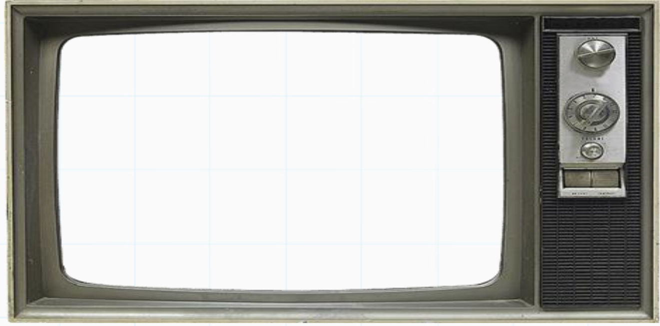
Formulações Clássicas

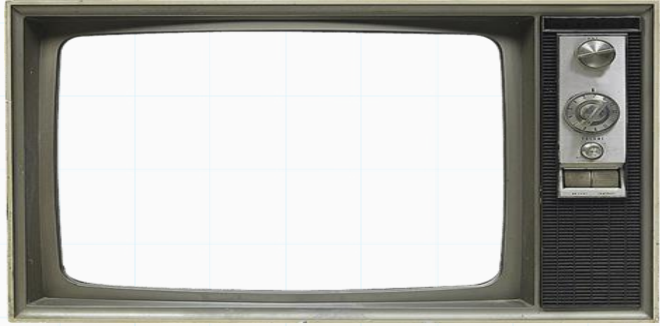


Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pi.html

yuri@ic.uff.br

Fortalecendo Formulações



<u>Problema de Coloração de Vértices</u>: Seja o seguinte modelo clássico de coloração

$$\min \sum_{j \in C} w_j$$

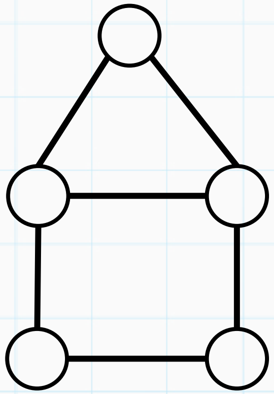
$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1, \forall i \in V$$

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1, \forall ik \in E \text{ e } \forall j \in C$$

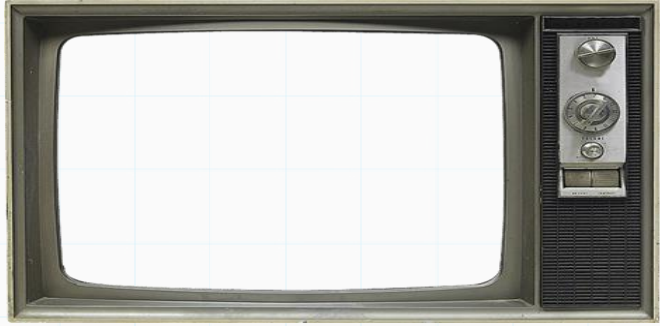
$$x_{ij} \leq w_j, \forall i \in V, \forall j \in C$$

$$w_j \; x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in V \text{ e } \forall j \in C$$

Vamos agora voltar a ver o problema de coloração



Fortalecendo Formulações



<u>Problema de Coloração de Vértices</u>: Seja o seguinte modelo clássico de coloração

$$\min \sum_{j \in C} w_j$$

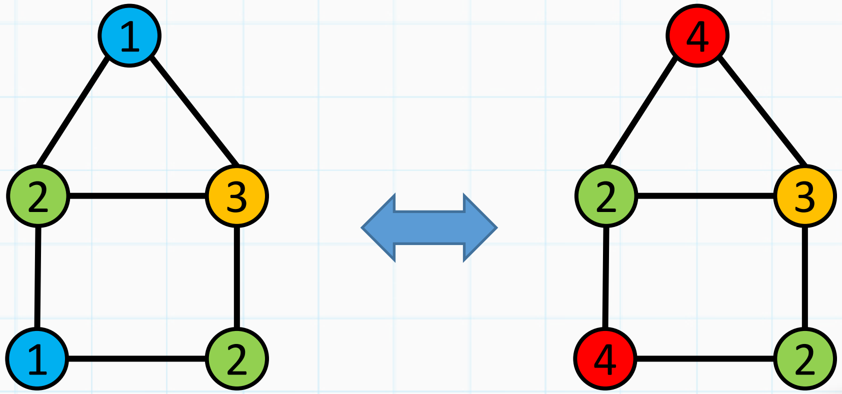
$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1, \forall i \in V$$

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1, \forall ik \in E \text{ e } \forall j \in C$$

$$x_{ij} \leq w_j, \forall i \in V, \forall j \in C$$

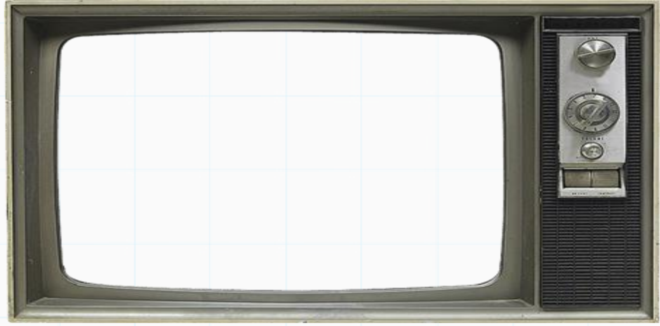
$$w_j \; x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in V \text{ e } \forall j \in C$$

Simetria: de quantas formas podemos representar uma coloração com 3 cores ?



Podemos trocar uma cor da solução por uma cor não usada

Fortalecendo Formulações



Problema de Coloração de Vértices: Seja o seguinte modelo clássico de coloração

$$\min \sum_{j \in C} w_j$$

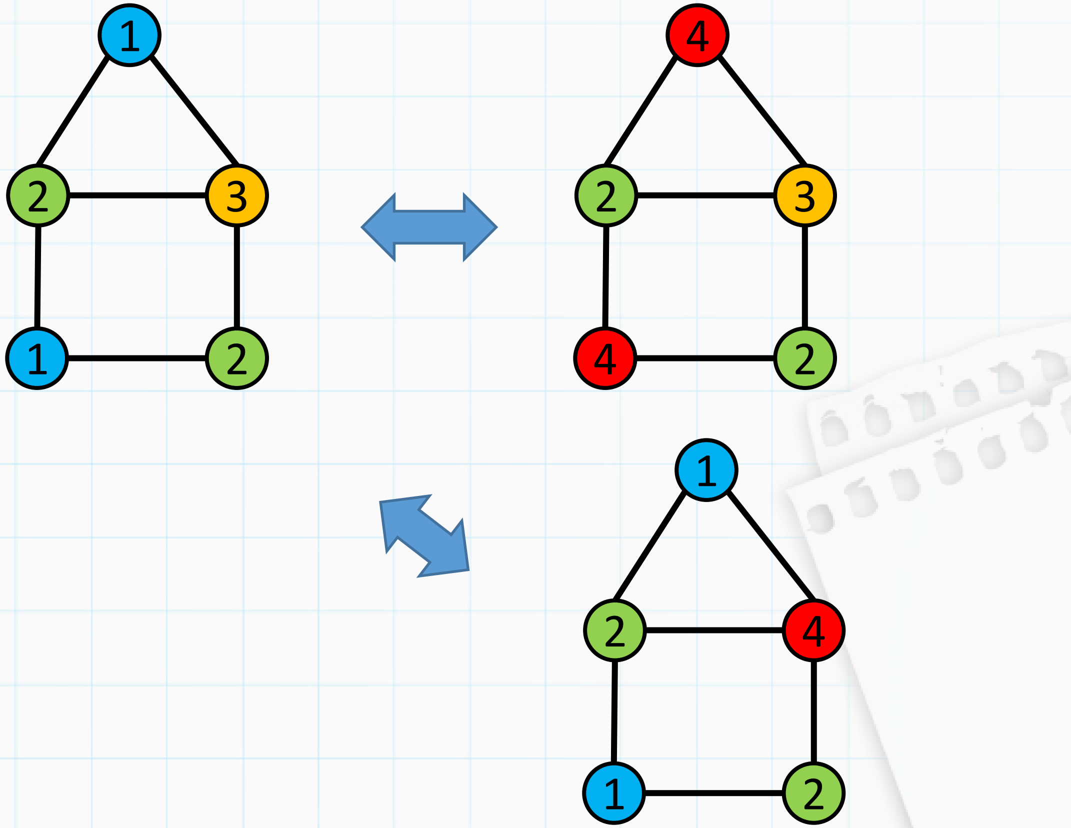
$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1, \forall i \in V$$

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1, \forall ik \in E \text{ e } \forall j \in C$$

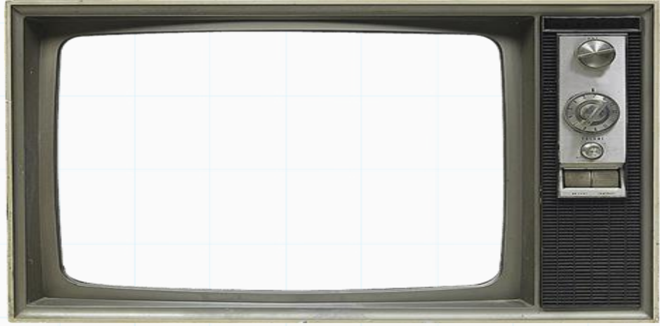
$$x_{ij} \leq w_j, \forall i \in V, \forall j \in C$$

$$w_j \;\; x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in V \text{ e } \forall j \in C$$

Simetria: de quantas formas podemos representar uma coloração com 3 cores ?



Fortalecendo Formulações



<u>Problema de Coloração de Vértices</u>: Seja o seguinte modelo clássico de coloração

$$\min \sum_{j \in C} w_j$$

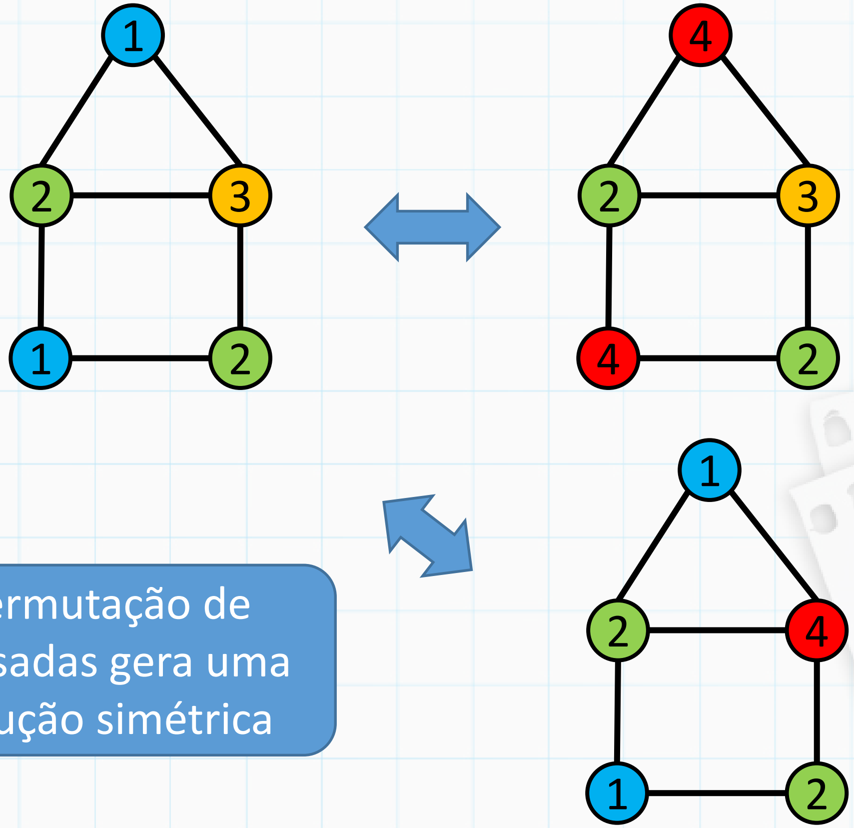
$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1, \forall i \in V$$

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1, \forall ik \in E \text{ e } \forall j \in C$$

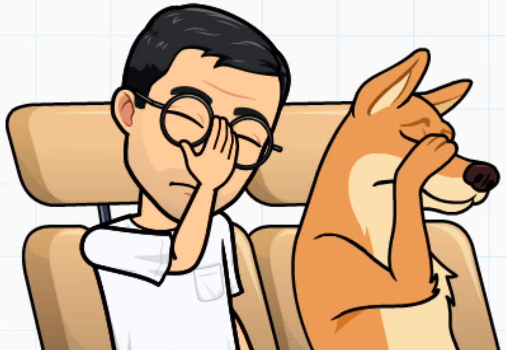
$$x_{ij} \leq w_j, \forall i \in V, \forall j \in C$$

$$w_j \; x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in V \text{ e } \forall j \in C$$

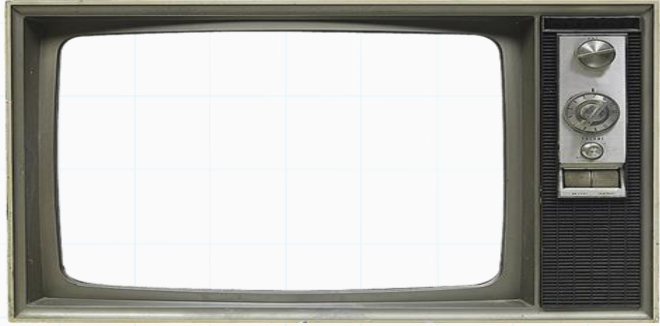
Simetria: de quantas formas podemos representar uma coloração com 3 cores ?



cada permutação de cores ñ usadas gera uma nova solução simétrica



Fortalecendo Formulações



Problema de Coloração de Vértices: Seja o seguinte modelo clássico de coloração

$$\min \sum_{j \in C} w_j$$

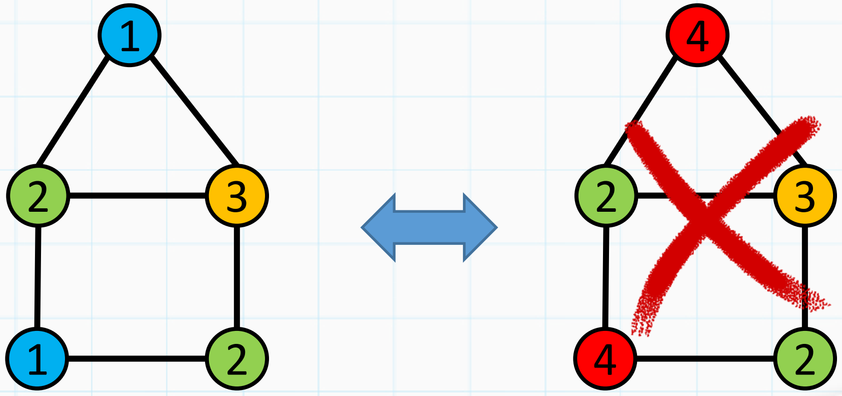
$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1, \forall i \in V$$

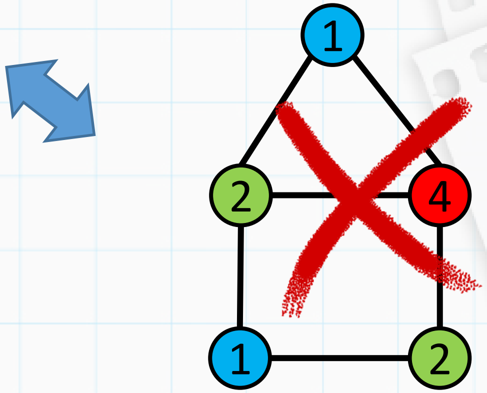
$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1, \forall ik \in E \text{ e } \forall j \in C$$

$$x_{ij} \leq w_j, \forall i \in V, \forall j \in C$$

$$w_j \; x_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in V \text{ e } \forall j \in C$$

Simetria: de quantas formas podemos representar uma coloração com 3 cores ?

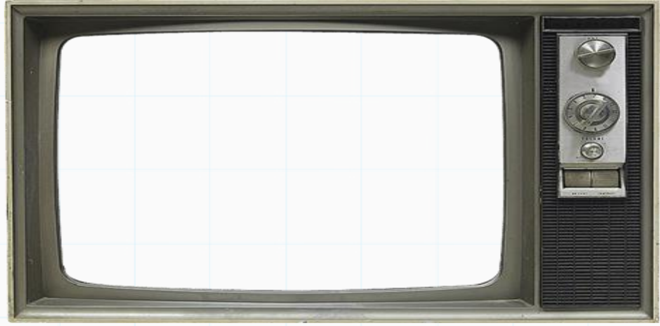




Corte de Simetria:

Só poder usar uma cor se a cor anterior já tiver sido usada. Como fica ?

Fortalecendo Formulações



Problema de Coloração de Vértices: Seja o seguinte modelo clássico de coloração

$$\min \sum_{j \in C} w_j$$

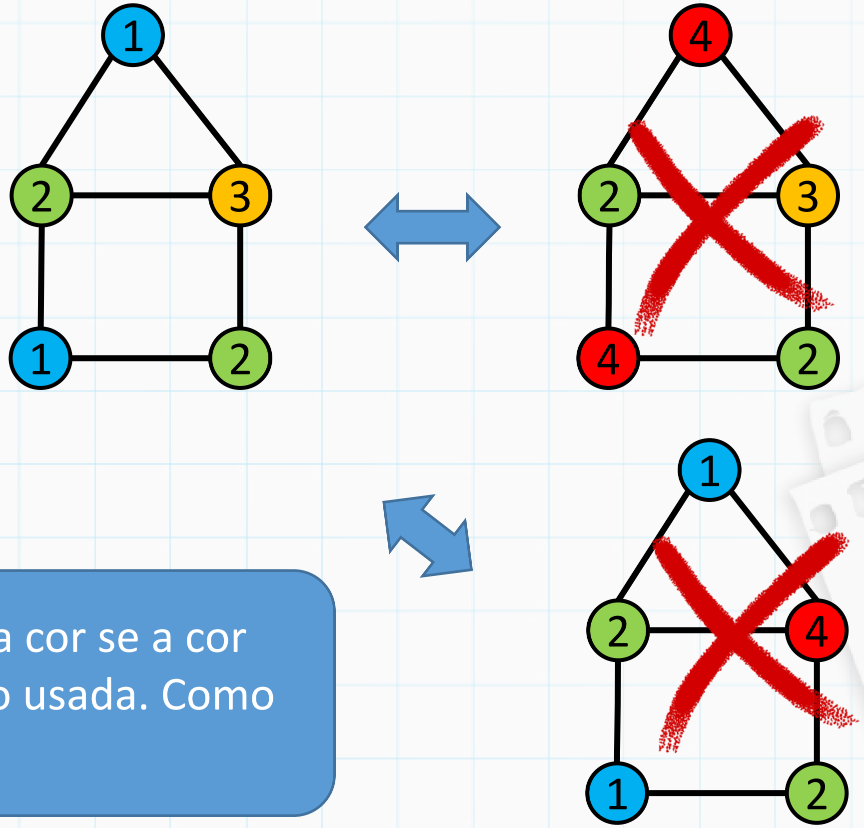
$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1, \forall i \in V$$

$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1, \forall ik \in E \text{ e } \forall j \in C$$

$$x_{ij} \leq w_j, \forall i \in V, \forall j \in C$$

$$w_j \; x_{ij} \in \{0,1\}, \forall i \in V \text{ e } \forall j \in C$$

Simetria: de quantas formas podemos representar uma coloração com 3 cores ?

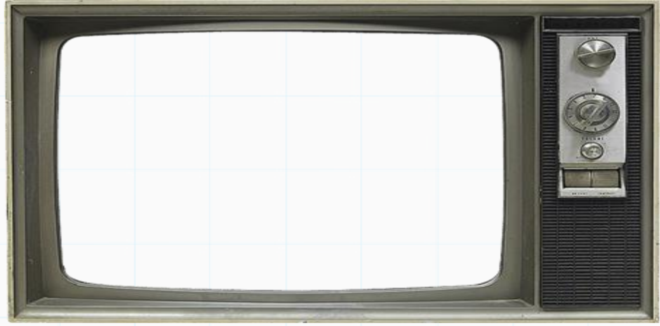


Corte de Simetria:

$$\boxed{w_j \leq w_{j-1}, \quad \forall j = 2 \ldots |C|}$$

Só poder usar uma cor se a cor anterior já tiver sido usada. Como fica ?

Fortalecendo Formulações



Problema de Coloração de Vértices: Seja o seguinte modelo clássico de coloração

$$\min \sum_{j \in C} w_j$$

$$\sum_{j \in C} x_{ij} = 1, \forall i \in V$$

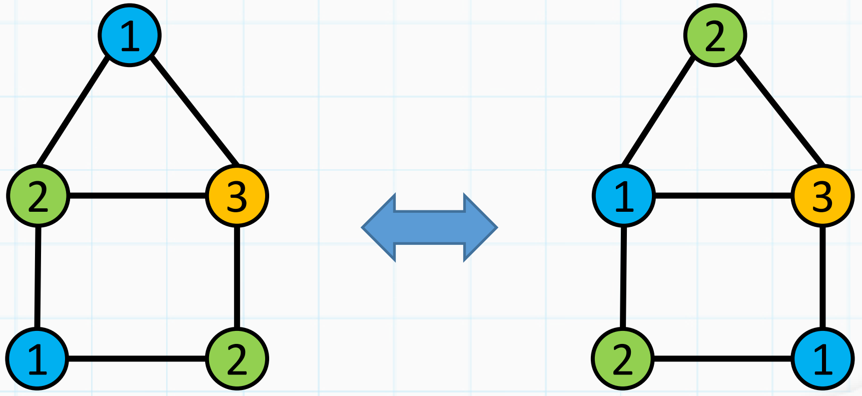
$$x_{ij} + x_{kj} \leq 1, \forall ik \in E \text{ e } \forall j \in C$$

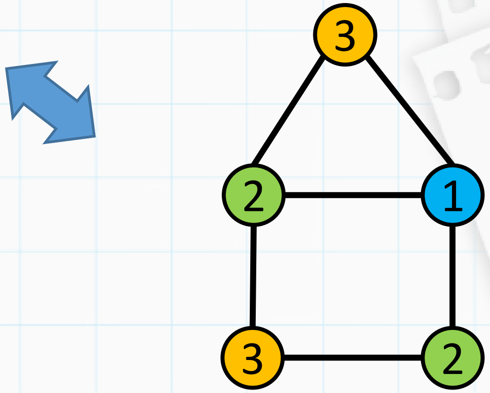
$$x_{ij} \leq w_j, \forall i \in V, \forall j \in C$$

$$w_j \; x_{ij} \in \{0,1\}, \forall i \in V \text{ e } \forall j \in C$$

$$w_j \leq w_{j-1}, \quad \forall j = 2 ... |C|$$

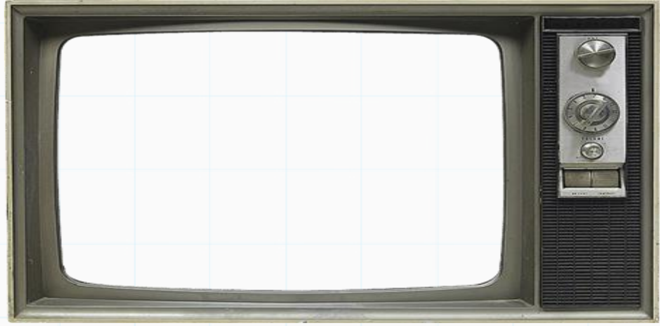
e essa simetria das cores já utilizadas ?





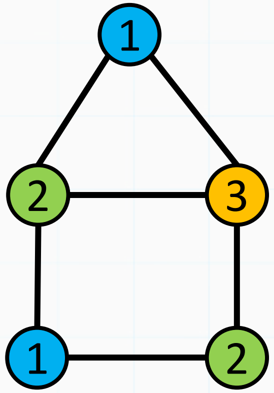
essa é difícil, vamos ter que re-modelar !

Fortalecendo Formulações



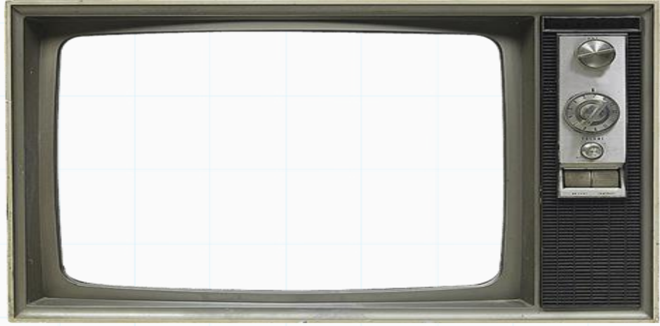
Problema de Coloração de Vértices: Modelo dos Representantes

A ideia do modelo é fazer cada grupo de cores ser identificado por um vértice representante (lider), e não mais por um índice de cor.



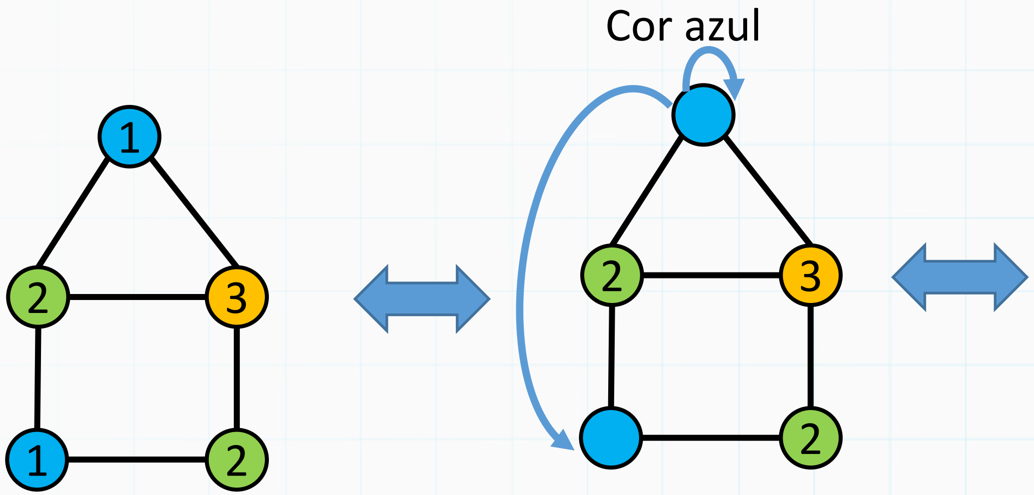
Não teremos mais cores, mas sim líderes representantes de cada cor

Fortalecendo Formulações

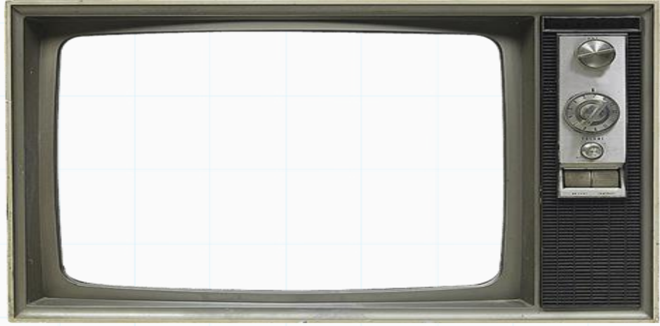


<u>Problema de Coloração de Vértices</u>: Modelo dos Representantes

A ideia do modelo é fazer cada grupo de cores ser identificado por um vértice representante (lider), e não mais por um índice de cor.

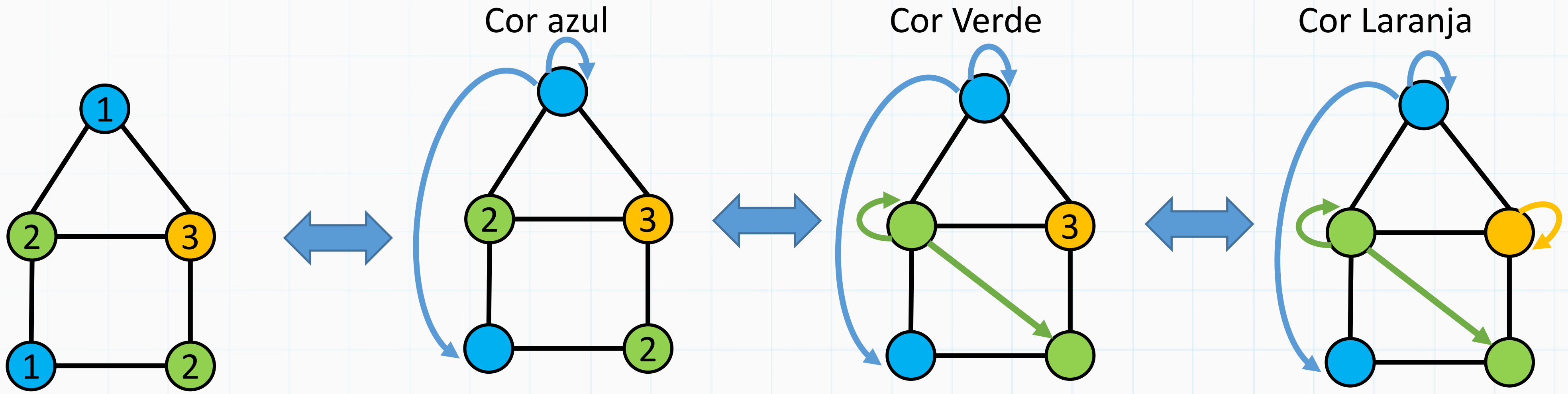


Fortalecendo Formulações



Problema de Coloração de Vértices: Modelo dos Representantes

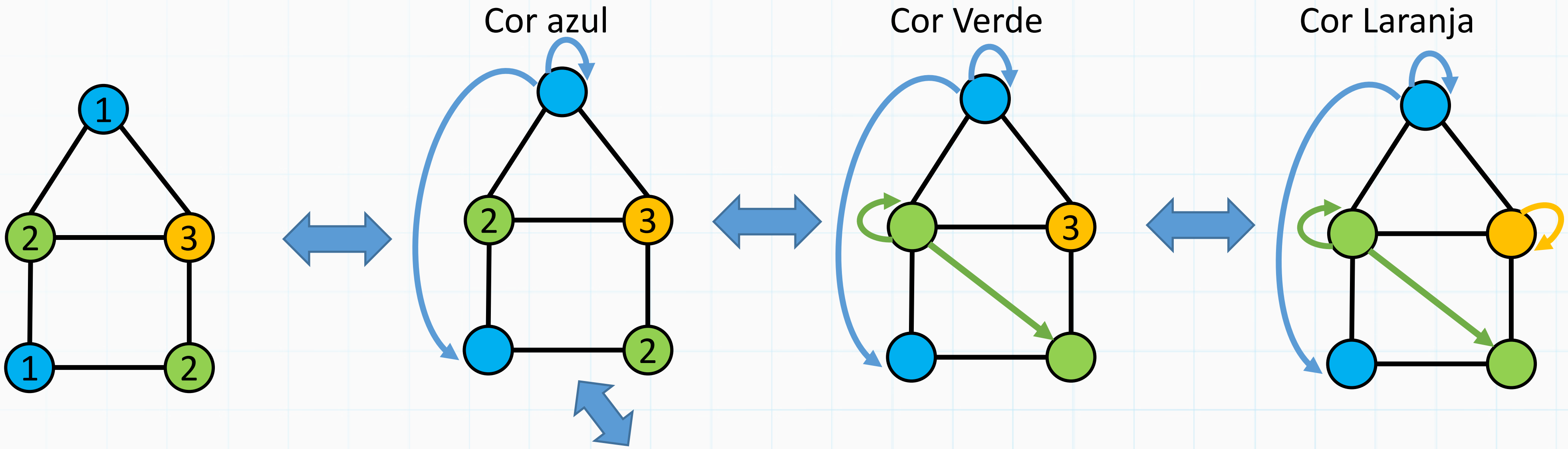
A ideia do modelo é fazer cada grupo de cores ser identificado por um vértice representante (lider), e não mais por um índice de cor.



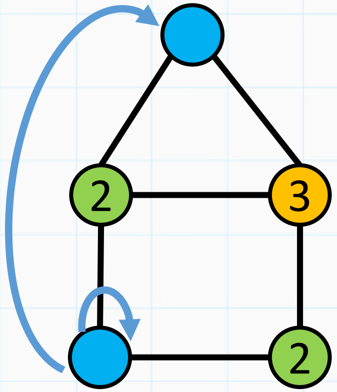
Fortalecendo Formulações

Problema de Coloração de Vértices: Modelo dos Representantes

A ideia do modelo é fazer cada grupo de cores ser identificado por um vértice representante (lider), e não mais por um índice de cor.

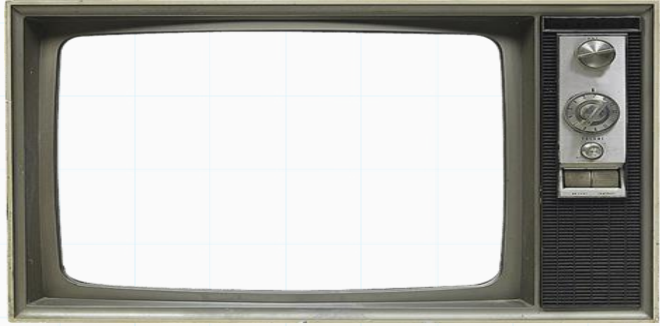


Note que podemos ter essa simetria



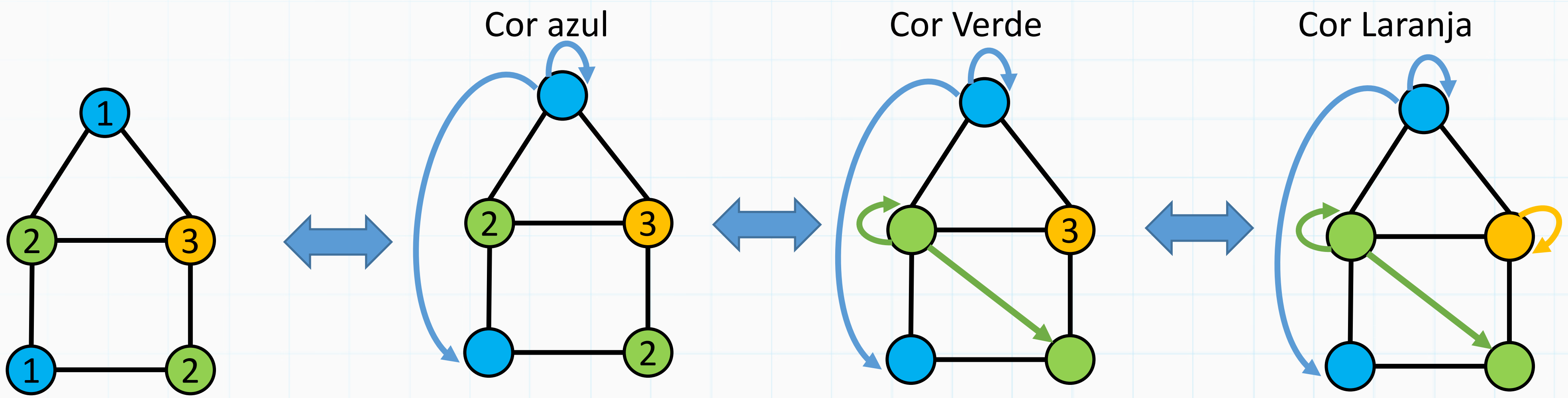
A mesma cor assumir outra liderança

Fortalecendo Formulações

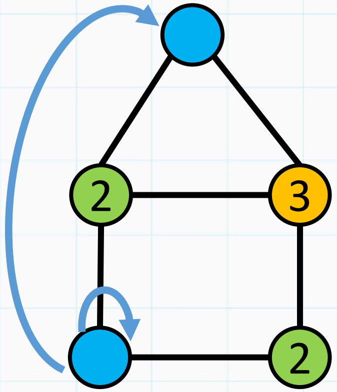


<u>Problema de Coloração de Vértices</u>: Modelo dos Representantes

A ideia do modelo é fazer cada grupo de cores ser identificado por um vértice representante (lider), e não mais por um índice de cor.

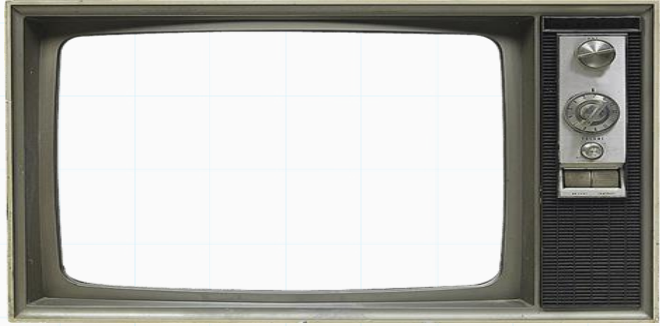


Note que podemos ter essa simetria



para evitar isso, vamos estipular que apenas um vértice de índice menor pode representar um de índice maior

A mesma cor assumir outra liderança

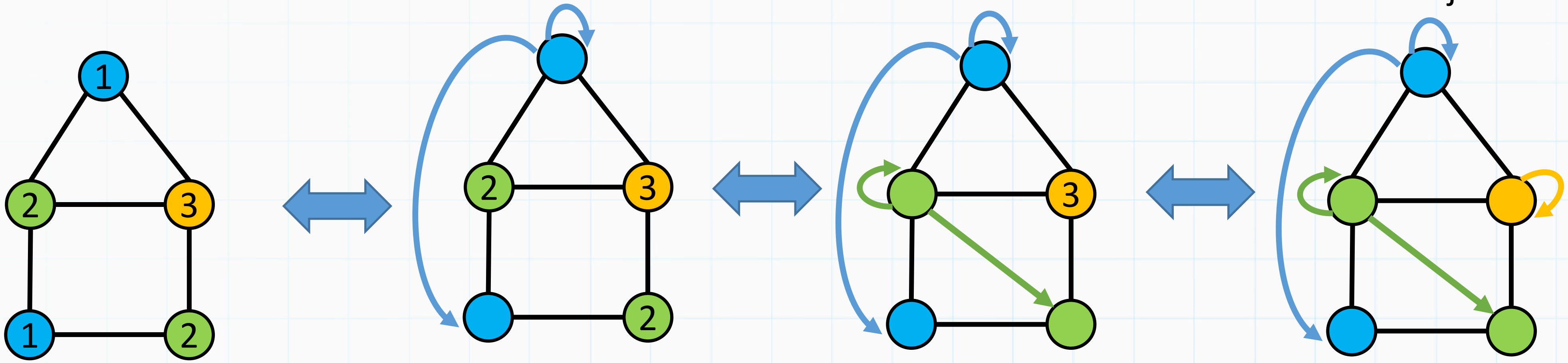


Fortalecendo Formulações

<u>Problema de Coloração de Vértices</u>: Modelo dos Representantes

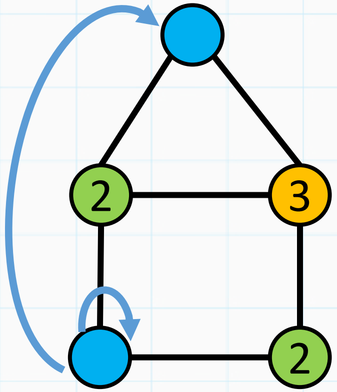
A ideia do modelo é fazer cada grupo de cores ser identificado por um vértice representante (lider), e não mais por um índice de cor.

Cor azul | Cor Verde | Cor Laranja

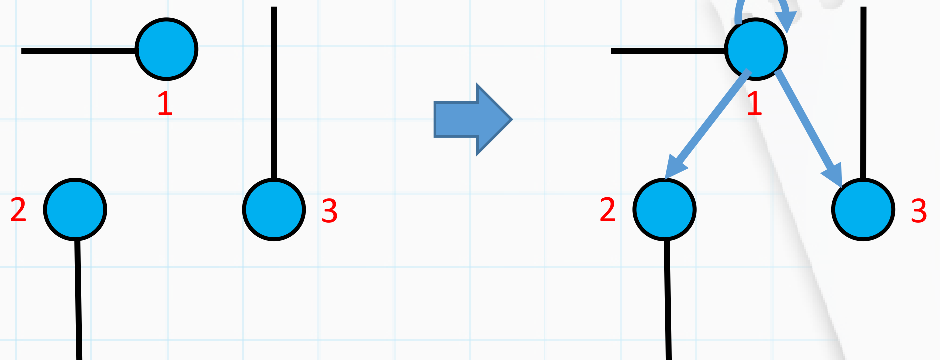


Note que podemos ter essa simetria

para evitar isso, vamos estipular que apenas um vértice de índice menor pode representar um de índice maior



representação única

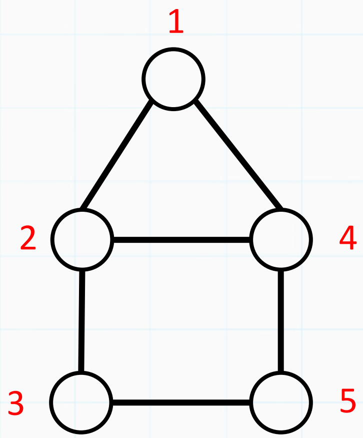


Fortalecendo Formulações

<u>Definições:</u>

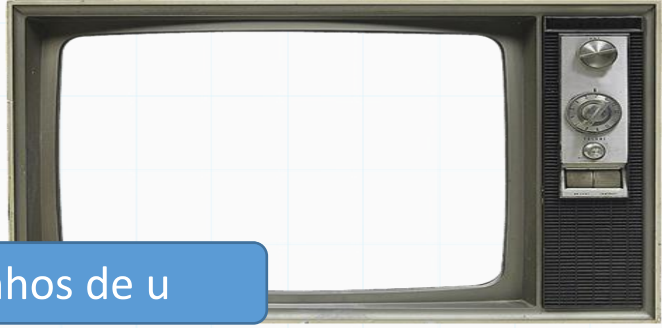
- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u



$\overline{N}(3)$=1,4

Fortalecendo Formulações



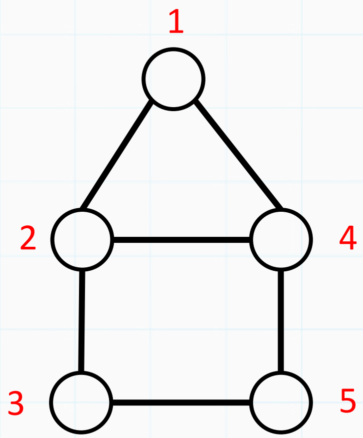
Definições:

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u

- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MENOR



$\overline{N}^{<}(3)=1$

Fortalecendo Formulações

<u>Definições:</u>

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$

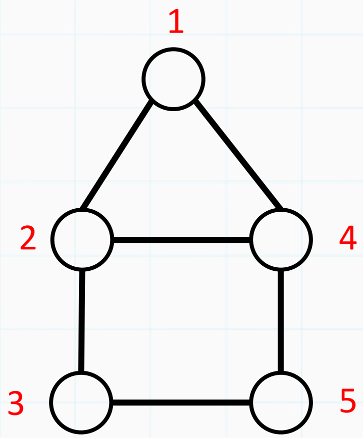
Que NÃO são vizinhos de u

- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MENOR

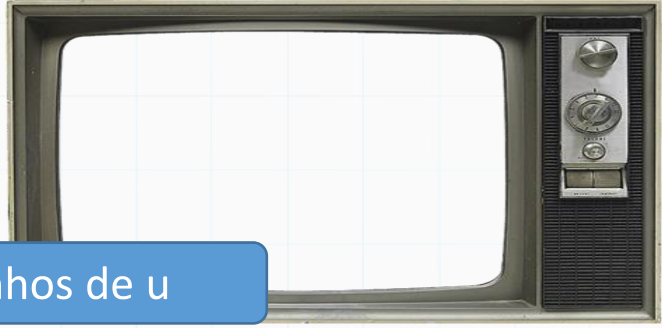
- $\overline{N}^{>}(u)$: vértices na anti-vizinhança maior de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MAIOR



$\overline{N}^{>}(3)=4$

Fortalecendo Formulações



Definições:

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u

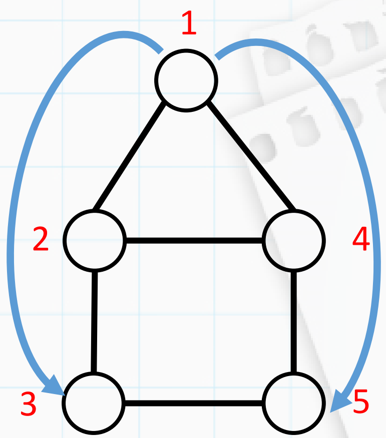
- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MENOR

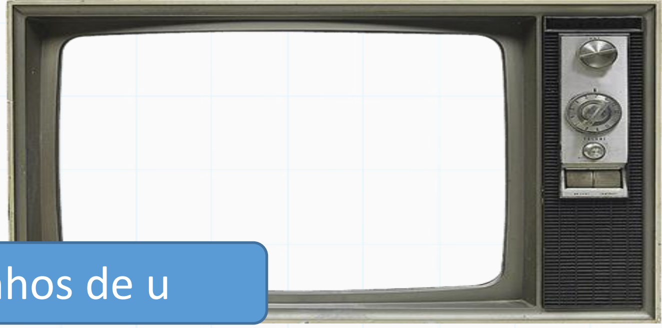
- $\overline{N}^{>}(u)$: vértices na anti-vizinhança maior de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MAIOR

Variáveis:



Fortalecendo Formulações



Definições:

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u

- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MENOR

- $\overline{N}^{>}(u)$: vértices na anti-vizinhança maior de $u \in V$

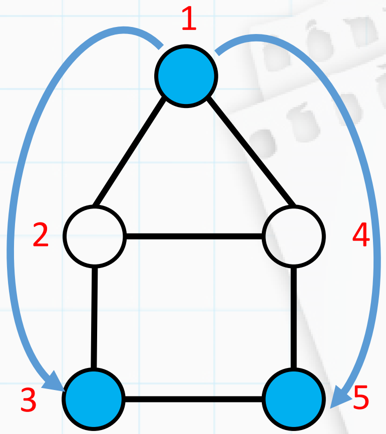
Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MAIOR

Variáveis:

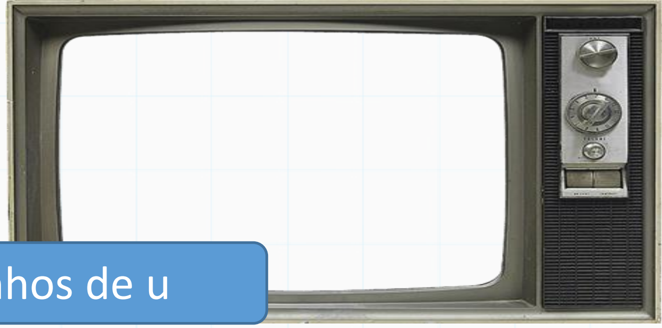
$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se o vért. } u \in V \text{ representa vert. } v \in \overline{N}^{>}(u) \cup \{u\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

lider

x_11 = 1
x_13 = 1
x_15=1



Fortalecendo Formulações



Definições:

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u

- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MENOR

- $\overline{N}^{>}(u)$: vértices na anti-vizinhança maior de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MAIOR

Variáveis:

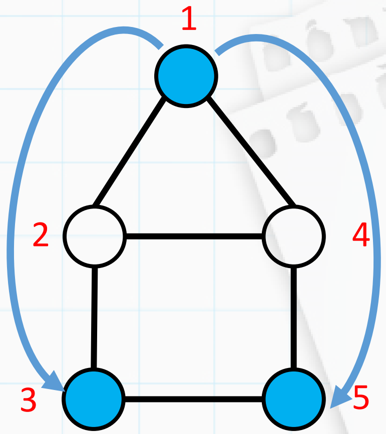
$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se o vért. } u \in V \text{ representa vert. } v \in \overline{N}^{>}(u) \cup \{u\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

lider

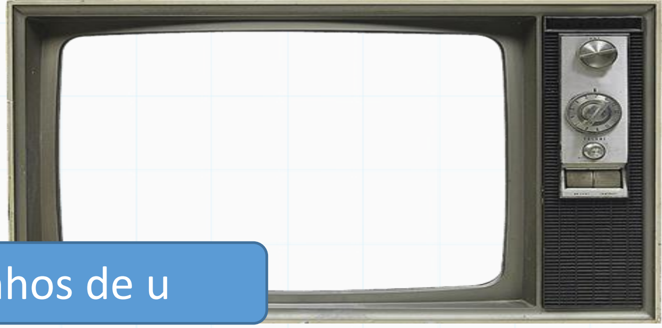
x_11 = 1
x_13 = 1
x_15=1

Restrições:

todo vértice tem que ser representado



Fortalecendo Formulações



Definições:

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u

- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MENOR

- $\overline{N}^{>}(u)$: vértices na anti-vizinhança maior de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MAIOR

Variáveis:

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se o vért. } u \in V \text{ representa vert. } v \in \overline{N}^{>}(u) \cup \{u\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

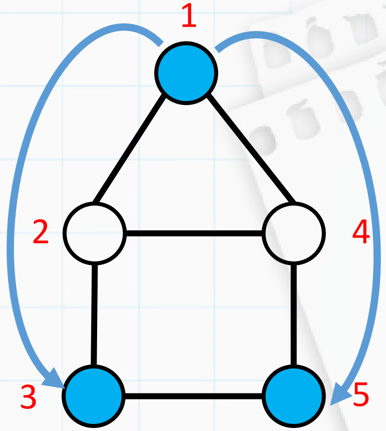
lider

x_11 = 1
x_13 = 1
x_15=1

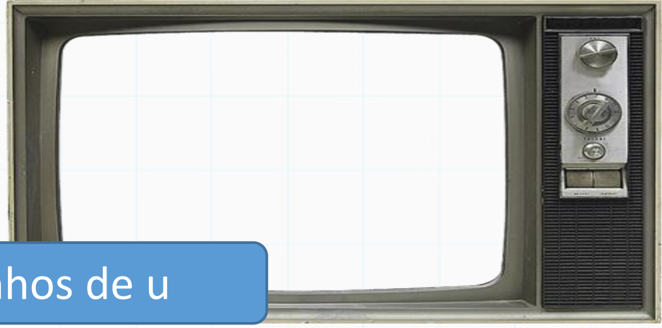
Restrições:

$$x_{uu} + \sum_{v \in \overline{N}^{<}(u)} x_{vu} = 1, \quad \forall u \in V$$

todo vértice tem que ser representante ou representado



Fortalecendo Formulações



Definições:

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u

- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MENOR

- $\overline{N}^{>}(u)$: vértices na anti-vizinhança maior de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MAIOR

Variáveis:

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se o vért. } u \in V \text{ representa vert. } v \in \overline{N}^{>}(u) \cup \{u\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

lider

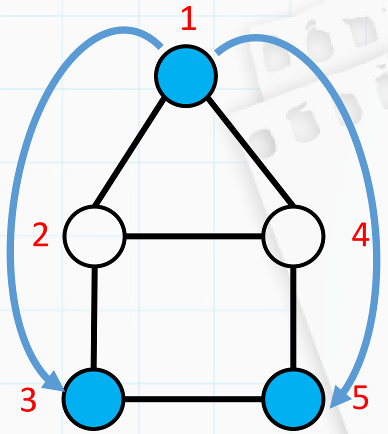
x_11 = 1
x_13 = 1
x_15=1

Restrições:

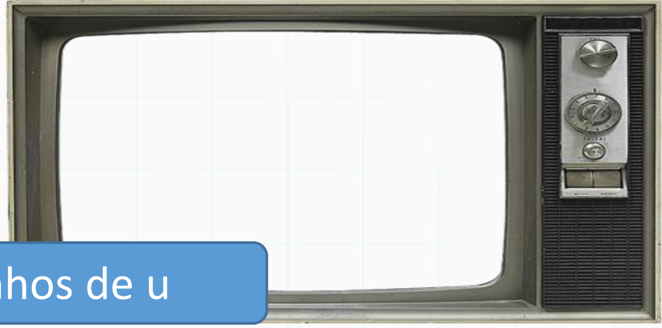
$$x_{uu} + \sum_{v \in \overline{N}^{<}(u)} x_{vu} = 1, \quad \forall u \in V$$

todo vértice tem que ser representante ou representado

conflito de cores (representantes)



Fortalecendo Formulações



Definições:

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u

- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MENOR

- $\overline{N}^{>}(u)$: vértices na anti-vizinhança maior de $u \in V$

Que NÃO são vizinhos de u e tem índice MAIOR

Variáveis:

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se o vért. } u \in V \text{ representa vert. } v \in \overline{N}^{>}(u) \cup \{u\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

lider

x_11 = 1
x_13 = 1
x_15=1

Restrições:

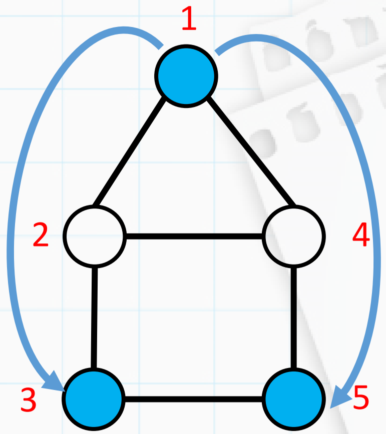
$$x_{uu} + \sum_{v \in \overline{N}^{<}(u)} x_{vu} = 1, \quad \forall u \in V$$

todo vértice tem que ser representante ou representado

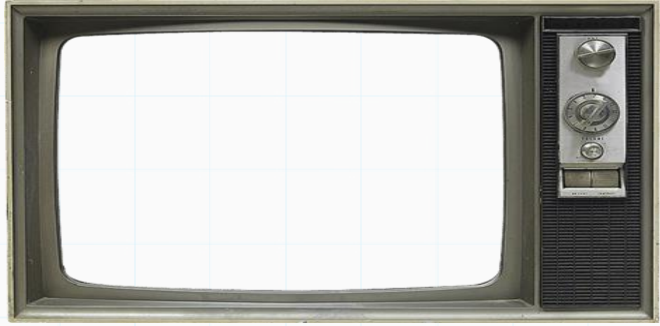
$$x_{uv} + x_{uw} \leq \cancel{1}(x_{uu}), \quad \forall u \in V, \forall vw \in E$$

$$\text{onde } v \in \overline{N}^{>}(u) \text{ e } w \in \overline{N}^{>}(u)$$

conflito de cores (representantes)



Fortalecendo Formulações



Definições:

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$
- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$
- $\overline{N}^{>}(u)$: vértices na anti-vizinhança maior de $u \in V$

integralidade

$$x_{uv} \in \{0, 1\}, \quad \forall u \in V, \forall v \in \overline{N}^{>}(u)$$

Variáveis:

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se o vért. } u \in V \text{ representa vert. } v \in \overline{N}^{>}(u) \cup \{u\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

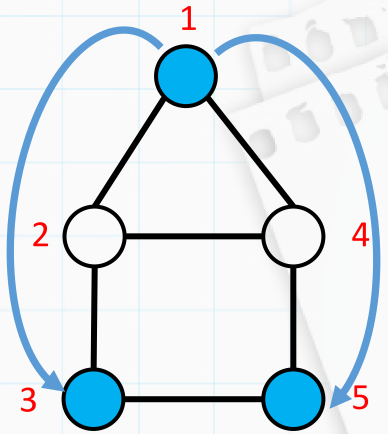
$$x_{uu} + \sum_{v \in \overline{N}^{<}(u)} x_{vu} = 1, \quad \forall u \in V$$

todo vértice tem que ser representante ou representado

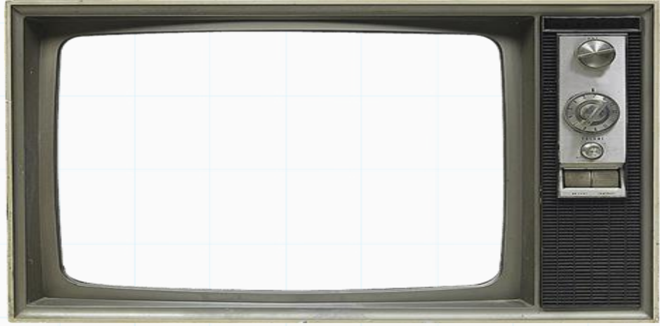
$$x_{uv} + x_{uw} \leq \cancel{1}(x_{uu}), \quad \forall u \in V, \forall vw \in E$$

conflito de cores (representantes)

onde $v \in \overline{N}^{>}(u)$ e $w \in \overline{N}^{>}(u)$



Fortalecendo Formulações



Definições:

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$
- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$
- $\overline{N}^{>}(u)$: vértices na anti-vizinhança maior de $u \in V$

Variáveis:

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se o vért. } u \in V \text{ representa vert. } v \in \overline{N}^{>}(u) \cup \{u\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

integralidade

$$x_{uv} \in \{0,1\},$$
$$\forall u \in V, \forall v \in \overline{N}^{>}(u)$$

Restrições:

$$x_{uu} + \sum_{v \in \overline{N}^{<}(u)} x_{vu} = 1, \quad \forall u \in V$$

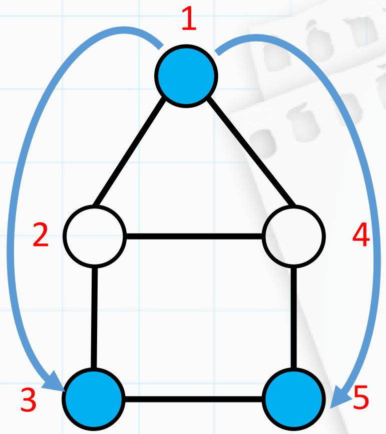
todo vértice tem que ser representante ou representado

$$x_{uv} + x_{uw} \le \cancel{1}\, x_{uu}, \quad \forall u \in V, \forall vw \in E$$

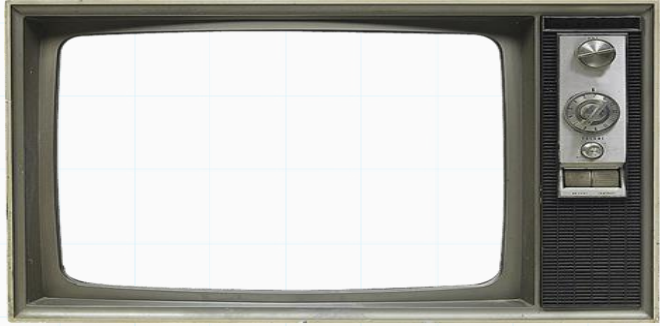
onde $v \in \overline{N}^{>}(u)$ e $w \in \overline{N}^{>}(u)$

conflito de cores (representantes)

Função Objetivo:



Fortalecendo Formulações



Definições:

- $\overline{N}(u)$: vértices na anti-vizinhança de $u \in V$
- $\overline{N}^{<}(u)$: vértices na anti-vizinhança menor de $u \in V$
- $\overline{N}^{>}(u)$: vértices na anti-vizinhança maior de $u \in V$

Variáveis:

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{se o vért. } u \in V \text{ representa vert. } v \in \overline{N}^{>}(u) \cup \{u\} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Restrições:

$$x_{uu} + \sum_{v \in \overline{N}^{<}(u)} x_{vu} = 1, \quad \forall u \in V$$

todo vértice tem que ser representante ou representado

$$x_{uv} + x_{uw} \leq \cancel{1}(x_{uu}), \quad \forall u \in V, \forall vw \in E$$

$$\text{onde } v \in \overline{N}^{>}(u) \text{ e } w \in \overline{N}^{>}(u)$$

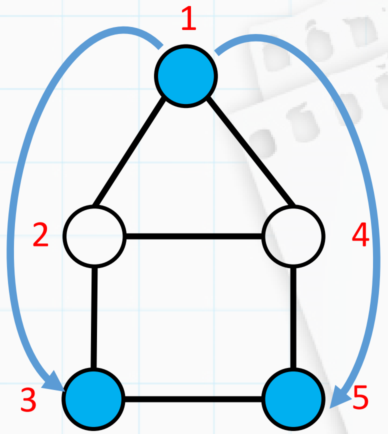
conflito de cores (representantes)

integralidade

$$x_{uv} \in \{0,1\},$$
$$\forall u \in V, \forall v \in \overline{N}^{>}(u)$$

Função Objetivo:

$$\min \sum_{u \in V} x_{uu}$$



Considere o Problema de coloração de vértices modelado com Representantes.

Observações

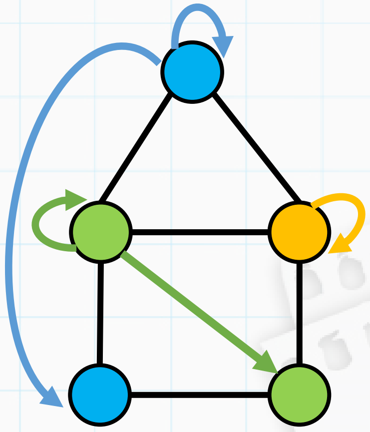
1) O modelo é correto apenas para grafos conexos. Porque ?
2) Como concertar o modelo para considerar grafos que podem não ser conexos ?
3) É possível fortificar o modelo dos representantes com cortes cliques (visto na aula passada), como ficaria estes cortes no modelo ?
4) Devido como definimos as variáveis do problema, permitindo a representação apenas de vértices com índices maiores, temos que um grupo de variáveis podem já ser fixadas com valor 1, quais são e porque ?

$$\min \sum_{u \in V} x_{uu}$$

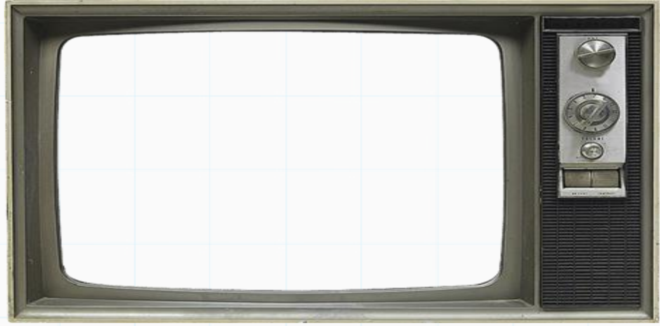
$$x_{uu} + \sum_{v \in \overline{N}^{<}(u)} x_{vu} = 1, \quad \forall u \in V$$

$$x_{uv} + x_{uw} \leq 1 (x_{uu}), \quad \forall u \in V, \forall vw \in E$$

$$\text{onde } v \in \overline{N}^{>}(u) \text{ e } w \in \overline{N}^{>}(u)$$

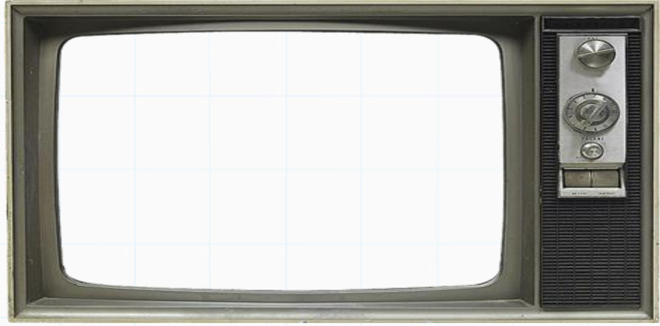


Fortalecendo Formulações

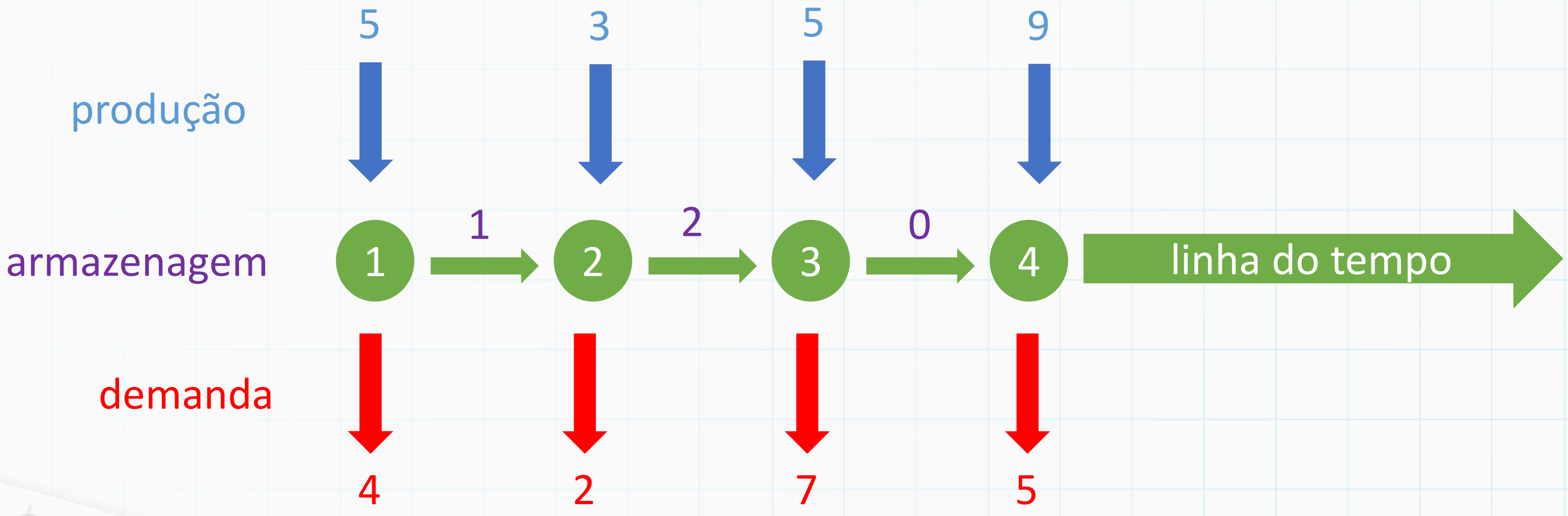


Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

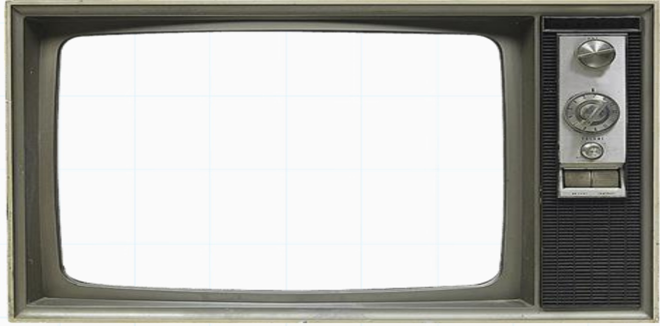
Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

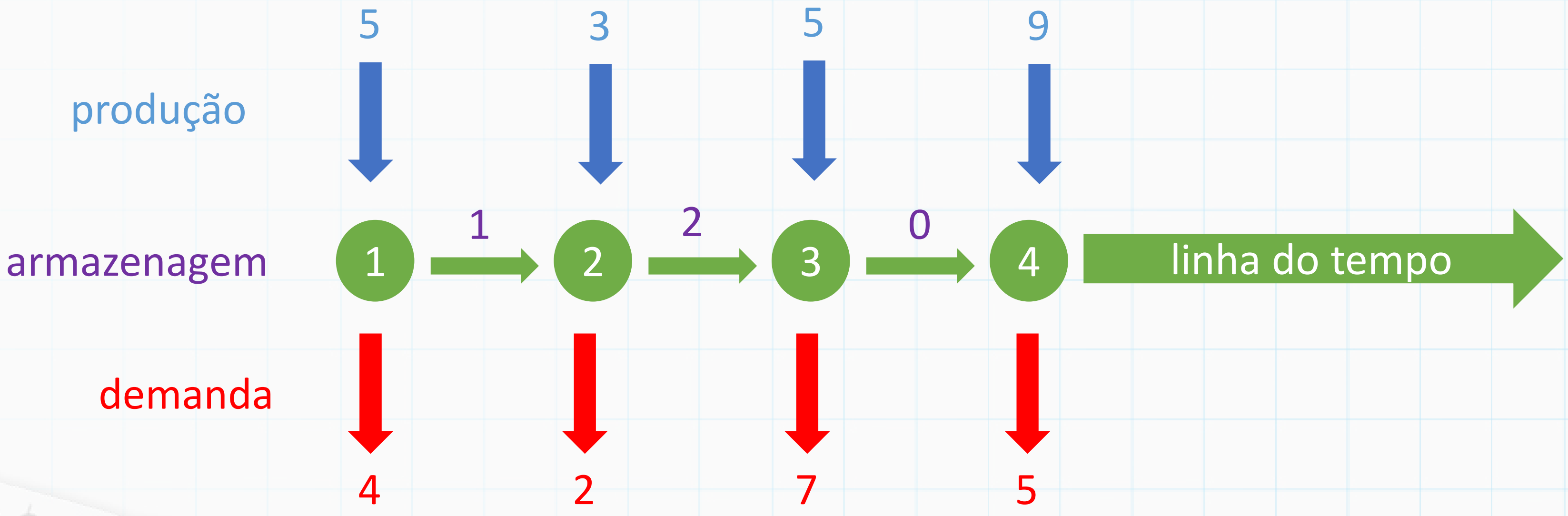


Fortalecendo Formulações

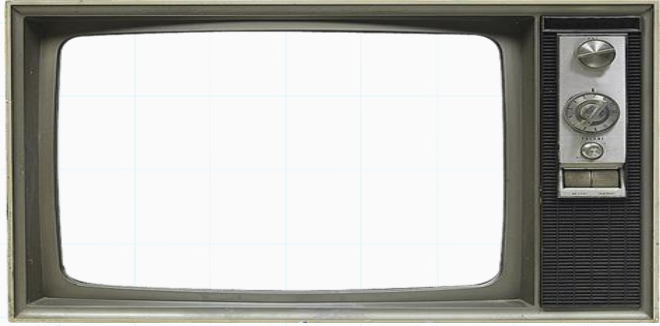


<u>Problema de Lot-Sizing</u>: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t

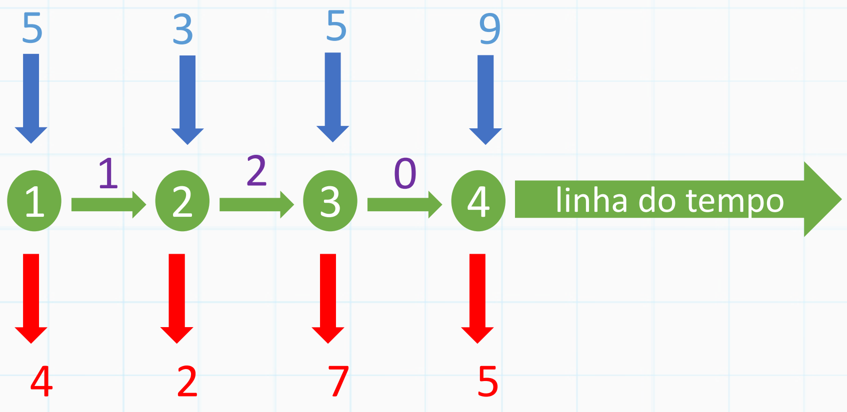


Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

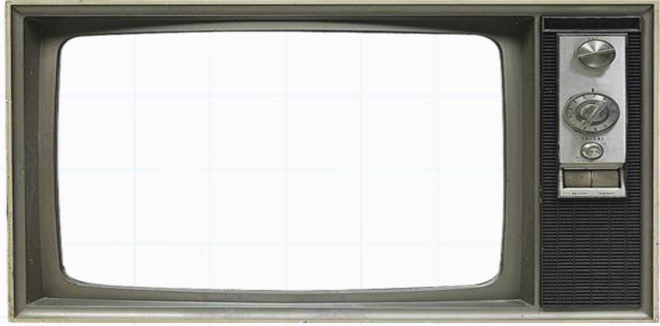
d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t



Variáveis:

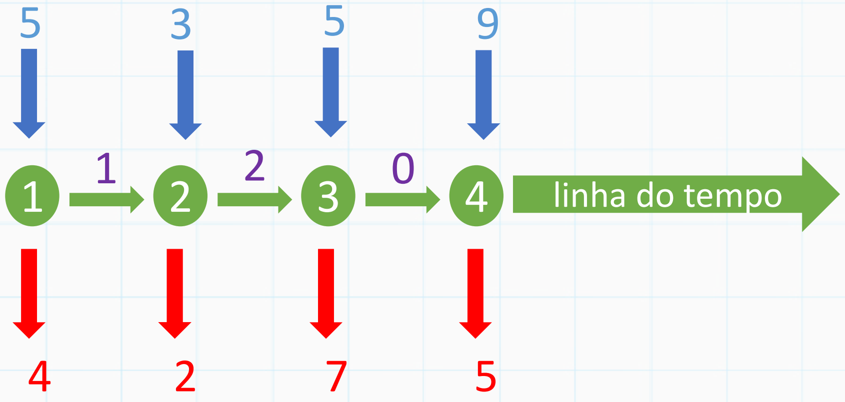
x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)

Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t



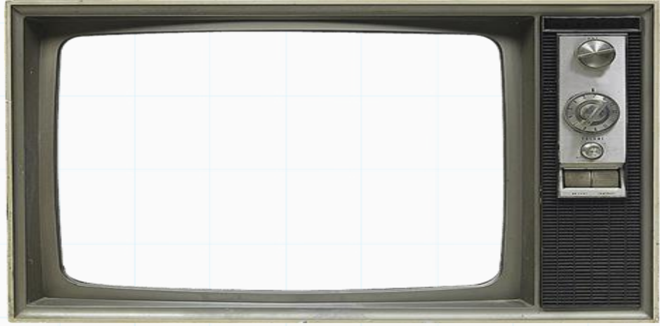
Variáveis:

x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)

Restrições:

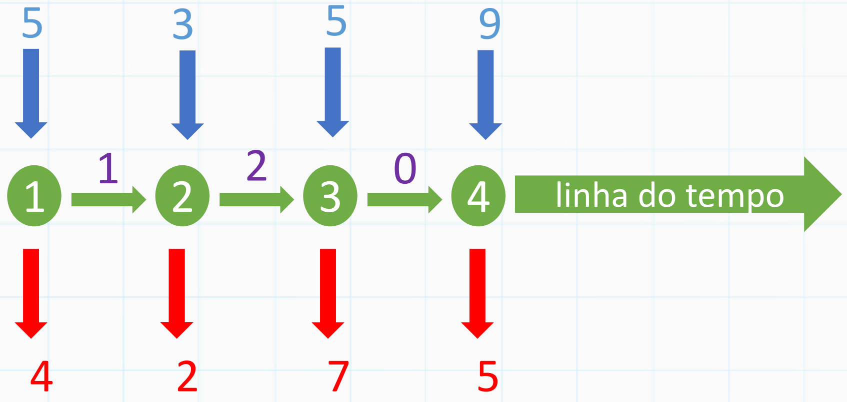
para um período t, tem que manter consistência entre:
- o que tinha armazenado
- o que foi produzido
- a demanda do período
- o que sobrou

Fortalecendo Formulações



<u>Problema de Lot-Sizing</u>: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t



<u>Variáveis</u>:

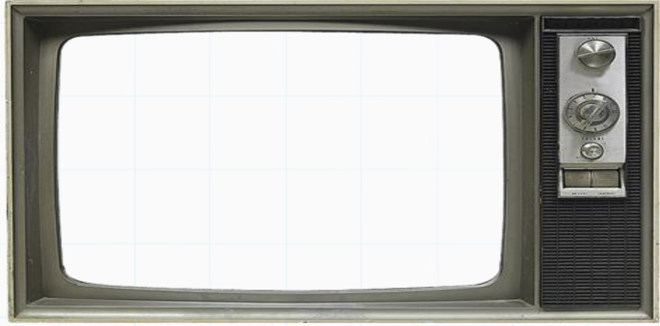
x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)

<u>Restrições</u>:

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1...n$$

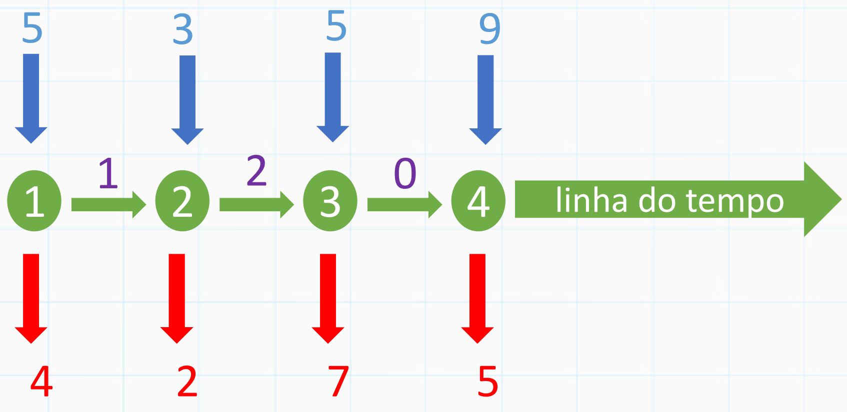
para um período t, tem que manter consistência entre:
- o que tinha armazenado
- o que foi produzido
- a demanda do período
- o que sobrou

Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t



Variáveis:

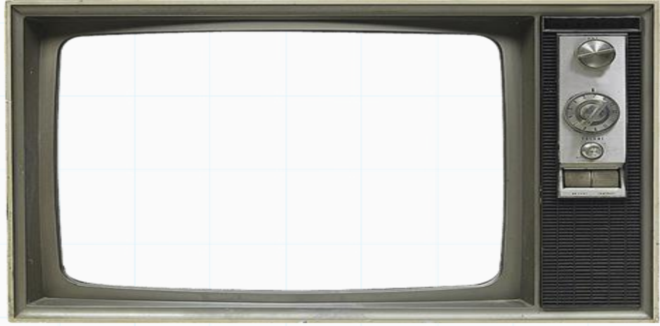
x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)

Restrições:

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1...n$$

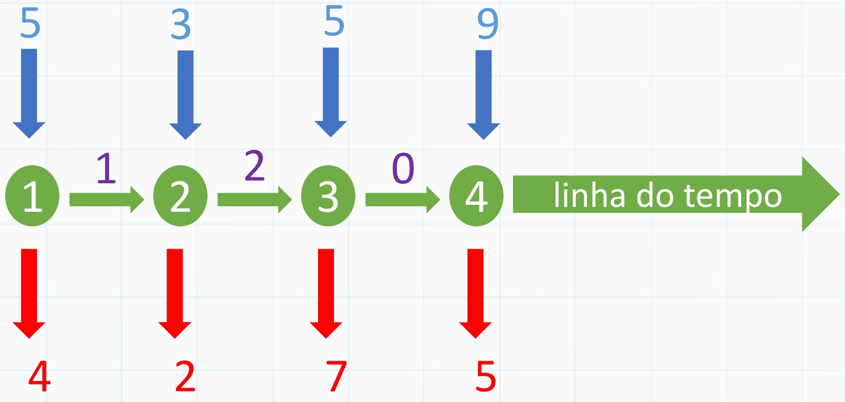
link entre as variáveis x e y
(produção variável e fixa)

Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t



Variáveis:

x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)

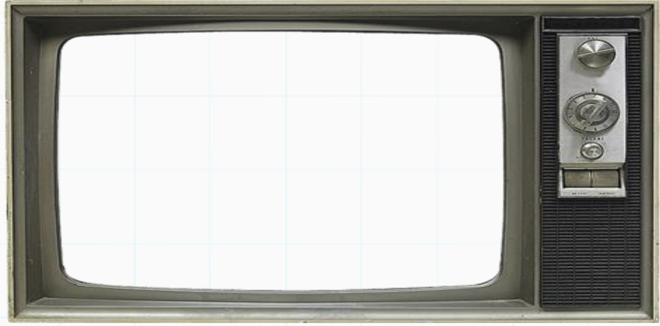
Restrições:

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

$$x_t \leq M y_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

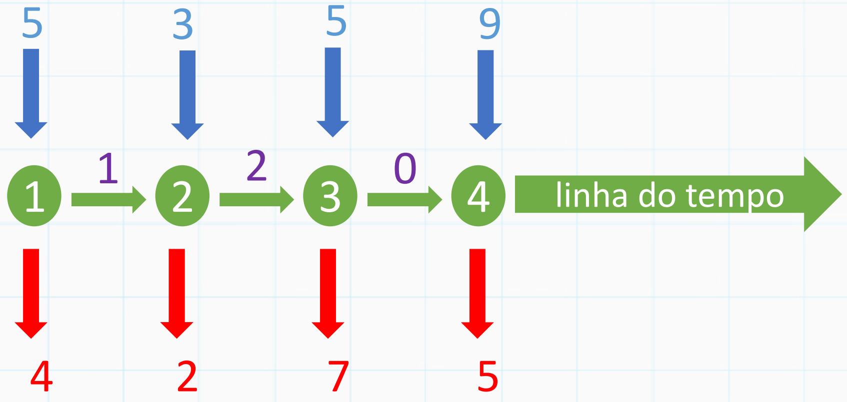
link entre as variáveis x e y (produção variável e fixa)

Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t



Variáveis:

x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)

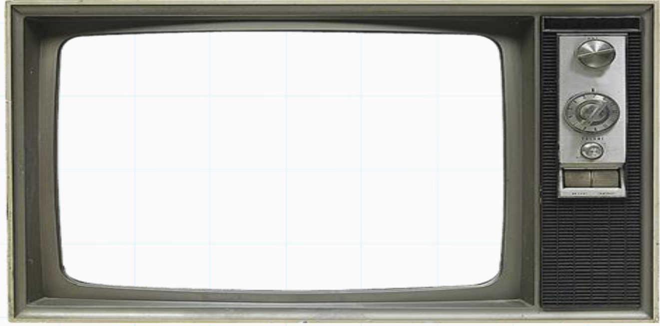
Restrições:

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

$$x_t \leq M y_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

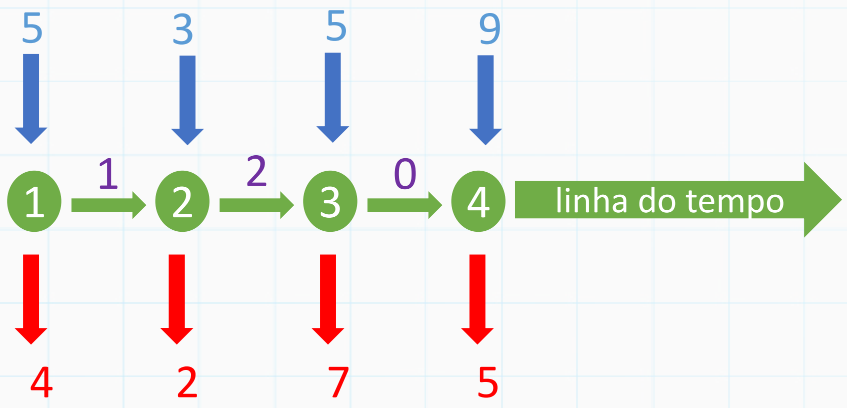
não pode haver sobras no fim do horizonte

Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t



Variáveis:

x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)

Restrições:

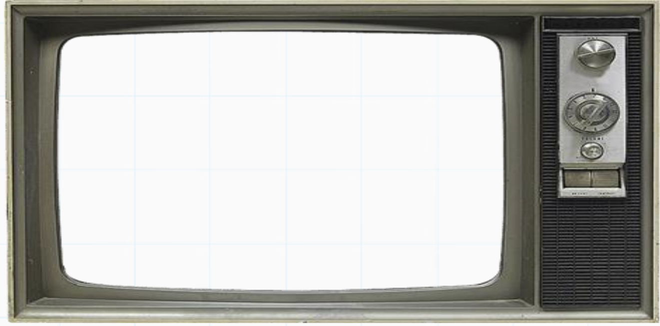
$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1...n$$

$$x_t \leq M y_t, \quad \forall t = 1...n$$

$$s_n = 0$$

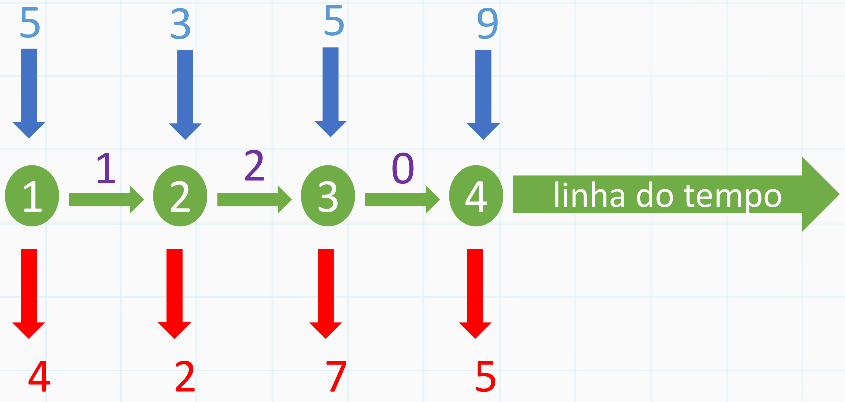
não pode haver sobras no fim do horizonte

Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t



Variáveis:

x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)

integralidade e ñ negatividade

$$s_t, x_t \geq 0 \text{ e } y_t \in \{0,1\}, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

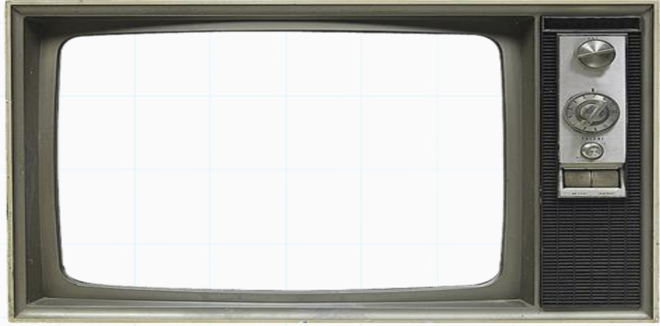
Restrições:

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

$$x_t \leq M y_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

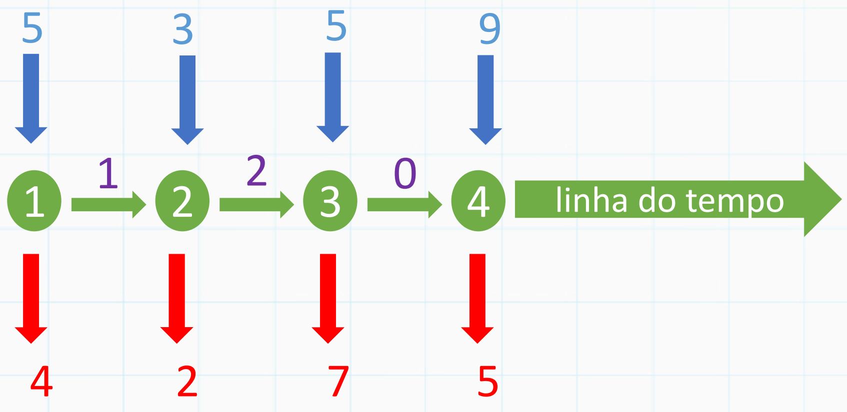
$$s_n = 0$$

Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t



Variáveis:

x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)

integralidade e
ñ negatividade

$$s_t, x_t \geq 0 \text{ e } y_t \in \{0,1\}, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

Restrições:

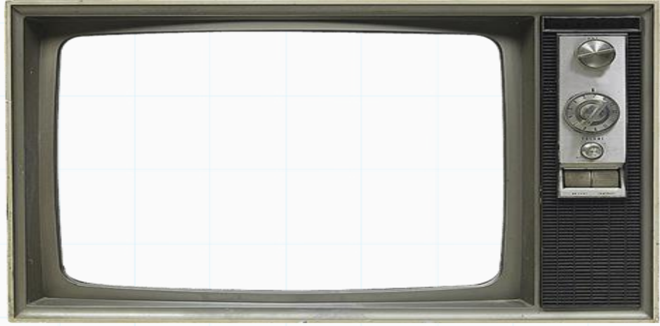
$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

$$x_t \leq M y_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

$$s_n = 0$$

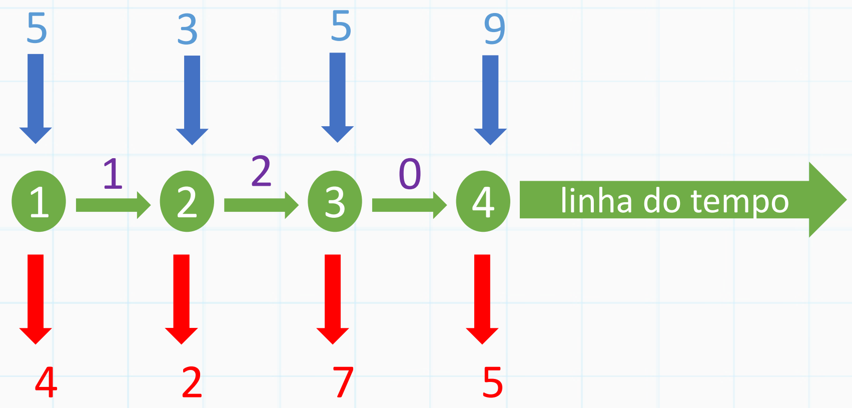
Função Objetivo:

Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Queremos minimizar os custos de produção, armazenamento e inicialização numa fábrica em um horizonte de n períodos de tempo, onde:

d_t -> demanda do período t
f_t -> custo fixo de se produzir no período t
p_t -> custo de se produzir uma unidade no período t
h_t -> custo de se armazenar uma unidade no período t



Variáveis:

x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)

integralidade e
ñ negatividade

$$s_t, x_t \geq 0 \text{ e } y_t \in \{0, 1\}, \quad \forall t = 1...n$$

Restrições:

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1...n$$

$$x_t \leq M y_t, \quad \forall t = 1...n$$

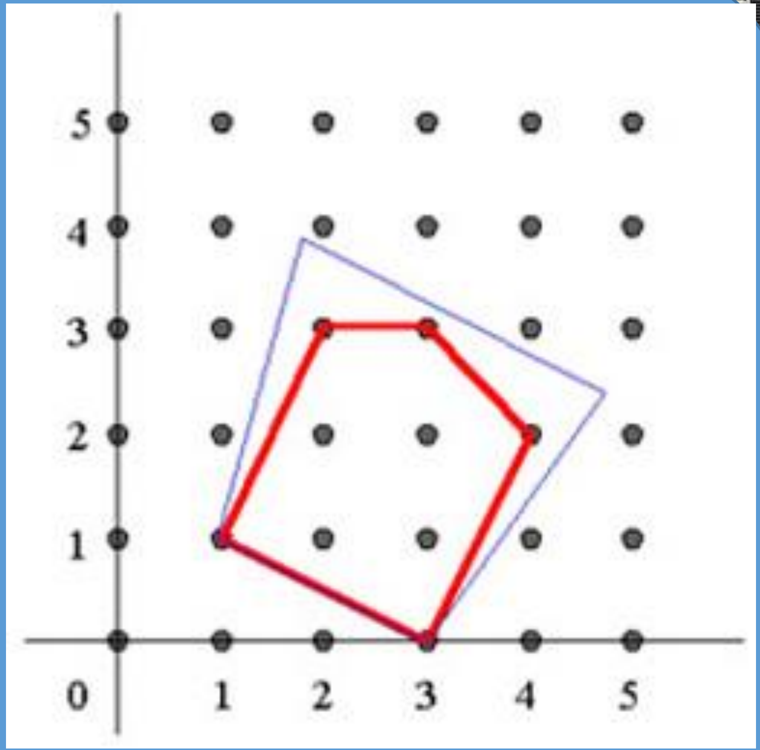
$$s_n = 0$$

Função Objetivo:

$$\min \sum_{t=1}^{n} (p_t x_t + h_t s_t + f_t y_t)$$

Fortalecendo Formulações

Quanto maior valor de M ->
maior será o domínio da variável x ->
mais frouxa/distante vai ser a modelagem em relação aos pontos inteiros ->
mais soluções para procurar ->
mais demorado.



$s_t, x_t \geq 0$ e y_t ...

Restrições:

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

$$\boxed{x_t \leq M y_t,} \quad \forall t = 1 \ldots n$$

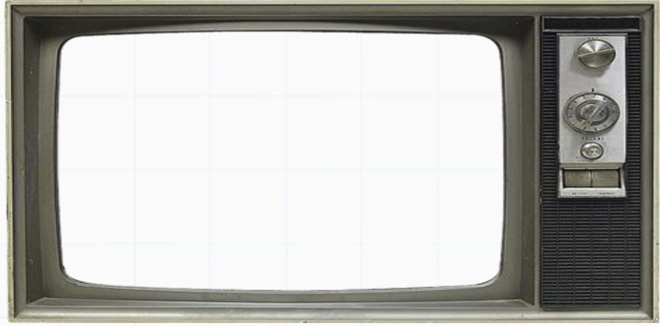
$$s_n = 0$$

um bom chute?

Função Objetivo:

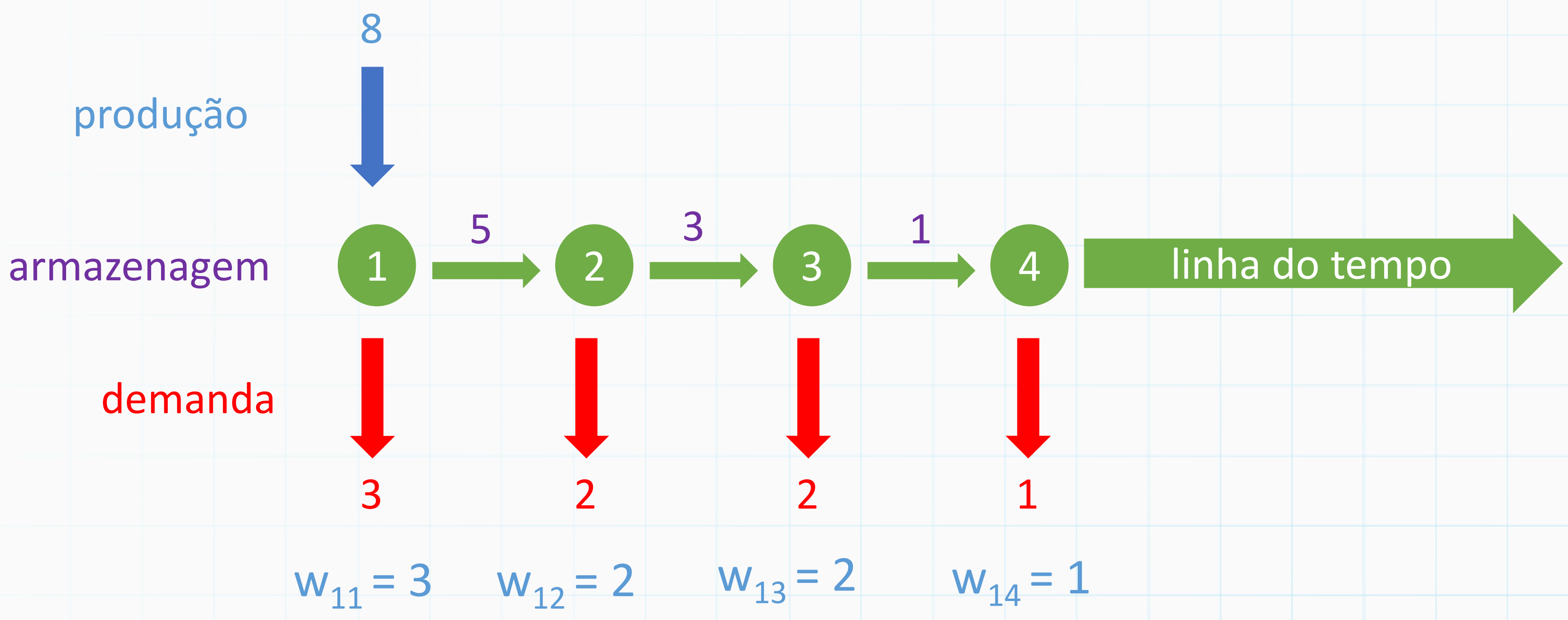
$$\min \sum_{t=1}^{n} (p_t x_t + h_t s_t + f_t y_t)$$

Fortalecendo Formulações

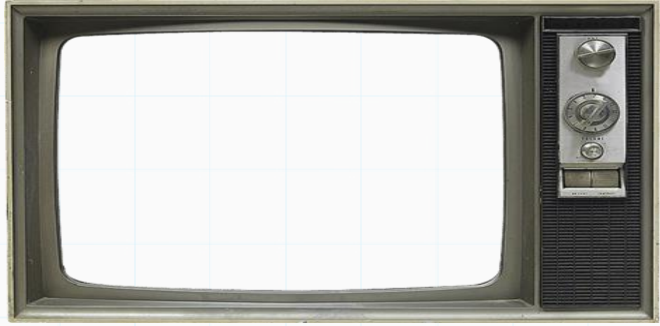


<u>Problema de Lot-Sizing</u>: Como fortalecer ? Tentar tirar esse big M

- Definir variável w_{it} como qtd produzida no período i destinada a atender uma demanda no período t, onde $t >= i$.

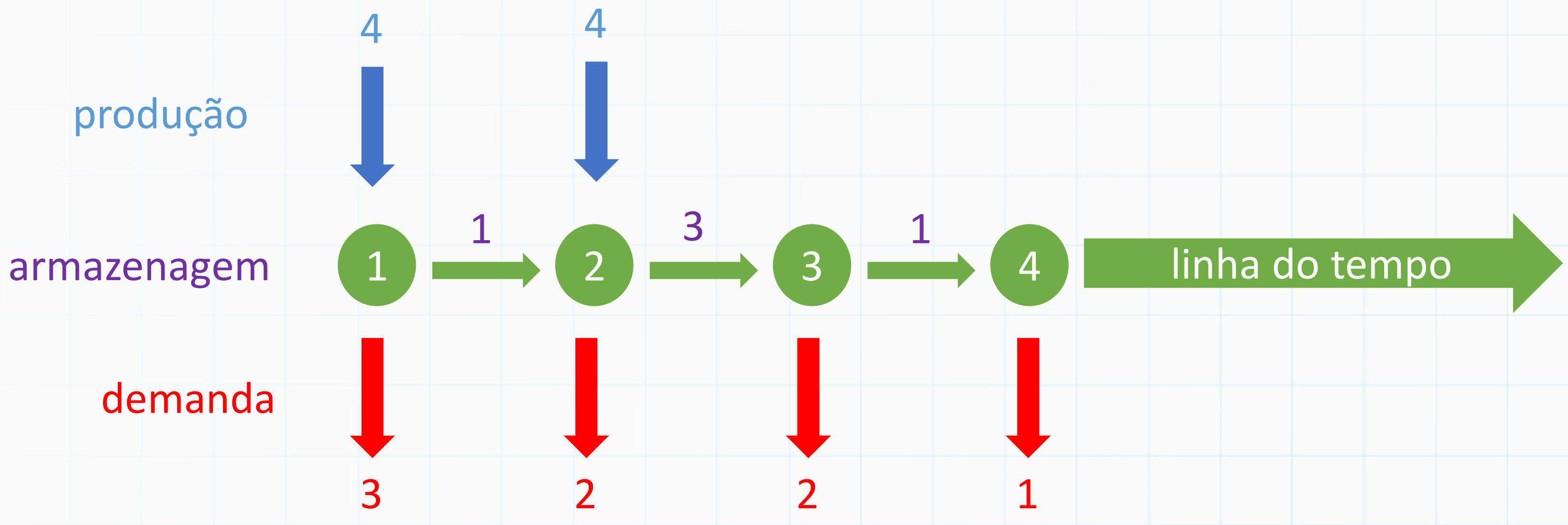


Fortalecendo Formulações



<u>Problema de Lot-Sizing</u>: Como fortalecer ? Tentar tirar esse big M

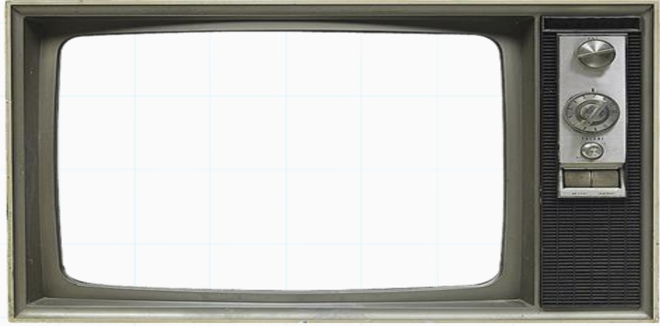
- Definir variável w_{it} como qtd produzida no período i destinada a atender uma demanda no período t, onde t >= i.



$w_{11} = 3$ $w_{12} = 0$ $w_{13} = 0$ $w_{14} = 1$

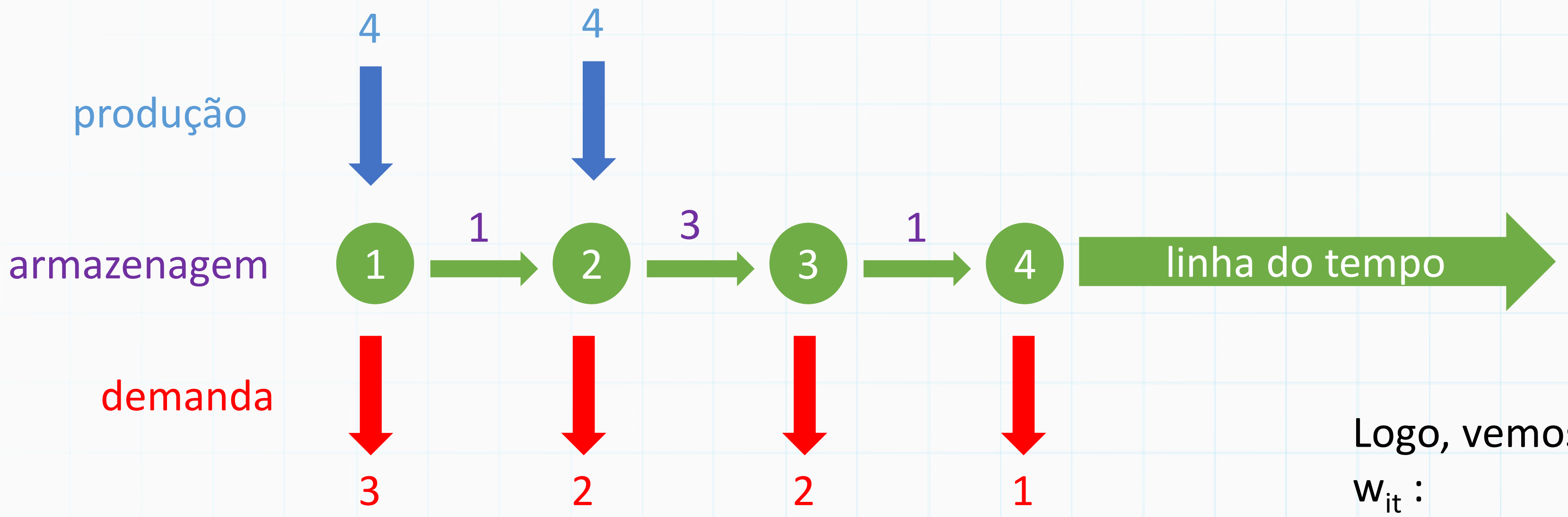
$w_{22} = 2$ $w_{23} = 2$ $w_{24} = 0$

Fortalecendo Formulações



<u>Problema de Lot-Sizing</u>: Como fortalecer ? Tentar tirar esse big M

- Definir variável w_{it} como qtd produzida no período i destinada a atender uma demanda no período t, onde $t >= i$.



$w_{11} = 3$

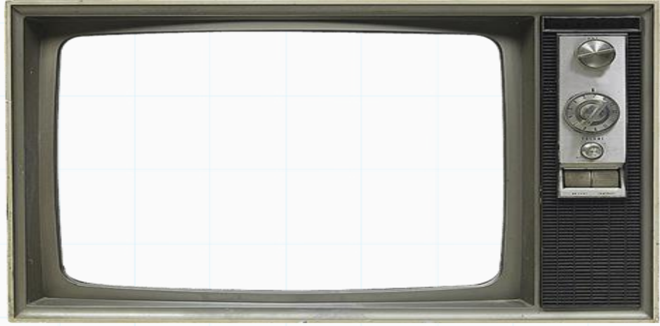
$w_{12} = 0$
$w_{22} = 2$

$w_{13} = 0$
$w_{23} = 2$

$w_{14} = 1$
$w_{24} = 0$

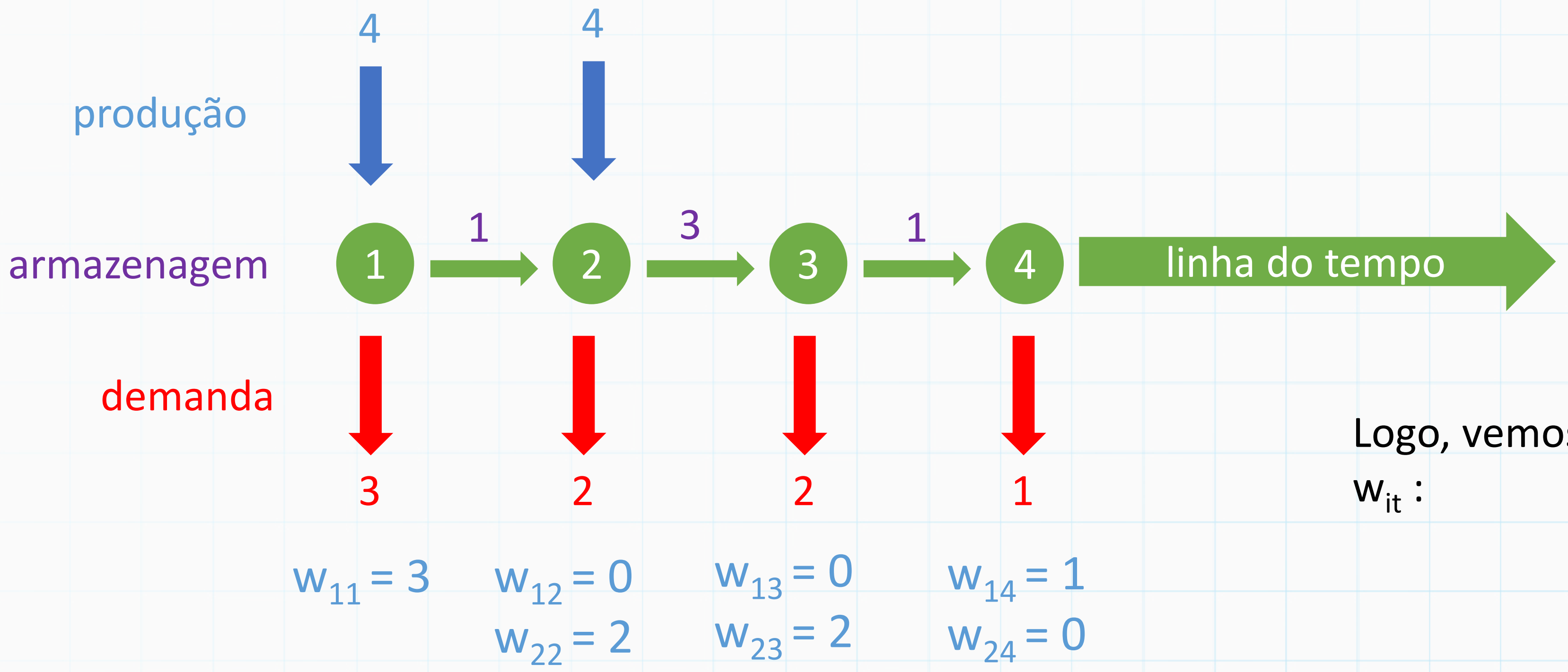
Logo, vemos que x_i pode ser escrito em função de w_{it} :

Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Como fortalecer ? Tentar tirar esse big M

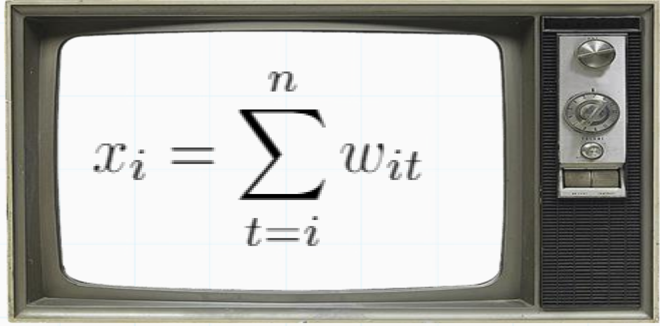
- Definir variável w_{it} como qtd produzida no período i destinada a atender uma demanda no período t, onde $t >= i$.



Logo, vemos que x_i pode ser escrito em função de w_{it} :

$$x_i = \sum_{t=i}^{n} w_{it}$$

Fortalecendo Formulações



$$x_i = \sum_{t=i}^{n} w_{it}$$

Problema de Lot-Sizing: Podemos então substituir a variável x pela w, logo

$$\min \sum_{t=1}^{n} (p_t x_t + h_t s_t + f_t y_t)$$

$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

$$x_t \leq M y_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

$$s_n = 0$$

$$s_t, x_t \geq 0 \text{ e } y_t \in \{0,1\}, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

$$\min \sum_{t=1}^{n} (p_t (\sum_{j=t}^{n} w_{tj}) + h_t s_t + f_t y_t)$$

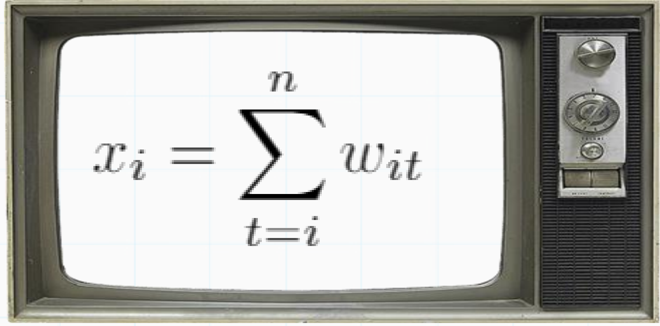
$$s_{t-1} + \sum_{j=t}^{n} w_{tj} = d_t + s_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

Como fica ?

$$s_n = 0$$

$$s_t, w_{it} \geq 0 \text{ e } y_t \in \{0,1\}, \quad \forall i, t = 1 \ldots n \text{ e } i \leq t$$

Fortalecendo Formulações



Problema de Lot-Sizing: Podemos então substituir a variável x pela w, logo

$$\min \sum_{t=1}^{n} (p_t x_t + h_t s_t + f_t y_t)$$
$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$
$$x_t \leq M y_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$
$$s_n = 0$$
$$s_t, x_t \geq 0 \text{ e } y_t \in \{0,1\}, \quad \forall t = 1 \ldots n$$

$$\min \sum_{t=1}^{n} (p_t (\sum_{j=t}^{n} w_{tj}) + h_t s_t + f_t y_t)$$
$$s_{t-1} + \sum_{j=t}^{n} w_{tj} = d_t + s_t, \quad \forall t = 1 \ldots n$$
$$w_{it} \leq d_t y_i, \quad \forall i, t = 1 \ldots n \text{ e } i \leq t$$
$$s_n = 0$$
$$s_t, w_{it} \geq 0 \text{ e } y_t \in \{0,1\}, \quad \forall i, t = 1 \ldots n \text{ e } i \leq t$$

Ficou um Big M bem apertado

Considere o Problema de Lot-Sizing original onde iremos considerar agora mais algumas restrições operacionais de execução que geralmente ocorrem:

Exercícios

1) Cada período t tem um limite L_t de unidades que podem ser produzidas nele.
2) Em um subconjunto de períodos $B \subseteq \{1,\dots,n\}$ ocorre limpeza do armazém e nestes períodos não deve ter nada armazenado.
3) Não se pode produzir por mais de 2 períodos consecutivos.
4) Considere agora o problema de Lot-Sizing com cobrança fixa de armazenagem, onde o custo do armazém tem valor fixo de uso h (se usado), não importando a quantidade armazenada, como ficaria o modelo ?

$$\min \sum_{t=1}^{n} (p_t x_t + h_t s_t + f_t y_t)$$

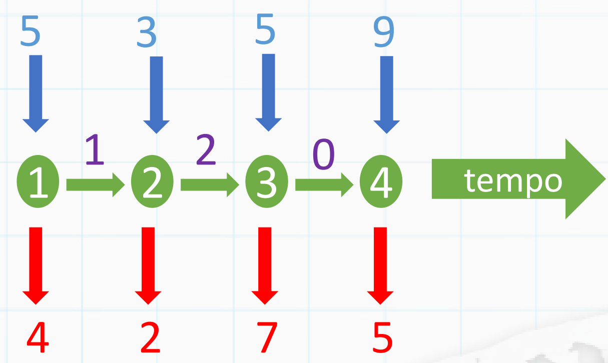
$$s_{t-1} + x_t = d_t + s_t, \quad \forall t = 1 \dots n$$

$$x_t \leq M y_t, \quad \forall t = 1 \dots n$$

$$s_n = 0$$

Variáveis:

x_t : qtd. produzida no período t (contínua)
s_t : o estoque no final do período t (contínua)
y_t : 1, se algo foi produzido no período t e 0 c.c. (binária)



3) Vamos modelar com as variáveis y, uma restrição para cada período de tempo
4) Precisaremos de variáveis novas binárias para indicar o uso ou não do armazém em cada período de tempo

Até a próxima