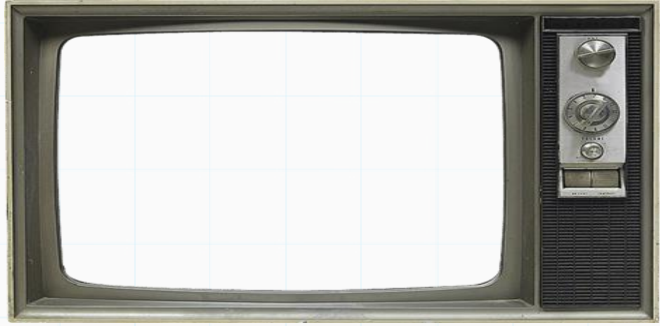
Métodos para PPI

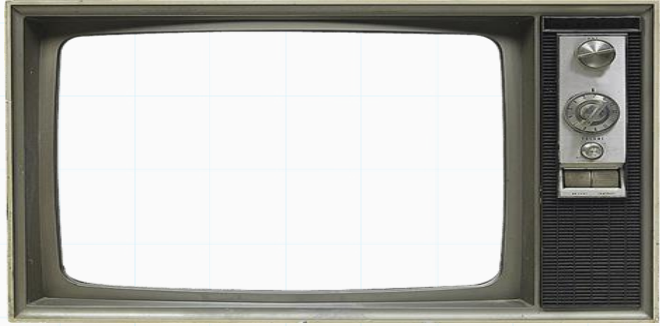
Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pi.html

yuri@ic.uff.br



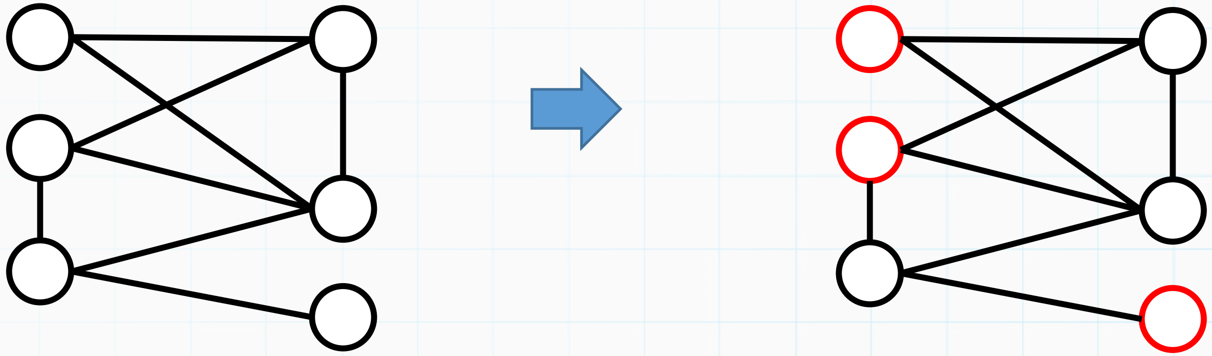
Cortes Estruturais



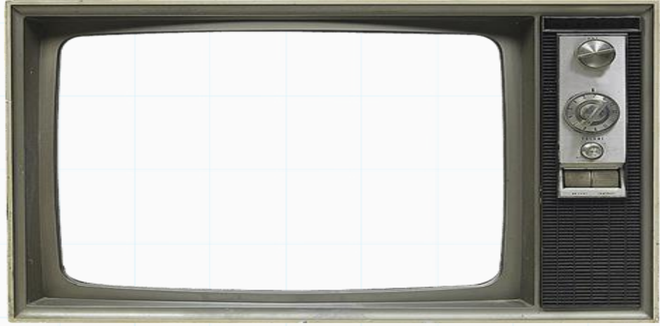
- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

<u>Problema do Conjunto Independente Máximo</u>: Encontrar no grafo um subconjunto de vértices onde para cada par de vértices, não exista aresta entre eles:

modelo



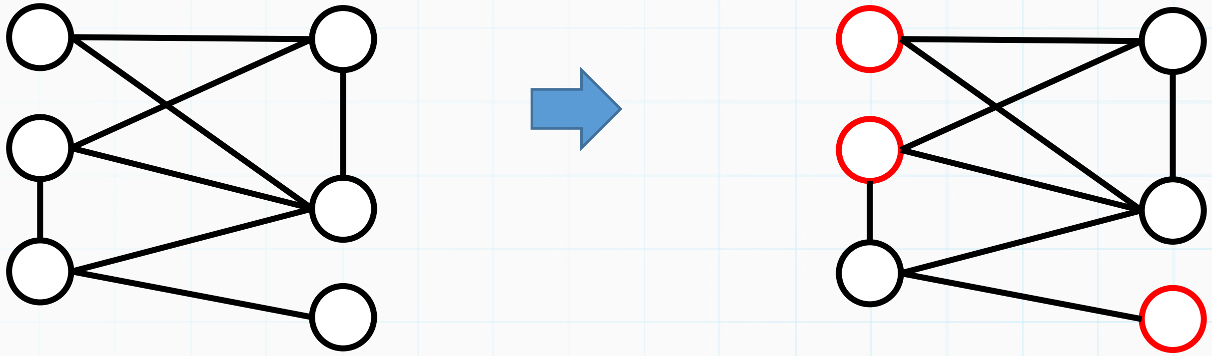
Cortes Estruturais



- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

<u>Problema do Conjunto Independente Máximo</u>: Encontrar no grafo um subconjunto de vértices onde para cada par de vértices, não exista aresta entre eles:

modelo

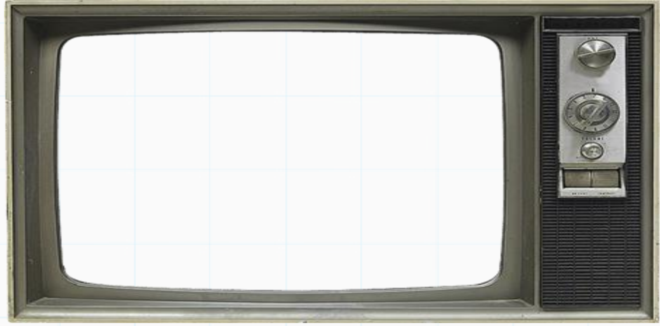


$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

$$x_i + x_j \leq 1, \quad \forall ij \in E$$

$$x_i \in \mathbb{B}^{|V|}$$

Cortes Estruturais



- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

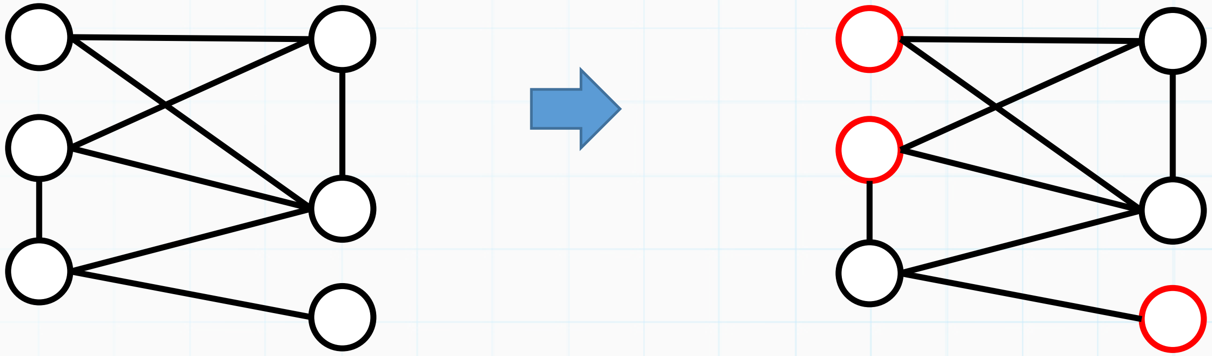
<u>Problema do Conjunto Independente Máximo</u>: Encontrar no grafo um subconjunto de vértices onde para cada par de vértices, não exista aresta entre eles:

modelo

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

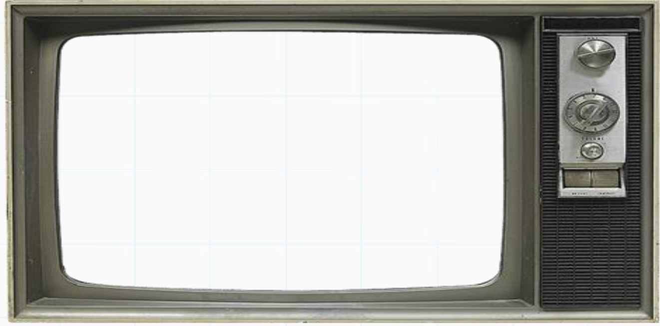
$$x_i + x_j \leq 1, \quad \forall ij \in E$$

$$x_i \in \mathbb{B}^{|V|}$$



Seja C uma clique do grafo, o <u>corte clique</u> é :

Cortes Estruturais



- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

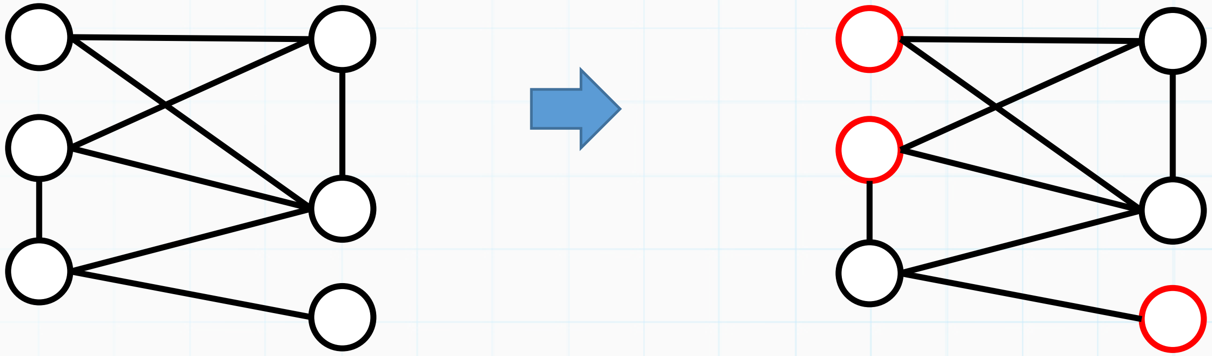
Problema do Conjunto Independente Máximo: Encontrar no grafo um subconjunto de vértices onde para cada par de vértices, não exista aresta entre eles:

modelo

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

$$x_i + x_j \leq 1, \quad \forall ij \in E$$

$$x_i \in \mathbb{B}^{|V|}$$

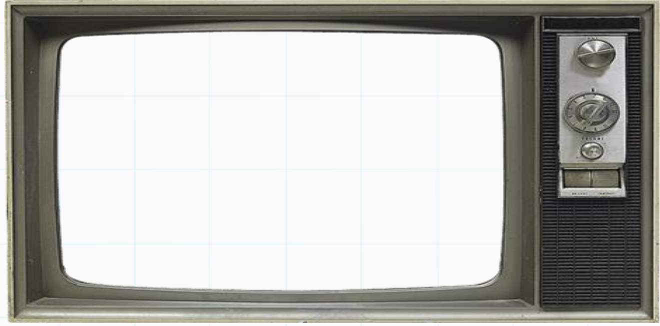


Seja C uma clique do grafo, o corte clique é :

$$\boxed{\sum_{i \in C} x_i \leq 1}$$

é válido

Cortes Estruturais



- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

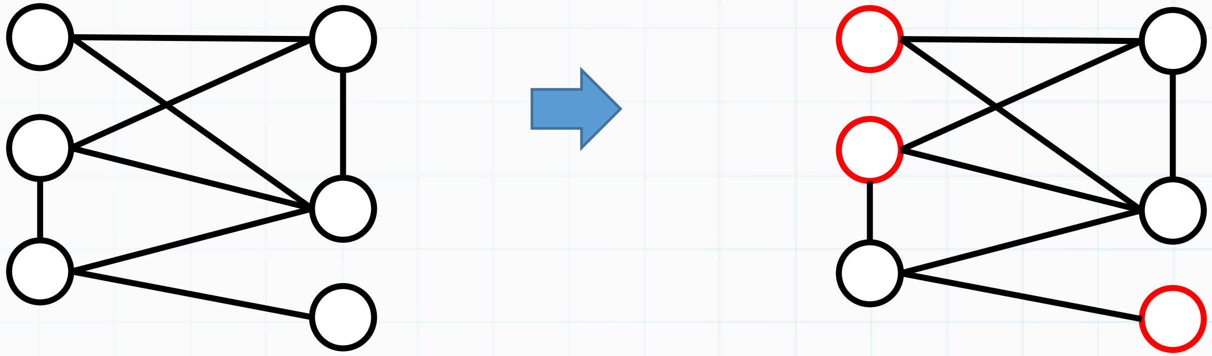
<u>Problema do Conjunto Independente Máximo</u>: Encontrar no grafo um subconjunto de vértices onde para cada par de vértices, não exista aresta entre eles:

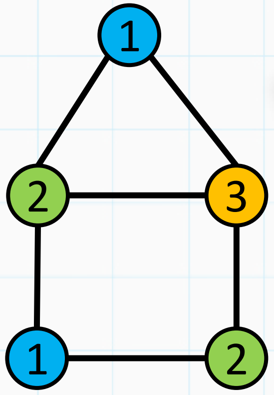
modelo

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

$$x_i + x_j \leq 1, \quad \forall ij \in E$$

$$x_i \in \mathbb{B}^{|V|}$$





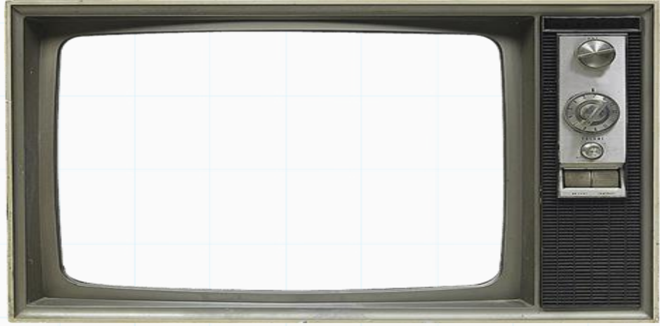
Seja C uma clique do grafo, o <u>corte clique</u> é :

$$\boxed{\sum_{i \in C} x_i \leq 1}$$

é válido

usamos no problema de coloração (que pode ser visto como uma coleção de conjuntos independentes)

Cortes Estruturais



- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

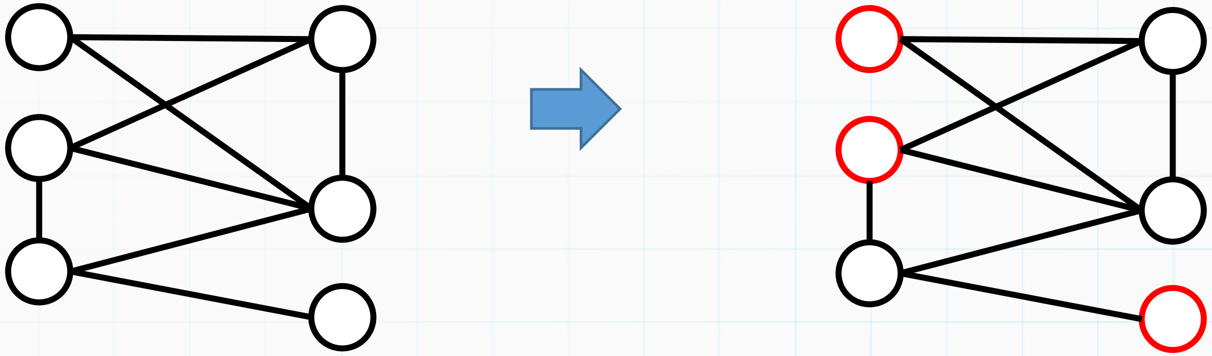
<u>Problema do Conjunto Independente Máximo</u>: Encontrar no grafo um subconjunto de vértices onde para cada par de vértices, não exista aresta entre eles:

modelo

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

$$x_i + x_j \leq 1, \quad \forall ij \in E$$

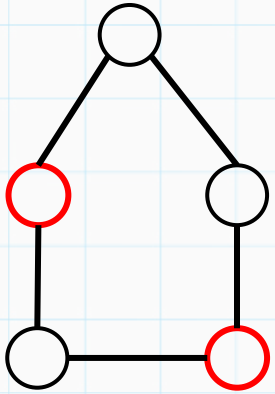
$$x_i \in \mathbb{B}^{|V|}$$



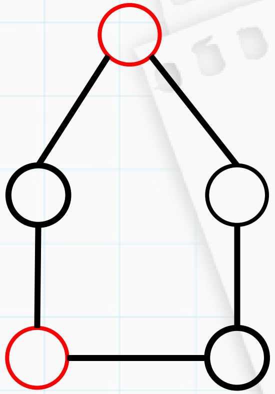
Agora considere C um ciclo de tamanho impar no grafo, temos que:

corte?

pois tem que alternar os vértices no ciclo

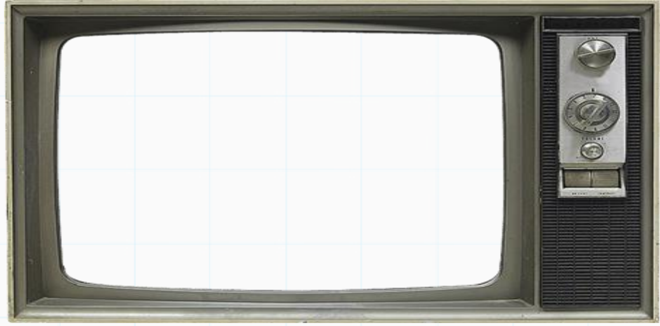


ou



ou...

Cortes Estruturais



- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

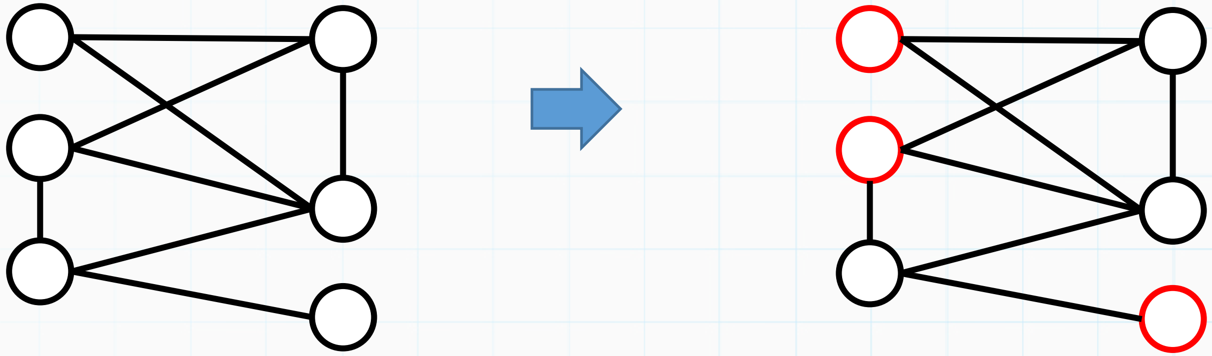
Problema do Conjunto Independente Máximo: Encontrar no grafo um subconjunto de vértices onde para cada par de vértices, não exista aresta entre eles:

modelo

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

$$x_i + x_j \leq 1, \quad \forall ij \in E$$

$$x_i \in \mathbb{B}^{|V|}$$

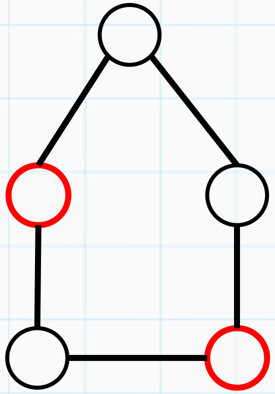


Agora considere C um ciclo de tamanho impar no grafo, temos que:

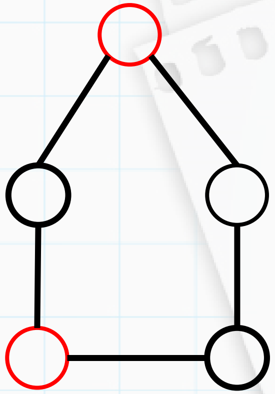
$$\boxed{\sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C| - 1}{2}}$$

é válido

pois tem que alternar os vértices no ciclo

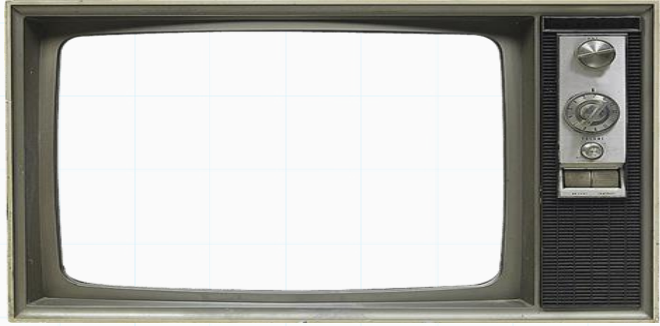


ou



ou...

Cortes Estruturais



Agora considere C um ciclo de tamanho impar no grafo, temos que:

$$\boxed{\sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C|-1}{2}}$$ é válido

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

$$\boxed{x_i + x_j \leq 1, \quad \forall ij \in E}$$

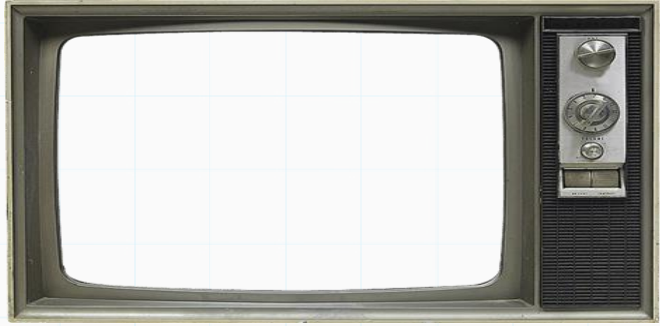
$$x_i \in \mathbb{B}^{|V|}$$

Podemos comprovar formalmente a validade desse corte através do procedimento de C-G.

pois:

1) Toda inequação conseguida a partir de comb. linear de inequações válidas também será válida
2) O procedimento de C-G é um procedimento de comb. linear

Cortes Estruturais



Agora considere C um ciclo de tamanho impar no grafo, temos que:

$$\boxed{\sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C|-1}{2}}$$

é válido

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

$$\boxed{x_i + x_j \leq 1, \quad \forall ij \in E}$$

$$x_i \in \mathbb{B}^{|V|}$$

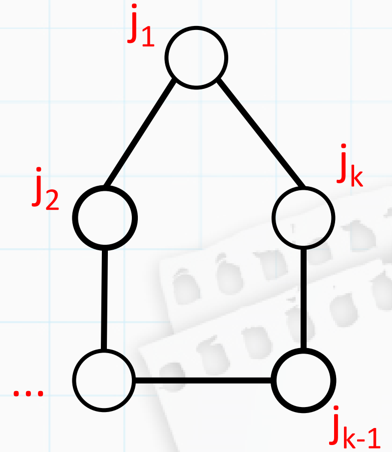
Podemos comprovar formalmente validade desse corte através do procedimento de C-G.
Vamos somar todas as inequações de arestas para o ciclo impar $C = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$

$$x_{j_1} + x_{j_k} \leq 1$$

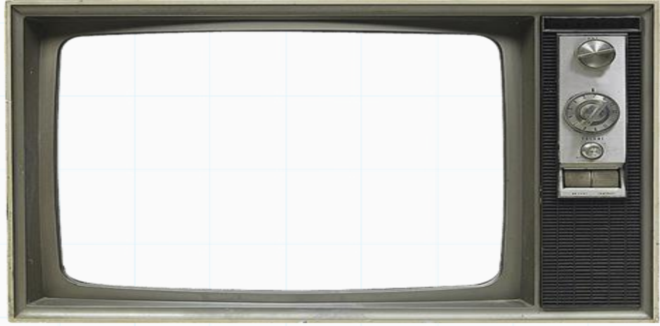
$$x_{j_i} + x_{j_{i+1}} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, k-1,$$

somando

$$2 \sum_{i \in C} x_i \leq |C|$$



Cortes Estruturais



Agora considere C um ciclo de tamanho impar no grafo, temos que:

$$\boxed{\sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C|-1}{2}}$$

é válido

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

$$\boxed{x_i + x_j \leq 1, \quad \forall ij \in E}$$

$$x_i \in \mathbb{B}^{|V|}$$

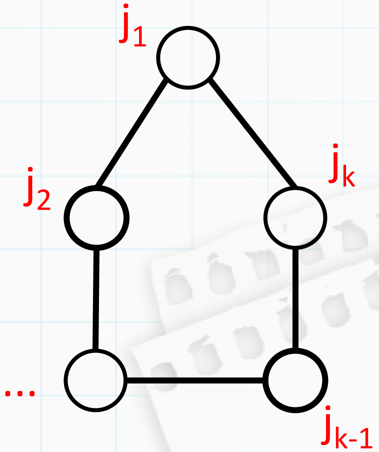
Podemos comprovar a validade desse corte através do procedimento de C-G. Vamos somar todas as inequações de arestas para o ciclo impar C ={j_1,j_2,...,j_k}

$$x_{j_1} + x_{j_k} \leq 1$$

$$x_{j_i} + x_{j_{i+1}} \leq 1, \;\; i = 1, \ldots, k-1,$$

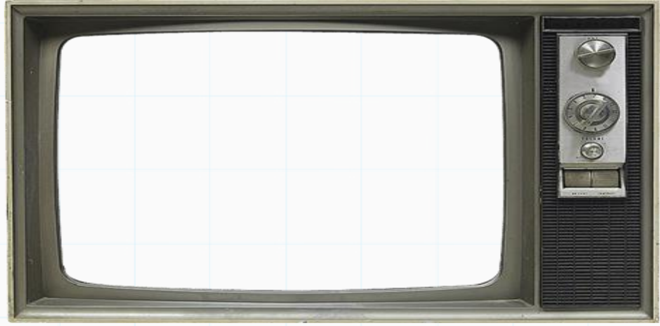
somando

$$2 \sum_{i \in C} x_i \leq |C|$$



Dividindo por 2 e arredondando

Cortes Estruturais



Agora considere C um ciclo de tamanho impar no grafo, temos que:

$$\boxed{\sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C|-1}{2}}$$ é válido

$$\max \sum_{i \in V} x_i$$

$$\boxed{x_i + x_j \leq 1, \quad \forall ij \in E}$$

$$x_i \in \mathbb{B}^{|V|}$$

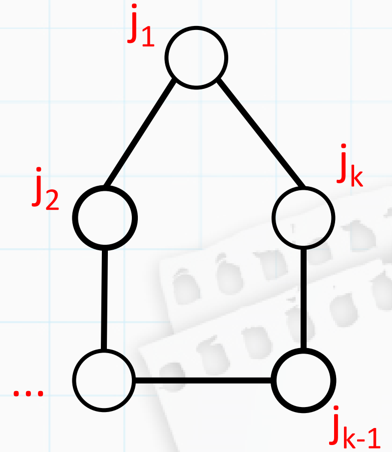
Podemos comprovar a validade desse corte através do procedimento de C-G. Vamos somar todas as inequações de arestas para o ciclo impar C $=\{j_1, j_2, \ldots, j_k\}$

$$x_{j_1} + x_{j_k} \leq 1$$

$$x_{j_i} + x_{j_{i+1}} \leq 1, \quad i = 1, \ldots, k-1,$$

somando

$$2 \sum_{i \in C} x_i \leq |C|$$

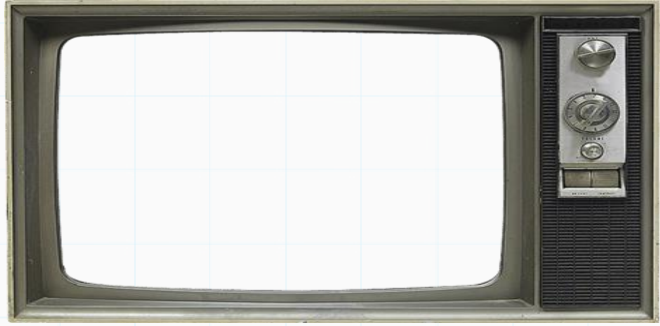


Dividindo por 2 e arredondando o lado direito para baixo

$$\sum_{i \in C} x_i \leq \frac{|C|-1}{2}$$

pois |C| é impar

Cortes Estruturais

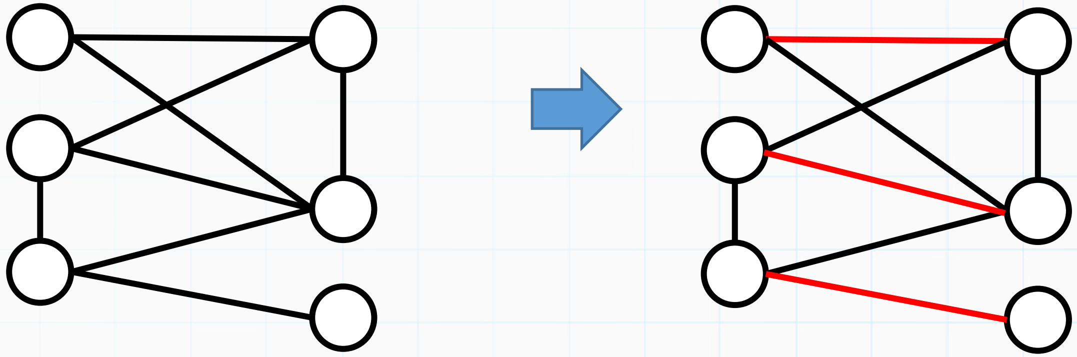


- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

<u>Cortes da Emparelhamento</u>:

<u>Problema de emparelhamento</u>: encontrar o subconjunto de arestas que “casem” os vértices (cada vértice só pode ter uma ligação)

modelo

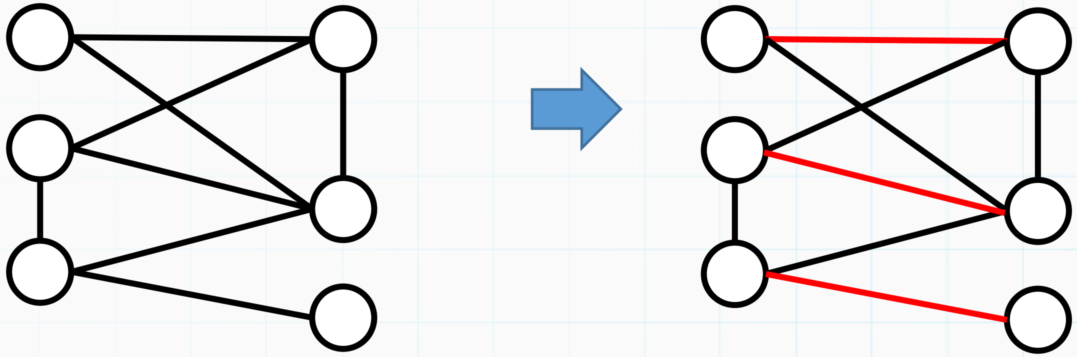


Cortes Estruturais

- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

<u>Cortes da Emparelhamento</u>:

<u>Problema de emparelhamento</u>: encontrar o subconjunto de arestas que “casem” os vértices (cada vértice só pode ter uma ligação)



modelo

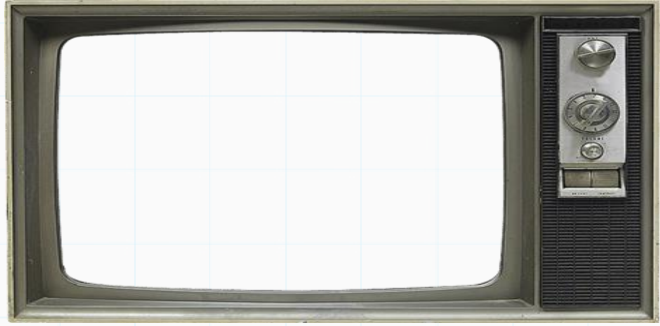
$$\max. \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in V,$$

$$x_e \in \{0,1\}, \quad e \in E,$$

onde <u>E(S,T)</u> denota as arestas entre os conjuntos S e T de vértices

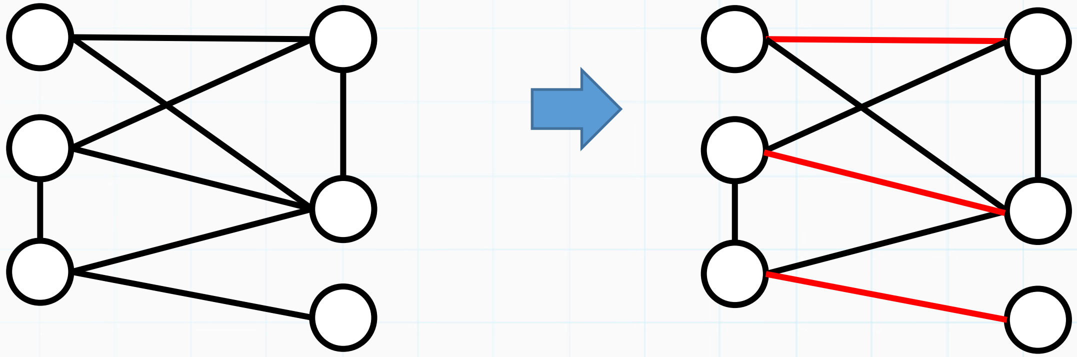
Cortes Estruturais



- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

Cortes da Emparelhamento:

Problema de emparelhamento: encontrar o subconjunto de arestas que "casem" os vértices (cada vértice só pode ter uma ligação)



$$\max. \sum_{e \in E} c_e x_e$$

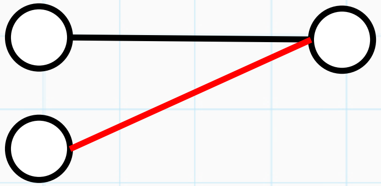
$$\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in V,$$

$$x_e \in \{0,1\}, \quad e \in E,$$

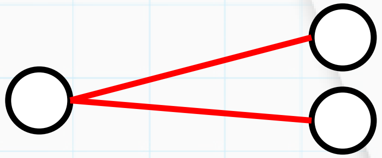
Seja S⊆V, onde |S| é impar, então o corte de emparelhamento:

corte?

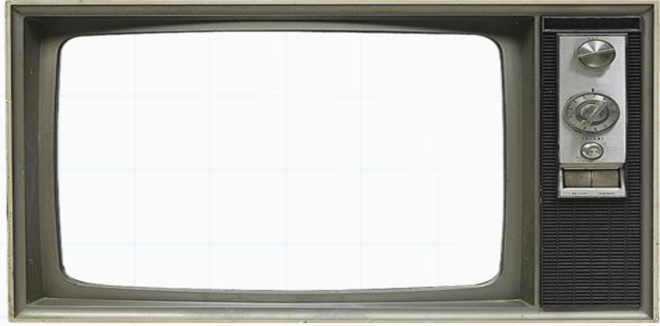
válido



não válido



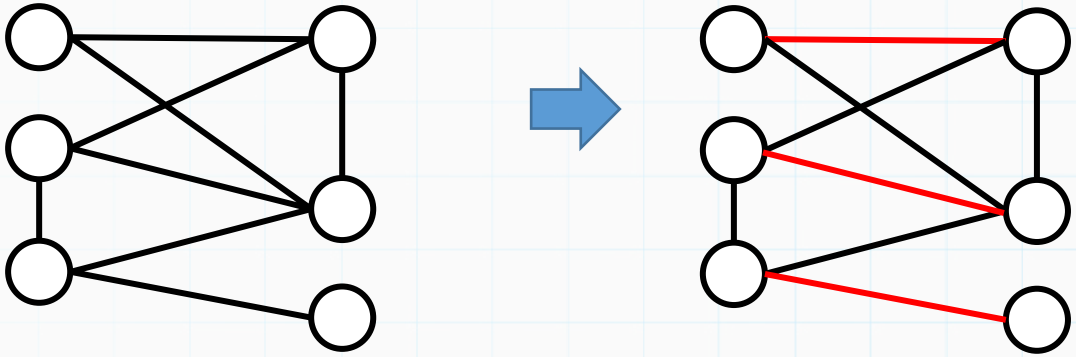
Cortes Estruturais



- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

Cortes da Emparelhamento:

Problema de emparelhamento: encontrar o subconjunto de arestas que "casem" os vértices (cada vértice só pode ter uma ligação)



$$\max. \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in V,$$

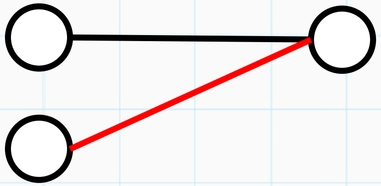
$$x_e \in \{0,1\}, \quad e \in E,$$

Seja $S \subseteq V$, onde $|S|$ é impar, então o corte de emparelhamento:

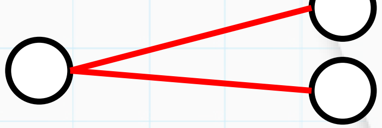
$$\boxed{\sum_{e \in E(S,S)} x_e \leq \frac{|S|-1}{2}}$$

é válido

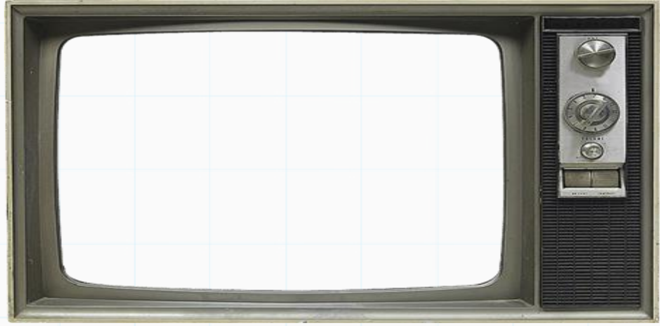
válido



não válido



Cortes Estruturais



$$\max. \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$\boxed{\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in V,}$$

$$x_e \in \{0,1\}, \quad e \in E,$$

<u>Cortes da Emparelhamento</u>:

Seja S⊆V, onde |S| é impar, então o corte de emparelhamento:

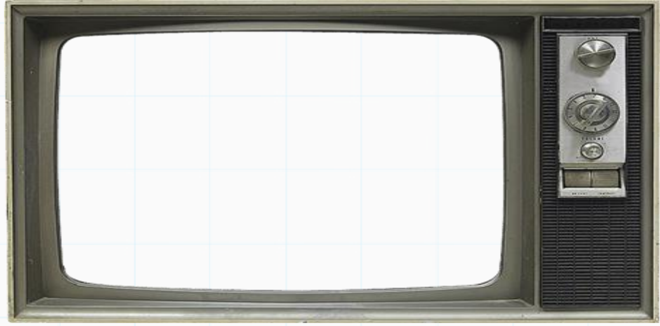
$$\boxed{\sum_{e \in E(S,S)} x_e \leq \frac{|S|-1}{2}}$$

é válido

Podemos comprovar formalmente a validade desse corte através do procedimento de C-G. Vamos somar todas as inequações do modelo para os vértices em S

$$\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in S, \quad \xrightarrow{\text{somando}} \quad \sum_{e \in E(S,V)} x_e \leq |S|.$$

Cortes Estruturais



$$\max. \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$\boxed{\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in V,}$$

$$x_e \in \{0,1\}, \quad e \in E,$$

<u>Cortes da Emparelhamento</u>:

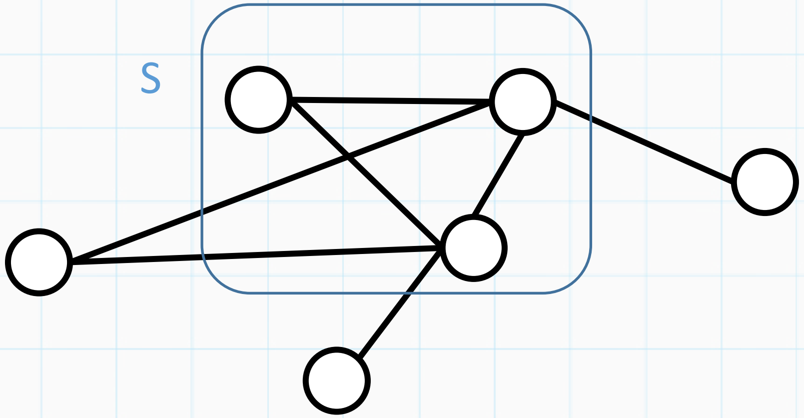
Seja S⊆V, onde |S| é impar, então o corte de emparelhamento:

$$\boxed{\sum_{e \in E(S,S)} x_e \leq \frac{|S|-1}{2}}$$

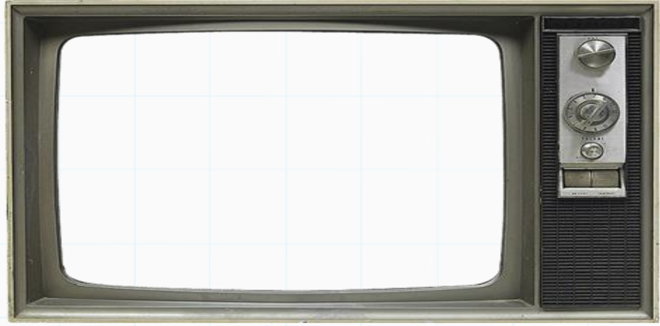
é válido

Podemos comprovar formalmente a validade desse corte através do procedimento de C-G. Vamos somar todas as inequações do modelo para os vértices em S

$$\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in S, \xrightarrow{\text{somando}} \sum_{e \in E(S,V)} x_e \leq |S|. \xrightarrow{\text{separando}} 2 \sum_{e \in E(S,S)} x_e + \sum_{e \in E(S,V \setminus S)} x_e \leq |S|.$$



Cortes Estruturais



Cortes da Emparelhamento:

Seja S⊆V, onde |S| é impar, então o corte de emparelhamento:

$$\boxed{\sum_{e \in E(S,S)} x_e \leq \frac{|S|-1}{2}}$$

é válido

$$\max. \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$\boxed{\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in V,}$$

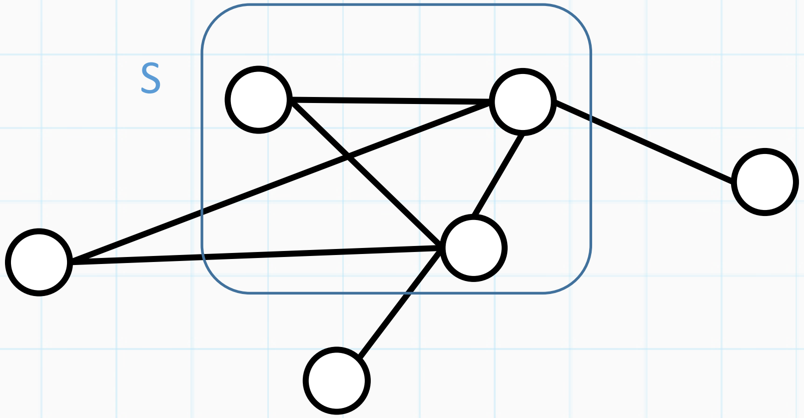
$$x_e \in \{0,1\}, \quad e \in E,$$

Podemos comprovar formalmente a validade desse corte através do procedimento de C-G.
Vamos somar todas as inequações do modelo para os vértices em S

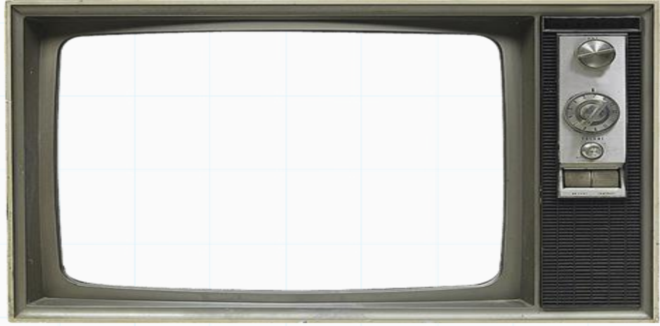
$$\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in S, \xrightarrow{\text{somando}} \sum_{e \in E(S,V)} x_e \leq |S|. \xrightarrow{\text{separando}} 2 \sum_{e \in E(S,S)} x_e + \sum_{e \in E(S,V \setminus S)} x_e \leq |S|.$$

Dividindo por 2

$$\sum_{e \in E(S,S)} x_e + \frac{1}{2} \sum_{e \in E(S,V \setminus S)} x_e \leq \frac{|S|}{2}.$$



Cortes Estruturais



Cortes da Emparelhamento:

Seja S⊆V, onde |S| é impar, então o corte de emparelhamento:

$$\boxed{\sum_{e \in E(S,S)} x_e \leq \frac{|S|-1}{2}}$$

é válido

$$\max \sum_{e \in E} c_e x_e$$

$$\boxed{\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in V,}$$

$$x_e \in \{0,1\}, \quad e \in E,$$

Podemos comprovar formalmente a validade desse corte através do procedimento de C-G.
Vamos somar todas as inequações do modelo para os vértices em S

$$\sum_{e \in E(v,V)} x_e \leq 1, \quad v \in S, \xrightarrow{\text{somando}} \sum_{e \in E(S,V)} x_e \leq |S|. \xrightarrow{\text{separando}} 2 \sum_{e \in E(S,S)} x_e + \sum_{e \in E(S,V \setminus S)} x_e \leq |S|.$$

Dividindo por 2

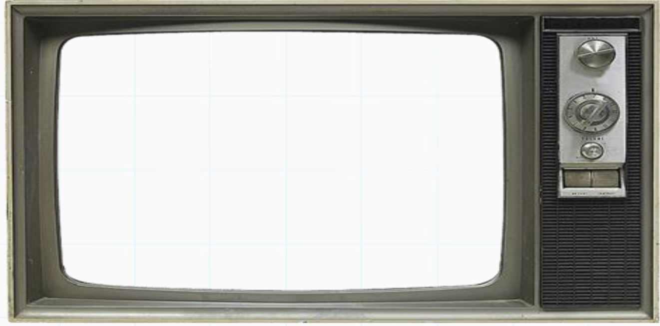
$$\sum_{e \in E(S,S)} x_e + \frac{1}{2} \sum_{e \in E(S,V \setminus S)} x_e \leq \frac{|S|}{2}.$$

Arredondando o lado esquerdo e depois o direito

$$\boxed{\sum_{e \in E(S,S)} x_e \leq \frac{|S|-1}{2}}$$

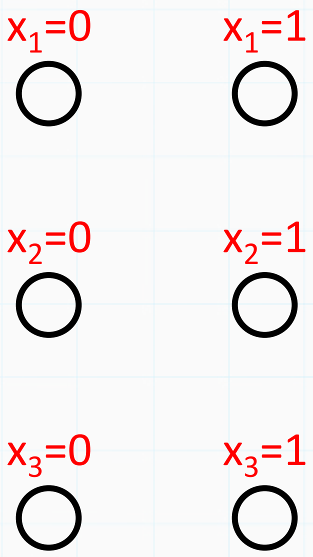
pois |S| é impar

Cortes Estruturais

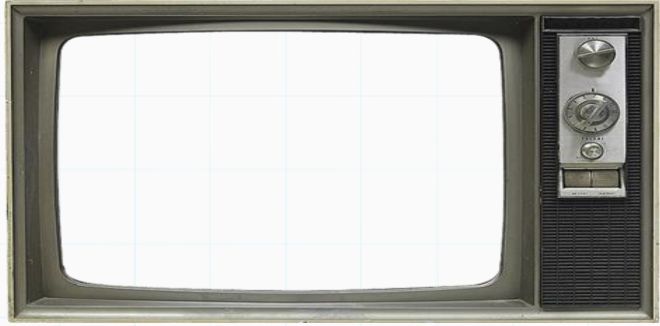


Cortes do grafo de conflito em variáveis binárias:

Seja um poliedro P(Ax<=b) com variáveis binárias. Definimos o grafo G_x onde para cada variável x_i em P teremos dois vértice: $x_i=1$ e $x_i=0$

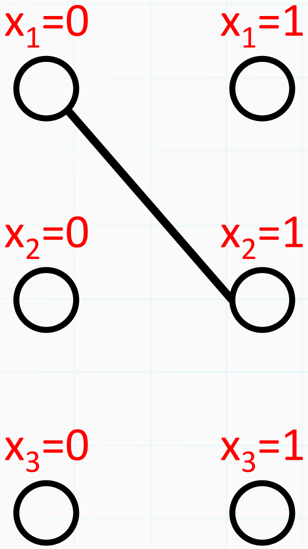


Cortes Estruturais

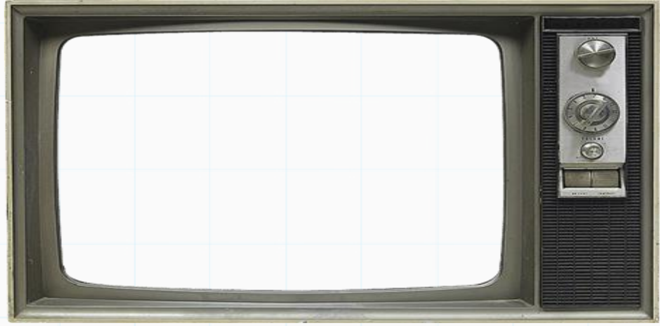


Cortes do grafo de conflito em variáveis binárias:

Seja um poliedro P(Ax<=b) com variáveis binárias. Definimos o grafo G_x onde para cada variável x_i em P teremos dois vértice: $x_i=1$ e $x_i=0$. Definimos que a aresta $(x_i=a\ ,\ x_j=b)$, para $a,b \in \{0,1\}$, está no grafo de conflito se este par de atribuições for inviável para o poliedro P (conflito)



Cortes Estruturais

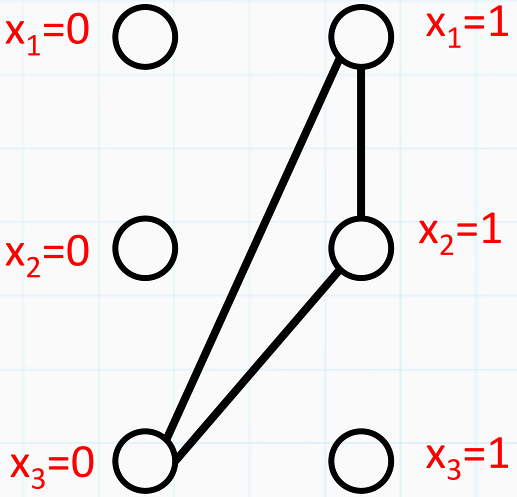


Cortes do grafo de conflito em variáveis binárias:

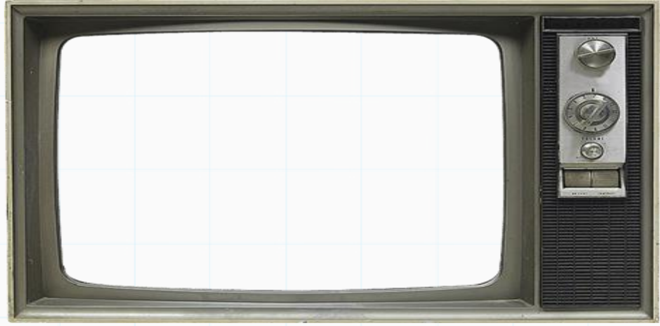
Seja um poliedro P(Ax<=b) com variáveis binárias. Definimos o grafo G_x onde para cada variável x_i em P teremos dois vértice: x_i=1 e x_i=0. Definimos que a aresta (x_i=a , x_j=b), para a,b ∈ {0,1}, está no grafo de conflito se este par de atribuições for inviável para o poliedro P (conflito).

Ex:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &\leq 1, \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 &\leq 2, \\
x_1, x_2, x_3 &\in \{0,1\},
\end{aligned}
$$



Cortes Estruturais

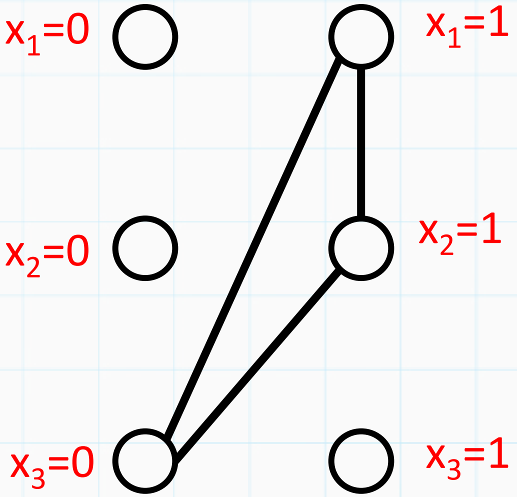


Cortes do grafo de conflito em variáveis binárias:

Seja um poliedro P(Ax<=b) com variáveis binárias. Definimos o grafo G_x onde para cada variável x_i em P teremos dois vértice: $x_i=1$ e $x_i=0$. Definimos que a aresta ($x_i=a$, $x_j=b$), para a,b ∈ $\{0,1\}$, está no grafo de conflito se este par de atribuições for inviável para o poliedro P (conflito).

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 &\leq 1, \\ 3x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 &\leq 2, \\ x_1, x_2, x_3 &\in \{0,1\}, \end{aligned}$$



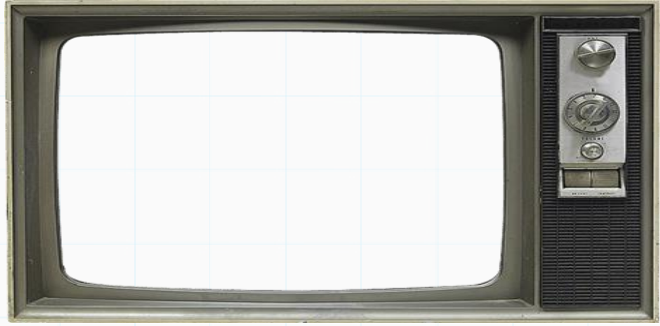
Cortes cliques em G_x são válidos:

$$x_1 + x_2 + (1 - x_3) \leq 1$$

ou

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 0$$

Cortes Estruturais

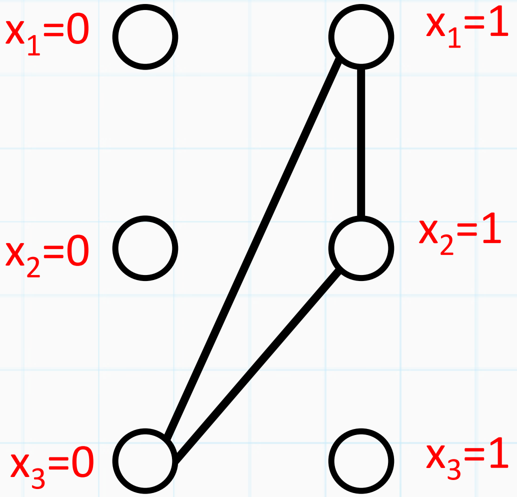


Cortes do grafo de conflito em variáveis binárias:

Seja um poliedro P(Ax<=b) com variáveis binárias. Definimos o grafo G_x onde para cada variável x_i em P teremos dois vértice: $x_i=1$ e $x_i=0$. Definimos que a aresta $(x_i=a\ ,\ x_j=b)$, para a,b ∈ $\{0,1\}$, está no grafo de conflito se este par de atribuições for inviável para o poliedro P (conflito).

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 &\leq 1, \\ 3x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 &\leq 2, \\ x_1, x_2, x_3 &\in \{0,1\}, \end{aligned}$$



Cortes cliques em G_x são válidos:

$$x_1 + x_2 + (1 - x_3) \leq 1$$

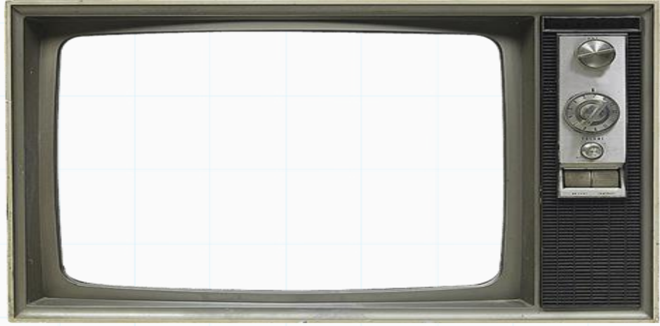
ou

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 0$$

De forma geral temos para clique C em G_x:

$$\boxed{\sum_{j^1 \in C} x_j + \sum_{j^0 \in C} (1 - x_j) \leq 1}$$

Cortes Estruturais

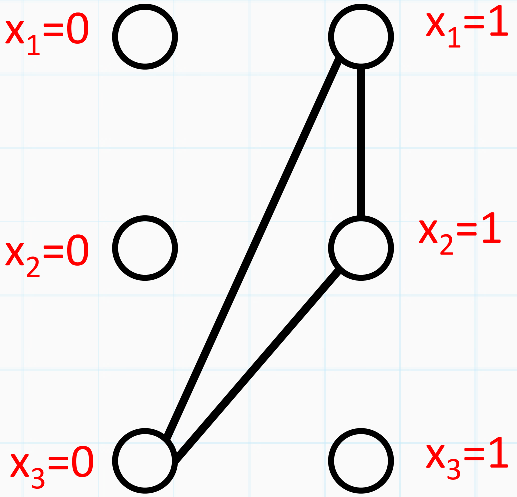


<u>Cortes do grafo de conflito em variáveis binárias</u>:

Seja um poliedro <u>P(Ax<=b) </u>com variáveis binárias. Definimos o grafo G_x onde para cada variável x_i em P teremos dois vértice: $x_i=1$ e $x_i=0$. Definimos que a aresta $(x_i=a\ ,\ x_j=b)$, para a,b ∈ {0,1}, está no grafo de conflito se este par de atribuições for inviável para o poliedro P (conflito).

Ex:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \ \ x_3 &\leq 1, \\ 3x_1 + \ \ x_2 - 2x_3 &\leq 2, \\ x_1, x_2, x_3 &\in \{0,1\}, \end{aligned}$$



Cortes cliques em G_x são válidos:

$$x_1 + x_2 + (1 - x_3) \leq 1$$

ou

$$x_1 + x_2 - x_3 \leq 0$$

De forma geral temos para clique C em G_x:

$$\boxed{\sum_{j^1 \in C} x_j + \sum_{j^0 \in C} (1 - x_j) \leq 1}$$

Assim como cortes de ciclo impar são válidos, dado um ciclo impar C em G_x:

$$\boxed{\sum_{j^1 \in C} x_j + \sum_{j^0 \in C} (1 - x_j) \leq \frac{|C| - 1}{2}}$$

Cortes de Conflito: Dado o sistema

Exercício

$$5x_1 + 4x_2 - 9x_3 \leq 3$$
$$7x_1 + x_2 - 11x_3 \leq 2$$
$$-3x_2 - 2x_5 \geq -3$$
$$x_5 \leq x_4$$
$$x_1 \leq x_4$$

Que corte de conflito podemos deduzir ?

Onde corte clique é dado por:

$$\sum_{j^1 \in C} x_j + \sum_{j^0 \in C} (1 - x_j) \leq 1$$

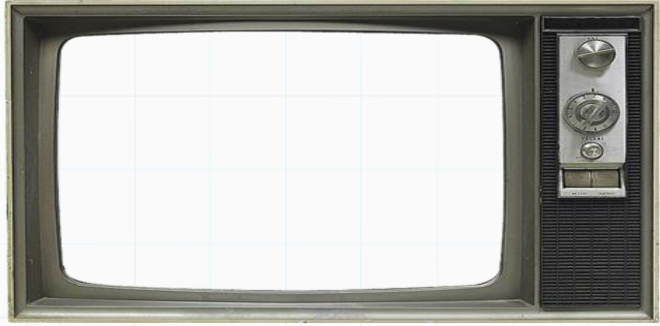
E de ciclo por :

$$\sum_{j^1 \in C} x_j + \sum_{j^0 \in C} (1 - x_j) \leq \frac{|C| - 1}{2}$$

Monte o grafo usando apenas os seguintes vértices :

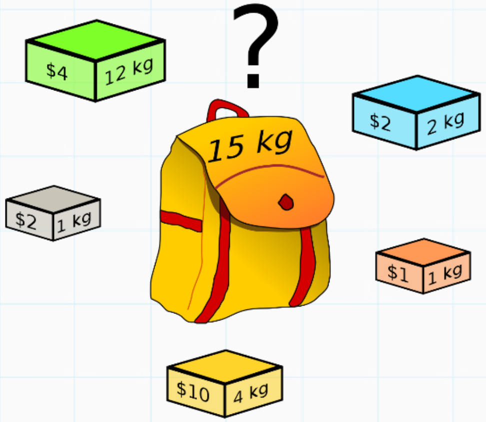
$x_4=0$ $x_2=1$ $x_1=1$ $x_5=1$ $x_3=0$

Cortes Estruturais

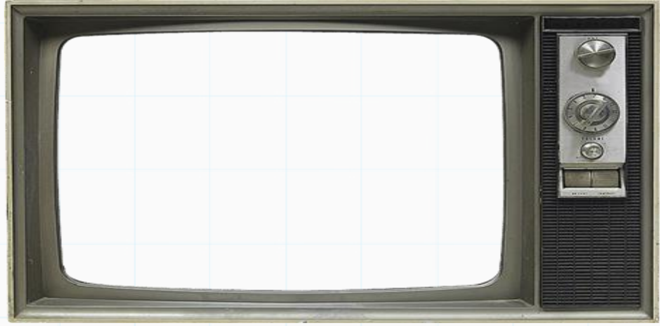


- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

<u>Cortes da Mochila</u>: modelo



Cortes Estruturais



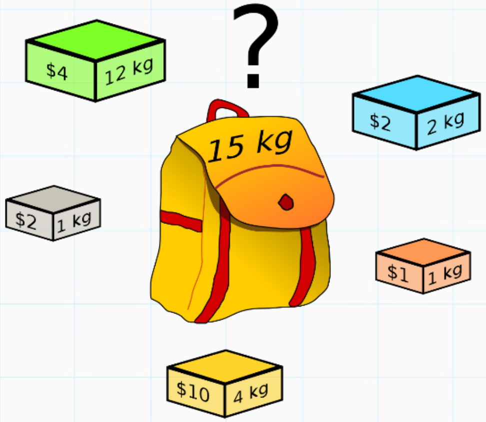
- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

<u>Cortes da Mochila</u>: modelo

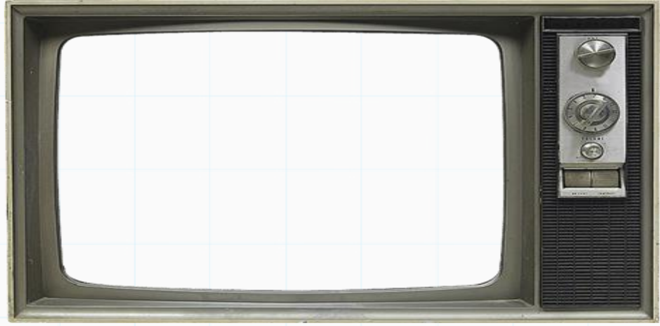
$$\max\ c^t x$$

$$\sum_{i \in I} p_i x_i \leq C$$

$$x \in \{0,1\}^n$$



Cortes Estruturais



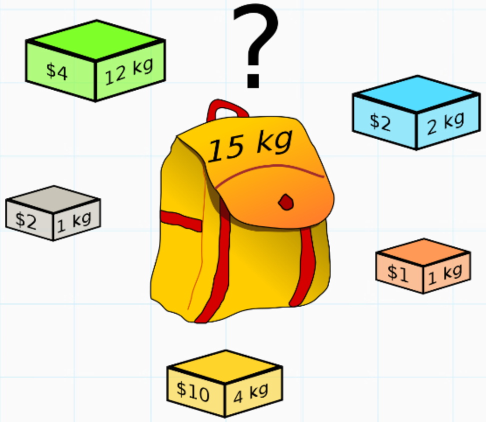
- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

<u>Cortes da Mochila</u>: modelo

$$\max\ c^t x$$

$$\sum_{i \in I} p_i x_i \leq C$$

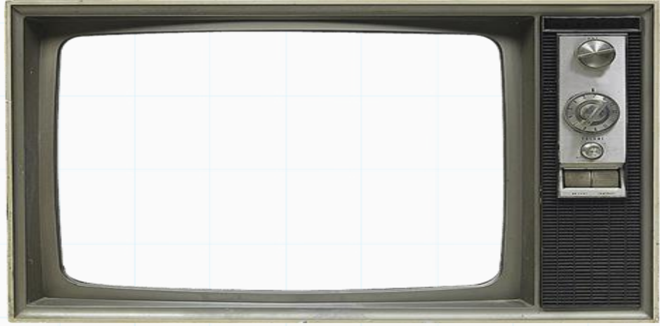
$$x \in \{0,1\}^n$$



Seja $R \subseteq I$, se, $\sum_{i \in R} p_i > C$ então R é dito uma cobertura da mochila

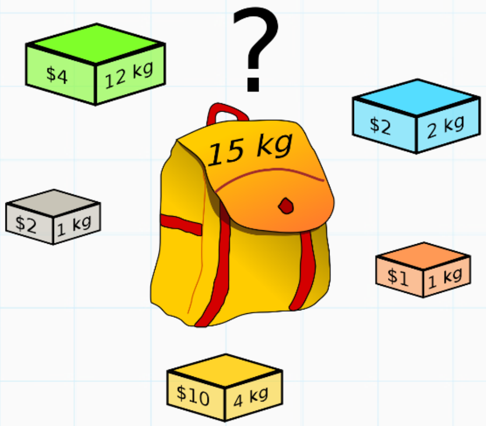
Coberturas são conjuntos de itens que compõem soluções inválidas

Cortes Estruturais



- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

<u>Cortes da Mochila</u>: modelo



$$\max\ c^t x$$

$$\sum_{i\in I} p_i x_i \le C$$

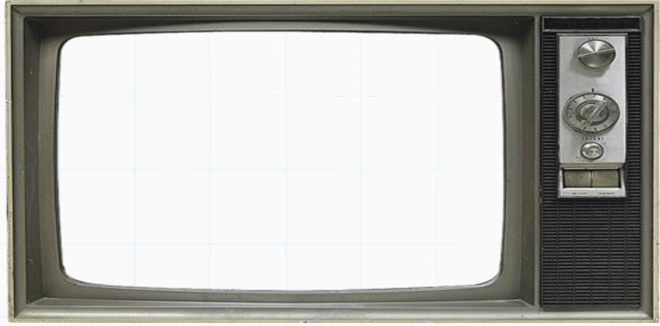
$$x \in \{0,1\}^n$$

Seja $R \subseteq I$, se, $\sum_{i\in R} p_i > C$ então R é dito uma cobertura da mochila

Então temos que o corte $\displaystyle\sum_{i\in R} x_i \le |R| - 1$ é válido para a mochila

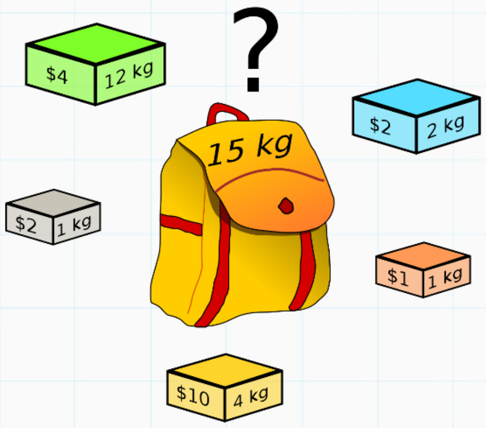
pois a mochila não aguenta todos os itens de R

Cortes Estruturais



- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

<u>Cortes da Mochila</u>: modelo



$$\max\ c^t x$$
$$\sum_{i \in I} p_i x_i \leq C$$
$$x \in \{0,1\}^n$$

Seja $R \subseteq I$, se, $\sum_{i \in R} p_i > C$ então R é dito uma cobertura da mochila

Então temos que o corte $\displaystyle\sum_{i \in R} x_i \leq |R| - 1$ é válido para a mochila

pois a mochila não aguenta todos os itens de R

Ex:

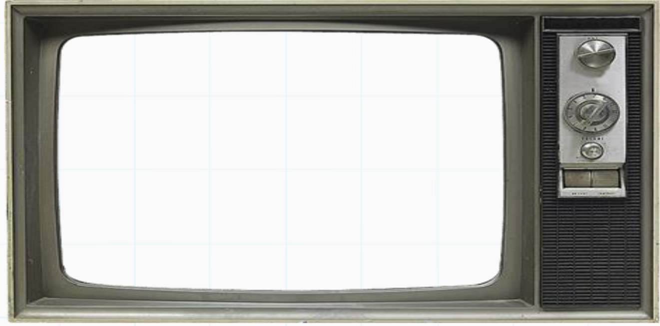
$$S = \{x \in \mathbb{B}^5 | 7x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 4x_5 \leq 17\}$$

Corte cobertura

$$R = \{2, 3, 4, 5\}$$

$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 <= 3$

Cortes Estruturais

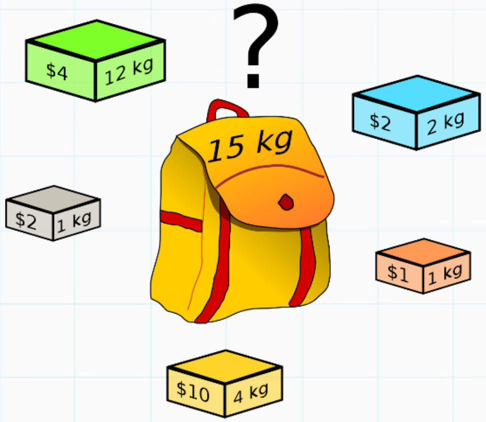


- São cortes baseados em estruturas locais dos problemas:

<u>Cortes da Mochila</u>:

Uma cobertura R é dita <u>minimal</u>, se a retirada de qualquer vértice de R faça ele deixar de ser uma cobertura:
Ex:

$$S = \{x \in \mathbb{B}^5 | 7x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 4x_5 \leq 17\} \qquad R = \{2, 3, 4, 5\}$$



Isto é, tirar qualquer um elemento da cobertura, deixa ela uma solução viável

Cortes Estruturais

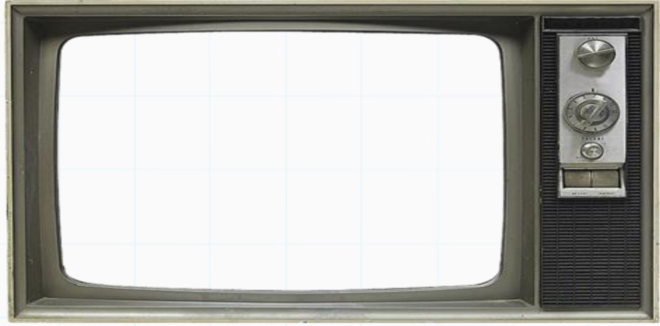
- Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila: Considere o problema

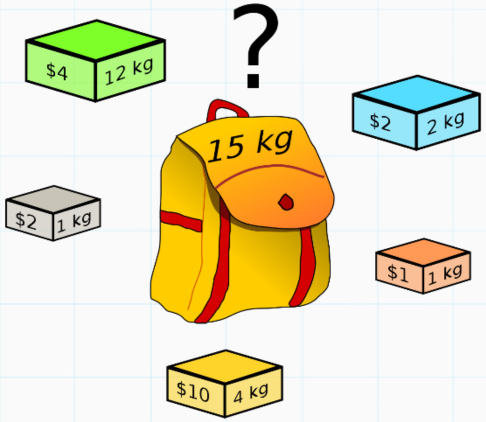
$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$

E o corte de cobertura definido por $R = \{3, 4, 5, 6\}$

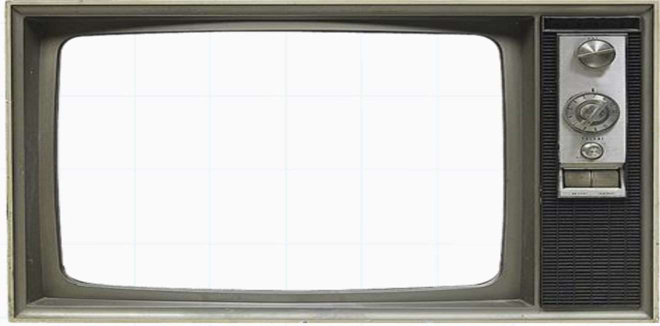
é minimal ?

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$



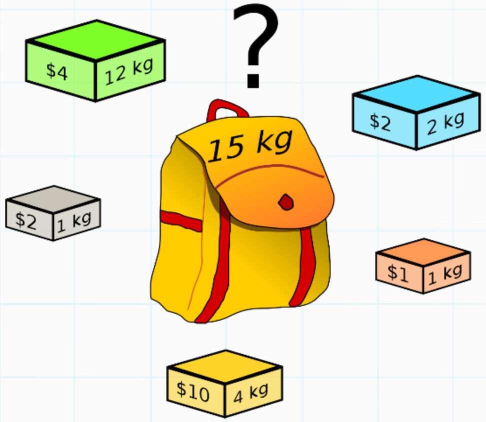


Cortes Estruturais



- Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila: Considere o problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$



E o corte de cobertura definido por $R = \{3, 4, 5, 6\}$

é minimal ?

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

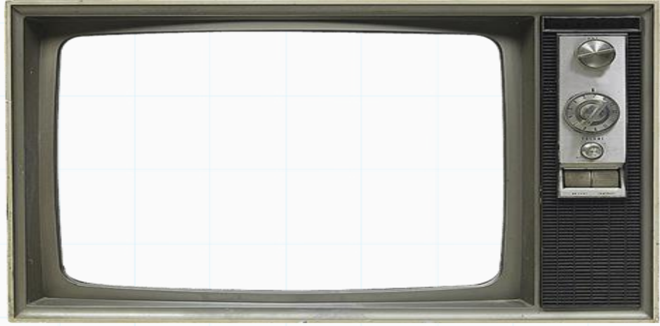
Vamos tentar fortificar o corte com outra variável (ex: x_1) , vemos que o corte é válido para o subproblema

$$6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

onde x_1=x_2=x_7=0 (se a mochila tivesse apenas os itens do corte)

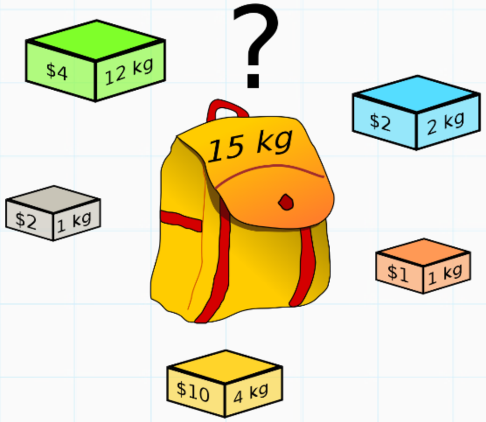
subproblema

Cortes Estruturais



- <u>Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila</u>: Considere o problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$



E o corte de cobertura definido por $R = \{3, 4, 5, 6\}$

é minimal ?

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

Vamos tentar fortificar o corte com outra variável (ex: x_1) , vemos que o corte é válido para o subproblema

$$6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

onde $x_1 = x_2 = x_7 = 0$ (se a mochila tivesse apenas os itens do corte)

subproblema

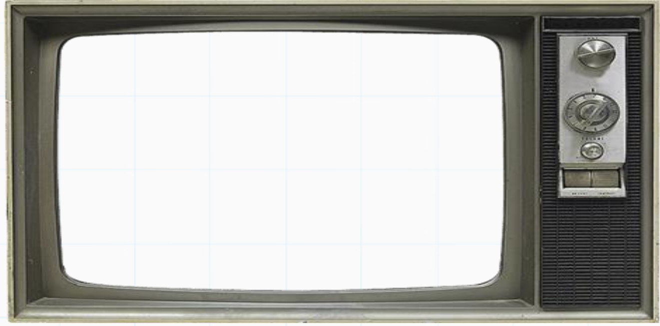
Queremos saber para que valores de α o corte $\boxed{\alpha x_1} + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$

Corte estendido

é válido para o subproblema $\boxed{11x_1} + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$?

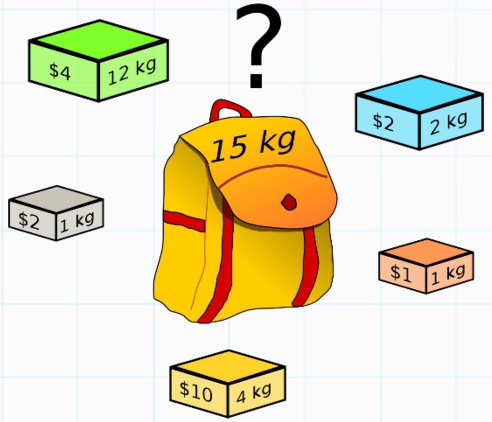
subproblema estendido de x1

Cortes Estruturais



- <u>Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila</u>: Considere o problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$



E o corte de cobertura definido por $R = \{3, 4, 5, 6\}$

é minimal ?

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

Vamos tentar fortificar o corte com outra variável (ex: x_1) , vemos que o corte é válido para o subproblema

$$6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

onde $x_1=x_2=x_7=0$ (se a mochila tivesse apenas os itens do corte)

subproblema

Queremos saber para que valores de α o corte $\boxed{\alpha x_1} + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$

Corte estendido

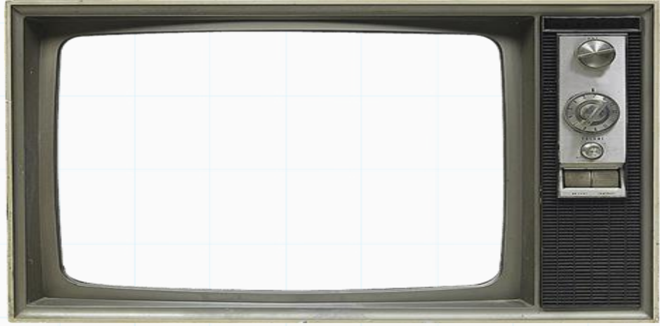
é válido para o subproblema $\boxed{11x_1} + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$?

subproblema estendido de x1

Caso 1: $x_1=0$

válido pois recai no corte original

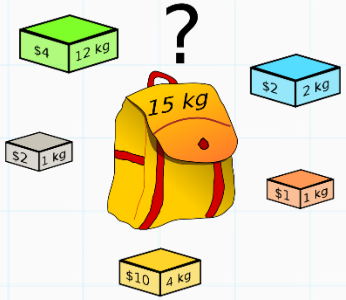
Cortes Estruturais



- <u>Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila</u>: Considere o problema

problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$



Caso 2: x_1=1

corte

$$\alpha x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$\alpha + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

se válido para subproblema então

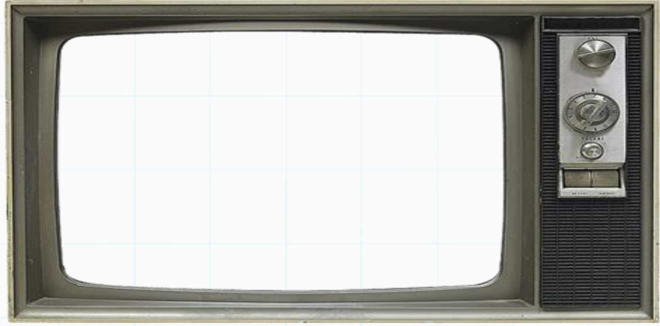
subproblema

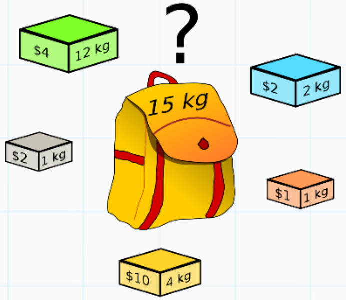
$$11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

$$\color{red}{11} + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

$$6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 8$$

Cortes Estruturais





- Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila: Considere o problema

problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$

Caso 2: x_1=1

corte

$$\alpha x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$\alpha + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

se válido para subproblema então

subproblema

$$11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

$$11 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

$$6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 8$$

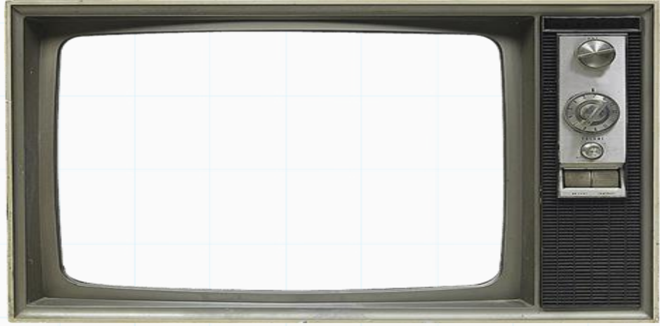
então, dentre os itens (3,4,5,6), no máximo quantos podem estar na mochila caso o item 1 seja fixo ? Essa será a condição para a validade do novo corte, i.e.

$$\alpha + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$\alpha + \max\{x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 8\} \leq 3$$

Reparem que temos que resolver um pequeno problema da mochila para encontrar o maximo

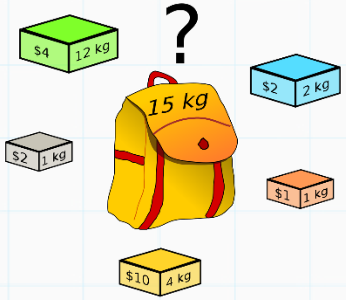
Cortes Estruturais



- Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila: Considere o problema

problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$



Caso 2: x_1=1

corte

$$\alpha x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$\alpha + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

se válido para subproblema então

subproblema

$$11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

$$11 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

$$6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 8$$

então, dentre os itens (3,4,5,6), no máximo quantos podem estar na mochila caso o item 1 seja fixo ? Essa será a condição para a validade do novo corte, i.e.

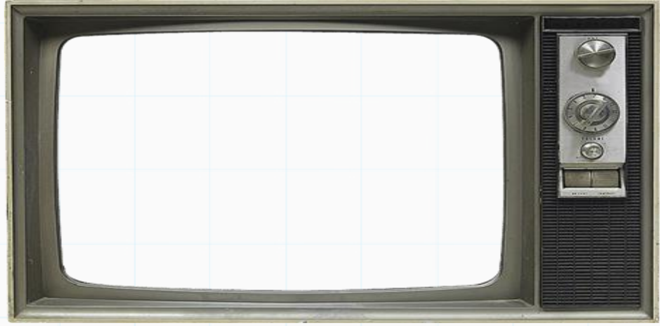
$$\alpha + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$\alpha + \max\{x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 8\} \leq 3$$

Vemos que $\alpha \leq 2$ (no máximo 1 item pode ser colocado no subproblema), logo:

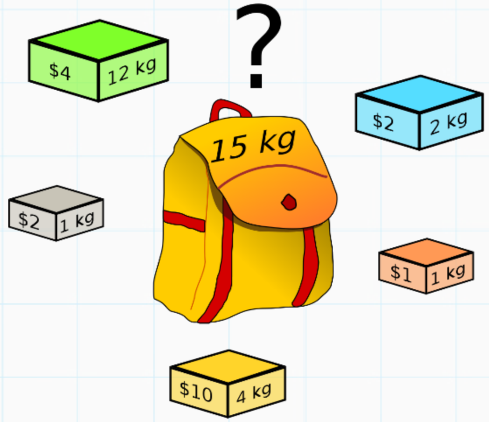
$$\boxed{2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3}$$

Cortes Estruturais



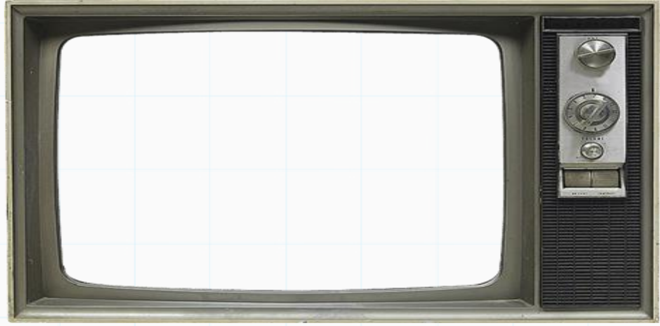
- <u>Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila</u>: Considere o problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$



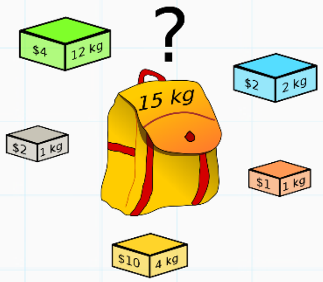
Dado o corte fortalecido $2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$, vamos tentar fortalecer com a variável x_2:

Cortes Estruturais



- Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila: Considere o problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$

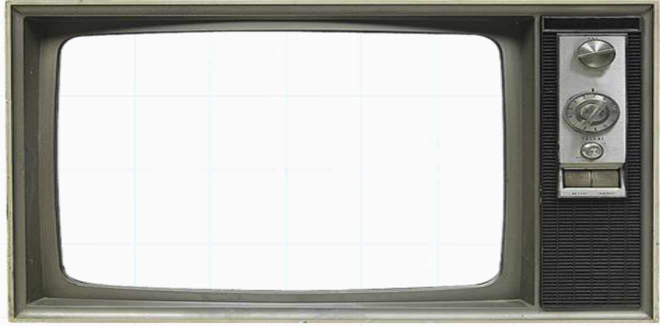


Dado o corte fortalecido $2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$, vamos tentar fortalecer com a variável x_2:

Vemos que o corte é válido para $11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$

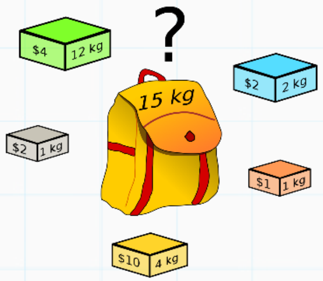
onde x_2=x_7=0 (se a mochila tivesse apenas os itens do corte)

Cortes Estruturais



- Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila: Considere o problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$



Dado o corte fortalecido $2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$, vamos tentar fortalecer com a variável x_2:

Vemos que o corte é válido para $11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$

onde $x_2 = x_7 = 0$ (se a mochila tivesse apenas os itens do corte)

Queremos saber para que valores de α o corte

$$2x_1 + \boxed{\alpha x_2} + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

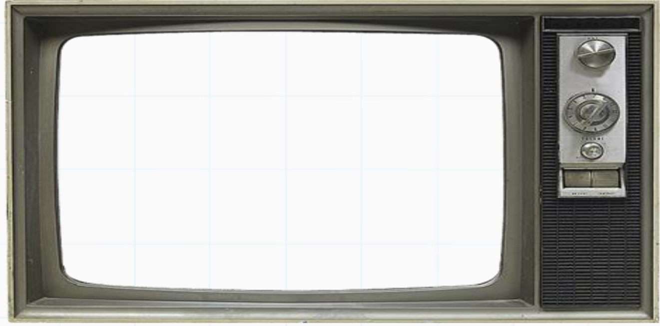
Corte estendido

é válido para o subproblema

$$11x_1 + \boxed{6x_2} + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

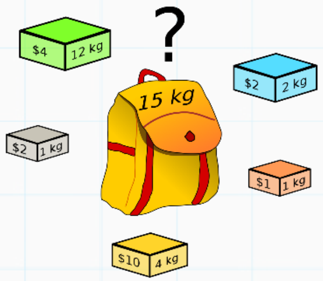
subproblema estendido de x2

Cortes Estruturais



- Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila: Considere o problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$



Dado o corte fortalecido $2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$, vamos tentar fortalecer com a variável x_2:

Vemos que o corte é válido para $11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$

onde $x_2=x_7=0$ (se a mochila tivesse apenas os itens do corte)

Queremos saber para que valores de α o corte

$$2x_1 + \boxed{\alpha x_2} + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

Corte estendido

é válido para o subproblema

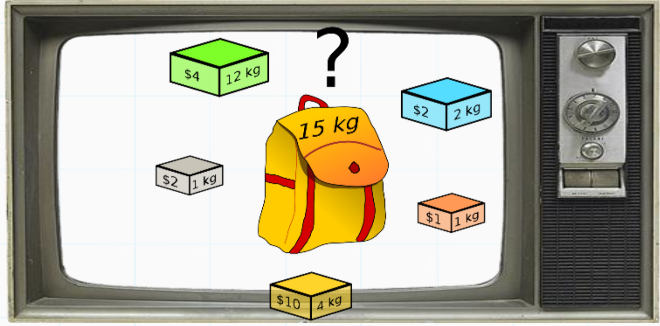
$$11x_1 + \boxed{6x_2} + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

subproblema estendido de x2

Caso 1: $x_2=0$

válido pois recai no corte original

Cortes Estruturais



- Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila: Considere o problema

problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$

Caso 2: $x_2=1$

corte

$$2x_1 + \alpha x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$2x_1 + \boxed{\alpha} + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

se válido para subproblema então

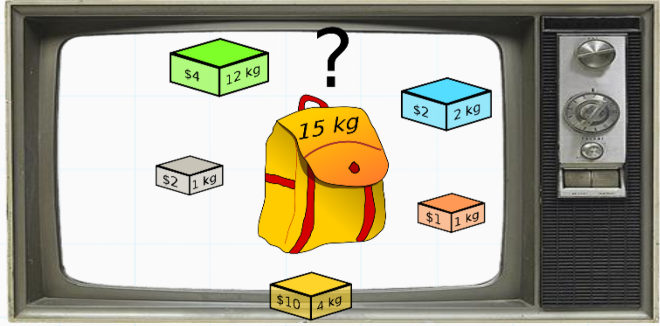
subproblema

$$11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

$$11x_1 + 6 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

$$11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 13$$

Cortes Estruturais



- Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila: Considere o problema

problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$

Caso 2: x_2=1

corte

$$2x_1 + \alpha x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$
$$2x_1 + \boxed{\alpha} + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

se válido para subproblema então

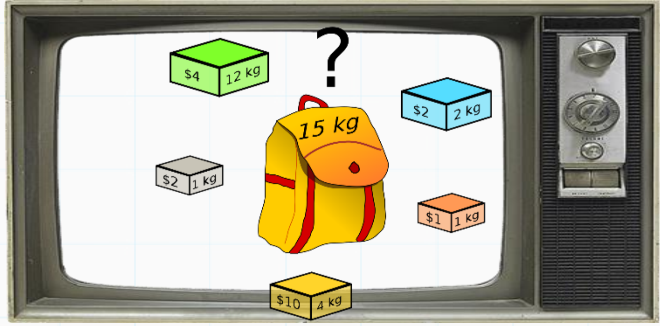
subproblema

$$11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$
$$11x_1 + 6 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$
$$11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 13$$

então, dentre os itens (1,3,4,5,6), no máximo quantos podem estar na mochila caso o item 2 seja fixo ? Essa será a condição para a validade do novo corte, i.e.

$$2x_1 + \alpha + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$
$$\alpha + \max\{2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : 11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 13\} \leq 3$$

Cortes Estruturais



- <u>Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila</u>: Considere o problema

problema

$$S = \{x \in \mathbb{B}^7 | 11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 + x_7 \leq 19\}$$

Caso 2: x_2=1

corte

$$2x_1 + \alpha x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$2x_1 + \boxed{\alpha} + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

se válido para subproblema então

subproblema

$$11x_1 + 6x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

$$11x_1 + 6 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 19$$

$$11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 13$$

então, dentre os itens (1,3,4,5,6), no máximo quantos podem estar na mochila caso o item 2 seja fixo ? Essa será a condição para a validade do novo corte, i.e.

$$2x_1 + \alpha + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3$$

$$\alpha + \max\{2x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 : 11x_1 + 6x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 4x_6 \leq 13\} \leq 3$$

Vemos que $\alpha \leq 1$ (pois a solução ótima será x_1=1 ou x_4=x_5=1 ou...), logo:

$$\boxed{2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 3}$$

O procedimento pode ser iterativamente repetido para todos os itens

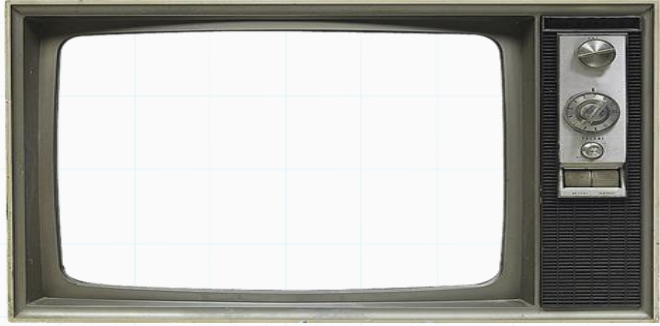
Cortes Estruturais

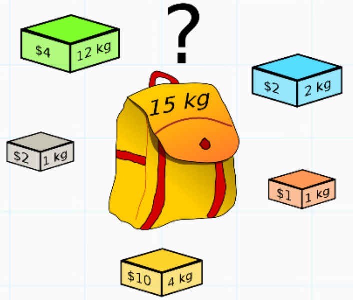
- <u>Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila</u>: Generalizando:

Soluções viáveis

Suponha que $\sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0$ é válido para todo $x \in S$ com $x_1 = 0$.

$$\alpha x_1 + \sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0 \text{ será válido se } \alpha \leq \pi_0 - \max_{x \in S | x_1 = 1} \sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j$$





Apesar de custosa, estas restrições são muito fortes e valem a pena serem identificadas

Cortes da Mochila: Dado o problema da mochila

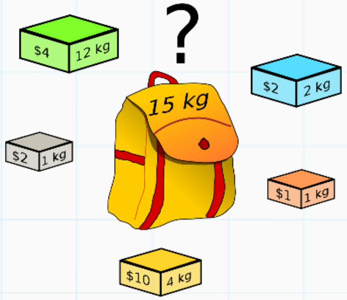
Exercício

$$S = \{x \in \mathbb{B}^6 | 12x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 5x_5 + 3x_6 \leq 14\}$$

e o corte de cobertura

$$x_3 + x_5 + x_6 \leq 2$$

se realizarmos o procedimento de fortalecimento (lifting) no corte com as variáveis x_1,x_2 e x_4 (nessa ordem), chegaremos em que corte fortalecido ?



Sabendo que:

Suponha que $\sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0$ é válido para todo $x \in S$ com $x_1 = 0$.

$\alpha x_1 + \sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0$ será válido se $\alpha \leq \pi_0 - \max_{x \in S | x_1 = 1} \sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j$

1) Defina o corte estendido como αx1 + x3 + x5 + x6 <= 2 (pois queremos estender primeiro com a variável x1)
2) Precisamos encontrar agora o valor máximo de α, que vai ser dado pela resolução do subproblema onde fixamos x1=1, logo temos que identificar:

α + MAX{x3 + x5 + x6 : s.a. 12 + 7x3 + 5x5 + 3x6 <= 14} <= 2

3) ...

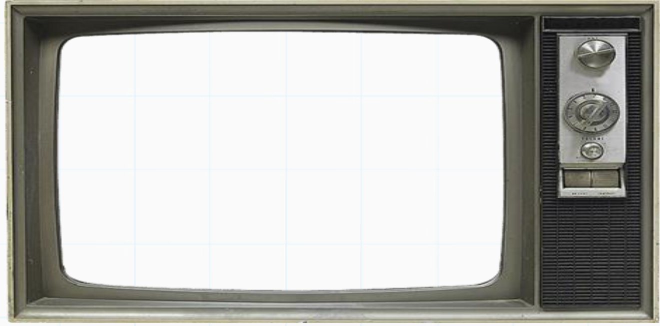
Cortes Estruturais

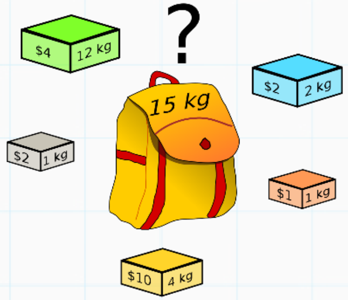
- <u>Fortalecimento (Lift) dos cortes da mochila</u>: Generalizando:

Soluções viáveis

Suponha que $\sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0$ é válido para todo $x \in S$ com $x_1 = 0$.

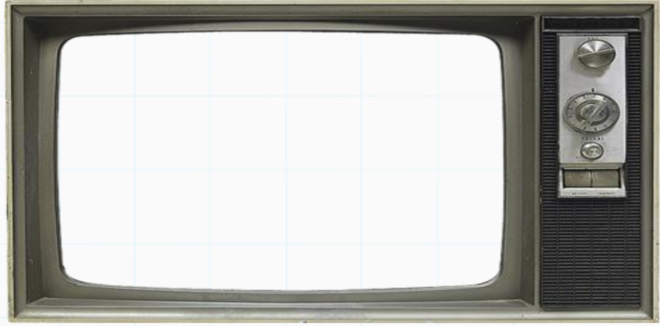
$$\alpha x_1 + \sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j \leq \pi_0 \text{ será válido se } \alpha \leq \pi_0 - \max_{x \in S | x_1 = 1} \sum_{j=2}^{n} \pi_j x_j$$



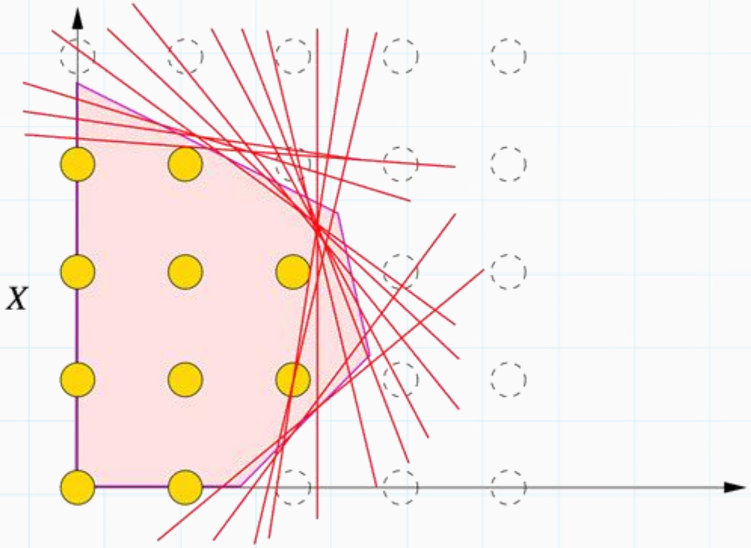


Agora que conhecemos algumas famílias de cortes, vamos ver um método para inseri-los de forma iterativa

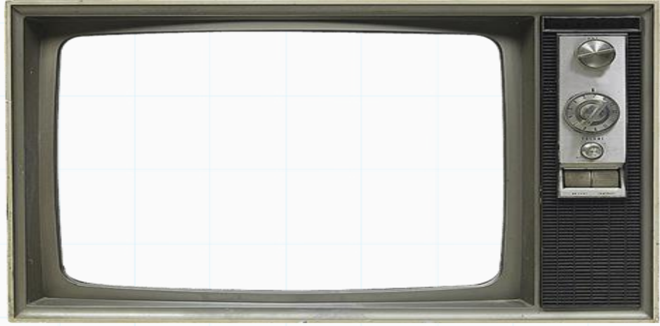
Cortes Estruturais



- Método de Plano de Cortes:
- Seja $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, onde $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$
- Seja $\mathcal{F}$ uma família de desigualdades válidas para X e considere o problema de PLI dado por $z = \max\{cx : x \in X\}$

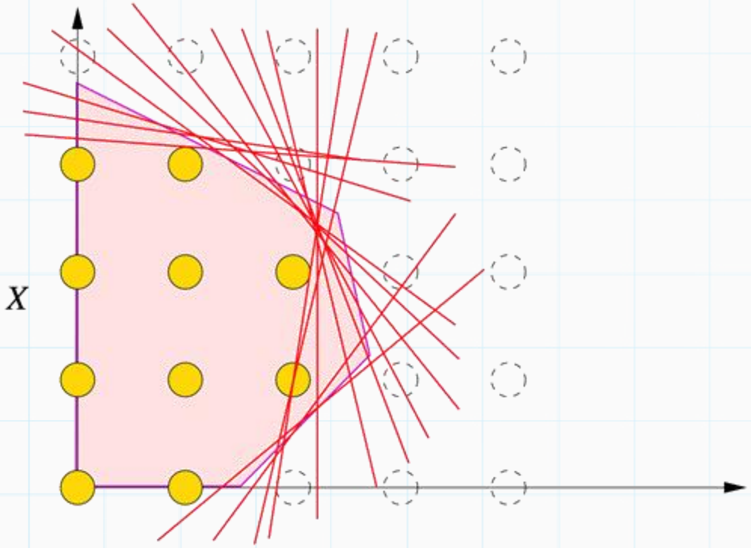


Cortes Estruturais

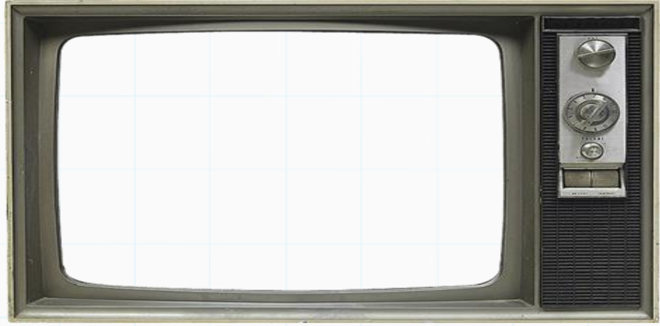


- <u>Método de Plano de Cortes</u>:
- Seja $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, onde $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$
- Seja $\mathcal{F}$ uma família de desigualdades válidas para X e considere o problema de PLI dado por $z = \max\{cx : x \in X\}$

1) $t \leftarrow 0$ e $P^0 \leftarrow P$
2) resolver a relaxação linear (LP^t): $\bar{z}^t = \max\{cx : x \in P^t\}$, obtendo a **solução ótima** x^t

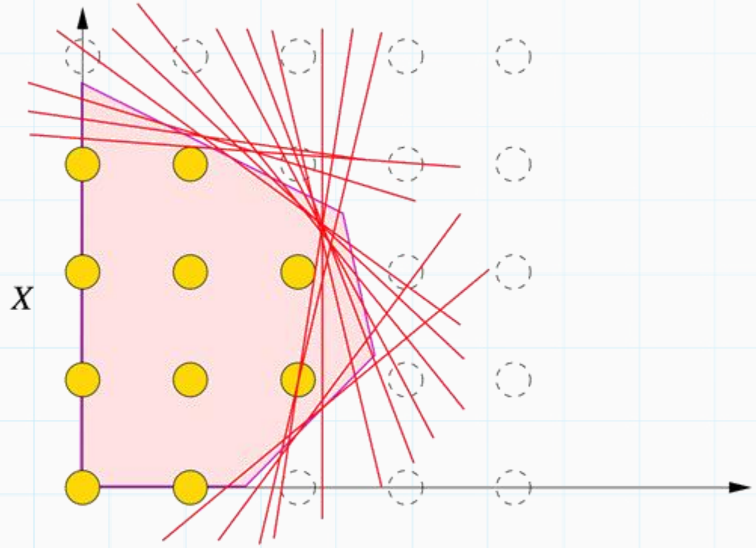


Cortes Estruturais

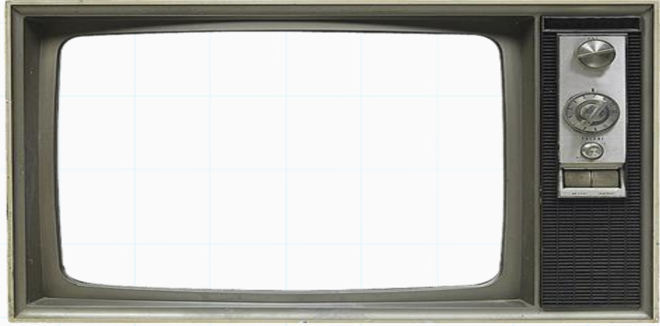


- <u>Método de Plano de Cortes</u>:
- Seja $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, onde $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$
- Seja $\mathcal{F}$ uma família de desigualdades válidas para X e considere o problema de PLI dado por $z = \max\{cx : x \in X\}$

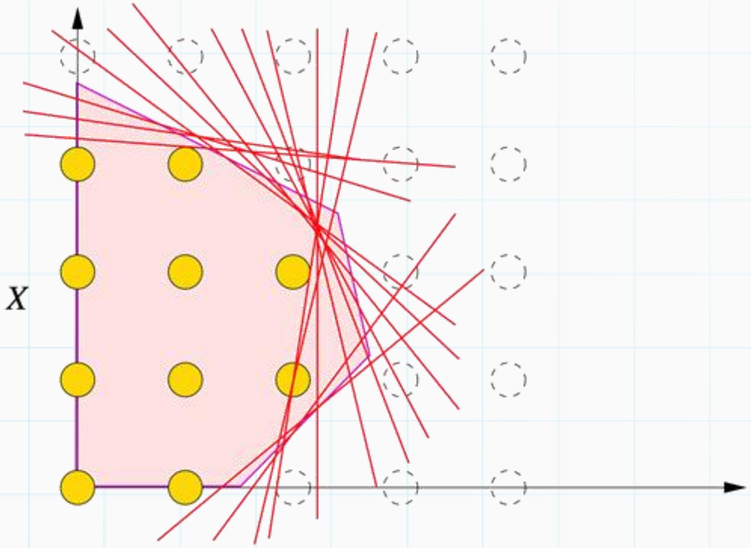
1) $t \leftarrow 0$ e $P^0 \leftarrow P$
2) resolver a relaxação linear (LP^t): $\bar{z}^t = \max\{cx : x \in P^t\}$, obtendo a **solução ótima** x^t
3) Se x^t é inteira, retorne $(\bar{z}^t, x_t)$ e **pare**
4) Resolver o problema de separação para x^t e $\mathcal{F}$



Cortes Estruturais



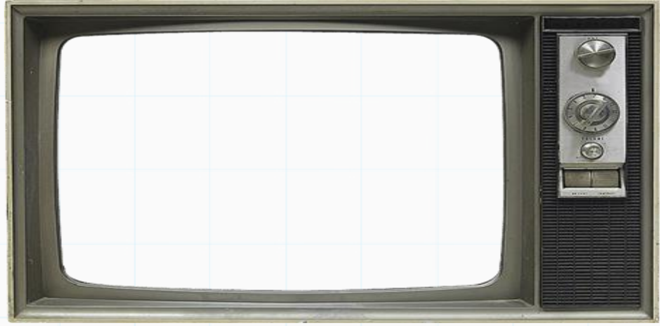
- <u>Método de Plano de Cortes</u>:
- Seja $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, onde $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$
- Seja $\mathcal{F}$ uma família de desigualdades válidas para X e considere o problema de PLI dado por $z = \max\{cx : x \in X\}$



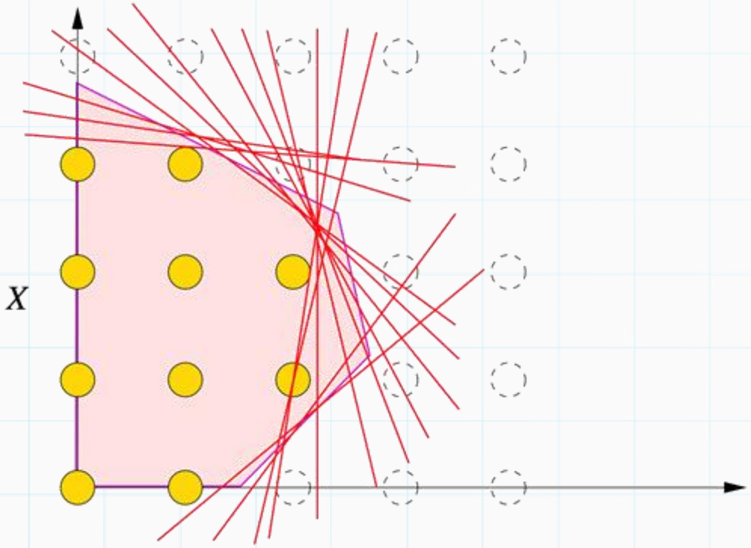
1) $t \leftarrow 0$ e $P^0 \leftarrow P$
2) resolver a relaxação linear (LP^t): $\overline{z}^t = \max\{cx : x \in P^t\}$, obtendo a **solução ótima** x^t
3) Se x^t é inteira, retorne $(\overline{z}^t, x_t)$ e **pare**
4) Resolver o problema de separação para x^t e $\mathcal{F}$
5) Se não encontrou desigualdade violada por x^t em $\mathcal{F}$, **pare** e retorne o limitante superior $\overline{z}^t$

limite dual

Cortes Estruturais



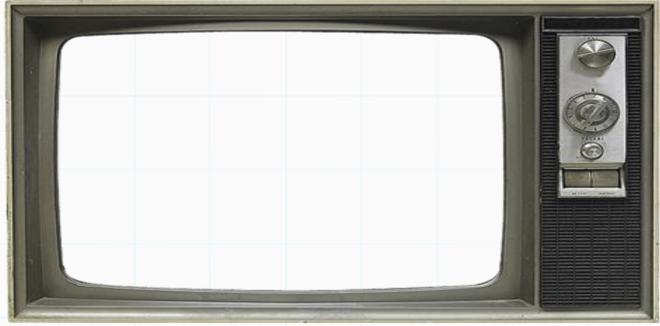
- <u>Método de Plano de Cortes</u>:
- Seja $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, onde $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$
- Seja $\mathcal{F}$ uma família de desigualdades válidas para X e considere o problema de PLI dado por $z = \max\{cx : x \in X\}$



1) $t \leftarrow 0$ e $P^0 \leftarrow P$
2) resolver a relaxação linear (LP^t): $\bar{z}^t = \max\{cx : x \in P^t\}$, obtendo a **solução ótima** x^t
3) Se x^t é inteira, retorne $(\bar{z}^t, x_t)$ e **pare**
4) Resolver o problema de separação para x^t e $\mathcal{F}$
5) Se não encontrou desigualdade violada por x^t em $\mathcal{F}$, **pare** e retorne o limitante superior $\bar{z}^t$
6) Seja $\pi^t x \leq \pi_0^t$ a desigualdade violada por x^t em $\mathcal{F}$. Faça $P^{t+1} = P^t \cap \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \pi^t x \leq \pi_0^t\}$, $t \leftarrow t+1$ e **volte ao passo 1**

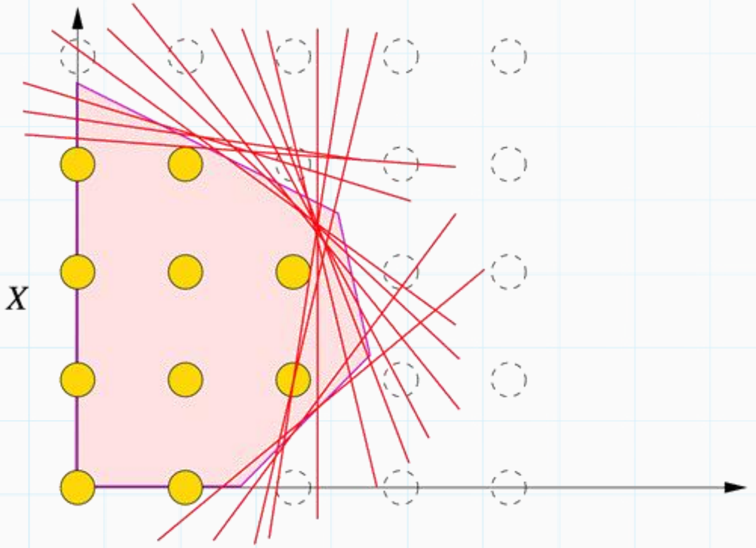
limite dual

Cortes Estruturais



- Método de Plano de Cortes:
- Seja $X = P \cap \mathbb{Z}^n$, onde $P = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : Ax \leq b\}$
- Seja $\mathcal{F}$ uma família de desigualdades válidas para X e considere o problema de PLI dado por $z = \max\{cx : x \in X\}$

1) $t \leftarrow 0$ e $P^0 \leftarrow P$
2) resolver a relaxação linear (LP^t): $\bar{z}^t = \max\{cx : x \in P^t\}$, obtendo a **solução ótima** x^t
3) Se x^t é inteira, retorne $(\bar{z}^t, x_t)$ e **pare**
4) Resolver o problema de separação para x^t e $\mathcal{F}$
5) Se não encontrou desigualdade violada por x^t em $\mathcal{F}$, **pare** e retorne o limitante superior $\bar{z}^t$
6) Seja $\pi^t x \leq \pi_0^t$ a desigualdade violada por x^t em $\mathcal{F}$. Faça $P^{t+1} = P^t \cap \{x \in \mathbb{R}^n_+ : \pi^t x \leq \pi_0^t\}$, $t \leftarrow t+1$ e **volte ao passo 1**



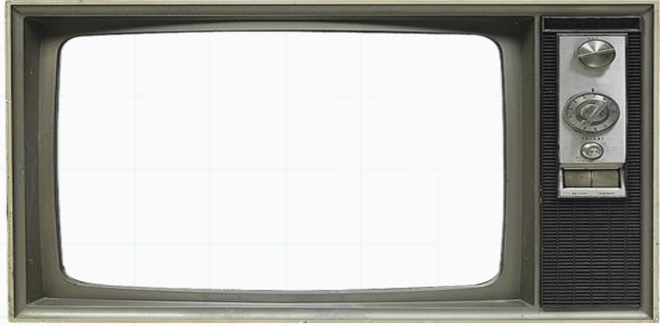
Obs:

- $P^0 \supset P^1 \supset P^2 \supset \ldots \supset P^t \supset \ldots$

- Com a adição do corte, o limite superior (dual) decresce a cada iteração
- Na prática é melhor inserir vários cortes por vez.

Cortes Estruturais

- Método de Plano de Cortes: Vamos usar só cortes de cobertura

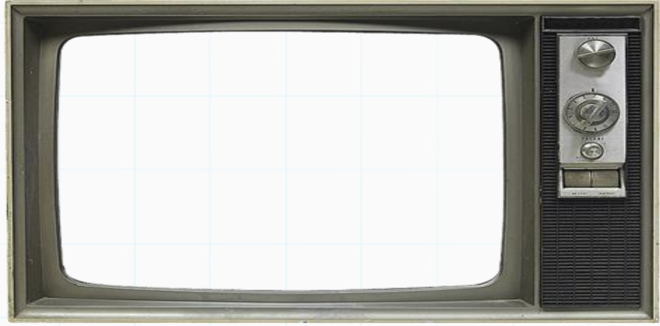


ex:

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10, \\ & 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 9, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Sol* = 3

Cortes Estruturais



- <u>Método de Plano de Cortes</u>: Vamos usar só cortes de cobertura

ex: $$\max \; x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$$
$$4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10,$$
$$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 9,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}.$$

Sol* = 3

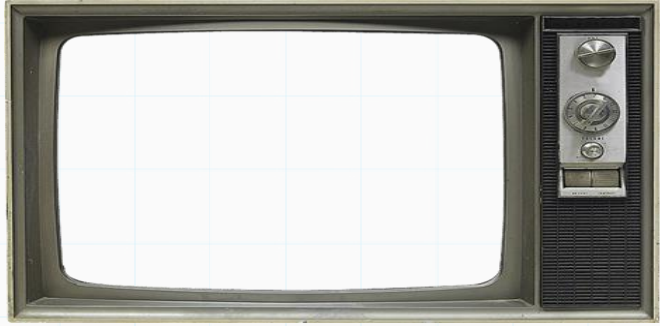
Sol = 4.20

Relaxação: $\boxed{x^{(1)} = \left(0, 1, 0, \tfrac{3}{5}\right)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Vamos procurar pelas variáveis com valores não nulos pois as variáveis nulas não vão cortar nada

Cortes Estruturais



- <u>Método de Plano de Cortes</u>: Vamos usar só cortes de cobertura

ex:
$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10, \\ & 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 9, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

Sol* = 3

Sol = 4.20

Relaxação: $\boxed{x^{(1)} = \left(0, 1, 0, \frac{3}{5}\right)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

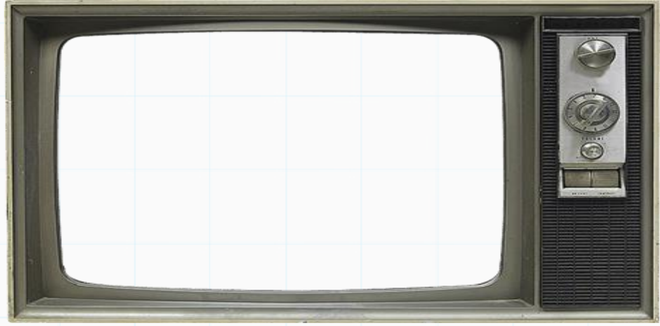
Sol = 3.88

Corte: $\boxed{x_2 + x_4 \leq 1}$

Relaxação: $\boxed{\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{9}, 0\right)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Cortes Estruturais



- Método de Plano de Cortes: Vamos usar só cortes de cobertura

ex:
$$\max\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$$
$$4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10,$$
$$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 9,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}.$$

Sol* = 3

Sol = 4.20

Relaxação: $\boxed{x^{(1)} = (0,1,0,\frac{3}{5})^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Sol = 3.88

Corte: $\boxed{x_2 + x_4 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{(\frac{1}{3},1,\frac{5}{9},0)^T}$

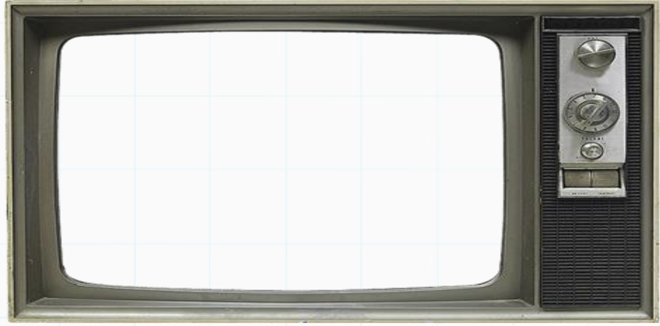
que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Sol = 3.83

Corte: $\boxed{x_1 + x_2 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{x^{(3)} = (0,1,\frac{5}{6},0)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Cortes Estruturais



- Método de Plano de Cortes: Vamos usar só cortes de cobertura

ex: $\max\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4$

$$4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10,$$
$$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 9,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}.$$

Sol* = 3

Sol = 4.20

Relaxação: $\boxed{x^{(1)} = (0, 1, 0, \frac{3}{5})^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Sol = 3.88

Corte: $\boxed{x_2 + x_4 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{9}, 0)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Sol = 3.83

Corte: $\boxed{x_1 + x_2 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{x^{(3)} = (0, 1, \frac{5}{6}, 0)^T}$

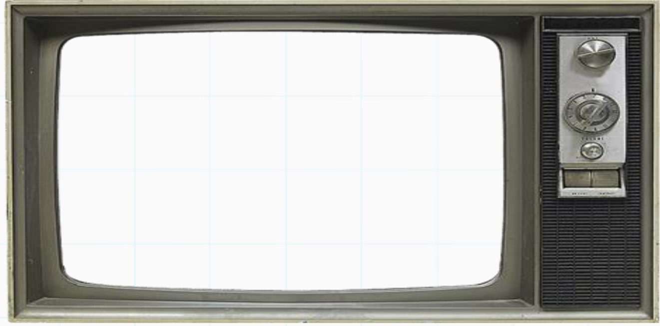
que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 var

Sol = 3.55

Corte: $\boxed{x_2 + x_3 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{x^{(4)} = (\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9})^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Cortes Estruturais



- Método de Plano de Cortes: Vamos usar só cortes de cobertura

ex:
$$\max\; x_1 + 3x_2 + \; x_3 + 2x_4$$
$$4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10,$$
$$5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 9,$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}.$$

Sol* = 3

Sol = 4.20

Relaxação: $\boxed{x^{(1)} = \left(0, 1, 0, \frac{3}{5}\right)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Sol = 3.88

Corte: $\boxed{x_2 + x_4 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{\left(\frac{1}{3}, 1, \frac{5}{9}, 0\right)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Sol = 3.83

Corte: $\boxed{x_1 + x_2 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{x^{(3)} = \left(0, 1, \frac{5}{6}, 0\right)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 var

Sol = 3.55

Corte: $\boxed{x_2 + x_3 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{x^{(4)} = \left(\frac{5}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{5}{9}\right)^T}$

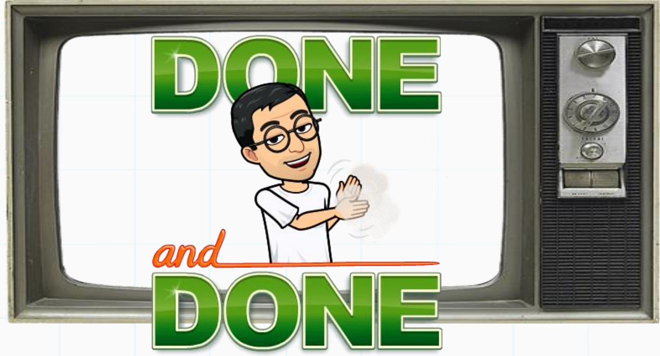
que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 va

Sol = 3.50

Corte: $\boxed{x_1 + x_3 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{x^{(5)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Cortes Estruturais



- Método de Plano de Cortes: Vamos usar só cortes de cobertura

ex: $$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ & 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 \leq 10, \\ & 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \leq 9, \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0,1\}. \end{aligned}$$

Sol* = 3

Sol = 4.20

Relaxação: $\boxed{x^{(1)} = (0, 1, 0, \tfrac{3}{5})^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Sol = 3.88

Corte: $\boxed{x_2 + x_4 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{(\tfrac{1}{3}, 1, \tfrac{5}{9}, 0)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Sol = 3.83

Corte: $\boxed{x_1 + x_2 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{x^{(3)} = (0, 1, \tfrac{5}{6}, 0)^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 var

Sol = 3.55

Corte: $\boxed{x_2 + x_3 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{x^{(4)} = (\tfrac{5}{9}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{5}{9}, \tfrac{5}{9})^T}$

que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 va

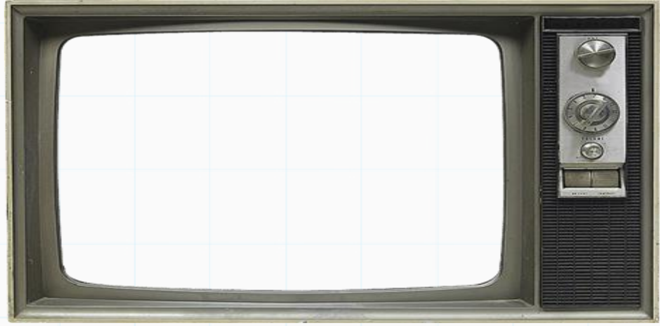
Sol = 3.50

Não tem mais !!!

Corte: $\boxed{x_1 + x_3 \leq 1}$ Relaxação: $\boxed{x^{(5)} = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})^T}$

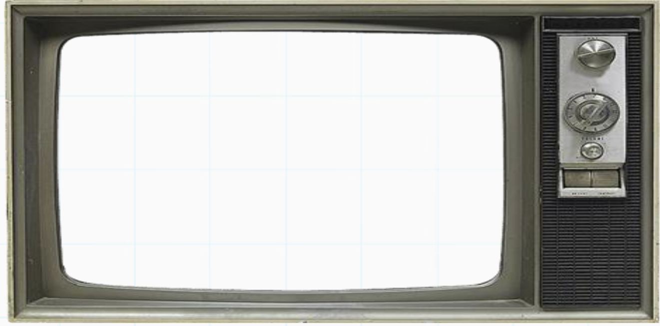
que corte de cobertura cortaria essa solução ? (2 variáveis)

Cortes Estruturais

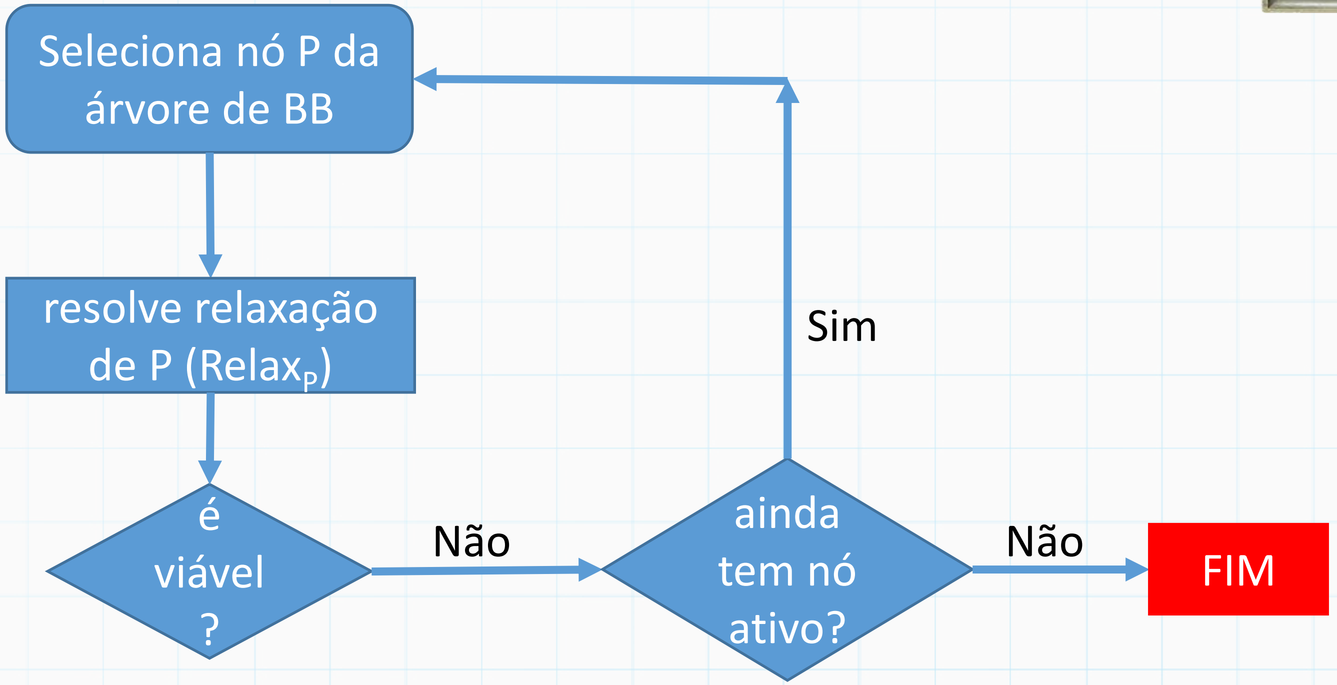


- <u>Método Branch-and-Cut:</u> É a aplicação do método de planos de corte em cada nó da árvore do branch-and-bound.

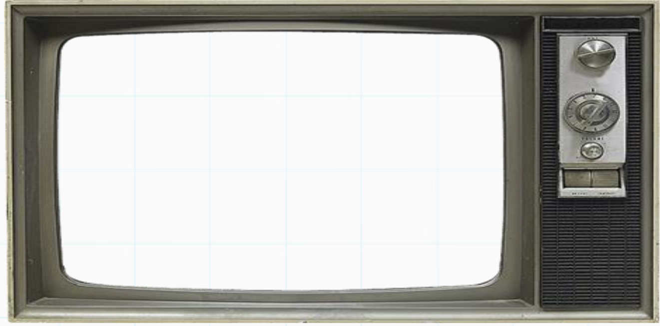
Cortes Estruturais



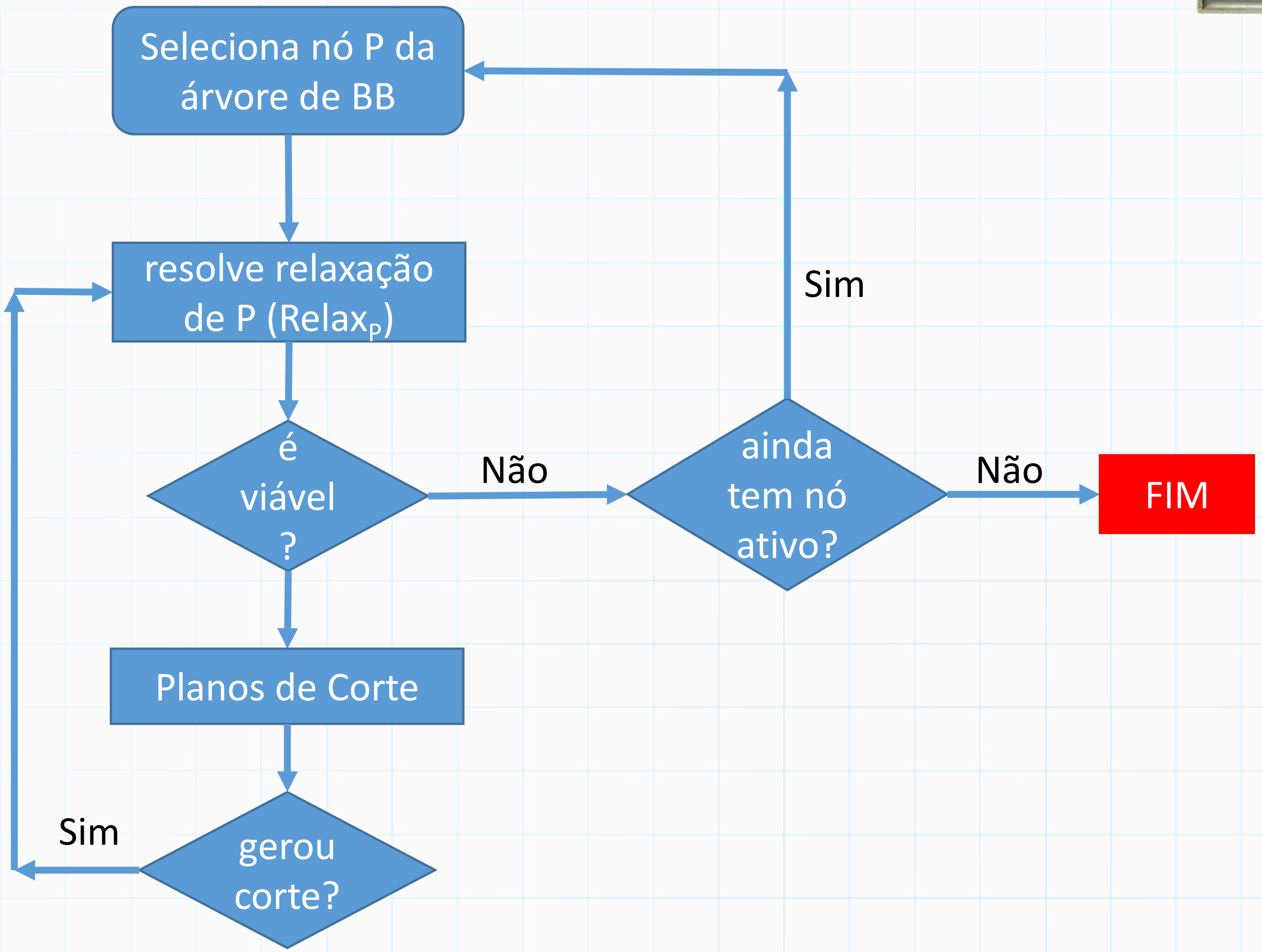
- <u>Método Branch-and-Cut:</u> É a aplicação do método de planos de corte em cada nó da árvore do branch-and-bound.



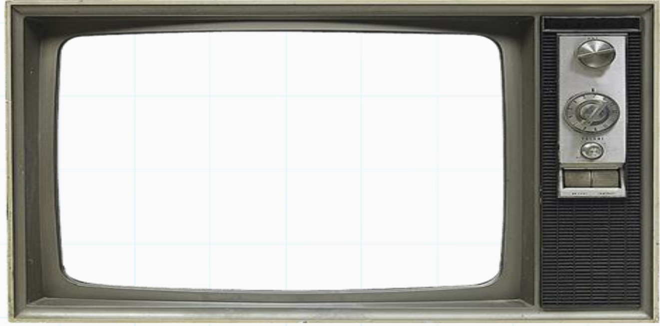
Cortes Estruturais



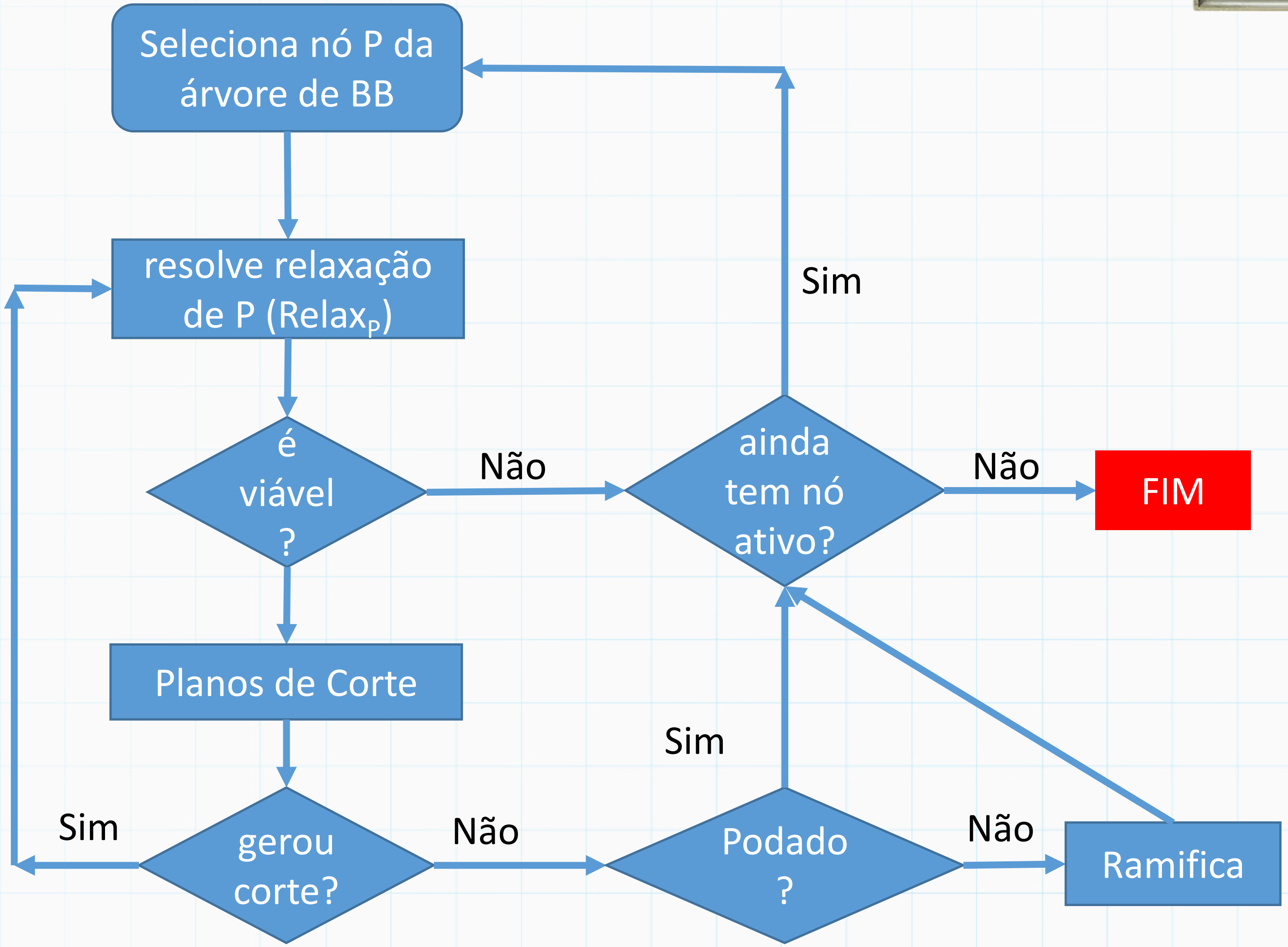
- <u>Método Branch-and-Cut:</u> É a aplicação do método de planos de corte em cada nó da árvore do branch-and-bound.



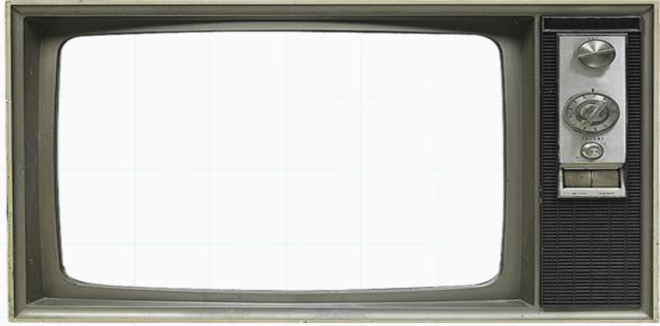
Cortes Estruturais



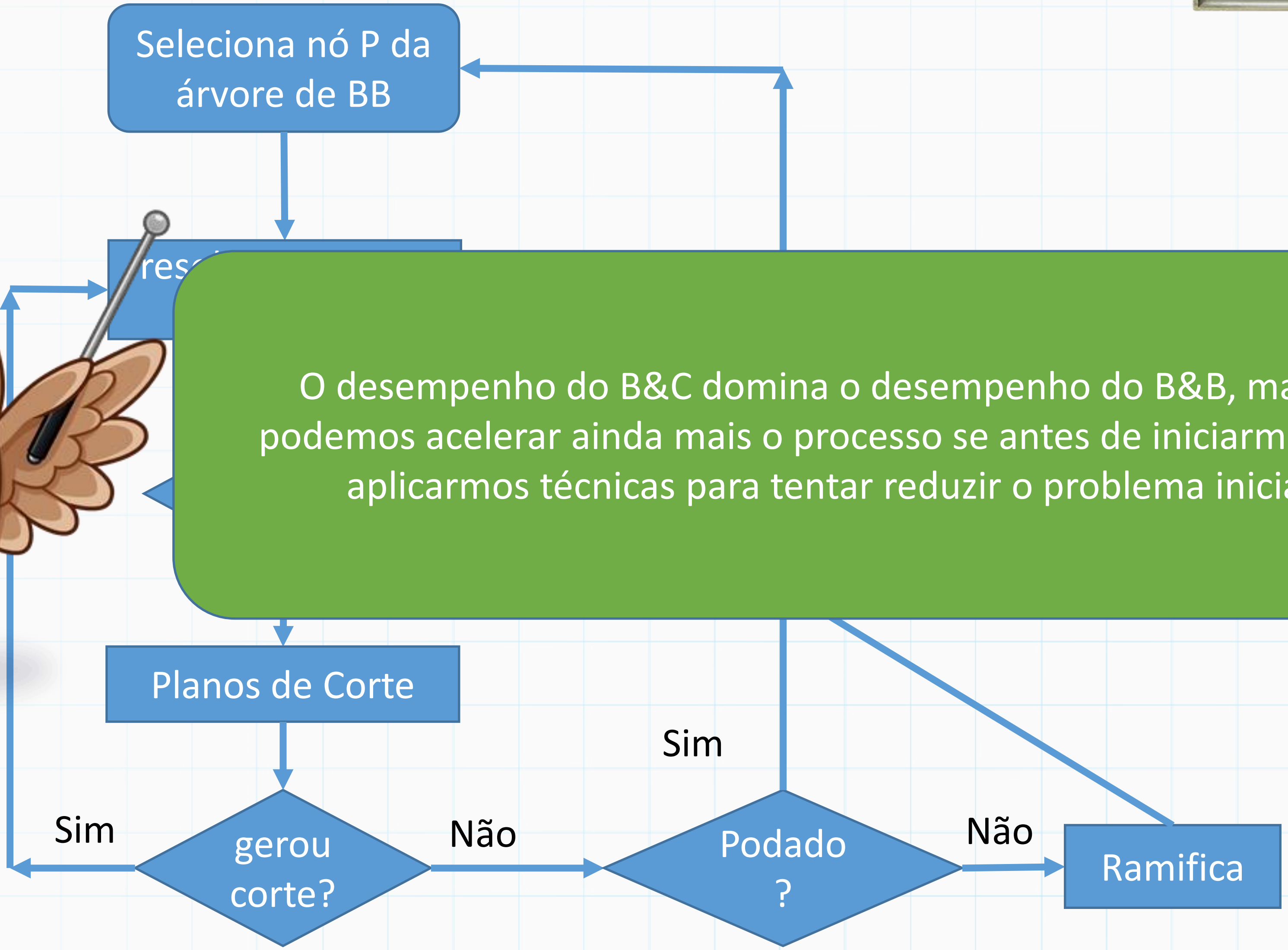
- <u>Método Branch-and-Cut:</u> É a aplicação do método de planos de corte em cada nó da árvore do branch-and-bound.

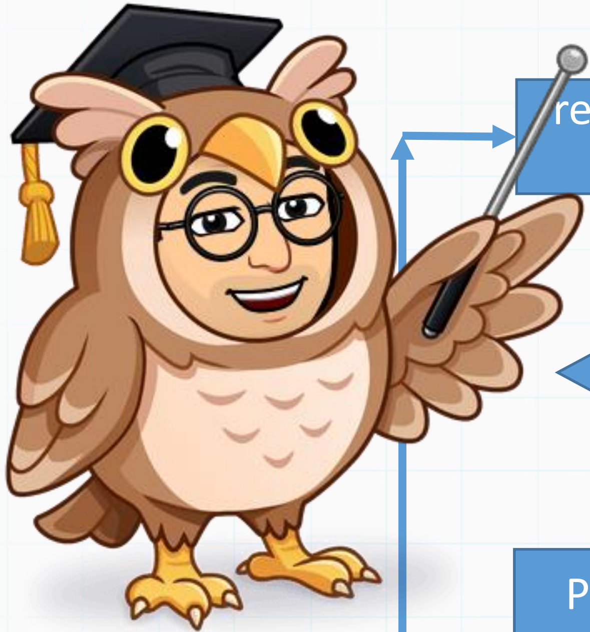


Cortes Estruturais



- <u>Método Branch-and-Cut:</u> É a aplicação do método de planos de corte em cada nó da árvore do branch-and-bound.





O desempenho do B&C domina o desempenho do B&B, mas ainda podemos acelerar ainda mais o processo se antes de iniciarmos o B&C, aplicarmos técnicas para tentar reduzir o problema inicial !!!

Até a próxima