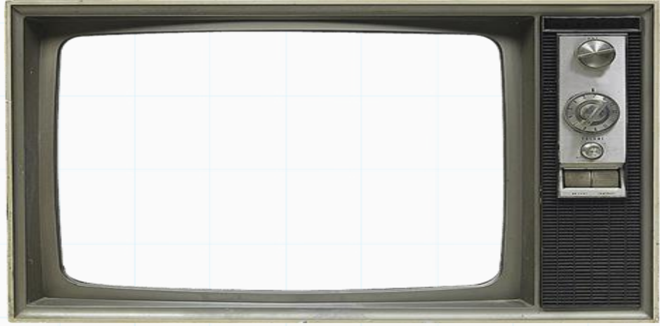
Formulações Clássicas



Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pi.html

yuri@ic.uff.br

Formulações Clássicas

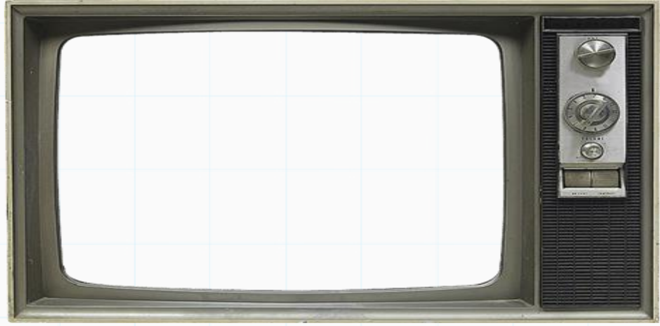
- Problema do caminho mínimo:

- Mário :
  - Bombeiro italiano bigodudo

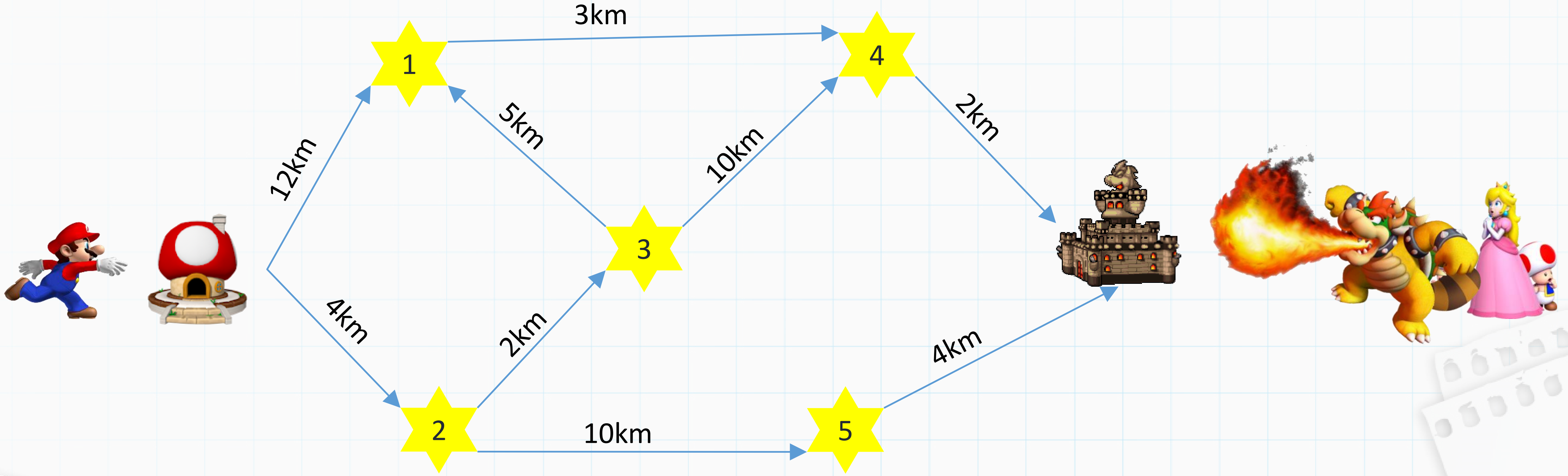
- Princesa Cogumelo
  - Realeza, fácil de sequestrar

- Bowser
  - Tartaruga ruiva incompreendida

Formulações Clássicas



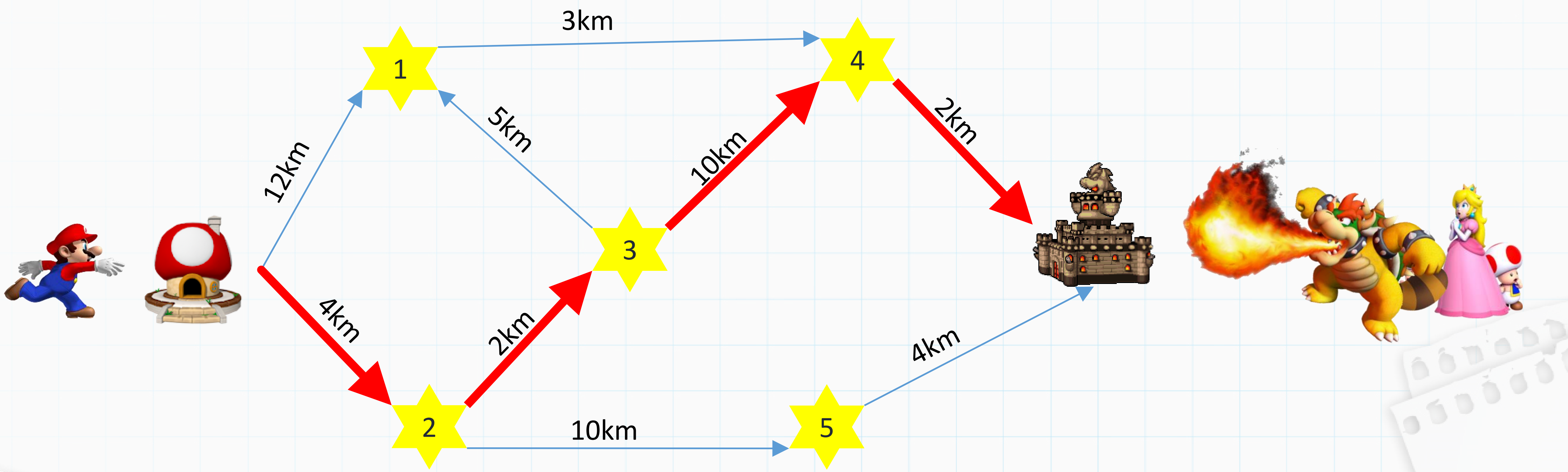
- Problema do caminho mínimo:



Problema: Mário tem que sair do cogumelo e chegar no castelo para resgatar a princesa percorrendo o menor trajeto possível

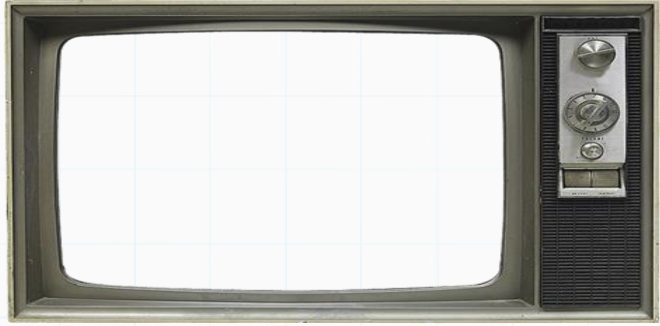
Formulações Clássicas

- Problema do caminho mínimo:

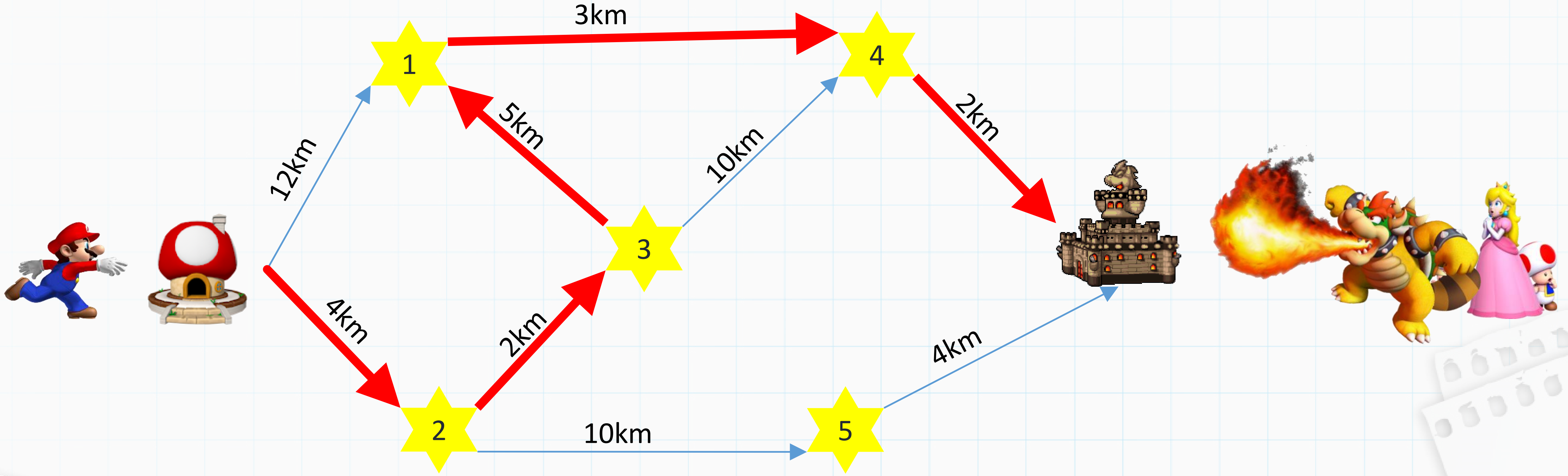


Sol = 18

Formulações Clássicas

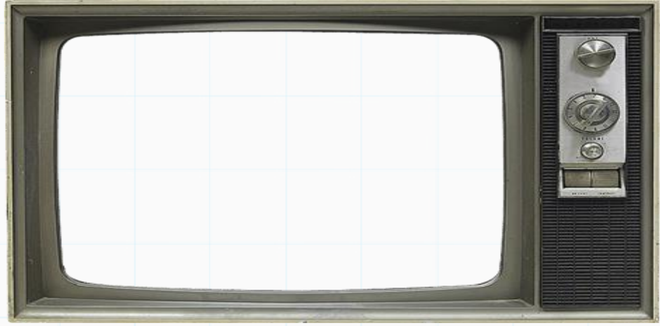


- Problema do caminho mínimo:



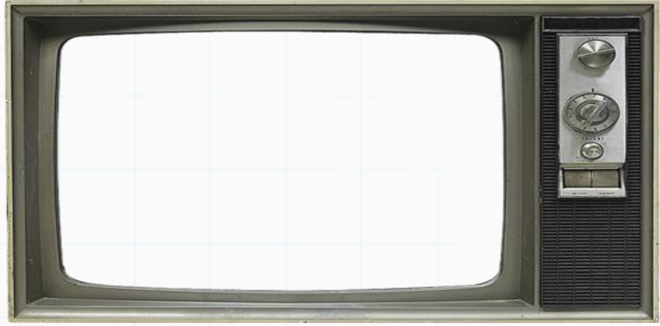
Sol = 16

Formulações Clássicas



- Vamos definir $G=(V,A)$, grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

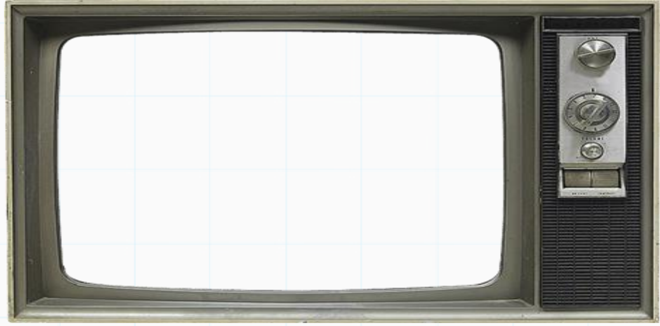
Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

Formulações Clássicas

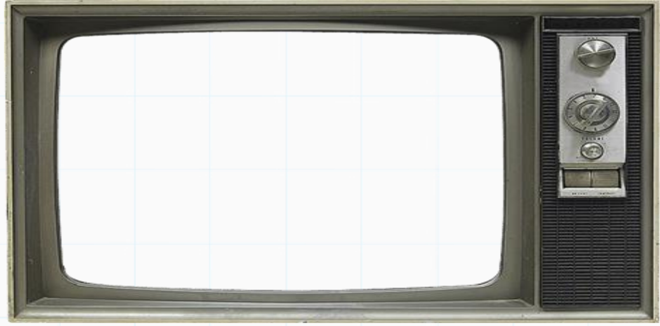


- Vamos definir $G=(V,A)$, grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

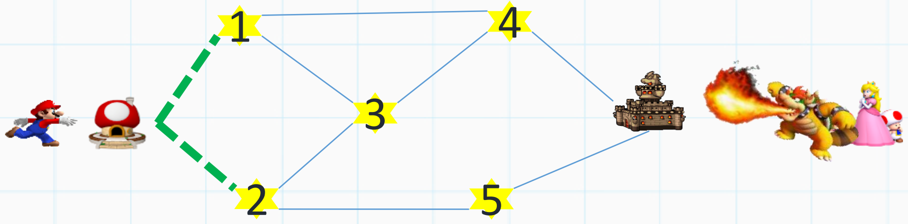
Formulações Clássicas



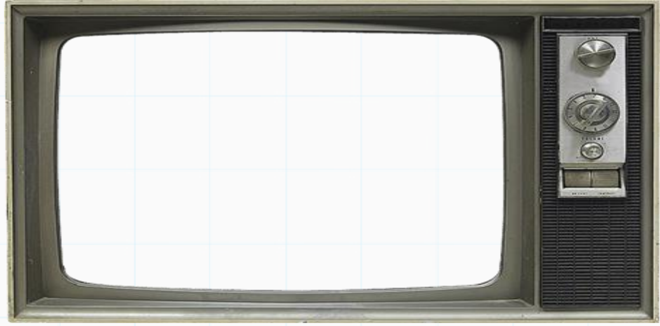
- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:
  - x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

- Restrições:
  - Origem (vamos chamar de vértice s)



Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

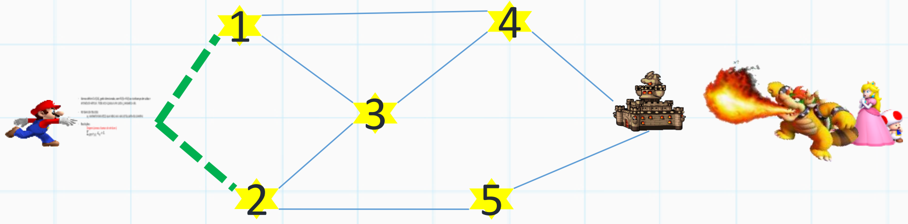
- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

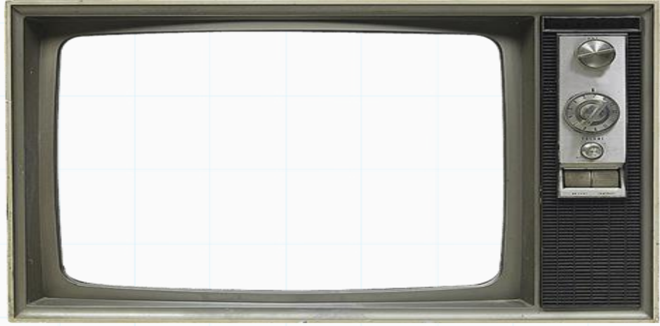
- Restrições:

  Origem (vamos chamar de vértice s)

  $$\sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = 1$$



Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

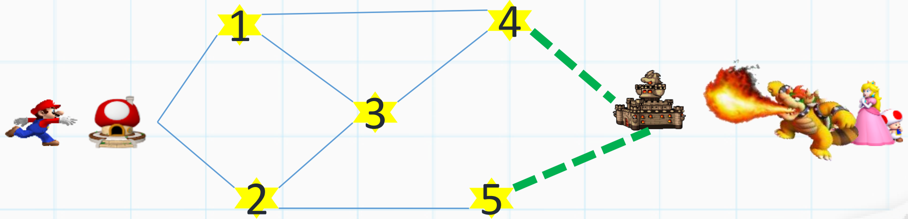
  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

- Restrições:

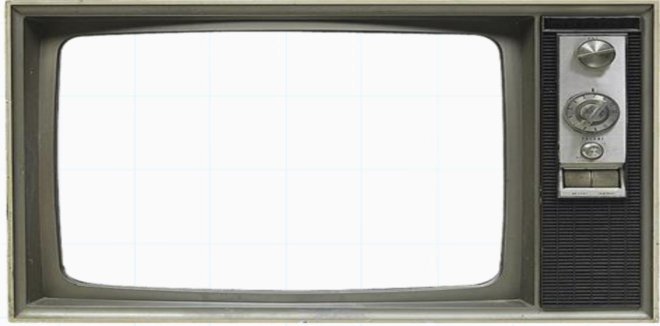
  Origem (vamos chamar de vértice s)

  $$\sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = 1$$

  Destino (vamos chamar de vértice t)



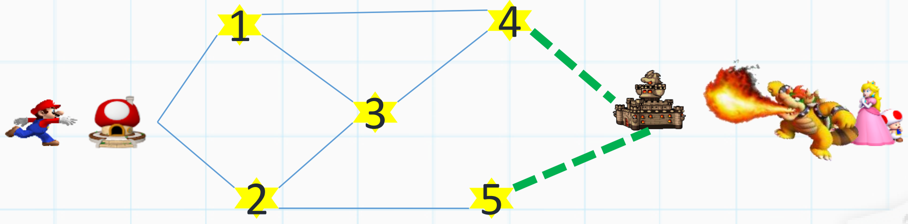
Formulações Clássicas



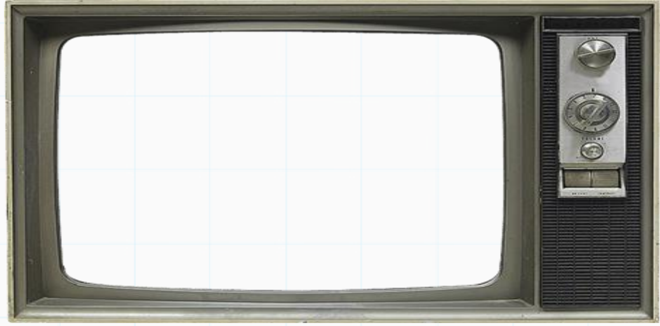
- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:
  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

- Restrições:
  Origem (vamos chamar de vértice s)
  $$\sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = 1$$
  Destino (vamos chamar de vértice t)
  $$\sum_{j \in N^-(t)} x_{jt} = 1$$



Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

- Restrições:

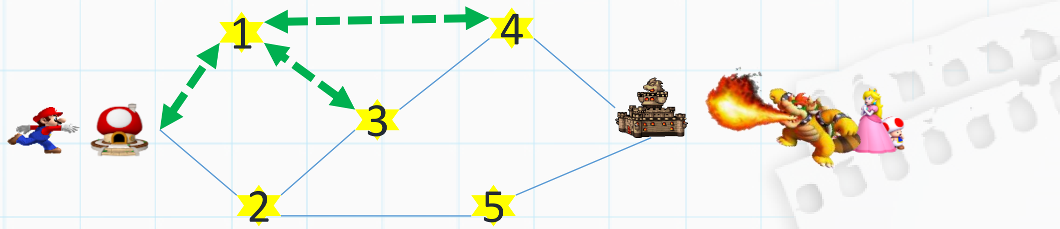
  Origem (vamos chamar de vértice s)

  $$\sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = 1$$

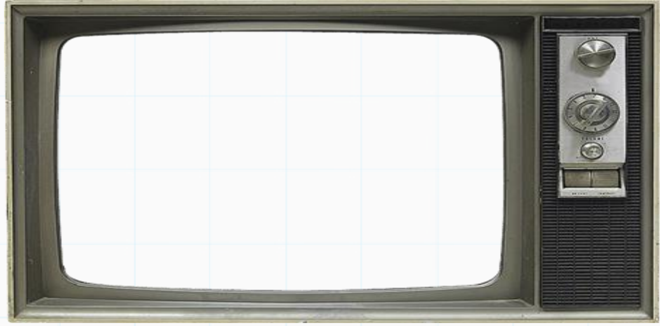
  Destino (vamos chamar de vértice t)

  $$\sum_{j \in N^-(t)} x_{jt} = 1$$

  Conservação de fluxo para todo vértice i (fora s e t)



Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

- Restrições:

  Origem (vamos chamar de vértice s)

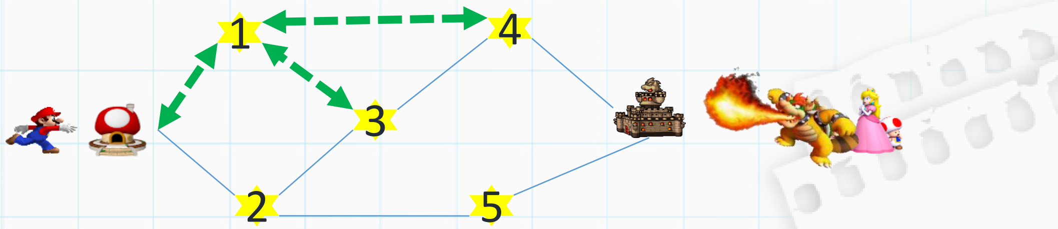
  $$\sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = 1$$

  Destino (vamos chamar de vértice t)

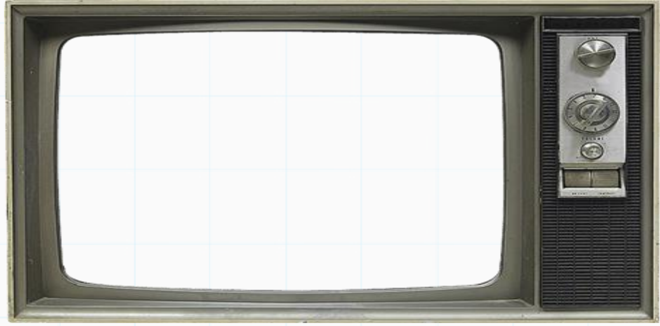
  $$\sum_{j \in N^-(t)} x_{jt} = 1$$

  Conservação de fluxo para todo vértice i (fora s e t)

  $$\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} = 0$$



Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

É viável ?

- Restrições:

  Origem (vamos chamar de vértice s)

  $$\sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = 1$$

  Destino (vamos chamar de vértice t)

  $$\sum_{j \in N^-(t)} x_{jt} = 1$$

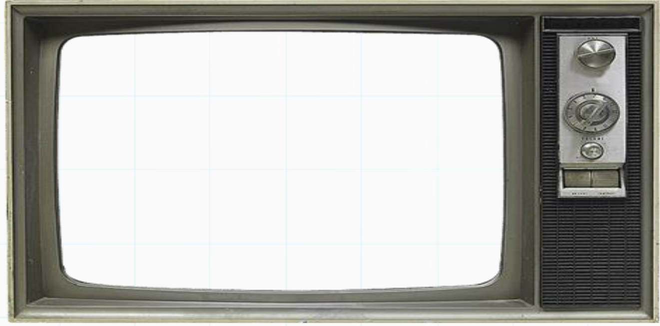
  Conservação de fluxo para todo vértice i (fora s e t)

  $$\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} = 0$$

  Binaridade

  $x_{ij} \in \{0,1\}$ 0, para todo arco ij pertencente a A

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

É viável ?

- Restrições:

  Origem (vamos chamar de vértice s)

  $$\sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = 1$$

  Destino (vamos chamar de vértice t)

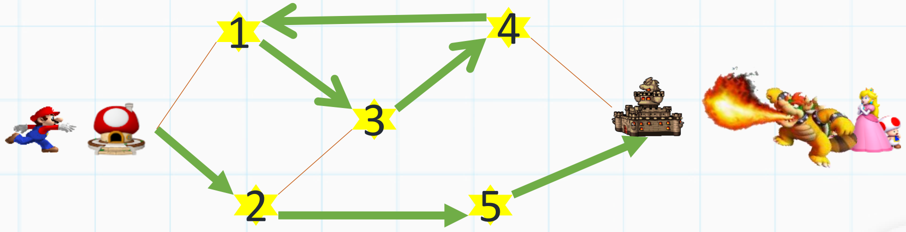
  $$\sum_{j \in N^-(t)} x_{jt} = 1$$

  Conservação de fluxo para todo vértice i (fora s e t)

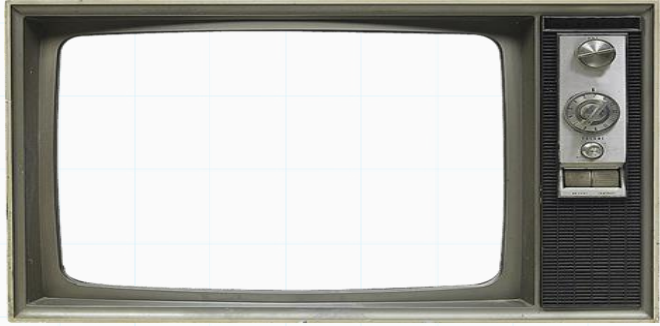
  $$\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} = 0$$

  Binaridade

  $x_{ij} \in \{0,1\}$ 0, para todo arco ij pertencente a A



Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

É viável ?

- Restrições:

  Origem (vamos chamar de vértice s)

  $$\sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = 1$$

  Destino (vamos chamar de vértice t)

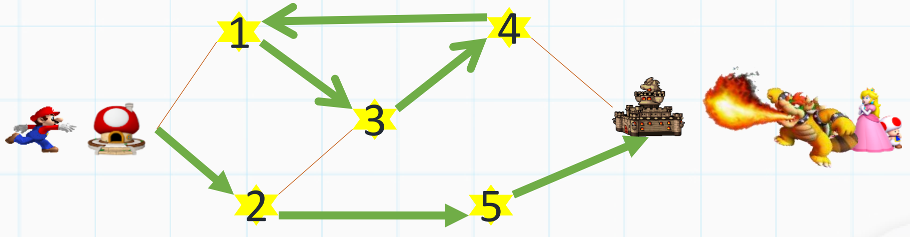
  $$\sum_{j \in N^-(t)} x_{jt} = 1$$

  Conservação de fluxo para todo vértice i (fora s e t)

  $$\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} = 0$$

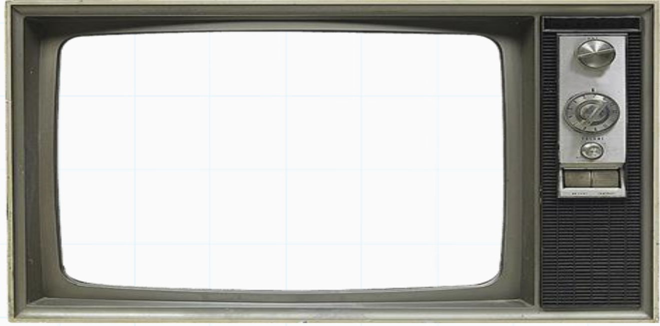
  Binaridade

  $x_{ij} \in \{0,1\}$ 0, para todo arco ij pertencente a A



Permite essas soluções, mas se c_{ij} >=0,
Então a função objetivo não escolhe

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

- Restrições:

  Origem (vamos chamar de vértice s)

  $$\sum_{j\in N^+(s)} x_{sj} = 1$$

  Destino (vamos chamar de vértice t)

  $$\sum_{j\in N^-(t)} x_{jt} = 1$$

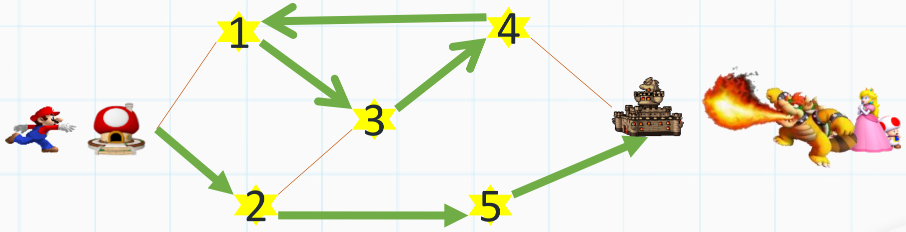
  Conservação de fluxo para todo vértice i (fora s e t)

  $$\sum_{j\in N^+(i)} x_{ij} - \sum_{j\in N^-(i)} x_{ji} = 0$$

  Binaridade

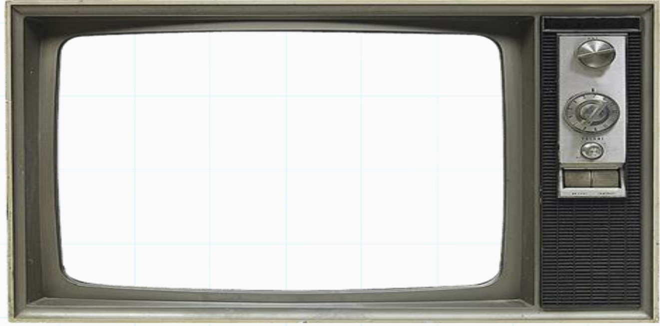
  $x_{ij} \in \{0,1\}$ 0, para todo arco ij pertencente a A

- Função objetivo:



Permite essas soluções, mas se c_{ij} >=0,
Então a função objetivo não escolhe

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do caminho

- Restrições:

  Origem (vamos chamar de vértice s)

  $$\sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = 1$$

  Destino (vamos chamar de vértice t)

  $$\sum_{j \in N^-(t)} x_{jt} = 1$$

  Conservação de fluxo para todo vértice i (fora s e t)

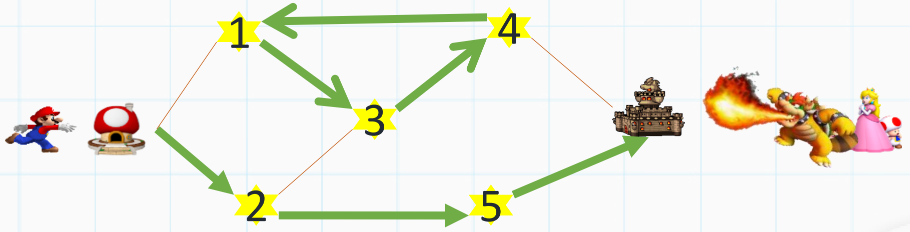
  $$\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} = 0$$

  Binaridade

  $x_{ij} \in \{0,1\}$ 0, para todo arco ij pertencente a A

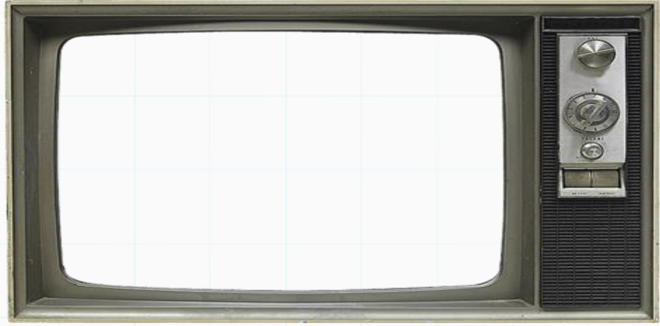
- Função objetivo:

  $$\text{MIN} \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$



Permite essas soluções, mas se c_{ij} >=0,
Então a função objetivo não escolhe

Formulações Clássicas



- Modelo completo

MIN $\sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$

sujeito a:

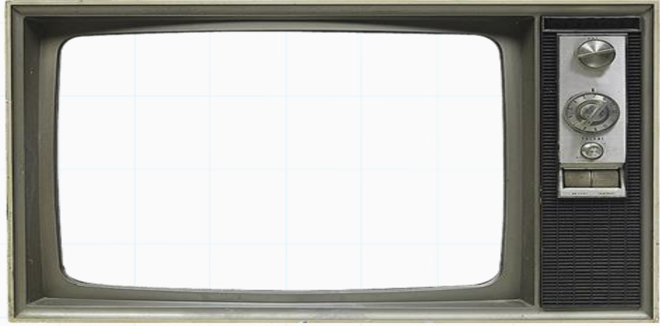
$$\sum_{j \in N^+(s)} x_{sj} = 1$$

$$\sum_{j \in N^-(t)} x_{jt} = 1$$

$$\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} - \sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} = 0$$

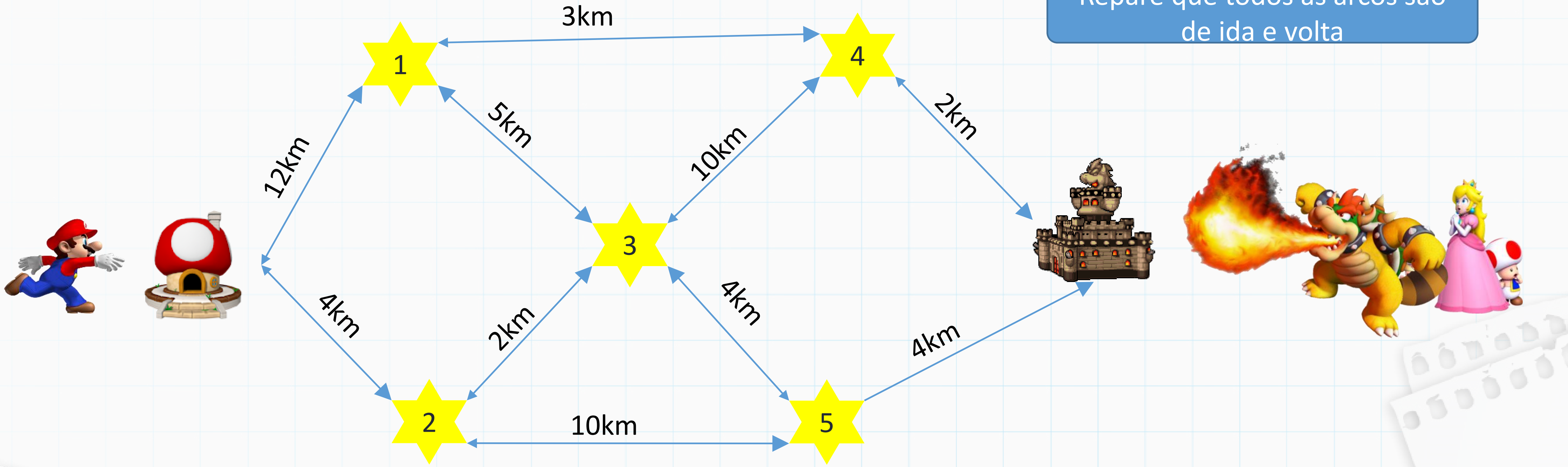
$x_{ij} \in \{0,1\}$, para todo arco ij pertencente a A

Formulações Clássicas



- Problema do Caixeiro Viajante (Italiano?):

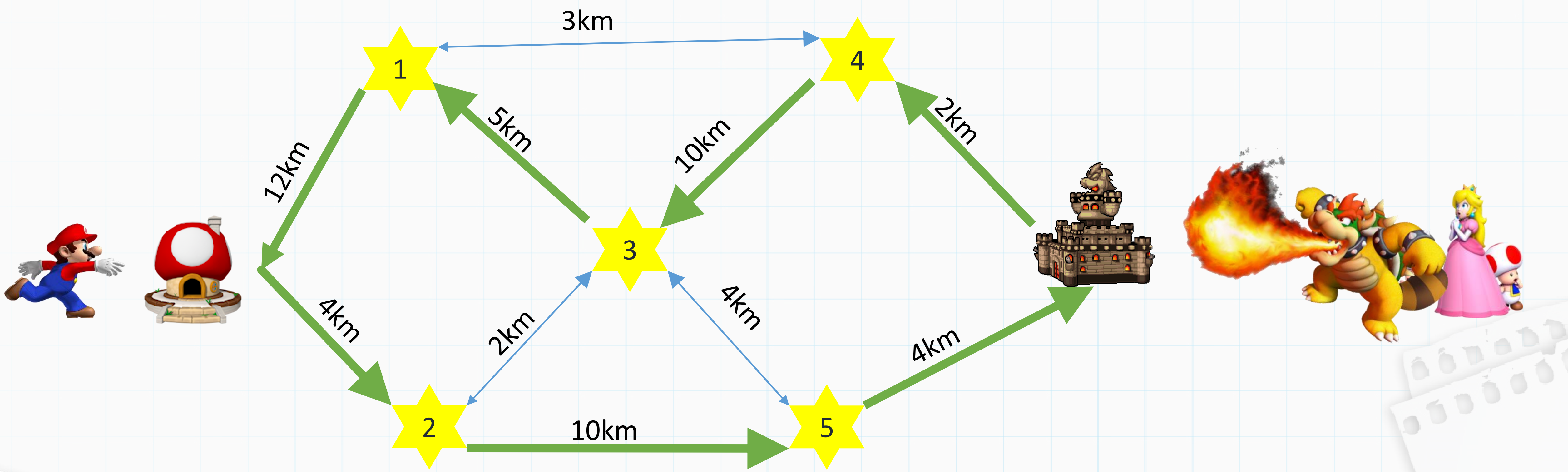
Repare que todos as arcos são de ida e volta



Problema: Mário tem que sair do cogumelo, passar em todas as fases e retornar ao cogumelo, estando apenas uma vez em cada fase

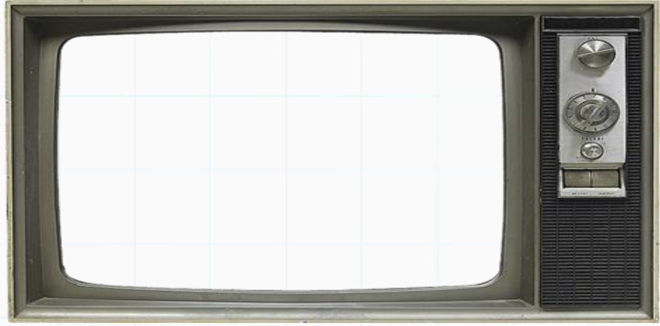
Formulações Clássicas

- Problema do Caixeiro Viajante (Italiano?):

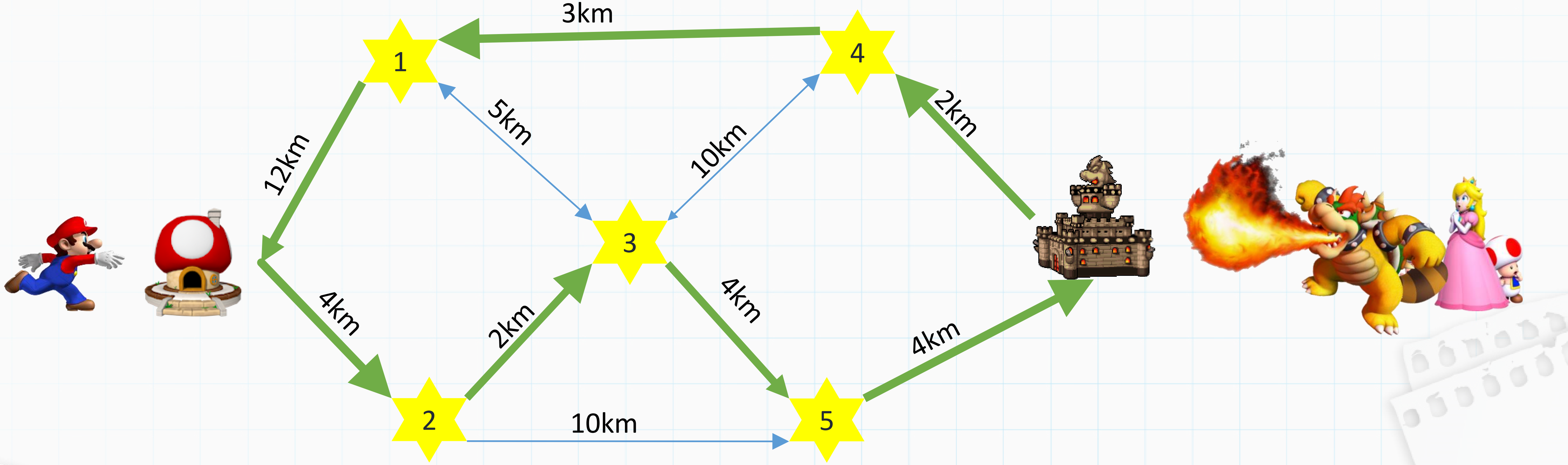


Sol = 47

Formulações Clássicas

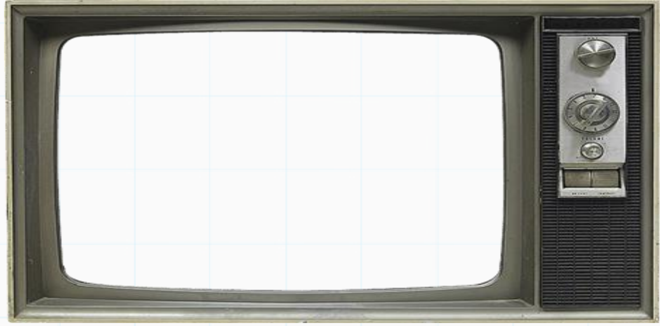


- Problema do Caixeiro Viajante (Italiano?):



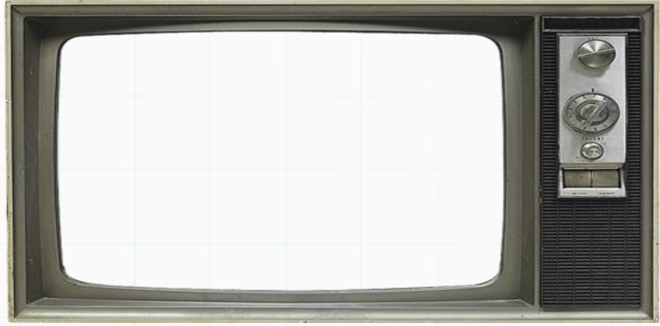
Sol = 31

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:



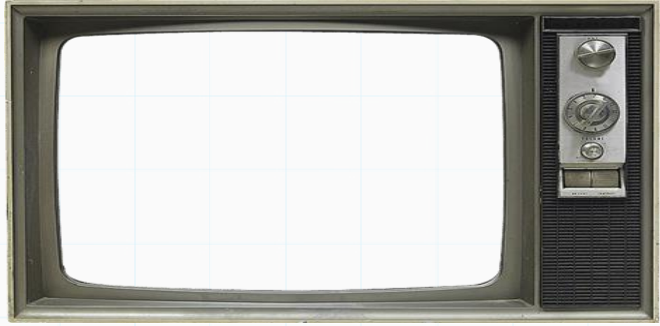
Formulações Clássicas

- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do ciclo

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

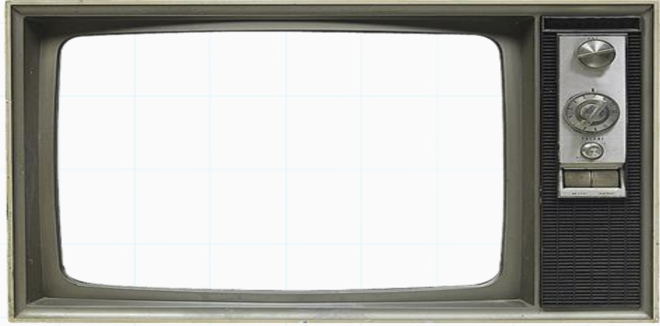
- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do ciclo

- Restrições:

  saída do vértice i (para todo i)

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

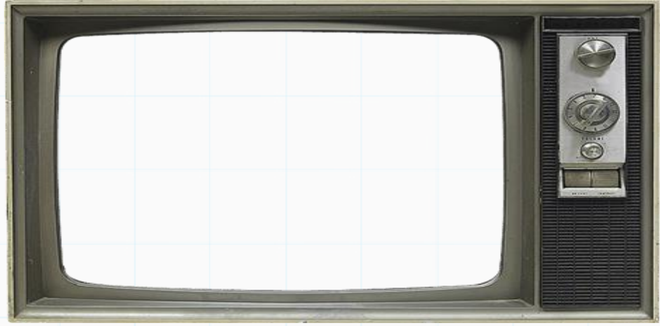
  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do ciclo

- Restrições:

  saída do vértice i (para todo i)

  $\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} = 1$

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^{+}(i)$ e $N^{-}(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do ciclo

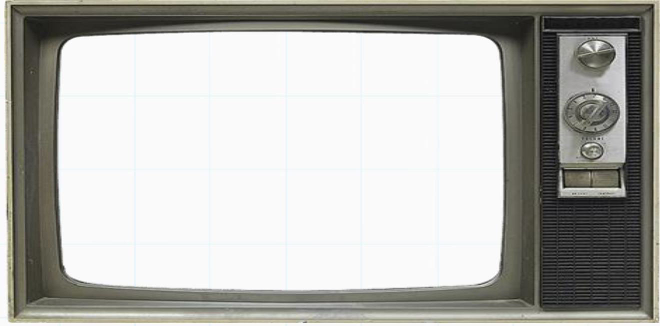
- Restrições:

  saída do vértice i (para todo i)

  $$\sum_{j \in N^{+}(i)} x_{ij} = 1$$

  entrada do vértice i (para todo i)

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do ciclo

- Restrições:

  saída do vértice i (para todo i)

  $$\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} = 1$$

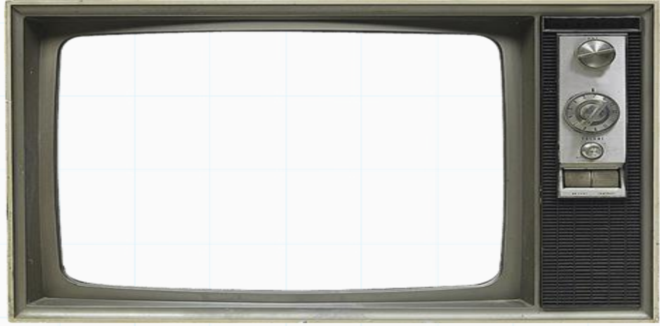
  entrada do vértice i (para todo i)

  $$\sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} = 1$$

  Binaridade

  $x_{ij} \in \{0,1\}$, para todo arco ij pertencente a A

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do ciclo

- Restrições:

  saída do vértice i (para todo i)

  $$\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} = 1$$

  entrada do vértice i (para todo i)

  $$\sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} = 1$$

  Binaridade

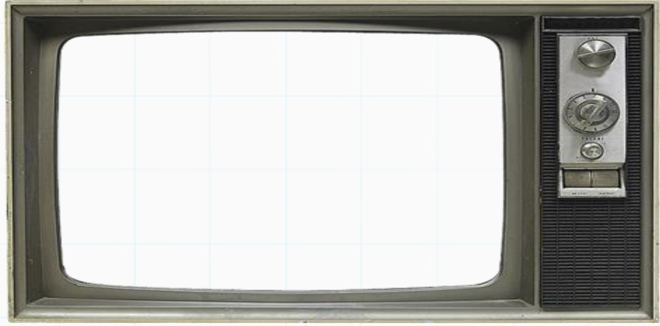
  $x_{ij} \in \{0,1\}$, para todo arco ij pertencente a A

- Função objetivo:

  $$\text{MIN} \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$

É viável ?

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^{+}(i)$ e $N^{-}(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do ciclo

É viável ?

- Restrições:

  saída do vértice i (para todo i)

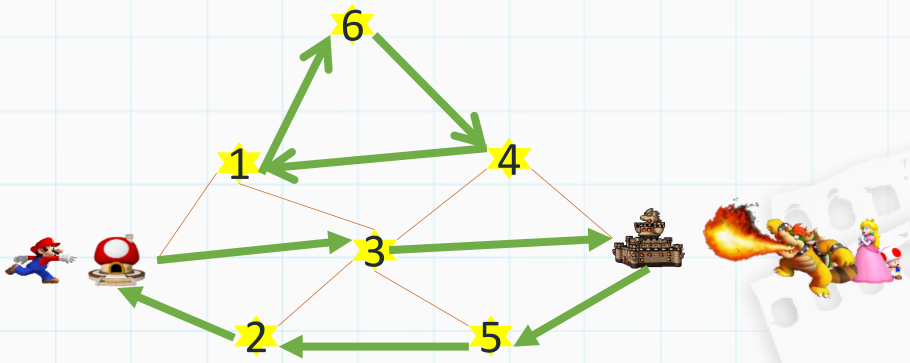
  $$\sum_{j \in N^{+}(i)} x_{ij} = 1$$

  entrada do vértice i (para todo i)

  $$\sum_{j \in N^{-}(i)} x_{ji} = 1$$

  Binaridade

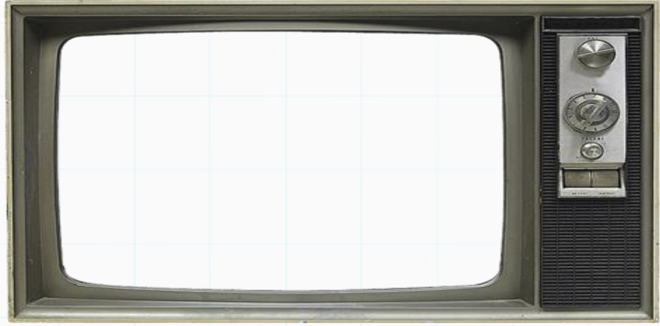
  $x_{ij} \in \{0,1\}$, para todo arco ij pertencente a A



- Função objetivo:

  $$\text{MIN} \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$

Formulações Clássicas



- Vamos definir G=(V,A), grafo direcionado, com $N^+(i)$ e $N^-(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i. Todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele.

- Variáveis de Decisão:

  x_{ij}: variável binária {0,1} que indica se o arco ij faz parte do ciclo

- Restrições:

  saída do vértice i (para todo i)

  $$\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} = 1$$

  entrada do vértice i (para todo i)

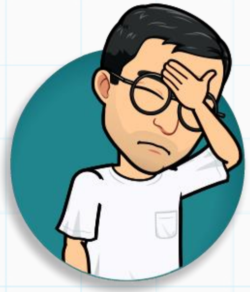
  $$\sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} = 1$$

  Binaridade

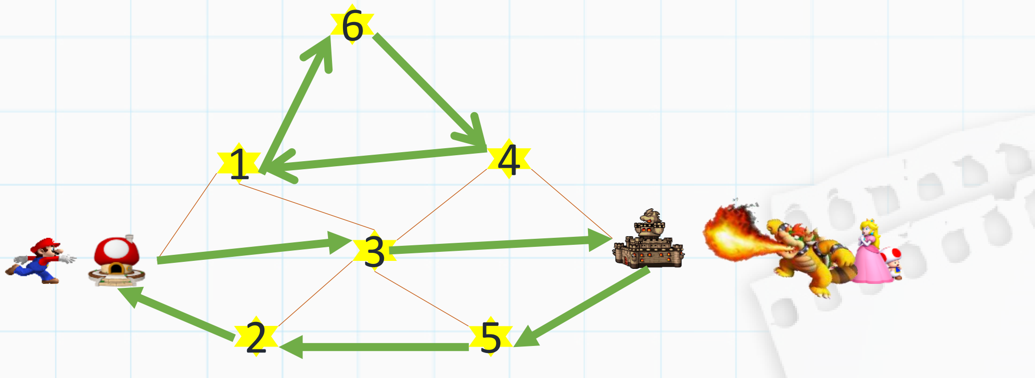
  $x_{ij} \in \{0,1\}$, para todo arco ij pertencente a A

- Função objetivo:

  $$\text{MIN} \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$

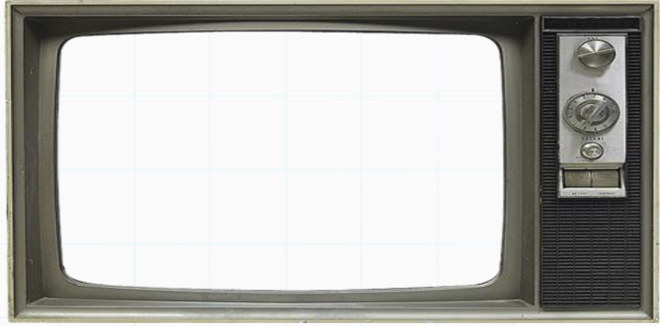


Pode aparecer na solução ótima

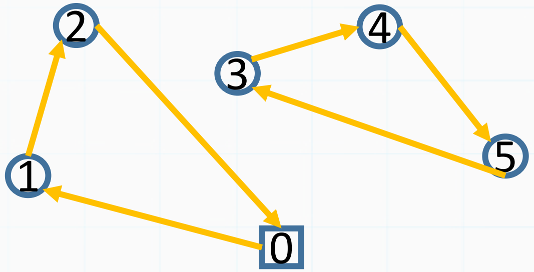


Não é suficiente, temos que eliminar os subciclos, ciclos menores que n

Formulações Clássicas

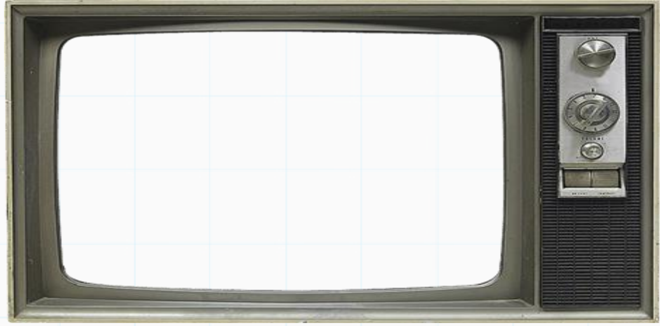


Problema do Caixeiro Viajante: Subciclo

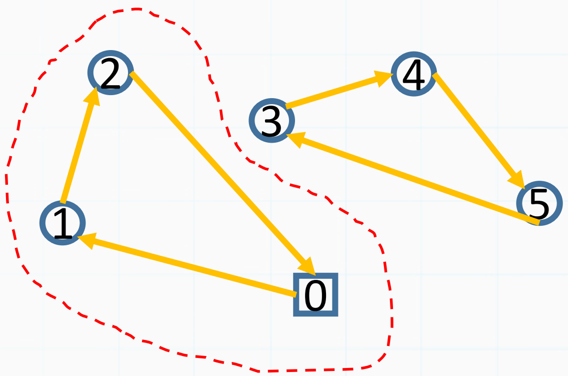


Ideia: Forçar sair um arco dos subciclos

Formulações Clássicas



Problema do Caixeiro Viajante: Subciclo

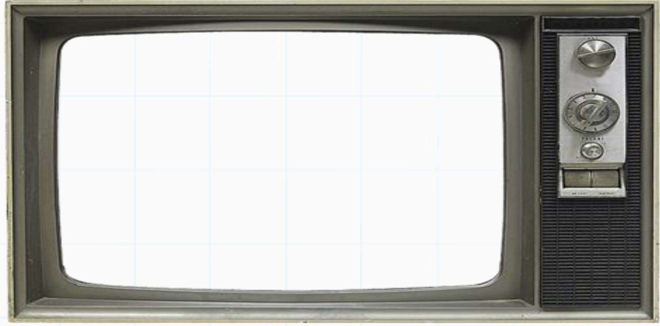


Ideia: Forçar sair um arco dos subciclos

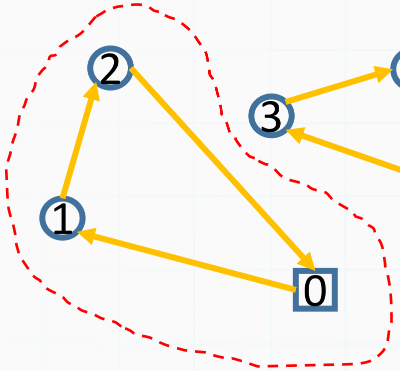
x_(0,3) + x_(0,4) + x_(0,5) + x_(1,3) + x_(1,4) + x_(1,5) + x_(2,3) + x_(2,4) + x_(2,5) >= 1

Generalizando:

Formulações Clássicas



<u>Problema do Caixeiro Viajante</u>: Subciclo

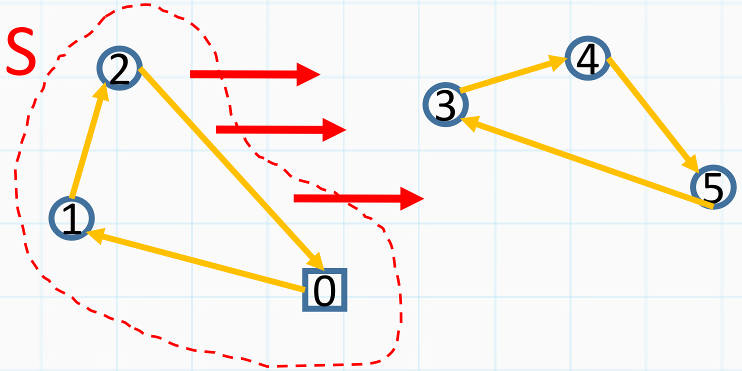


Ideia: Forçar sair um arco dos subciclos

x_(0,3) + x_(0,4) + x_(0,5) + x_(1,3) + x_(1,4) + x_(1,5) + x_(2,3) + x_(2,4) + x_(2,5) >= 1

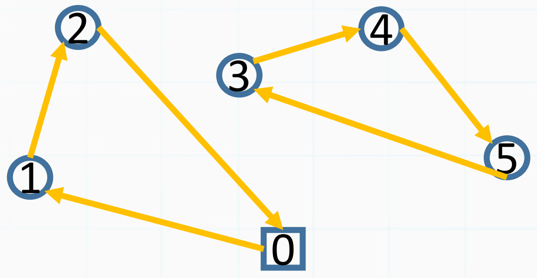
Generalizando:

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \geq 1, \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$



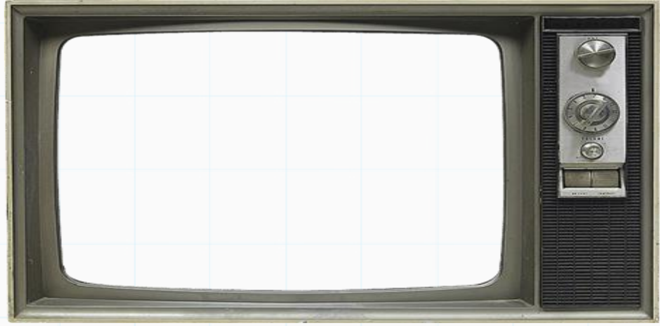
Formulações Clássicas

Problema do Caixeiro Viajante: Subciclo

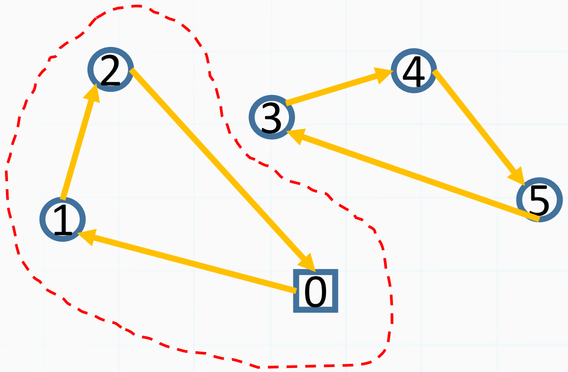


Ideia 2: Impedir que o número de arcos dentro de um subciclo seja suficiente para formar um ciclo

Formulações Clássicas

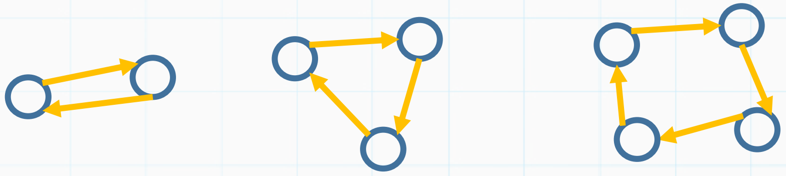


Problema do Caixeiro Viajante: Subciclo

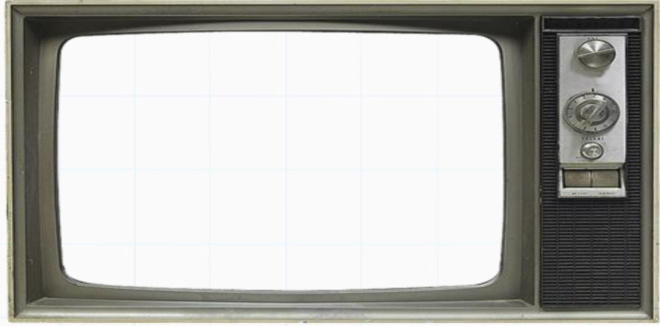


Ideia 2: Impedir que o número de arcos dentro de um subciclo seja suficiente para formar um ciclo

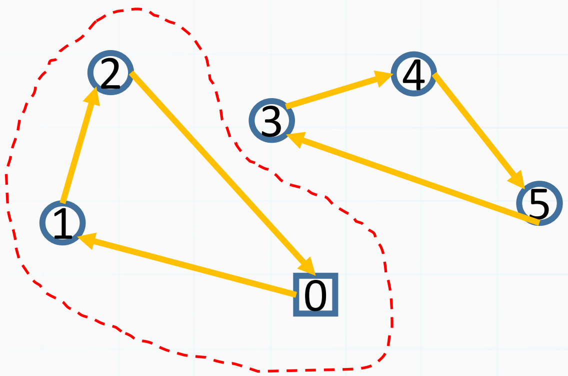
Veja que:



Formulações Clássicas

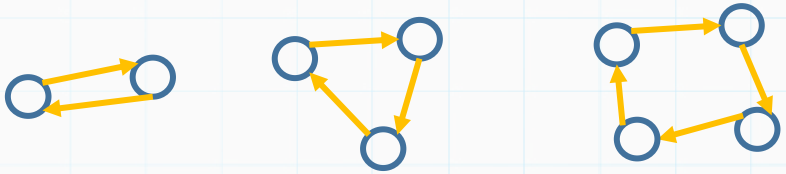


Problema do Caixeiro Viajante: Subciclo



Ideia 2: Impedir que o número de arcos dentro de um subciclo seja suficiente para formar um ciclo

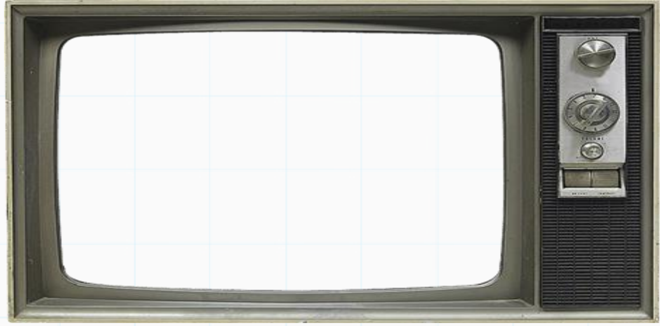
Veja que:



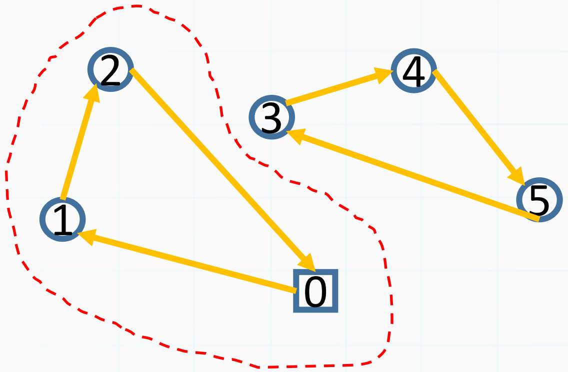
Então: $x_{(0,1)} + x_{(0,2)} + x_{(1,0)} + x_{(1,2)} + x_{(2,0)} + x_{(2,1)} \leq 3 - 1$

Generalizando:

Formulações Clássicas

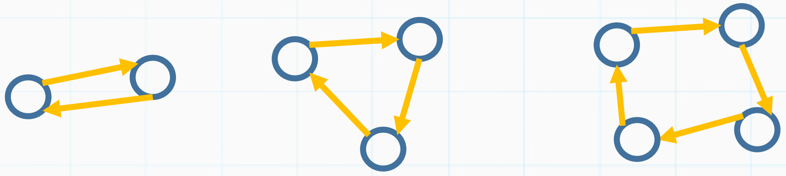


Problema do Caixeiro Viajante: Subciclo



Ideia 2: Impedir que o número de arcos dentro de um subciclo seja suficiente para formar um ciclo

Veja que:

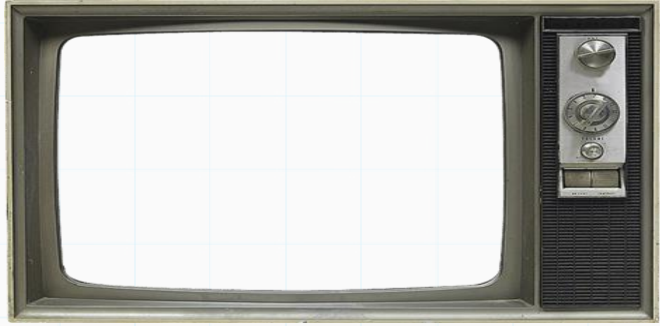


Então: x_(0,1) + x_(0,2) + x_(1,0) + x_(1,2) + x_(2,0) + x_(2,1) <= 3 – 1

Generalizando:

$$\sum_{\substack{i,j\in S\\ i\neq j}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall S \subset V, |S| \geq 2$$

Formulações Clássicas



- Modelo Completo

$$\text{MIN} \sum_{ij \in A} c_{ij} x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in N^+(i)} x_{ij} = 1$$

$$\sum_{j \in N^-(i)} x_{ji} = 1$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \notin S \\ ij \in A}} x_{ij} >= 1, \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$

ou

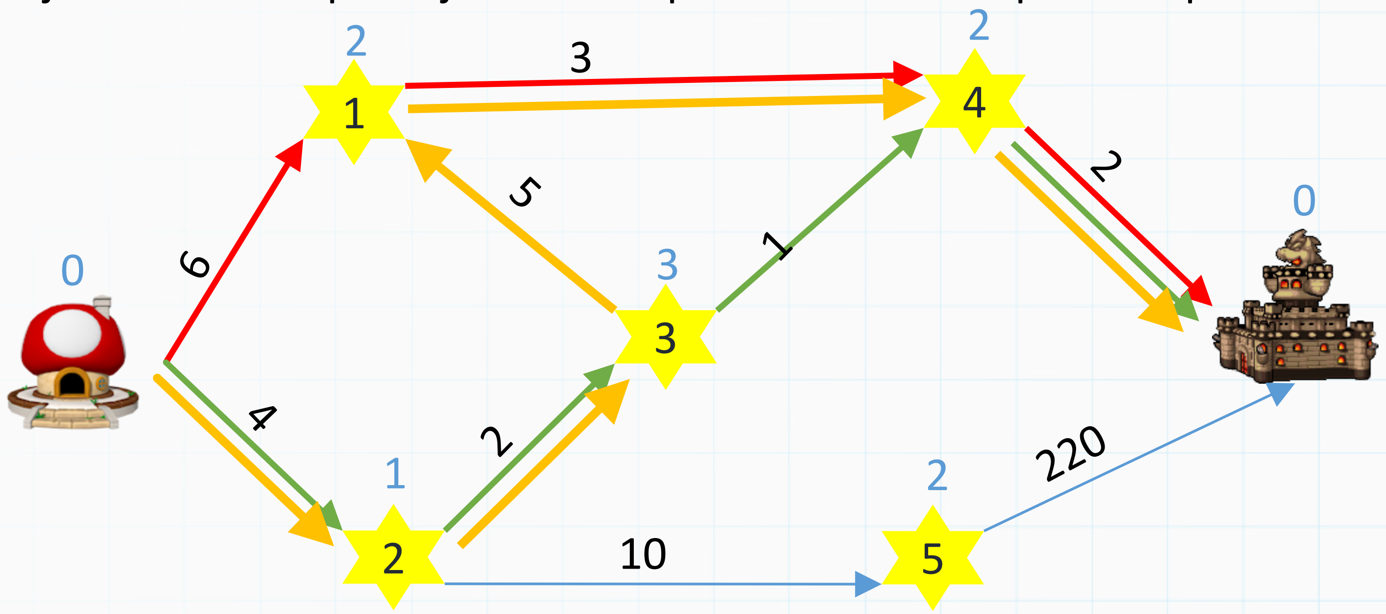
$$\sum_{i \in S} \sum_{\substack{j \in S \\ ij \in A}} x_{ij} <= |S| - 1, \quad \forall S \subset V, S \neq \emptyset$$

$x_{ij} \in \{0,1\}$, para todo arco ij pertencente a A

Exercícios

<u>Problema do caminho máximo com prêmios</u>: Dado um grafo G=(V,A), com N^+ e N^- definindo suas vizinhanças de saída e entrada do vértice i e todo arco ij possui um custo c_{ij} anexado a ele. Além disso, cada vértice i possui um prêmio p_i a ser coletado se o caminho passar por ele. Queremos construir um caminho entre os vértices s e t (origem e destino) onde seu custo seja MÁXIMO e que seja coletado pelo menos P em prêmios pelo caminho.

Origem em rede de computadores: mandar dados no caminho de maior banda (evita transito), passando por repetidoras de sinal (prêmio)



Exemplos de soluções com P = 4

11

9

16

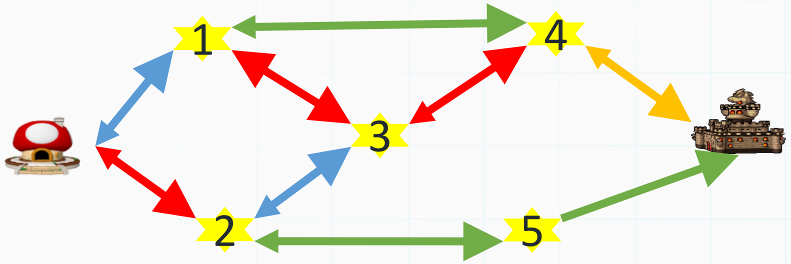
1) Vars: mesma do caminho mínimo -> (x_ij)
2) Rest:
   - Tem que sair um caminho da origem (s)
   - Tem que chegar um caminho ao destino (t)
   - Tudo que entra é igual a tudo que sai para qualquer vértice não seja s ou t
   - Eliminação de sub-ciclo (Para todo subconjunto de vértices S, tem que ter pelo menos um arco saindo).
   - A soma dos prêmios no caminho tem que ser maior que P
3) F.O. : maximizar custos dos arcos no caminho

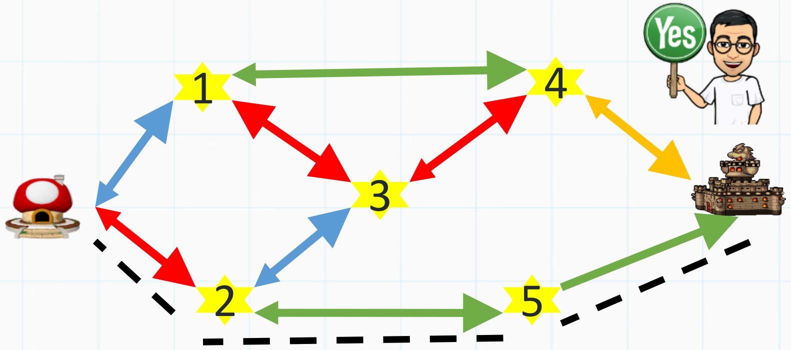
4) Porque precisamos de eliminação de ciclos se no caminho mínimo não precisa ?

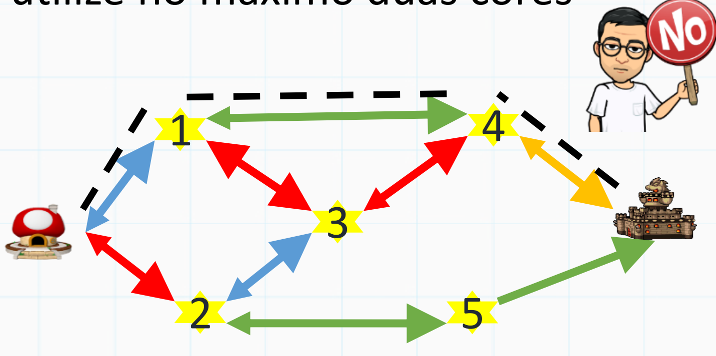
Exercício

- <u>Problema do Caminho Mínimo Bicolor</u>:

Dado um grafo G=(V,A), grafo direcionado, com $N^{+}(i)$ e $N^{-}(i)$ as vizinhanças de saída e entrada do vértice i, onde todo arco $ij \in A$ possui um custo c_{ij} e uma cor cor_{ij} anexado a ele (cores já estão fixas nos arcos) . Queremos encontrar o caminho mínimo entre os vértices s e t do grafo, de custo mínimo, que utilize no máximo duas cores diferentes.







1) Vars: uma variável binária para indicar se cada arco está no caminho e uma outra (binária) para indicar se o caminho tem uma cor (para cada cor)
2) Rest:
   - Tem que sair um caminho de s
   - Tem que entrar um caminho em t
   - Conservação de fluxo (o que entra é igual ao que sai para quem não é s ou t)
   - Se um arco esta no caminho, então a cor daquela arco tem que está no caminho
   - Número de cores do caminho não pode passar de 2

3) F.O. : Minimizar custo do caminho

Até a próxima