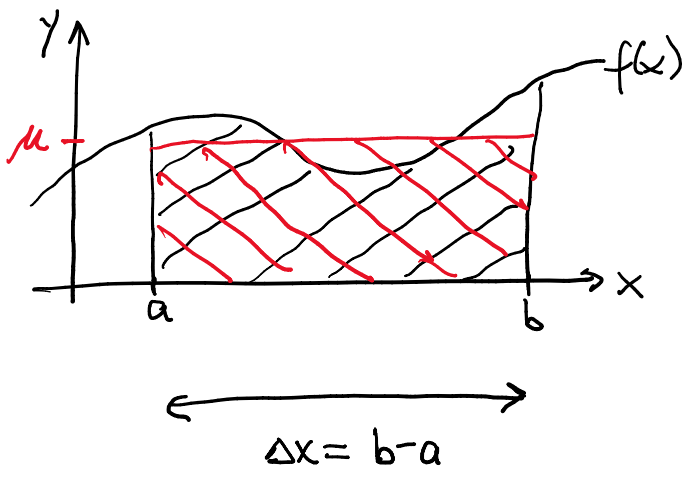
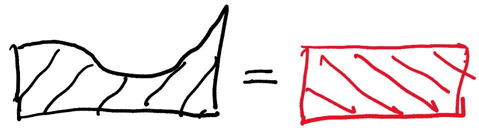
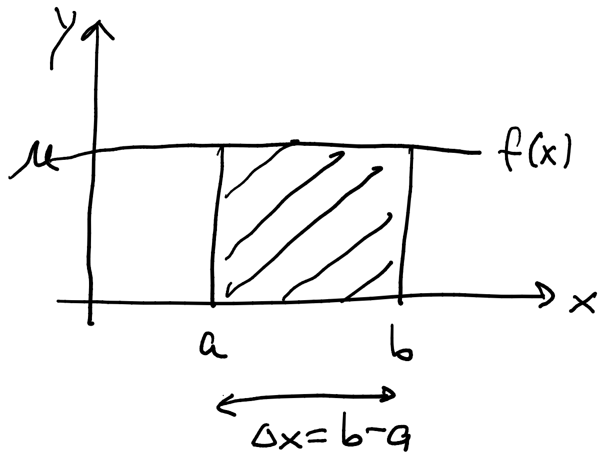
Anwendungen der Integralrechnung I

Tuesday, 12 March 2024 16:44

Mittelwert einer Funktion



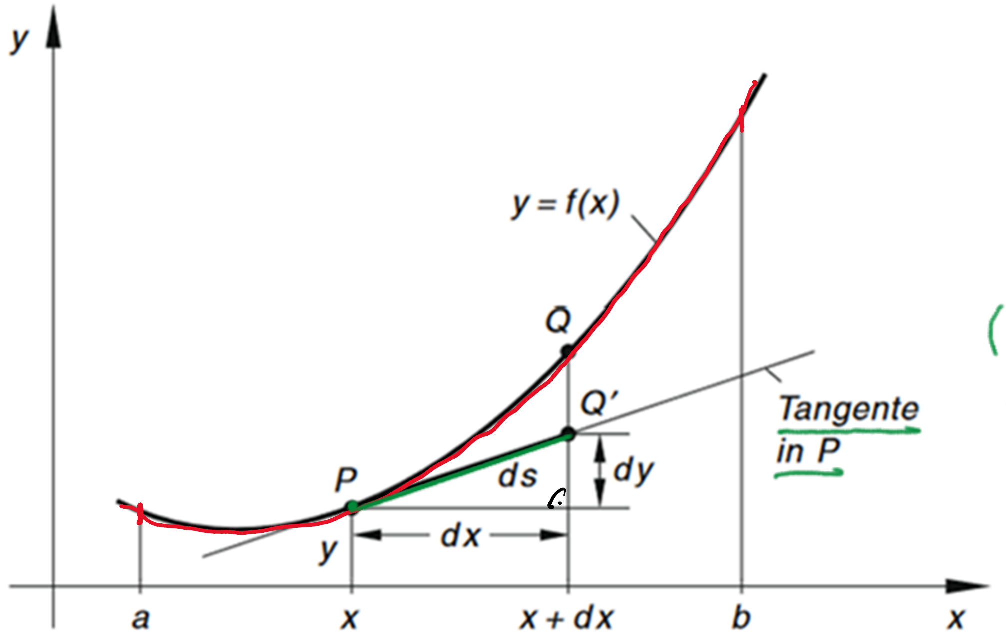




Def.: Gegeben eine Funktion f mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$. Unter dem <u>Mittelwert μ</u> von f versteht man die Höhe jenes Rechtecks, das als Grundseite die Strecke von a nach b hat und dessen Flächeninhalt gleich der Fläche unter der Kurve von f ist:

$$\boxed{\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx}$$

Die Bogenlänge einer ebenen Kurve



(Linearisierung von f im Punkt P, Näherung)

$$\Rightarrow (ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (dx)^2 \cdot \left(1 + \frac{(dy)^2}{(dx)^2}\right) = (dx)^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$ (Steigung der Tangenten im Punkt P)

$$\Rightarrow ds = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

$$\Rightarrow s \approx \sum_{k=1}^{n} ds(x_k) = \sum_{k=1}^{n} dx \cdot \sqrt{1 + (f'(x_k))^2}$$

Näherung ist umso besser, je kleiner dx gewählt wird

$\Rightarrow$ wird exakt für $dx \to 0$ (bzw. Anzahl Stücke $n \to \infty$)

$$\Rightarrow s = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} ds(x_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} dx \cdot \sqrt{1 + (f'(x_k))^2}$$

$dx = \frac{b-a}{n}$

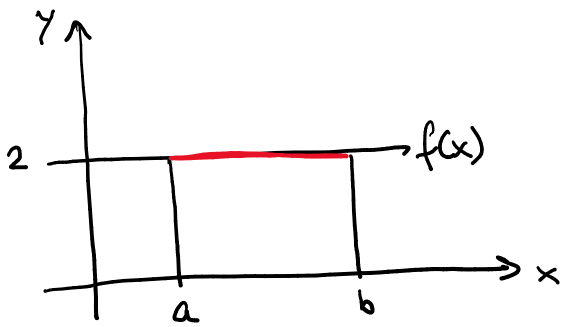
$$= \underline{\underline{\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx}}$$

Bogenlänge einer ebenen Kurve (Bild V-61)

Eine *ebene* Kurve mit der Gleichung $y = f(x),\ a \leq x \leq b$ besitzt die *Bogenlänge*

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx \qquad \text{(V-131)}$$

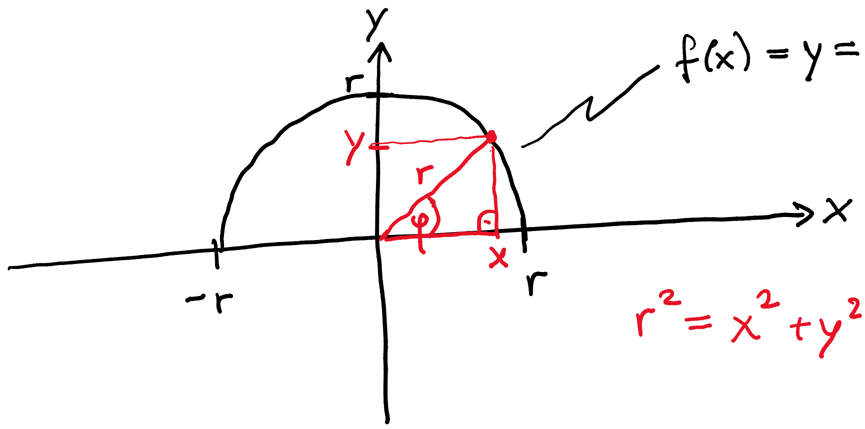
Bsp.:



$$\Rightarrow s = \int_a^b \sqrt{1 + (\underbrace{f'(x)}_{=0})^2}\, dx$$

$$= \int_a^b 1\, dx = [x]_a^b = \underline{\underline{b-a}}$$

Bsp.: Berechnung des Kreisumfangs



$f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}$

$r^2 = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow f'(x) = \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)' = \left(\left(r^2 - x^2\right)^{1/2}\right)'$$

Kettenregel

$$= \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\Rightarrow ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2} \cdot dx = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} \cdot dx$$

$$= \sqrt{\frac{r^2 - \cancel{x^2} + \cancel{x^2}}{r^2 - x^2}}\, dx = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}\, dx$$

Umfang des Kreises = 4 mal Bogenlänge im 1. Quadranten

$$\Rightarrow s = \int_0^r ds = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx = r \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx$$

<u>Lösen mit Substitution:</u>

$$x(\varphi) = r \cdot \cos(\varphi) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{d\varphi} = -r \cdot \sin(\varphi) \Rightarrow dx = -r \cdot \sin(\varphi)\, d\varphi$$

Grenzen: $\varphi(x) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) \quad \Rightarrow \quad \varphi(0) = \pi/2$, $\varphi(r) = 0$

$$\Rightarrow s = r \cdot \int_0^r \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\, dx = r \cdot \int_{\varphi(0)}^{\varphi(r)} \frac{1}{\sqrt{\underbrace{r^2 - r^2 \cdot \cos^2(\varphi)}_{= r^2(1-\cos^2(\varphi)) = r^2 \cdot \sin^2(\varphi)}}} \cdot (-r \cdot \sin(\varphi))\, d\varphi$$

$$= r \cdot \int_{\pi/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{\cancel{r^2} \cdot \cancel{\sin^2(\varphi)}}} (-\cancel{r} \cdot \cancel{\sin(\varphi)})\, d\varphi = -r \int_{\pi/2}^{0} 1 \cdot d\varphi$$

$$= -r \cdot [\varphi]_{\pi/2}^{0} = -r\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) = r \cdot \frac{\pi}{2}$$

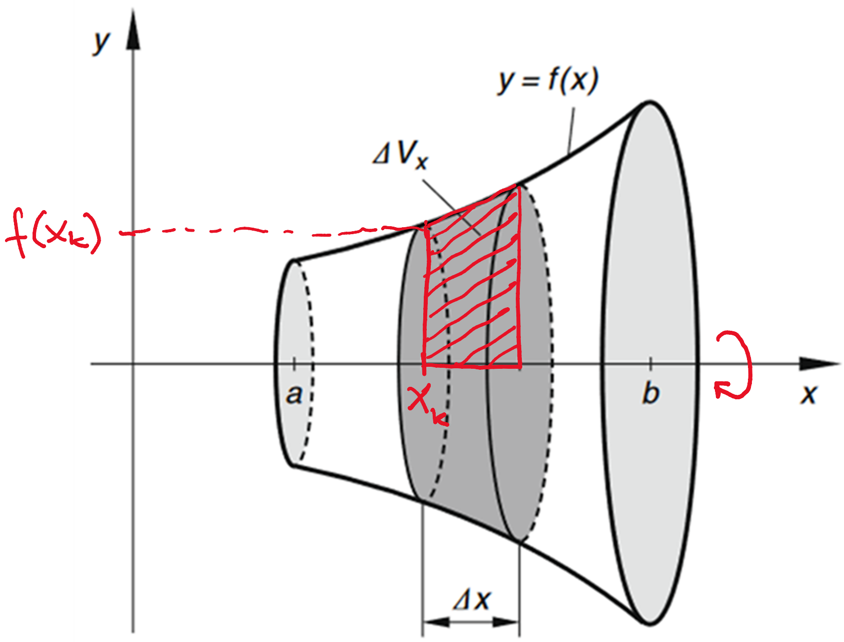
$\Rightarrow$ <u>Kreisumfang</u> $= 4s = 4 \cdot r \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{2\pi r}}$

Volumen eines Rotationskörpers

Betrachte eine Funktion $f(x)$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$.

... durch die

Betrachte eine Funktion $f(x)$ mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$.
Rotiert man das Flächenstück, welches begrenzt wird durch den Graphen von $f(x)$, die x-Achse und die beiden Geraden $x = a$ und $x = b$, <u>um die x-Achse</u>, so entsteht ein sogenannter <u>Rotationskörper</u>.



<u>Vorgehen</u>:

1.) Zerschneide den Körper senkrecht zur x-Achse in n Scheiben der Dicke $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

2.) Diese Scheiben sind <u>näherungsweise</u> zylinderförmig, d.h. das Volumen der k-ten Scheibe beträgt näherungsweise:

$$\Delta V_k \approx \pi \cdot (f(x_k))^2 \cdot \Delta x$$

3.) Wir erhalten als Näherung für das Gesamtvolumen:

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot (f(x_k))^2 \cdot \Delta x$$

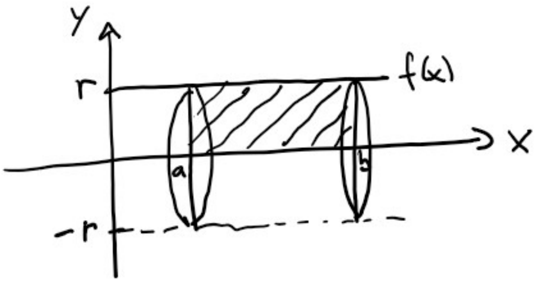
4.) Die Näherung wird exakt im Limes $n \to \infty$ (d.h. $\Delta x \to 0$)

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \pi \cdot (f(x_k))^2 \cdot \Delta x \;=\; \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 \, dx$$

$\Rightarrow$ Volumen eines Rotationskörpers bei Drehung einer Kurve f(x) um die x-Achse

$$\boxed{V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx}$$

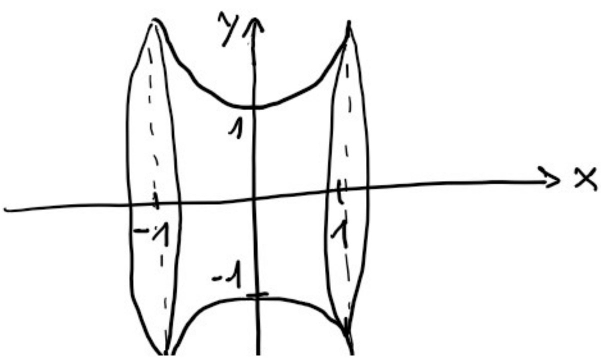
Bsp.: $f(x) = r = \text{konst.}$



$$\Rightarrow V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_a^b r^2 dx$$

$$= \pi \cdot r^2 \cdot \int_a^b 1 \, dx = \pi r^2 \left[x\right]_a^b = \underline{\underline{\pi r^2 \cdot (b-a)}}$$

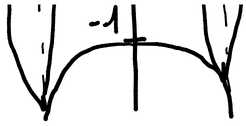
Bsp.: $f(x) = x^2+1$, $a=-1$, $b=1$



$$V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2+1)^2 \, dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx$$

$$= \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^{1}$$



-1

$$= \pi \cdot \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1}$$

$$= 2\pi \left[\frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x\right]_{0}^{1}$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \underline{\underline{\frac{56}{15}\cdot\pi}}$$