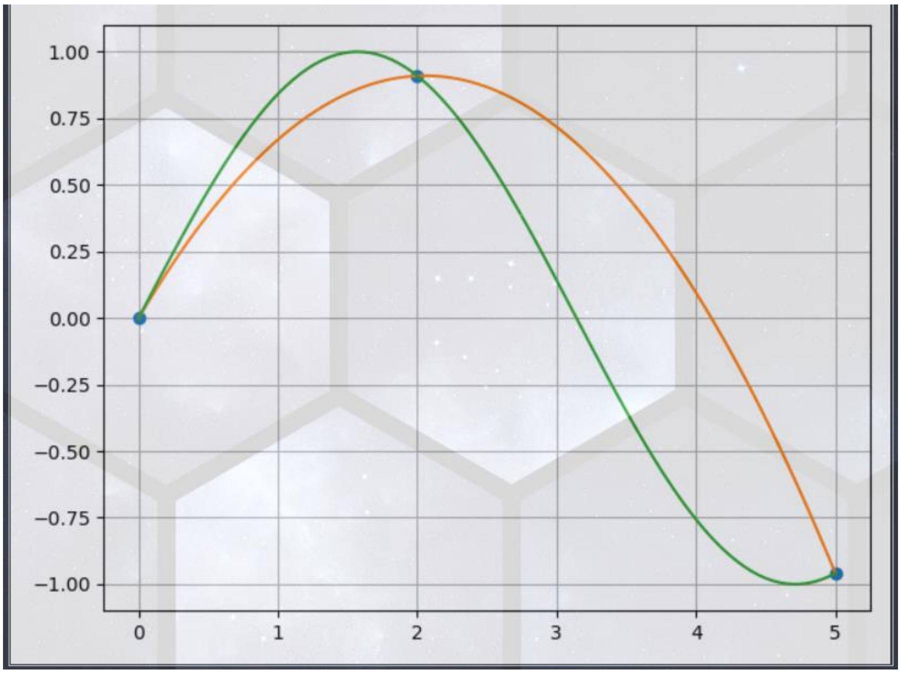
Данный многочлен называют первым полиномом Ньютона.

Численный метод

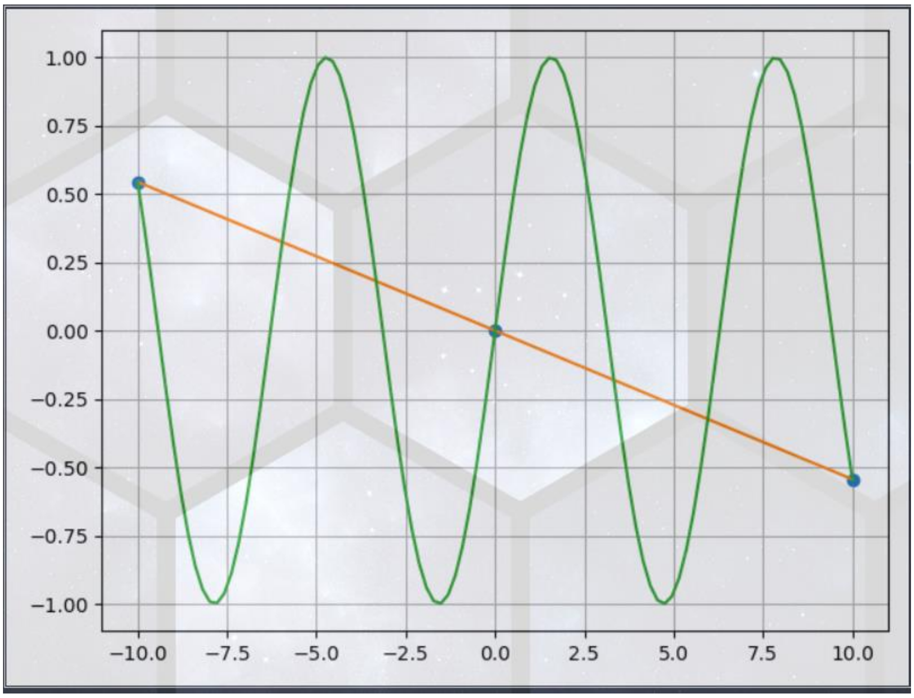
```
def coef(x, y):
    x.astype(float)
    y.astype(float)
    n = len(x)
    a = []
    for i in range(n):
        a.append(y[i])
    for j in range(1, n):
        for i in range(n - 1, j - 1, -1):
            a[i] = float(a[i] - a[i - 1]) / float(x[i] - x[i - j])
    return np.array(a)


def newton_method(a, x, r):
    x.astype(float)
    n = len(a) - 1
    temp = a[n]
    for i in range(n - 1, -1, -1):
        temp = temp * (r - x[i]) + a[i]
    return temp
```

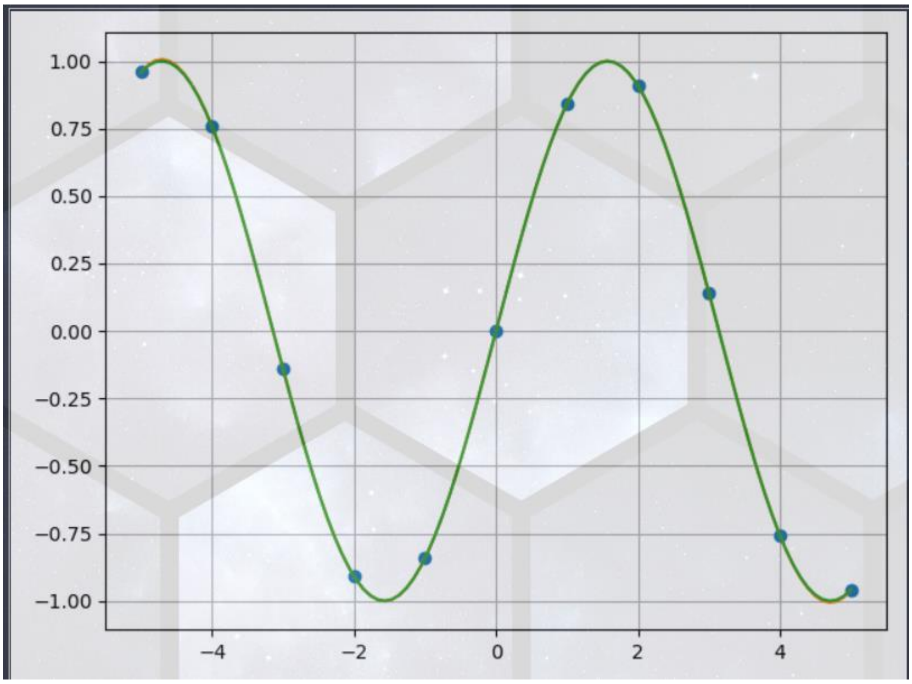
Примеры работы программы



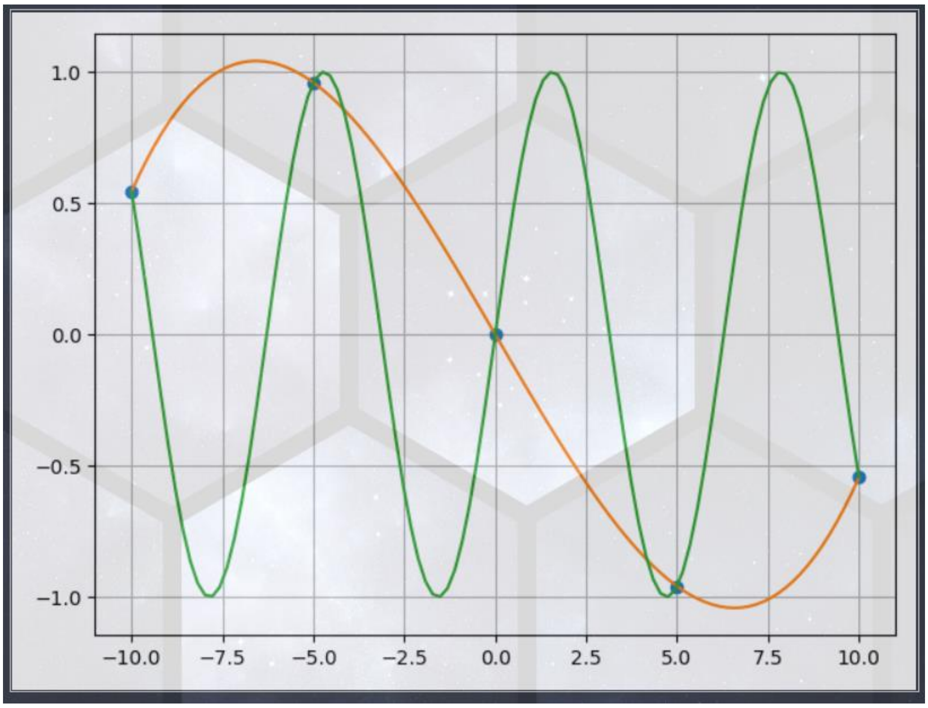
sin(x) при точках [0, 2, 5]



sin(x) при точках [-10, 0, 10]



sin(x) при точках [-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5]



sin(x) при точках [-10, -5, 0, 5, 10]

Заключение

Интерполяцию применяют в случае, когда требуется найти значение функции y(x) при значении аргумента xi принадлежащего интервалу [x0, … xn], но не совпадающему по значению ни с одним табличным значением этой функции. Графически задача интерполяции заключается в том, чтобы построить такую функцию, которая бы проходила через все заданные точки (узлы).

Интерполяция бывает:

1) **Каноническим полиномом.** Задача интерполяции сводится к решению СЛАУ для получения коэффициентов полинома.
2) **Линейная интерполяция.** Просто соединить заданные точки прямыми. Простейший метод интерполяции.
3) **Интерполяция полиномом Лагранжа.**

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left(\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k} \right)$$

   Интерполяционный полином Лагранжа обычно применяется в теоретических исследованиях (при доказательстве теорем, аналитическом решении задач и т.п.). Минусом данного метода является то, что при добавлении точек происходит перерасчет всего многочлена.
4) **Интерполяция полиномом Ньютона**. Интерполяционные формулы ньютона удобно использовать, если точка интерполяции находится в

начале таблицы или в конце таблицы. Построение полинома также как и в варианте 1 сводится к определению коэффициентов a_i.

Вывод

Интерполяция каноническим полиномом требует бОльших вычислительных мощностей. Линейная интерполяция крайне неточная. Интерполяция методом Лагранжа хороша, если количество точек не изменяется. Интерполяция полиномом Ньютона хороша, если точки находятся в начале/конце таблицы точек.

Блок-схема