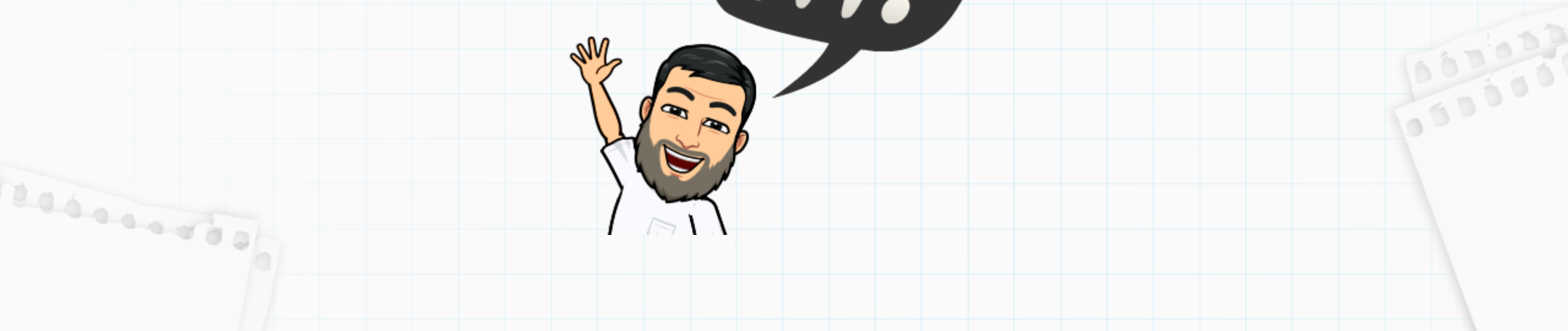
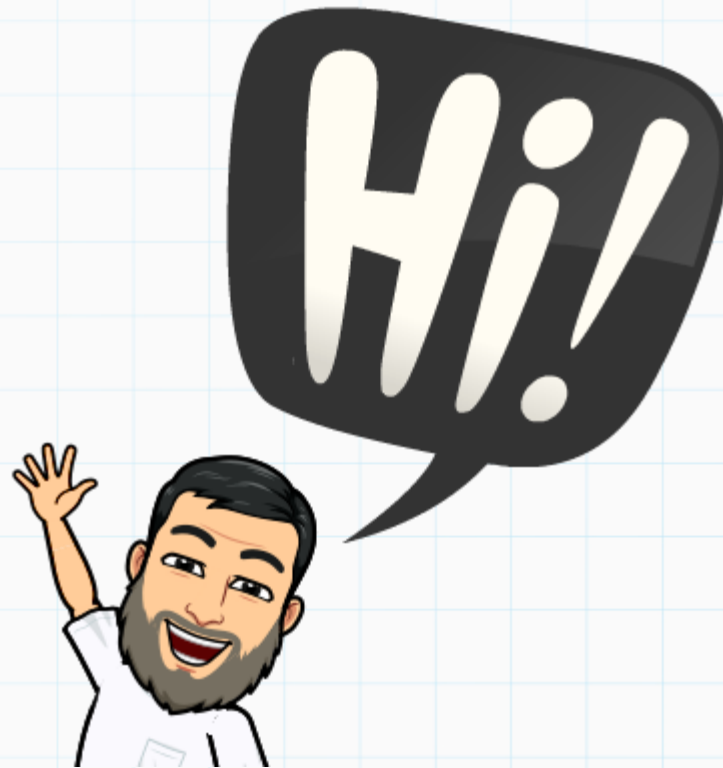


Programação Matemática

Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br



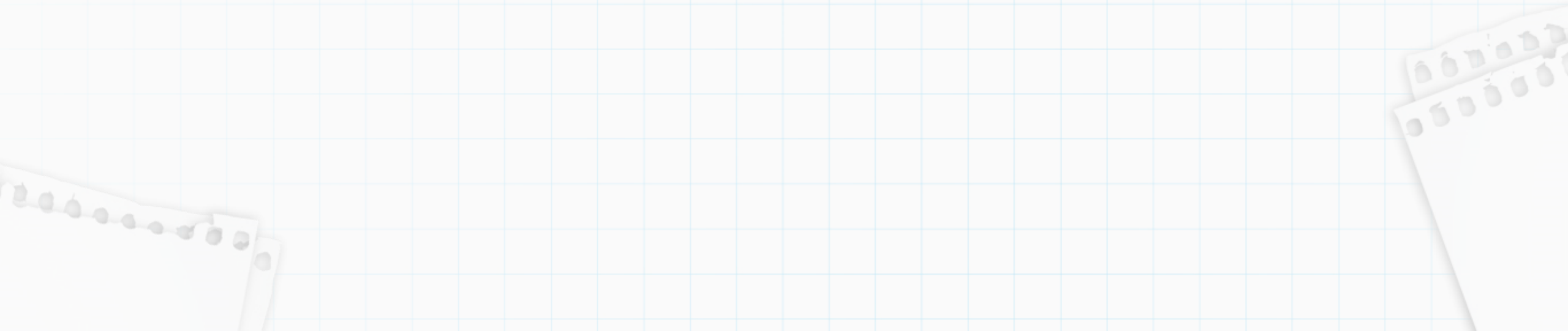
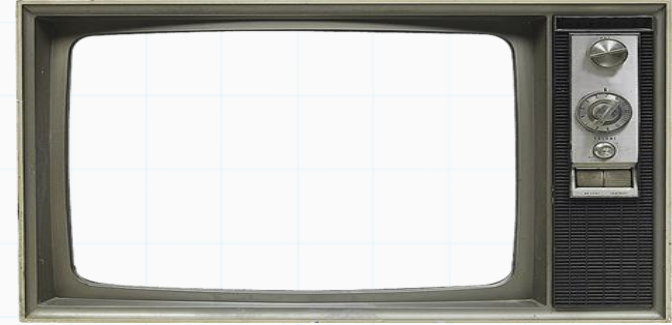
Programação Matemática

Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br

- Logística:
 - Aula as Terças, de 16h as 19h (3h de aula sem intervalo)



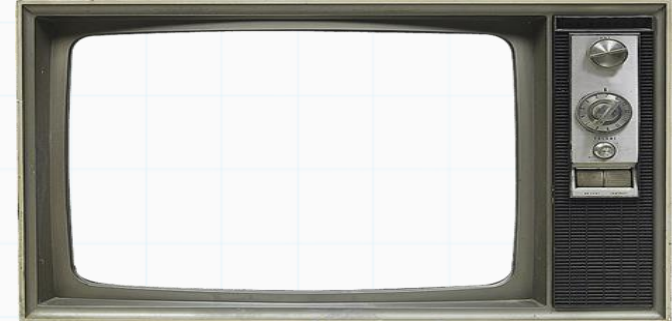
Programação Matemática

Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br

- Logística:
 - Aula as Terças, de 16h as 19h (3h de aula sem intervalo)
- Escopo:
 - Programação Linear e Inteira (foco em modelagem e resolução)

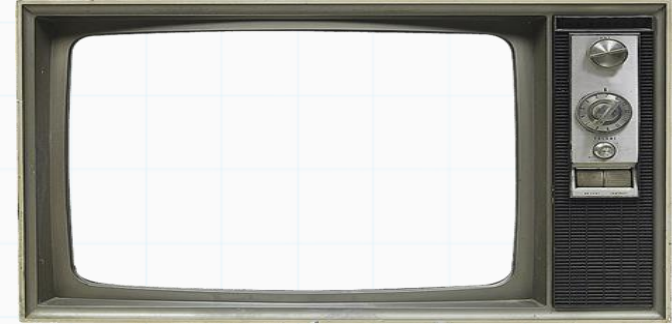


Programação Matemática

Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br



- Logística:
 - Aula as Terças, de 16h as 19h (3h de aula sem intervalo)
- Escopo:
 - Programação Linear e Inteira (foco em modelagem e resolução)
- Ementa:
 - Introdução
 - **Modelagem Problemas Lineares**
 - Métodos para solução de Problemas Lineares (Resolução Gráfica, Simplex, Dualidade, Pontos Interiores etc..)
 - **Modelagem Problemas Inteiros**
 - Métodos para solução de Problemas Inteiros (Branch and Bound, Plano de Cortes, Branch and Cut. PD, Geração de Colunas, Relaxação Lagrangeana, etc)
 - Pacotes de solução para problemas de programação matemática



Programação Matemática

Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br

- Logística:
 - Aula as Terças, de 16h as 19h (3h de aula sem intervalo)
- Escopo:
 - Programação Linear e Inteira (foco em modelagem e resolução)
- Ementa:
 - Introdução
 - Modelagem Prática
 - Métodos para solução de problemas (Simplex, Pontos Interiores etc..)
 - Modelagem Prática
 - Métodos para solução de problemas (Simplex, and Cut. PD, etc)
 - Pacotes de solução para problemas de programação matemática

Curso é autocontido:
começamos bem do básico



Programação Matemática

Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br

- Livros:

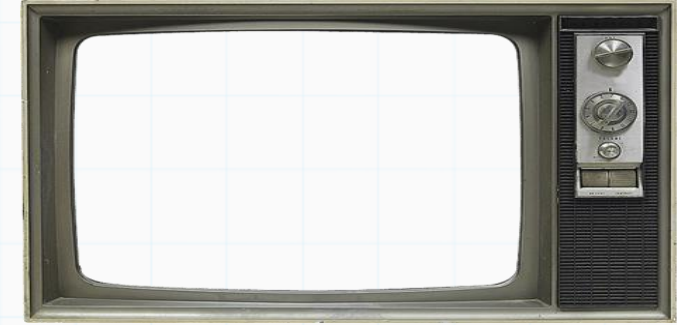
PL

- Otimização Linear

Autores: Nelson Maculan e Marcia Fampa

Editora UNB

<http://www.ic.uff.br/~yuri/pl/Maculan.pdf>

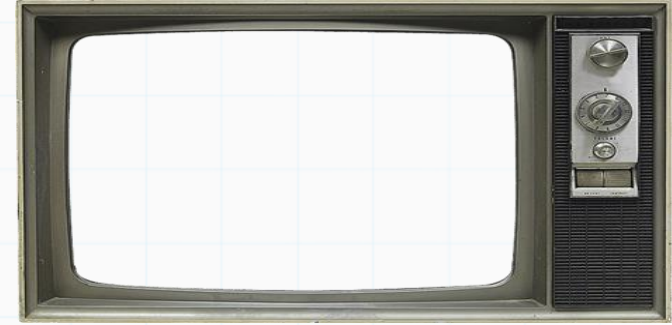


Programação Matemática

Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br



- Livros:

PL

- Otimização Linear

Autores: Nelson Maculan e Marcia Fampa

Editora UNB



<http://www.ic.uff.br/~yuri/pl/Maculan.pdf>

- Livros:

PI

Integer Programming

L.A. Wolsey

Wiley 1998



- Livros:

Mixed Integer Programming: Models and Methods

Nicolai Pizaruk

Free Book

<http://www.ic.uff.br/~yuri/pi/Pizaruk.pdf>

Se não conseguir não tem problema, a matéria será apresentada

Bastante modelagem e principais métodos

Programação Matemática

Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br

- Avaliação:

- Pós :

- Média de Trabalhos + Presença

- Graduação:

- Média de Trabalhos + Presença

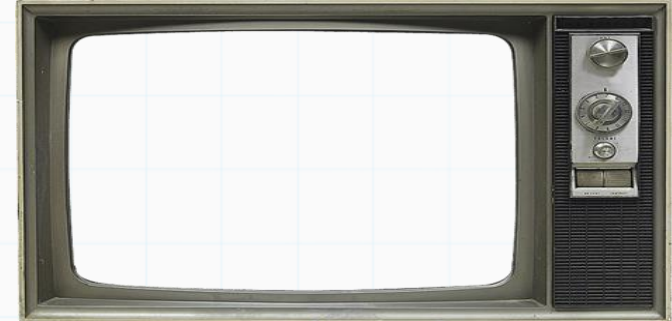
3 ou 4 trabalhos
de implementação

Os trabalhos e a nota de presença tem peso 1

presença tem o mesmo peso da soma dos pesos dos trabalhos.
Ex: se forem 5 trabalhos, cada um tem peso 1 e a presença tem peso 5

Pontos Extras: Exercícios feitos durante as aulas e entregues corretamente -> +1 extra ou +0.5 extra. Ainda foi no quadro depois -> mais +0,5 ou +0.25 extra

Em um 1 mês é possível facilmente somar os pontos de um trabalho

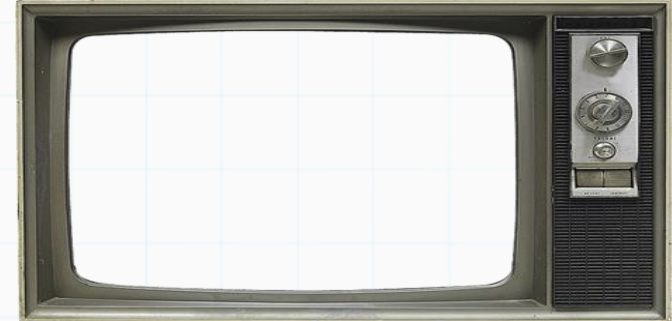


Programação Matemática

Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br



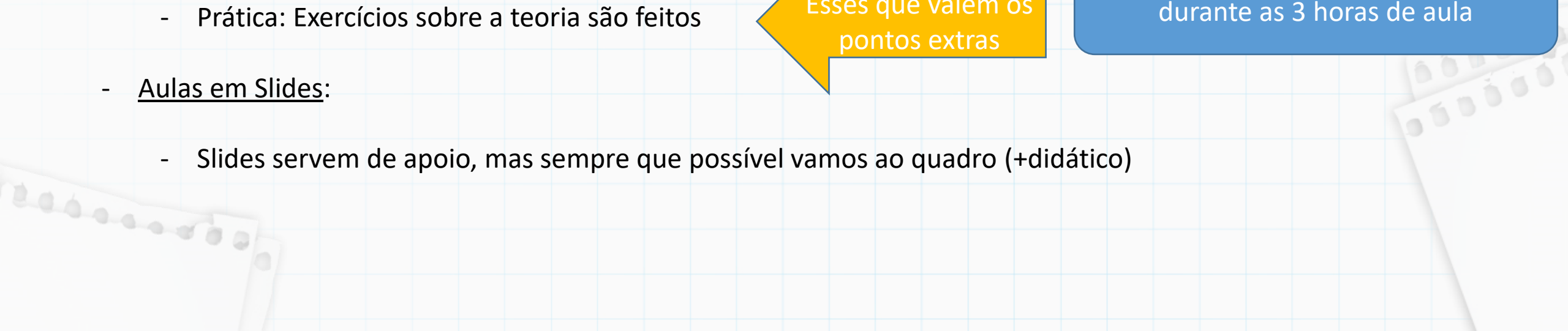
- Dinâmica da aula: Teórica + Prática
 - Teórica : A teoria é apresentada
 - Prática: Exercícios sobre a teoria são feitos

- Aulas em Slides:

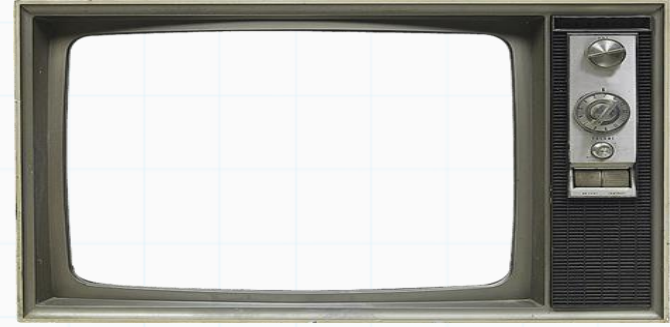
- Slides servem de apoio, mas sempre que possível vamos ao quadro (+didático)



Teoria e prática podem se intercalar durante as 3 horas de aula



O que é otimização?



Áreas de Atuação:

Banco de Dados

Redes

Engenharia de Software

Inteligência Artificial

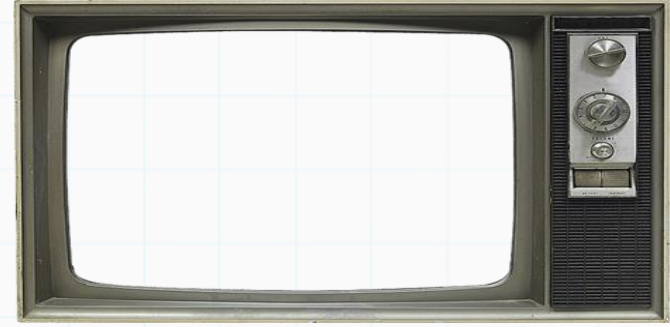
Sistemas Distribuídos

Otimização

Uma penca a mais....



O que é otimização?

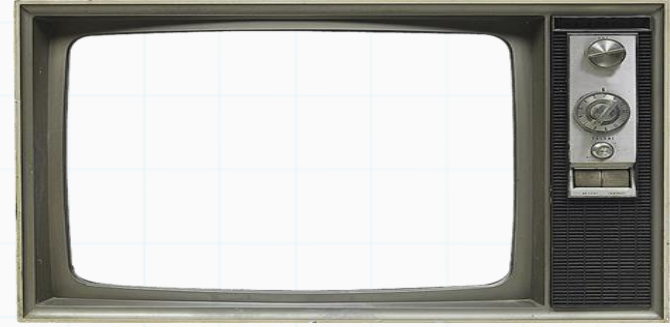


Otimização:

Uso da matemática para auxiliar nas tomadas de decisão

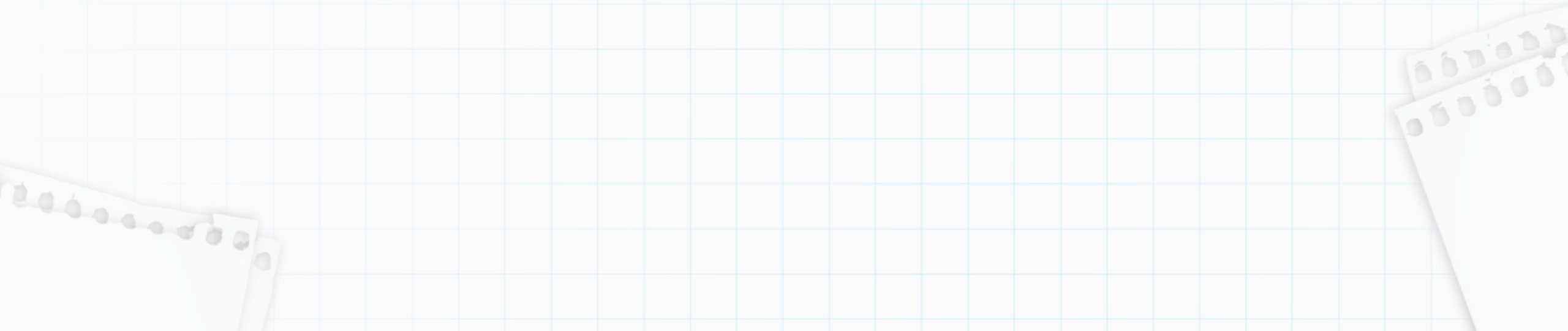


O que é otimização?

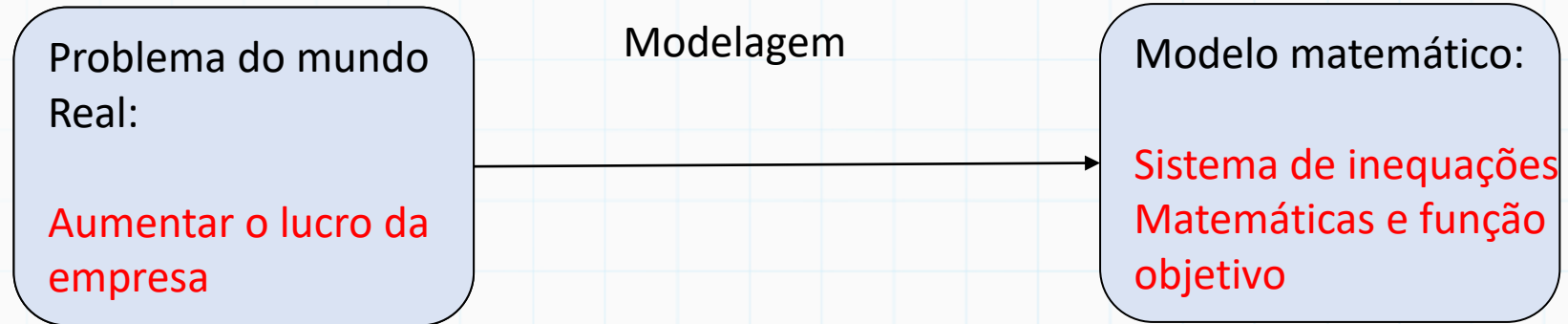
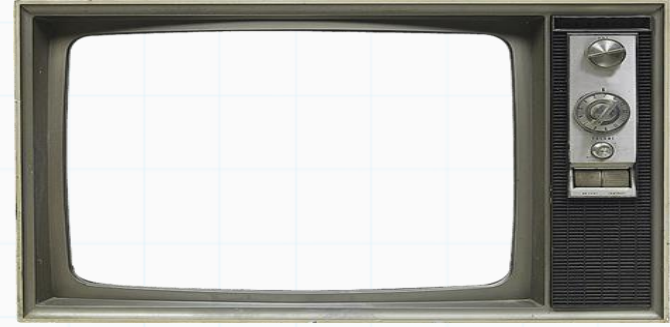


Problema do mundo
Real:

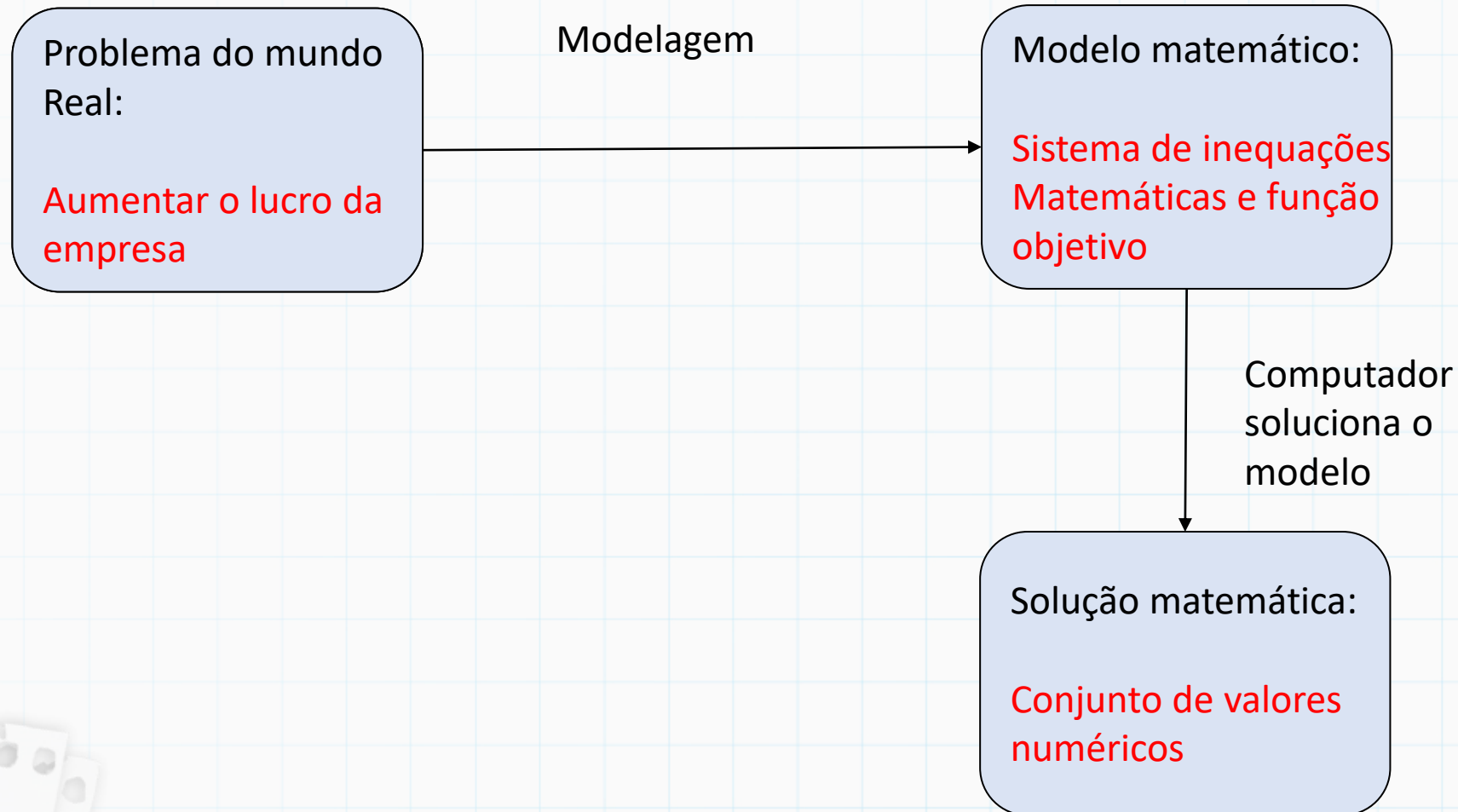
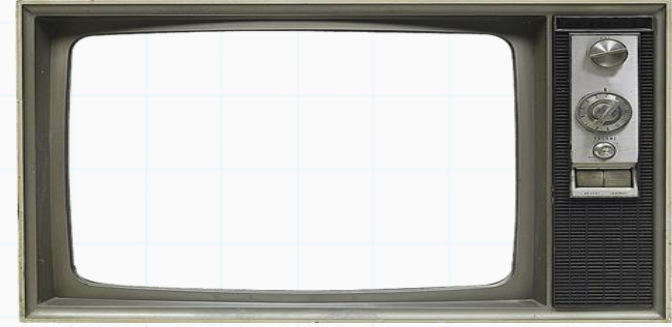
Aumentar o lucro da
empresa



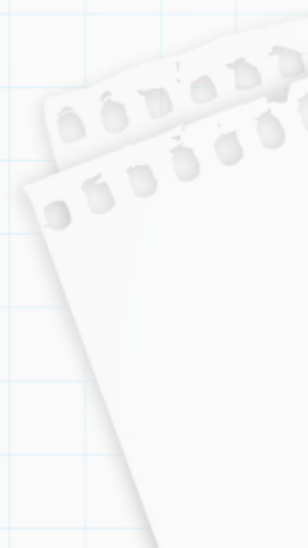
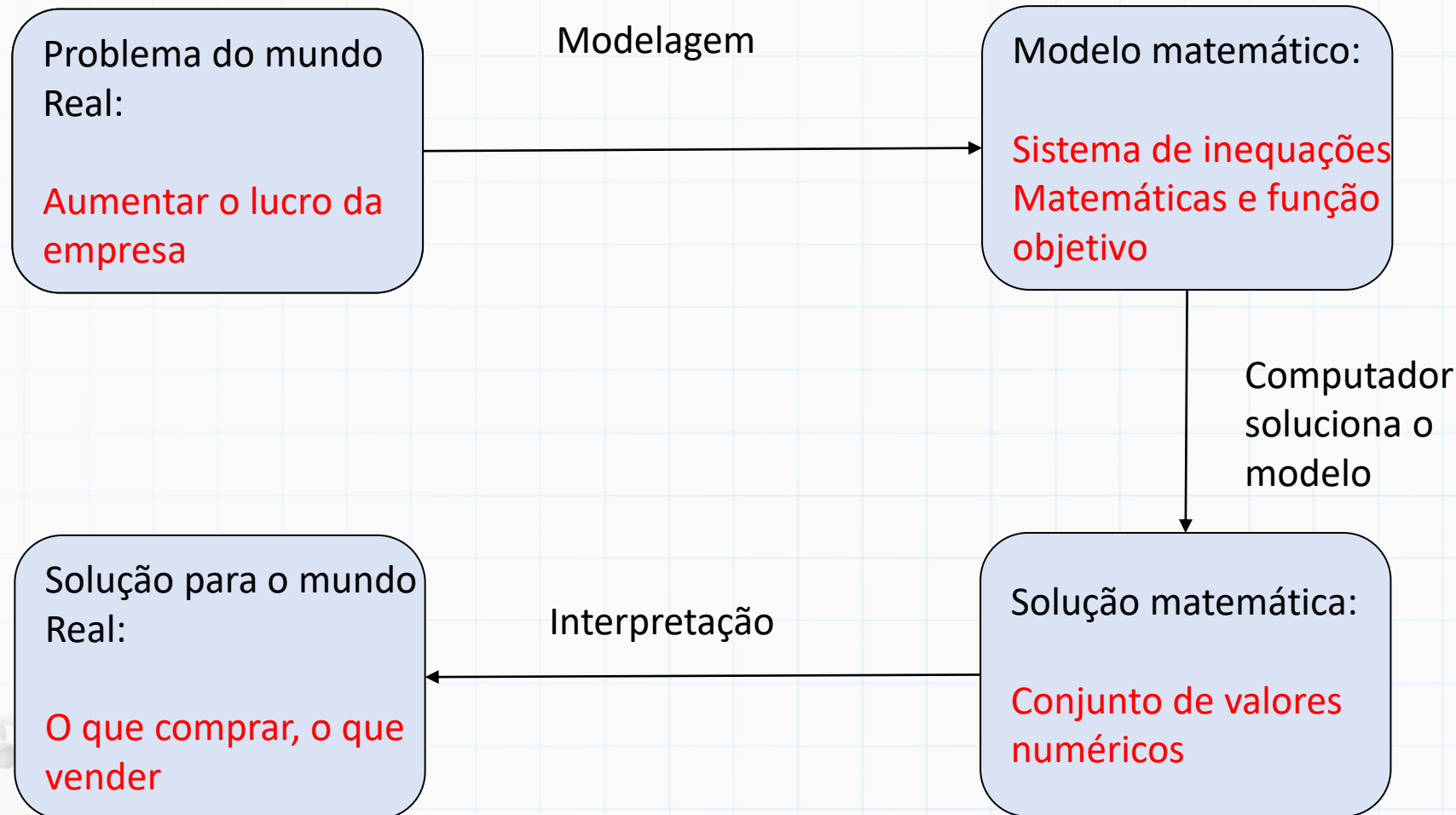
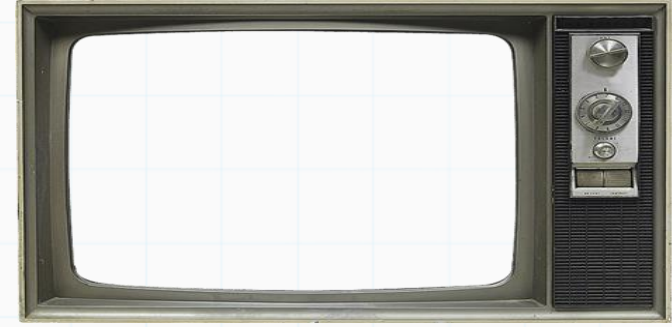
O que é otimização?



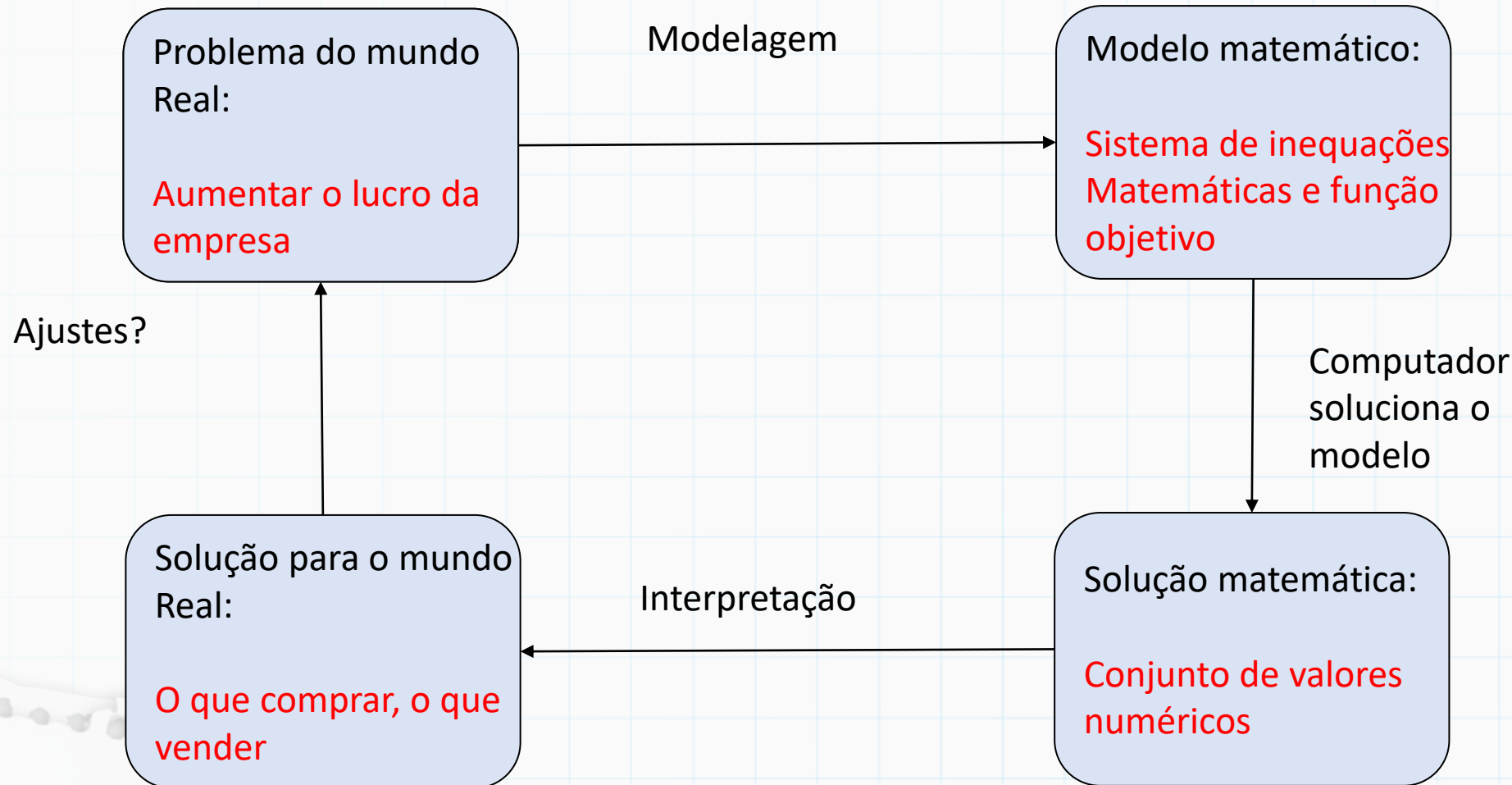
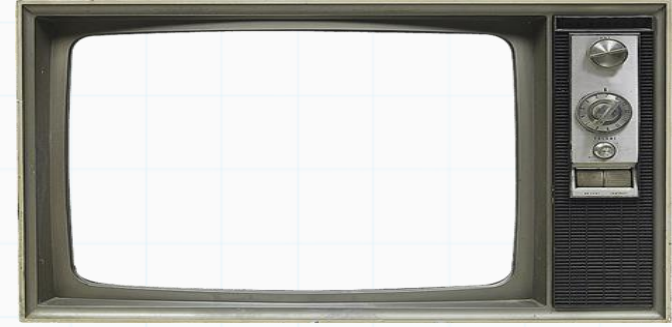
O que é otimização?



O que é otimização?



O que é otimização?

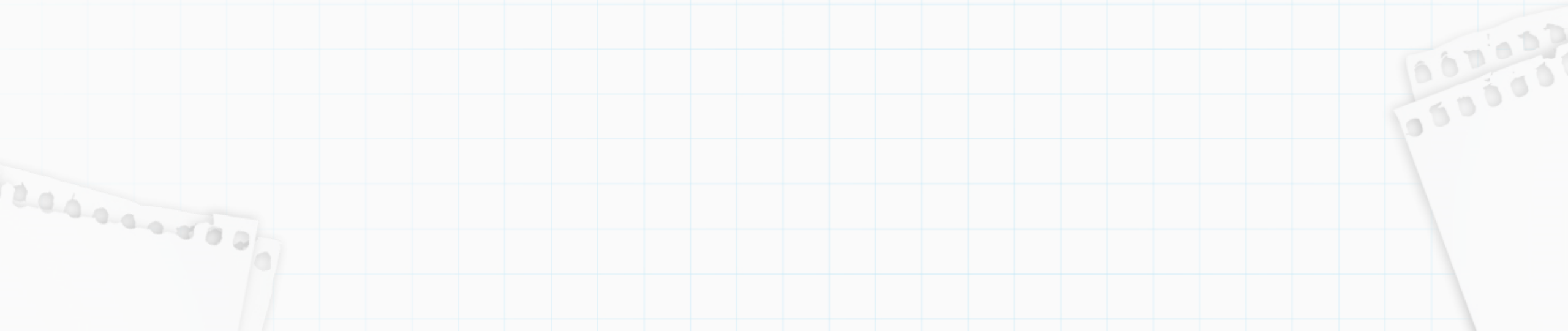
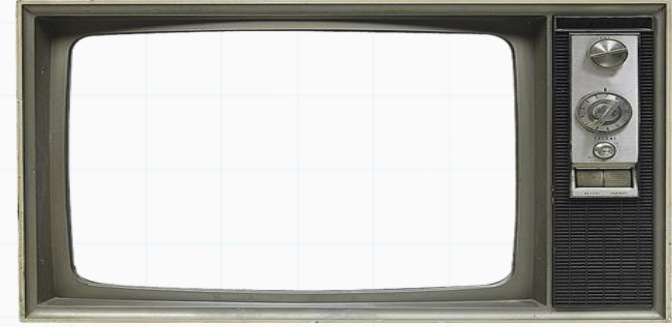


O que é otimização?

Exemplo
prático:

Problema do mundo
Real:

cobrança da coleta
de lixo de Cidade X
por domicílio



O que é otimização?

Exemplo
prático:

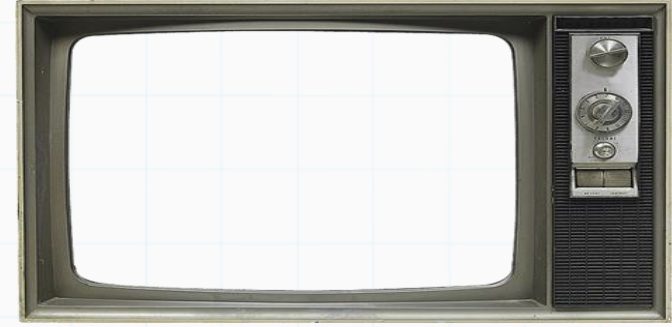
Problema do mundo
Real:

cobrança da coleta
de lixo de Cidade X
por domicílio

Modelagem

Modelo matemático:

Modelo de Clustering
com restrições
adicionais



O que é otimização?

Exemplo
prático:

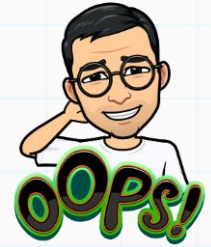
Problema do mundo
Real:

cobrança da coleta
de lixo de Cidade X
por domicílio

Modelagem

Modelo matemático:

Modelo de Clustering
com restrições
adicionais

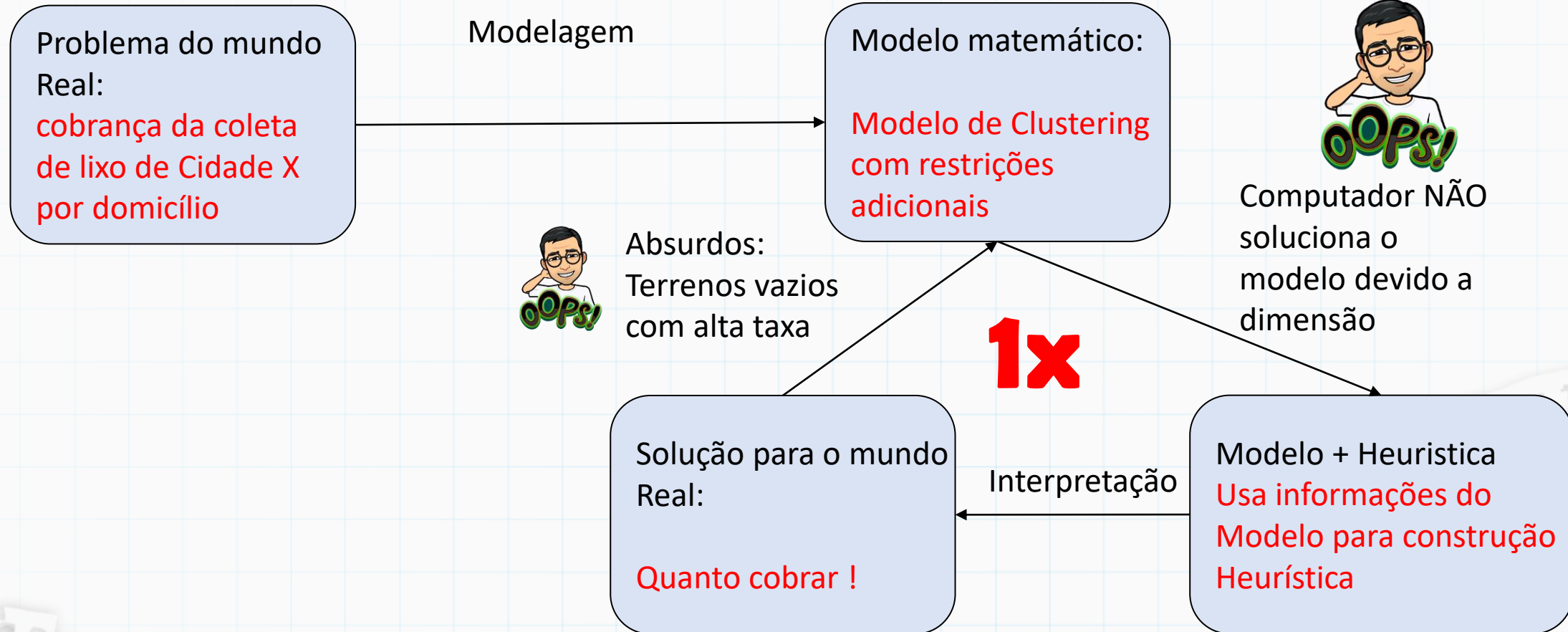


Computador NÃO
soluciona o
modelo devido a
dimensão

Modelo + Heurística
Usa informações do
Modelo para construção
Heurística

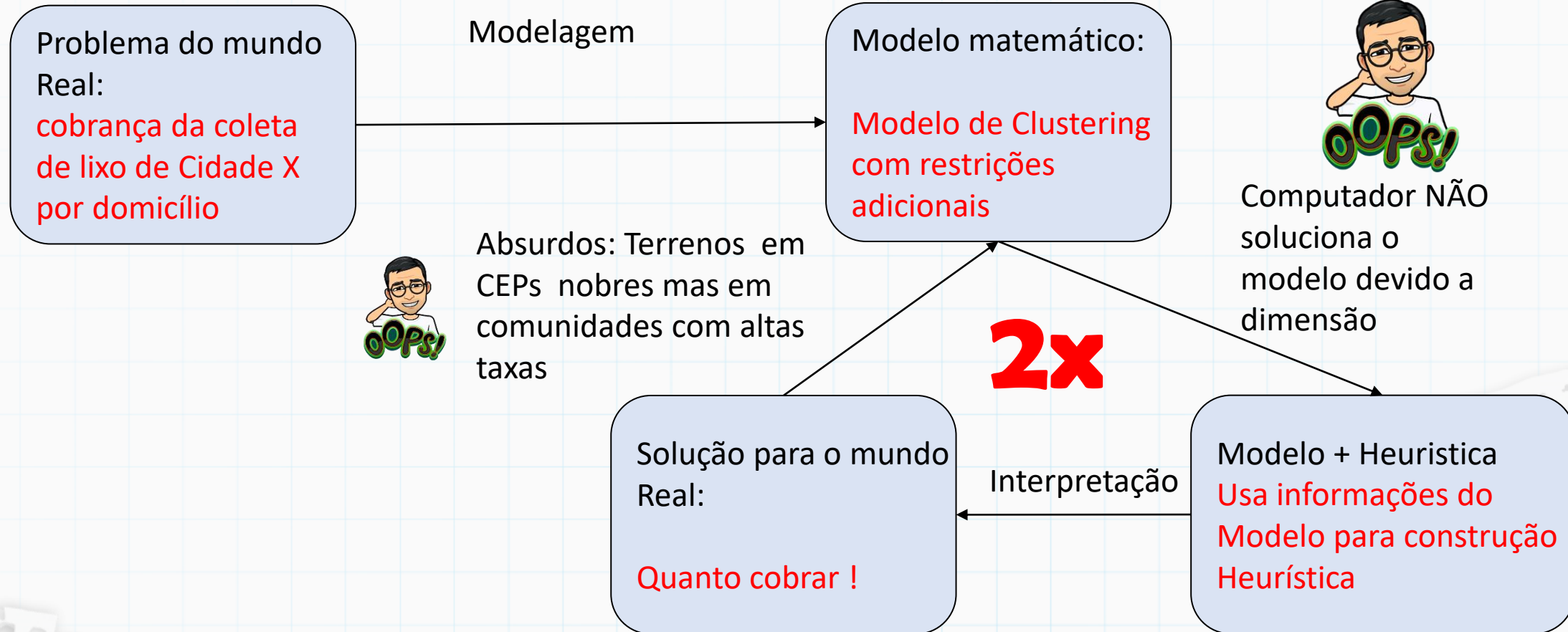
O que é otimização?

Exemplo
prático:



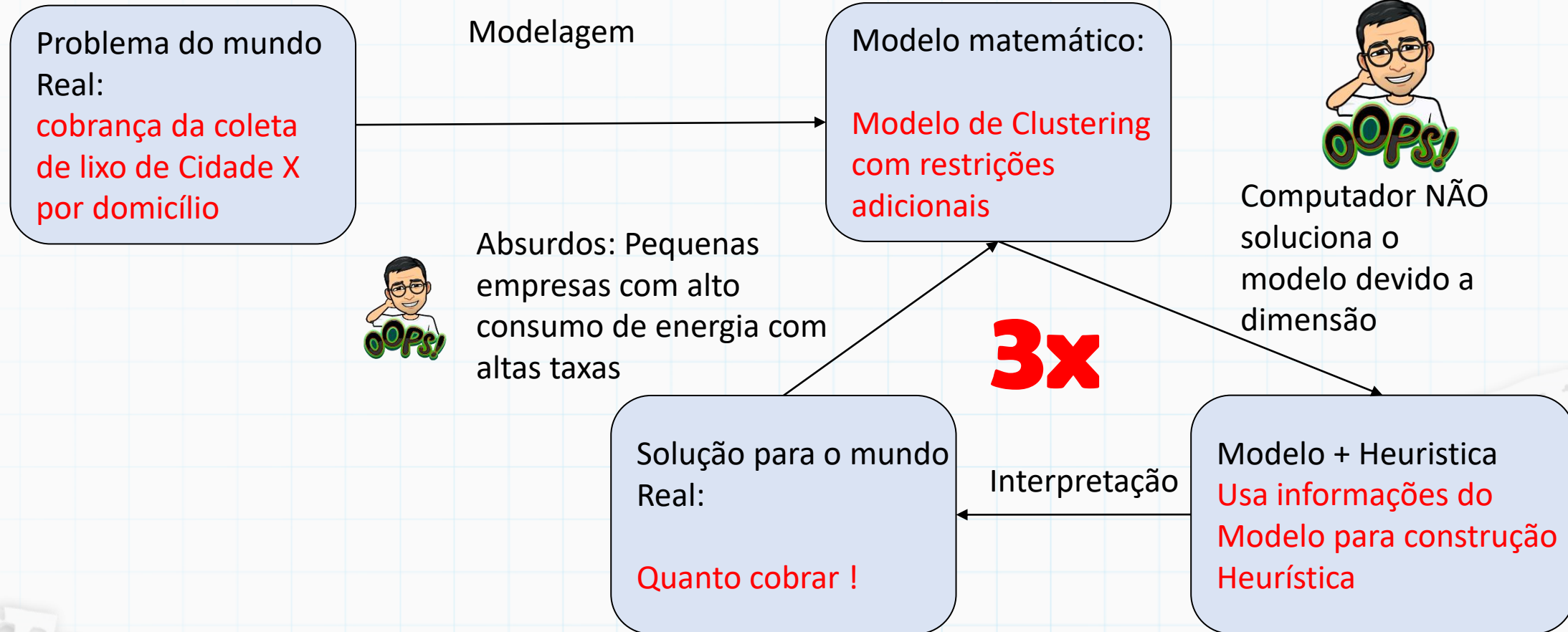
O que é otimização?

Exemplo
prático:



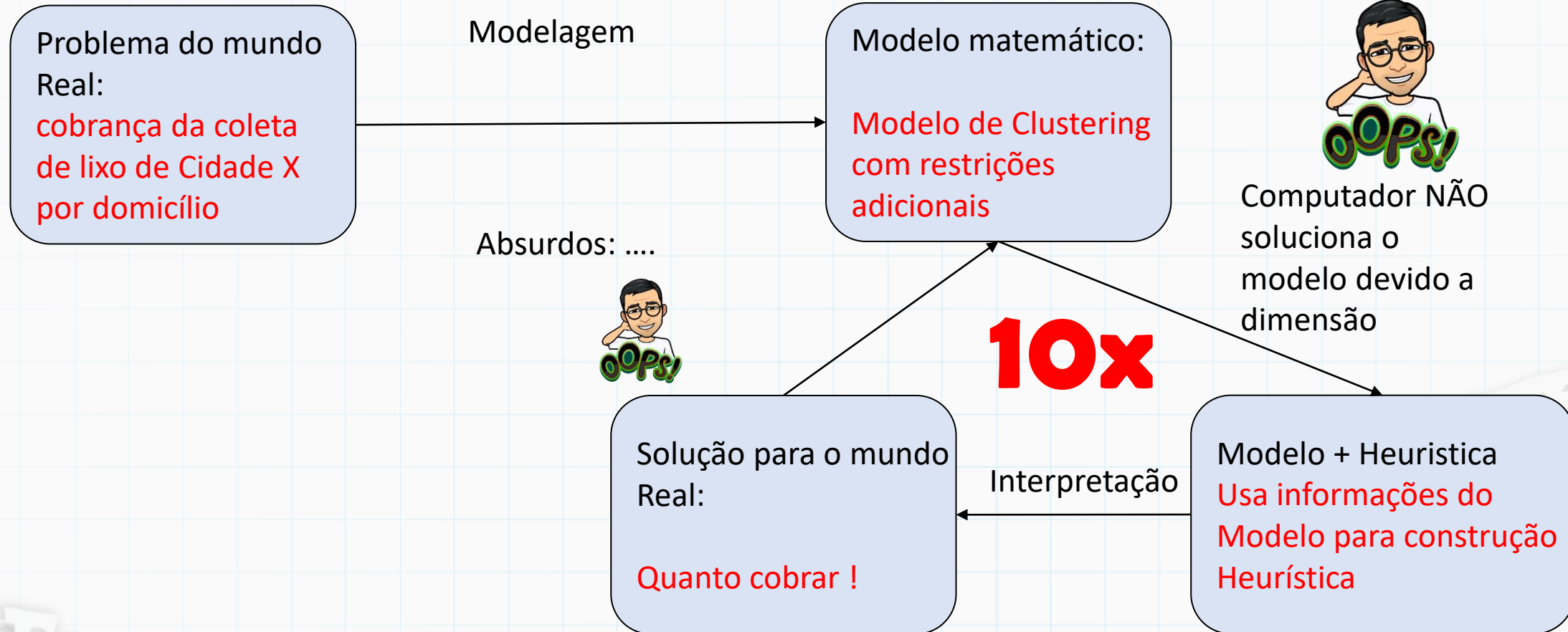
O que é otimização?

Exemplo
prático:



O que é otimização?

Exemplo
prático:



O que é otimização?



Exemplo
prático:

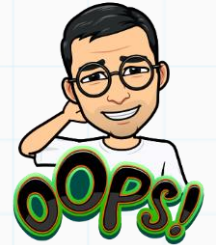
Problema do mundo
Real:

cobrança da coleta
de lixo de Cidade X
por domicílio

Modelagem

Modelo matemático:

Modelo de Clustering
com restrições
adicionais



Computador NÃO
soluciona o
modelo devido a
dimensão

10x

Interpretação

Modelo + Heurística

Usa informações do
Modelo para construção
Heurística

Solução para o mundo
Real:

Quanto cobrar !

Ajustes?

Restrições fora
do problema

Quanto cobrar !

Absurdos:

A taxa da
empresa X está
alta, pode
baixar? Porque ?
Mistério !

Ficção ?

?



O que é otimização?



- Aplicabilidade
 - Área Militar (surgimento da otimização)



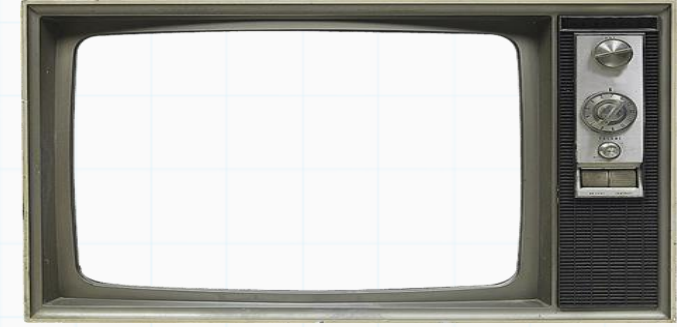
A Luftwaffe, a Força Aérea alemã estava submetendo a Inglaterra a um forte ataque, beirando a conquista.

Cientistas ingleses resolveram o problema de obter o máximo benefício dos radares recém-inventados que dispunham.

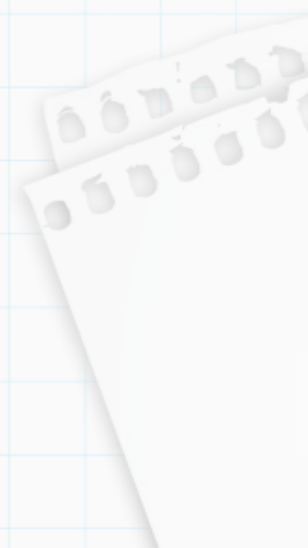
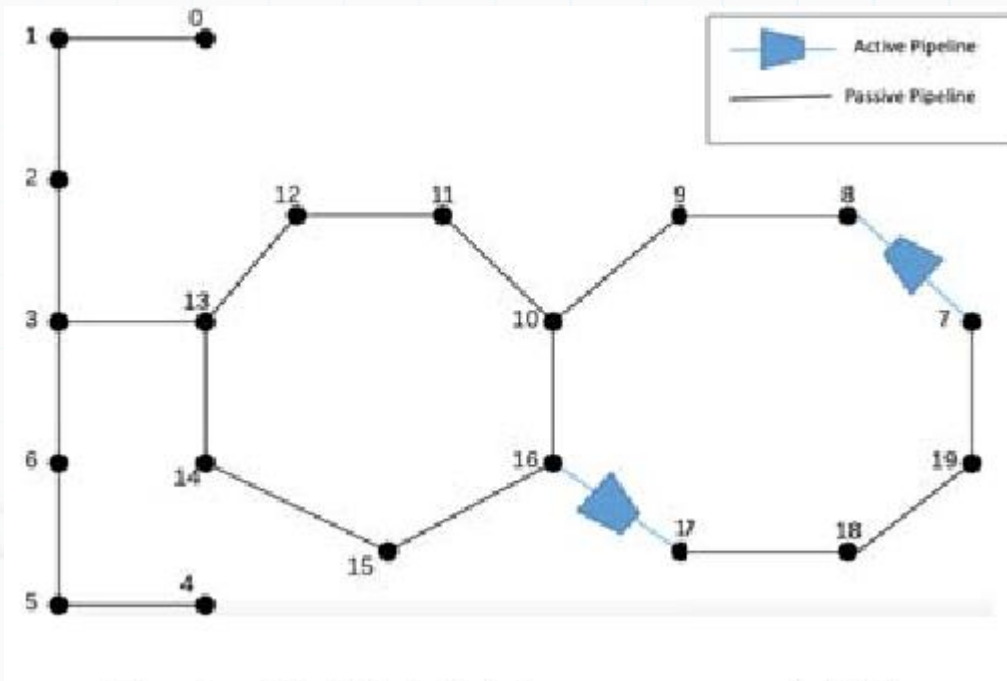
Graças ao seu trabalho determinando a localização ideal das antenas e da melhor distribuição de sinal conseguiram dobrar a eficácia do sistema de defesa aérea e evitar que a ilha caísse nas mãos da Alemanha nazista.



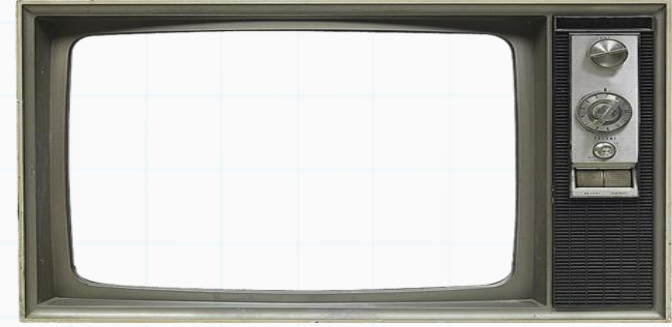
O que é otimização?



- Aplicabilidade
 - Área Militar (surgimento da otimização)
 - Indústria Petrolífera (fluxo de gás por dutos)



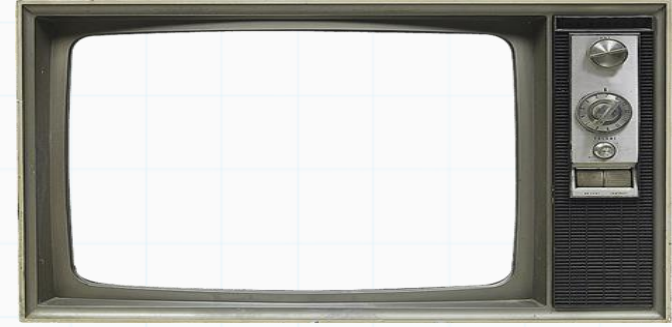
O que é otimização?



- Aplicabilidade
 - Área Militar (surgimento da otimização)
 - Indústria Petrolífera (fluxo de gás por dutos)
 - Indústria de Alimentos



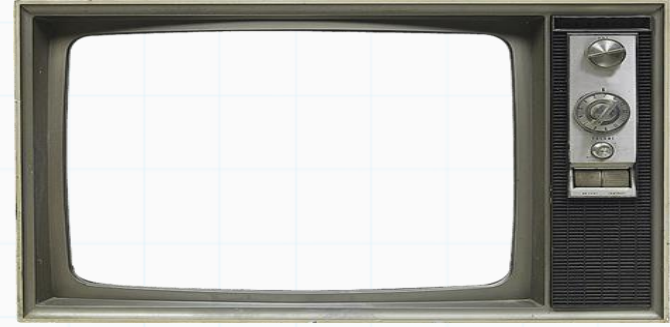
O que é otimização?



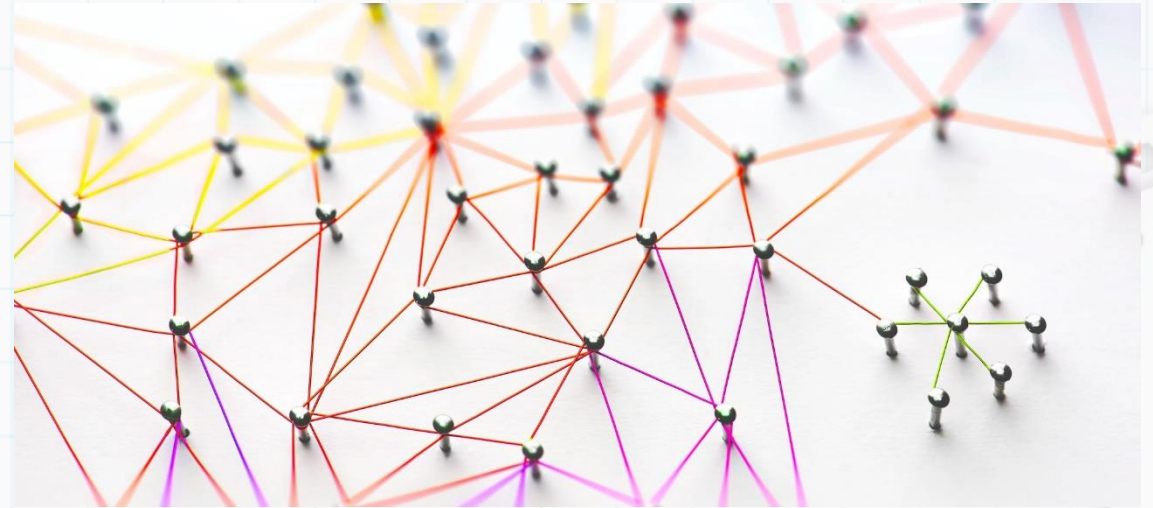
- Aplicabilidade
 - Área Militar (surgimento da otimização)
 - Indústria Petrolífera (fluxo de gás por dutos)
 - Indústria de Alimentos
 - Transporte



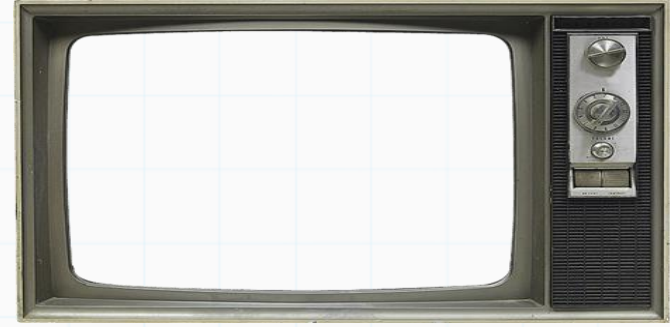
O que é otimização?



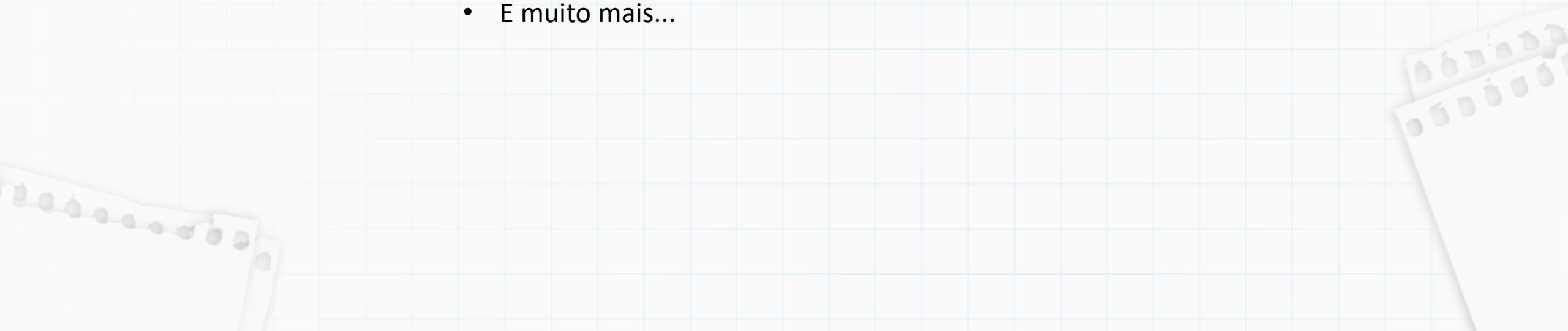
- Aplicabilidade
 - Área Militar (surgimento da otimização)
 - Indústria Petrolífera (fluxo de gás por dutos)
 - Indústria de Alimentos
 - Transporte
 - Telecomunicações (custo mínimo de conexão)



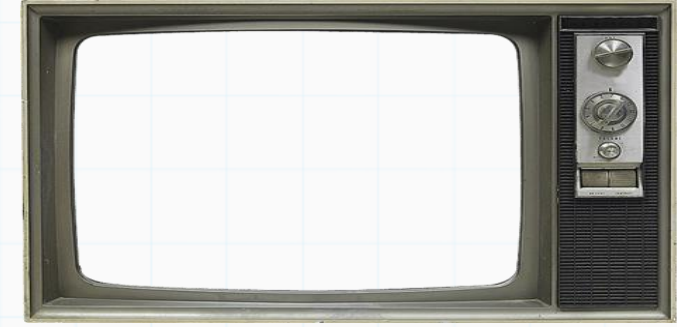
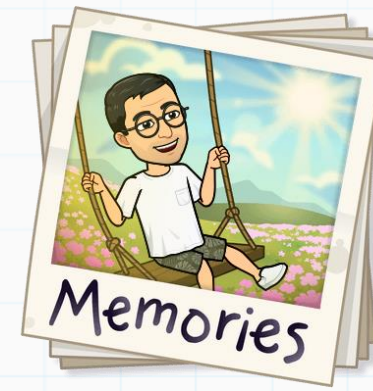
O que é otimização?



- Aplicabilidade
 - Área Militar (surgimento da otimização)
 - Indústria Petrolífera (fluxo de gás por dutos)
 - Indústria de Alimentos
 - Transporte
 - Telecomunicações (custo mínimo de conexão)
 - Distribuição de Energia Elétrica
 - Mercado Financeiro
 - E muito mais...

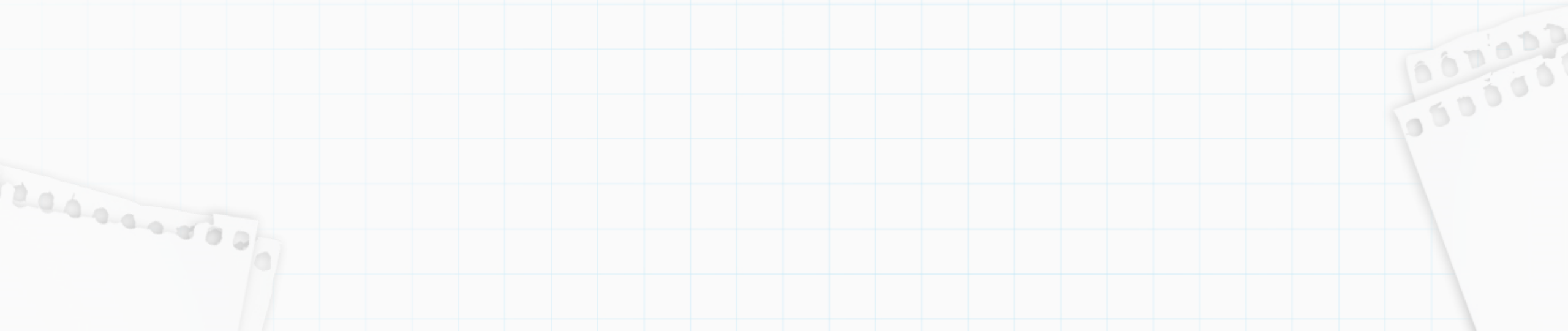


Formalizando

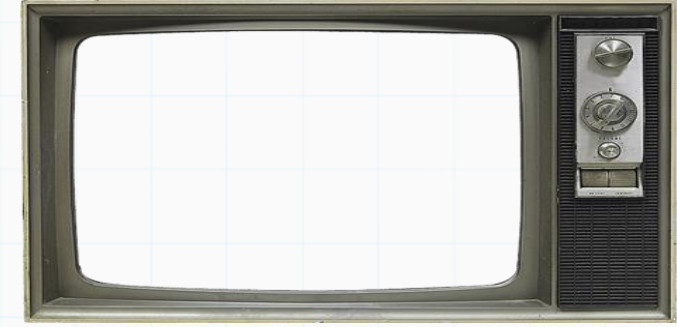
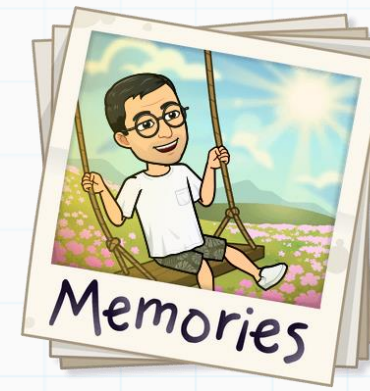


Otimização:

Uso da matemática para auxiliar nas tomadas de decisão



Formalizando

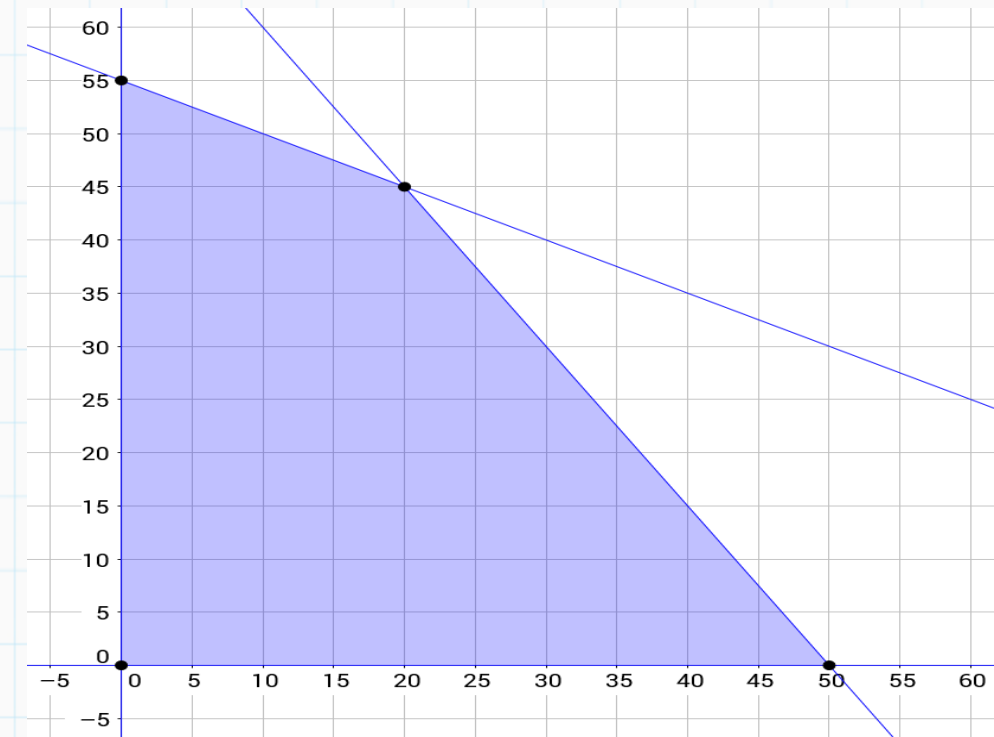


Otimização:

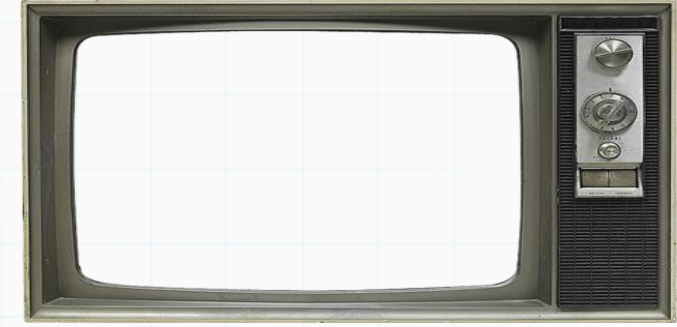
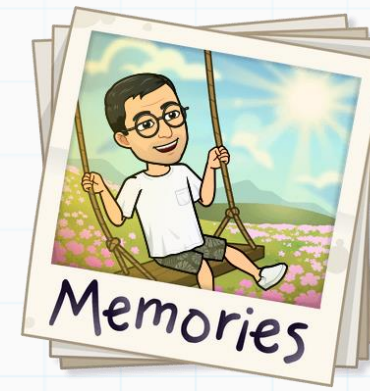
Uso da matemática para auxiliar nas tomadas de decisão

- O que é um Problema de Otimização ?

É um problema, onde dado um espaço de solução (definido por um conjunto de restrições), ele tenta determinar os valores extremos, com respeito a alguma função.



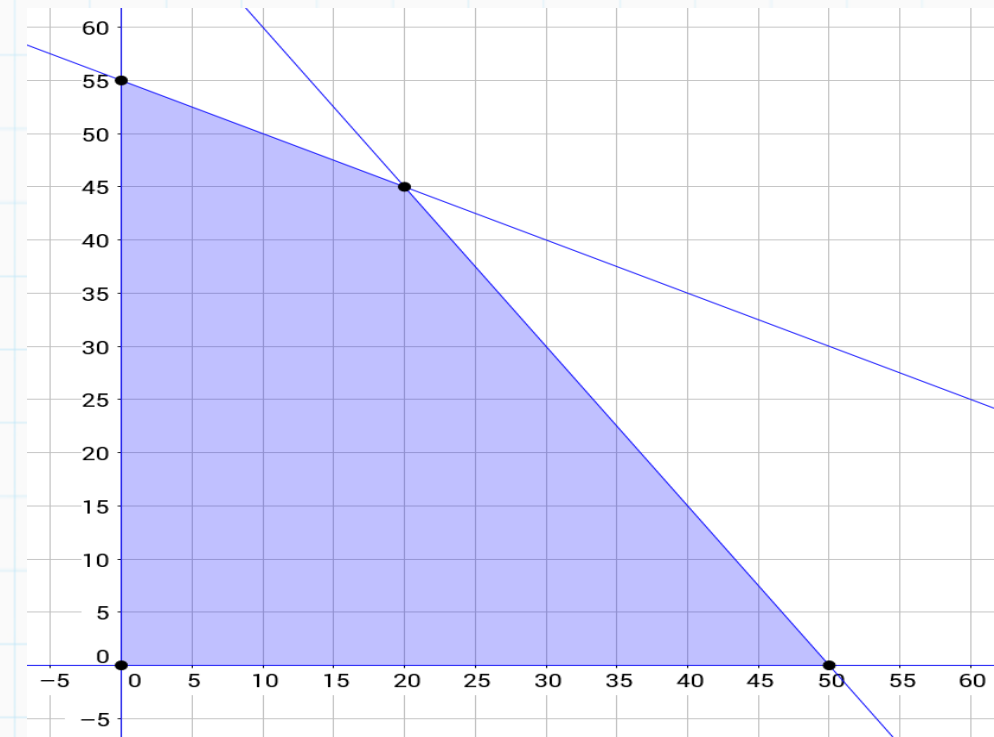
Formalizando



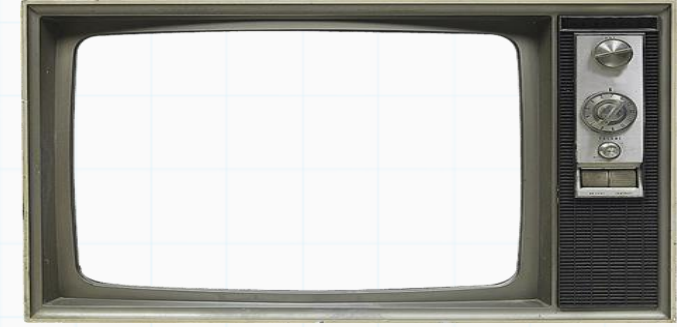
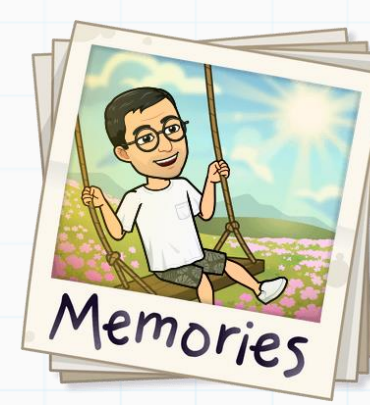
Otimização:

Uso da matemática para auxiliar nas tomadas de decisão

- O que é um Problema de Otimização ?
É um problema, onde dado um espaço de solução (definido por um conjunto de restrições), ele tenta determinar os valores extremos, com respeito a alguma função.
- PPL (Problema de Programação Linear)
 - São problemas de otimização nos quais essa função objetivo e as restrições são todas lineares



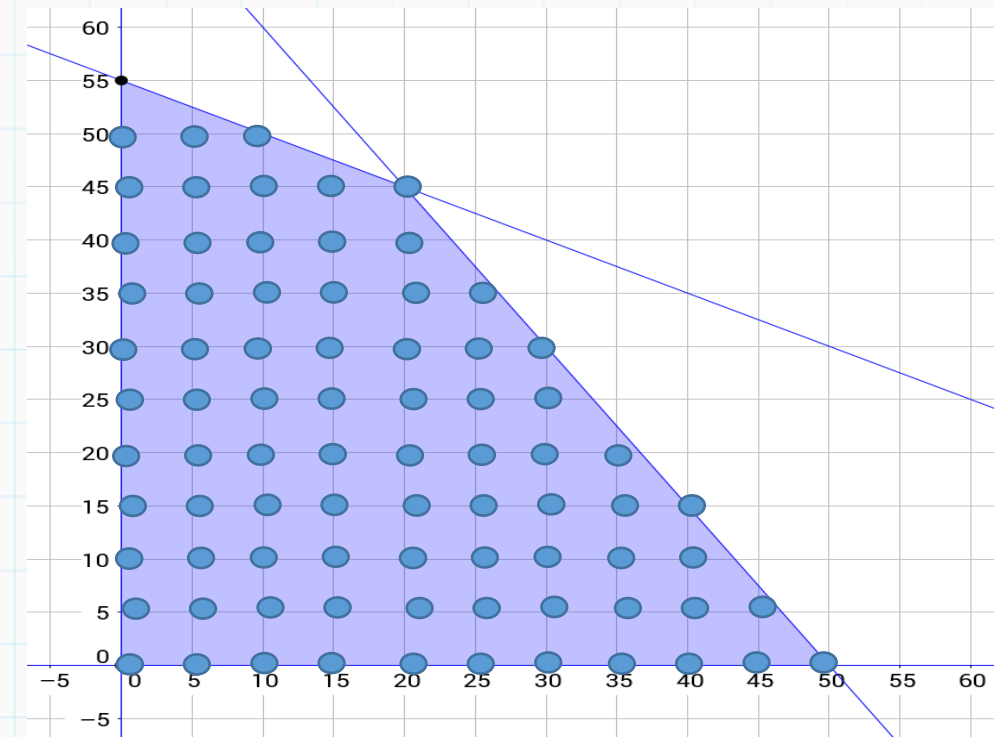
Formalizando



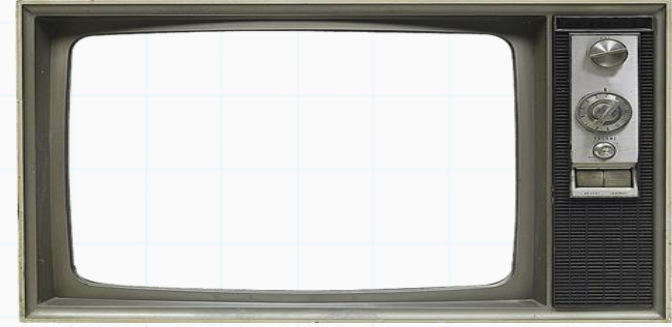
Otimização:

Uso da matemática para auxiliar nas tomadas de decisão

- O que é um Problema de Otimização ?
É um problema, onde dado um espaço de solução (definido por um conjunto de restrições), ele tenta determinar os valores extremos, com respeito a alguma função.
- PPL (Problema de Programação Linear)
 - São problemas de otimização nos quais essa função objetivo e as restrições são todas lineares
- PPI (Problema de Programação Inteira)
 - São PPLs com restrições de integralidade (variáveis inteiras)

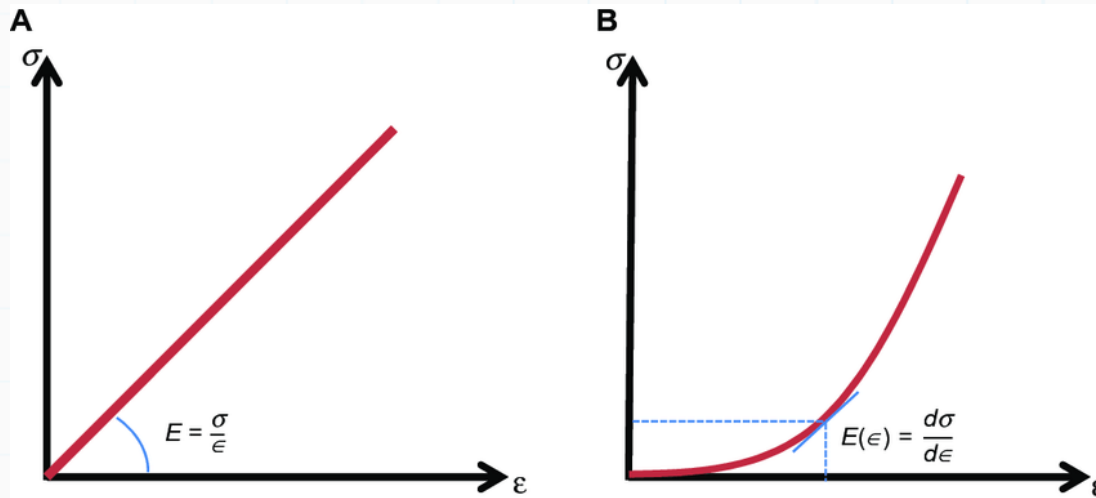


Problemas de Programação

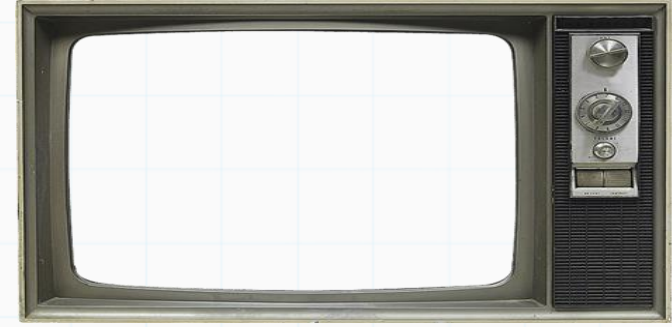


Existem classificações para os problemas de programação:

- Linear/Não Linear

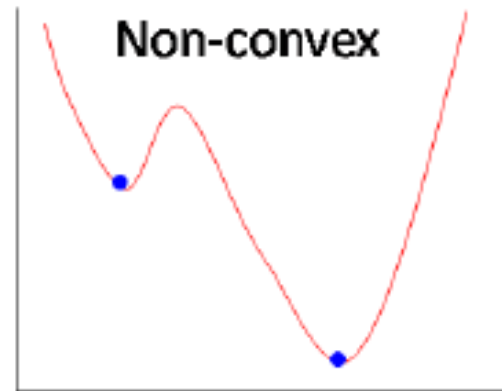
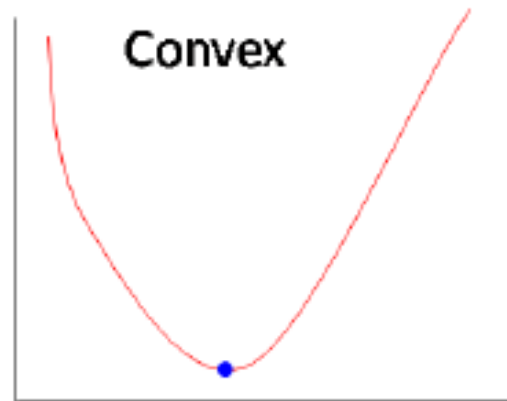


Problemas de Programação

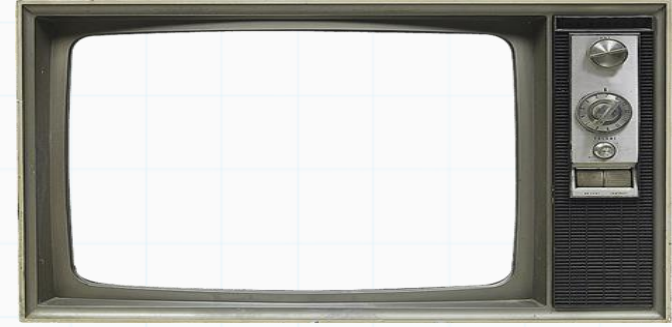


Existem classificações para os problemas de programação:

- Linear/Não Linear
- Convexo/Não Convexo

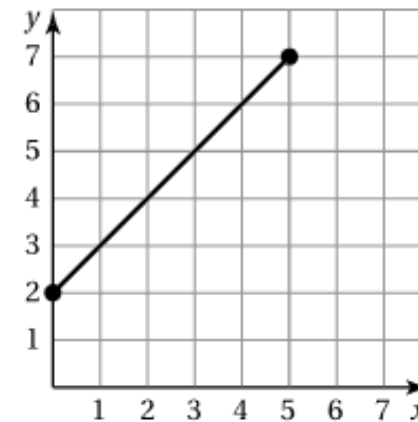
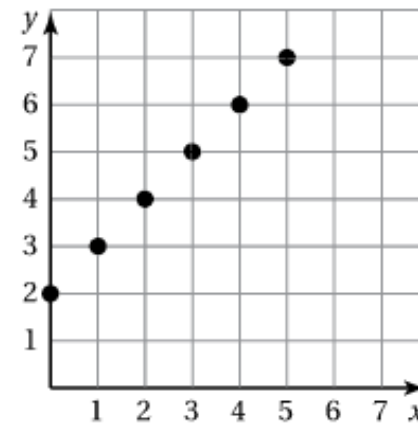


Problemas de Programação



Existem classificações para os problemas de programação:

- Linear/Não Linear
- Convexo/Não Convexo
- Discreto/Contínuo



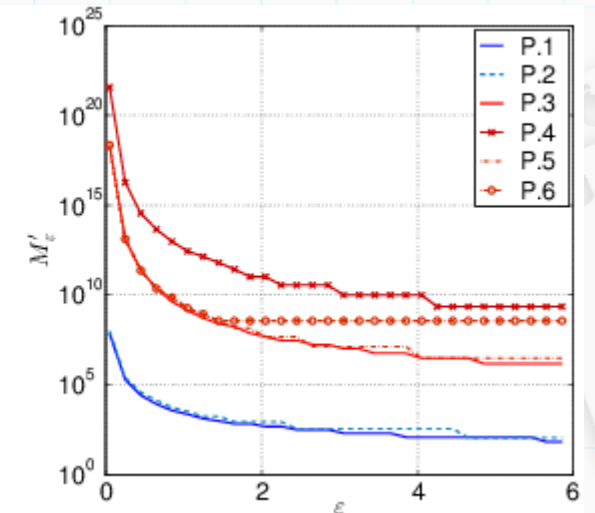
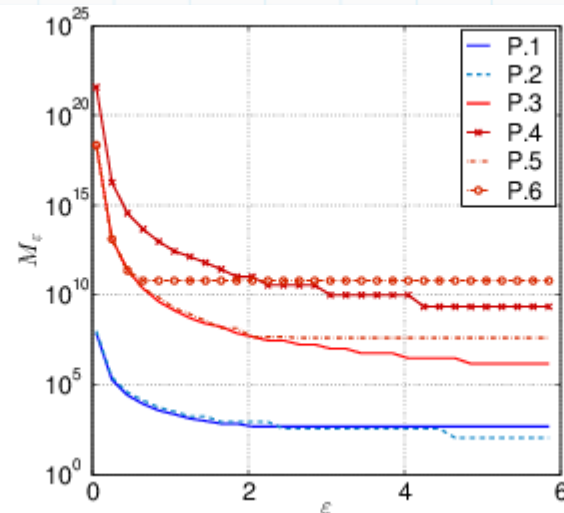
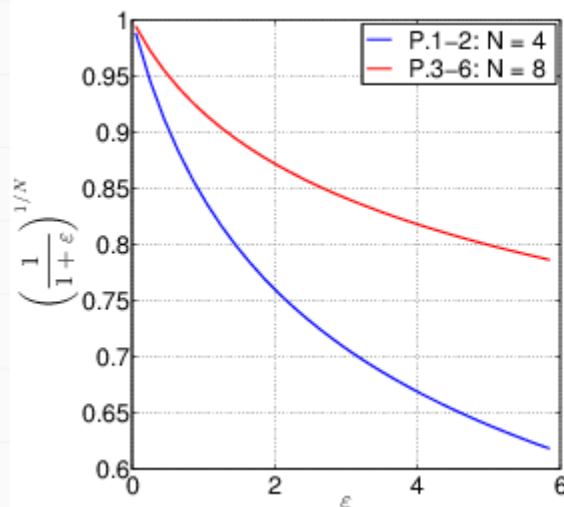
Problemas de Programação



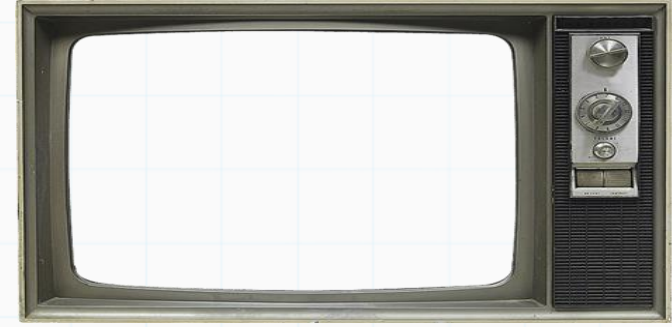
Existem classificações para os problemas de programação:

- Linear/Não Linear
- Convexo/Não Convexo
- Discreto/Contínuo
- Com Incerteza/Determinístico

Robusto ou Estocástico



Problemas de Programação



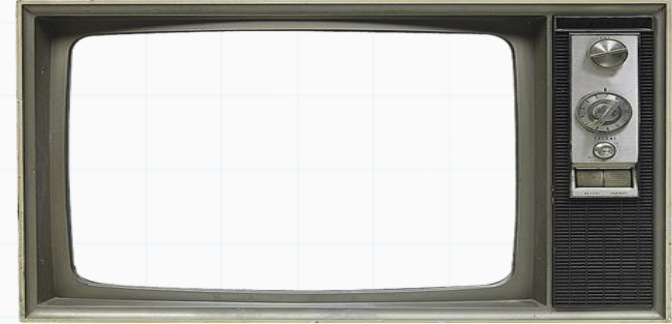
Existem classificações para os problemas de programação:

- Linear/Não Linear
- Convexo/Não Convexo
- Discreto/Contínuo
- Com Incerteza/Determinístico

Então o PPI se enquadra aonde ?



Problemas de Programação



Existem classificações para os problemas de programação:

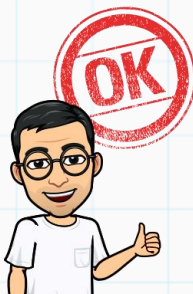
- Linear/Não Linear
- Convexo/Não Convexo
- Discreto/Contínuo
- Com Incerteza/Determinístico

Então o PPI se enquadra aonde ?

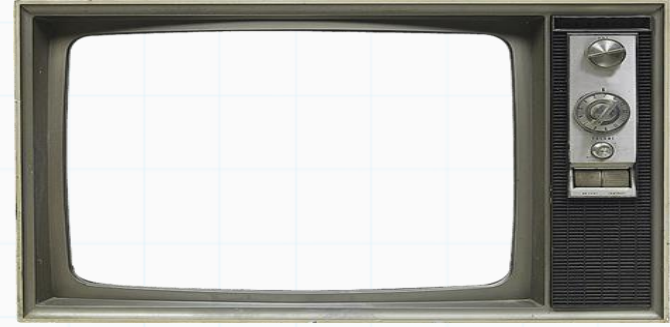
- Discreto
- Não Convexo (relaxação convexa)
- Determinístico
- Linear quando relaxado da integralidade (i.e. vira um PPL)



E esse será o foco do nosso curso !

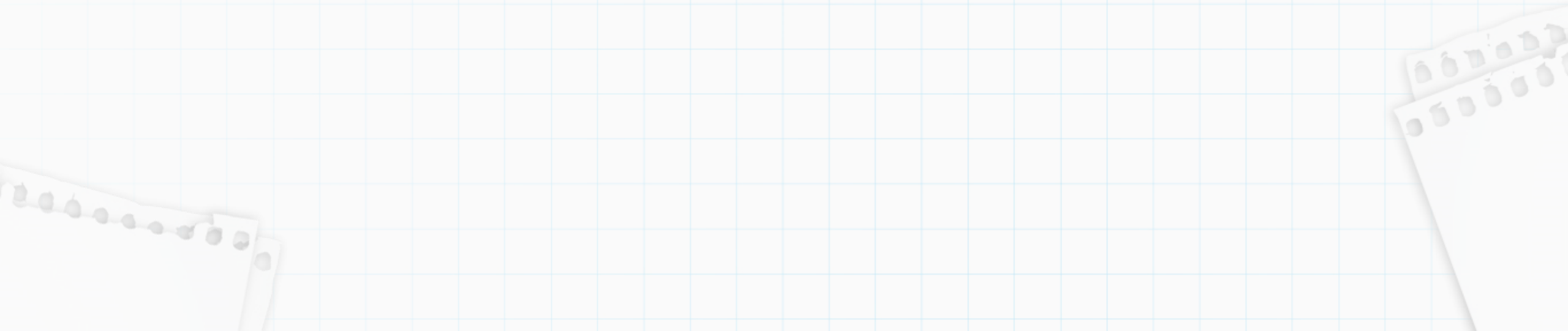


Modelando PLs



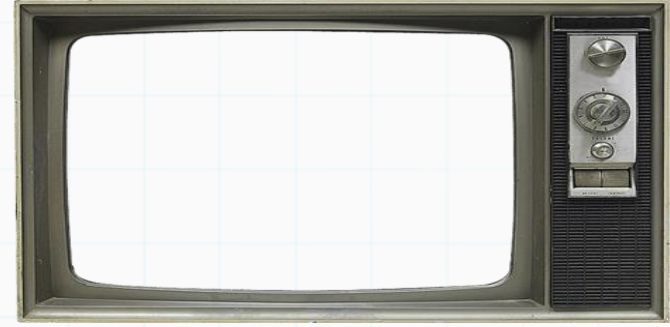
- O que é necessário para definir um Problema de Programação Linear (PPL) ?

As 3 componentes

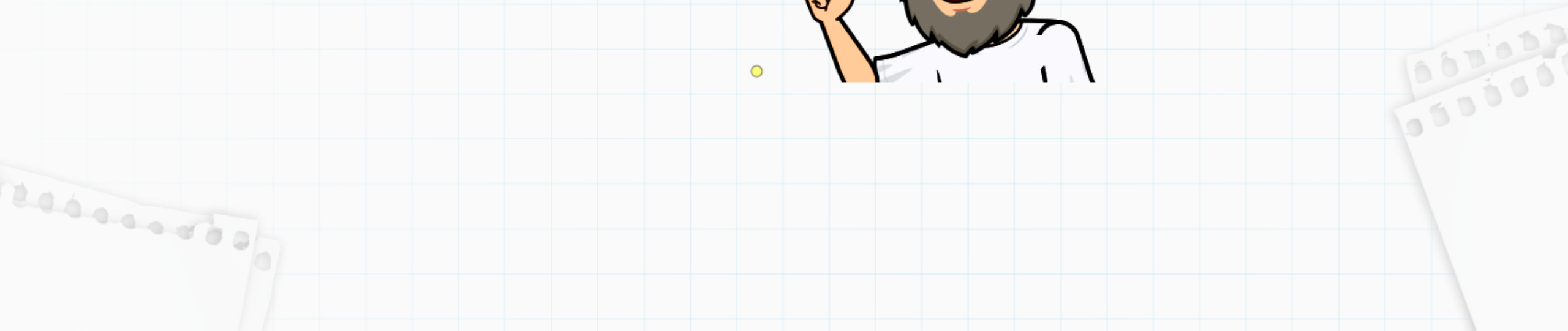
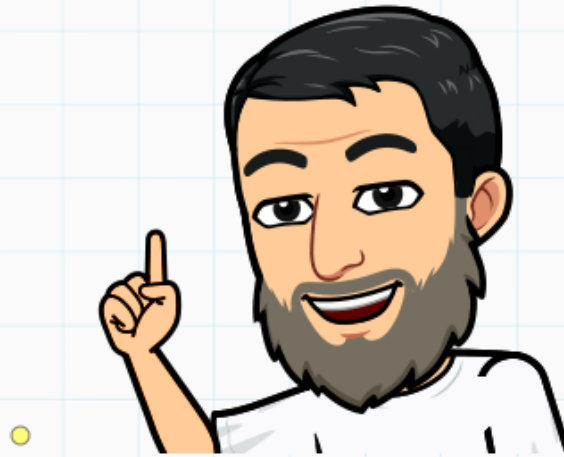


Modelagem

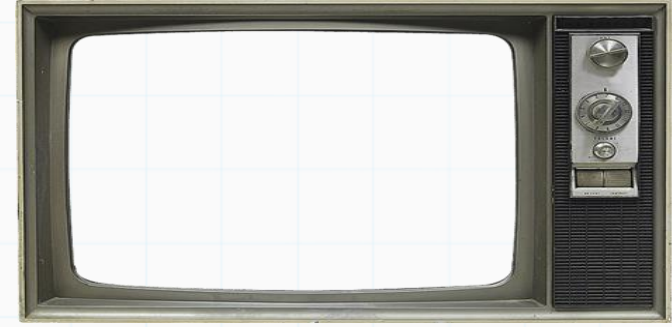
- Vamos começar a modelar nossos problemas matematicamente



MODELAGEM

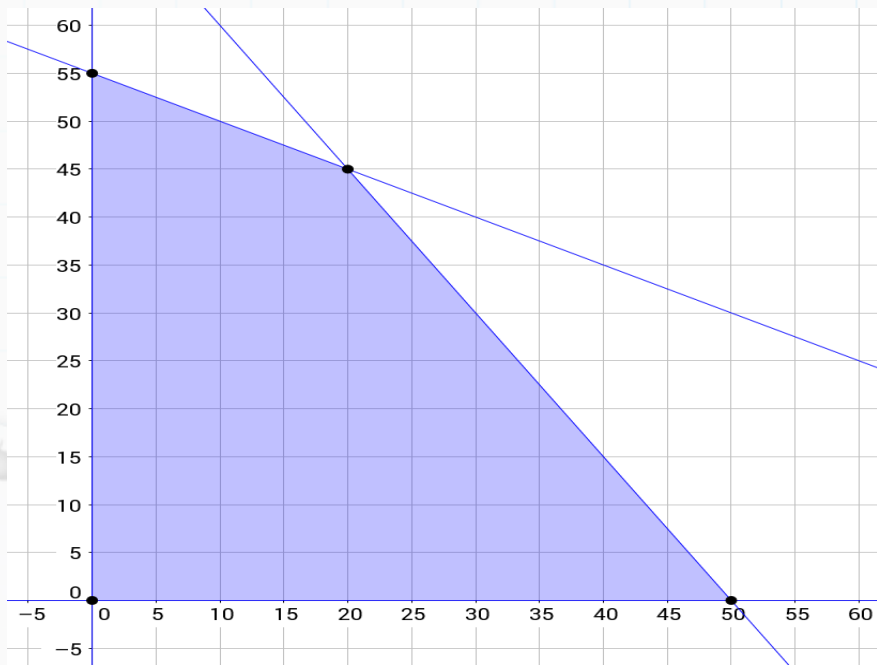


Modelando



- O que é necessário para definir um Problema de Programação ?
 - Variáveis de Decisão: São incógnitas a serem determinadas pela solução

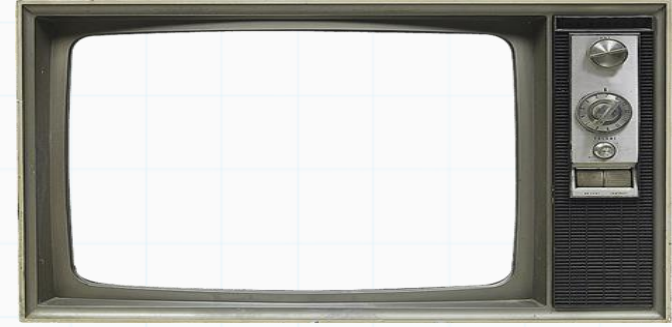
As 3 componentes



X e Y

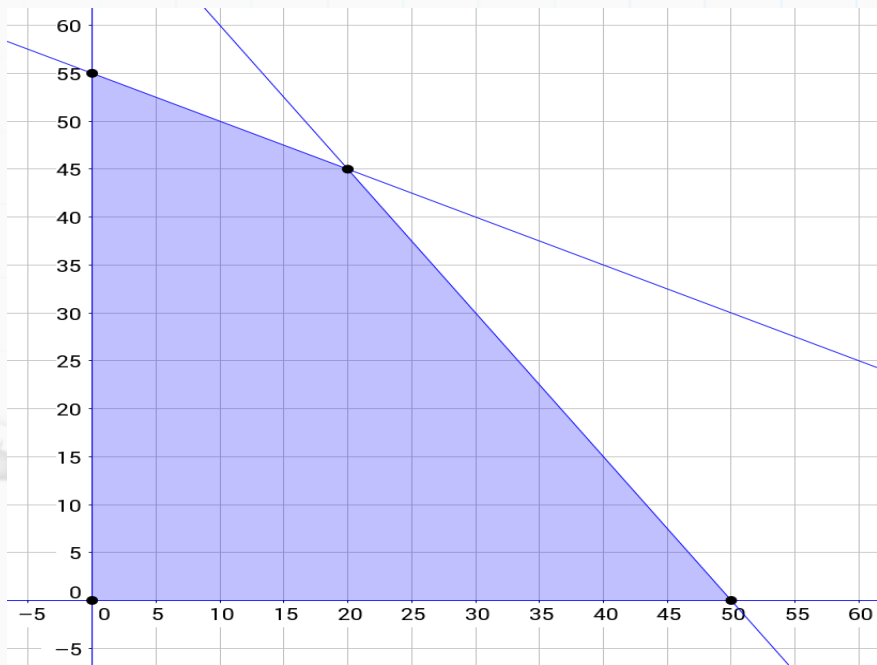
Definem a dimensão e a representação da solução

Modelando



As 3 componentes

- O que é necessário para definir um Problema de Programação ?
 - Variáveis de Decisão: São incógnitas a serem determinadas pela solução
 - Restrições: São as limitações de sua região viável



As duas retas

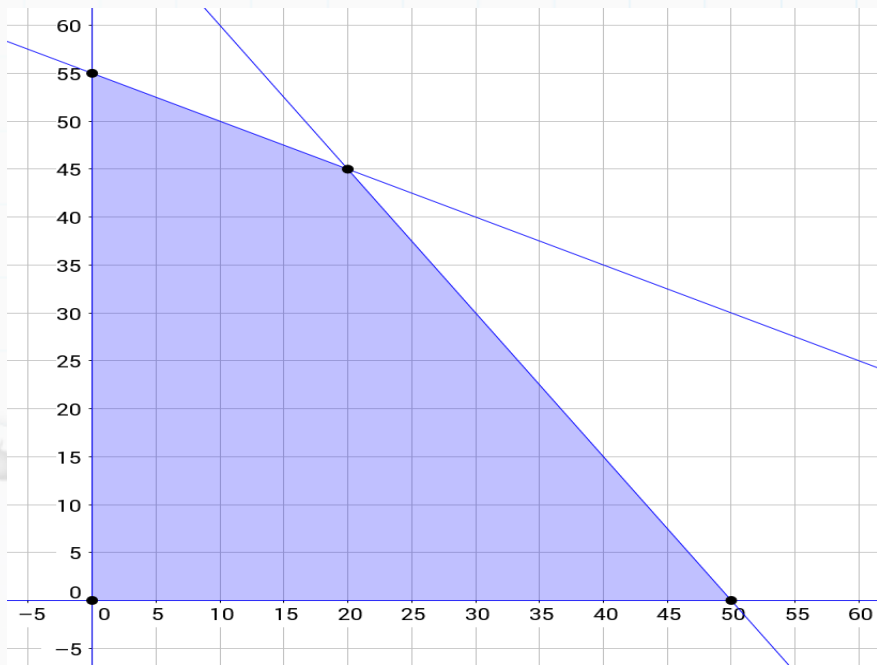
Modelando



- O que é necessário para definir um Problema de Programação ?

As 3 componentes

- Variáveis de Decisão: São incógnitas a serem determinadas pela solução
- Restrições: São as limitações de sua região viável
- Função Objetivo: Função matemática que define a qualidade da solução em função das variáveis de decisão



Ex: $f(x,y)=x+y$

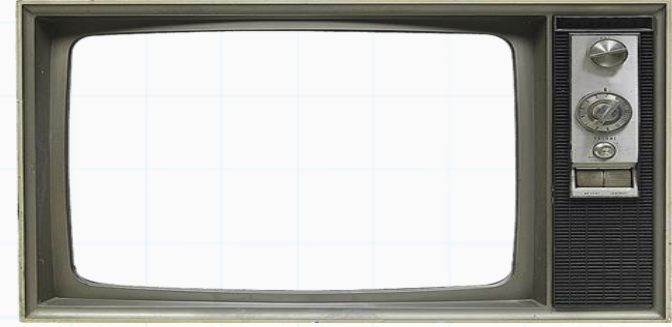


Vamos Modelar

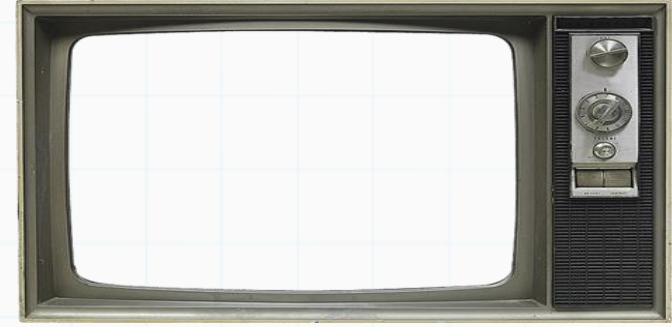
- Problema da Mochila:



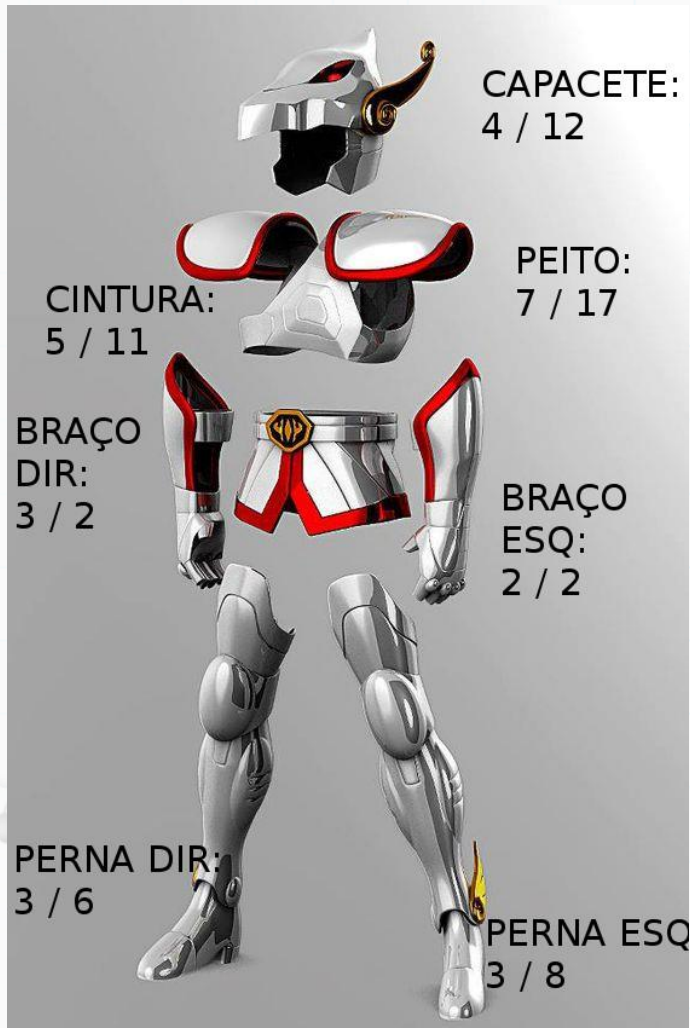
- Seya está indo para batalha e precisa se proteger
- Capacidade máxima da mochila é 9 kilos



Vamos Modelar



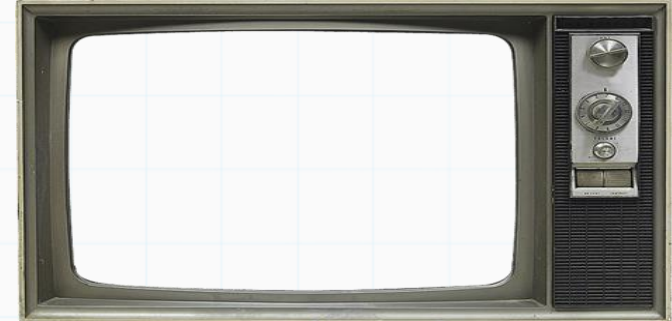
- Problema da Mochila:



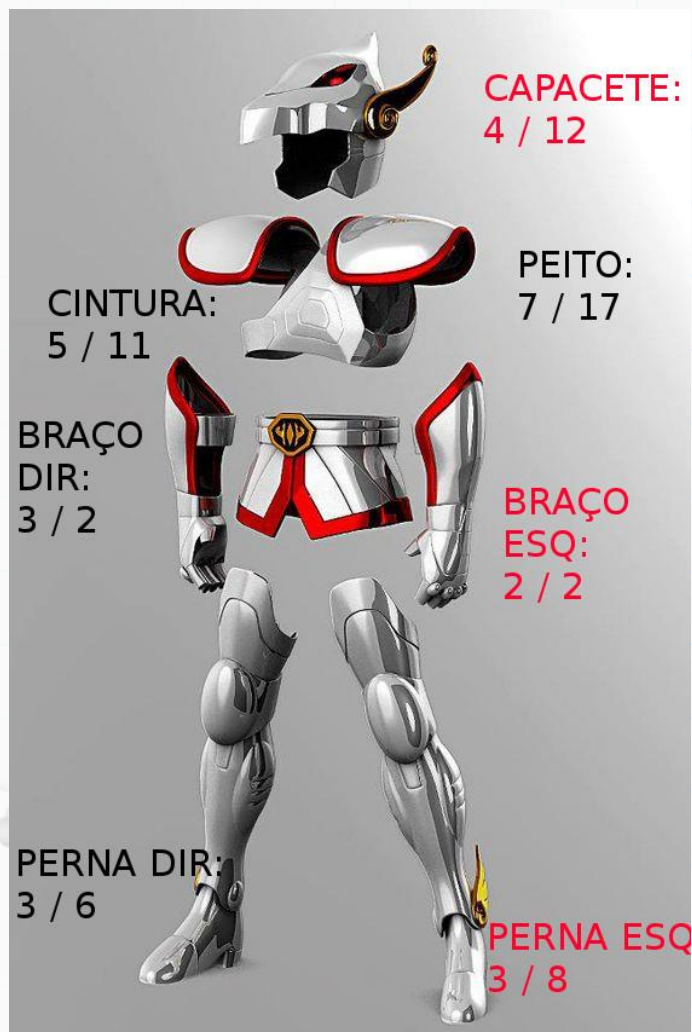
- Seya está indo para batalha e precisa se proteger
- Capacidade máxima da mochila é 9 kilos
- Cada parte da armadura possui um peso e um fator de proteção
- Quais partes da armadura ele deve levar ? (peso / proteção)



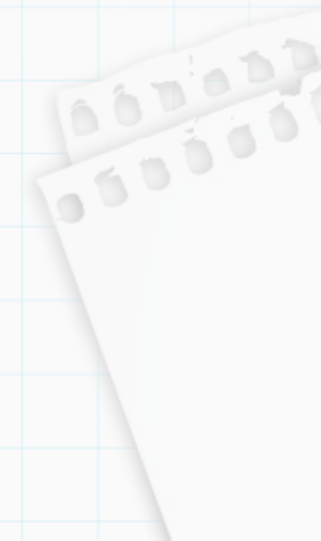
Vamos Modelar



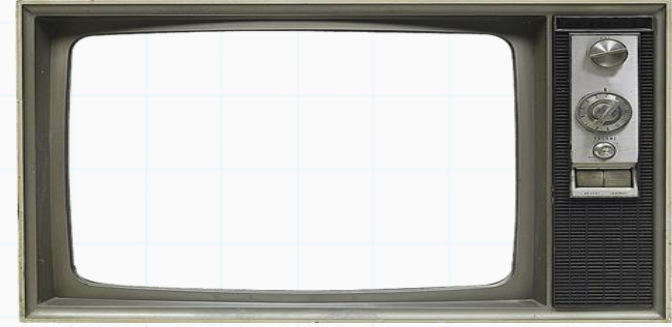
- Problema da Mochila:



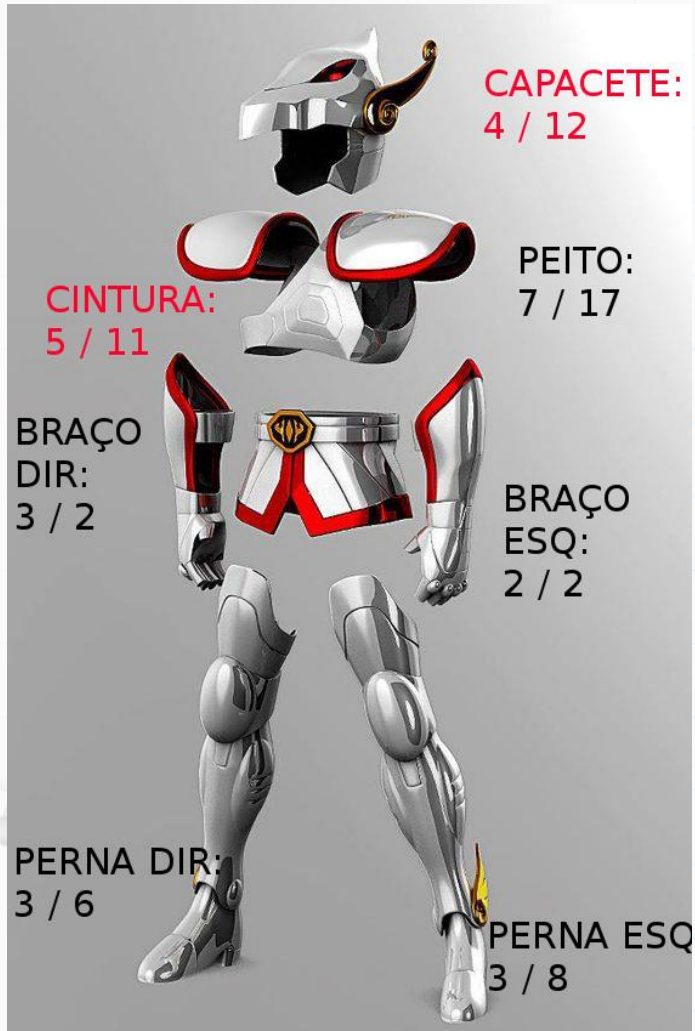
- Seya está indo para batalha e precisa se proteger
- Capacidade máxima da mochila é 9 kilos
- Cada parte da armadura possui um peso e um fator de proteção
- Quais partes da armadura ele deve levar ? (peso / proteção)
 - Solução 1: Capacete + Braço Esq + Perna Esq = 9 / 22



Vamos Modelar



- Problema da Mochila:



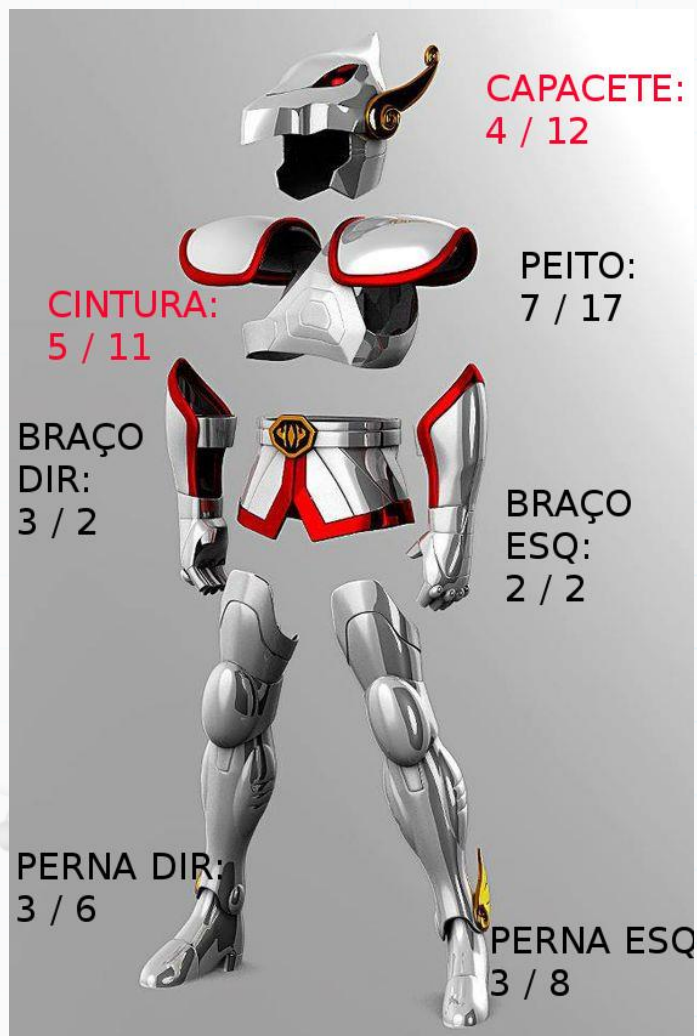
- Seya está indo para batalha e precisa se proteger
- Capacidade máxima da mochila é 9 kilos
- Cada parte da armadura possui um peso e um fator de proteção
- Quais partes da armadura ele deve levar ? (peso / proteção)
 - Solução 1: Capacete + Braço Esq + Perna Esq = 9 / 22
 - Solução 2: Capacete + Cintura = 9 / 23



Vamos Modelar



- Problema da Mochila:



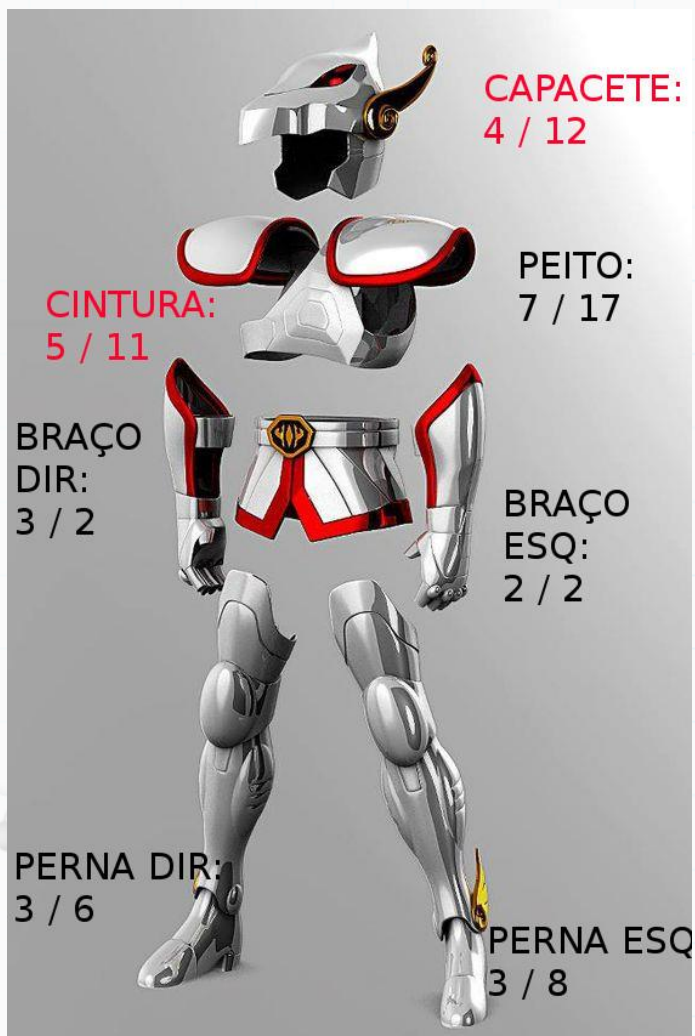
- Seya está indo para batalha e precisa se proteger
- Capacidade máxima da mochila é 9 kilos
- Cada parte da armadura possui um peso e um fator de proteção
- Quais partes da armadura ele deve levar ? (peso / proteção)
 - Solução 1: Capacete + Braço Esq + Perna Esq = 9 / 22
 - Solução 2: Capacete + Cintura = 9 / 23
 - Enumerar soluções (combinações) N=número de peças

| N | N! |
|----|-------------------------------|
| 7 | 5.040 soluções |
| 17 | 3.5×10^{20} soluções |
| 27 | 1×10^{35} soluções |

Vamos Modelar



- Problema da Mochila:

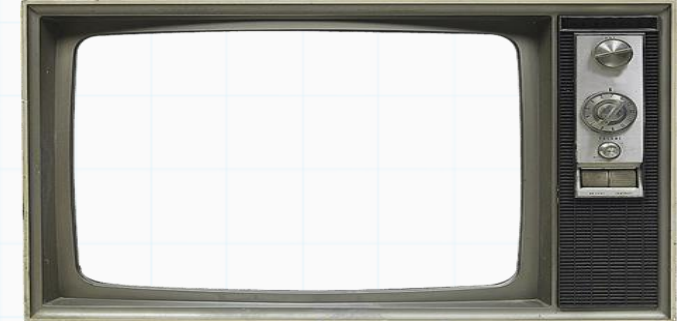


- Seya está indo para batalha e precisa se proteger
- Capacidade máxima da mochila é 9 kilos
- Cada parte da armadura possui um peso e um fator de proteção
- Quais partes da armadura ele deve levar ? (peso / proteção)
 - Solução 1: Capacete + Braço Esq + Perna Esq = 9 / 22
 - Solução 2: Capacete + Cintura = 9 / 23
 - Enumerar soluções (combinações) N=número de peças

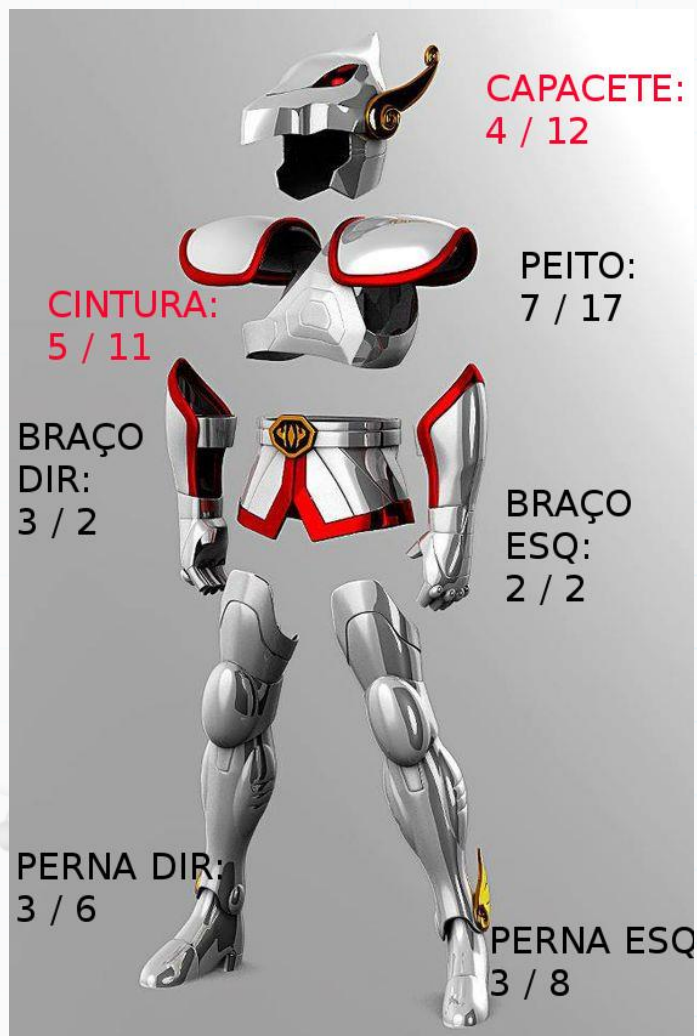
| N | N! |
|----|-------------------------------|
| 7 | 5.040 soluções |
| 17 | 3.5×10^{20} soluções |
| 27 | 1×10^{35} soluções |

- Um computador atual levaria 0,000001 segundos para enumerar

Vamos Modelar



- Problema da Mochila:



- Seya está indo para batalha e precisa se proteger
- Capacidade máxima da mochila é 9 kilos
- Cada parte da armadura possui um peso e um fator de proteção
- Quais partes da armadura ele deve levar ? (peso / proteção)
 - Solução 1: Capacete + Braço Esq + Perna Esq = 9 / 22
 - Solução 2: Capacete + Cintura = 9 / 23
 - Enumerar soluções (combinações) N=número de peças

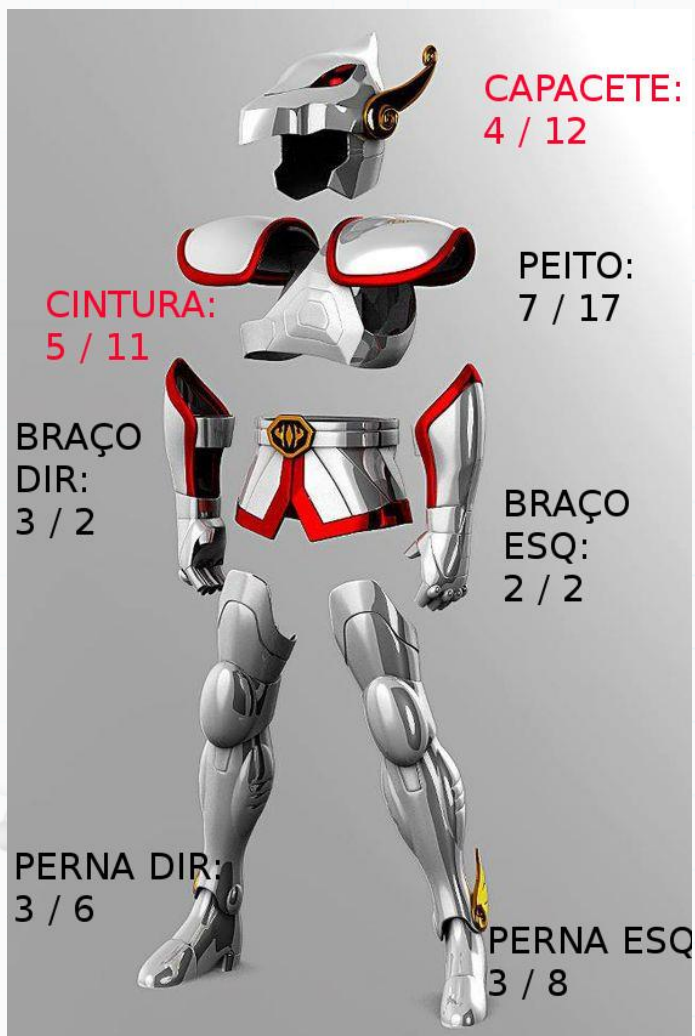
| N | N! |
|----|-------------------------------|
| 7 | 5.040 soluções |
| 17 | 3.5×10^{20} soluções |
| 27 | 1×10^{35} soluções |

- Um computador atual levaria 8,7 dias para enumerar

Vamos Modelar



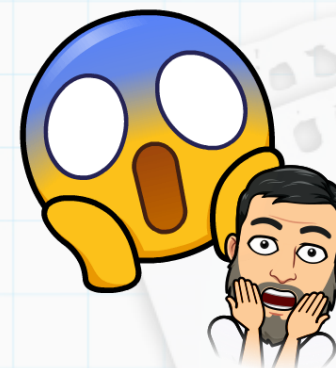
- Problema da Mochila:



- Seya está indo para batalha e precisa se proteger
- Capacidade máxima da mochila é 9 kilos
- Cada parte da armadura possui um peso e um fator de proteção
- Quais partes da armadura ele deve levar ? (peso / proteção)
 - Solução 1: Capacete + Braço Esq + Perna Esq = 9 / 22
 - Solução 2: Capacete + Cintura = 9 / 23
 - Enumerar soluções (combinações) N =número de peças

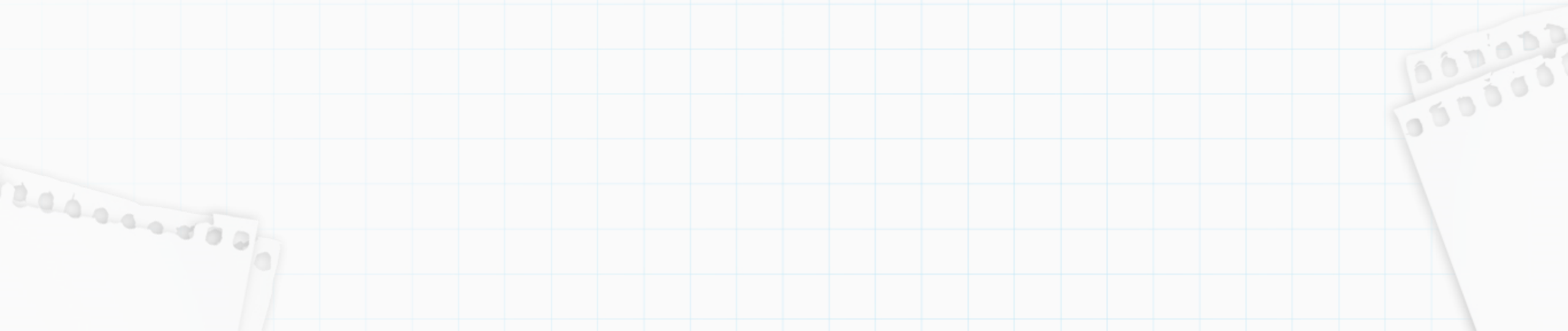
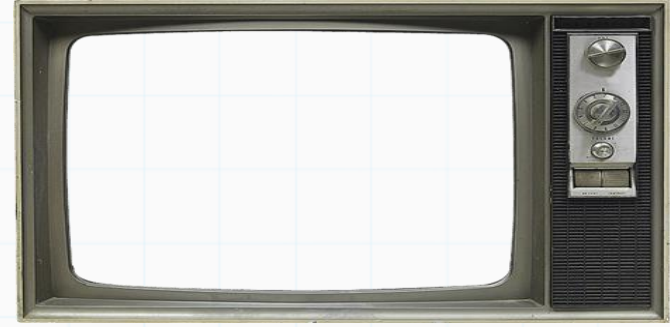
| N | N! |
|----|-------------------------------|
| 7 | 5.040 soluções |
| 17 | 3.5×10^{20} soluções |
| 27 | 1×10^{35} soluções |

- Um computador atual levaria 73×10^{10} anos para enumerar



Vamos Modelar

- Como modelar ?
 - Variáveis
 - Restrições
 - Objetivo

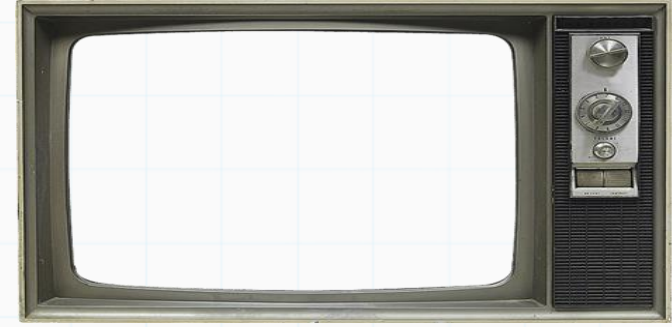


Vamos Modelar

- Como modelar ?
 - Variáveis -> Peças da armadura

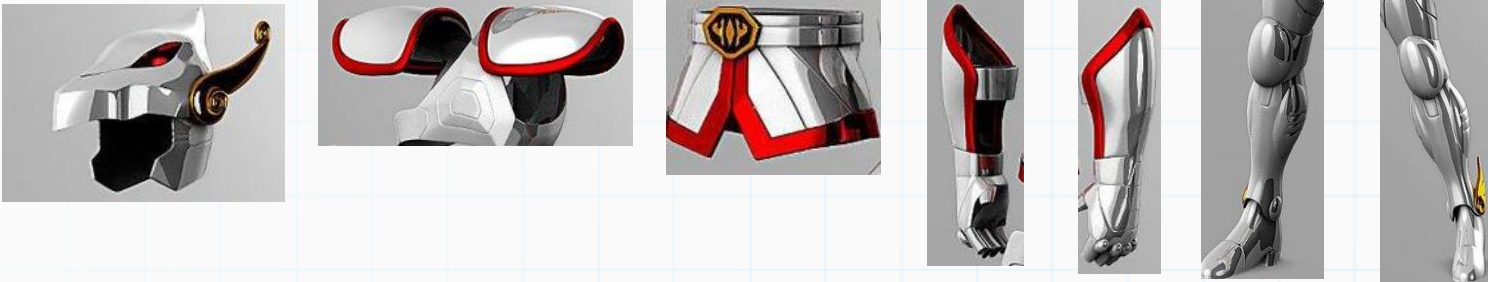


- Vamos atribuir valor 1 se a peça foi escolhida e 0 caso contrário



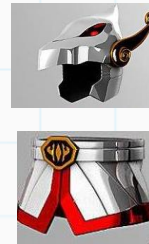
Vamos Modelar

- Como modelar ?
 - Variáveis -> Peças da armadura

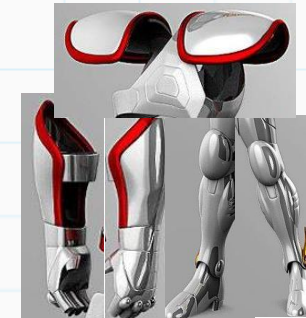


- Vamos atribuir valor 1 se a peça foi escolhida e 0 caso contrário

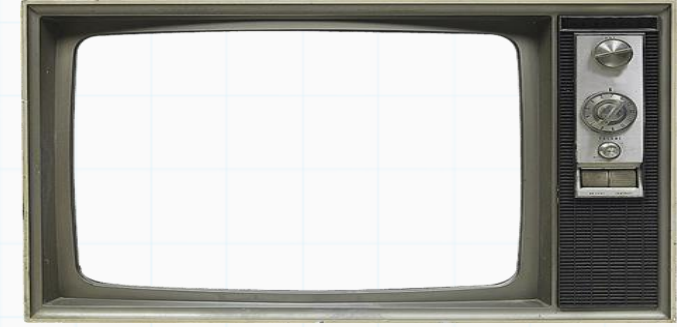
Exemplo: solução apenas com capacete e cintura



= 1










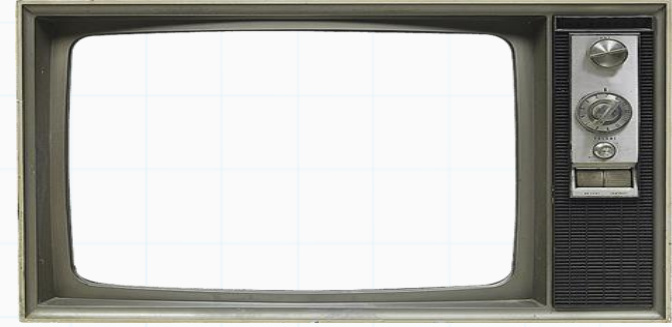
= 0



Vamos Modelar

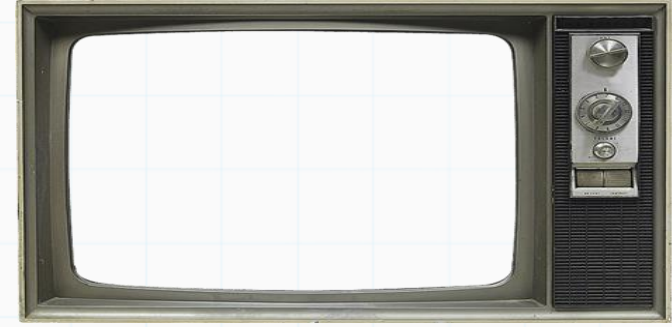
- Como modelar soluções válidas (que pegusus possa carregar) ?
 - Restrições -> Peso

$$4(\text{ ) + 7(\text{ ) + 5(\text{ ) + 3(\text{ ) + 2(\text{ ) + 3(\text{ ) + 3(\text{ ) \leq 9$$



Vamos Modelar

- Como modelar soluções válidas (que pegusus possa carregar) ?
 - Restrições -> Peso



$$4(\text{Capacete}) + 7(\text{Cintura}) + 5(\text{Cintura}) + 3(\text{Braço}) + 2(\text{Braço}) + 3(\text{Perna}) + 3(\text{Perna}) \leq 9$$

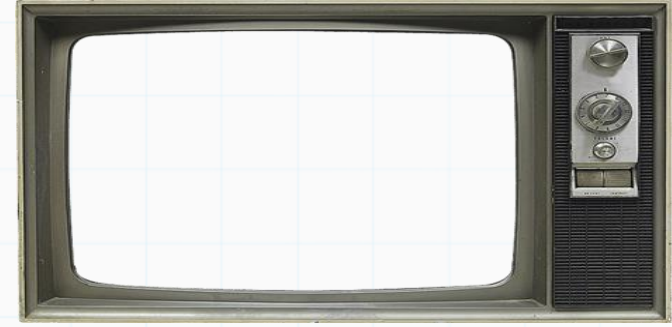
Exemplo: solução apenas com capacete e cintura

$$(\text{Capacete}) + (\text{Cintura}) = 1$$

$$4(1) + 7(0) + 5(1) + 3(0) + 2(0) + 3(0) + 3(0) \leq 9$$
$$9 \leq 9$$

Vamos Modelar

- Como ponderar boas soluções ?
 - Objetivo -> Máxima Proteção

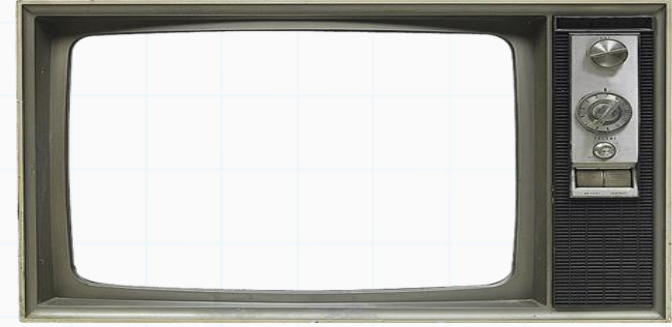


$$\text{MAX} \quad 12(\text{img1}) + 17(\text{img2}) + 11(\text{img3}) + 2(\text{img4}) + 2(\text{img5}) + 6(\text{img6}) + 8(\text{img7})$$

The equation represents a weighted sum of different armor pieces. The weights are 12, 17, 11, 2, 2, 6, and 8. The armor pieces are represented by small images: a helmet, a chest plate, a belt, a gauntlet, a leg piece, a foot piece, and a leg piece.

Vamos Modelar

- Como ponderar boas soluções ?
 - Objetivo -> Máxima Proteção



$$\text{MAX} \quad 12(\text{Capacete}) + 17(\text{Luvas}) + 11(\text{Cintura}) + 2(\text{Braço esquerdo}) + 2(\text{Braço direito}) + 6(\text{Perna esquerda}) + 8(\text{Perna direita})$$

Exemplo: solução apenas com capacete e cintura

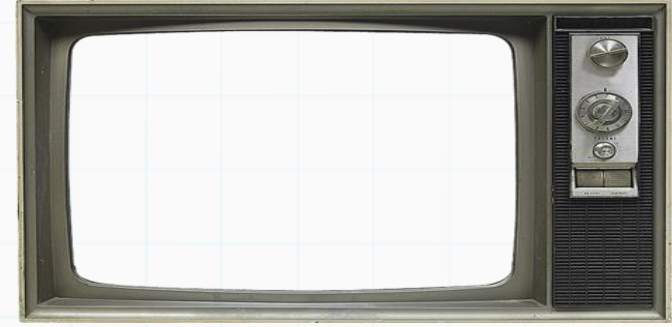
$$\text{Capacete} + \text{Cintura} = 1$$

$$\text{MAX} \quad 12(1) + 17(0) + 11(1) + 2(0) + 2(0) + 6(0) + 8(0)$$

$$\text{MAX} \quad 23$$

Vamos Modelar

- Modelo Matemático Final



$$\text{MAX} \quad 12(\text{Helm}) + 17(\text{Goggles}) + 11(\text{Belt}) + 2(\text{Gloves}) + 2(\text{Boots}) + 6(\text{Legs}) + 8(\text{Feet})$$

Sujeito a:

$$4(\text{Helm}) + 7(\text{Goggles}) + 5(\text{Belt}) + 3(\text{Gloves}) + 2(\text{Boots}) + 3(\text{Legs}) + 3(\text{Feet}) \leq 9$$

Onde:



são 0 ou 1



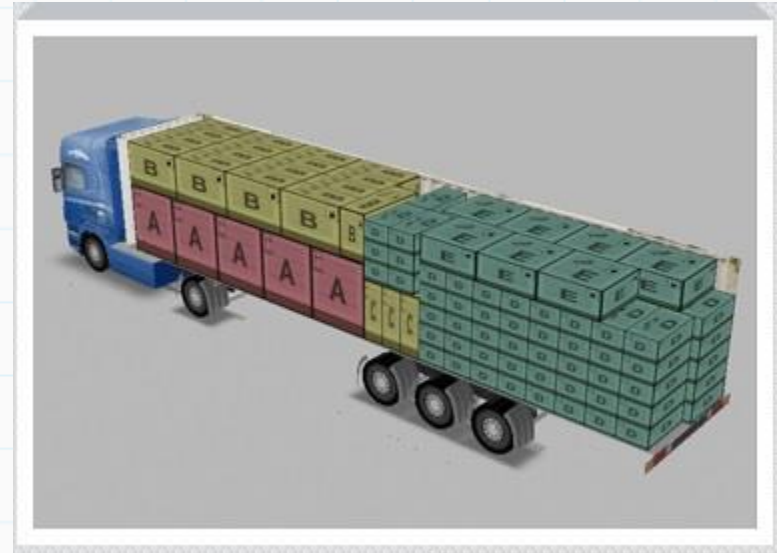
Vamos Modelar

- No mundo real
 - Mochila do Seiya -> Navio -> Empresa de entrega com centenas de navios
 - Peças da armadura -> Produto -> Milhares de produtos para serem entregues
 - Além de peso, temos restrição de espaço ou restrições de conflito de itens

Navios

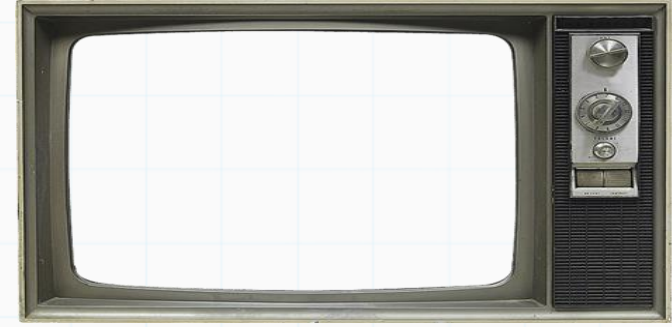


Caminhões

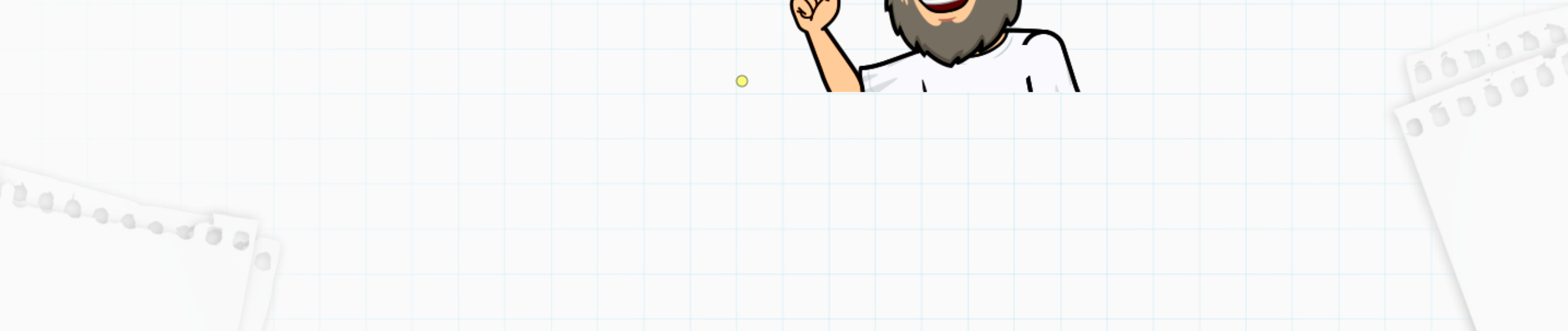
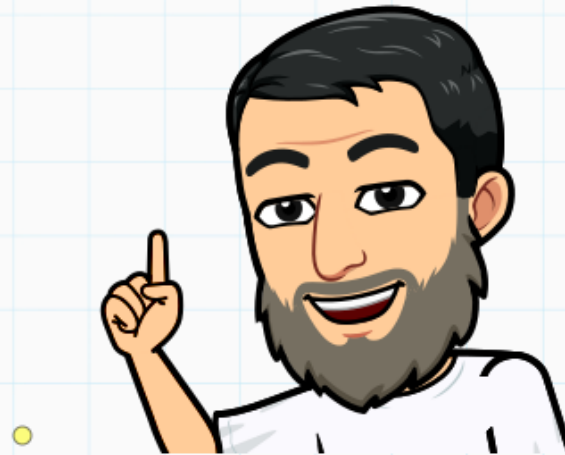


Modelando PLs

- Vamos modelar alguns problemas de programação linear



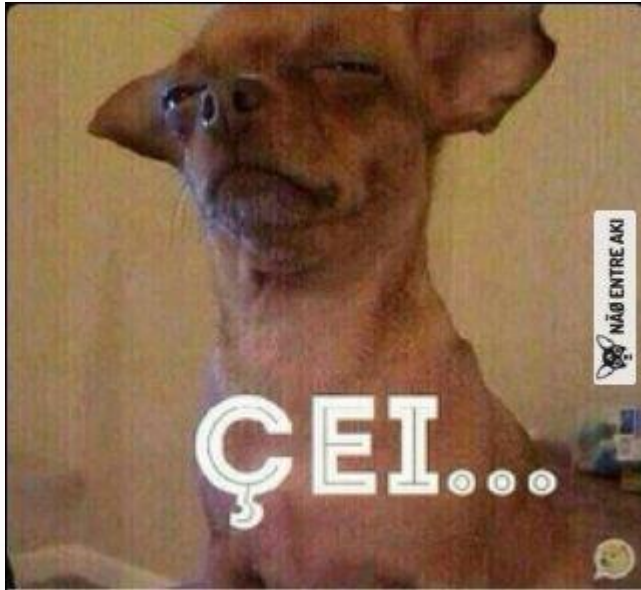
MODELAGEM



Vamos Modelar



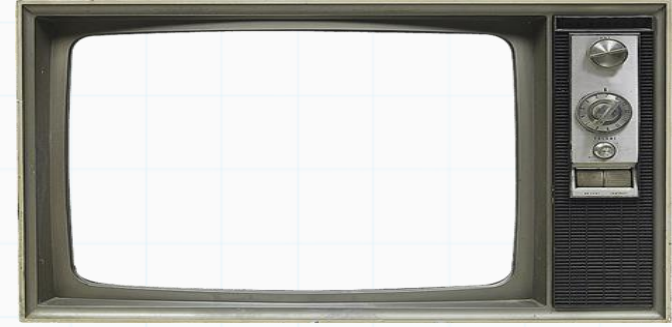
- Problema da Ração Canina:



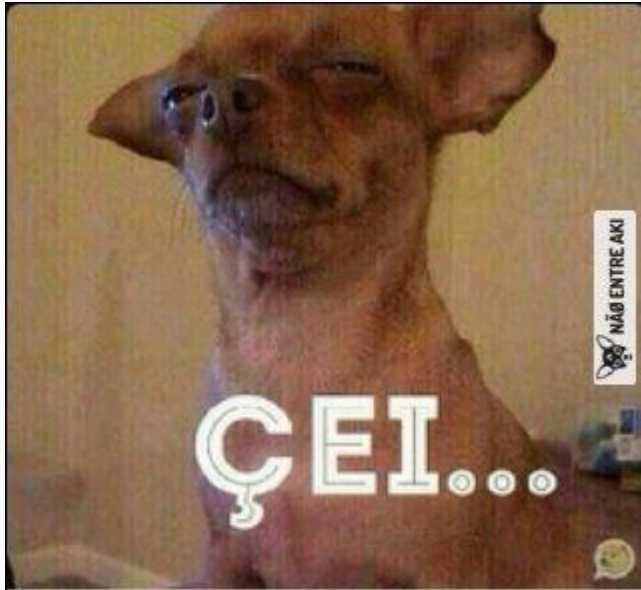
- Uma empresa de alimentos caninos produz 2 tipos de ração:
 - All Mega Supremo (AMS)
 - Ração das Estrelas (RE)



Vamos Modelar



- Problema da Ração Canina:



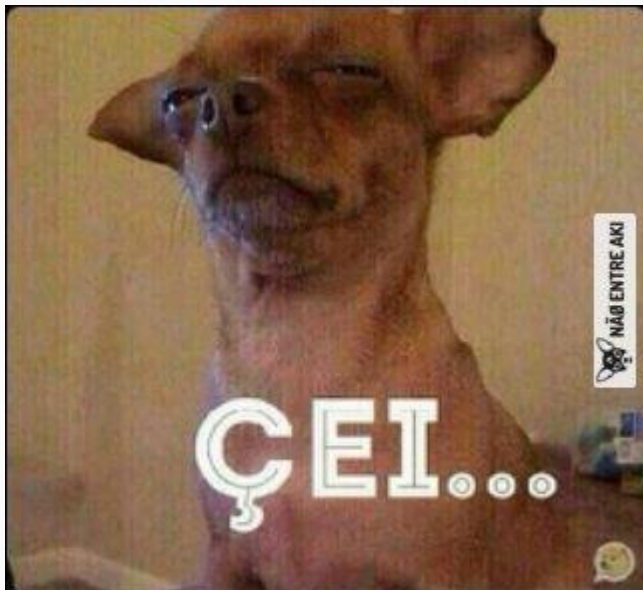
- Uma empresa de alimentos caninos produz 2 tipos de ração:
 - All Mega Supremo (AMS)
 - Ração das Estrelas (RE)
- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE



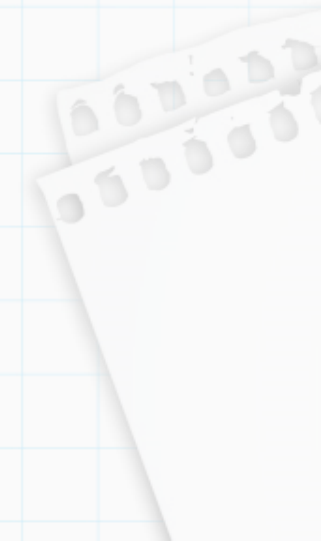
Vamos Modelar



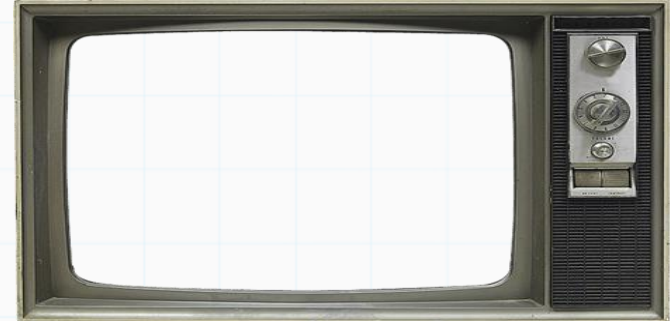
- Problema da Ração Canina:



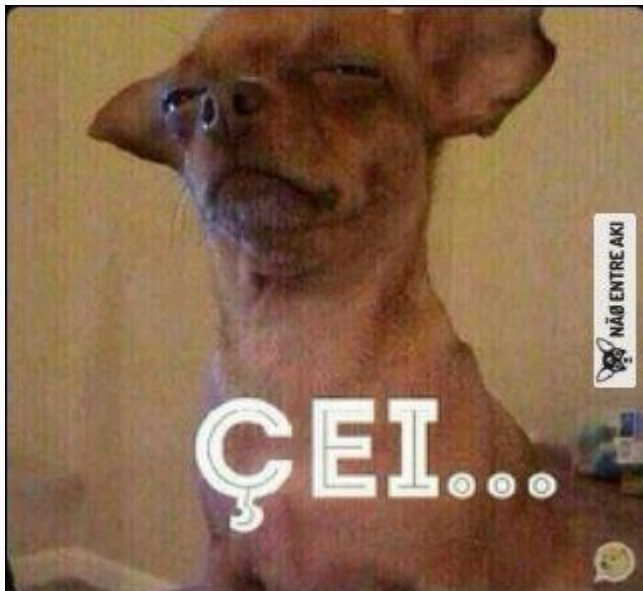
- Uma empresa de alimentos caninos produz 2 tipos de ração:
 - All Mega Supremo (AMS)
 - Ração das Estrelas (RE)
- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Preço produto:
 - AMS: 20 reais -> pacote
 - RE: 30 reais -> pacote



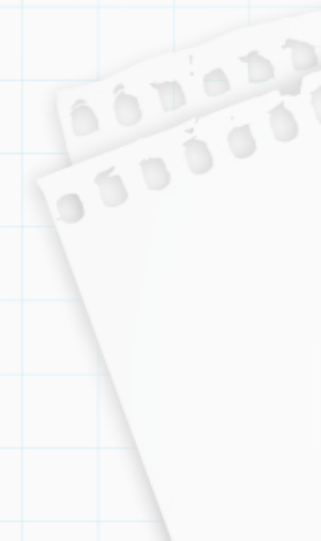
Vamos Modelar



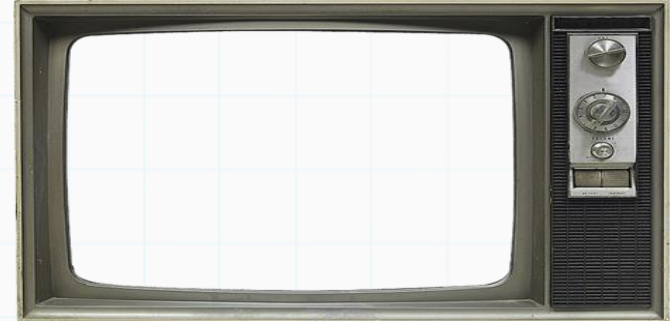
- Problema da Ração Canina:



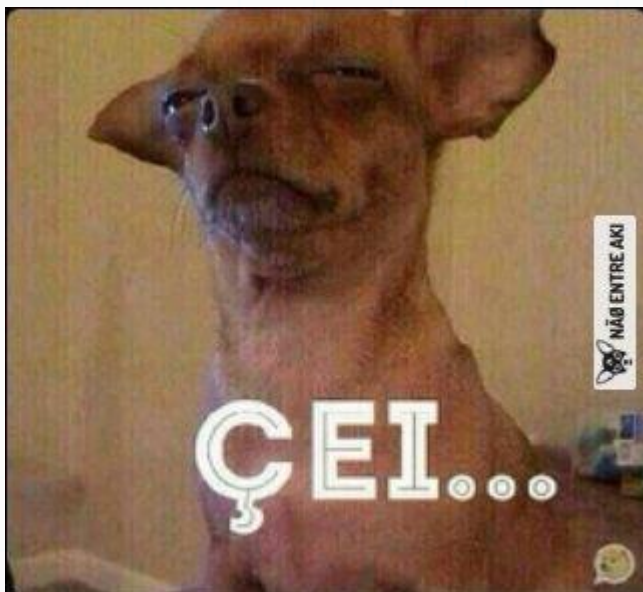
- Uma empresa de alimentos caninos produz 2 tipos de ração:
 - All Mega Supremo (AMS)
 - Ração das Estrelas (RE)
- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Preço produto:
 - AMS: 20 reais -> pacote
 - RE: 30 reais -> pacote
- Preço da matéria prima:
 - 1kg cereais -> 1 real
 - 1kg carne -> 4 reais



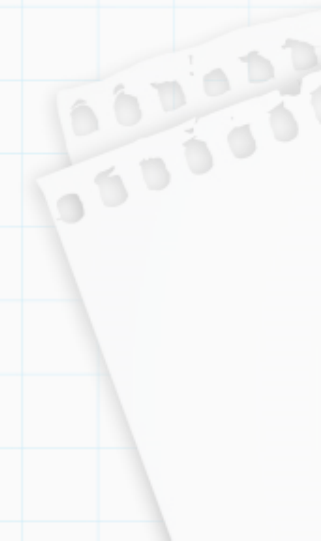
Vamos Modelar



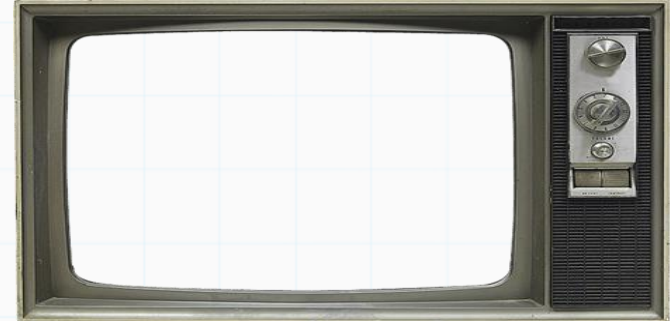
- Problema da Ração Canina:



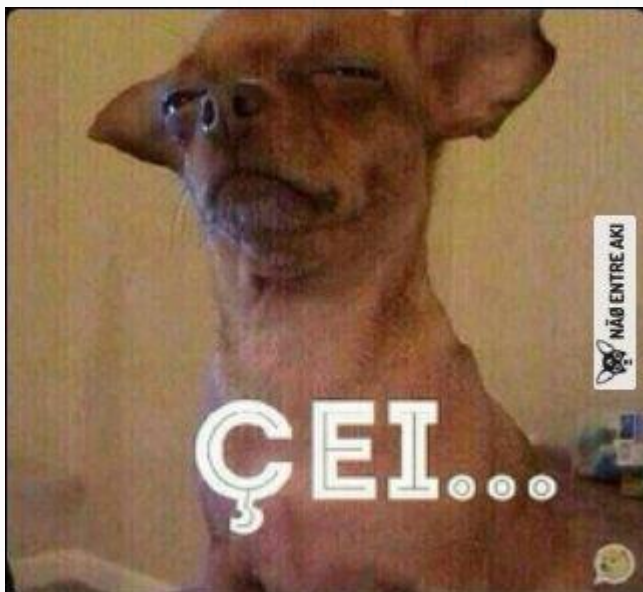
- Uma empresa de alimentos caninos produz 2 tipos de ração:
 - All Mega Supremo (AMS)
 - Ração das Estrelas (RE)
- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Preço produto:
 - AMS: 20 reais -> pacote
 - RE: 30 reais -> pacote
- Preço da matéria prima:
 - 1kg cereais -> 1 real
 - 1kg carne -> 4 reais
- Estoque:
 - 10000 kg de carne
 - 30000 kg de cereal



Vamos Modelar



- Problema da Ração Canina:



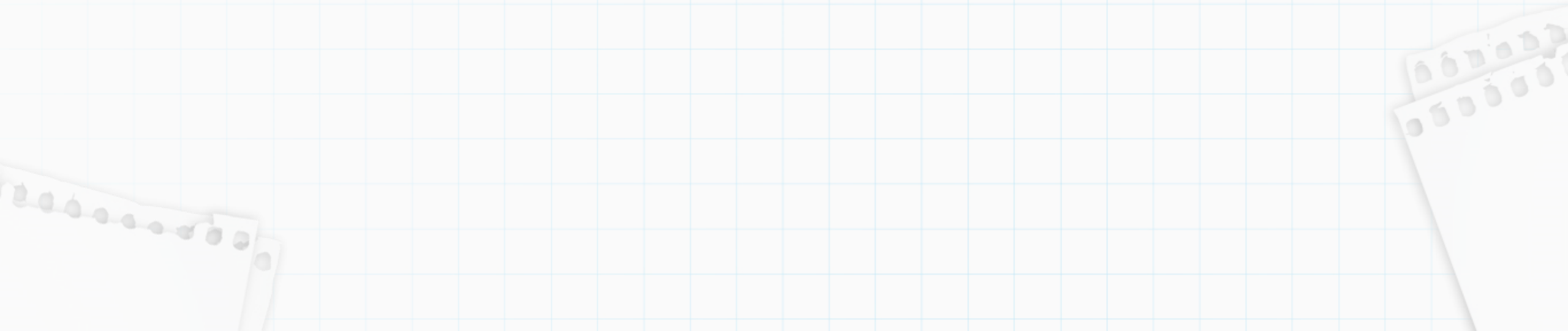
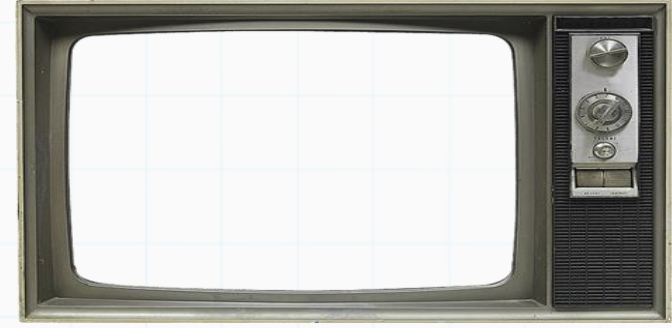
- Uma empresa de alimentos caninos produz 2 tipos de ração:
 - All Mega Supremo (AMS)
 - Ração das Estrelas (RE)
- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Preço produto:
 - AMS: 20 reais -> pacote
 - RE: 30 reais -> pacote
- Preço da matéria prima:
 - 1kg cereais -> 1 real
 - 1kg carne -> 4 reais
- Estoque:
 - 10000 kg de carne
 - 30000 kg de cereal

Qual deve ser a produção da empresa para maximizar o lucro ?



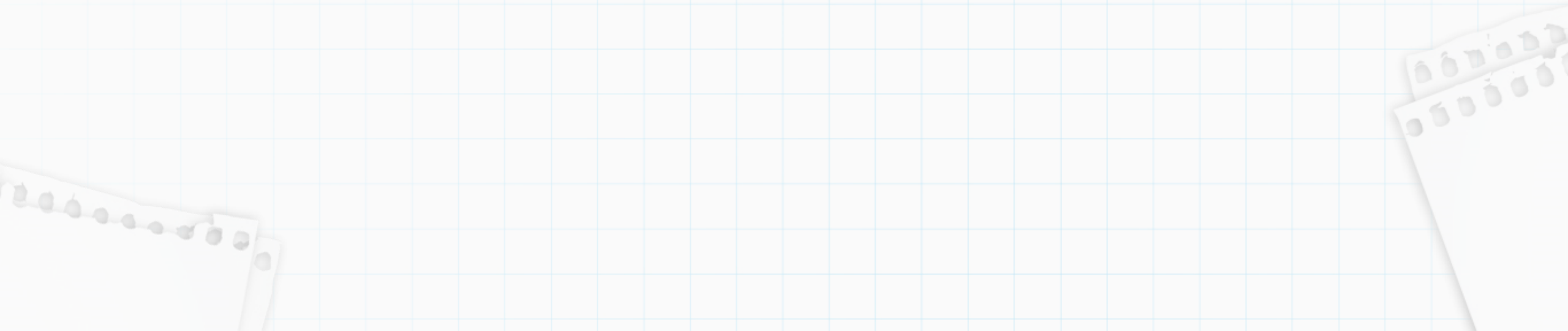
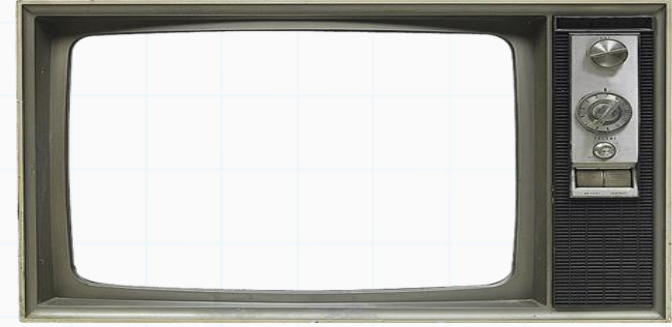
Vamos Modelar

- Variáveis de Decisão:

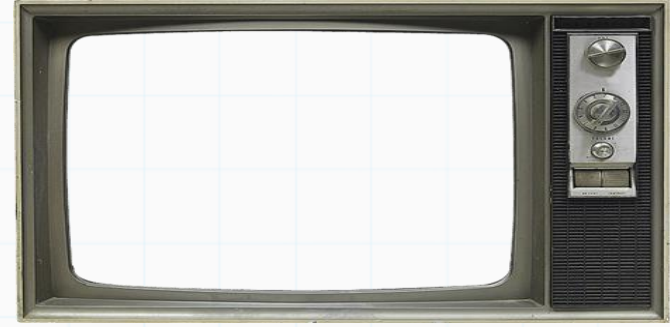


Vamos Modelar

- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade de ração produzida do tipo i ($i=ASM$ ou RE)



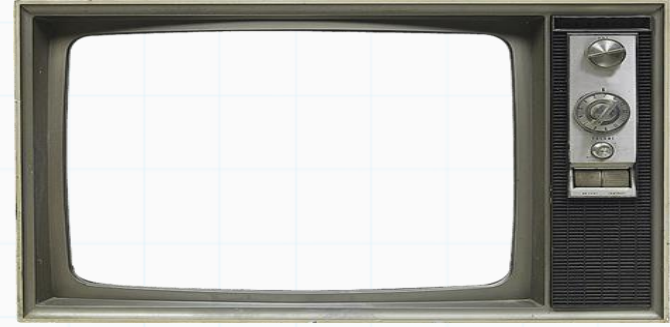
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade de ração produzida do tipo i ($i=ASM$ ou RE)
- Restrições:
 - **Limite de carne**

- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Estoque:
 - 10000 kg de carne
 - 30000 kg de cereal

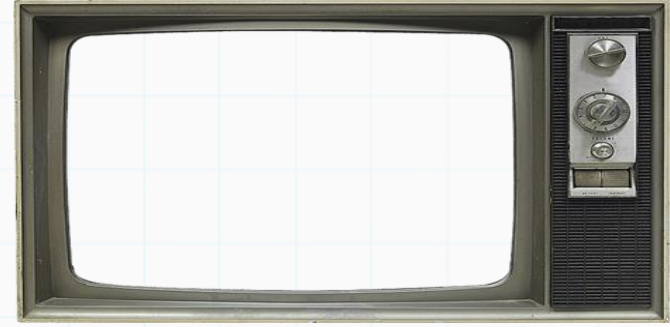
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade de ração produzida do tipo i ($i=ASM$ ou RE)
- Restrições:
 - **Limite de carne**
 - $1X_{AMS} + 4 X_{RE} \leq 10000$

- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Estoque:
 - 10000 kg de carne
 - 30000 kg de cereal

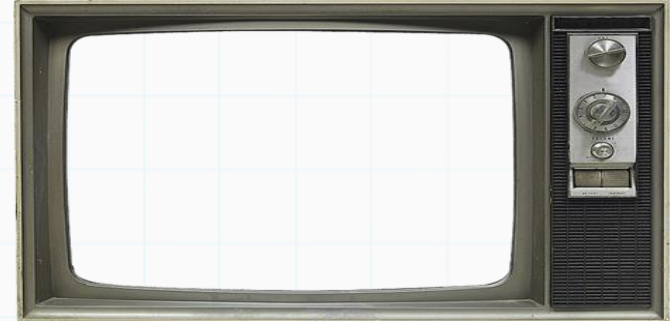
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade de ração produzida do tipo i ($i=ASM$ ou RE)
- Restrições:
 - **Limite de carne**
 - $1X_{AMS} + 4 X_{RE} \leq 10000$
 - **Limite de cereais**

- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Estoque:
 - 10000 kg de carne
 - 30000 kg de cereal

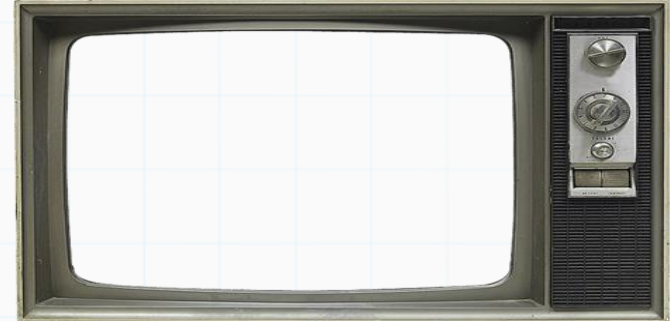
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade de ração produzida do tipo i ($i=ASM$ ou RE)
- Restrições:
 - **Limite de carne**
 - $1X_{AMS} + 4 X_{RE} \leq 10000$
 - **Limite de cereais**
 - $5X_{AMS} + 2 X_{RE} \leq 30000$

- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Estoque:
 - 10000 kg de carne
 - 30000 kg de cereal

Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade de ração produzida do tipo i ($i=ASM$ ou RE)
- Restrições:
 - **Limite de carne**
 - $1X_{AMS} + 4 X_{RE} \leq 10000$
 - **Limite de cereais**
 - $5X_{AMS} + 2 X_{RE} \leq 30000$
 - **Não negatividade**
 - $X_{AMS} \geq 0$ e $X_{RE} \geq 0$

- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Estoque:
 - 10000 kg de carne
 - 30000 kg de cereal



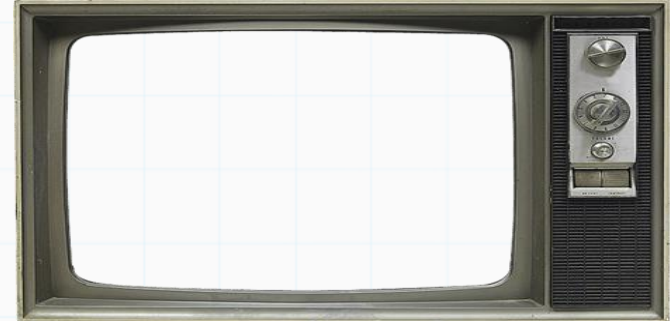
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade de ração produzida do tipo i ($i=ASM$ ou RE)
- Restrições:
 - **Limite de carne**
 - $1X_{AMS} + 4 X_{RE} \leq 10000$
 - **Limite de cereais**
 - $5X_{AMS} + 2 X_{RE} \leq 30000$
 - **Não negatividade**
 - $X_{AMS} \geq 0$ e $X_{RE} \geq 0$
- Função Objetivo:

- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Preço produto:
 - AMS: 20 reais -> pacote
 - RE: 30 reais -> pacote
- Preço da matéria prima:
 - 1kg cereais -> 1 real
 - 1kg carne -> 4 reais

Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade de ração produzida do tipo i ($i=ASM$ ou RE)
- Restrições:
 - **Limite de carne**
 - $1X_{AMS} + 4X_{RE} \leq 10000$
 - **Limite de cereais**
 - $5X_{AMS} + 2X_{RE} \leq 30000$
 - **Não negatividade**
 - $X_{AMS} \geq 0$ e $X_{RE} \geq 0$
- Função Objetivo:
 - $MAX \quad (20 \text{ reais} - (1\text{kg} \times 4 \text{ reais} + 5\text{kg} \times 1 \text{ real})) X_{AMS}$
 $+ (30 \text{ reais} - (4\text{kg} \times 4 \text{ real} + 2\text{kg} \times 1 \text{ real})) X_{RE}$

- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Preço produto:
 - AMS: 20 reais -> pacote
 - RE: 30 reais -> pacote
- Preço da matéria prima:
 - 1kg cereais -> 1 real
 - 1kg carne -> 4 reais

Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade de ração produzida do tipo i ($i=ASM$ ou RE)
- Restrições:
 - **Limite de carne**
 - $1X_{AMS} + 4X_{RE} \leq 10000$
 - **Limite de cereais**
 - $5X_{AMS} + 2X_{RE} \leq 30000$
 - **Não negatividade**
 - $X_{AMS} \geq 0$ e $X_{RE} \geq 0$
- Função Objetivo:
 - $MAX \quad (20 \text{ reais} - (1\text{kg} \times 4 \text{ reais} + 5\text{kg} \times 1 \text{ real})) X_{AMS}$
 $+ (30 \text{ reais} - (4\text{kg} \times 4 \text{ real} + 2\text{kg} \times 1 \text{ real})) X_{RE}$
 - $MAX \quad 11 X_{AMS} + 12 X_{RE}$

- Para sua manufatura são utilizados cereais e carne:
 - AMS: 5kg cereais e 1kg de carne -> 1 pacote de AMS
 - RE: 2kg cereais e 4kg de carne -> 1 pacote de RE
- Preço produto:
 - AMS: 20 reais -> pacote
 - RE: 30 reais -> pacote
- Preço da matéria prima:
 - 1kg cereais -> 1 real
 - 1kg carne -> 4 reais

Vamos Modelar

- Modelo Completo:

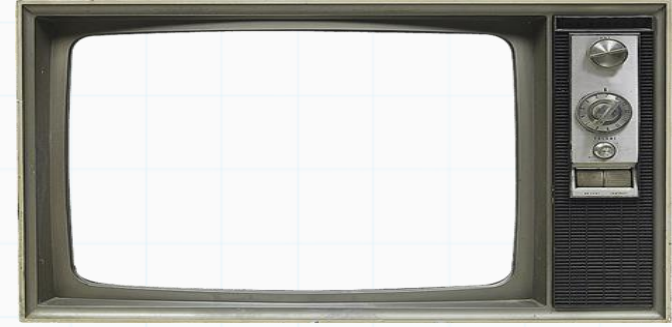
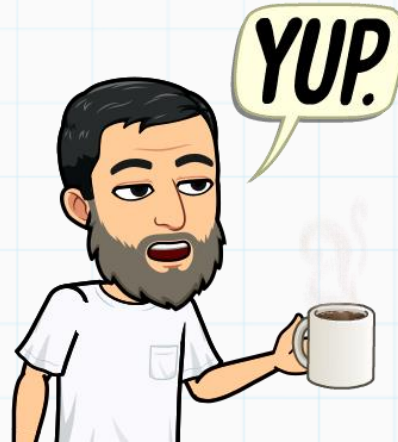
$$\text{MAX } 11 X_{\text{AMS}} + 12 X_{\text{RE}}$$

Sujeito a:

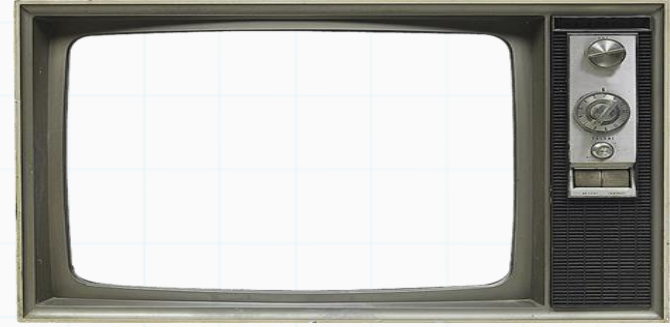
$$1 X_{\text{AMS}} + 4 X_{\text{RE}} \leq 10000$$

$$5 X_{\text{AMS}} + 2 X_{\text{RE}} \leq 30000$$

$$X_{\text{AMS}} \geq 0 \text{ e } X_{\text{RE}} \geq 0$$



Vamos Modelar



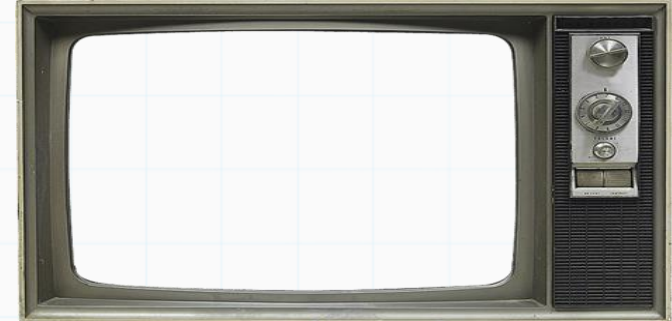
- Problema da Dieta:



- Para uma vida longa felina, um gato precisa ingerir uma quantidade mínima de certas vitaminas, presentes em 6 diferentes ingredientes que deverão ser combinados em um composto alimentar de custo mínimo



Vamos Modelar



- Problema da Dieta:

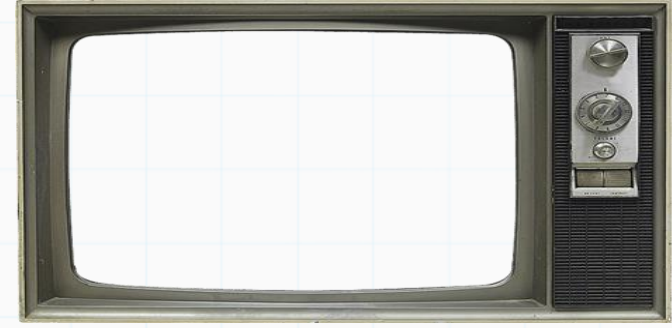


- Para uma vida longa felina, um gato precisa ingerir uma quantidade mínima de certas vitaminas, presentes em 6 diferentes ingredientes que deverão ser combinados em um composto alimentar de custo mínimo

| | Qtd. Vitamina por ingrediente | | | | | | |
|-------|-------------------------------|----|----|----|----|----|------|
| Vit. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Min. |
| A | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 9 |
| C | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 19 |
| Preço | 35 | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 | |

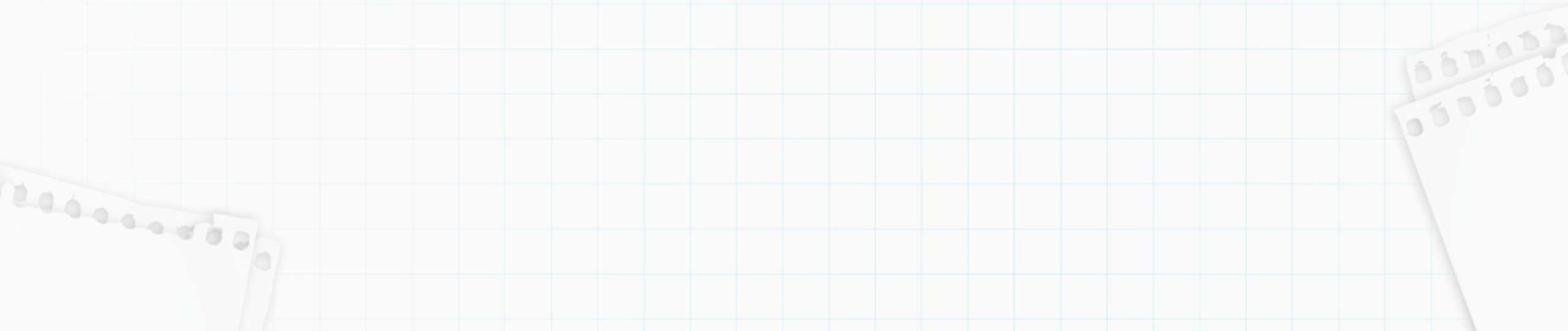
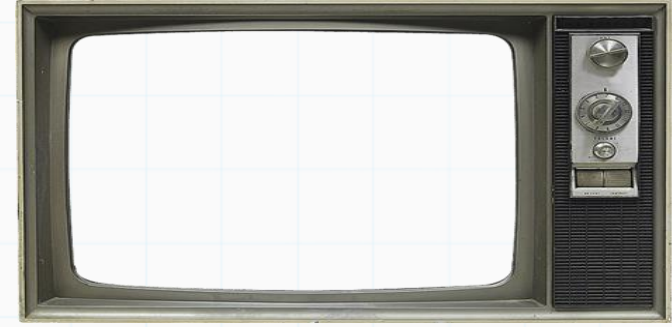
Vamos Modelar

- Variáveis de Decisão:



Vamos Modelar

- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade do ingrediente i ($i=1\dots 6$) no composto alimentar



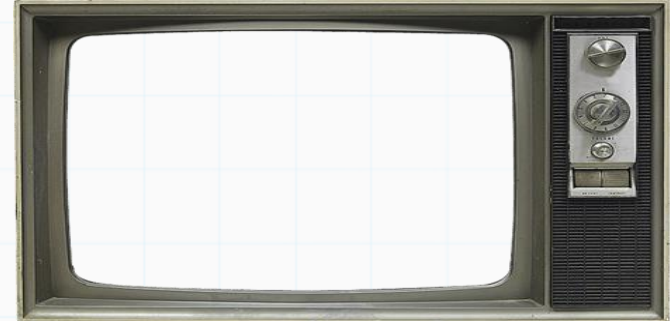
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade do ingrediente i ($i=1\dots 6$) no composto alimentar
- Restrições:
 - **Vitamina A:**

| | Qtd. Vitamina por ingrediente | | | | | | |
|-------|-------------------------------|----|----|----|----|----|------|
| Vit. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Min. |
| A | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 9 |
| C | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 19 |
| Preço | 35 | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 | |

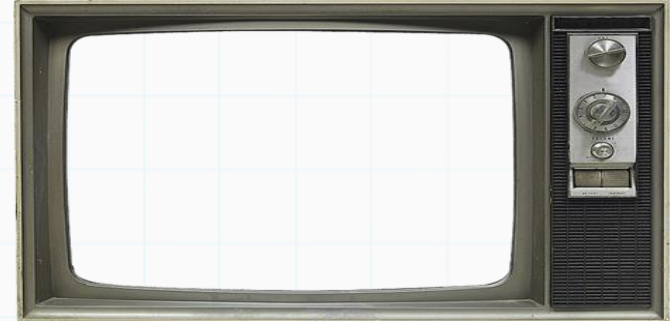
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade do ingrediente i ($i=1\dots 6$) no composto alimentar
- Restrições:
 - **Vitamina A:**
 $1X_1 + 2X_3 + 2X_4 + 1X_5 + 2X_6 \geq 9$

| | Qtd. Vitamina por ingrediente | | | | | | |
|-------|-------------------------------|----|----|----|----|----|------|
| Vit. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Min. |
| A | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 9 |
| C | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 19 |
| Preço | 35 | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 | |

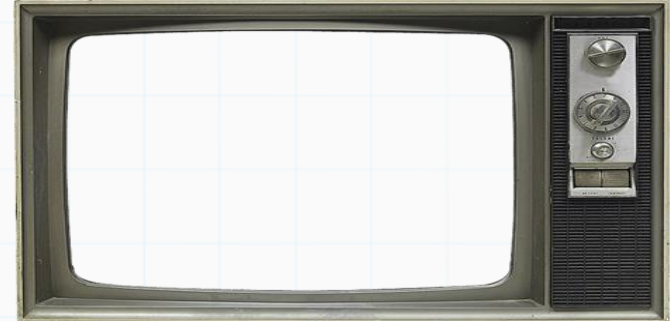
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade do ingrediente i ($i=1\dots 6$) no composto alimentar
- Restrições:
 - **Vitamina A:**
 $1X_1 + 2X_3 + 2X_4 + 1X_5 + 2X_6 \geq 9$
 - **Vitamina C:**

| | Qtd. Vitamina por ingrediente | | | | | | |
|-------|-------------------------------|----|----|----|----|----|------|
| Vit. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Min. |
| A | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 9 |
| C | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 19 |
| Preço | 35 | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 | |

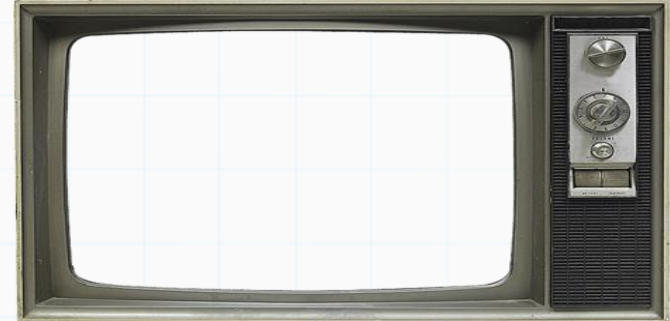
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade do ingrediente i ($i=1\dots 6$) no composto alimentar
- Restrições:
 - **Vitamina A:**
 $1X_1 + 2X_3 + 2X_4 + 1X_5 + 2X_6 \geq 9$
 - **Vitamina C:**
 $1X_2 + 3X_3 + 1X_4 + 3X_5 + 2X_6 \geq 19$

| | Qtd. Vitamina por ingrediente | | | | | | |
|-------|-------------------------------|----|----|----|----|----|------|
| Vit. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Min. |
| A | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 9 |
| C | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 19 |
| Preço | 35 | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 | |

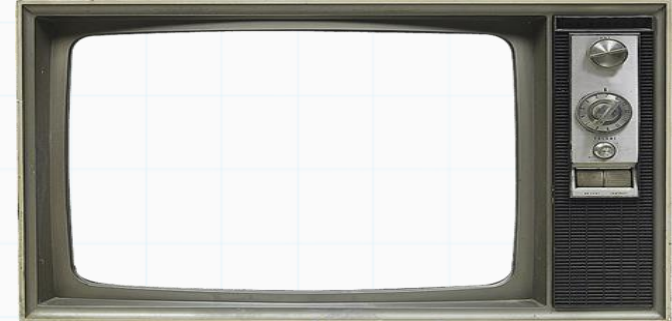
Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade do ingrediente i ($i=1\dots 6$) no composto alimentar
- Restrições:
 - **Vitamina A:**
 $1X_1 + 2X_3 + 2X_4 + 1X_5 + 2X_6 \geq 9$
 - **Vitamina C:**
 $1X_2 + 3X_3 + 1X_4 + 3X_5 + 2X_6 \geq 1$
 - **Não Negatividade**
 $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$

| | Qtd. Vitamina por ingrediente | | | | | | |
|-------|-------------------------------|----|----|----|----|----|------|
| Vit. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Min. |
| A | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 9 |
| C | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 19 |
| Preço | 35 | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 | |

Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade do ingrediente i ($i=1\dots 6$) no composto alimentar

- Restrições:

- **Vitamina A:**

$$1X_1 + 2X_3 + 2X_4 + 1X_5 + 2X_6 \geq 9$$

- **Vitamina C:**

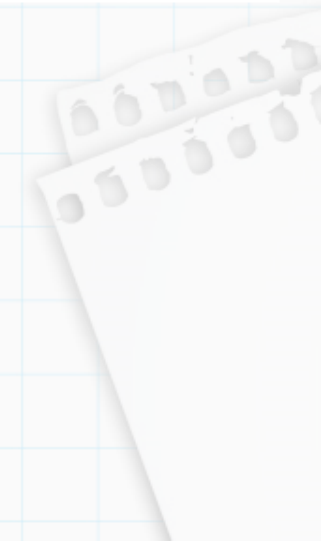
$$1X_2 + 3X_3 + 1X_4 + 3X_5 + 2X_6 \geq 19$$

- **Não Negatividade**

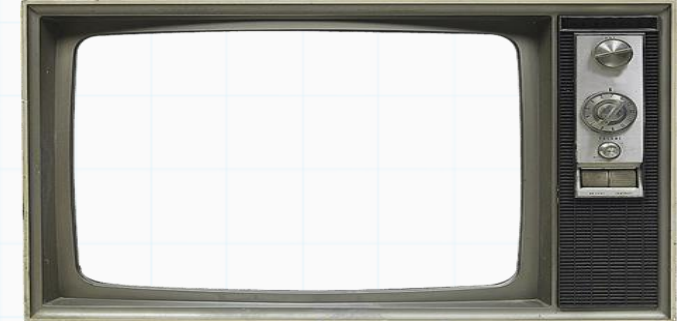
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

| | Qtd. Vitamina por ingrediente | | | | | | |
|-------|-------------------------------|----|----|----|----|----|------|
| Vit. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Min. |
| A | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 9 |
| C | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 19 |
| Preço | 35 | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 | |

- Função Objetivo:



Vamos Modelar



- Variáveis de Decisão:
 - X_i Quantidade do ingrediente i ($i=1\dots 6$) no composto alimentar

- Restrições:

- **Vitamina A:**

$$1X_1 + 2X_3 + 2X_4 + 1X_5 + 2X_6 \geq 9$$

- **Vitamina C:**

$$1X_2 + 3X_3 + 1X_4 + 3X_5 + 2X_6 \geq 19$$

- **Não Negatividade**

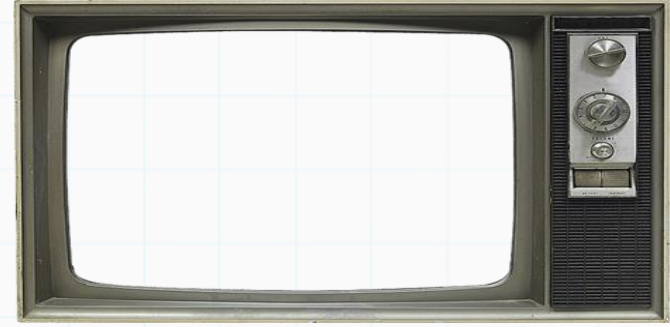
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

- Função Objetivo:

$$\text{MIN } 35X_1 + 30X_2 + 60X_3 + 50X_4 + 27X_5 + 22X_6$$

| | Qtd. Vitamina por ingrediente | | | | | | |
|-------|-------------------------------|----|----|----|----|----|------|
| Vit. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Min. |
| A | 1 | 0 | 2 | 2 | 1 | 2 | 9 |
| C | 0 | 1 | 3 | 1 | 3 | 2 | 19 |
| Preço | 35 | 30 | 60 | 50 | 27 | 22 | |

Vamos Modelar



- Modelo Completo:

$$\text{MIN } 35X_1 + 30X_2 + 60X_3 + 50X_4 + 27X_5 + 22X_6$$

Sujeito a:

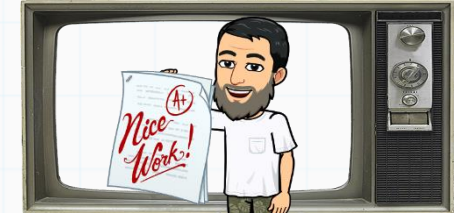
$$1X_1 + 2X_3 + 2X_4 + 1X_5 + 2X_6 \geq 9$$

$$1X_2 + 3X_3 + 1X_4 + 3X_5 + 2X_6 \geq 19$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$



Exercícios



Problema da empresa com máquinas:

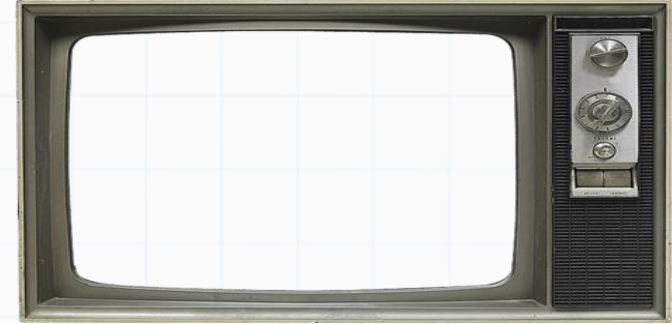
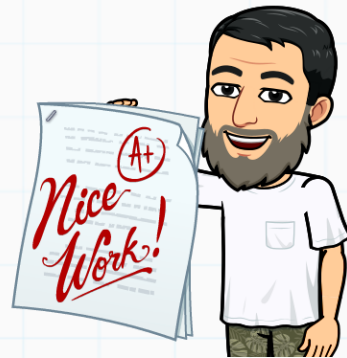
Uma empresa tem dois produtos (P_1 e P_2) e duas máquinas (M_1 e M_2). A primeira máquina é disponível 30 horas semanais, a segunda 42 horas semanais. Cada unidade dos dois produtos precisa de um tempo diferente nas duas máquinas:

| | P_1 | P_2 | Max |
|-------|-------|-------|-----|
| M_1 | 1 | 3 | 30 |
| M_2 | 2 | 3 | 42 |
| Lucro | 3000 | 6000 | |

- A empresa tem que produzir pelo menos o dobro de unidades do produto P_1 em relação ao produto P_2 .
- O lucro dos produtos são 3000 reais por unidade do P_1 e 6000 reais por unidade de P_2
- Modele o problema como um PPL para determinar o número de unidades de P_1 e P_2 produzidas para maximizar o lucro.

- 1) Variáveis: Como poderia representar uma solução para meu problema ?
- 2) Restrições: Quais as restrições dessa solução ?
- 3) F. Objetivo: Como valorar essa solução ?

Exercícios



Problema das ligas metálicas:

Uma metalúrgica deseja maximizar sua receita bruta. A tabela a seguir ilustra a proporção de cada material (cobre, zinco e chumbo) na mistura para a obtenção das ligas passíveis de fabricação, assim como a disponibilidade de cada matéria prima (em toneladas) e os preços de venda por tonelada de cada liga.

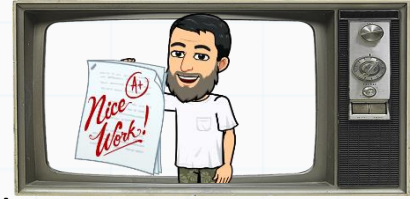
| | Liga 1 | Liga 2 | Disponibilidade |
|--------|--------|--------|-----------------|
| Cobre | 0,5 | 0,2 | 16 ton. |
| Zinco | 0,25 | 0,3 | 11 ton. |
| Chumbo | 0,25 | 0,5 | 15 ton. |
| Preço | 3.000 | 5.000 | |

Qual deve ser a quantidade produzida de cada liga?

- 1) Variáveis: $X_i \Rightarrow$ toneladas de liga tipo i produzidas ($i=1,2$)
- 2) Restrições: uma para cada material
- 3) F. Objetivo: maximizar a venda das ligas (o que é produzido é vendido)

Exercícios

Problema da companhia de Aviação:



- Uma companhia de aviação está considerando a compra de aviões de passageiros de 3 tipos: longo, médio e pequeno curso. O preço de compra seria de 6.7 milhões, 5 milhões e 3.5 milhões respectivamente.
- A diretoria autorizou um gasto de no máximo 150 milhões para compra das aeronaves.
- A companhia terá pilotos treinados para pilotar 30 aviões.
- Se somente aviões de pequeno curso forem comprados, a divisão de manutenção estaria apta a manter 40 novos aviões. Cada avião de médio curso gasta $\frac{1}{3}$ a mais de manutenção do que o avião de pequeno curso, e o de longo curso $\frac{2}{3}$ a mais.
- Estima-se que o lucro anual líquido de 0.42 milhões para avião de longo curso, 0.3 milhões para médio e 0.23 milhões para curto. Usando esses dados obtidos, a companhia quer uma aproximação de quantas aeronaves devem ser obtidas com o objetivo de aumentar os lucros da empresa.

1) Variáveis: Como poderia representar uma solução para meu problema, isto é, quantas aeronaves comprar de cada tipo ?

2) Restrições:

- De gasto máximo de compra
- Número de pilotos máximo para pilotar
- Quantidade máxima de aviões que a manutenção consegue manter.

3) F. Objetivo: soma dos lucros das aeronaves



Até a próxima

