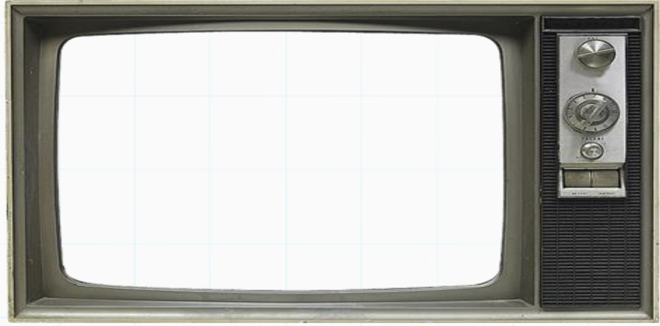


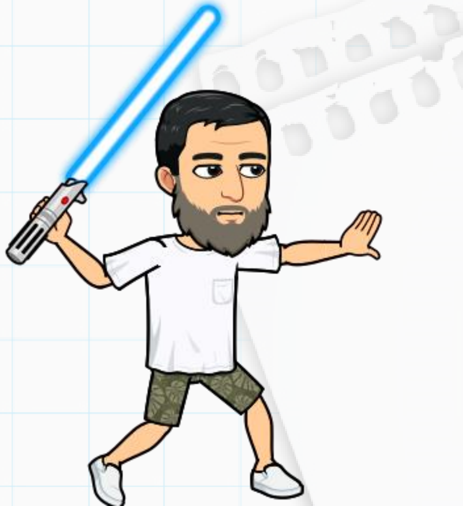
Dualidade

Professor : Yuri Frota

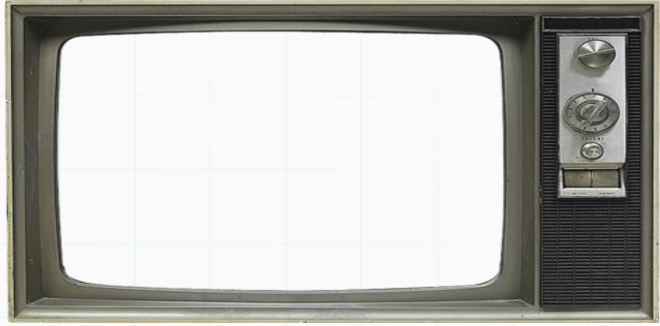
www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br

Essa vai ser uma aula teórica



Dualidade



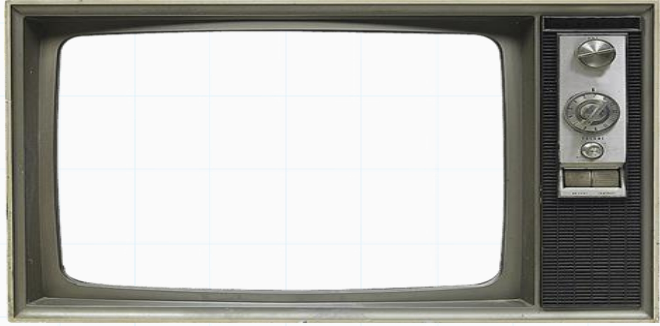
Seja:
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2) = (1, 1) \to z = 3 \leq z^*$$

$$(x_1, x_2) = (2, 2) \to z = 6 \leq z^*$$

Soluções viáveis fornecem limitantes inferiores para o problema.

Dualidade



Seja: $\max \quad x_1 + 2x_2$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

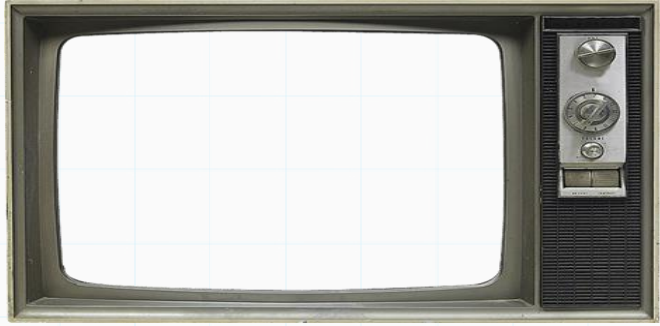
$$(x_1, x_2) = (1, 1) \rightarrow z = 3 \leq z^*$$
$$(x_1, x_2) = (2, 2) \rightarrow z = 6 \leq z^*$$

Soluções viáveis fornecem limitantes inferiores para o problema.

dúvida recorrente em heurísticas e metaheurísticas

Como pode saber se a solução está próxima do ótimo ?

Dualidade



Seja: $\max \quad x_1 + 2x_2$

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$(x_1, x_2) = (1, 1) \rightarrow z = 3 \leq z^*$$
$$(x_1, x_2) = (2, 2) \rightarrow z = 6 \leq z^*$$

Soluções viáveis fornecem limitantes inferiores para o problema.

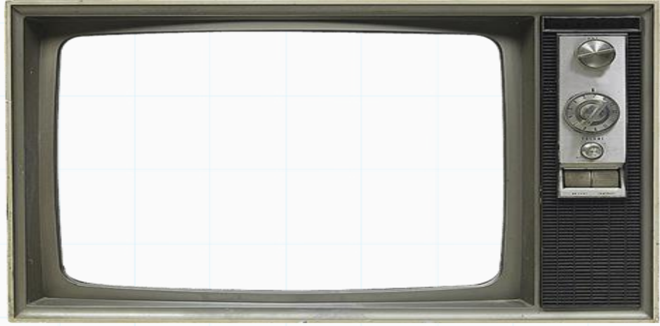
dúvida recorrente em heurísticas e metaheurísticas

Como pode saber se a solução está próxima do ótimo ?

R - Comparando com um limite superior da solução ótima

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



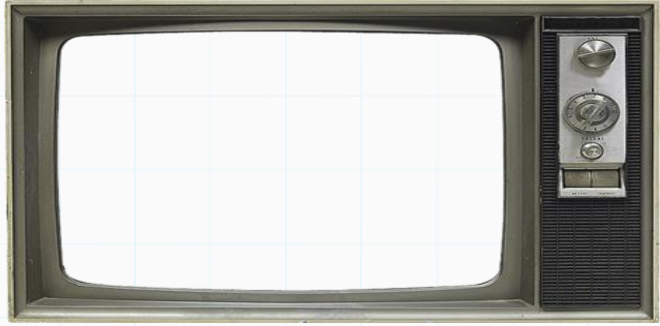
tentativa 1: jogando com as inequações

$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}}$$

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



<u>tentativa 1:</u> jogando com as inequações

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \qquad \textcolor{red}{(\times 2)}$$

$$x_1 + x_2 \leq 4 \qquad \textcolor{red}{(\times 1)}$$

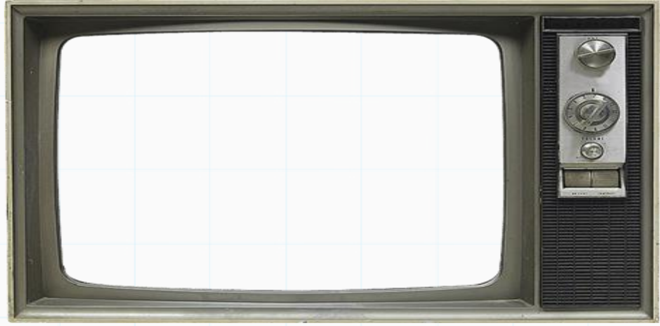
$$-x_1 + x_2 \leq 2 \qquad \textcolor{red}{(\times 3)}$$

valores aleatórios

$$\boxed{\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}}$$

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



<u>tentativa 1:</u> jogando com as inequações

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 6 & (\times 2)\\
x_1 + x_2 &\leq 4 & (\times 1)\\
-x_1 + x_2 &\leq 2 & (\times 3)
\end{aligned}
$$

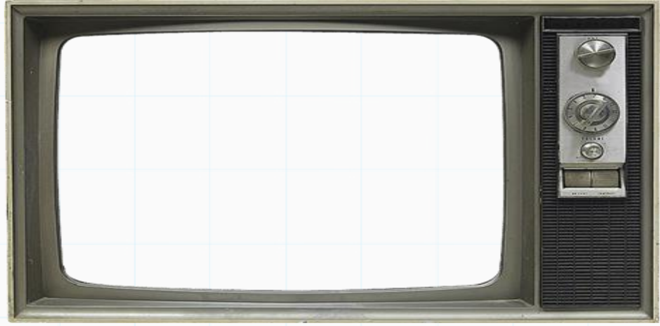
valores aleatórios

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 &\leq 12\\
x_1 + x_2 &\leq 4\\
-3x_1 + 3x_2 &\leq 6\\
\hline
2x_1 + 6x_2 &\leq 22
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2\\
& 2x_1 + x_2 \leq 6\\
& x_1 + x_2 \leq 4\\
& -x_1 + x_2 \leq 2\\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
}
$$

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



tentativa 1: jogando com as inequações

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 6 && \color{red}{(\times 2)} \\ x_1 + x_2 &\leq 4 && \color{red}{(\times 1)} \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 && \color{red}{(\times 3)} \end{aligned}$$

valores aleatórios

$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ -3x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ \hline 2x_1 + 6x_2 &\leq 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

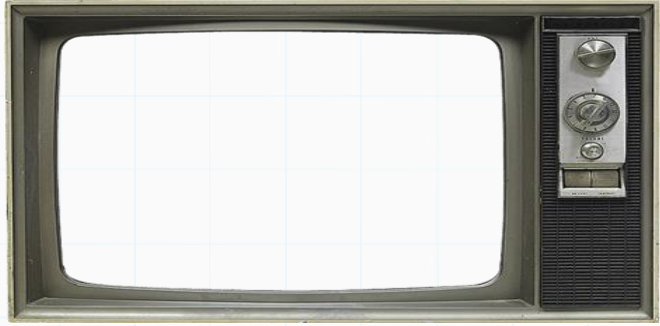
$$\boxed{x_1 + 2x_2} \leq \boxed{2x_1 + 6x_2 \leq 22} \rightarrow \text{L.S.}$$

f.o.

pois x_1 e $x_2 \geq 0$ e $(2 \geq 1$ e $6 \geq 2)$

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



<u>tentativa 1:</u> jogando com as inequações

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \qquad (\times 2)$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \qquad (\times 1)$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2 \qquad (\times 3)$$

valores aleatórios

$$\begin{array}{r} 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ -3x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ \hline 2x_1 + 6x_2 \leq 22 \end{array} \quad +$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

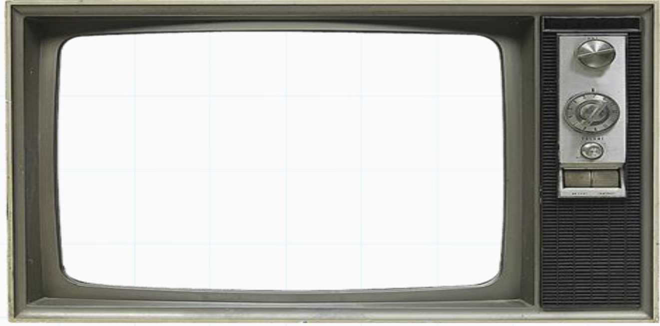
$$\underbrace{\boxed{x_1 + 2x_2}}_{\text{f.o.}} \leq \boxed{2x_1 + 6x_2 \leq 22} \rightarrow \text{L.S.}$$

pois x_1 e $x_2 \geq 0$ e $(2 \geq 1$ e $6 \geq 2)$

se dividirmos por 2 a expressão, ainda conseguiremos um limitante superior válido de 11, pois as dominâncias ainda iriam se manter !

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



<u>tentativa 2:</u> generalizando a tentativa 1

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \qquad (\times y_1 \geq 0)$$

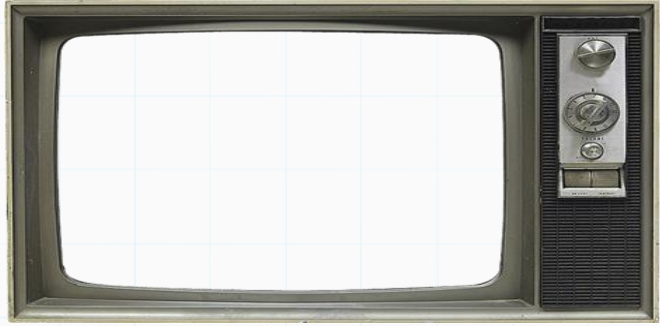
$$x_1 + x_2 \leq 4 \qquad (\times y_2 \geq 0)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 2 \qquad (\times y_3 \geq 0)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}}$$

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



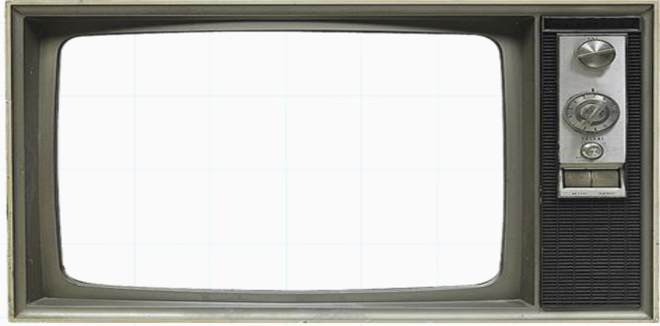
<u>tentativa 2:</u> generalizando a tentativa 1

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 6 \qquad (\times y_1 \geq 0) \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \qquad (\times y_2 \geq 0) \\
-x_1 + x_2 &\leq 2 \qquad (\times y_3 \geq 0)
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
2x_1y_1 + x_2y_1 &\leq 6y_1 \\
x_1y_2 + x_2y_2 &\leq 4y_2 \\
-x_1y_3 + x_2y_3 &\leq 2y_3
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
}
$$

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



tentativa 2: generalizando a tentativa 1

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \qquad (\times y_1 \geq 0)$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \qquad (\times y_2 \geq 0)$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2 \qquad (\times y_3 \geq 0)$$

$$\Rightarrow$$

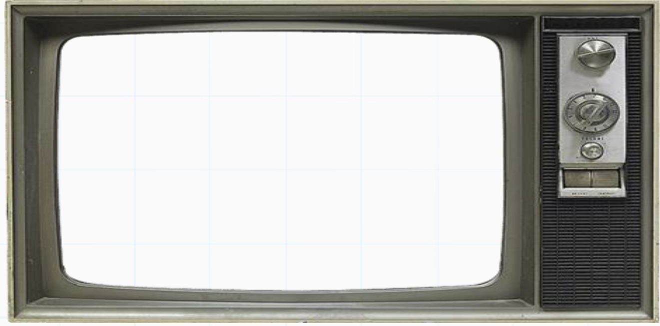
$$2x_1y_1 + x_2y_1 \leq 6y_1$$
$$x_1y_2 + x_2y_2 \leq 4y_2 \qquad +$$
$$-x_1y_3 + x_2y_3 \leq 2y_3$$

$$(2y_1 + y_2 - y_3)x_1 + (y_1 + y_2 + y_3)x_2 \leq (6y_1 + 4y_2 + 2y_3)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}}$$

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



tentativa 2: generalizando a tentativa 1

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 6 \quad && {\color{red}(\times y_1 \geq 0)} \\
x_1 + x_2 &\leq 4 \quad && {\color{red}(\times y_2 \geq 0)} \\
-x_1 + x_2 &\leq 2 \quad && {\color{red}(\times y_3 \geq 0)}
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
2x_1y_1 + x_2y_1 &\leq 6y_1 \\
x_1y_2 + x_2y_2 &\leq 4y_2 \\
-x_1y_3 + x_2y_3 &\leq 2y_3
\end{aligned}
\quad +
$$

$$\boxed{(2y_1 + y_2 - y_3)}x_1 + \boxed{(y_1 + y_2 + y_3)}x_2 \leq \boxed{(6y_1 + 4y_2 + 2y_3)}$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& -x_1 + x_2 \leq 2 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

logo

$$\boxed{x_1 + 2x_2} \leq \boxed{(6y_1 + 4y_2 + 2y_3)}$$

f.o.

SE

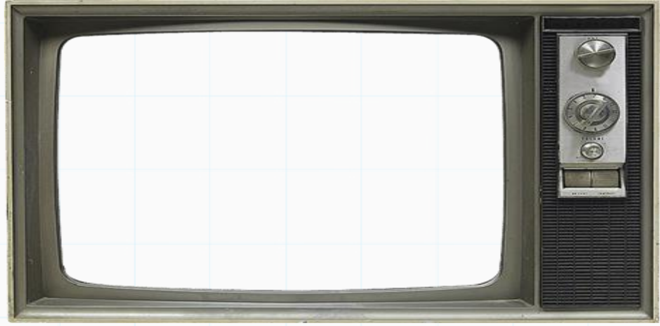
$$\boxed{(2y_1 + y_2 - y_3)} \geq 1$$

$$\boxed{(y_1 + y_2 + y_3)} \geq 2$$

1 e 2
coeficientes
na f.o.

Dualidade

Então como conseguir um limite superior ?



tentativa 2: generalizando a tentativa 1

$$2x_1 + x_2 \le 6 \qquad ({\times}y_1 \ge 0)$$
$$x_1 + x_2 \le 4 \qquad ({\times}y_2 \ge 0)$$
$$-x_1 + x_2 \le 2 \qquad ({\times}y_3 \ge 0)$$

$$2x_1y_1 + x_2y_1 \le 6y_1$$
$$x_1y_2 + x_2y_2 \le 4y_2 \qquad +$$
$$-x_1y_3 + x_2y_3 \le 2y_3$$

$$\boxed{(2y_1 + y_2 - y_3)}x_1 + \boxed{(y_1 + y_2 + y_3)}x_2 \le \boxed{(6y_1 + 4y_2 + 2y_3)}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & -x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

logo

$$\boxed{x_1 + 2x_2} \le \boxed{(6y_1 + 4y_2 + 2y_3)}$$

f.o.

SE

$$\boxed{(2y_1 + y_2 - y_3)} \ge 1$$
$$\boxed{(y_1 + y_2 + y_3)} \ge 2$$

1 e 2 coeficientes na f.o.

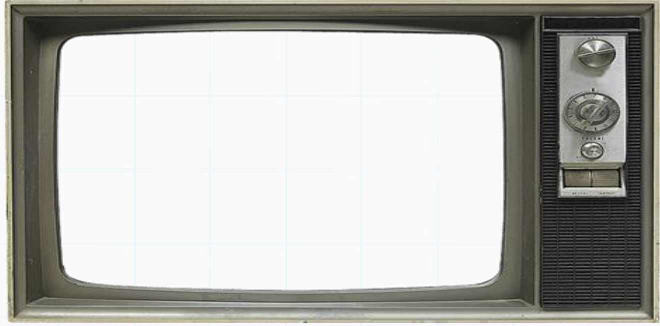
por exemplo, para $y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 1$ temos:

$$x_1 + 2x_2 \le (6(1) + 4(1) + 2(1)) = \boxed{12}$$

L.S. mais forte (quanto menor mais forte)

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



tentativa 2: generalizando a tentativa 1

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \qquad (\times y_1 \geq 0)$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \qquad (\times y_2 \geq 0)$$
$$-x_1 + x_2 \leq 2 \qquad (\times y_3 \geq 0)$$

$$2x_1y_1 + x_2y_1 \leq 6y_1$$
$$x_1y_2 + x_2y_2 \leq 4y_2 \qquad +$$
$$-x_1y_3 + x_2y_3 \leq 2y_3$$

$$\boxed{(2y_1 + y_2 - y_3)}x_1 + \boxed{(y_1 + y_2 + y_3)}x_2 \leq \boxed{(6y_1 + 4y_2 + 2y_3)}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

logo

$$\boxed{x_1 + 2x_2} \leq \boxed{(6y_1 + 4y_2 + 2y_3)}$$

f.o.

SE

$$\boxed{(2y_1 + y_2 - y_3)} \geq 1$$
$$\boxed{(y_1 + y_2 + y_3)} \geq 2$$

1 e 2 coeficientes na f.o.

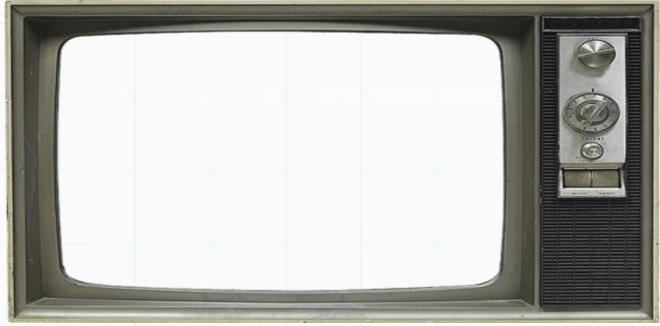
por exemplo, para $y_1 = 1, y_2 = 1, y_3 = 1$ temos:

e se y3 = 0 ?, vamos fazer

$$x_1 + 2x_2 \leq (6(1) + 4(1) + 2(1)) = \boxed{12}$$

L.S. mais forte (quanto menor mais forte)

Dualidade



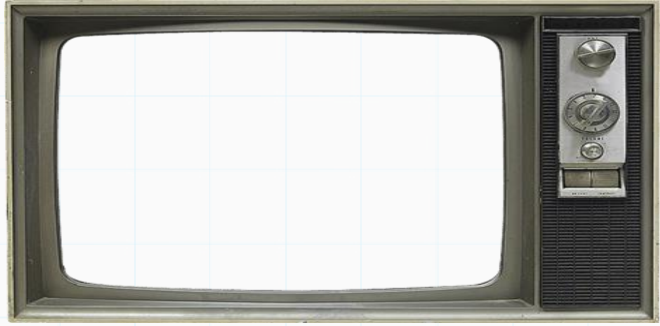
$$x_1 + 2x_2 \ \leq \ (6y_1 + 4y_2 + 2y_3)$$ SE $$(2y_1 + y_2 - y_3) \geq 1$$ $$(y_1 + y_2 + y_3) \geq 2$$

vamos tentar então minimizar esse limitante superior

escrevendo um PPL !

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade



$$x_1 + 2x_2 \leq (6y_1 + 4y_2 + 2y_3) \quad \text{SE} \quad \begin{array}{r} (2y_1 + y_2 - y_3) \geq 1 \\ (y_1 + y_2 + y_3) \geq 2 \end{array}$$

vamos tentar então minimizar esse limitante superior

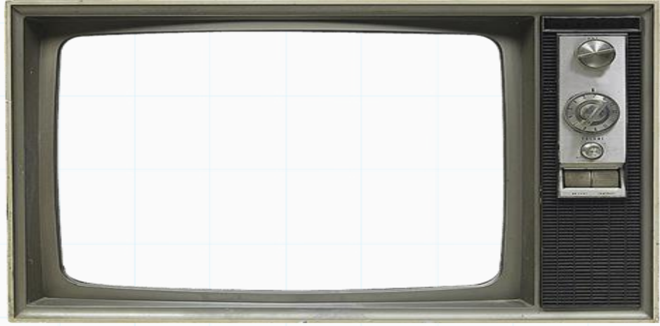
escrevendo um PPL !

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ \text{s.a.} \quad & 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade

$$x_1 + 2x_2 \ \leq \ (6y_1 + 4y_2 + 2y_3) \quad \text{SE} \quad \begin{array}{r} (2y_1 + y_2 - y_3) \geq 1 \\ (y_1 + y_2 + y_3) \geq 2 \end{array}$$



vamos tentar então minimizar esse limitante superior

escrevendo um PPL !

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

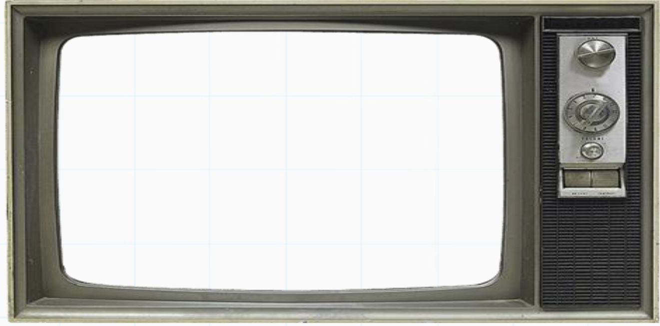
$$\begin{aligned} \text{min} \quad & 6y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ \text{s.a.} \quad & 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Notemos que este problema possui:

- m variáveis
- n restrições
- $b \to c$ e $c \to b$
-
-
-

Dualidade

$$x_1 + 2x_2 \;\leq\; (6y_1 + 4y_2 + 2y_3) \quad \text{SE} \quad \begin{array}{r} (2y_1 + y_2 - y_3) \geq 1 \\ (y_1 + y_2 + y_3) \geq 2 \end{array}$$



vamos tentar então minimizar esse limitante superior

escrevendo um PPL !

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

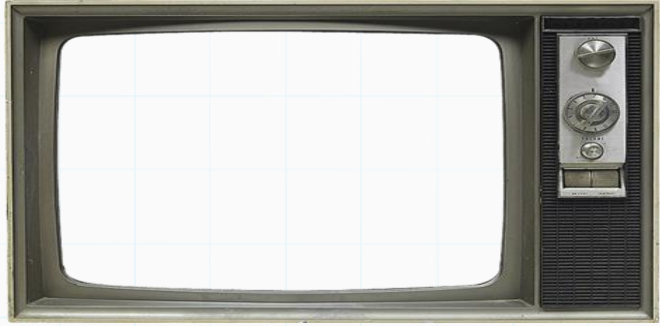
$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ \text{s.a.} \quad & 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Notemos que este problema possui:

- m variáveis
- n restrições
- $b \to c$ e $c \to b$
- $A \to A^T$
- max $\to$ min
- restrições $\leq$ $\to$ variáveis ≥ 0

Dualidade

$$x_1 + 2x_2 \;\leq\; (6y_1 + 4y_2 + 2y_3) \quad \text{SE} \quad \begin{array}{r} (2y_1 + y_2 - y_3) \geq 1 \\ (y_1 + y_2 + y_3) \geq 2 \end{array}$$



vamos tentar então minimizar esse limitante superior

escrevendo um PPL !

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

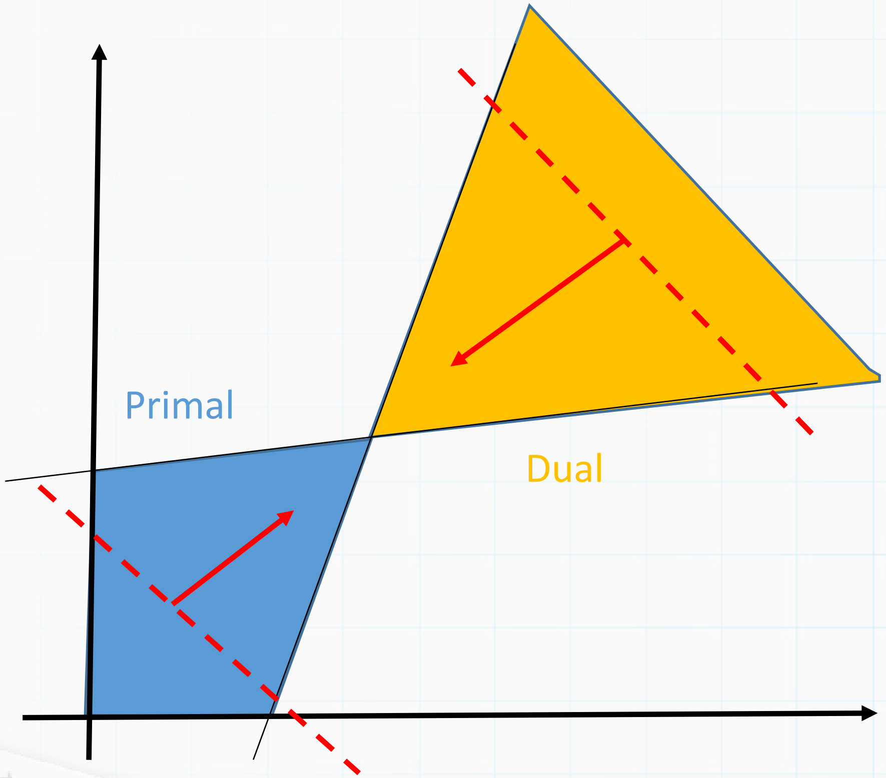
$$\begin{array}{rr} \text{min} & 6y_1 + 4y_2 + 2y_3 \\ \text{s.a.} & 2y_1 + y_2 - y_3 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 + y_3 \geq 2 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{array}$$

Notemos que este problema possui:

- m variáveis
- n restrições
- $b \to c$ e $c \to b$
- $A \to A^T$
- $\max \to \min$
- $\boxed{\text{restrições} \leq \;\to\; \text{variáveis} \geq 0}$

vamos denominar o primeiro PPL de $\boxed{\text{PRIMAL}}$ e o segundo de $\boxed{\text{DUAL.}}$

Dualidade



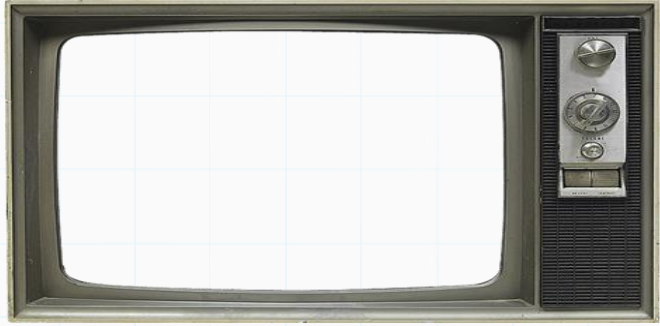
Interpretação gráfica

São problemas com direções e objetivos contrários

Nem sempre o grafo fica bonitinho assim.

Dualidade

Então como conseguir um limite superior ?



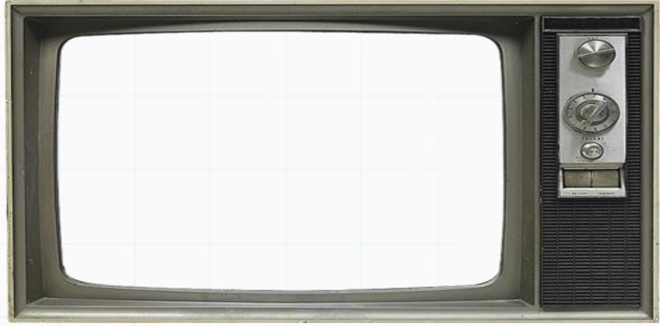
- outro exemplo, mas agora com restrições de igualdade no problema primal :

$$
\begin{aligned}
\max \ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} \ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

agora com var. de folga e rest. de igualdade.

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



- outro exemplo, mas agora com restrições de igualdade no problema primal :

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

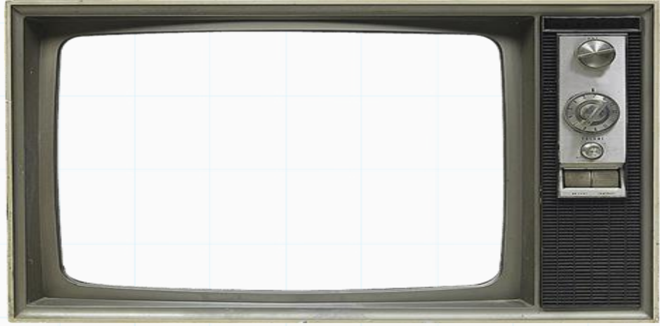
agora com var. de folga e rest. de igualdade.

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 4 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

quebrar as $=$ em $\leq$ e $\geq$.

Dualidade

Então como conseguir um limite superior ?



- outro exemplo, mas agora com restrições de igualdade no problema primal :

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

agora com var. de folga e rest. de igualdade.

pois o processo que eu fiz foi com <=

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 4 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

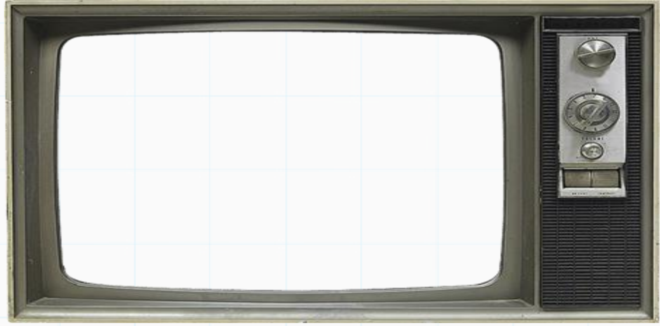
quebrar as $=$ em $\leq$ e $\geq$.

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& -2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -6 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4 \\
& -4x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -4 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

todas restrições com $\leq$

Dualidade

Então como conseguir
um limite superior ?



- outro exemplo, mas agora com restrições de igualdade no problema primal :

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

agora com var. de folga e rest. de igualdade.

pois o processo que eu fiz foi com <=

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \\
& 2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 6 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 4 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

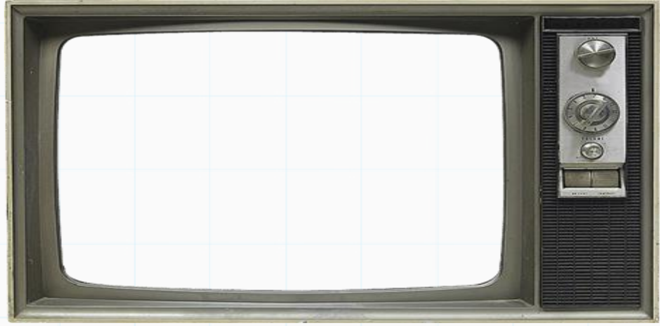
quebrar as $=$ em $\leq$ e $\geq$.

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 & \times y_1 \geq 0 \\
& -2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -6 & \times y_2 \geq 0 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4 & \times y_3 \geq 0 \\
& -4x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -4 & \times y_4 \geq 0 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

todas restrições com $\leq$

Dualidade

PPL Dual? 

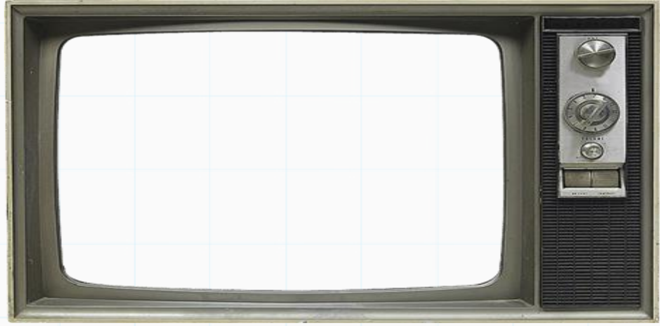


$$
\begin{aligned}
\max \ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.} \ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 & \textcolor{red}{\times y_1 \geq 0} \\
& -2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -6 & \textcolor{red}{\times y_2 \geq 0} \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4 & \textcolor{red}{\times y_3 \geq 0} \\
& -4x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -4 & \textcolor{red}{\times y_4 \geq 0} \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

todas restrições com $\leq$

Dualidade

PPL Dual?



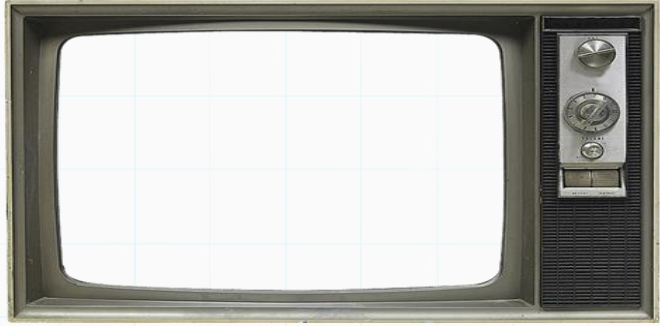
$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\
\text{s.a.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \le 6 & \color{red}{\times y_1 \ge 0} \\
& -2x_1 - 3x_2 - x_3 \le -6 & \color{red}{\times y_2 \ge 0} \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \le 4 & \color{red}{\times y_3 \ge 0} \\
& -4x_1 - 5x_2 + x_3 \le -4 & \color{red}{\times y_4 \ge 0} \\
& x \ge 0
\end{aligned}
$$

todas restrições com $\le$

$$
\begin{aligned}
\min\ & 6y_1 - 6y_2 + 4y_3 - 4y_4 \\
\text{s.a.}\ & 2y_1 - 2y_2 + 4y_3 - 4y_4 \ge 1 \\
& 3y_1 - 3y_2 + 5y_3 - 5y_4 \ge 2 \\
& y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \ge -1 \\
& y \ge 0
\end{aligned}
$$

Dualidade

PPL Dual? 



$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 & \\
\text{s.a.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 & \times y_1 \geq 0 \\
& -2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -6 & \times y_2 \geq 0 \\
& 4x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4 & \times y_3 \geq 0 \\
& -4x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -4 & \times y_4 \geq 0 \\
& x \geq 0 &
\end{aligned}
$$

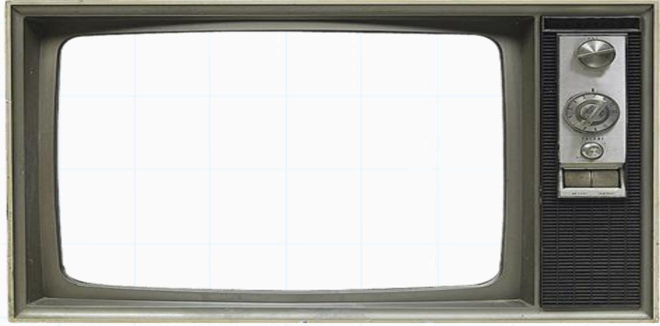
todas restrições com $\leq$

$$
\begin{aligned}
\min\ & 6y_1 - 6y_2 + 4y_3 - 4y_4 \\
\text{s.a.}\ & 2y_1 - 2y_2 + 4y_3 - 4y_4 \geq 1 \\
& 3y_1 - 3y_2 + 5y_3 - 5y_4 \geq 2 \\
& y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \geq -1 \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ & 6(y_1 - y_2) + 4(y_3 - y_4) \\
\text{s.a.}\ & 2(y_1 - y_2) + 4(y_3 - y_4) \geq 1 \\
& 3(y_1 - y_2) + 5(y_3 - y_4) \geq 2 \\
& (y_1 - y_2) - (y_3 - y_4) \geq -1 \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

Dualidade

Então como conseguir um limite superior ?



$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.a.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 & \times y_1 \geq 0 \\ & -2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -6 & \times y_2 \geq 0 \\ & 4x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 4 & \times y_3 \geq 0 \\ & -4x_1 - 5x_2 + x_3 \leq -4 & \times y_4 \geq 0 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

todas restrições com $\leq$

$$\begin{aligned} \min\ & 6y_1 - 6y_2 + 4y_3 - 4y_4 \\ \text{s.a.}\ & 2y_1 - 2y_2 + 4y_3 - 4y_4 \geq 1 \\ & 3y_1 - 3y_2 + 5y_3 - 5y_4 \geq 2 \\ & y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \geq -1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

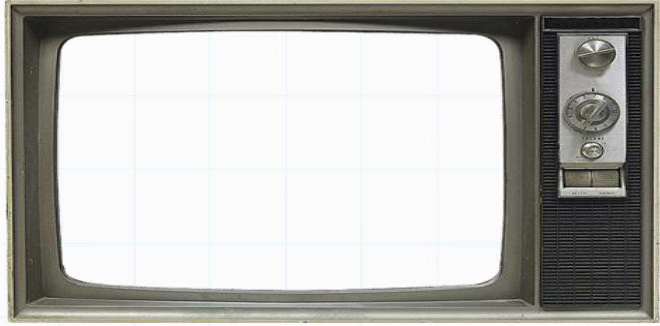
$$\begin{aligned} \min\ & 6(y_1 - y_2) + 4(y_3 - y_4) \\ \text{s.a.}\ & 2(y_1 - y_2) + 4(y_3 - y_4) \geq 1 \\ & 3(y_1 - y_2) + 5(y_3 - y_4) \geq 2 \\ & (y_1 - y_2) - (y_3 - y_4) \geq -1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

podemos escrever uma variável livre como a diferença de outras duas positivas, logo:

$$u_1 = y_1 - y_2, \text{ onde } y_1, y_2 \geq 0$$

$$u_2 = y_3 - y_4, \text{ onde } y_3, y_4 \geq 0$$

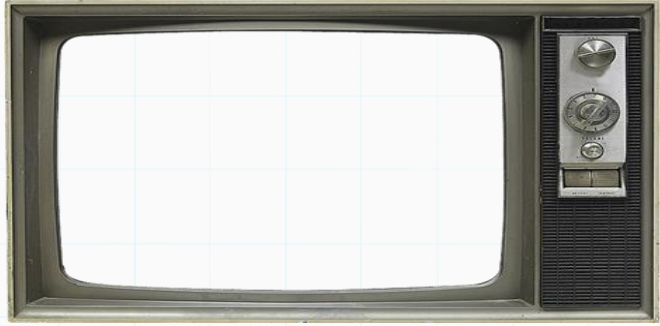
Dualidade



$$
\begin{aligned}
\min\ & 6(y_1 - y_2) + 4(y_3 - y_4) \\
\text{s.a.}\ & 2(y_1 - y_2) + 4(y_3 - y_4) \geq 1 \\
& 3(y_1 - y_2) + 5(y_3 - y_4) \geq 2 \\
& (y_1 - y_2) - (y_3 - y_4) \geq -1 \\
& y \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\min\ & 6u_1 + 4u_2 \\
\text{s.a.}\ & 2u_1 + 4u_2 \geq 1 \\
& 3u_1 + 5u_2 \geq 2 \\
& u_1 - u_2 \geq -1 \\
& u \in \mathbb{R}^2
\end{aligned}
$$

Dualidade



- outro exemplo:

$$\begin{aligned} \min\ & 6(y_1 - y_2) + 4(y_3 - y_4) \\ \text{s.a.}\ & 2(y_1 - y_2) + 4(y_3 - y_4) \geq 1 \\ & 3(y_1 - y_2) + 5(y_3 - y_4) \geq 2 \\ & (y_1 - y_2) - (y_3 - y_4) \geq -1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 6u_1 + 4u_2 \\ \text{s.a.}\ & 2u_1 + 4u_2 \geq 1 \\ & 3u_1 + 5u_2 \geq 2 \\ & u_1 - u_2 \geq -1 \\ & u \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

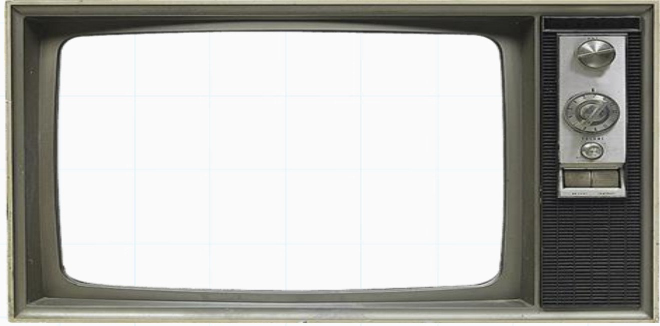
concluimos que as restrições de igualdade no PPL primal gerou variáveis livres no problema dual

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 - x_3 \\ \text{s.a.}\ & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 6 \\ & 4x_1 + 5x_2 - x_3 = 4 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Primal/Dual

$$\begin{aligned} \min\ & 6u_1 + 4u_2 \\ \text{s.a.}\ & 2u_1 + 4u_2 \geq 1 \\ & 3u_1 + 5u_2 \geq 2 \\ & u_1 - u_2 \geq -1 \\ & u \in \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

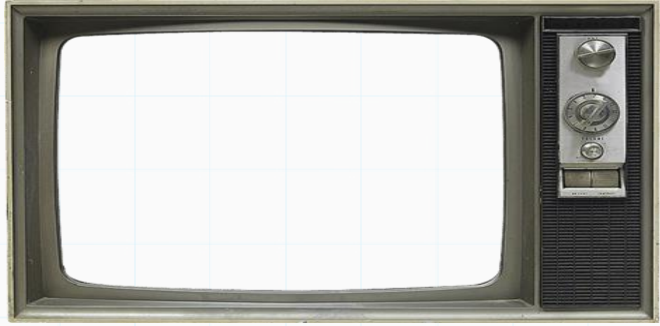
Dualidade



e o que acontece agora se o problema primal possui uma variável livre ?

$$
\begin{aligned}
\max\ & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a.}\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Dualidade

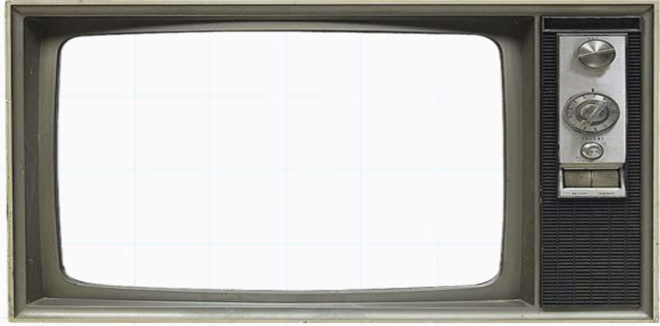


e o que acontece agora se o problema primal possui uma variável livre ?

$$\begin{aligned} \max \ & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \ & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$x_2 = u_1 - u_2, \ \ u_1, u_2 \ge 0$$

Dualidade



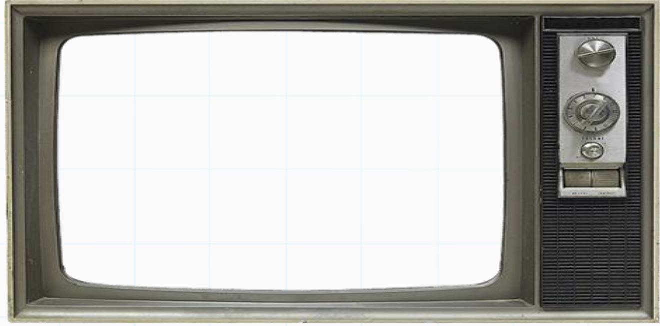
e o que acontece agora se o problema primal possui uma variável livre ?

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 \geq 0 \\
& x_2 \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$x_2 = u_1 - u_2, \; u_1, u_2 \geq 0$$

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2u_1 - 2u_2 \\
\text{s.a.} \quad & 2x_1 + u_1 - u_2 \leq 6 \\
& x_1 + u_1 - u_2 \leq 4 \\
& x_1, u \geq 0
\end{aligned}
$$

Dualidade



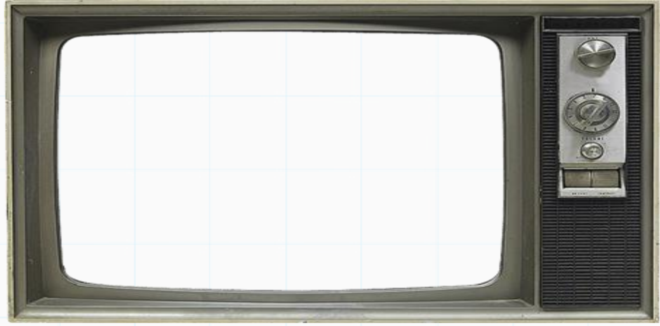
e o que acontece agora se o problema primal possui uma variável livre ?

$$\begin{aligned} \max \ & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$x_2 = u_1 - u_2, \ u_1, u_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} \max \ & x_1 + 2u_1 - 2u_2 \\ \text{s.a.} \ & 2x_1 + u_1 - u_2 \leq 6 && \times y_1 \geq 0 \\ & x_1 + u_1 - u_2 \leq 4 && \times y_2 \geq 0 \\ & x_1, u \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade



e o que acontece agora se o problema primal possui uma variável livre ?

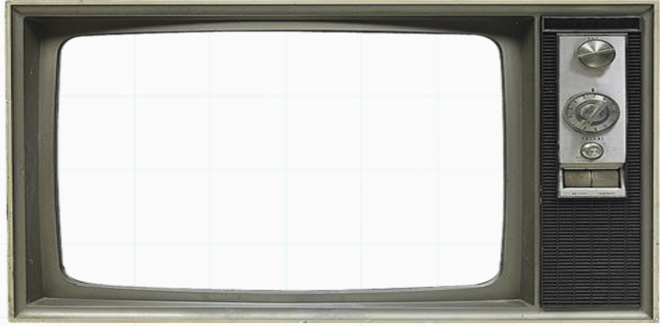
$$\begin{aligned} \max \;& x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.}\;& 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$x_2 = u_1 - u_2, \quad u_1, u_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \max \;& x_1 + 2u_1 - 2u_2 \\ \text{s.a.}\;& 2x_1 + u_1 - u_2 \leq 6 && \times y_1 \geq 0 \\ & x_1 + u_1 - u_2 \leq 4 && \times y_2 \geq 0 \\ & x_1, u \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min \;& 6y_1 + 4y_2 \\ \text{s.a.}\;& 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & y_1 + y_2 \geq 2 \\ & -y_1 - y_2 \geq -2 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade



e o que acontece agora se o problema primal possui uma variável livre ?

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.}\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

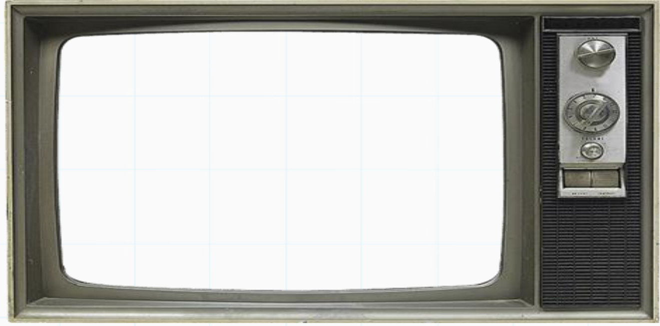
$x_2 = u_1 - u_2,\ u_1, u_2 \geq 0$

$$\begin{aligned} \max\ & x_1 + 2u_1 - 2u_2 \\ \text{s.a.}\ & 2x_1 + u_1 - u_2 \leq 6 && \times y_1 \geq 0 \\ & x_1 + u_1 - u_2 \leq 4 && \times y_2 \geq 0 \\ & x_1, u \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min\ & 6y_1 + 4y_2 \\ \text{s.a.}\ & 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & \boxed{y_1 + y_2 \geq 2} \\ & \boxed{-y_1 - y_2 \geq -2} \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$\boxed{y_1 + y_2 = 2}$

Dualidade



e o que acontece agora se o problema primal possui uma variável livre ?

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$x_2 = u_1 - u_2, \quad u_1, u_2 \geq 0$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2u_1 - 2u_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2x_1 + u_1 - u_2 \leq 6 & \times y_1 \geq 0 \\ & x_1 + u_1 - u_2 \leq 4 & \times y_2 \geq 0 \\ & x_1, u \geq 0 \end{aligned}$$

concluimos que a variável livre no PPL primal gerou restrições de igualdade no problema dual

$$\begin{aligned} \min \quad & 6y_1 + 4y_2 \\ \text{s.a.} \quad & 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ & \boxed{y_1 + y_2 \geq 2} \\ & \boxed{-y_1 - y_2 \geq -2} \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{y_1 + y_2 = 2}$$

Dualidade

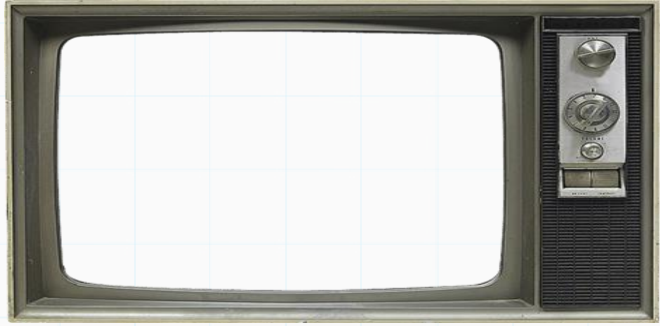


Tabela de Conversão Primal/Dual

Primal	Dual
max	min
rest. $\leq$	var. ≥ 0
rest. $\geq$	var. ≤ 0
rest. =	var. livre
var. ≥ 0	rest. $\geq$
var. livre	rest. =

Conversão quando o primal é de maximização

Dualidade

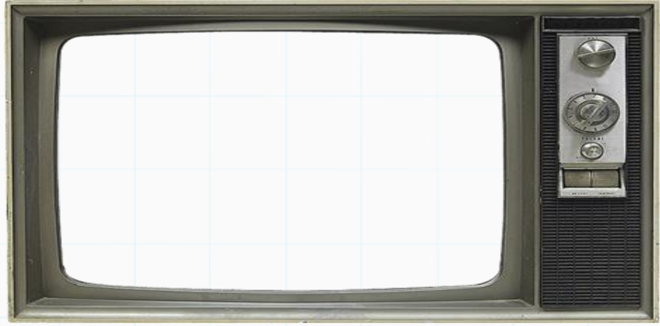


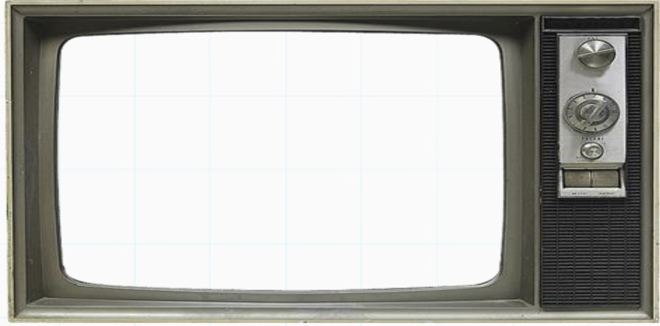
Tabela de Conversão Primal/Dual

Primal	Dual
max	min
rest. $\leq$	var. ≥ 0
rest. $\geq$	var. ≤ 0
rest. =	var. livre
var. ≥ 0	rest. $\geq$
var. livre	rest. =

Conversão quando o primal é de maximização

Dualidade é importante:
- Limites duais
- Interpretação Econômica
- Métodos de Solução de Programação Matemática

Dualidade

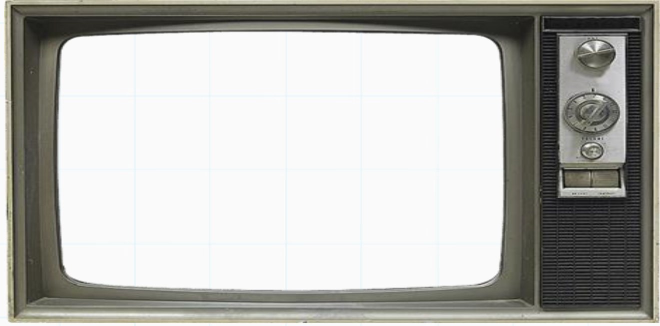


Finalmente podemos agora definir (P) primal e (D) dual como:

$$\begin{array}{ll} \max\ c^T x & \qquad \min\ b^T y \\ \quad Ax \leq b & \qquad\quad A^T y \geq c \\ \quad x \geq 0 & \qquad\quad y \geq 0 \\ \quad x \in R^n & \qquad\quad y \in R^m \end{array}$$

Primal	Dual
max	min
rest. $\leq$	var. ≥ 0
rest. $\geq$	var. ≤ 0
rest. =	var. livre
var. ≥ 0	rest. $\geq$
var. livre	rest. =

Dualidade



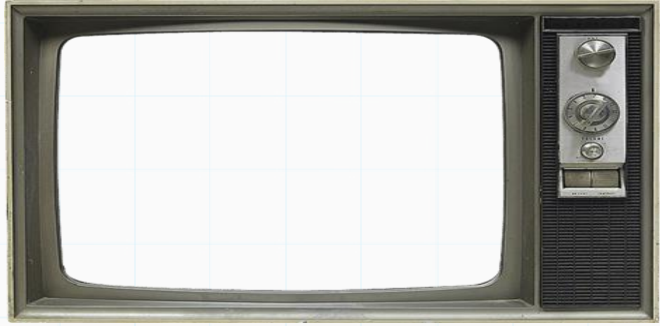
Finalmente podemos agora definir (P) primal e (D) dual como:

$$\begin{array}{llll} \max\ c^T x & & \min\ b^T y & \\ & Ax \leq b & & A^T y \geq c \\ & x \geq 0 & & y \geq 0 \\ & x \in R^n & & y \in R^m \end{array}$$

<u>Teorema:</u> O dual de (D) é (P)

Primal	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Dualidade



Finalmente podemos agora definir (P) primal e (D) dual como:

$$\max\ c^T x \qquad\qquad \min\ b^T y$$

$$Ax \leq b \qquad\qquad A^T y \geq c$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

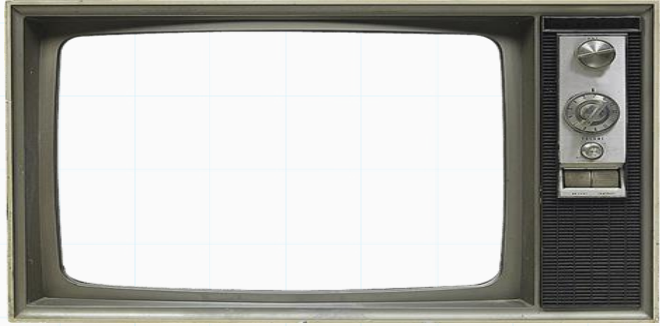
$$x \in R^n \qquad\qquad y \in R^m$$

<u>Teorema:</u> O dual de (D) é (P)

reescrevendo (D)

Primal	Dual
max	min
rest. $\leq$	var. ≥ 0
rest. $\geq$	var. ≤ 0
rest. =	var. livre
var. ≥ 0	rest. $\geq$
var. livre	rest. =

Dualidade



Finalmente podemos agora definir (P) primal e (D) dual como:

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in R^n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min\ & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \\ & y \in R^m \end{aligned}$$

<u>Teorema:</u> O dual de (D) é (P)

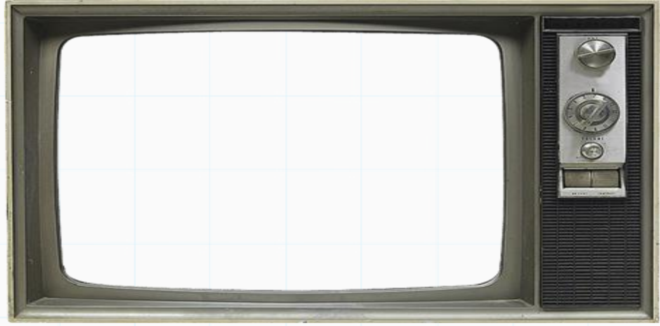
reescrevendo (D)

$$\begin{aligned} -\max\ & -b^T y \\ & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Primal →	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Sempre colocamos na forma padrão antes de gerar o dual: Max, Ax<=b e x>=0

Dualidade



Finalmente podemos agora definir (P) primal e (D) dual como:

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in R^n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \min\ & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \\ & y \in R^m \end{aligned}$$

<u>Teorema:</u> O dual de (D) é (P)

reescrevendo (D)

$$\begin{aligned} -\max\ & -b^T y \\ & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

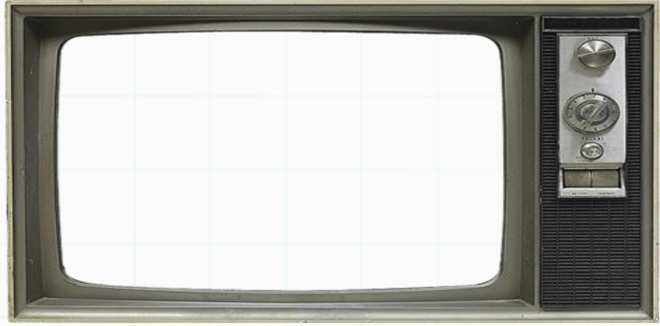
logo o dual de (D) será

$$\begin{aligned} -\min\ & -c^T x \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Primal	Dual
max	min
rest. $\leq$	var. ≥ 0
rest. $\geq$	var. ≤ 0
rest. =	var. livre
var. ≥ 0	rest. $\geq$
var. livre	rest. =

Sempre colocamos na forma padrão antes de gerar o dual: Max, Ax<=b e x>=0

Dualidade



Finalmente podemos agora definir (P) primal e (D) dual como:

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \\ & x \in R^n \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \min\ & b^T y \\ & A^T y \geq c \\ & y \geq 0 \\ & y \in R^m \end{aligned}$$

Primal ➡	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

<u>Teorema:</u> O dual de (D) é (P)

reescrevendo (D)

$$\begin{aligned} -\max\ & -b^T y \\ & -A^T y \leq -c \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

logo o dual de (D) será

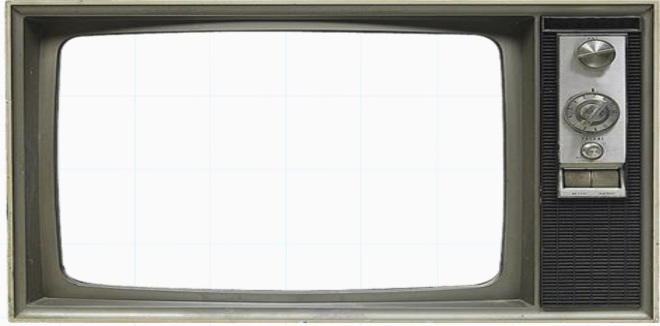
$$\begin{aligned} -\min\ & -c^T x \\ & -Ax \geq -b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

$\blacksquare$

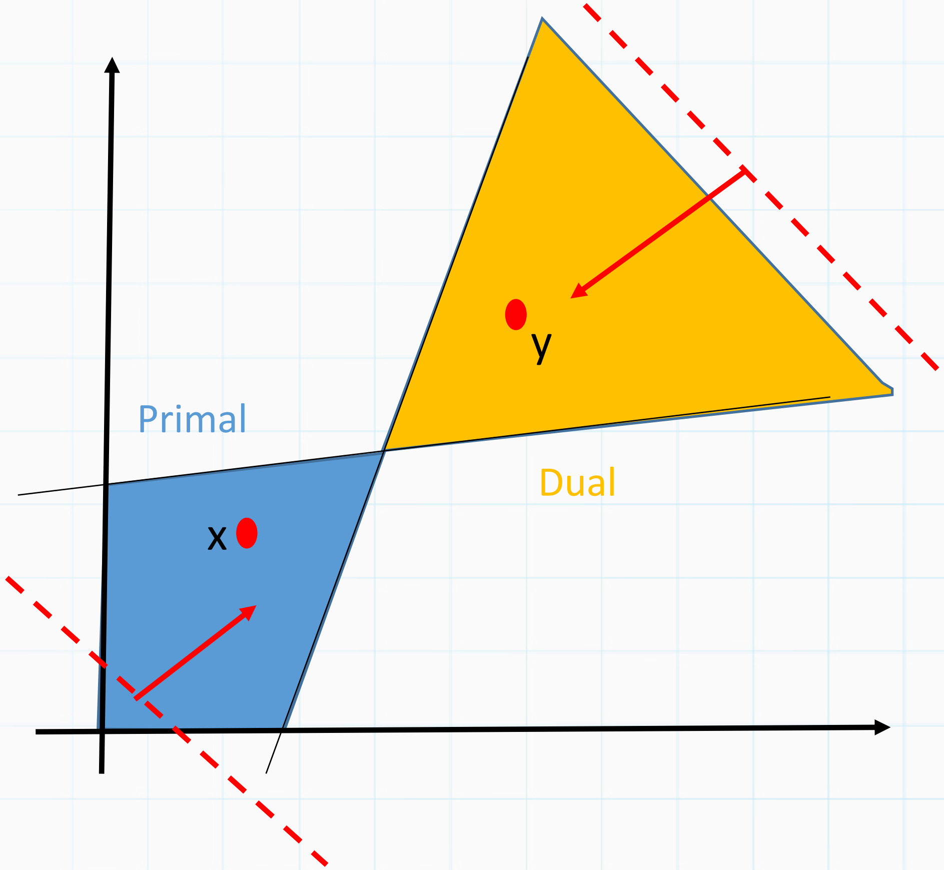
Sempre colocamos na forma padrão antes de gerar o dual: Max, Ax<=b e x>=0

Dualidade



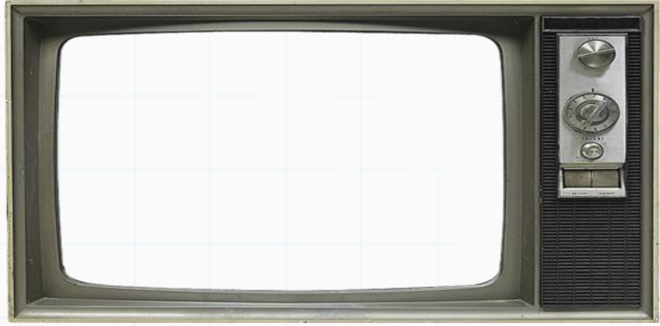
<u>Teorema da Dualidade Fraca:</u> Seja $\overline{x}$ uma solução viável de $P = \{Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ e seja $\overline{y}$ uma solução viável de $D = \{A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$, então:

$$c^T\overline{x} \leq b^T\overline{y}$$



Ideia visual

Dualidade

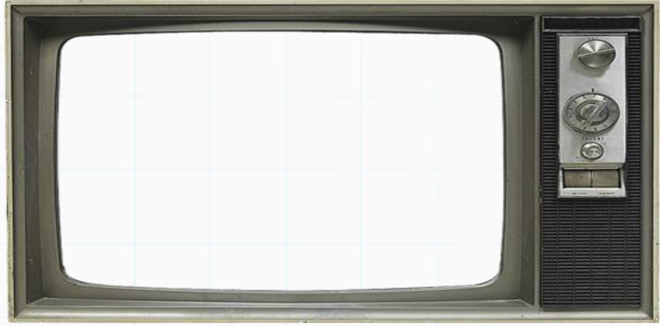


<u>Teorema da Dualidade Fraca:</u> Seja $\overline{x}$ uma solução viável de $P = \{Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ e seja $\overline{y}$ uma solução viável de $D = \{A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$, então:

$$c^T \overline{x} \leq b^T \overline{y}$$

Sabemos que $A\overline{x} \leq b$ e $\overline{y} \geq 0$, logo

Dualidade



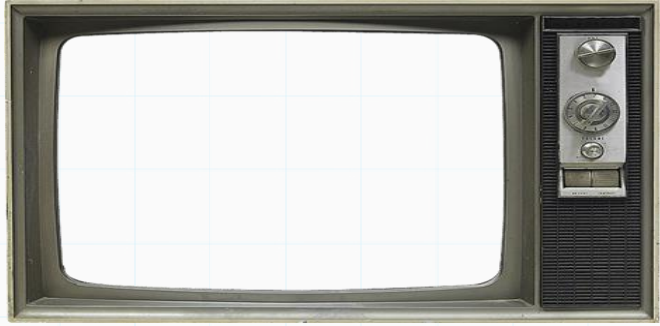
<u>Teorema da Dualidade Fraca:</u> Seja $\overline{x}$ uma solução viável de $P = \{Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ e seja $\overline{y}$ uma solução viável de $D = \{A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$, então:

$$c^T \overline{x} \leq b^T \overline{y}$$

Sabemos que $A\overline{x} \leq b$ e $\overline{y} \geq 0$, logo

$$\begin{aligned} A\overline{x} &\leq b \\ [A\overline{x}]^T &\leq b^T \\ \overline{x}^T A^T &\leq b^T \quad (\leftarrow \times \overline{y}) \\ \overline{x}^T A^T \overline{y} &\leq b^T \overline{y} \quad (1) \end{aligned}$$

Dualidade



Teorema da Dualidade Fraca: Seja $\overline{x}$ uma solução viável de $P = \{Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ e seja $\overline{y}$ uma solução viável de $D = \{A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$, então:

$$c^T \overline{x} \leq b^T \overline{y}$$

Sabemos que $A\overline{x} \leq b$ e $\overline{y} \geq 0$, logo

$$A\overline{x} \leq b$$

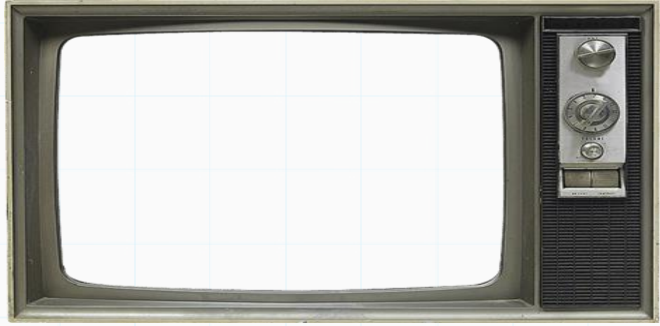
$$[A\overline{x}]^T \leq b^T$$

$$\overline{x}^T A^T \leq b^T \quad (\leftarrow \times \overline{y})$$

$$\overline{x}^T A^T \overline{y} \leq b^T \overline{y} \quad (1)$$

Vemos também que $\overline{x} \geq 0$ logo:

Dualidade



<u>Teorema da Dualidade Fraca:</u> Seja $\overline{x}$ uma solução viável de $P = \{Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ e seja $\overline{y}$ uma solução viável de $D = \{A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$, então:

$$c^T \overline{x} \leq b^T \overline{y}$$

Sabemos que $A\overline{x} \leq b$ e $\overline{y} \geq 0$, logo

$$A\overline{x} \leq b$$

$$[A\overline{x}]^T \leq b^T$$

$$\overline{x}^T A^T \leq b^T \quad (\leftarrow \times \overline{y})$$

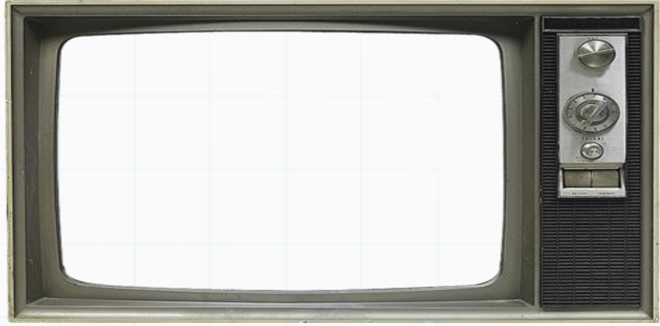
$$\overline{x}^T A^T \overline{y} \leq b^T \overline{y} \quad (1)$$

Vemos também que $\overline{x} \geq 0$ logo:

$$A^T \overline{y} \geq c \quad (\rightarrow \times \overline{x}^T)$$

$$\overline{x}^T A^T \overline{y} \geq \overline{x}^T c \quad (2)$$

Dualidade



Teorema da Dualidade Fraca: Seja $\overline{x}$ uma solução viável de $P = \{Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ e seja $\overline{y}$ uma solução viável de $D = \{A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$, então:

$$c^T \overline{x} \leq b^T \overline{y}$$

Sabemos que $A\overline{x} \leq b$ e $\overline{y} \geq 0$, logo

$$A\overline{x} \leq b$$
$$[A\overline{x}]^T \leq b^T$$
$$\overline{x}^T A^T \leq b^T \quad (\leftarrow \times \overline{y})$$
$$\overline{x}^T A^T \overline{y} \leq b^T \overline{y} \quad (1)$$

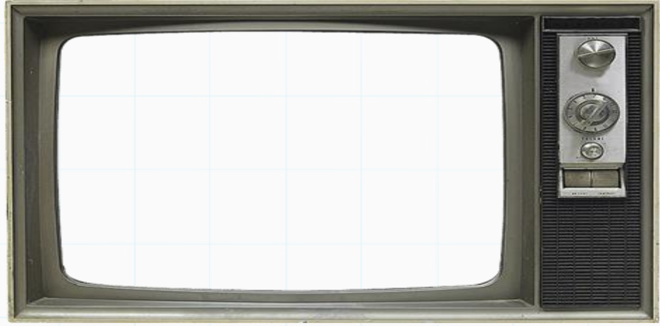
Vemos também que $\overline{x} \geq 0$ logo:

$$A^T \overline{y} \geq c \quad (\rightarrow \times \overline{x}^T)$$
$$\overline{x}^T A^T \overline{y} \geq \overline{x}^T c \quad (2)$$

por (1) e por (2) temos que:

$$\overline{x}^T c \leq \overline{x}^T A^T \overline{y} \leq b^T \overline{y}$$

Dualidade



<u>Teorema da Dualidade Fraca:</u> Seja $\overline{x}$ uma solução viável de $P = \{Ax \leq b,\ x \geq 0\}$ e seja $\overline{y}$ uma solução viável de $D = \{A^T y \geq c,\ y \geq 0\}$, então:

$$c^T \overline{x} \leq b^T \overline{y}$$

Sabemos que $A\overline{x} \leq b$ e $\overline{y} \geq 0$, logo

$$A\overline{x} \leq b$$
$$[A\overline{x}]^T \leq b^T$$
$$\overline{x}^T A^T \leq b^T \quad (\leftarrow \times \overline{y})$$
$$\overline{x}^T A^T \overline{y} \leq b^T \overline{y} \quad (1)$$

Vemos também que $\overline{x} \geq 0$ logo:

$$A^T \overline{y} \geq c \quad (\rightarrow \times \overline{x}^T)$$
$$\overline{x}^T A^T \overline{y} \geq \overline{x}^T c \quad (2)$$

por (1) e por (2) temos que:

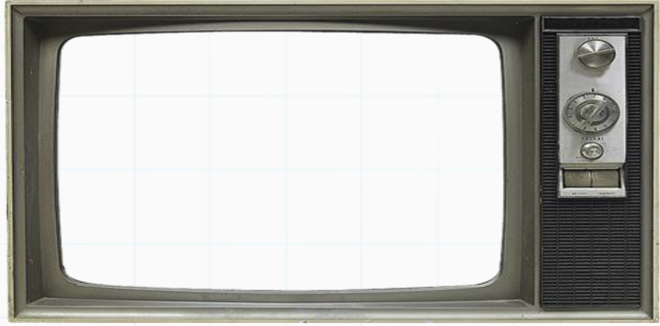
$$\overline{x}^T c \leq \overline{x}^T A^T \overline{y} \leq b^T \overline{y}$$

logo:

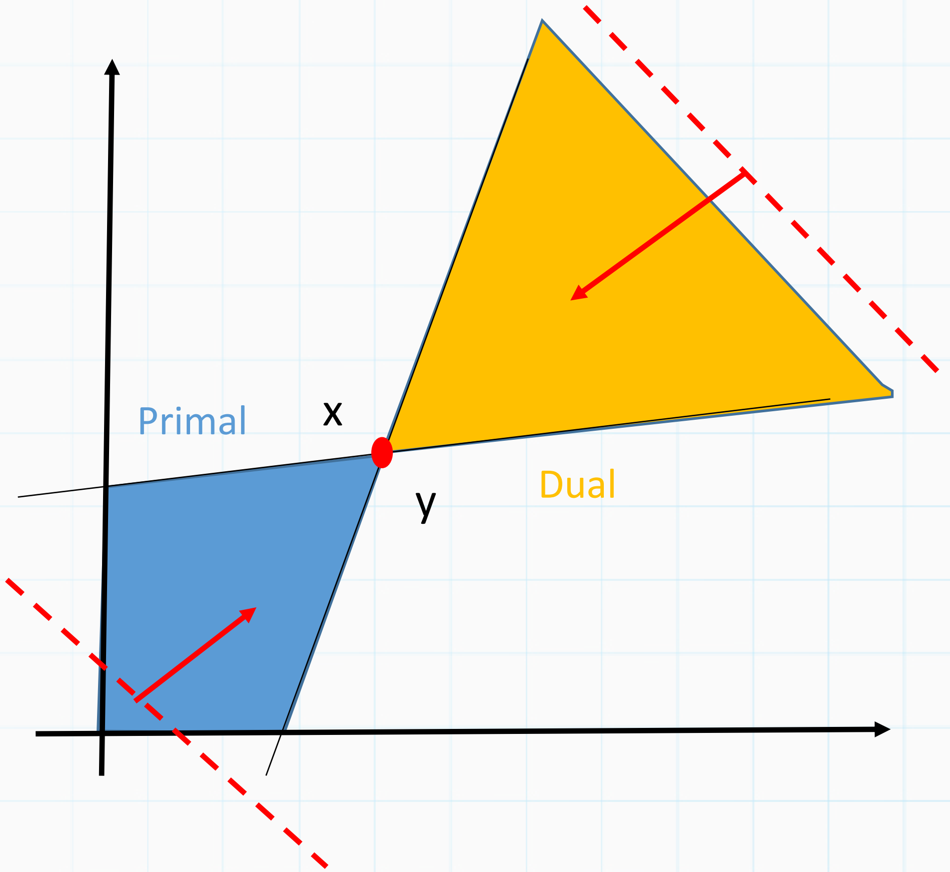
$$\overline{x}^T c \leq b^T \overline{y} \rightarrow \boxed{c^T \overline{x} \leq b^T \overline{y}}$$

$\blacksquare$

Dualidade

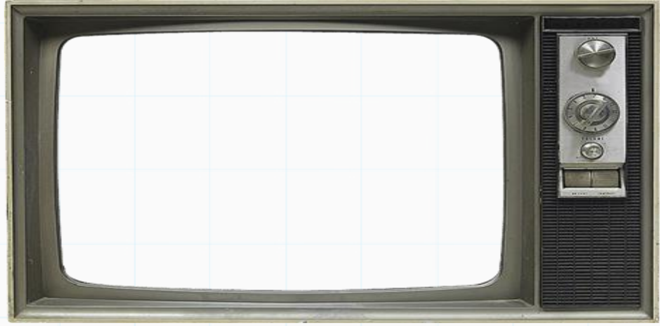


Corolário: Seja $\overline{x}$ uma solução viável de P e $\overline{y}$ uma solução viável de D, tal que $c^T\overline{x} = b^T\overline{y}$. Então **(i)** $\overline{x}$ será ótimo de P e **(ii)** $\overline{y}$ será ótimo de D.



Ideia visual

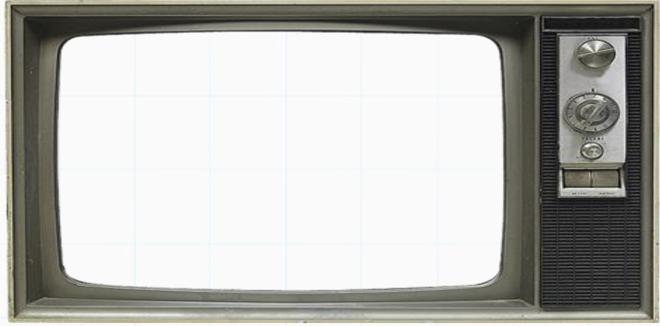
Dualidade



<u>Corolário:</u> Seja $\overline{x}$ uma solução viável de P e $\overline{y}$ uma solução viável de D, tal que $c^T\overline{x} = b^T\overline{y}$. Então **(i)** $\overline{x}$ será ótimo de P e **(ii)** $\overline{y}$ será ótimo de D.

(i) $\overline{y}$ é solução viável de D $\rightarrow$ $c^Tx \leq b^T\overline{y}, \forall x \in P$

Dualidade

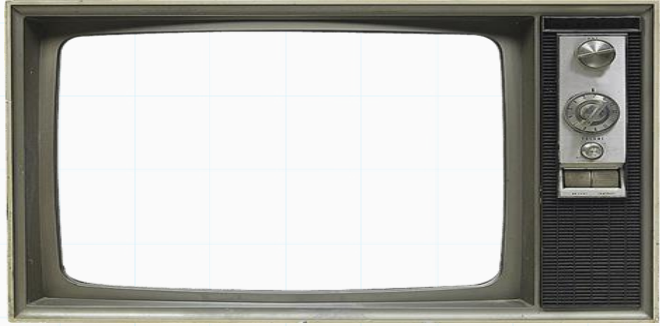


Corolário: Seja $\overline{x}$ uma solução viável de P e $\overline{y}$ uma solução viável de D, tal que $c^T\overline{x} = b^T\overline{y}$. Então **(i)** $\overline{x}$ será ótimo de P e **(ii)** $\overline{y}$ será ótimo de D.

(i) $\overline{y}$ é solução viável de D $\rightarrow$ $c^T x \leq b^T\overline{y}, \forall x \in P$

como $c^T\overline{x} = b^T\overline{y} \rightarrow c^T x \leq c^T\overline{x}, \forall x \in P$

Dualidade

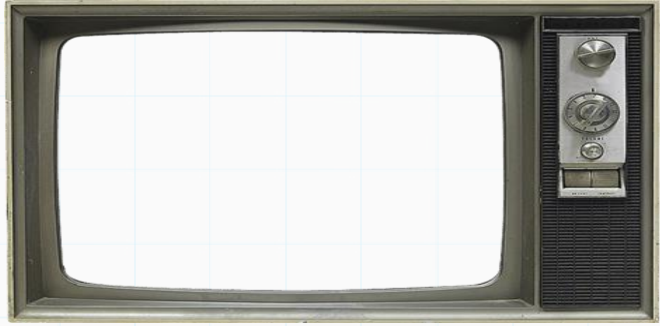


Corolário: Seja $\overline{x}$ uma solução viável de P e $\overline{y}$ uma solução viável de D, tal que $c^T\overline{x} = b^T\overline{y}$. Então **(i)** $\overline{x}$ será ótimo de P e **(ii)** $\overline{y}$ será ótimo de D.

(i) $\overline{y}$ é solução viável de D $\rightarrow$ $c^T x \leq b^T\overline{y}, \forall x \in P$

como $c^T\overline{x} = b^T\overline{y} \rightarrow c^T x \leq c^T\overline{x}, \forall x \in P$ $\Rightarrow$ logo, $\overline{x}$ é ótima em P.

Dualidade



<u>Corolário:</u> Seja $\overline{x}$ uma solução viável de P e $\overline{y}$ uma solução viável de D, tal que $c^T\overline{x} = b^T\overline{y}$. Então **(i)** $\overline{x}$ será ótimo de P e **(ii)** $\overline{y}$ será ótimo de D.

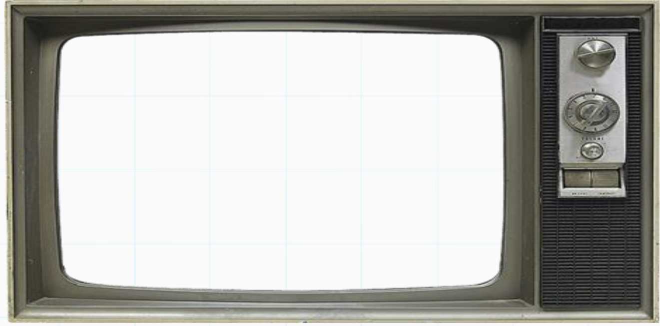
(i) $\overline{y}$ é solução viável de D $\rightarrow$ $c^T x \leq b^T\overline{y}, \forall x \in P$

como $c^T\overline{x} = b^T\overline{y} \rightarrow c^T x \leq c^T\overline{x}, \forall x \in P$

logo, $\overline{x}$ é ótima em P.

(ii) $\overline{x}$ é solução viável de P $\rightarrow$ $c^T\overline{x} \leq b^T y, \forall y \in D$

Dualidade



Corolário: Seja $\overline{x}$ uma solução viável de P e $\overline{y}$ uma solução viável de D, tal que $c^T\overline{x} = b^T\overline{y}$. Então **(i)** $\overline{x}$ será ótimo de P e **(ii)** $\overline{y}$ será ótimo de D.

(i) $\overline{y}$ é solução viável de D $\rightarrow$ $c^T x \leq b^T\overline{y}, \forall x \in P$

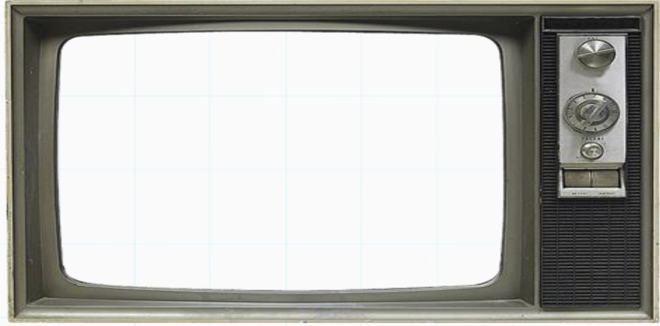
como $c^T\overline{x} = b^T\overline{y} \rightarrow c^T x \leq c^T\overline{x}, \forall x \in P$

logo, $\overline{x}$ é ótima em P.

(ii) $\overline{x}$ é solução viável de P $\rightarrow$ $c^T\overline{x} \leq b^T y, \forall y \in D$

como $c^T\overline{x} = b^T\overline{y} \rightarrow b^T\overline{y} \leq b^T y, \forall y \in D$

Dualidade



Corolário: Seja $\overline{x}$ uma solução viável de P e $\overline{y}$ uma solução viável de D, tal que $c^T\overline{x} = b^T\overline{y}$. Então **(i)** $\overline{x}$ será ótimo de P e **(ii)** $\overline{y}$ será ótimo de D.

(i) $\overline{y}$ é solução viável de D $\rightarrow$ $c^T x \leq b^T\overline{y}, \forall x \in P$

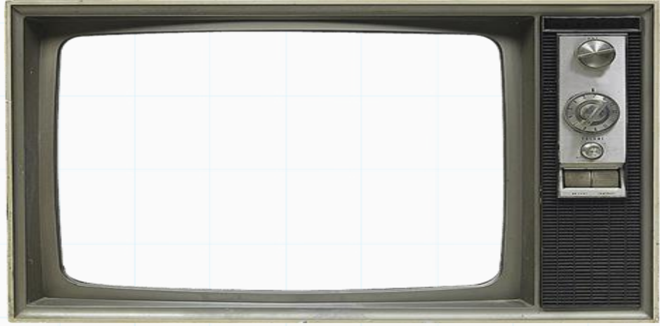
como $c^T\overline{x} = b^T\overline{y} \rightarrow c^T x \leq c^T\overline{x}, \forall x \in P$ $\Rightarrow$ logo, $\overline{x}$ é ótima em P.

(ii) $\overline{x}$ é solução viável de P $\rightarrow$ $c^T\overline{x} \leq b^T y, \forall y \in D$

como $c^T\overline{x} = b^T\overline{y} \rightarrow b^T\overline{y} \leq b^T y, \forall y \in D$ $\Rightarrow$ logo, $\overline{y}$ é ótima em D.

$\blacksquare$

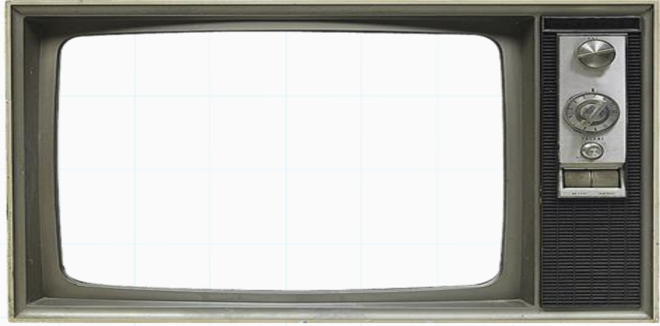
Dualidade



<u>Corolário:</u>

- (i) Se P ilimitado $\rightarrow$ D inviável
- (ii) Se D ilimitado $\rightarrow$ P inviável

Dualidade



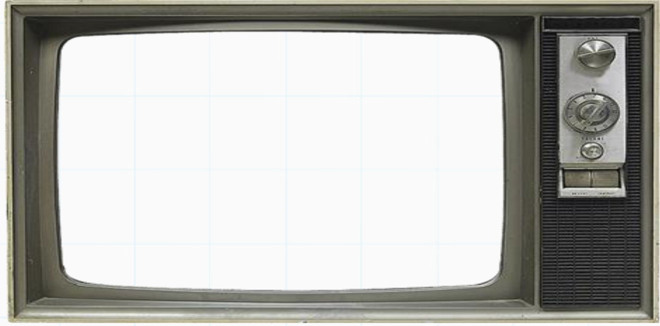
Corolário:

- (i) Se P ilimitado → D inviável
- (ii) Se D ilimitado → P inviável

(i) Se D viável → $\exists \bar{y} \in D$ tal que $c^T x \leq b^T \bar{y}, \forall x \in P$.

absurdo pois max $c^T x \rightarrow +\infty$

Dualidade



Corolário:

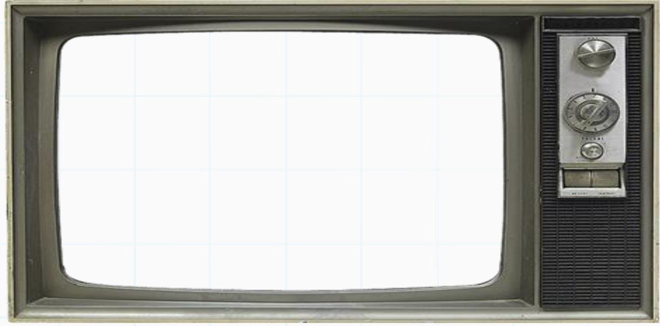
- (i) Se P ilimitado $\rightarrow$ D inviável
- (ii) Se D ilimitado $\rightarrow$ P inviável

(i) Se D viável $\rightarrow \exists \overline{y} \in D$ tal que $c^T x \leq b^T \overline{y}, \forall x \in P$.

absurdo pois max $c^T x \rightarrow +\infty$

(ii) Análogo $\blacksquare$

Dualidade



Corolário:

- (i) Se P ilimitado $\rightarrow$ D inviável
- (ii) Se D ilimitado $\rightarrow$ P inviável

(i) Se D viável $\rightarrow \exists \overline{y} \in D$ tal que $c^T x \leq b^T \overline{y}, \forall x \in P$.

absurdo pois max $c^T x \rightarrow +\infty$

(ii) Análogo $\blacksquare$

Mas e se P for vazio, será que D será ilimitado ?

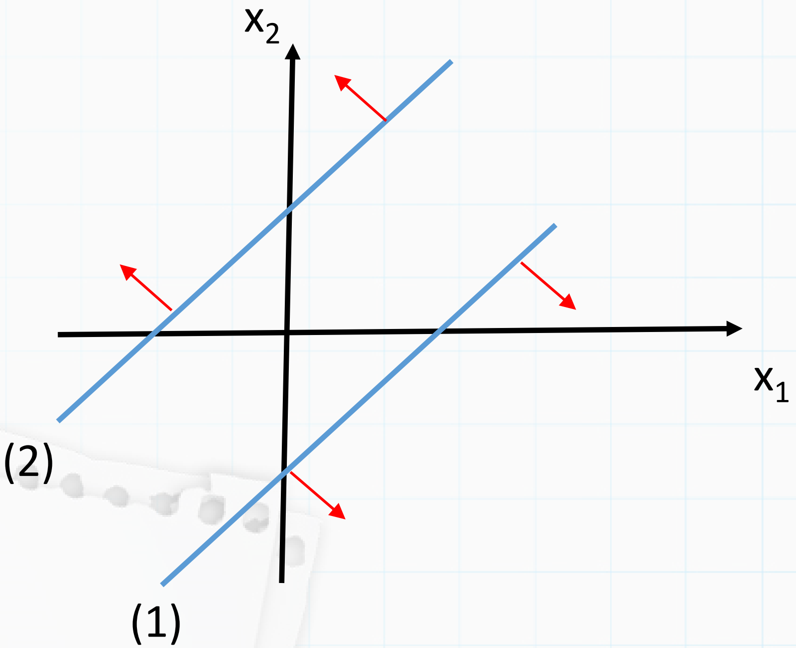
Dualidade

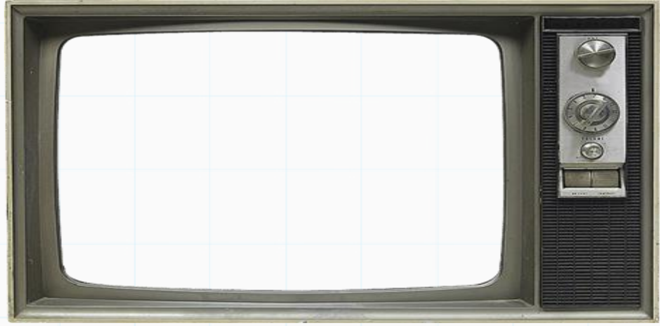
Mas e se P for vazio, será que D será ilimitado ?

dual

Seja:

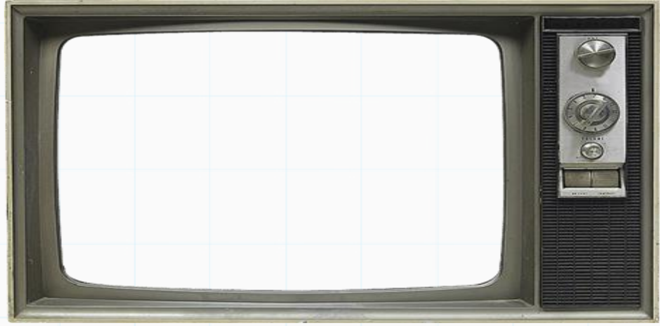
$$(P) \quad \max\ x_1 + x_2$$
$$-x_1 + x_2 \leq -1 \quad (1)$$
$$x_1 - x_2 \leq -1 \quad (2)$$
$$x \geq 0$$





Primal	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Dualidade



Mas e se P for vazio, será que D será ilimitado ?

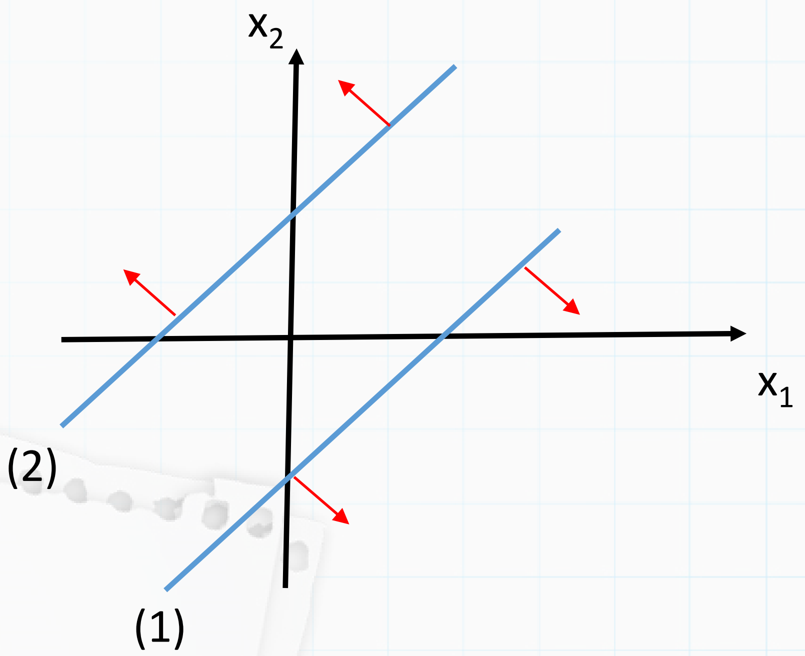
Seja:

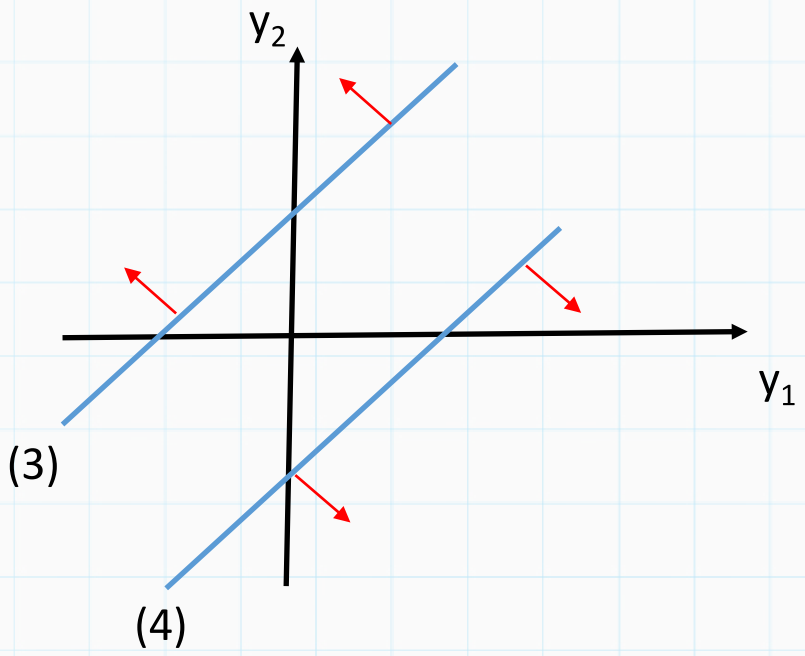
$$(P) \quad \max\ x_1 + x_2$$
$$-x_1 + x_2 \le -1 \quad (1)$$
$$x_1 - x_2 \le -1 \quad (2)$$
$$x \ge 0$$

dual →

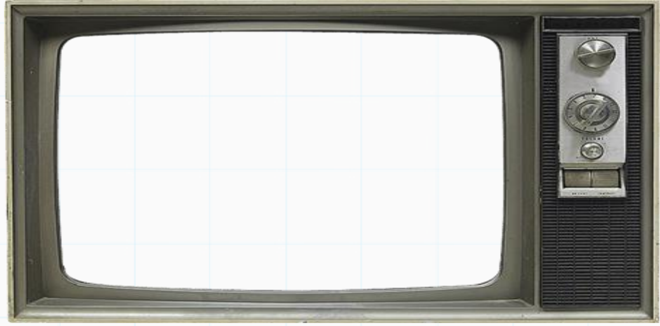
$$(D) \quad \min\ -y_1 - y_2$$
$$-y_1 + y_2 \ge 1 \quad (3)$$
$$y_1 - y_2 \ge -1 \quad (4)$$
$$y \ge 0$$

Primal →	Dual
max	min
rest. $\le$	var. ≥ 0
rest. $\ge$	var. ≤ 0
rest. =	var. livre
var. ≥ 0	rest. $\ge$
var. livre	rest. =





Dualidade

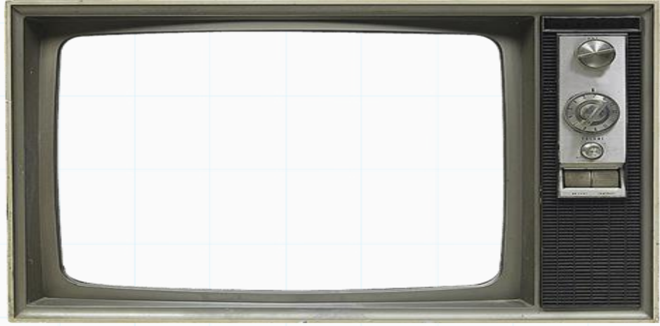


Vamos definir agora P e D de outra forma (com folgas em P)

$$\max\ c^T x$$
$$Ax = b \quad \xrightarrow{\text{dual}}$$
$$x \geq 0$$

Primal	Dual
max	min
rest. $\leq$	var. ≥ 0
rest. $\geq$	var. ≤ 0
rest. =	var. livre
var. ≥ 0	rest. $\geq$
var. livre	rest. =

Dualidade

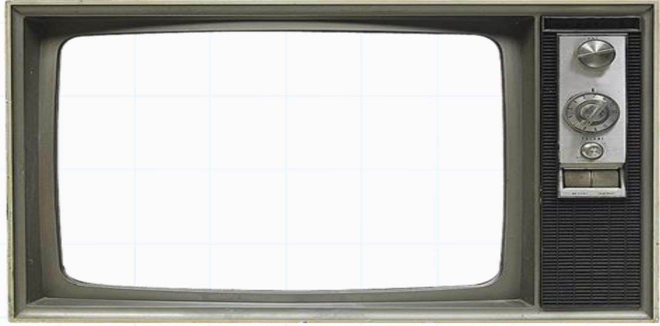


Vamos definir agora P e D de outra forma (com folgas em P)

$$\begin{aligned} \max\ & c^T x \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{dual}} \quad \begin{aligned} \min\ & b^T y \quad = y^T b \\ & A^T y \geq c \\ & y \text{ livre} \end{aligned}$$

Primal →	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Dualidade



Vamos definir agora P e D de outra forma (com folgas em P)

$$\begin{array}{lcl} \max\ c^T x & & \min\ b^T y \quad = y^T b \\ \quad Ax = b & \xrightarrow{\text{dual}} & \quad A^T y \geq c \\ \quad x \geq 0 & & \quad y \text{ livre} \end{array}$$

<u>Teorema da Dualidade Forte:</u> Seja x^* uma solução ótima de P tal que $z^* = c^T x^*$ então D tem solução ótima y^* e com $b^T y^* = z^*$.

Diferente da dualidade fraca que diz que se os dois tem o mesmo valor de solução, então são ótimos.

Dualidade

Teorema da Dualidade Forte: Seja x^* uma solução ótima de P tal que $z^* = c^T x^*$ então D tem solução ótima y^* e com $b^T y^* = z^*$.

$$\max c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{s.a.} \quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

assuma s.p.g. que x^* é S.B.V., ou seja:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$B^{-1} b \geq 0$$
$$z^* = c_B^T B^{-1} b$$
$$(c_j - z_j) \leq 0, \ \forall j \in I_N$$
$$(c_N^T - c_B^T B^{-1} N) \leq 0$$

Logo x* é ótimo

$$\max c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

dual

$$\min b^T y$$
$$A^T y \geq c$$
$$y \text{ livre}$$

Dualidade

Teorema da Dualidade Forte: Seja x^* uma solução ótima de P tal que $z^* = c^T x^*$ então D tem solução ótima y^* e com $b^T y^* = z^*$.

$$\max\ c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{s.a.}\quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

assuma s.p.g. que x^* é S.B.V., ou seja:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{onde}$$

$$B^{-1}b \geq 0$$
$$z^* = c_B^T B^{-1} b$$
$$(c_j - z_j) \leq 0,\ \forall j \in I_N$$
$$(c_N^T - c_B^T B^{-1} N) \leq 0$$

Logo x* é ótimo

vamos considerar uma possível solução $\overline{y}$ de D onde vamos atribuir os valores $c_B^T B^{-1}$, logo $\overline{y} = c_B^T B^{-1}$

Pois tem a mesma cardinalidade (m), na verdade y^T

$$\max\ c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

dual

$$\min\ b^T y$$
$$A^T y \geq c$$
$$y \text{ livre}$$

Dualidade

Teorema da Dualidade Forte: Seja x^* uma solução ótima de P tal que $z^* = c^T x^*$ então D tem solução ótima y^* e com $b^T y^* = z^*$.

$$\max c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{s.a.} \quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

assuma s.p.g. que x^* é S.B.V., ou seja:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$B^{-1} b \geq 0$$
$$z^* = c_B^T B^{-1} b$$
$$(c_j - z_j) \leq 0, \ \forall j \in I_N$$
$$(c_N^T - c_B^T B^{-1} N) \leq 0$$

Logo x* é ótimo

vamos considerar uma possível solução $\overline{y}$ de D onde vamos atribuir os valores $c_B^T B^{-1}$, logo $\overline{y} = c_B^T B^{-1}$

Se $\overline{y}$ for mesmo solução de D, temos:

$$A^T \overline{y} \geq c$$
$$[A^T \overline{y}]^T \geq c^T$$
$$\overline{y}^T A \geq c$$
$$\overline{y}^T A \geq [c_B^T \ c_N^T]$$

$$\max c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

dual

$$\min b^T y$$
$$A^T y \geq c$$
$$y \text{ livre}$$

Dualidade

$\max c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N$

s.a. $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$

$x_B, x_N \geq 0$

Teorema da Dualidade Forte: Seja x^* uma solução ótima de P tal que $z^* = c^T x^*$ então D tem solução ótima y^* e com $b^T y^* = z^*$.

assuma s.p.g. que x^* é S.B.V., ou seja:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde

$$B^{-1}b \geq 0$$
$$z^* = c_B^T B^{-1}b$$
$$(c_j - z_j) \leq 0, \ \forall j \in I_N$$
$$(c_N^T - c_B^T B^{-1}N) \leq 0$$

Logo x* é ótimo

vamos considerar uma possível solução $\overline{y}$ de D onde vamos atribuir os valores $c_B^T B^{-1}$, logo $\overline{y} = c_B^T B^{-1}$

Se $\overline{y}$ for mesmo solução de D, temos:

$$A^T\overline{y} \geq c$$
$$[A^T\overline{y}]^T \geq c^T$$
$$\overline{y}^T A \geq c$$
$$\overline{y}^T A \geq [c_B^T \ c_N^T]$$

$\Rightarrow$

$$\overline{y}^T A \geq [c_B^T \ c_N^T]$$
$$\overline{y}^T [B \ N] \geq [c_B^T \ c_N^T]$$
$$c_B^T B^{-1}[B \ N] \geq [c_B^T \ c_N^T]$$
$$[c_B^T B^{-1}B \ \ c_B^T B^{-1}N] \geq [c_B^T \ c_N^T]$$
$$\boxed{[c_B^T \ \ c_B^T B^{-1}N] \geq [c_B^T \ c_N^T]}$$

Dualidade

$$\max c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{s.a.} \quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

<u>Teorema da Dualidade Forte:</u> Seja x^* uma solução ótima de P tal que $z^* = c^T x^*$ então D tem solução ótima y^* e com $b^T y^* = z^*$.

Se $\overline{y}$ for mesmo solução de D, temos:

$$[\boxed{c_B^T} \; \boxed{c_B^T B^{-1} N}] \geq [\boxed{c_B^T} \; \boxed{c_N^T}]$$

(2)

(1)

por (1) temos que $c_B^T \geq c_B^T$. ✓

Dualidade

$$\max\ c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{s.a.}\quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

<u>Teorema da Dualidade Forte:</u> Seja x^* uma solução ótima de P tal que $z^* = c^T x^*$ então D tem solução ótima y^* e com $b^T y^* = z^*$.

Se $\overline{y}$ for mesmo solução de D, temos:

$$[c_B^T \quad c_B^T B^{-1} N] \geq [c_B^T \quad c_N^T]$$

(2)

(1)

por (1) temos que $c_B^T \geq c_B^T$.

por (2) temos:

Dualidade

$$\max\ c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{s.a.}\quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

<u>Teorema da Dualidade Forte:</u> Seja x^* uma solução ótima de P tal que $z^* = c^T x^*$ então D tem solução ótima y^* e com $b^T y^* = z^*$.

Se $\overline{y}$ for mesmo solução de D, temos:

$$[\boxed{c_B^T}\ \boxed{c_B^T B^{-1} N}] \geq [\boxed{c_B^T}\ \boxed{c_N^T}]$$

(2)

(1)

por (1) temos que $c_B^T \geq c_B^T$. ✓

por (2) temos:

$$c_B^T B^{-1} N \geq c_N^T$$
$$c_B^T B^{-1} N - c_N^T \geq 0$$
$$c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leq 0$$
$$(c_j - z_j) \leq 0,\ \forall j \in I_N$$ ✓

Dualidade

$$\max\ c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{s.a.}\quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

Teorema da Dualidade Forte: Seja x^* uma solução ótima de P tal que $z^* = c^T x^*$ então D tem solução ótima y^* e com $b^T y^* = z^*$.

Se $\overline{y}$ for mesmo solução de D, temos:

$$[\boxed{c_B^T}\ \boxed{c_B^T B^{-1} N}] \geq [\boxed{c_B^T}\ \boxed{c_N^T}]$$

(2)

(1)

por (1) temos que $c_B^T \geq c_B^T$. ✓

por (2) temos:

$$c_B^T B^{-1} N \geq c_N^T$$
$$c_B^T B^{-1} N - c_N^T \geq 0$$
$$c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leq 0$$
$$(c_j - z_j) \leq 0,\ \forall j \in I_N$$ ✓

logo $\overline{y}$ é solução de D, onde o valor sua f.o. é:

?

Dualidade

$$\max\ c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{s.a.}\quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

Teorema da Dualidade Forte: Seja x^* uma solução ótima de P tal que $z^* = c^T x^*$ então D tem solução ótima y^* e com $b^T y^* = z^*$.

Se $\overline{y}$ for mesmo solução de D, temos:

$$[\boxed{c_B^T}\ \boxed{c_B^T B^{-1} N}] \geq [\boxed{c_B^T}\ \boxed{c_N^T}]$$

(2)

(1)

por (1) temos que $c_B^T \geq c_B^T$. ✓

por (2) temos:

$$c_B^T B^{-1} N \geq c_N^T$$
$$c_B^T B^{-1} N - c_N^T \geq 0$$
$$c_N^T - c_B^T B^{-1} N \leq 0$$
$$(c_j - z_j) \leq 0,\ \forall j \in I_N$$ ✓

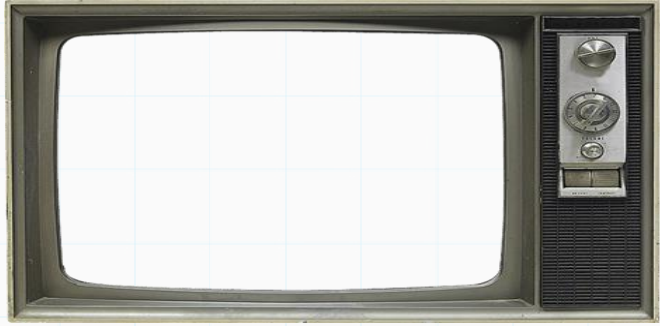
logo $\overline{y}$ é solução de D, onde o valor sua f.o. é:

$$b^T \overline{y} = \overline{y}^T b = c_B^T B^{-1} b = z^*$$

Como f.o. de P e D são iguais, temos que $\overline{y}$ é ótimo.

■

Dualidade

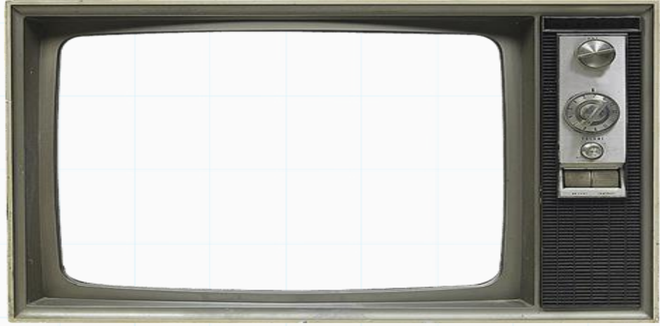


Com os resultados anteriores, podemos enunciar:

<u>Teorema da Existência da Dualidade:</u> Dado um par primal-dual de PPLs, uma e somente uma das afirmações se verifica:

1. Um deles é inviável e o outro é ilimitado
2. Os dois são inviáveis
3. Os dois tem solução ótima e o valor da f.o. ótima de ambos coincide.

Dualidade



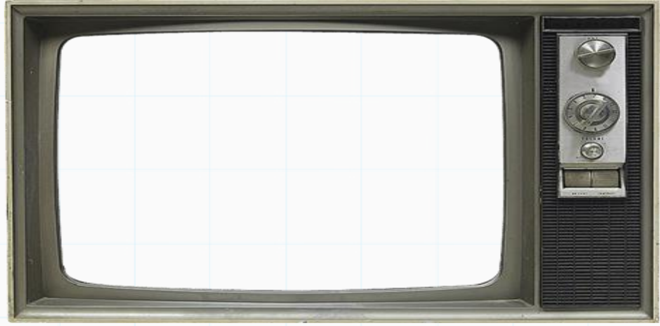
Com os resultados anteriores, podemos enunciar:

<u>Teorema da Existência da Dualidade:</u> Dado um par primal-dual de PPLs, uma e somente uma das afirmações se verifica:

1. Um deles é inviável e o outro é ilimitado
2. Os dois são inviáveis
3. Os dois tem solução ótima e o valor da f.o. ótima de ambos coincide.

Primal / Dual	Finito e Viável	Ilimitado	Inviável
Finito e Viável	x		
Ilimitado			x
Inviável		x	x

Dualidade



Com os resultados anteriores, podemos enunciar:

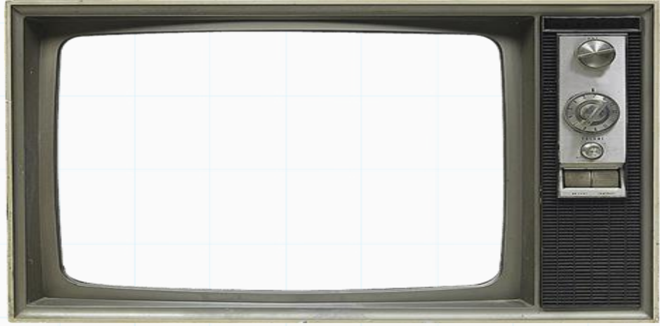
<u>Teorema da Existência da Dualidade:</u> Dado um par primal-dual de PPLs, uma e somente uma das afirmações se verifica:

1. Um deles é inviável e o outro é ilimitado
2. Os dois são inviáveis
3. Os dois tem solução ótima e o valor da f.o. ótima de ambos coincide.

Primal / Dual	Finito e Viável	Ilimitado	Inviável
Finito e Viável	x		
Ilimitado			x
Inviável		x	x

este não pode ser demonstrado por dualidade

Exercícios



1. Considere o $PPL = \{\min c^T x \mid Ax = b, x \geq 0\}$, onde $x \in R^n$, $A \in R^{mxn}$, $b \in R^m$ e $c^T \in R^n$. Para cada uma das afirmações, diga se é verdadeiro ou falso. Se verdadeiro, apresente uma justificativa, caso contrário, um contra-exemplo.

e) Se um PPL $\{\max c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ é ilimitado, então podemos alterar o valor do vetor b para tornar o PPL limitado.

Primal	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Podemos alterar o b no DUAL para tornar o problema limitado ?

Lembrando:

Primal

$$\max c^T x$$
$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$
$$x \in R^n$$

Dual

$$\min b^T y$$
$$A^T y \geq c$$
$$y \geq 0$$
$$y \in R^m$$

Primal / Dual	Finito e Viável	Ilimitado	Inviável
Finito e Viável	x		
Ilimitado			x
Inviável		x	x

Dualidade

<u>Interpretação Econômica:</u> variáveis duais

Agora que sabemos como gerar o problema dual, temos acesso a interpretação econômica da solução

$$\begin{aligned} \max\ & c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N \\ \text{s.a.}\ & x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

Seja x^* uma S.B.V. ótima de P, logo:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z^* = c_B^T x_B^* = c_B^T B^{-1} b = y^{*T} b$$

onde y^* é ótimo de D

Dualidade

Agora que sabemos como gerar o problema dual, temos acesso a interpretação econômica da solução

$$\max\ c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{s.a.}\quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

Interpretação Econômica: variáveis duais

Seja x^* uma S.B.V. ótima de P, logo:

$$x^* = \begin{bmatrix} x_B^* \\ x_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad z^* = c_B^T x_B^* = c_B^T B^{-1} b = y^{*T} b$$

onde y^* é ótimo de D

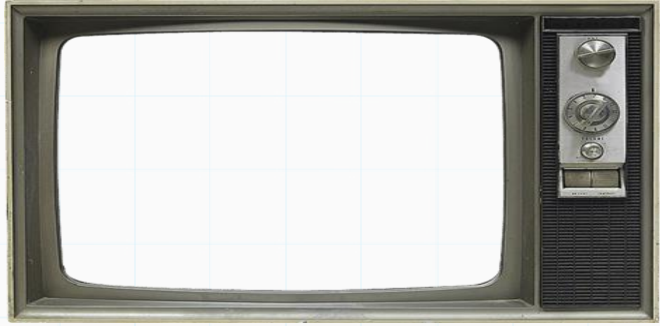
vamos supor que o dado de entrada b_k foi alterado para b_{k+1}, logo seja:

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix} + \underbrace{\boxed{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}}}_{e_k}$$

e vamos supor também que $B^{-1}\bar{b} \geq 0$

manteve a viabilidade primal

Dualidade



Interpretação Econômica: variáveis duais

variação

$$z^* = c_B^T B^{-1}\bar{b} = \boxed{y^{*T}\bar{b}} = y^{*T}(b + e_k) = \boxed{y^{*T}b} + \boxed{y_k^*}$$

f.o do dual

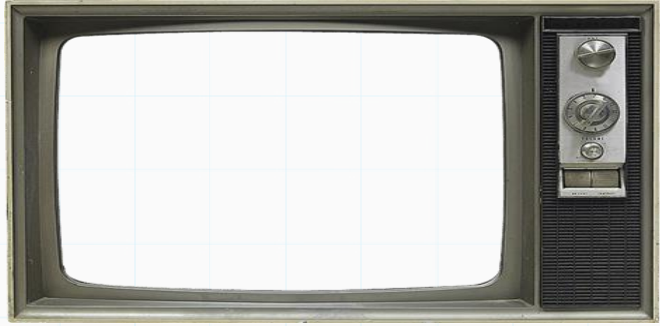
f.o original

$$\max\ c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$\text{s.a.} \quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

$$x_B, x_N \geq 0$$

Dualidade



Interpretação Econômica: variáveis duais

$$z^* = c_B^T B^{-1}\bar{b} = \underbrace{\boxed{y^{*T}\bar{b}}}_{\text{f.o do dual}} = y^{*T}(b+e_k) = \underbrace{\boxed{y^{*T}b}}_{\text{f.o original}} + \overset{\text{variação}}{\boxed{y_k^*}}$$

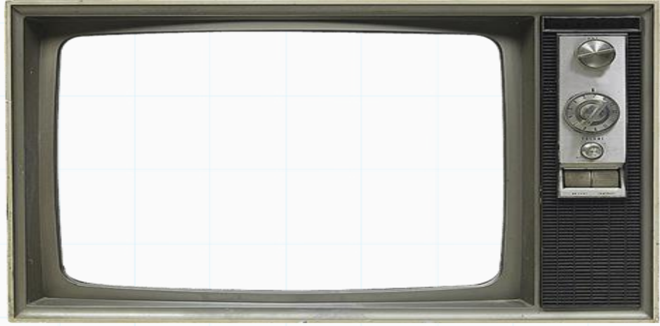
Podemos interpretar a variável dual y_k^* como sendo a variação de z^* (ganho ou perda) quando aumentamos 1 unidade na posição k de b.

$$\frac{\partial z}{\partial b_k} = y_k^*$$

o quanto varia z em relação a b_k

$$\begin{aligned} \max\ & c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N)x_N \\ \text{s.a.}\ & x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N \\ & x_B, x_N \geq 0 \end{aligned}$$

Dualidade



<u>Interpretação Econômica:</u> variáveis duais

variação

$$z^* = c_B^T B^{-1}\overline{b} = \boxed{y^{*T}\overline{b}} = y^{*T}(b + e_k) = \boxed{y^{*T}b} + \boxed{y_k^*}$$

f.o do dual

f.o original

Podemos interpretar a variável dual y_k^* como sendo a variação de z^* (ganho ou perda) quando aumentamos 1 unidade na posição k de b.

$$\frac{\partial z}{\partial b_k} = y_k^*$$

o quanto varia z em relação a b_k

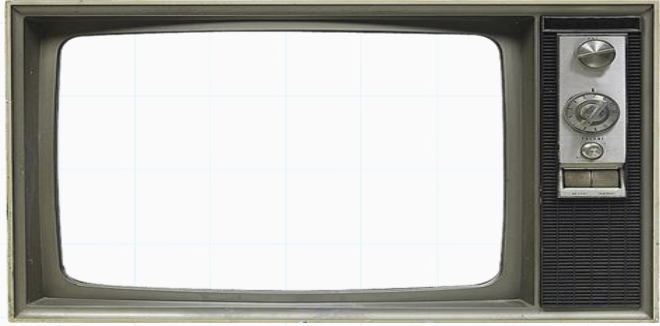
<u>custo marginal</u> (ou shadow price) de uma restrição k é a taxa de variação da f.o. em resposta a uma variação de b_k

$$\max\ c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$

$$\text{s.a.}\quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$

$$x_B, x_N \geq 0$$

Dualidade



Interpretação Econômica: variáveis duais

variação

$$z^* = c_B^T B^{-1}\overline{b} = \boxed{y^{*T}\overline{b}} = y^{*T}(b + e_k) = \boxed{y^{*T}b} + \boxed{y_k^*}$$

f.o do d

Muito legal, mas como vou saber os valores das variáveis duais ? Vou ter que resolver o problema dual também ?

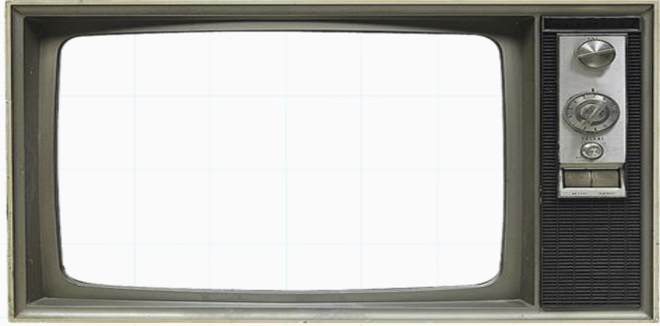
Podemos interpret ... iaçã
ou perda) quando ... de

o q ... a b_k

custo marginal (ou shadow price) de uma restrição k é a taxa de variação da f.o. em resposta a uma variação de b_k

$$\max\ c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N$$
$$\text{s.a.}\quad x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N$$
$$x_B, x_N \geq 0$$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

Sejam (P) $\max\ c^T x$ (D) $\min\ b^T y$

$$Ax \le b \qquad\qquad A^T y \ge c$$

$$x \ge 0 \qquad\qquad y \ge 0$$

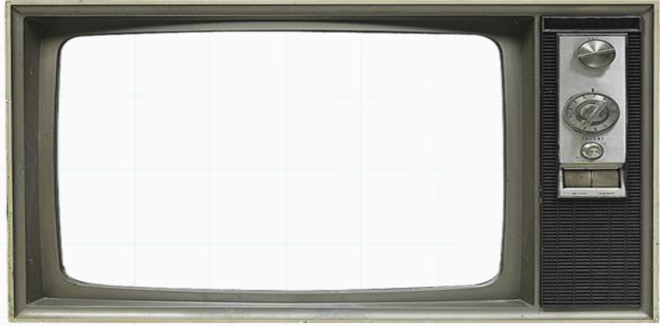
e sejam x^* uma solução ótima de (P) e y^* uma solução ótima de (D), então:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

Primal →	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Como encontrar o valor das vaiáveis duais, a partir das primais ?

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

Sejam

$$(P)\ \max\ c^T x \qquad\qquad (D)\ \min\ b^T y$$
$$Ax \leq b \qquad\qquad A^T y \geq c$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

e sejam x^* uma solução ótima de (P) e y^* uma solução ótima de (D), então:

$$y^{*T}(\boxed{b - Ax^*}) = 0 \text{ e } x^{*T}(\boxed{A^T y^* - c}) = 0$$

folga primal　　　　folga dual

Primal →	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Como encontrar o valor das vaiáveis duais, a partir das primais ?

Dualidade

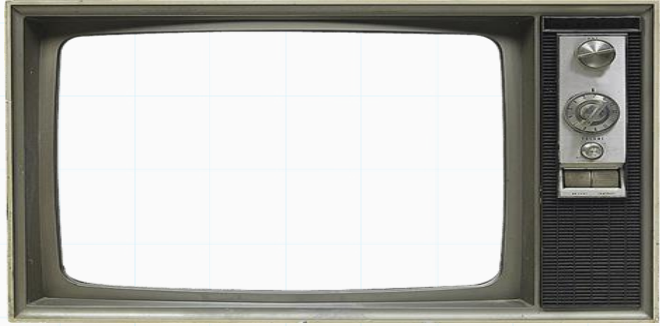
Teorema das folgas complementares:

Sejam $(P)\ \max\ c^T x$ $\qquad$ $(D)\ \min\ b^T y$

$$Ax \leq b \qquad\qquad A^T y \geq c$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

e sejam x^* uma solução ótima de (P) e y^* uma solução ótima de (D), então:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

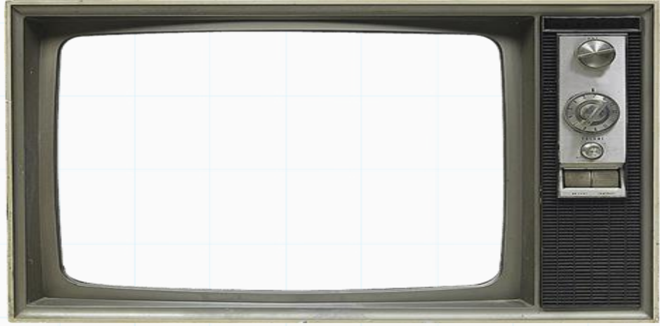


Primal	**Dual**
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Vemos que

$$Ax^* \leq b$$
$$x^{*T} A^T \leq b^T$$
$$x^{*T} A^T y^* \leq b^T y^* \quad (1)$$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

Sejam $(P)\ \max\ c^T x$ $\quad$ $(D)\ \min\ b^T y$

$$Ax \leq b \qquad A^T y \geq c$$

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

e sejam x^* uma solução ótima de (P) e y^* uma solução ótima de (D), então:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

Primal ➡	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

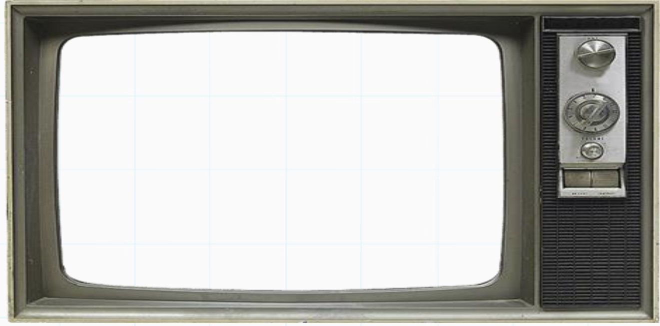
Vemos que

$$Ax^* \leq b \qquad A^T y^* \geq c$$

$$x^{*T} A^T \leq b^T \qquad x^{*T} A^T y^* \geq x^{*T} c \quad (2)$$

$$x^{*T} A^T y^* \leq b^T y^* \quad (1)$$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

Sejam $(P)\ \max\ c^T x$ $\quad$ $(D)\ \min\ b^T y$

$$Ax \leq b \qquad\qquad A^T y \geq c$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

e sejam x^* uma solução ótima de (P) e y^* uma solução ótima de (D), então:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

Primal ➡	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Vemos que

$$Ax^* \leq b$$

$$x^{*T}A^T \leq b^T$$

$$x^{*T}A^T y^* \leq b^T y^* \quad (1)$$

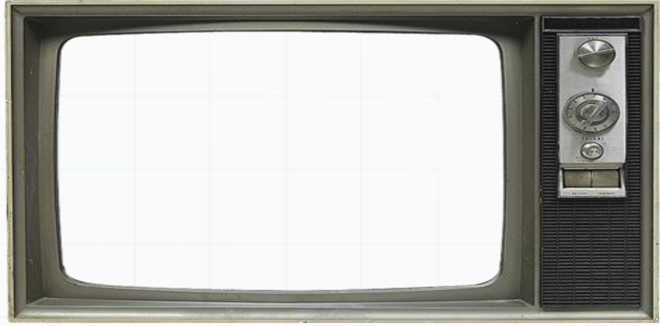
$$A^T y^* \geq c$$

$$x^{*T}A^T y^* \geq x^{*T} c \quad (2)$$

por (1) e (2) temos

$$x^{*T} c \leq x^{*T}A^T y^* \leq b^T y^* \quad (3)$$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

Sejam (P) $\max\ c^T x$ $\quad$ (D) $\min\ b^T y$

$$Ax \leq b \qquad\qquad A^T y \geq c$$

$$x \geq 0 \qquad\qquad y \geq 0$$

e sejam x^* uma solução ótima de (P) e y^* uma solução ótima de (D), então:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

Primal	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Vemos que

$$Ax^* \leq b \qquad\qquad A^T y^* \geq c$$

$$x^{*T} A^T \leq b^T \qquad\qquad x^{*T} A^T y^* \geq x^{*T} c \quad (2)$$

$$x^{*T} A^T y^* \leq b^T y^* \quad (1)$$

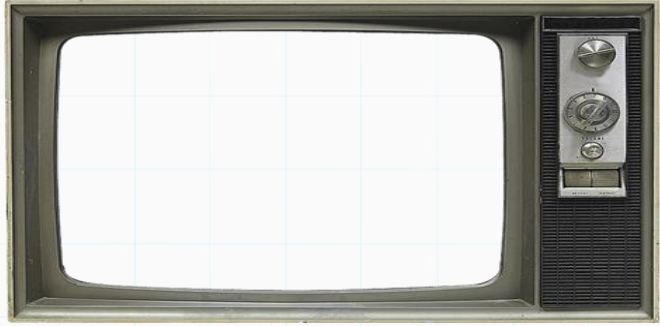
por (1) e (2) temos

$$x^{*T} c \leq x^{*T} A^T y^* \leq b^T y^* \quad (3)$$

como x^* e y^* são ótimos (com mesmo valor de f.o.) temos por

$$\boxed{x^{*T} c = x^{*T} A^T y^* = b^T y^*}$$

Dualidade

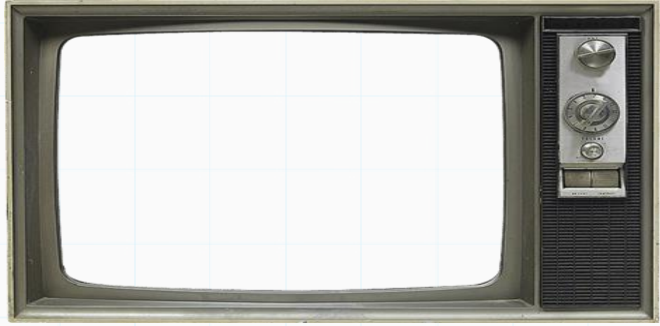


Teorema das folgas complementares:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^Ty^* - c) = 0$$

$$\boxed{x^{*T}c = x^{*T}A^Ty^*} = b^Ty^*$$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^Ty^* - c) = 0$$

$$\boxed{x^{*T}c = x^{*T}A^Ty^*} = b^Ty^*$$

$$x^{*T}c - x^{*T}A^Ty^* = 0$$

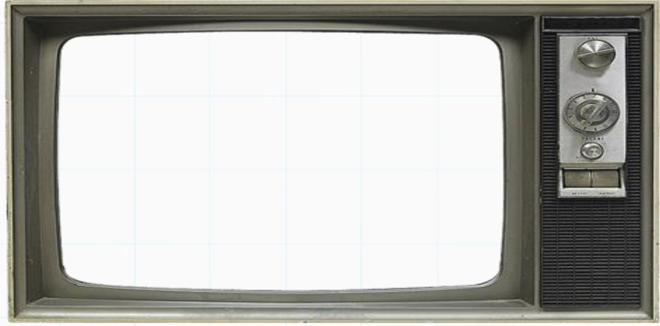
$$x^{*T}A^Ty^* - x^{*T}c = 0$$

$$\boxed{x^{*T}(A^Ty^* - c) = 0 \quad (4)}$$

Dualidade

Teorema das folgas complementares:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$



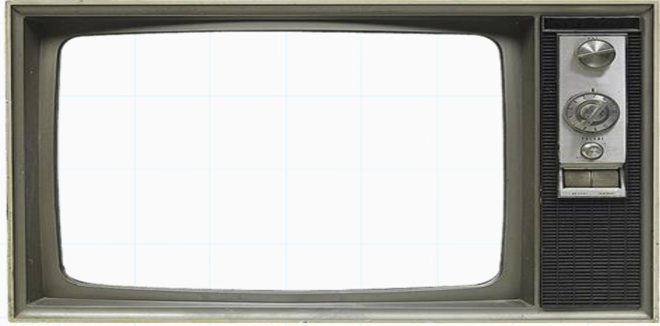
$$x^{*T}c = x^{*T}A^T y^* = b^T y^*$$

$$x^{*T}c - x^{*T}A^T y^* = 0$$

$$x^{*T}A^T y^* - x^{*T}c = 0$$

$$\boxed{x^{*T}(A^T y^* - c) = 0 \quad (4)}$$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

$$x^{*T}c = x^{*T}A^T y^* = b^T y^*$$

$$x^{*T}c - x^{*T}A^T y^* = 0$$

$$x^{*T}A^T y^* - x^{*T}c = 0$$

$$\boxed{x^{*T}(A^T y^* - c) = 0 \quad (4)}$$

$$b^T y^* - x^{*T}A^T y^* = 0$$

$$(b^T - x^{*T}A^T)y^* = 0$$

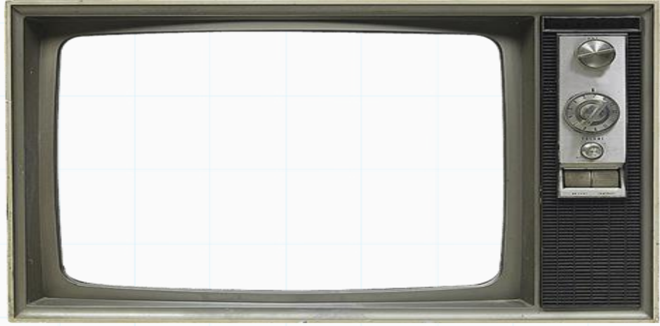
$$y^{*T}(b^T - x^{*T}A^T)^T = 0$$

$$y^{*T}(b - [x^{*T}A^T]^T) = 0$$

$$\boxed{y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \quad (5)}$$

$\blacksquare$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

$$x^{*T}c = x^{*T}A^T y^* = b^T y^*$$

$$x^{*T}c - x^{*T}A^T y^* = 0$$

$$x^{*T}A^T y^* - x^{*T}c = 0$$

$$\boxed{x^{*T}(A^T y^* - c) = 0 \quad (4)}$$

$$b^T y^* - x^{*T}A^T y^* = 0$$

$$(b^T - x^{*T}A^T)y^* = 0$$

$$y^{*T}(b^T - x^{*T}A^T)^T = 0$$

$$y^{*T}(b - [x^{*T}A^T]^T) = 0$$

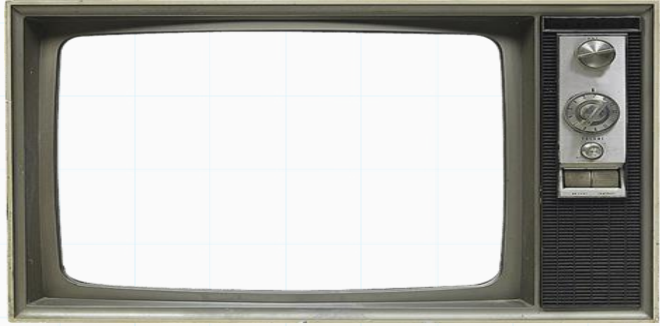
$$\boxed{y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \quad (5)}$$

Além disso, em (4) temos que $x^* \geq 0$ e $(A^T y^* - c) \geq 0$, logo:

$$x_j^*.(A^T y^* - c)_j = 0, \quad \forall j = 1...n$$

cada termo é nulo

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^Ty^* - c) = 0$$

$$x^{*T}c = x^{*T}A^Ty^* = b^Ty^*$$

$$x^{*T}c - x^{*T}A^Ty^* = 0$$

$$x^{*T}A^Ty^* - x^{*T}c = 0$$

$$\boxed{x^{*T}(A^Ty^* - c) = 0 \quad (4)}$$

$$b^Ty^* - x^{*T}A^Ty^* = 0$$

$$(b^T - x^{*T}A^T)y^* = 0$$

$$y^{*T}(b^T - x^{*T}A^T)^T = 0$$

$$y^{*T}(b - [x^{*T}A^T]^T) = 0$$

$$\boxed{y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \quad (5)}$$

Além disso, em (4) temos que $x^* \geq 0$ e $(A^Ty^* - c) \geq 0$, logo:

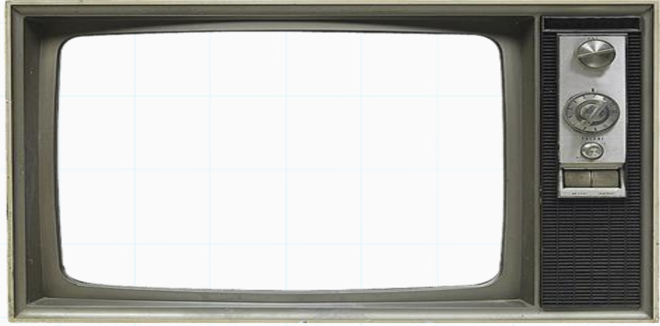
$$x_j^*.(\boxed{A^Ty^* - c})_j = 0, \quad \forall j = 1...n$$

cada termo é nulo

denominar folga de s

$$x_j^*.s_j = 0, \quad \forall j = 1...n$$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

$$x^{*T}c = x^{*T}A^T y^* = b^T y^*$$

$$b^T y^* - x^{*T}A^T y^* = 0$$

$$(b^T - x^{*T}A^T)y^* = 0$$

$$y^{*T}(b^T - x^{*T}A^T)^T = 0$$

$$y^{*T}(b - [x^{*T}A^T]^T) = 0$$

$$\boxed{y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \quad (5)}$$

$$x^{*T}c - x^{*T}A^T y^* = 0$$

$$x^{*T}A^T y^* - x^{*T}c = 0$$

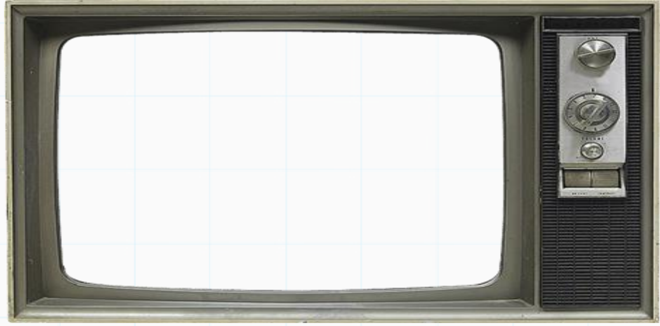
$$\boxed{x^{*T}(A^T y^* - c) = 0 \quad (4)}$$

de forma similar em (5) temos que $y^* \geq 0$ e $(b - Ax^*) \geq 0$, logo:

$$y_j^*.(b - Ax^*)_j = 0, \quad \forall j = 1 \ldots m$$

cada termo é nulo

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

$$x^{*T}c = x^{*T}A^T y^* = b^T y^*$$

$$x^{*T}c - x^{*T}A^T y^* = 0$$

$$x^{*T}A^T y^* - x^{*T}c = 0$$

$$\boxed{x^{*T}(A^T y^* - c) = 0 \quad (4)}$$

$$b^T y^* - x^{*T}A^T y^* = 0$$

$$(b^T - x^{*T}A^T)y^* = 0$$

$$y^{*T}(b^T - x^{*T}A^T)^T = 0$$

$$y^{*T}(b - [x^{*T}A^T]^T) = 0$$

$$\boxed{y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \quad (5)}$$

de forma similar em (5) temos que $y^* \geq 0$ e $(b - Ax^*) \geq 0$, logo:

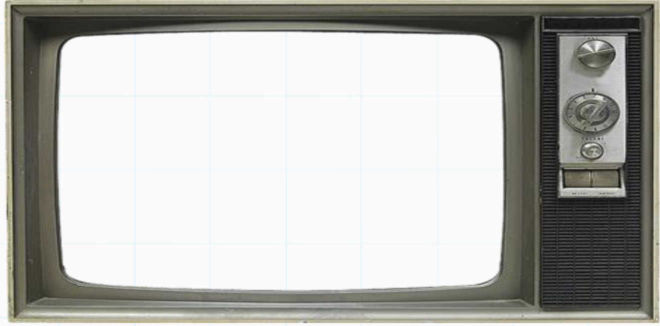
$$y_j^* . (\boxed{b - Ax^*})_j = 0, \quad \forall j = 1 \ldots m$$

cada termo é nulo

denominar folga de v

$$y_j^* . v_j = 0, \quad \forall j = 1 \ldots m$$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

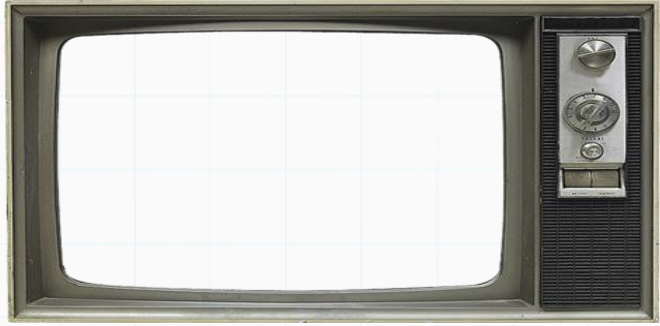
$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

Logo, temos que:

$$x_j^*.s_j = 0, \quad \forall j = 1...n$$

$$y_j^*.v_j = 0, \quad \forall j = 1...m$$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

Logo, temos que:

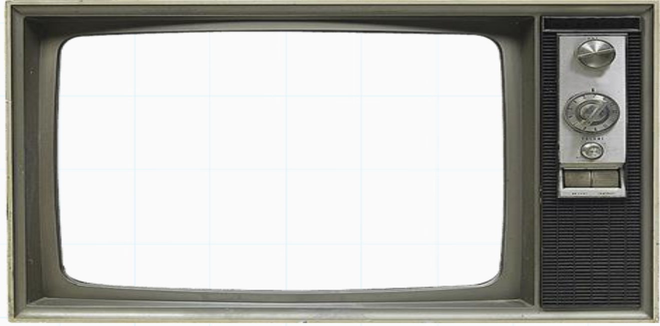
$$x_j^*.s_j = 0, \quad \forall j = 1...n$$

$$y_j^*.v_j = 0, \quad \forall j = 1...m$$

Onde: Em uma solução ótima x^* de P, se $x_j^* \neq 0$ implica que a folga s_j associada a x_j é 0.

$$x_j^* \neq 0 \rightarrow s_j = 0$$

Dualidade



Teorema das folgas complementares:

$$y^{*T}(b - Ax^*) = 0 \text{ e } x^{*T}(A^T y^* - c) = 0$$

Logo, temos que:

$$x_j^* . s_j = 0, \quad \forall j = 1 \ldots n$$

$$y_j^* . v_j = 0, \quad \forall j = 1 \ldots m$$

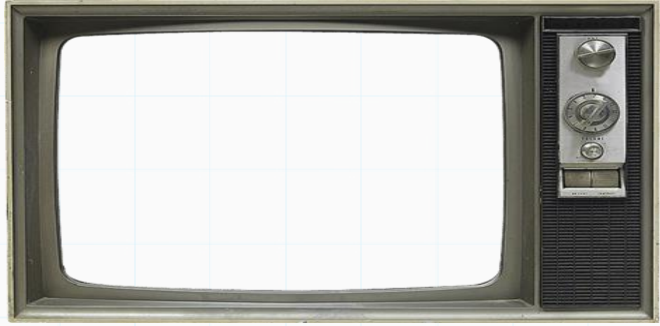
Onde: Em uma solução ótima x^* de P, se $x_j^* \neq 0$ implica que a folga s_j associada a x_j é 0.

$$x_j^* \neq 0 \rightarrow s_j = 0$$

Em uma solução ótima y^* de D, se $y_j^* \neq 0$ implica que a folga v_j associada a y_j é 0.

$$y_j^* \neq 0 \rightarrow v_j = 0$$

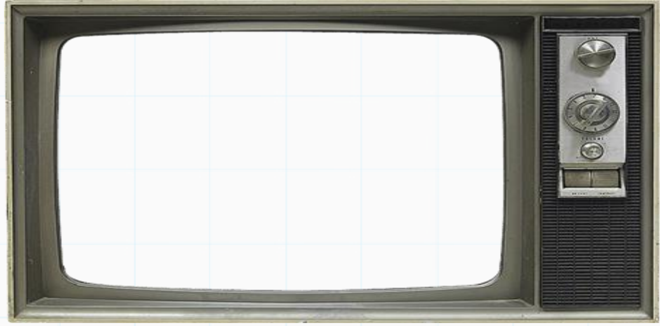
Dualidade



Exemplo: $\max \quad x_1 + 2x_2$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 6 \qquad (1)\\
x_1 + x_2 &\leq 4 \qquad (2)\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Dualidade

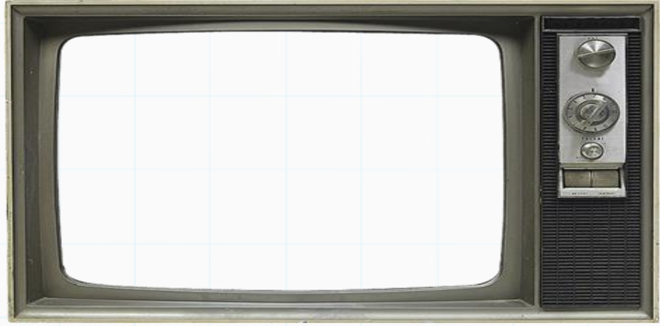


Exemplo: $\max \quad x_1 + 2x_2$

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 &\leq 6 \qquad (1)\\
x_1 + x_2 &\leq 4 \qquad (2)\\
x_1, x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

Vimos anteriormente que o PPL tem solução ótima $x_1 = 0, x_2 = 4$ com $z = 8$, então qual a sua solução dual ótima ?

Dualidade



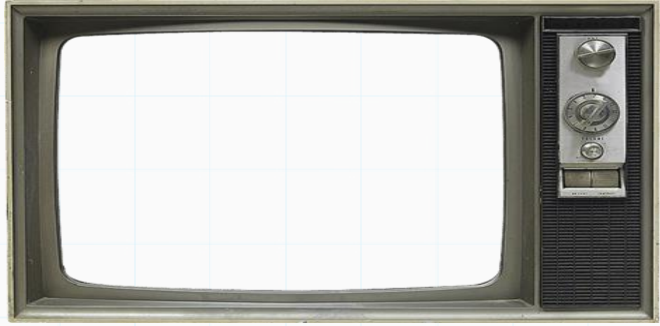
Exemplo: $$\max \; x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6 \qquad (1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \qquad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Vimos anteriormente que o PPL tem solução ótima $x_1 = 0, x_2 = 4$ com $z = 8$, então qual a sua solução dual ótima ?

colocando as folgas temos:

O que leva a solução

Dualidade



Exemplo: $\max \; x_1 + 2x_2$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Vimos anteriormente que o PPL tem solução ótima $x_1 = 0, x_2 = 4$ com $z = 8$, então qual a sua solução dual ótima ?

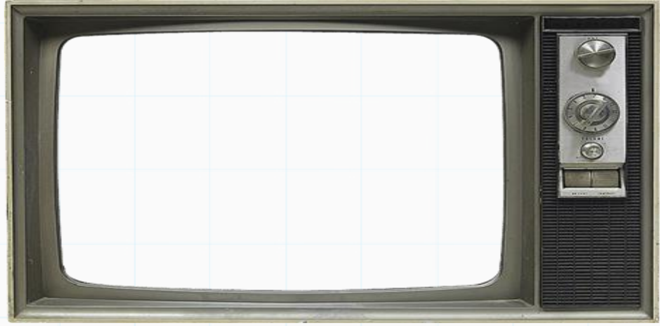
colocando as folgas temos:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

O que leva a solução

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0$$

Dualidade



Exemplo: $\max \; x_1 + 2x_2$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Vimos anteriormente que o PPL tem solução ótima $x_1 = 0, x_2 = 4$ com $z = 8$, então qual a sua solução dual ótima ?

colocando as folgas temos: $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

O que leva a solução

$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0$$

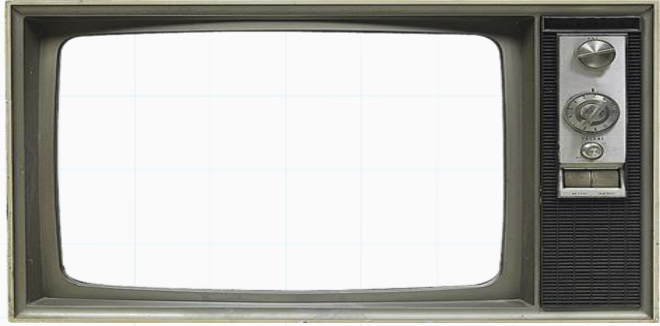
O dual de P é:

Sempre colocamos na forma padrão antes de gerar o dual: Max, Ax<=b e x>=0

$$\begin{array}{l} \max \; c^T x \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \\ x \in R^n \end{array} \quad \xrightarrow{\text{dual}} \quad \begin{array}{l} \min \; b^T y \\ A^T y \geq c \\ y \geq 0 \\ y \in R^m \end{array}$$

Primal	**Dual**
max	min
rest. $\leq$	var. ≥ 0
rest. $\geq$	var. ≤ 0
rest. =	var. livre
var. ≥ 0	rest. $\geq$
var. livre	rest. =

Dualidade



Exemplo: $\max \; x_1 + 2x_2$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Vimos anteriormente que o PPL tem solução ótima $x_1 = 0, x_2 = 4$ com $z = 8$, então qual a sua solução dual ótima ?

colocando as folgas temos: $2x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

O que leva a solução

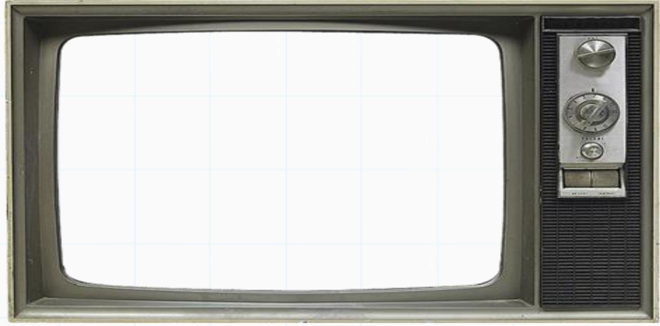
$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0$$

O dual de P é: $\min \; 6y_1 + 4y_2$

$$2y_1 + y_2 \geq 1 \quad (3)$$
$$y_1 + y_2 \geq 2 \quad (4)$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

Primal	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Dualidade



Exemplo: $\max \; x_1 + 2x_2$

$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Vimos anteriormente que o PPL tem solução ótima $x_1 = 0, x_2 = 4$ com $z = 8$, então qual a sua solução dual ótima ?

colocando as folgas temos:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

O que leva a solução

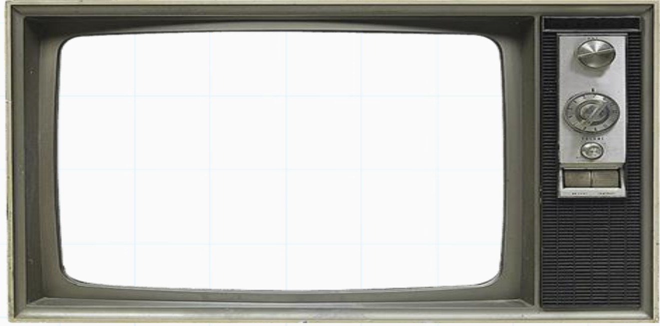
$$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0$$

O dual de P é: $\min \; 6y_1 + 4y_2$

$$2y_1 + y_2 \geq 1 \quad (3)$$
$$y_1 + y_2 \geq 2 \quad (4)$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

colocando as folgas temos:

Dualidade



Exemplo: $$\max \ x_1 + 2x_2$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Vimos anteriormente que o PPL tem solução ótima $x_1 = 0, x_2 = 4$ com $z = 8$, então qual a sua solução dual ótima ?

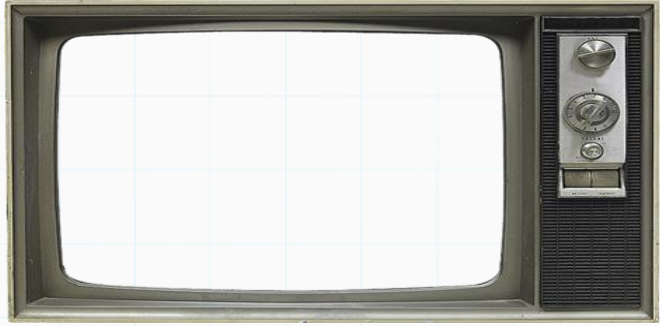
colocando as folgas temos: $$2x_1 + x_2 + x_3 = 6$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 4$$

O que leva a solução $$x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0$$

O dual de P é: $$\min \ 6y_1 + 4y_2$$
$$2y_1 + y_2 \geq 1 \quad (3)$$
$$y_1 + y_2 \geq 2 \quad (4)$$
$$y_1, y_2 \geq 0$$

colocando as folgas temos:
$$2y_1 + y_2 - y_3 = 1 \quad (5)$$
$$y_1 + y_2 - y_4 = 2 \quad (6)$$

Dualidade



Exemplo:

Primal

$$\boxed{\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 4 \end{array}}$$

Dual

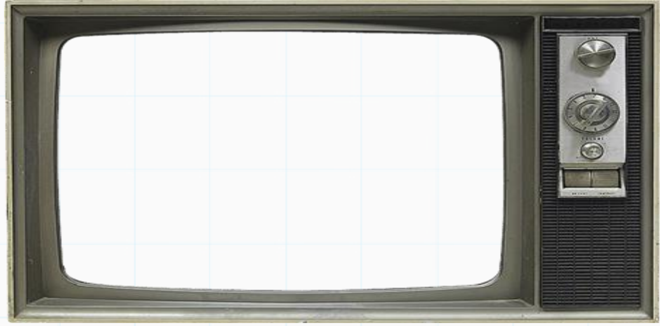
$$\boxed{\begin{array}{ll} 2y_1 + y_2 - y_3 = 1 & (5) \\ y_1 + y_2 - y_4 = 2 & (6) \end{array}}$$

Sol Primal

$$\boxed{x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0}$$

pelo teorema das folgas temos:

Dualidade



Exemplo:

Primal

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}}$$

Dual

$$\boxed{\begin{aligned} 2y_1 + y_2 - y_3 &= 1 \qquad (5) \\ y_1 + y_2 - y_4 &= 2 \qquad (6) \end{aligned}}$$

Sol Primal

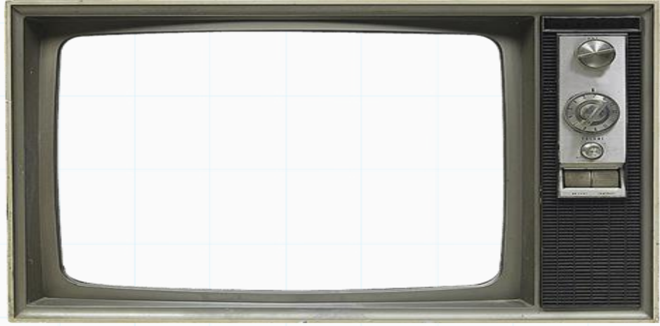
$$\boxed{x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0}$$

pelo teorema das folgas temos:

$$x_1 . y_3 = 0$$
$$x_2 . y_4 = 0$$

$$y_1 . x_3 = 0$$
$$y_2 . x_4 = 0$$

Dualidade



Exemplo:

Primal

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}}$$

Dual

$$\boxed{\begin{aligned} 2y_1 + y_2 - y_3 &= 1 \quad (5) \\ y_1 + y_2 - y_4 &= 2 \quad (6) \end{aligned}}$$

Sol Primal

$$\boxed{x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0}$$

pelo teorema das folgas temos:

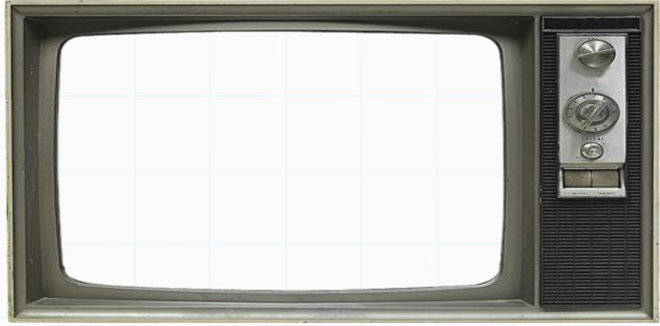
$$x_1.y_3 = 0$$

$$x_2.y_4 = 0 \qquad \text{como } x_2 = 4 \text{ então } \boxed{y_4 = 0}$$

$$y_1.x_3 = 0 \qquad \text{como } x_3 = 2 \text{ então } \boxed{y_1 = 0}$$

$$y_2.x_4 = 0$$

Dualidade



Exemplo:

Primal

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}}$$

Dual

$$\boxed{\begin{aligned} 2y_1 + y_2 - y_3 &= 1 \qquad (5) \\ y_1 + y_2 - y_4 &= 2 \qquad (6) \end{aligned}}$$

Sol Primal

$$\boxed{x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0}$$

pelo teorema das folgas temos:

$$x_1.y_3 = 0$$

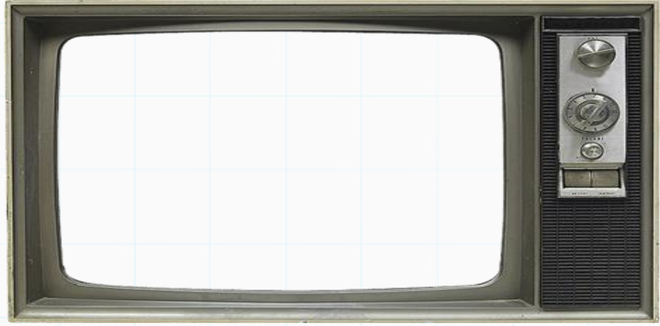
$$x_2.y_4 = 0 \qquad \text{como } x_2 = 4 \text{ então } \boxed{y_4 = 0}$$

$$y_1.x_3 = 0 \qquad \text{como } x_3 = 2 \text{ então } \boxed{y_1 = 0}$$

$$y_2.x_4 = 0$$

basta agora resolver o sistema em (5) e (6) para saber as demais variáveis:

Dualidade



Exemplo:

Primal

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}}$$

Dual

$$\boxed{\begin{aligned} 2y_1 + y_2 - y_3 &= 1 \qquad (5) \\ y_1 + y_2 - y_4 &= 2 \qquad (6) \end{aligned}}$$

Sol Primal

$$\boxed{x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0}$$

pelo teorema das folgas temos:

$$x_1 . y_3 = 0$$

$$x_2 . y_4 = 0 \qquad \text{como } x_2 = 4 \text{ então } \boxed{y_4 = 0}$$

$$y_1 . x_3 = 0 \qquad \text{como } x_3 = 2 \text{ então } \boxed{y_1 = 0}$$

$$y_2 . x_4 = 0$$

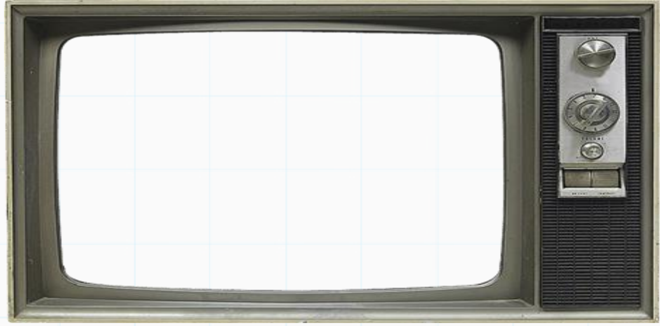
basta agora resolver o sistema em (5) e (6) para saber as demais variáveis:

Por (6)

$$(0) + y_2 - (0) = 2$$

$$\boxed{y_2 = 2}$$

Dualidade



Exemplo:

Primal

$$\boxed{\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \end{aligned}}$$

Dual

$$\boxed{\begin{aligned} 2y_1 + y_2 - y_3 &= 1 \qquad (5) \\ y_1 + y_2 - y_4 &= 2 \qquad (6) \end{aligned}}$$

Sol Primal

$$\boxed{x_1 = 0, x_2 = 4, x_3 = 2, x_4 = 0}$$

pelo teorema das folgas temos:

$$x_1.y_3 = 0$$

$$x_2.y_4 = 0 \qquad \text{como } x_2 = 4 \text{ então } \boxed{y_4 = 0}$$

$$y_1.x_3 = 0 \qquad \text{como } x_3 = 2 \text{ então } \boxed{y_1 = 0}$$

$$y_2.x_4 = 0$$

basta agora resolver o sistema em (5) e (6) para saber as demais variáveis:

Por (6)

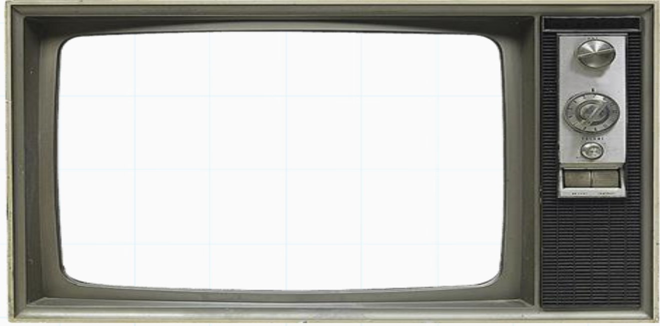
$$(0) + y_2 - (0) = 2$$

$$\boxed{y_2 = 2}$$

Por (5)

$$2(0) + y_2 - y_3 = 1 \rightarrow 2 - y_3 = 1 \rightarrow \boxed{y_3 = 1}$$

Dualidade



concluimos que encontrar a solução ótima de P equivale a solucionar o sistema:

$$x^T(A^T y - c) = 0$$
$$y^T(b - Ax) = 0$$

Teorema das folgas

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

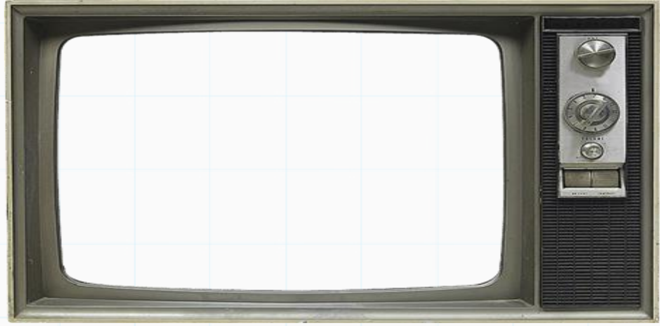
Primal Viabilidade

$$A^T y \geq c$$
$$y \geq 0$$

Dual Viabilidade

Com a teoria da dualidade agora podemos TRANSFORMAR um PPL em um sistema de inequações

Dualidade



concluimos que encontrar a solução ótima de P equivale a solucionar o sistema:

$$x^T(A^T y - c) = 0$$
$$y^T(b - Ax) = 0$$

Teorema das folgas

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

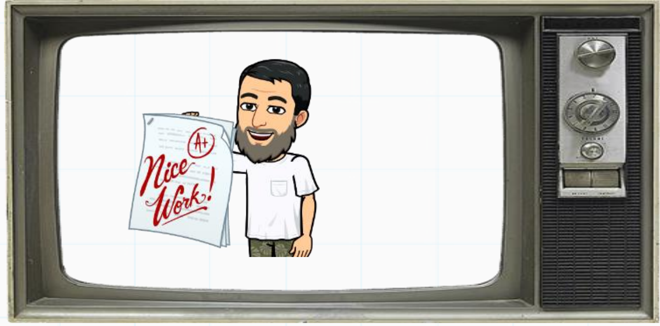
Primal Viabilidade

$$A^T y \geq c$$
$$y \geq 0$$

Dual Viabilidade

Note que dado uma base B_{mxm} que induz uma solução básica primal (vértice) $\overline{x} = \begin{bmatrix} B^{-1}b \\ 0 \end{bmatrix}$ (viável ou não), também induz uma solução dual $\overline{y} = c_B^T B^{-1}$ (viável ou não).

Exercícios



Gostaria de fazer uma Interpretação econômica no problema, mas preciso da solução DUAL.
Vamos descobrir com o teorema das folgas ?

$$
\begin{aligned}
(P)\ \min \quad & 4X_1 + 5X_2 + 2X_3 \\
\text{s.a.} \quad & X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 6 \\
& 2X_1 - X_2 + 4X_3 \leq 2 \\
& X_1, X_2, X_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\text{solução ótima}: \ X_1 = 0,\ X_2 = 22/9 \text{ e } X_3 = 10/9$$

1) Gera o DUAL de P
2) Coloque as folgas no Primal e Dual
3) Construa as equações das folgas complementares
4) Determine solução DUAL

Lembrando:

Primal

$$
\begin{aligned}
& \max\ c^T x \\
& \quad Ax \leq b \\
& \quad x \geq 0 \\
& \quad x \in R^n
\end{aligned}
$$

Dual

$$
\begin{aligned}
& \min\ b^T y \\
& \quad A^T y \geq c \\
& \quad y \geq 0 \\
& \quad y \in R^m
\end{aligned}
$$

Primal	Dual
max	min
rest. ≤	var. ≥0
rest. ≥	var. ≤0
rest. =	var. livre
var. ≥0	rest. ≥
var. livre	rest. =

Teorema das folgas:

$$x_j^* . s_j = 0, \quad \forall j = 1 \ldots n$$

$$y_j^* . v_j = 0, \quad \forall j = 1 \ldots m$$

Ex: a primeira variável primal vezes a primeira folga dual = 0
a segunda variável primal vezes a segunda folga dual = 0
...
a primeira variável dual vezes a primeira folga primal = 0

Até a próxima