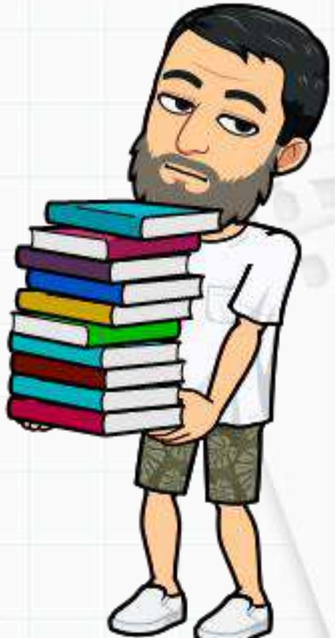
Programação Linear

Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pl.html

yuri@ic.uff.br



Histórico da Programação Linear

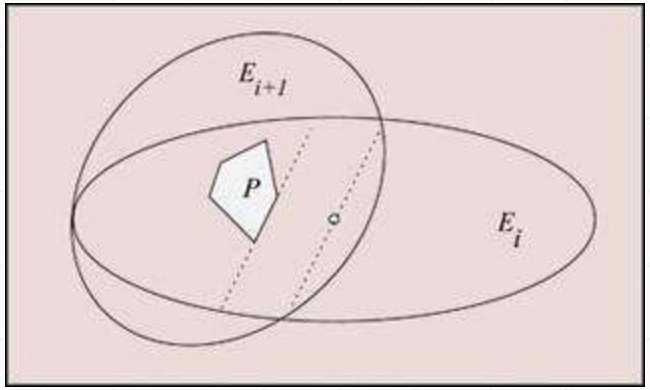
- Fourier (1826) : Primeiro algoritmo a solucionar um PL (não muito eficiente)

Histórico da Programação Linear

- Fourier (1826) : Primeiro algoritmo a solucionar um PL (não muito eficiente)
- Dantizig (1947): Resultados teóricos e computacionais do Simplex
    - Bons resultados práticos & Complexidade Exponencial

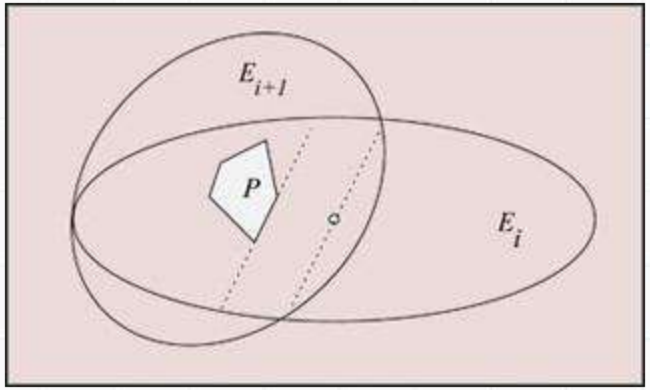
Histórico da Programação Linear

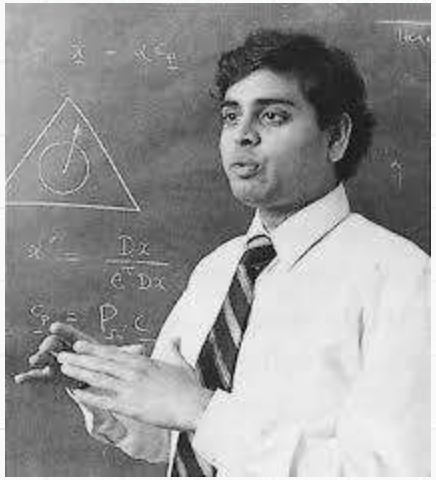
- Fourier (1826) : Primeiro algoritmo a solucionar um PL (não muito eficiente)
- Dantizig (1947): Resultados teóricos e computacionais do Simplex
  - Bons resultados práticos & Complexidade Exponencial
- Kachian (1979): Método das Elipsoides
  - Resultados ruins na prática & Complexidade Polinomial



Histórico da Programação Linear

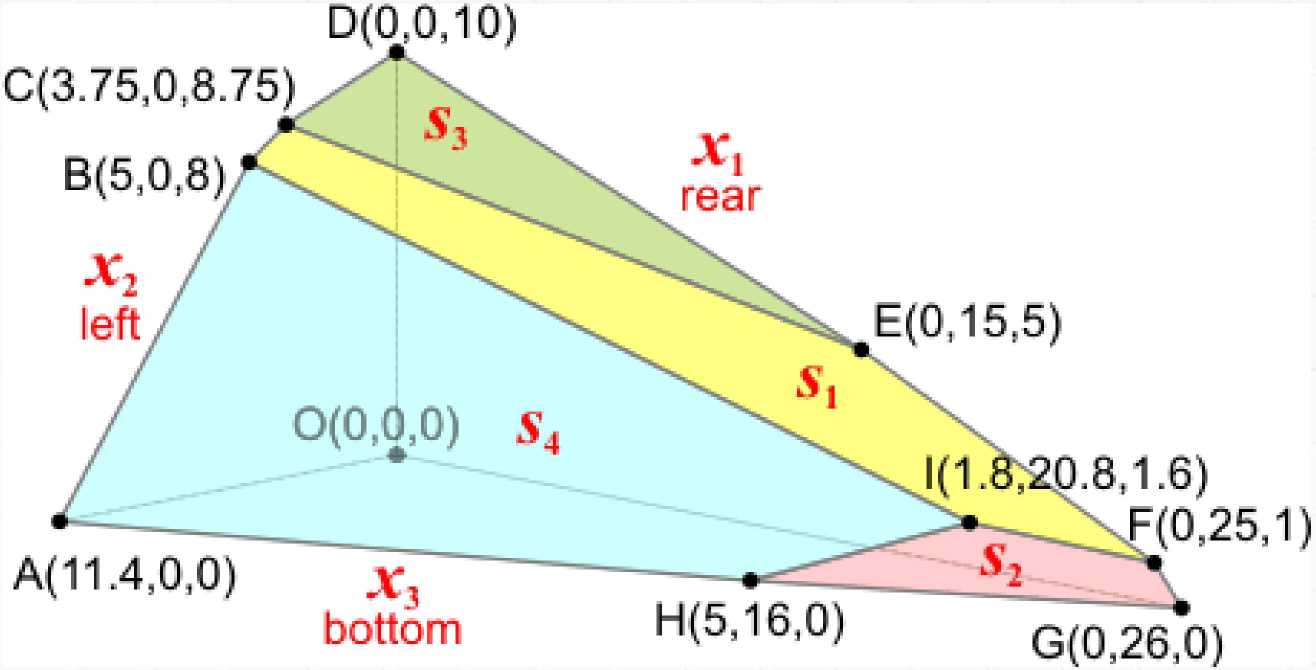
- Fourier (1826) : Primeiro algoritmo a solucionar um PL (não muito eficiente)
- Dantizig (1947): Resultados teóricos e computacionais do Simplex
  - Bons resultados práticos & Complexidade Exponencial
- Kachian (1979): Método das Elipsoides
  - Resultados ruins na prática & Complexidade Polinomial
- Karmarkar (1984): Método dos pontos interiores
  - Bons resultados práticos & Complexidade Polinomial



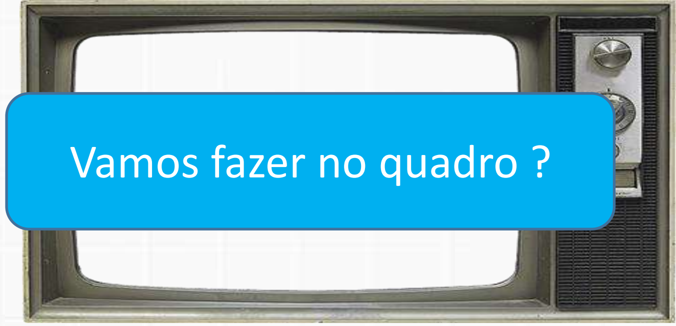


Método Gráfico

- Vamos começar vendo o Método gráfico para solucionar PPLs
- Limitado para 2 variáveis, 3 já fica difícil



Método Gráfico



- Seja o seguinte PPI

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 11x_1 + 12x_2 \\
s.a. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1) \\
& 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Método Gráfico

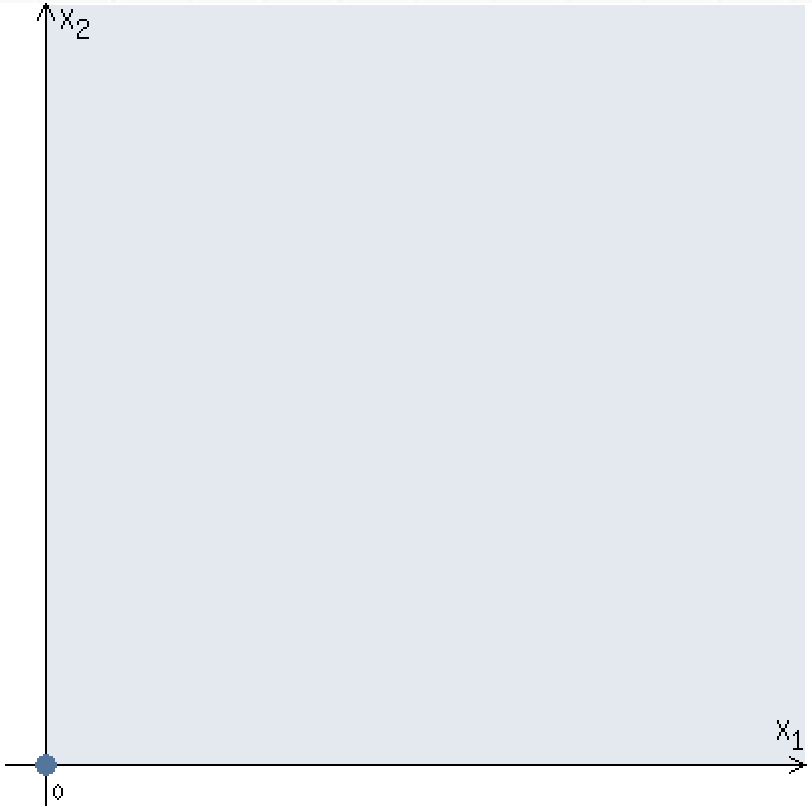
- Vamos definir a região de pontos viáveis

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



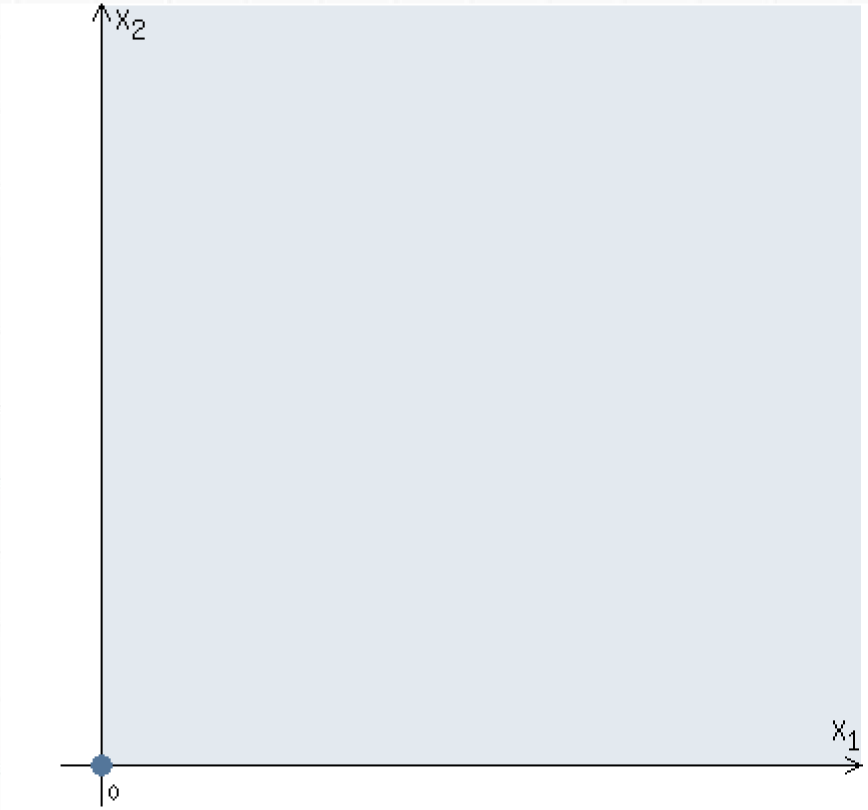
Método Gráfico

- Vamos definir a região de pontos viáveis

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$
$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 4x_2 = 10$$

equação da reta, interseção no eixo x1 e x2



Método Gráfico

- Vamos definir a região de pontos viáveis

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

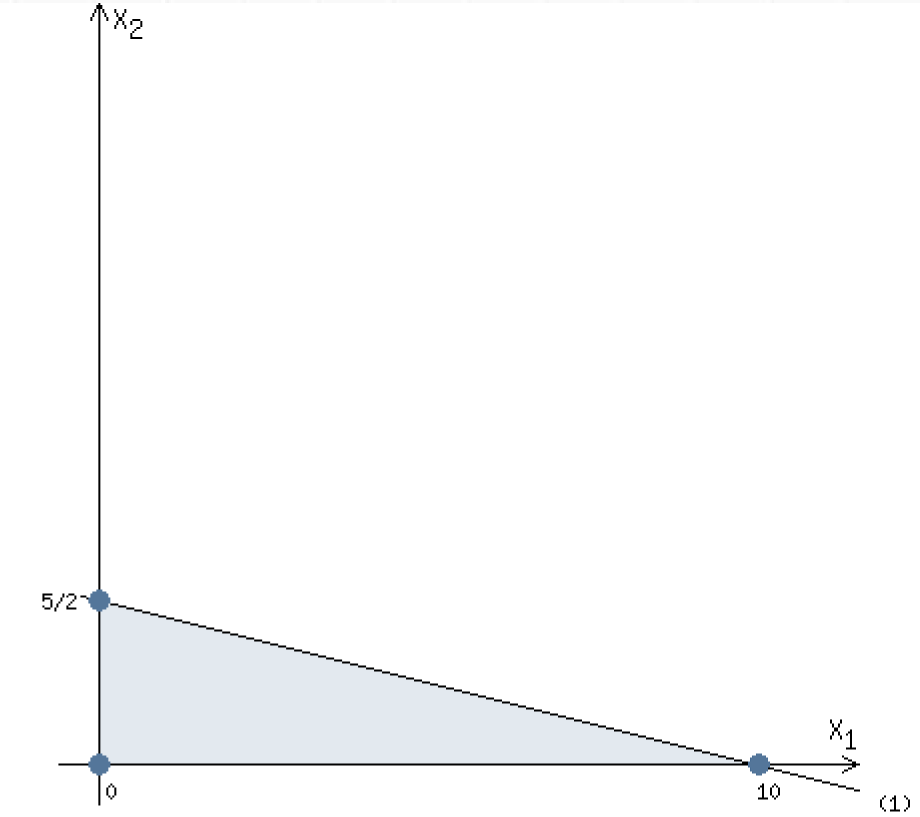
$$x_1 + 4x_2 = 10$$

equação da reta, interseção no eixo x1 e x2

$$4x_2 = 10$$

$$\boxed{x_1 = 10}$$

$$\boxed{x_2 = 5/2}$$



Método Gráfico

- Vamos definir a região de pontos viáveis

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

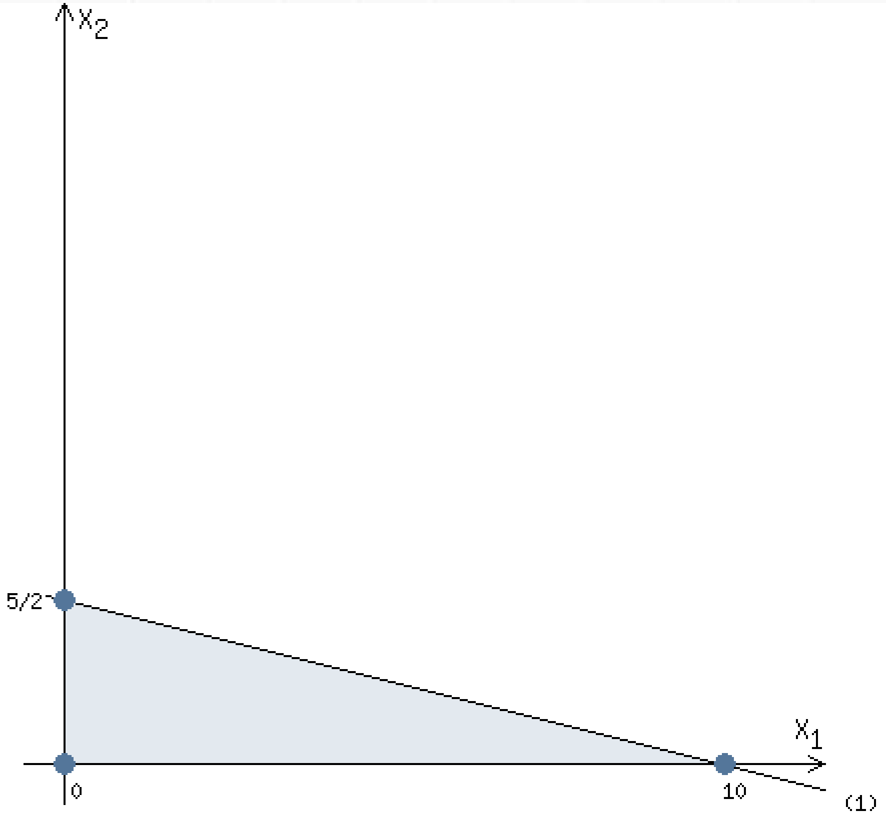
$$x_1 + 4x_2 = 10$$

equação da reta, interseção no eixo x1 e x2

$$4x_2 = 10 \qquad \boxed{x_1 = 10}$$

$$\boxed{x_2 = 5/2}$$

Ponto (0,0) é viável ? Então a região viável é abaixo da reta.



Método Gráfico

- Vamos definir a região de pontos viáveis

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

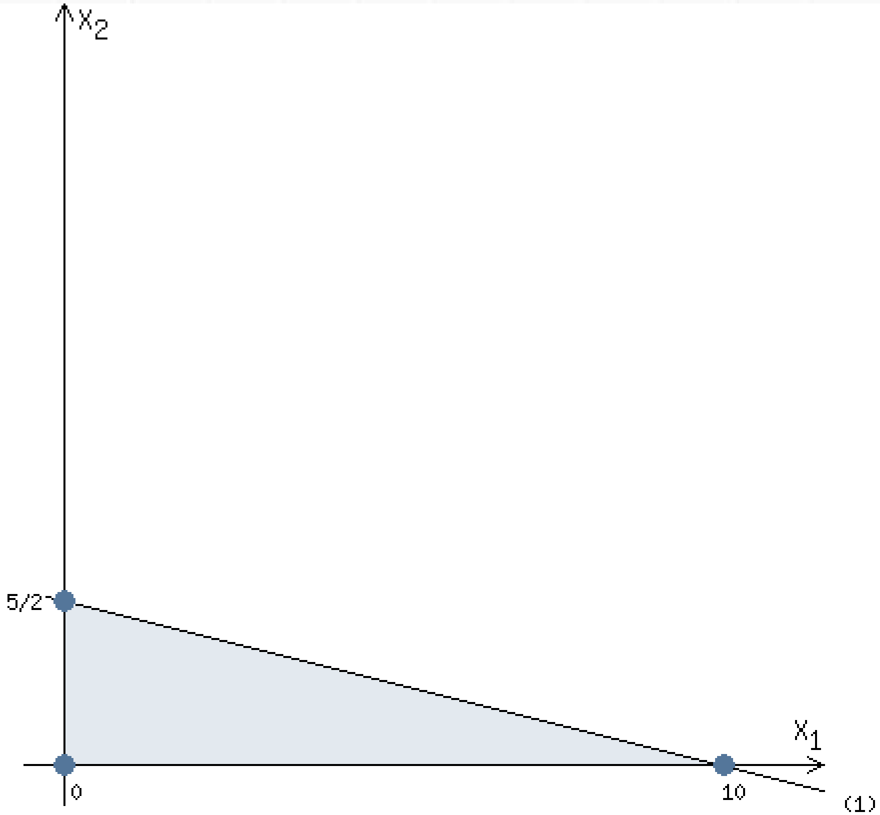
$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$5x_1 + 2x_2 = 20$$

equação da reta, interseção no eixo x1 e x2



Método Gráfico

- Vamos definir a região de pontos viáveis

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$

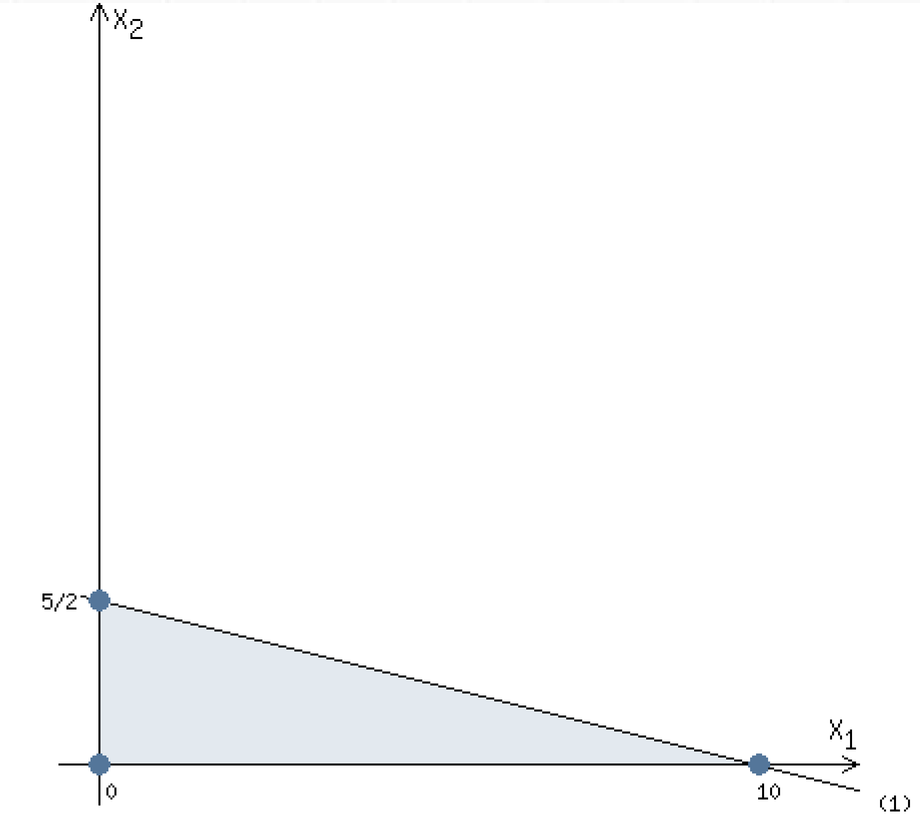
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$5x_1 + 2x_2 = 20$$

equação da reta, interseção no eixo x1 e x2

$$2x_2 = 20 \qquad 5x_1 = 20$$

$$\boxed{x_2 = 10} \qquad \boxed{x_1 = 4}$$



Método Gráfico

- Vamos definir a região de pontos viáveis

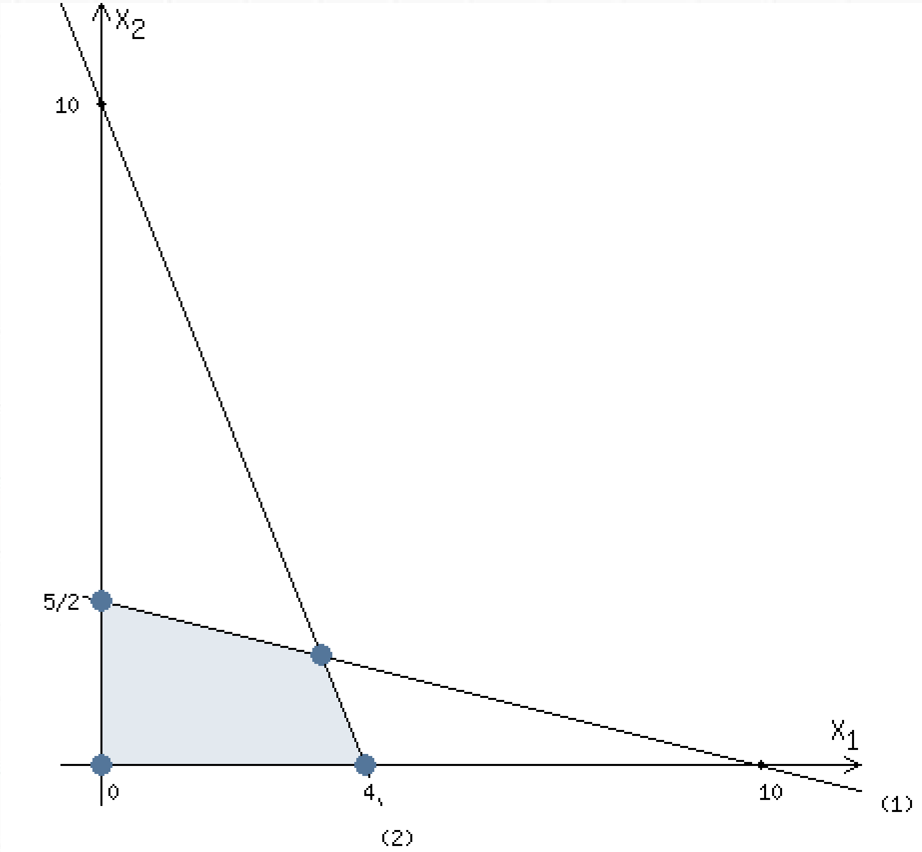
$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$
$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$5x_1 + 2x_2 = 20$$

equação da reta, interseção no eixo x1 e x2

$$2x_2 = 20 \qquad 5x_1 = 20$$

$$\boxed{x_2 = 10} \qquad \boxed{x_1 = 4}$$

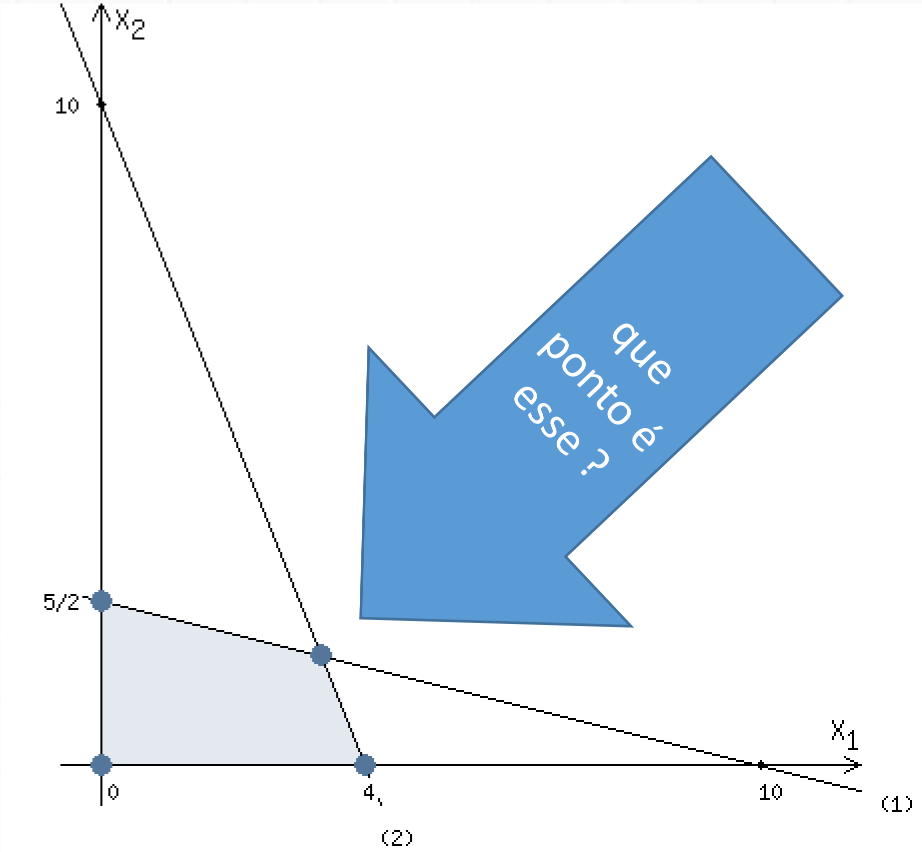


Ponto (0,0) é viável ? Então a região viável é abaixo da reta.

Método Gráfico

- Vamos definir a região de pontos viáveis

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$
$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



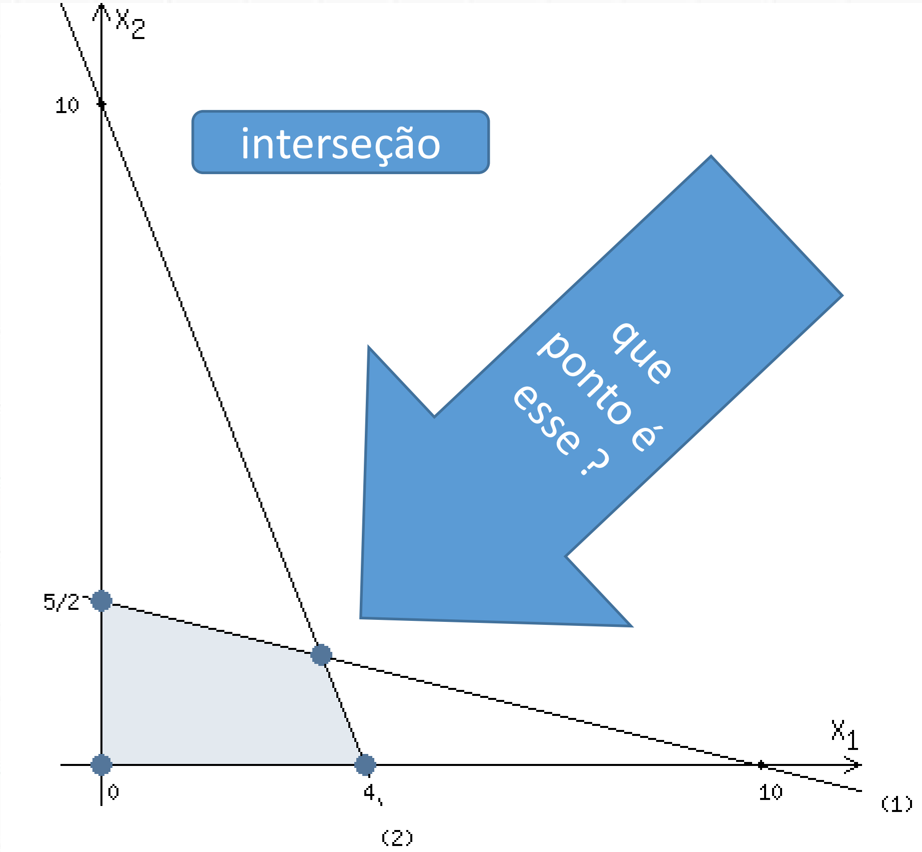
Método Gráfico

- Vamos definir a região de pontos viáveis

$$\begin{aligned} \max \quad & 11x_1 + 12x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1) \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$5x_1 + 2x_2 = 20$$

$$x_1 + 4x_2 = 10$$



Método Gráfico

- Vamos definir a região de pontos viáveis

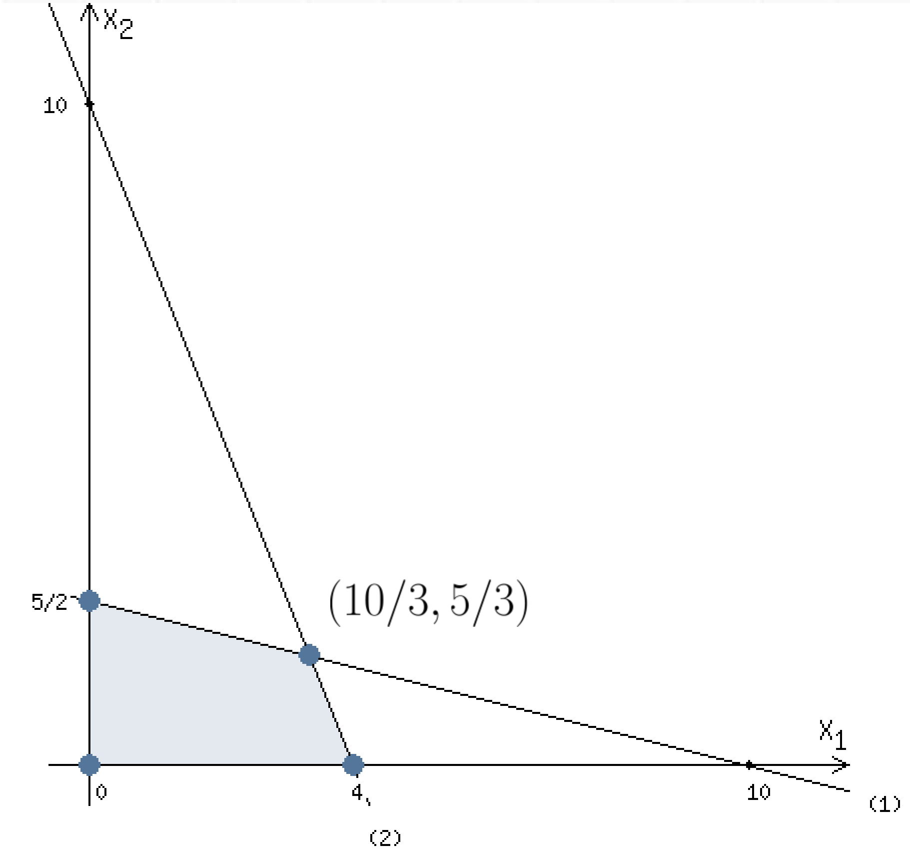
$$\begin{aligned} \max \quad & 11x_1 + 12x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1) \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$5x_1 + 2x_2 = 20$$

$$x_1 + 4x_2 = 10$$

$$\boxed{x_1 = 10/3}$$

$$\boxed{x_2 = 5/3}$$



Método Gráfico

- Função objetivo (traçar a equação da reta por um ponto da região viável)

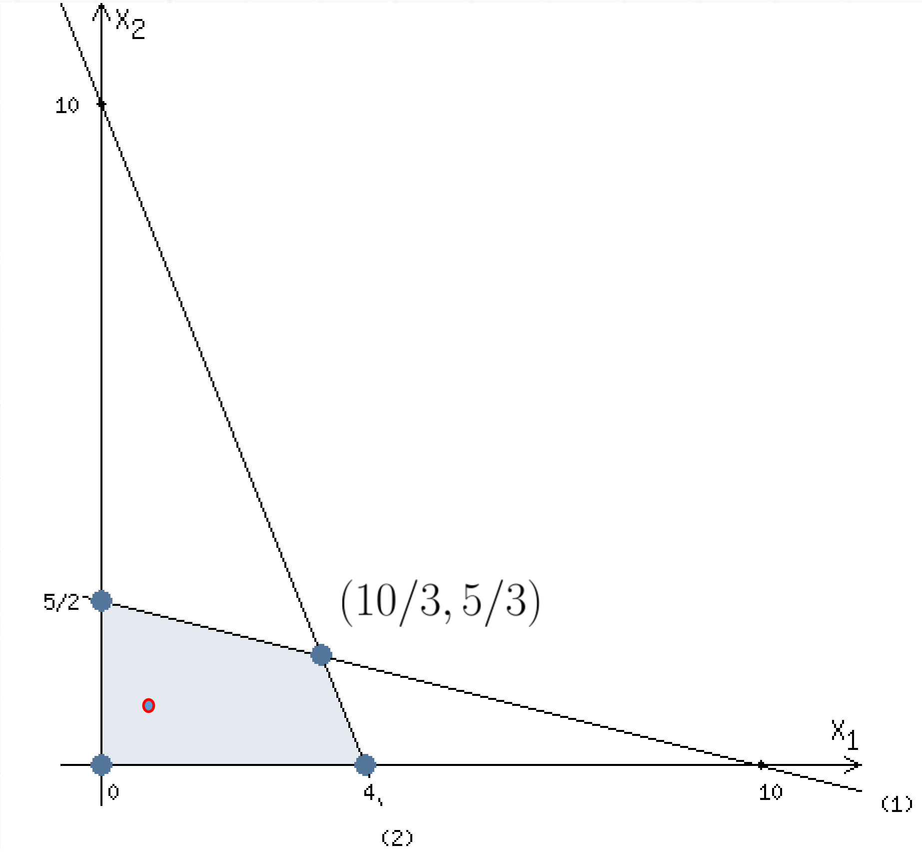
$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Por exemplo, o ponto (1,1), qual a f.o. nele ? qual eq. da reta ?



Método Gráfico

- Função objetivo (traçar a equação da reta por um ponto da região viável)

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

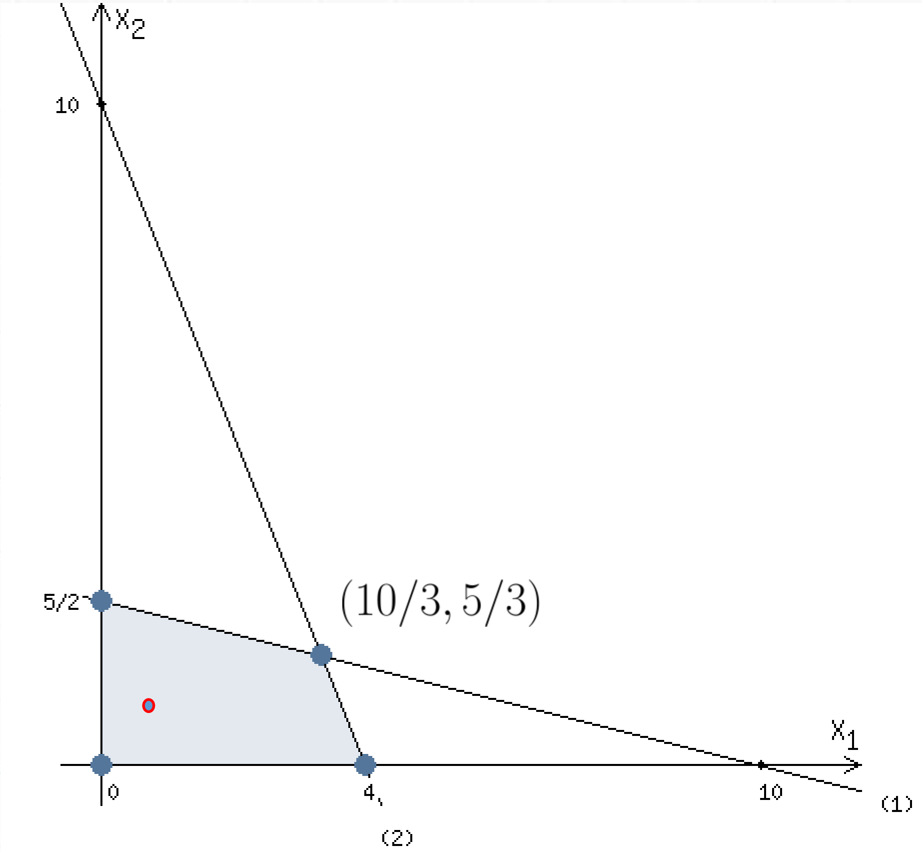
$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Por exemplo, o ponto (1,1), qual a f.o. nele ? qual eq. da reta ?

$$11x_1 + 12x_2 = 23$$



Método Gráfico

- Função objetivo (traçar a equação da reta por um ponto da região viável)

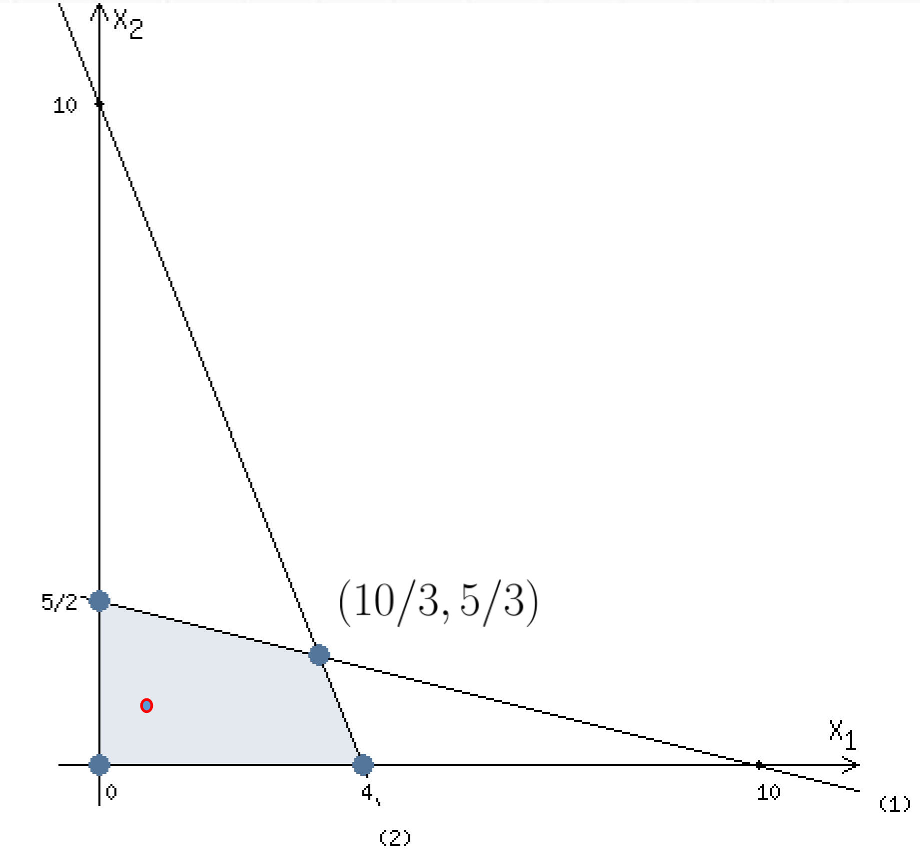
$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

$$\begin{aligned} s.a. \quad x_1 + 4x_2 &\leq 10 \quad (1) \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 20 \quad (2) \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

- Por exemplo, o ponto (1,1), qual a f.o. nele ? qual eq. da reta ?

$$11x_1 + 12x_2 = 23$$

- interseção no plano ?



Método Gráfico

- Função objetivo (traçar a equação da reta por um ponto da região viável)

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

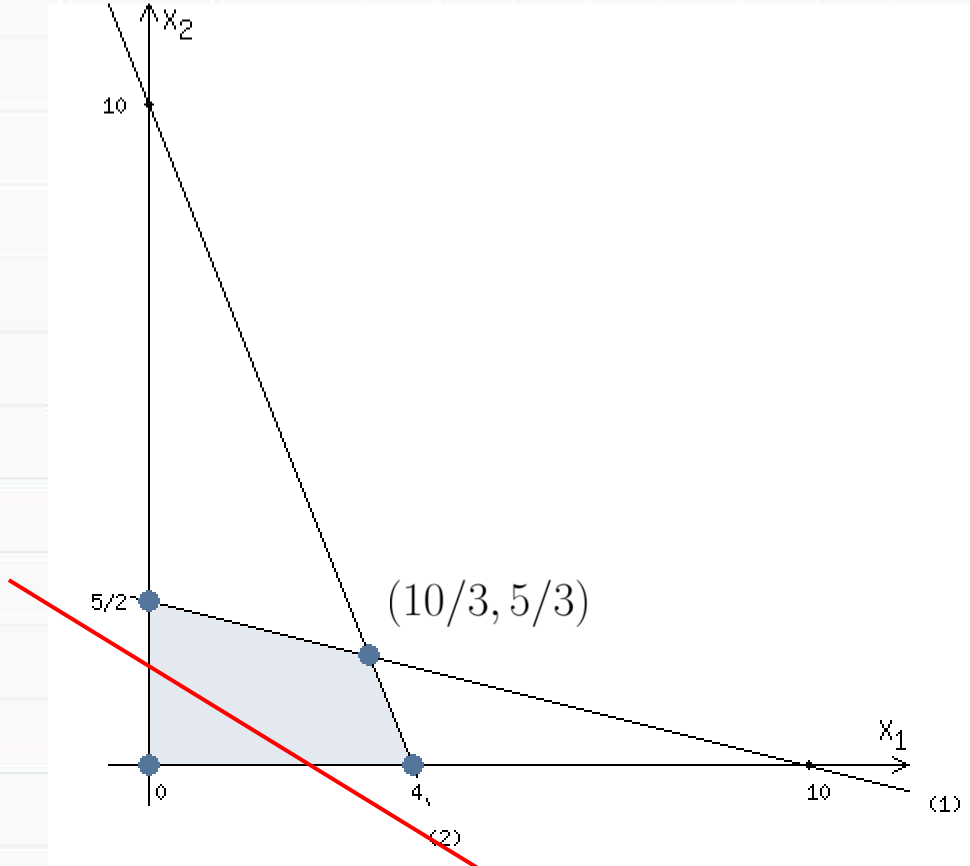
- Por exemplo, o ponto (1,1), qual a f.o. nele ? qual eq. da reta ?

$$11x_1 + 12x_2 = 23$$

- interseção no plano ?

$$12x_2 = 23 \qquad 11x_1 = 23$$

$$\boxed{x_2 = 23/12} \qquad \boxed{x_1 = 23/11}$$



Método Gráfico

- Função objetivo (traçar a equação da reta por um ponto da região viável)

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

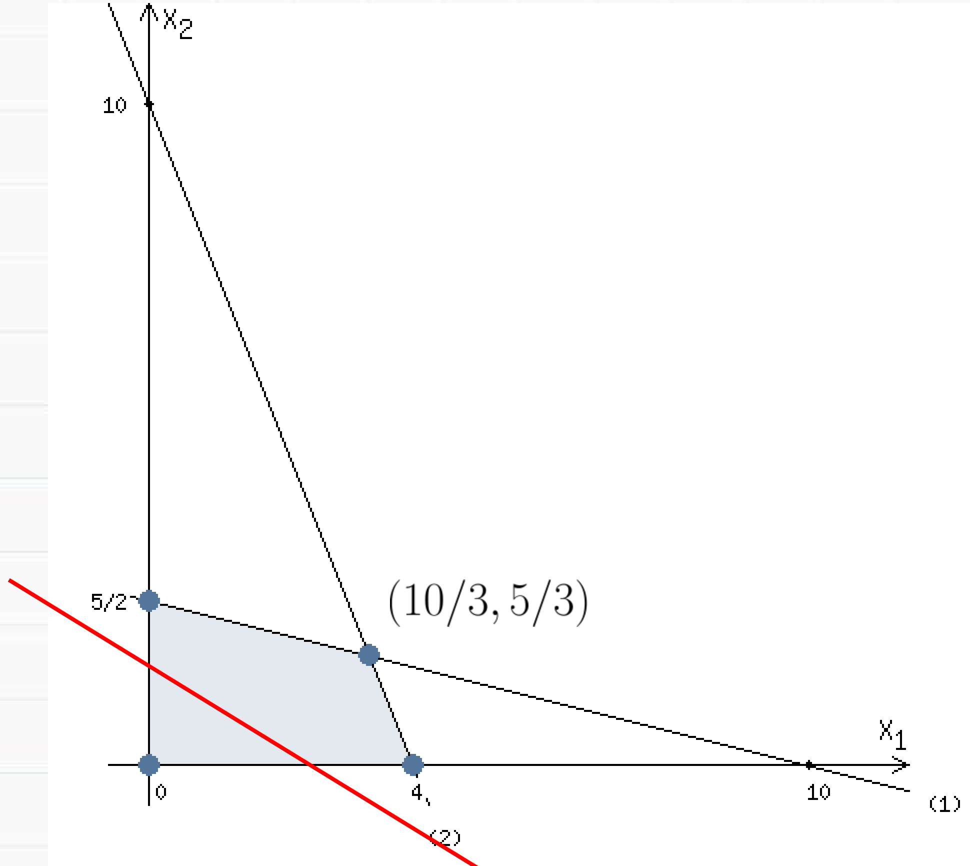
- Por exemplo, o ponto (1,1), qual a f.o. nele ? qual eq. da reta ?

$$11x_1 + 12x_2 = 23$$

- interseção no plano ?

$$12x_2 = 23 \qquad 11x_1 = 23$$

$$\boxed{x_2 = 23/12} \qquad \boxed{x_1 = 23/11}$$



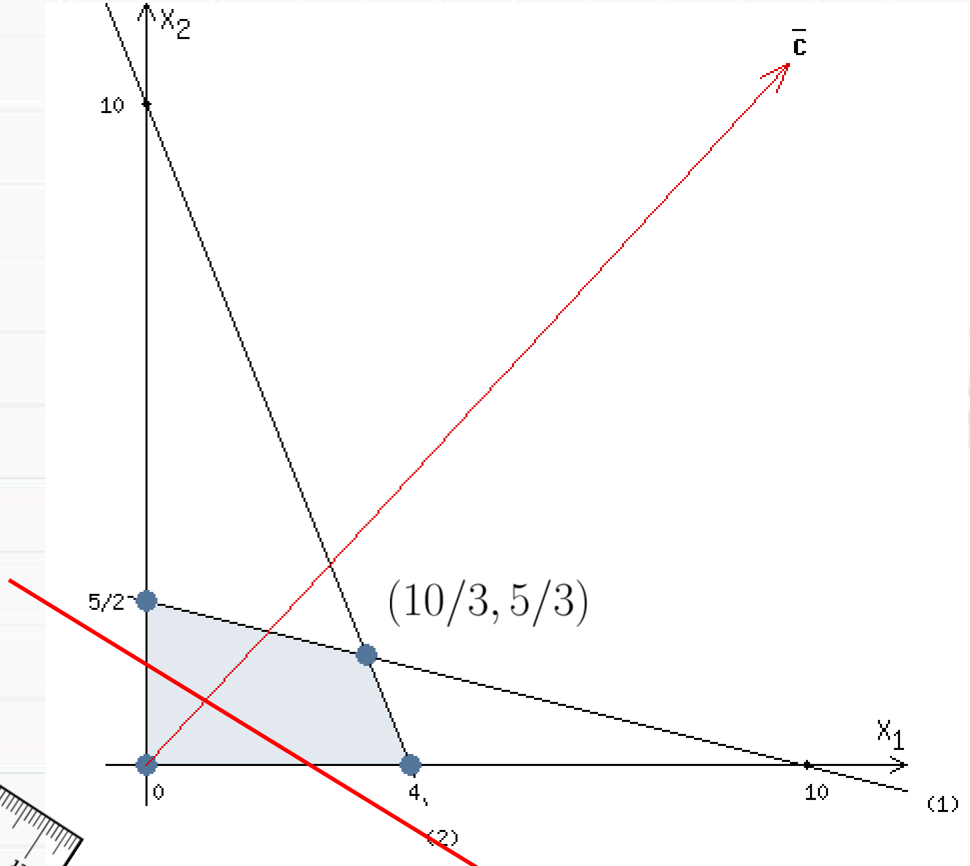
- Todos os pontos da reta vermelha tem valor 23 na f.o.
- Qual é a direção de crescimento (gradiente) ? Veja a f.o. em (0,0)

Método Gráfico

- Função objetivo (traçar a equação da reta por um ponto da região viável)

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$
$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$
$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Traçar retas paralelas a reta da f.o. na direção de crescimento



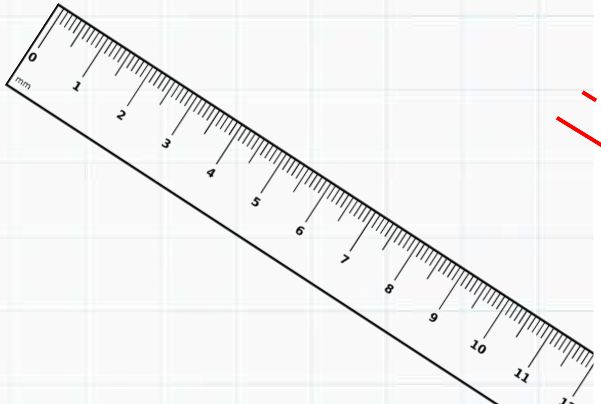
Método Gráfico

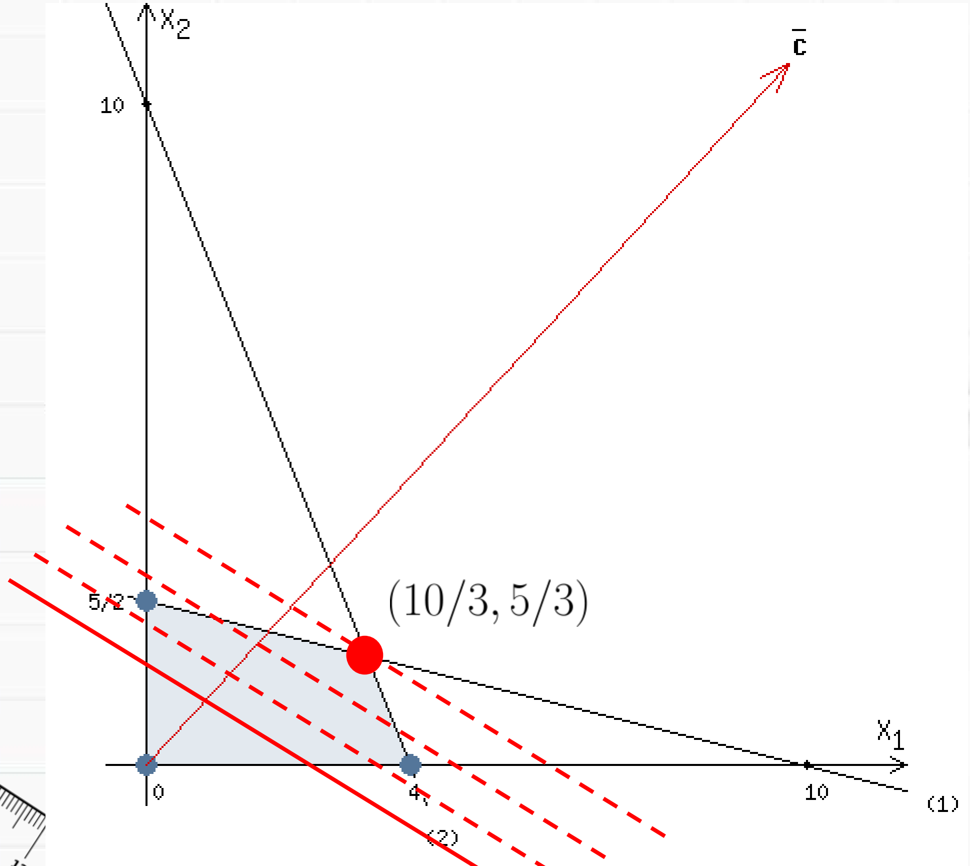
- Função objetivo (traçar a equação da reta por um ponto da região viável)

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 11x_1 + 12x_2 \\
s.a. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1) \\
& 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

- Traçar retas paralelas a reta da f.o. na direção de crescimento
- O ponto ótimo será o último ponto dentro da região viável (vértice) em que essa reta paralela tocar

A solução ótima sempre está num vértice





Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

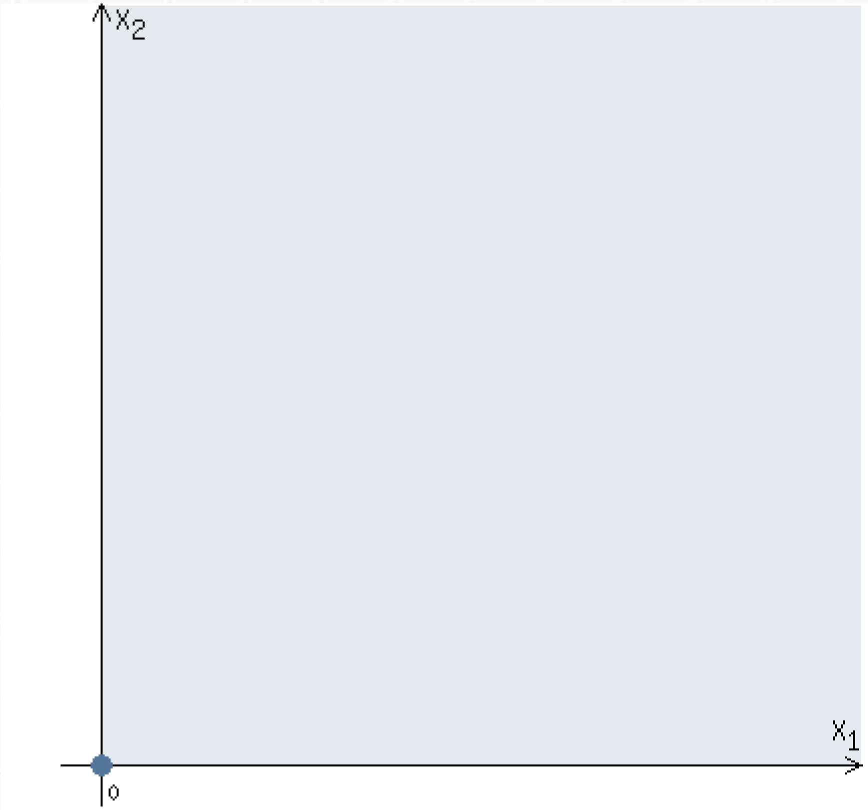
$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1) \\
& x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (2) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

O que pode acontecer quando estamos desenhando o conjunto de soluções !

Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

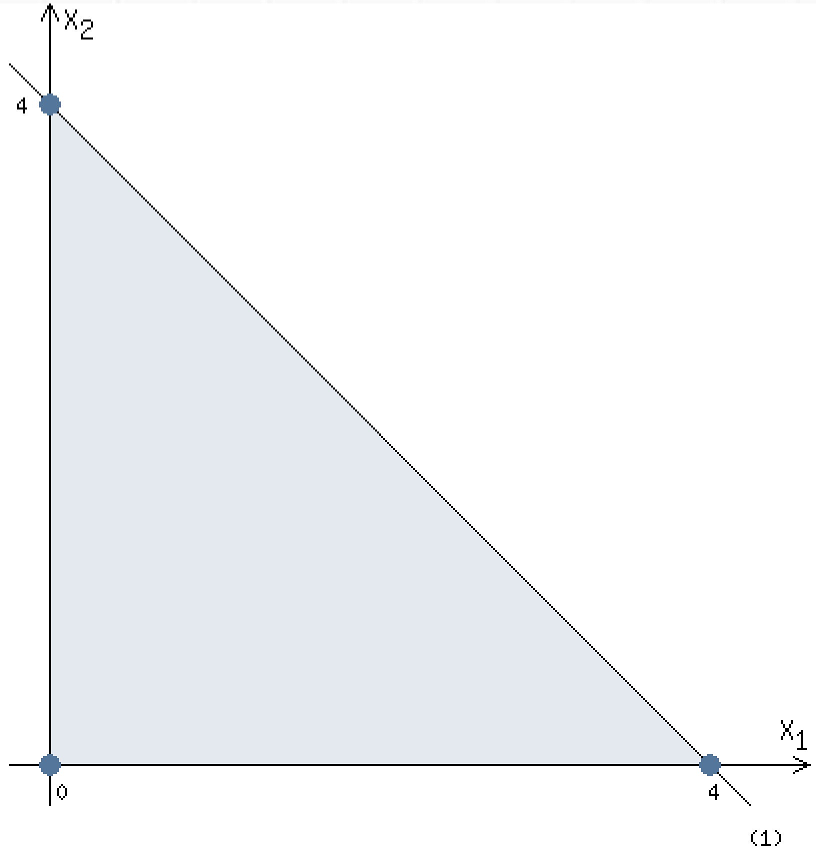
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1) \\
& x_1 + 2x_2 \leq 2 \;\; (2) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



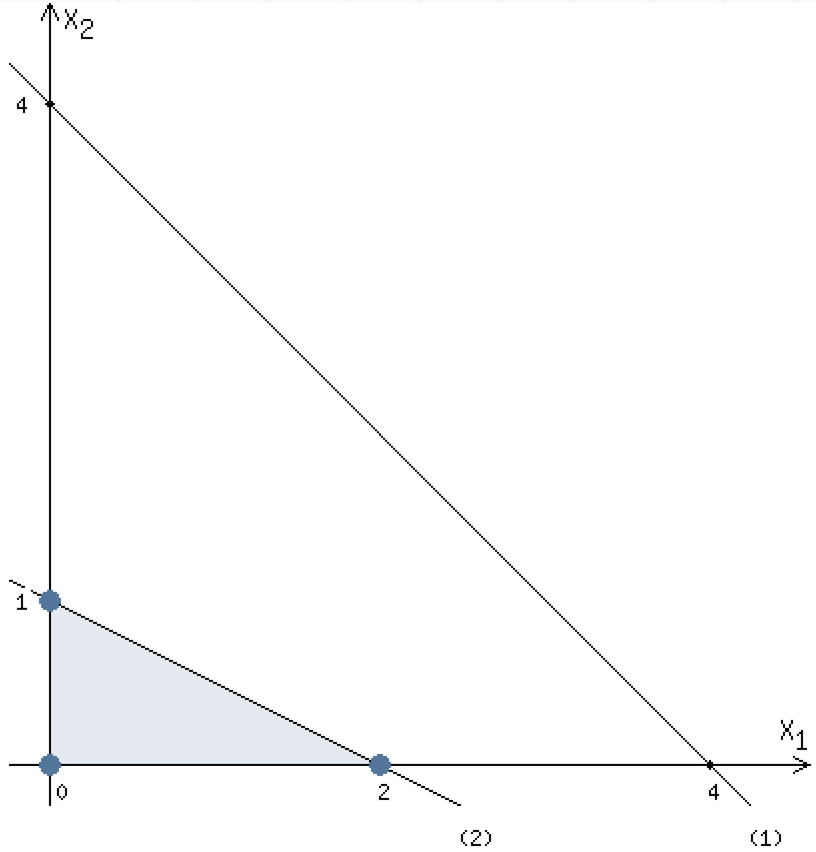
Método Gráfico

- Seja o seguinte PPl

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Veja que (2) inutilizou (1), logo (2) é dispensável !

REDUNDANTE!

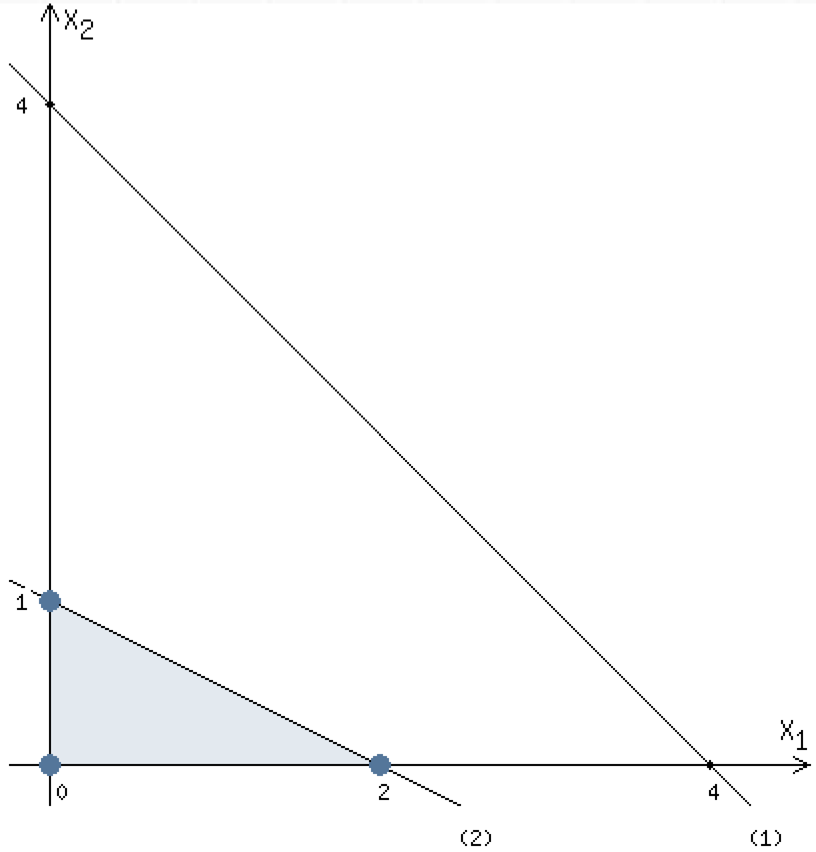


Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- F.o. no ponto viável (1,0)



Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

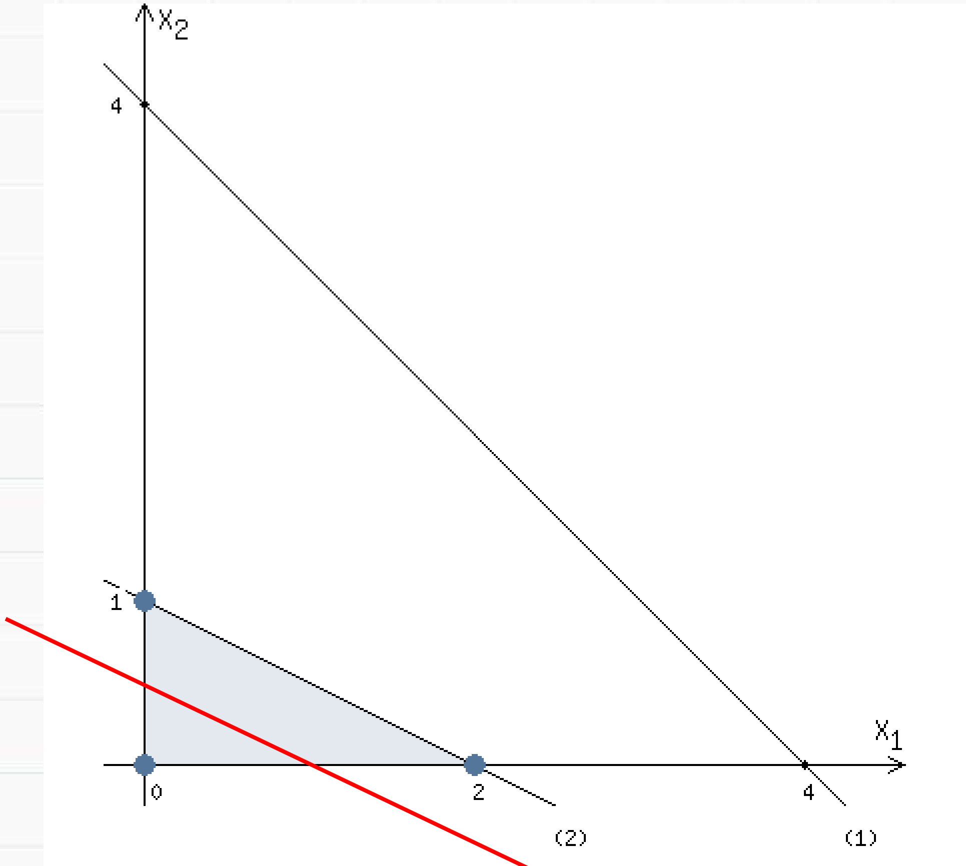
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1) \\ & x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- F.o. no ponto viável (1,0)

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$2x_2 = 1 \qquad \boxed{x_1 = 1}$$

$$\boxed{x_2 = 1/2}$$



Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

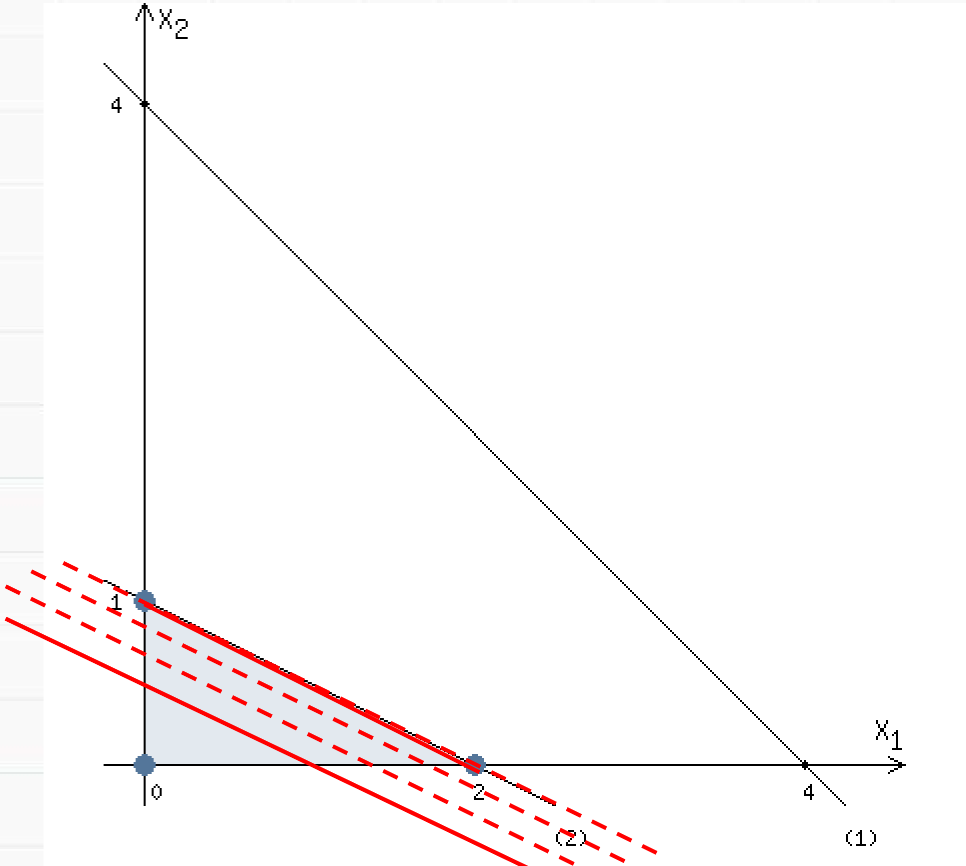
$$\max \quad x_1 + 2x_2$$
$$s.a. \quad x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1)$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 2 \quad (2)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- F.o. no ponto viável (1,0)

$$x_1 + 2x_2 = 1$$

$$2x_2 = 1 \qquad \boxed{x_1 = 1}$$

$$\boxed{x_2 = 1/2}$$

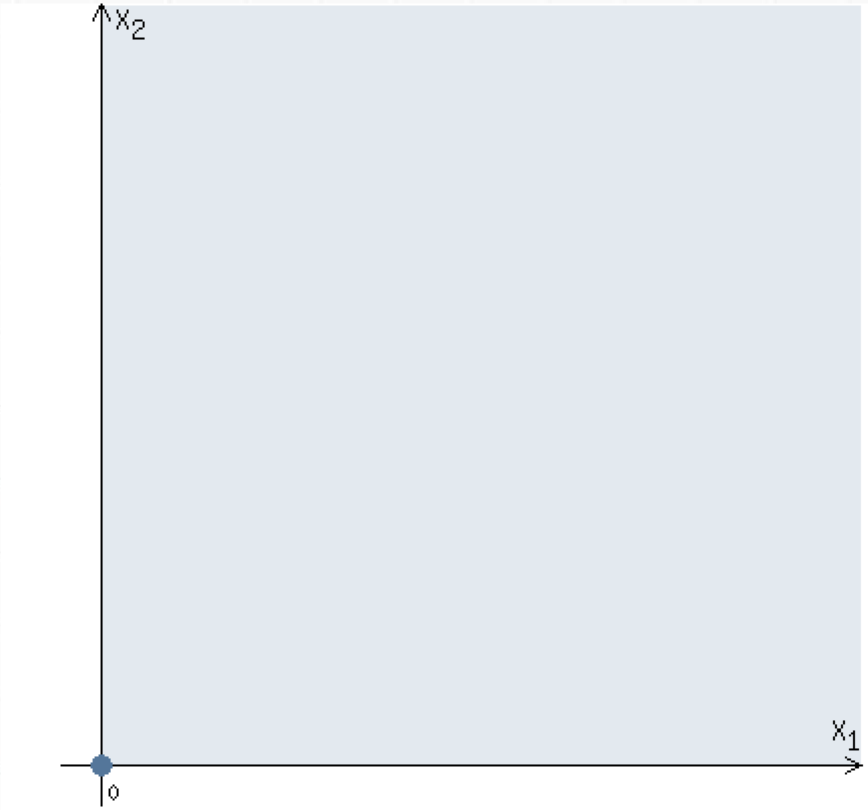


- Multiplas soluções ! A reta da f.o. é paralela a restrição (2)

Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

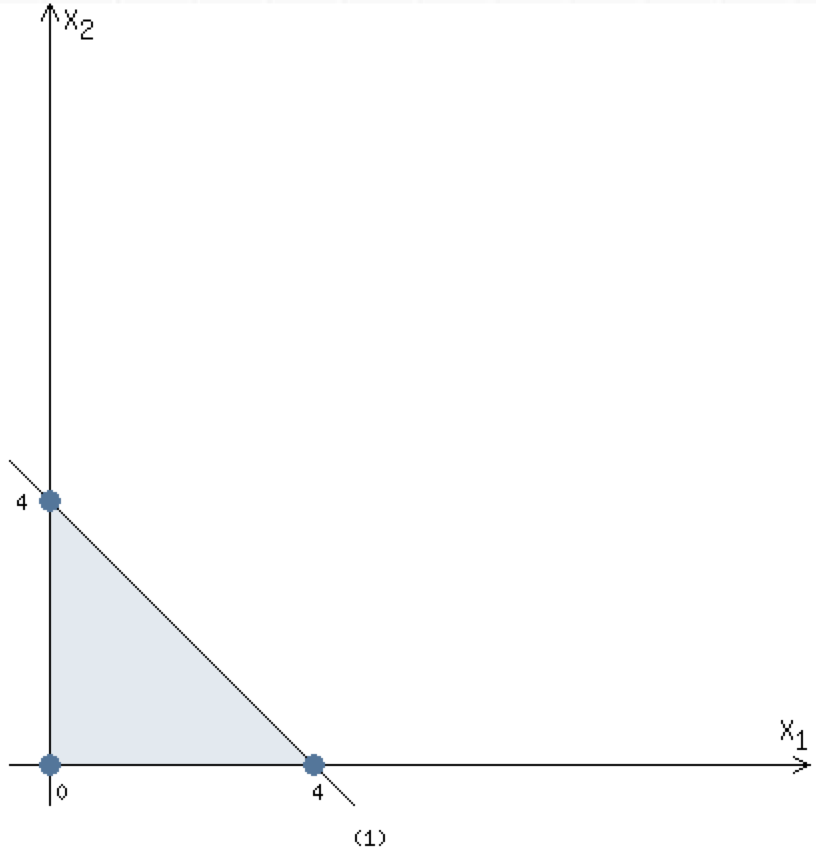
$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 3x_2 \\
s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1) \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2) \\
& x_2 \geq 10 \quad (3) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

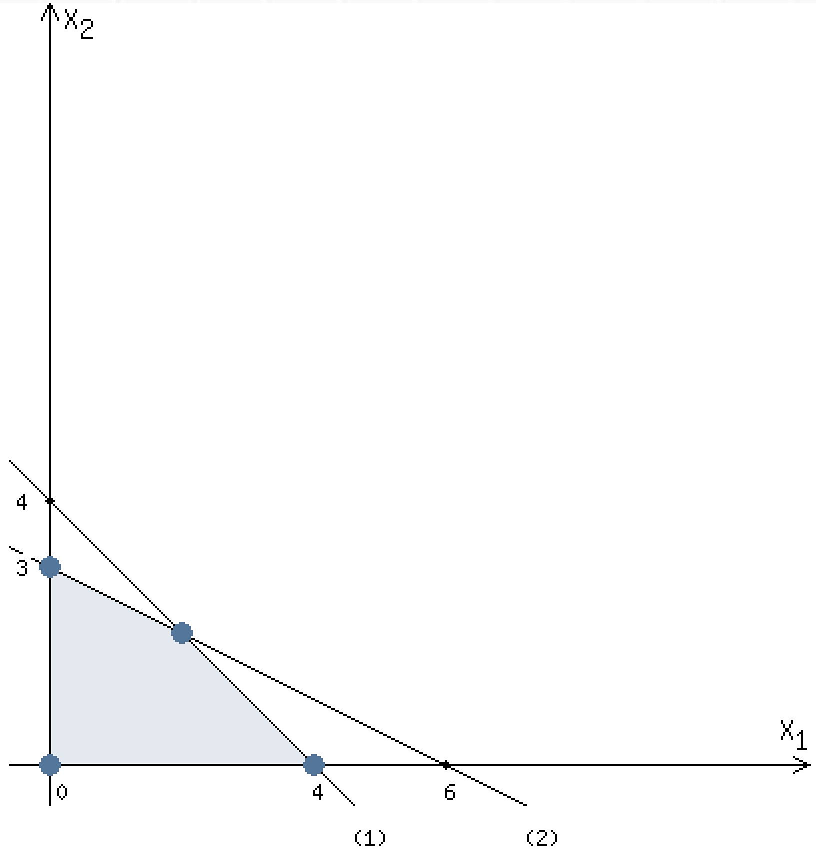
$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 3x_2 \\
s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1) \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2) \\
& x_2 \geq 10 \quad (3) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 3x_2 \\
s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1) \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2) \\
& x_2 \geq 10 \qquad (3) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

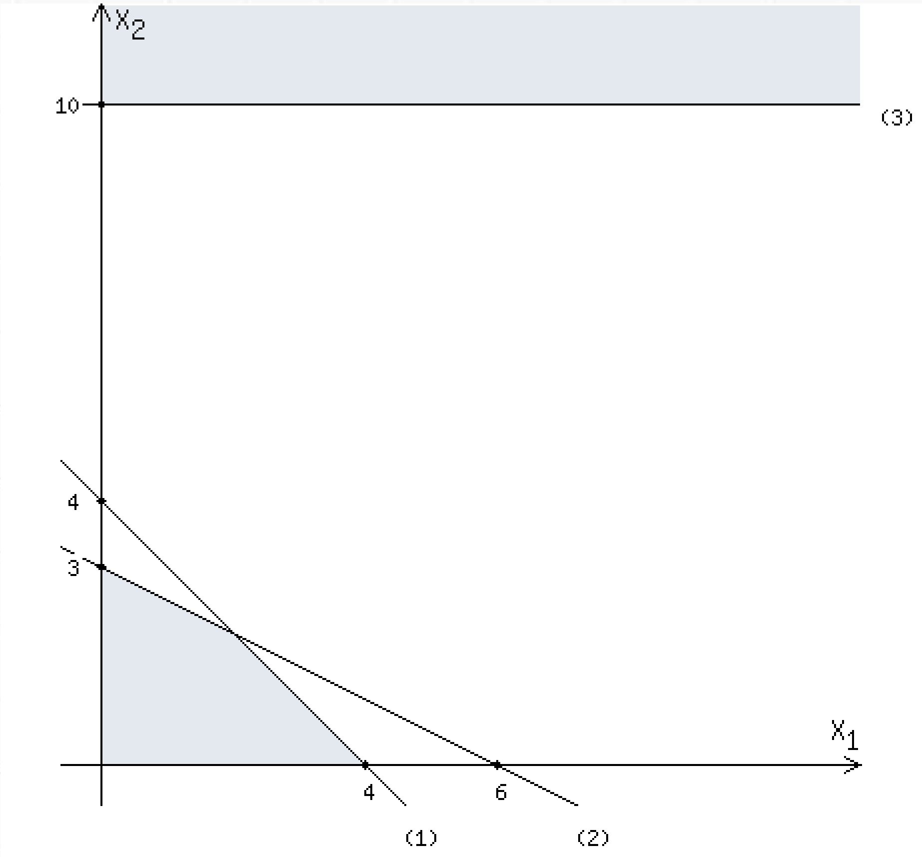


Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 3x_2 \\
s.a. \quad & x_1 + x_2 \leq 4 \quad (1) \\
& x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (2) \\
& x_2 \geq 10 \qquad (3) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

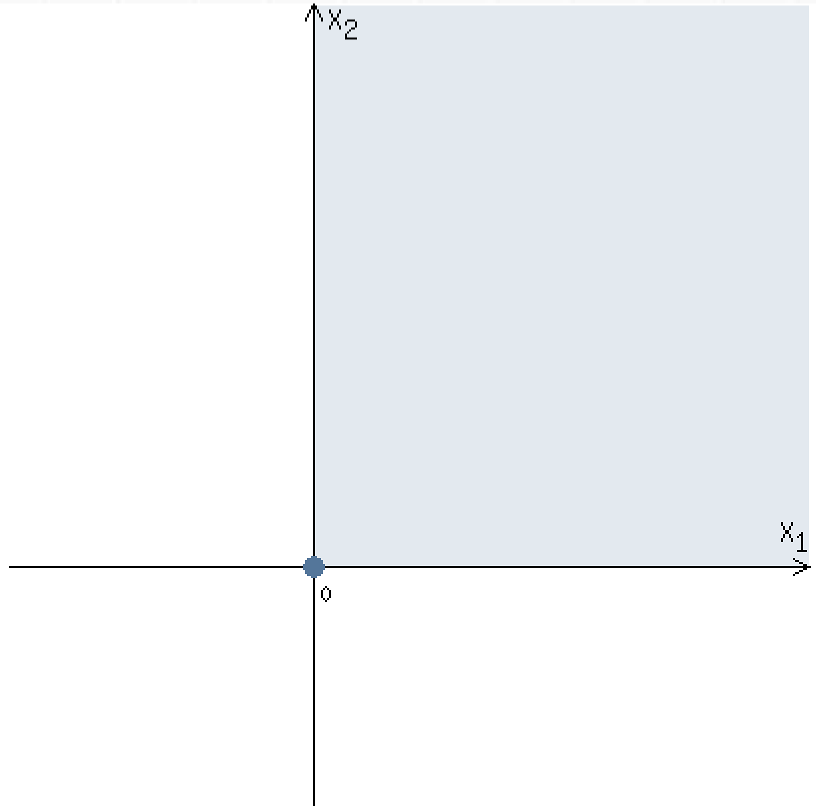
- Problema Inviável



Método Gráfico

- Seja o seguinte PPl

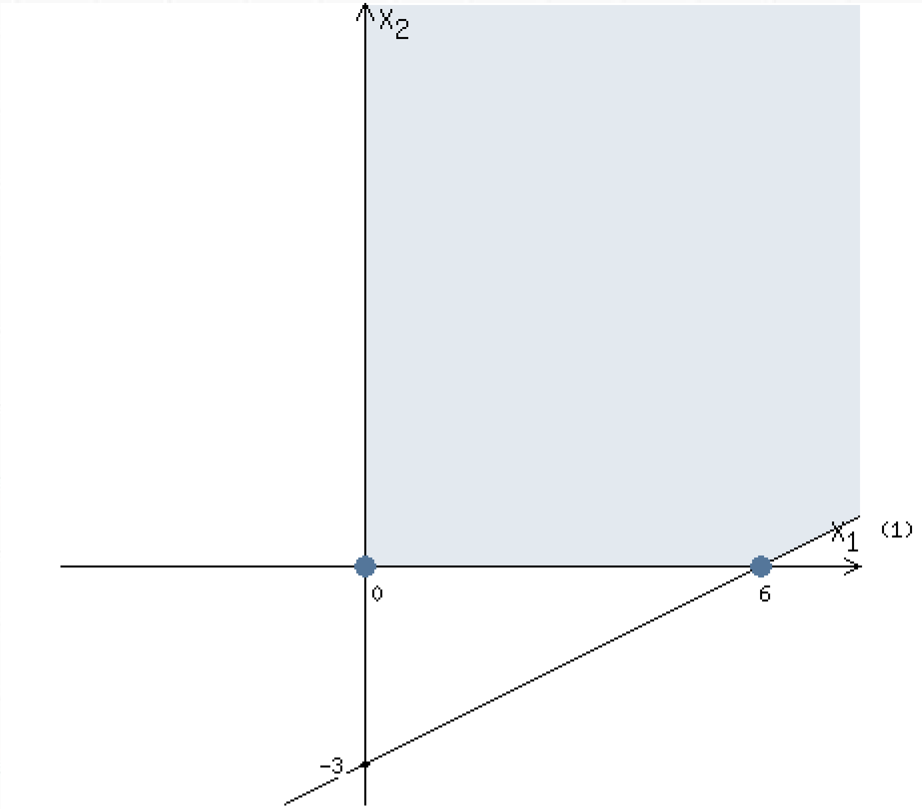
$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + x_2 \\
s.a. \quad & x_1 - 2x_2 \leq 6 \ \ (1) \\
& -x_1 + x_2 \leq 4 \ \ (2) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$



Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 2x_1 + x_2 \\
s.a. \quad & x_1 - 2x_2 \leq 6 \ \ (1) \\
& -x_1 + x_2 \leq 4 \ \ (2) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

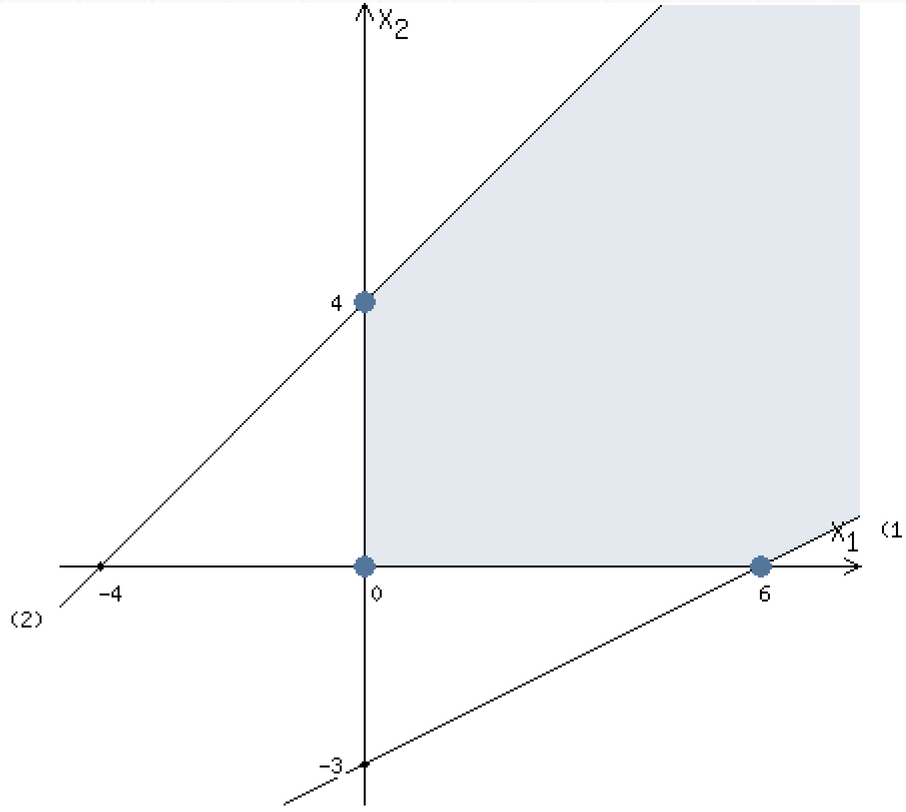


Método Gráfico

- Seja o seguinte PPl

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ s.a. \quad & x_1 - 2x_2 \leq 6 \ \ (1) \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \ \ (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- F.o. no ponto viável (1,1)



Método Gráfico

- Seja o seguinte PPl

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ s.a. \quad & x_1 - 2x_2 \leq 6 \quad (1) \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

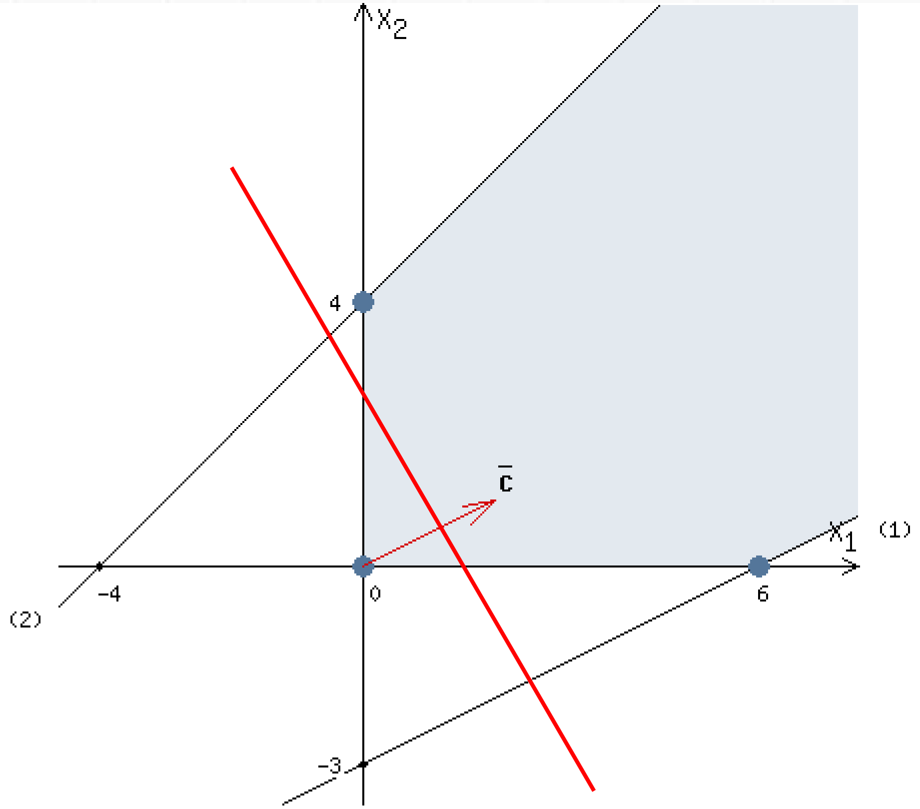
- F.o. no ponto viável (1,1)

$$2x_1 + x_2 = 3$$

$$\text{intersecao } x_1 = 0 \qquad \text{intersecao } x_2 = 0$$

$$\boxed{x_2 = 3} \qquad 2x_1 = 3$$

$$\boxed{x_1 = 3/2}$$



Método Gráfico

- Seja o seguinte PPI

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + x_2 \\ s.a. \quad & x_1 - 2x_2 \leq 6 \quad (1) \\ & -x_1 + x_2 \leq 4 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

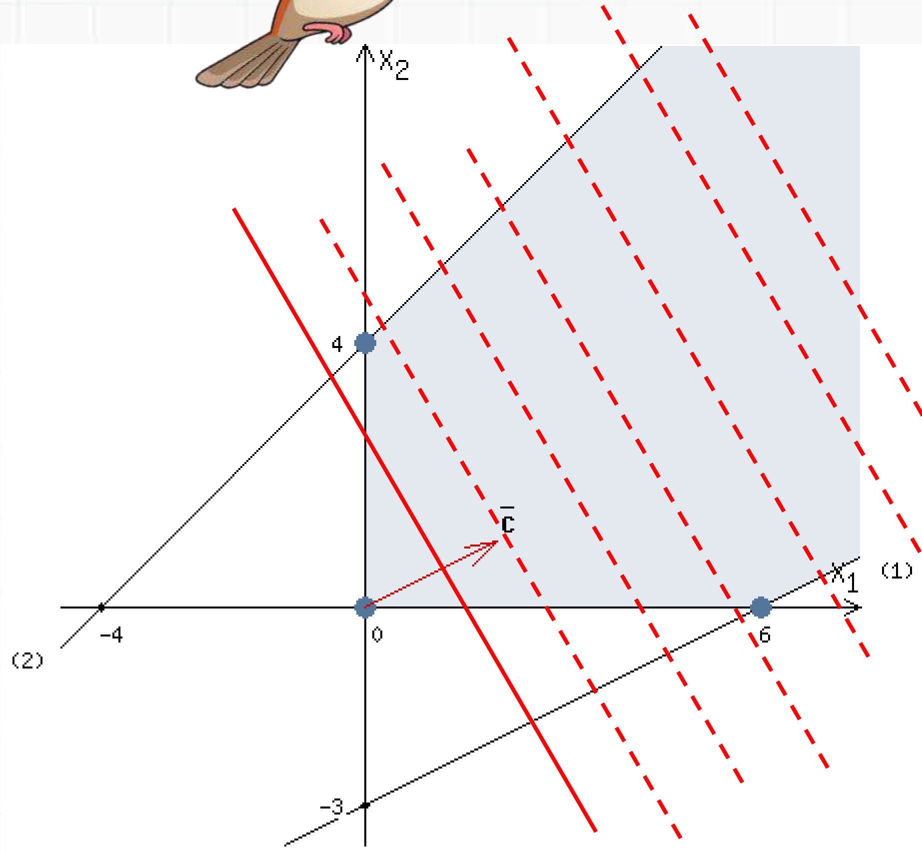
- F.o. no ponto viável (1,1)

$$2x_1 + x_2 = 3$$

$$\text{intersecao } x_1 = 0 \qquad \text{intersecao } x_2 = 0$$

$$\boxed{x_2 = 3} \qquad 2x_1 = 3$$

$$\boxed{x_1 = 3/2}$$

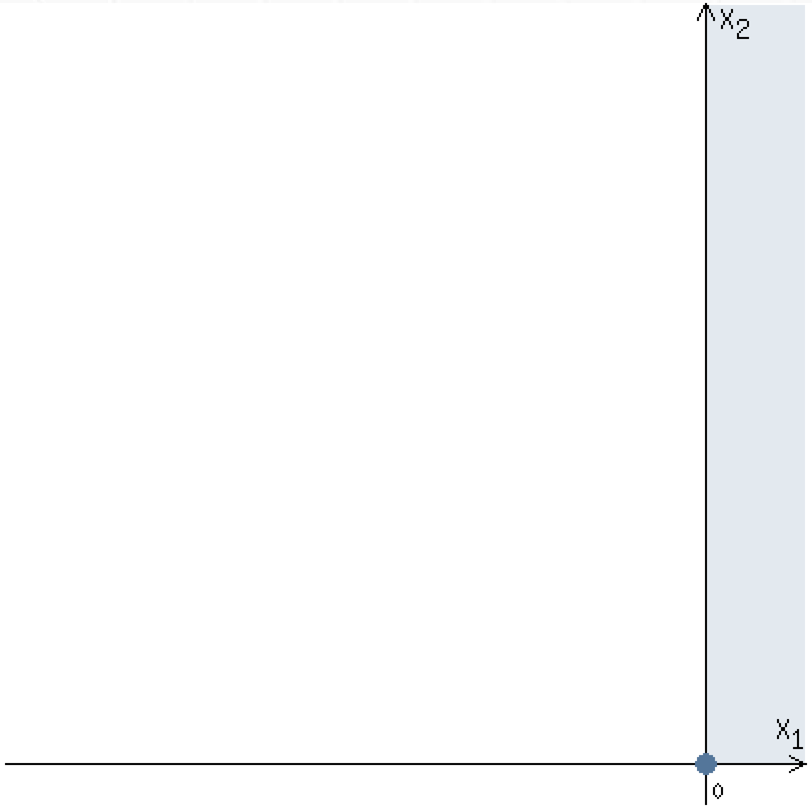


- Problema ilimitado sem solução ótima

Método Gráfico

- Vamos analisar como o coeficiente da f.o. impacta o problema

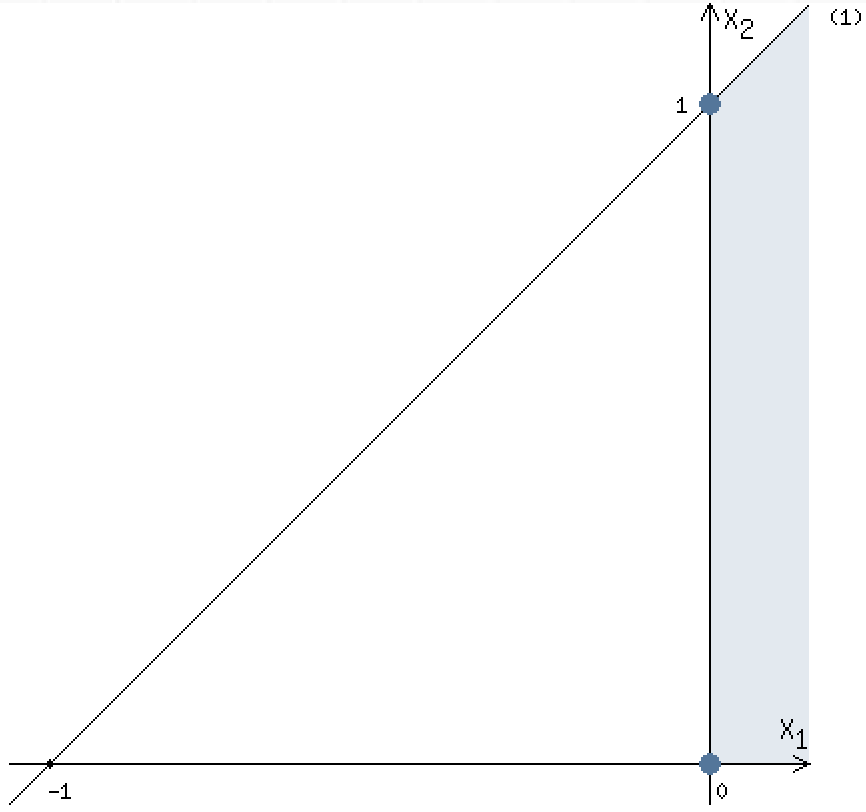
$$\min \quad \boxed{c_1x_1 + c_2x_2}$$
$$s.a. \quad -x_1 + x_2 \leq 1 \;\; (1)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Método Gráfico

- Vamos analisar como o coeficiente da f.o. impacta o problema

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2$$
$$s.a. \; -x_1 + x_2 \leq 1 \;\; (1)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

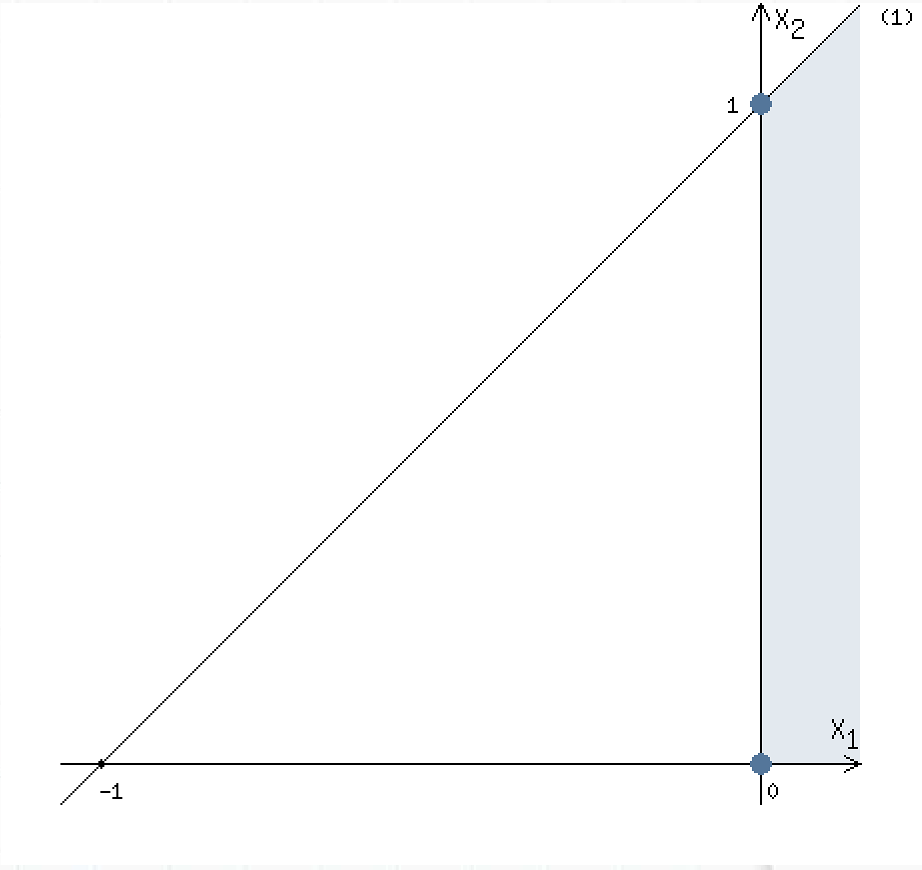


Método Gráfico

- Vamos analisar como o coeficiente da f.o. impacta o problema

$$\min \quad c_1 x_1 + c_2 x_2$$
$$s.a. \; -x_1 + x_2 \leq 1 \;\; (1)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Para c=(1,1) ?

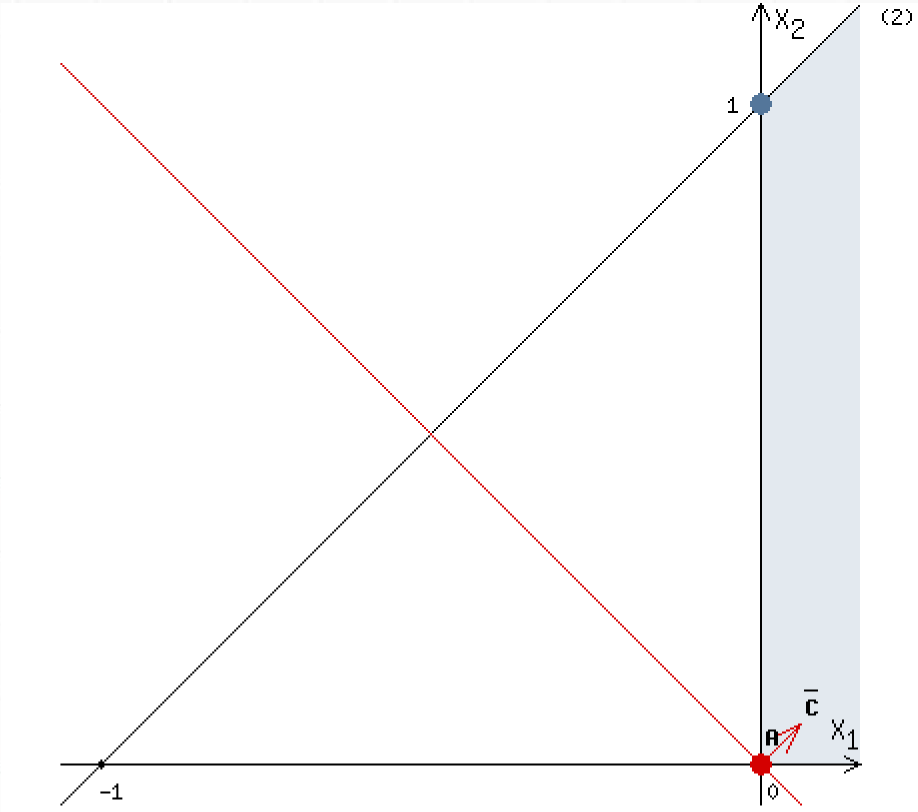


Método Gráfico

- Vamos analisar como o coeficiente da f.o. impacta o problema

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2$$
$$s.a. \; -x_1 + x_2 \leq 1 \;\; (1)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Para c=(1,1), solução ótima única (0,0)

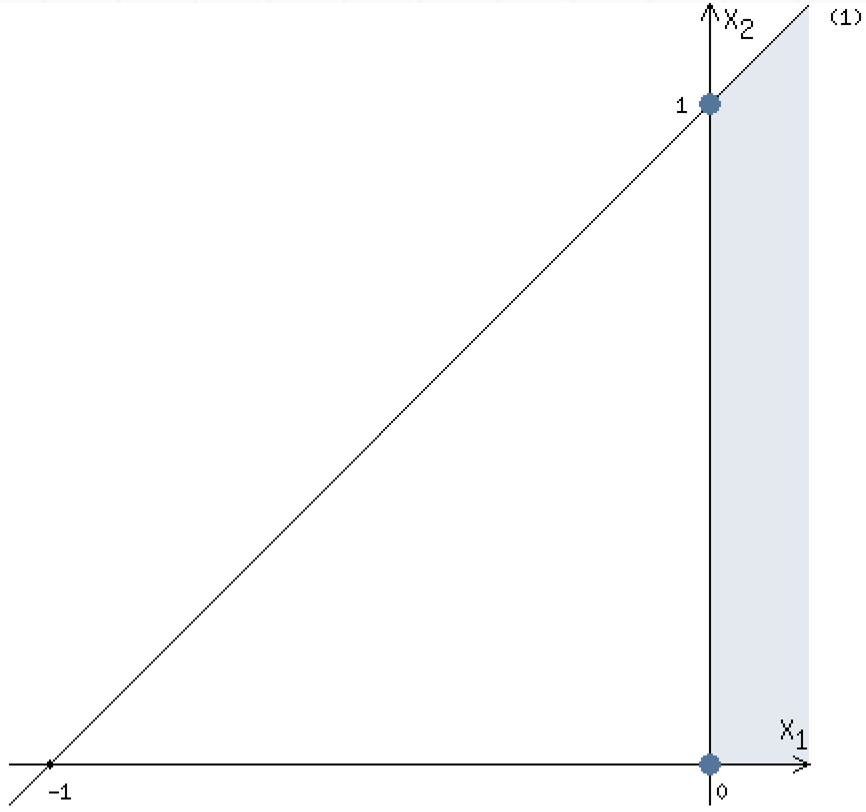


Método Gráfico

- Vamos analisar como o coeficiente da f.o. impacta o problema

$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 \\ s.a. \; & -x_1 + x_2 \leq 1 \;\; (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Para c=(1,0) ?

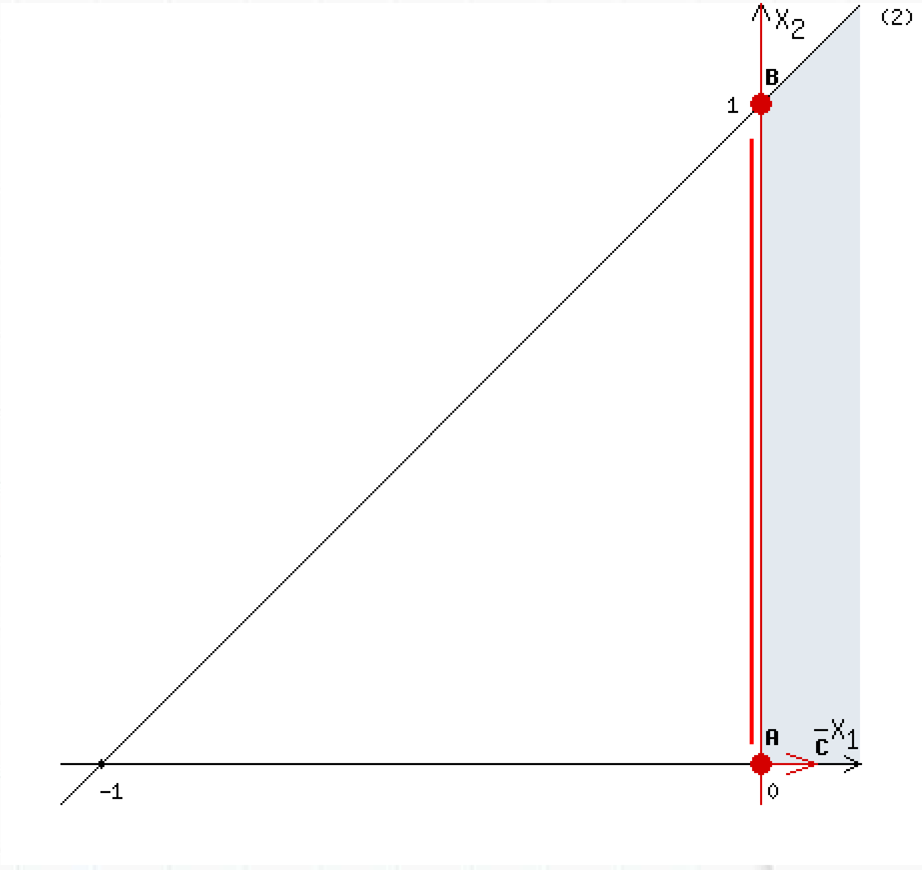


Método Gráfico

- Vamos analisar como o coeficiente da f.o. impacta o problema

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2$$
$$s.a. \; -x_1 + x_2 \leq 1 \;\; (1)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Para c=(1,0), conjunto solução limitado com múltiplas soluções ótimas (mas existe ótimo limitado)

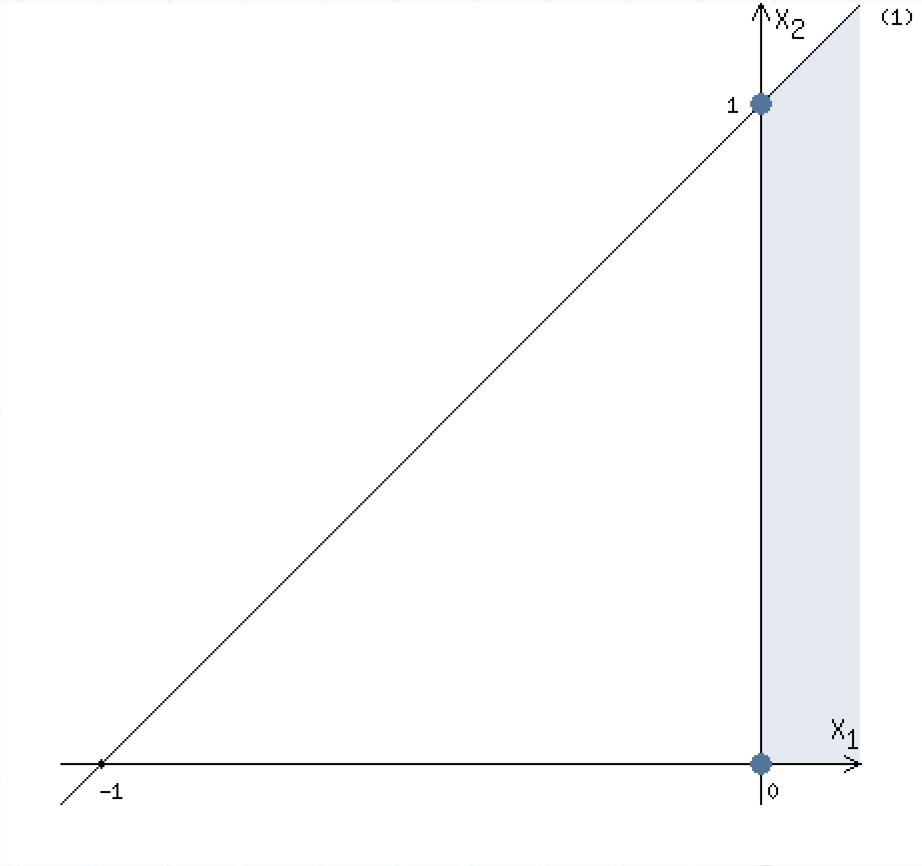


Método Gráfico

- Vamos analisar como o coeficiente da f.o. impacta o problema

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2$$
$$s.a. \ -x_1 + x_2 \leq 1 \ (1)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Para c=(0,1) ?

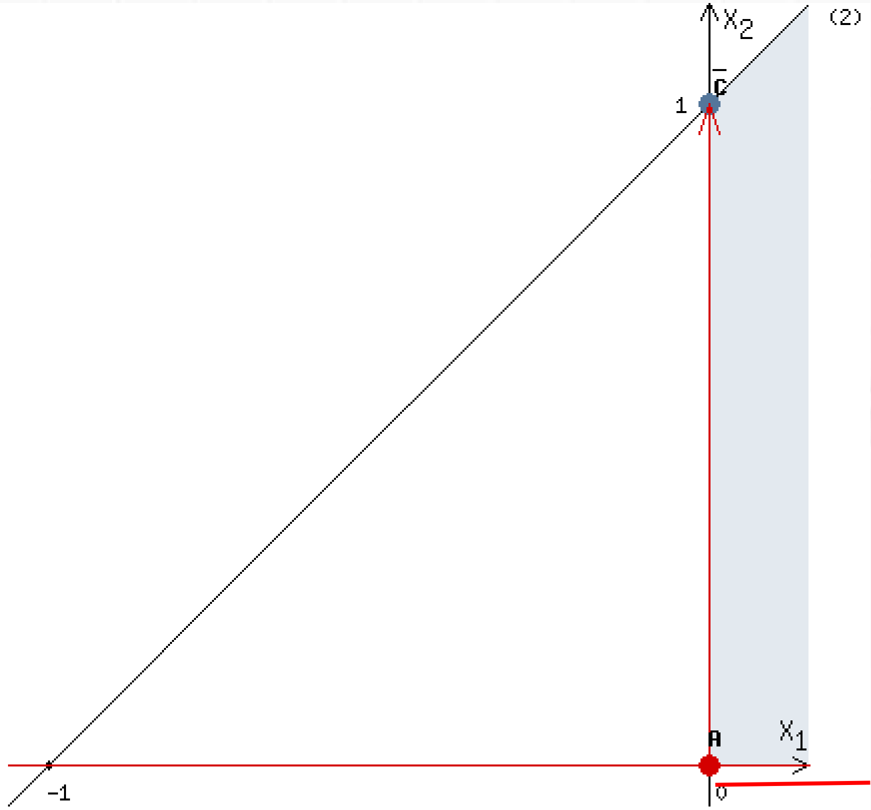


Método Gráfico

- Vamos analisar como o coeficiente da f.o. impacta o problema

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2$$
$$s.a. \ -x_1 + x_2 \leq 1 \ \ (1)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Para c=(0,1), conjunto solução ilimitado com múltiplas soluções ótimas (mas existe ótimo limitado)

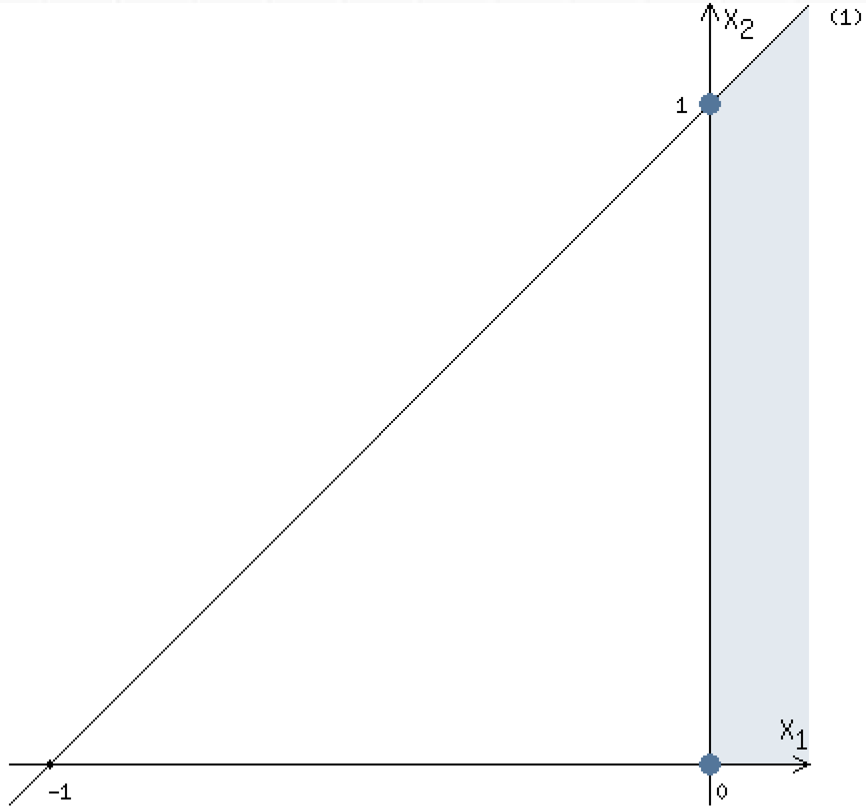


Método Gráfico

- Vamos analisar como o coeficiente da f.o. impacta o problema

$$\min \quad c_1x_1 + c_2x_2$$
$$s.a. \ -x_1 + x_2 \leq 1 \ \ (1)$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

- Para c=(-1,-1) ?

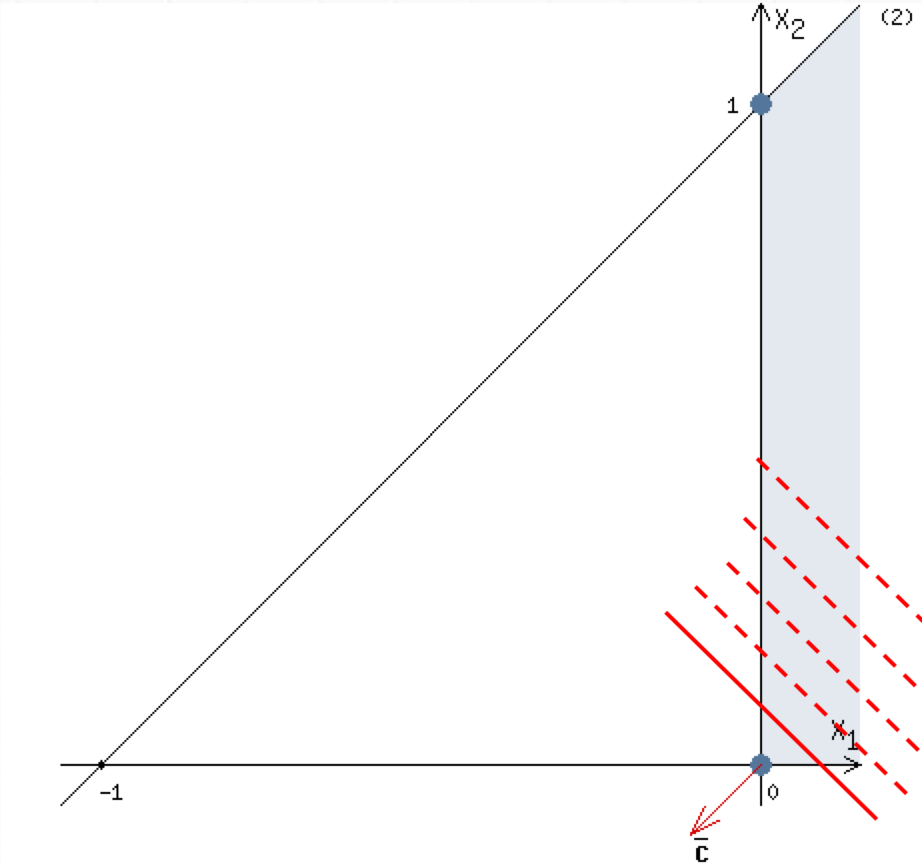


Método Gráfico

- Vamos analisar como o coeficiente da f.o. impacta o problema

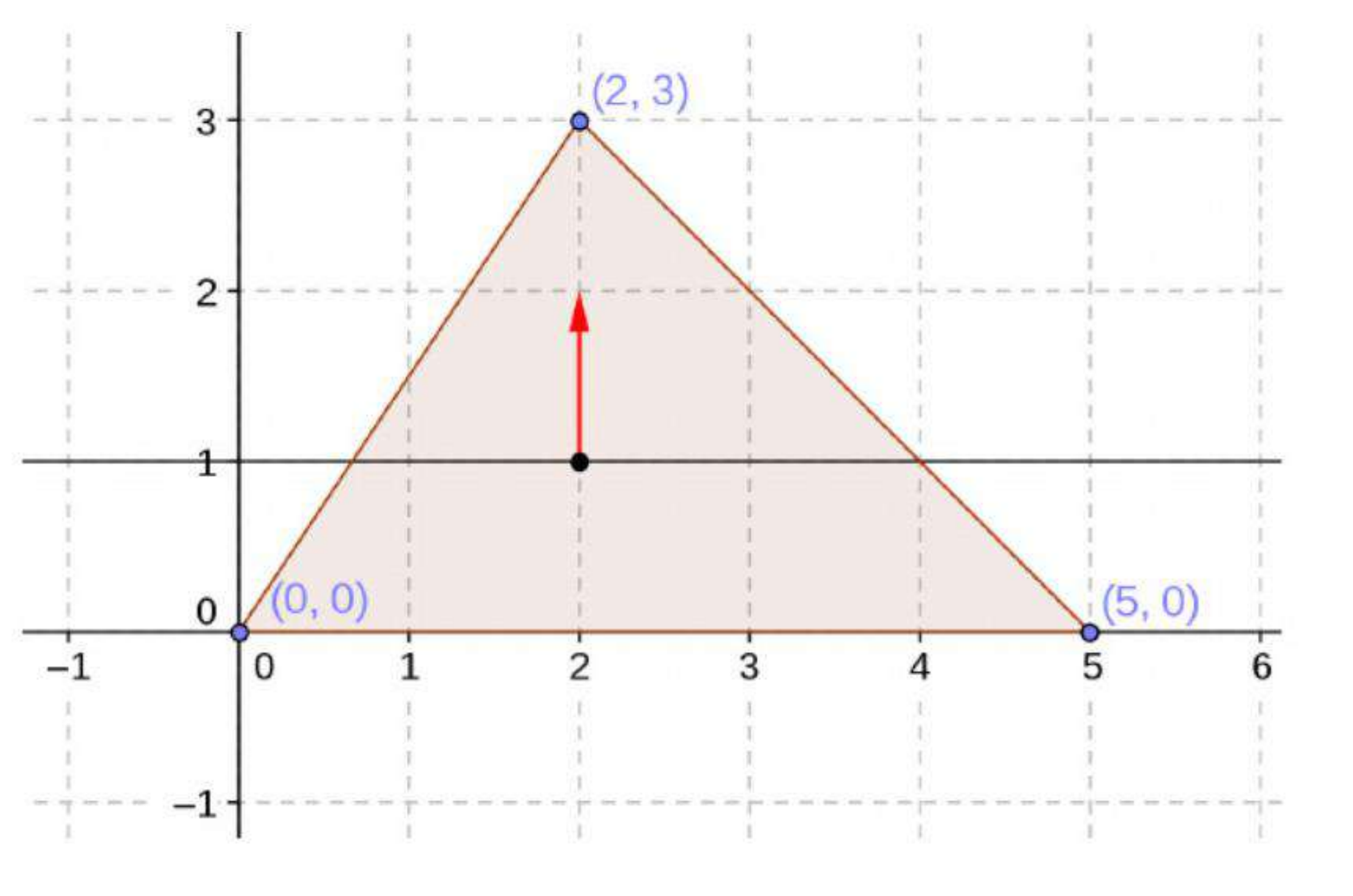
$$\begin{aligned} \min \quad & c_1x_1 + c_2x_2 \\ s.a. \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \ (1) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Para c=(-1,-1), solução ilimitado



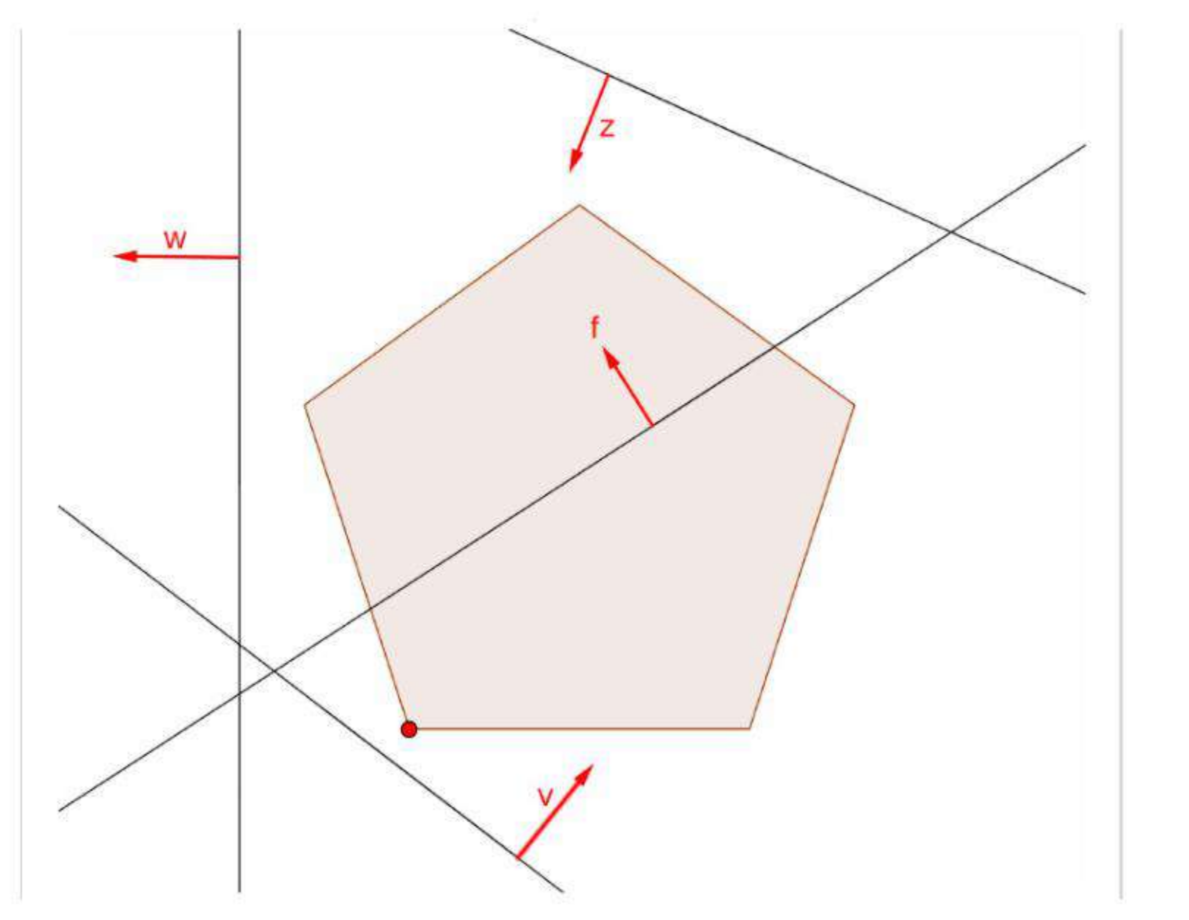
Exercício

Ex 1) Para a função objetiva indicada no Gráfico (indicado pelo vetor), qual é o valor máximo que a função pode alcançar na região sombreada. Porque ?



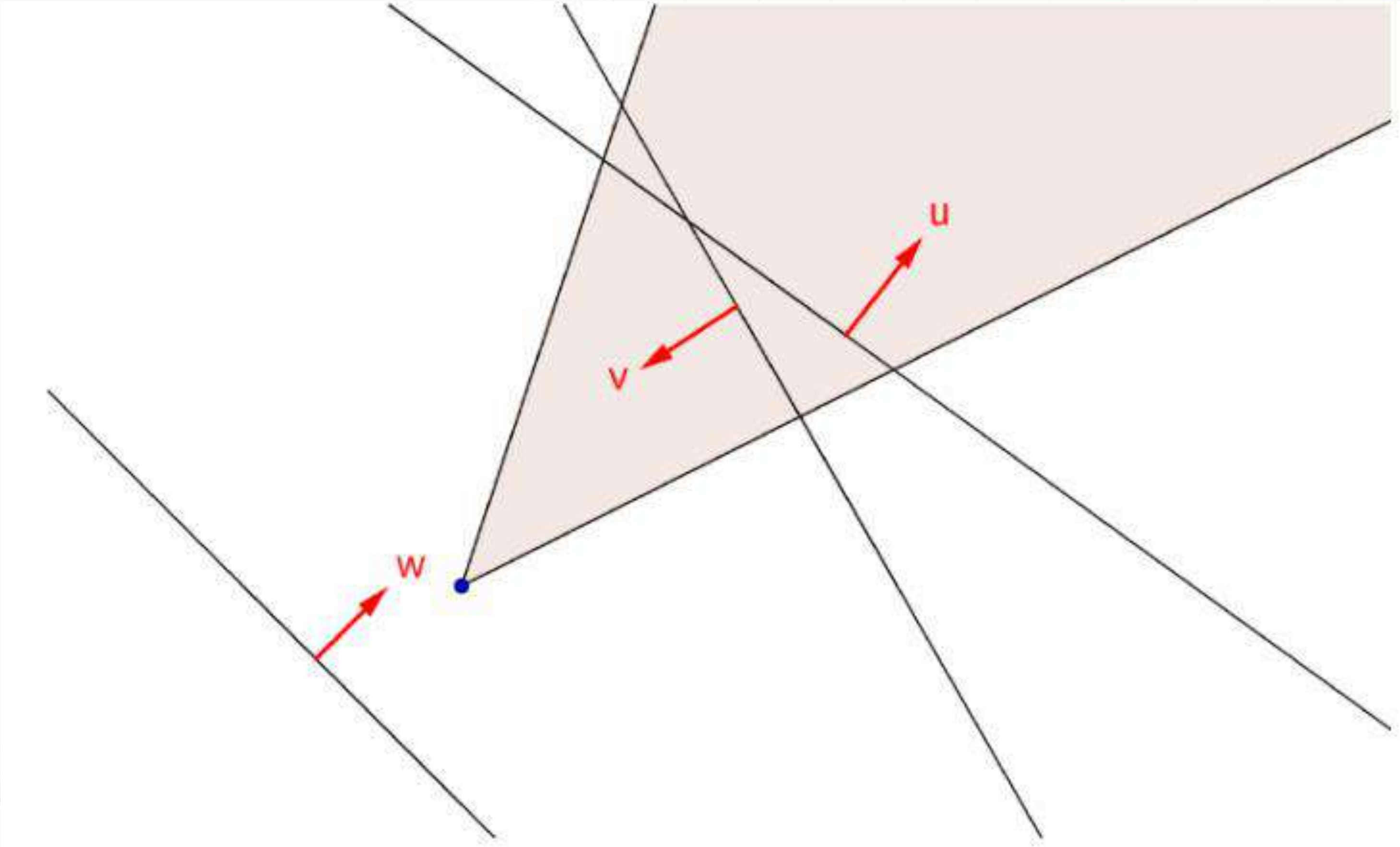
Exercício

Ex 2) Quais das funções objetivos indicadas na Figura alcançam solução ótima no ponto vermelho no poliedro sombreado.



Exercício

Ex 3) Quantas das funções objetivas ilustradas na Figura induzem PPL’s ilimitados no poliedro da região sombreada ?



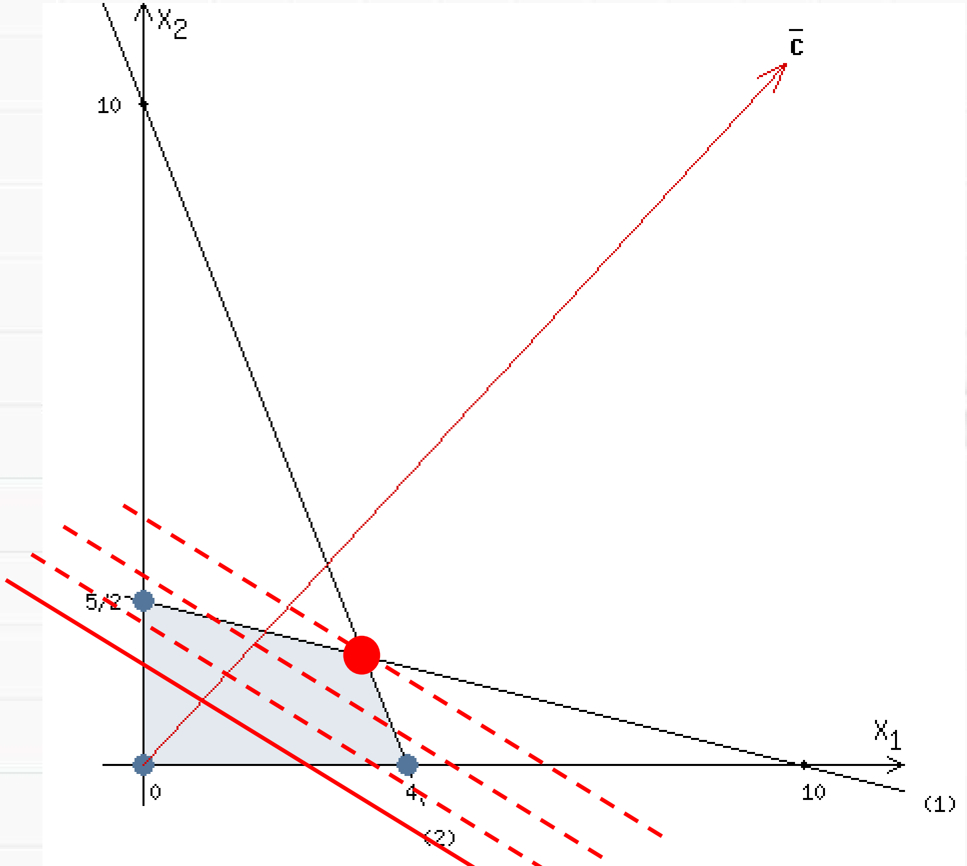
Exercício

Ex 3) Encontre o valor da solução ótima pelo método gráfico do seguinte PPL

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 100x_t + 125x_a \\
\text{s.a.} \quad & 3x_t + 6x_a \leq 30 \\
& 8x_t + 4x_a \leq 44 \\
& x_t \leq 5 \\
& x_a \leq 4 \\
& x_t, x_a \geq 0
\end{aligned}
$$

Lembre-se:

1) Traçar restrições e definir região viável
2) Traçar reta da FO
3) Definir direção de crescimento
4) 4) traçar retas paralelas e achar vértice ótimo



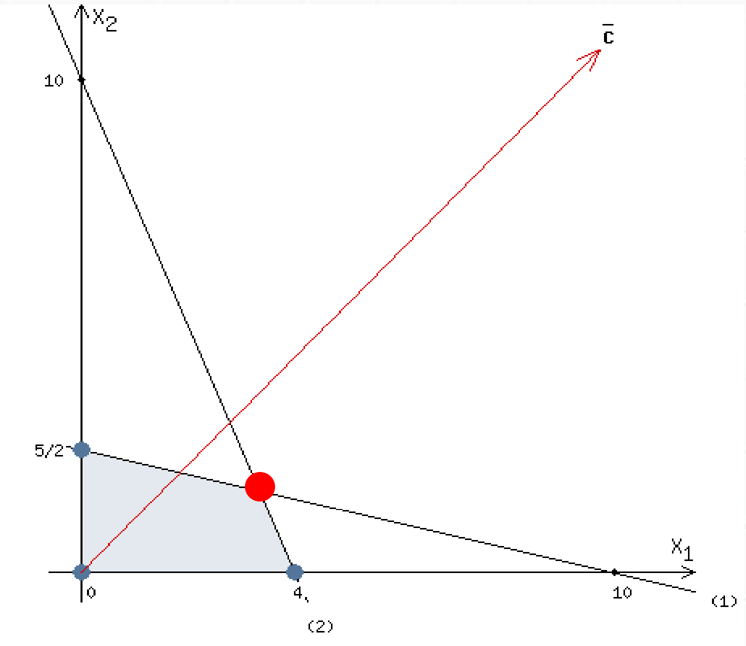
Algebra do PL

- O método gráfico é legal mas a gente só pode resolver problemas com 2 variáveis
- Vamos então pensar num método para resolver problemas grandes
- Vamos começar analisando o problema PPL

Algebra do PL

- Sabemos que o ótimo está num vértice

$$
\begin{aligned}
\max \quad & 11x_1 + 12x_2 \\
s.a. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1) \\
& 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2) \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

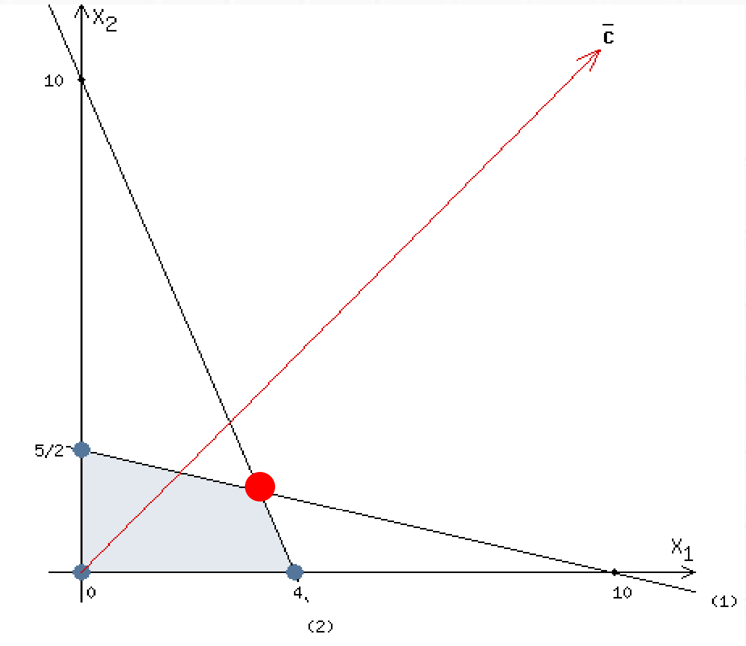


Mas como identificar o vértice num PPL ?

Algebra do PL

- Sabemos que o ótimo está num vértice

$$\begin{aligned} \max \quad & 11x_1 + 12x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1) \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



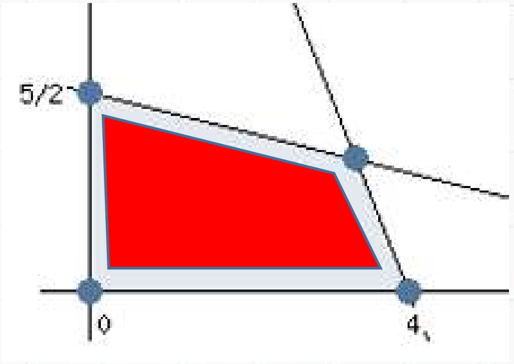
Mas como identificar o vértice num PPL ?

- Um vértice é alcançado em um sistema de igualdades (x>=0) quando o sistema é determinado, isto é, quando o número de restrições (L.I.) no sistema é igual ao número de variáveis.

Ex:

x + y + z = 1
x,y,z >= 0

Infinitas soluções

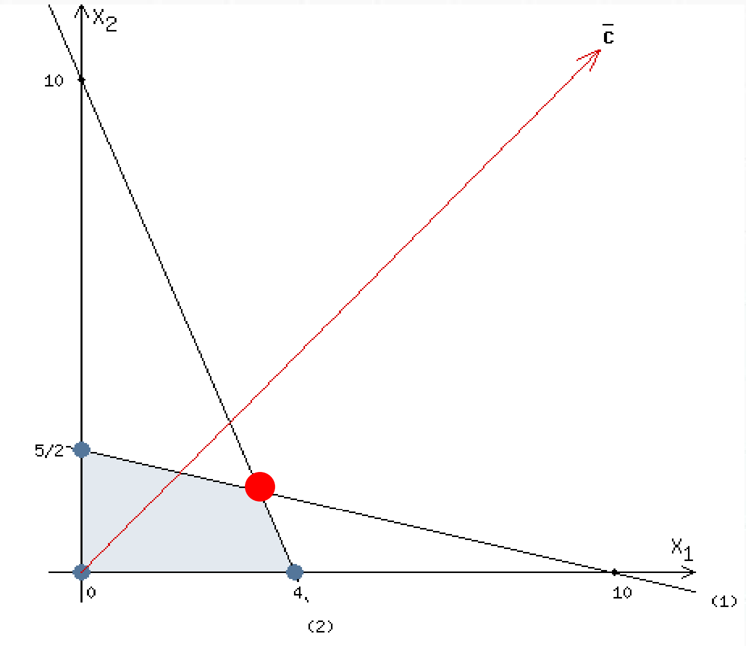


Solução pode estar em qualquer ponto do espaço de soluções

Algebra do PL

- Sabemos que o ótimo está num vértice

$$\begin{aligned} \max \quad & 11x_1 + 12x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1) \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



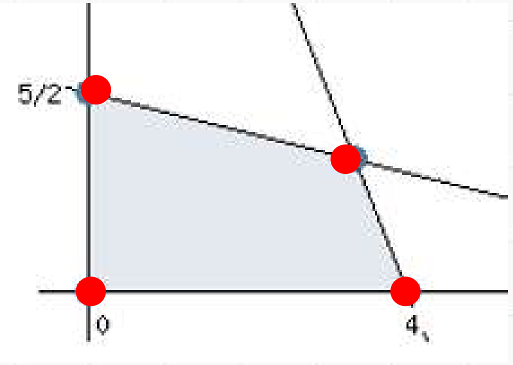
Mas como identificar o vértice num PPL ?

- Um vértice é alcançado em um <u>sistema de igualdades (x>=0)</u> quando o <u>sistema é determinado</u>, isto é, quando o número de restrições (L.I.) no sistema é igual ao número de variáveis.

Ex:

Vamos fixar y=z=0,
Sistema agora determinado,
var. = # rest.
x + 0 + 0 = 1
x,y,z >= 0

Solução única



Solução necessariamente está num vértice

Algebra do PL

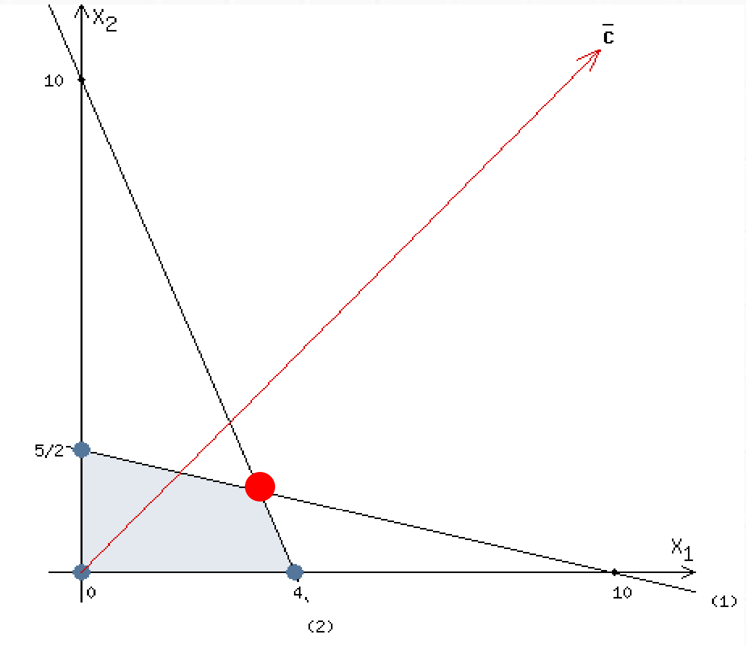
- Sabemos que o ótimo está num vértice

$$\max \quad 11x_1 + 12x_2$$

$$s.a. \quad x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1)$$

$$5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



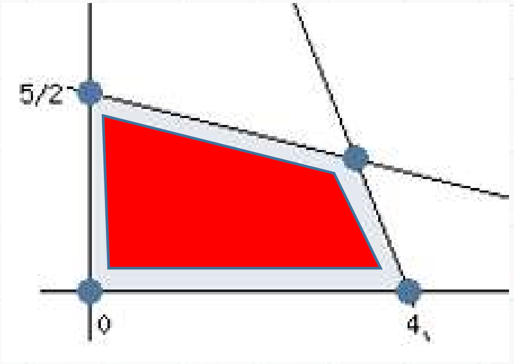
Mas como identificar o vértice num PPL ?

- Um vértice é alcançado em um <u>sistema de igualdades (x>=0)</u> quando o <u>sistema é determinado</u>, isto é, quando o número de restrições (L.I.) no sistema é igual ao número de variáveis.

Ex com 2 restrições:

x + y = 1
z + w = 1
x,y,z,w>=0

Infinitas soluções

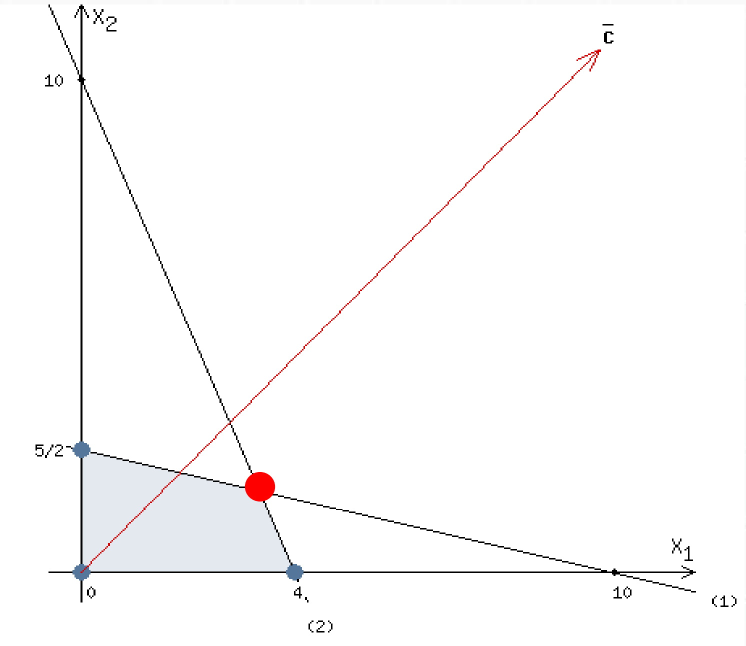


Solução pode estar em qualquer ponto do espaço de soluções

Algebra do PL

- Sabemos que o ótimo está num vértice

$$\begin{aligned} \max \quad & 11x_1 + 12x_2 \\ s.a. \quad & x_1 + 4x_2 \leq 10 \quad (1) \\ & 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \quad (2) \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$



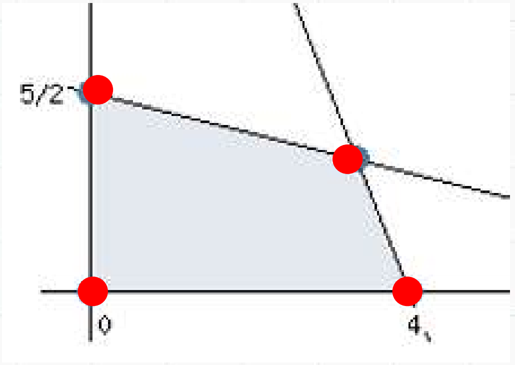
Mas como identificar o vértice num PPL ?

- Um vértice é alcançado em um <u>sistema de igualdades (x>=0)</u> quando o <u>sistema é determinado</u>, isto é, quando o número de restrições (L.I.) no sistema é igual ao número de variáveis.

Ex com 2 restrições:

Fixar y=z=0,
Sistema determinado
var. = # rest.
x + 0 = 1
0 + w = 1

Solução única



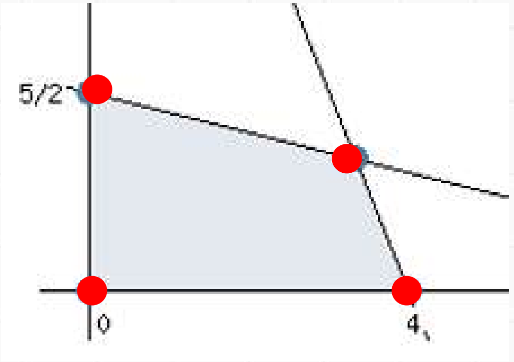
Solução necessariamente está num vértice

Algebra do PL

1) Reparem que quando fixamos variáveis, o sistema de equações é o mesmo, estamos apenas restringindo o conjunto solução, direcionando para um vértice (onde sabemos que a solução ótima está).

Fixar y=z=0,
Sistema determinado
var. = # rest.
x + 0 = 1
0 + w = 1
x,y,z,w>=0

Solução única



Algebra do PL

1) Reparem que quando fixamos variáveis, o sistema de equações é o mesmo, estamos apenas restringindo o conjunto solução, direcionando para um vértice (onde sabemos que a solução ótima está).

2) Precisamos então transformar o PPL para uma forma de sistema de igualdades com variáveis positivas equivalente para assim podermos <u>"zerar"</u> algumas variáveis e tornar o sistema <u>determinado</u>, e assim encontrar os vértices (solução ótima)

Como fazer isso ?

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad , i = 1...m \\
& x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1...n
\end{aligned}
$$

Algebra do PL

Vamos começar definindo algumas notações

- Um pode ser definido da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad , i = 1 \ldots m \\
& x_j \ge 0 \qquad\qquad j = 1 \ldots n
\end{aligned}
$$

Forma Algébrica

Algebra do PL

- Um pode ser definido da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad , i = 1 \ldots m \\
& x_j \geq 0 \qquad j = 1 \ldots n
\end{aligned}
\qquad \Longleftrightarrow \qquad
\begin{aligned}
\max \quad & z = c^T x \\
s.a. \quad & Ax \leq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Forma Algébrica

Forma matricial

para n,m > 0

Algebra do PL

- Denotamos:

- A_{mxn} é a matriz de coeficientes reais, onde $A_{mxn} \in R_{mxn}$

$$\max \ z = c^T x$$

$$s.a. \ \ Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Algebra do PL

- Denotamos:

- A_{mxn} é a <u>matriz de coeficientes</u> reais, onde $A_{mxn} \in R_{mxn}$
- $x^n = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$ são as <u>variáveis de decisão</u>

$$\max \; z = c^T x$$
$$s.a. \;\; Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

Algebra do PL

- Denotamos:

- A_{mxn} é a matriz de coeficientes reais, onde $A_{mxn} \in R_{mxn}$
- $x^n = (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{R}^n$ são as variáveis de decisão
- $c^n \in R^n$ é o vetor custo e c^Tx é a função objetivo

$$\max\ z = c^T x$$

$$s.a.\ \ Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Algebra do PL

- Denotamos:

- A_{mxn} é a matriz de coeficientes reais, onde $A_{mxn} \in R_{mxn}$
- $x^n = (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{R}^n$ são as variáveis de decisão
- $c^n \in R^n$ é o vetor custo e c^Tx é a função objetivo
- Ax <= b são as restrições não triviais

$$\max \ z = c^T x$$

$$s.a. \ \ Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Algebra do PL

- Denotamos:

- A_{mxn} é a matriz de coeficientes reais, onde $A_{mxn} \in R_{mxn}$
- $x^n = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$ são as variáveis de decisão
- $c^n \in R^n$ é o vetor custo e $c^T x$ é a função objetivo
- $Ax <= b$ são as restrições não triviais
- $x >= 0$ são as restrições triviais (não negatividade)

$$\max \; z = c^T x$$

$$s.a. \; Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Algebra do PL

- Denotamos:

- A_{mxn} é a matriz de coeficientes reais, onde $A_{mxn} \in R_{mxn}$
- $x^n = (x_1,\ldots,x_n) \in R^n$ são as variáveis de decisão
- $c^n \in R^n$ é o vetor custo e $c^T x$ é a função objetivo
- Ax <= b são as restrições não triviais
- x>= 0 são as restrições triviais (não negatividade)
- o conjunto $S=\{x \in R^n \mid Ax \leq b \text{ e } x \geq 0\}$ é o conjunto de pontos viáveis

$$\max \ z = c^T x$$

$$s.a. \ \ Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Algebra do PL

- Denotamos:

- A_{mxn} é a matriz de coeficientes reais, onde $A_{mxn} \in R_{mxn}$
- $x^n = (x_1,\dots,x_n) \in R^n$ são as variáveis de decisão
- $c^n \in R^n$ é o vetor custo e $c^T x$ é a função objetivo
- Ax <= b são as restrições não triviais
- x>= 0 são as restrições triviais (não negatividade)
- o conjunto $S=\{x \in R^n \mid Ax \le b \ e \ x \ge 0\}$ é o conjunto de pontos viáveis
- $x^* \in R^n$ é uma solução ótima do problema se

$$c^T x^* \geq c^T x, \forall x \in S$$

$$\max \ z = c^T x$$

$$s.a. \ \ Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Algebra do PL

- Formato Padrão:

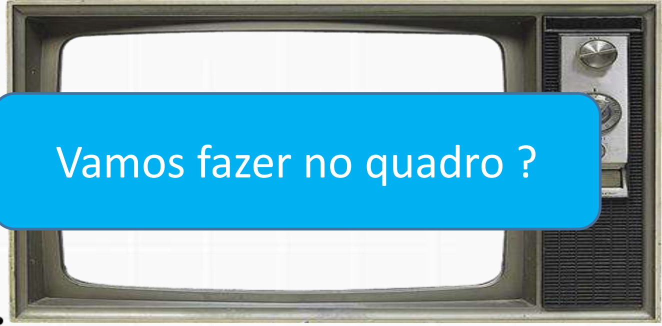
$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , i = 1...m$$
$$x_j \geq 0 \qquad j = 1...n$$

$\Leftrightarrow$

$$\max \quad z = c^T x$$
$$s.a. \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Formato padrão será de igualdade com variáveis positivas, onde podermos zerar variáveis e deixar o sistema determinado (#var = #rest)

Algebra do PL



Vamos fazer no quadro ?

- Formato Padrão:

$$\begin{aligned} \max\ & z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.a.\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , i = 1 \ldots m \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1 \ldots n \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & z = c^T x \\ s.a.\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Todo problema PPL pode ser colocado na forma padrão:
  - Transformar:

$$(P1) \min c^T x \;=\; (P2) \max -c^T x$$

será ?

Algebra do PL

- Formato Padrão:

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , i = 1 \ldots m$$
$$x_j \geq 0 \qquad j = 1 \ldots n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max \quad z = c^T x$$
$$s.a. \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

- Todo problema PPL pode ser colocado na forma padrão:
  - Transformar:

$$(P1) \min c^T x \; = \; (P2) \max -c^T x$$

será ?

Seja x* ótimo de P1 então $c^T x^* \leq c^T, \forall x \in P1$

logo, multiplicamos por (-1) $c^T x^* \leq c^T x$

e, $-c^T x^* \geq -c^T x$

que é ótimo para P2

Algebra do PL

- Formato Padrão:

$$\max \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.a. \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ , i = 1...m$$
$$x_j \geq 0 \qquad j = 1...n$$

$\Longleftrightarrow$

$$\max \ z = c^T x$$
$$s.a. \ \ Ax = b$$
$$x \geq 0$$

- Transformar: Restrições de <=

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \longleftrightarrow$$

Algebra do PL

- Formato Padrão:

$$
\begin{aligned}
\max\ & z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
s.a.\ & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , i = 1 \dots m \\
& x_j \geq 0 \qquad j = 1 \dots n
\end{aligned}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{aligned}
\max\ & z = c^T x \\
s.a.\ & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

- Transformar: Restrições de <=

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \boxed{x_{n+1}} = b_i$$

$$x_{n+1} \geq 0$$

Variável de folga

Algebra do PL

- Formato Padrão:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.a. \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad, i = 1 \ldots m \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1 \ldots n \end{aligned} \iff \begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ s.a. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Transformar: Restrições de >=

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \longleftrightarrow$$

Algebra do PL

- Formato Padrão:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \textstyle\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.a. \quad & \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , i = 1 \ldots m \\ & x_j \geq 0 \qquad j = 1 \ldots n \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & z = c^T x \\ s.a. \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

- Transformar: Restrições de >=

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \longleftrightarrow \textstyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - \boxed{x_{n+1}} = b_i$$

$$x_{n+1} \geq 0$$

Variável de folga

Algebra do PL

- Formato Padrão:

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.a. \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , i = 1 \ldots m$$
$$x_j \geq 0 \qquad j = 1 \ldots n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max \ z = c^T x$$
$$s.a. \ \ Ax = b$$
$$x \geq 0$$

- Transformar:

variáveis livres $x_j \in R$

Algebra do PL

- Formato Padrão:

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$
$$s.a. \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad , i = 1 \ldots m$$
$$x_j \geq 0 \qquad j = 1 \ldots n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\max \quad z = c^T x$$
$$s.a. \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

- Transformar:

variáveis livres $x_j \in R$

substituir $x_j = (x_j^{'} - x_j^{''})$

$$x_j^{'} \geq 0$$
$$x_j^{''} \geq 0$$

Algebra do PL

- Formato Padrão:

exemplo

$$
\begin{aligned}
(P1)\ \min \quad & x_1 + 3x_2 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Algebra do PL

- Formato Padrão:

exemplo

$$(P1)\ \min \quad x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$(P2)\ \max \quad -x_1 - 3x_2$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 4$$
$$x_1 + 2x_2 - x_4 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Algebra do PL

- Formato Padrão:

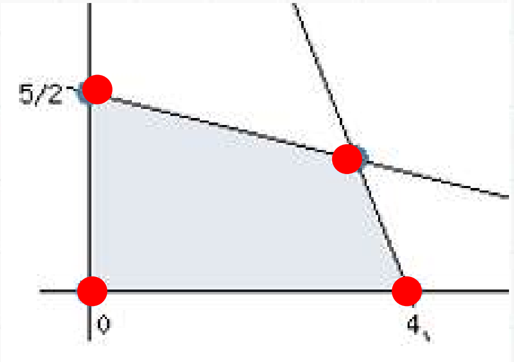
exemplo

$$
(P1)\ \min \quad x_1 + 3x_2 \\
x_1 + x_2 \leq 4 \\
x_1 + 2x_2 \geq 6 \\
x_1, x_2 \geq 0
$$

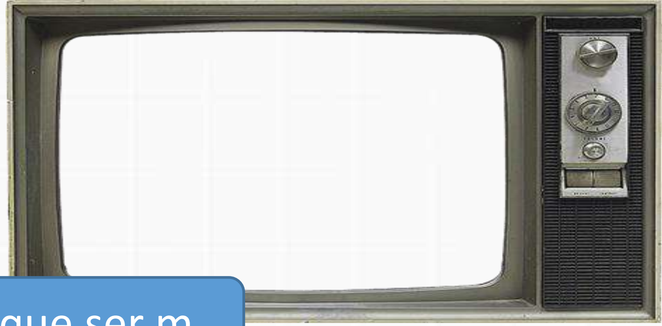
$$
(P2)\ \max \quad -x_1 - 3x_2 \\
x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
x_1 + 2x_2 - x_4 = 6 \\
x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
$$

Pronto, depois de colocar no formato padrão podemos "zerar" variáveis e deixar o sistema determinado (SD) !

Mas quantas variáveis zerar ? Pois em um sistema determinado o #var = #rest (LI)



Algebra do PL



- Sem perda de generalidade, vamos supor que a matriz A possui m linhas (ou colunas) linearmente independentes, i.e., posto(A)=m

Então em um SD, #var tem que ser m

Relembrando:

- Independência Linear: Dada uma matriz A=[a_1, a_2, ... a_m] as colunas (ou linhas) de A são ditas LI (linearmente independentes) ssse

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i = 0_m \longrightarrow \alpha_i = 0, \forall i = 1 \ldots m$$

- Dado que as colunas (ou linhas) de A são LI então isso implica que det(A) ≠ 0
- Na verdade, dado A_{nxm} , as seguintes afirmações são equivalentes:
  - As m colunas (ou linhas) de A são LI
  - Det(A) ≠ 0
  - ∃ inversa A^{-1}
  - A é dita não singular

Algebra do PL

- Sem perda de generalidade, vamos supor que a matriz A possui m linhas (ou colunas) <u>linearmente independentes, i.e., posto(A)=m</u>

Então em um SD, #var tem que ser m

- Particionar A em A=[B,N], onde B é uma matriz quadrada mxm e <u>inversível</u> (pois suas colunas são LI)

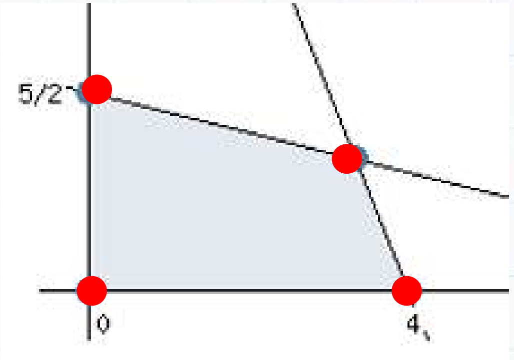
- A ideia é a matriz N ser composta pelas variáveis que vão ser zeradas
- E a matriz B (que tem m variáveis) ficarão livres

$$\begin{array}{cc} B & N \\ \boxed{\begin{array}{c} x \\ z \end{array}} \begin{array}{c} + \\ + \end{array} & \boxed{\begin{array}{c} y + a \\ w + b \end{array}} \begin{array}{c} = 1 \\ = 1 \end{array} \end{array}$$

x,y,z,w,a,b>=0

$$\begin{array}{cc} B & N \\ \boxed{\begin{array}{c} x \\ z \end{array}} \begin{array}{c} + \\ + \end{array} & \boxed{\begin{array}{c} 0 + 0 \\ 0 + 0 \end{array}} \begin{array}{c} = 1 \\ = 1 \end{array} \end{array}$$

x,y,z,w,a,b>=0



Algebra do PL

- Sem perda de generalidade, vamos supor que a matriz A possui m linhas (ou colunas) linearmente independentes, i.e., posto(A)=m

- Particionar A em A=[B,N], onde B é uma matriz quadrada mxm e inversível (pois suas colunas são LI)
- Também particionaremos $x^T = (x_B^T \; x_N^T)$ e $c = (c_B \; c_N)$

x_B	x_N
x	y
z	z
	a
	b

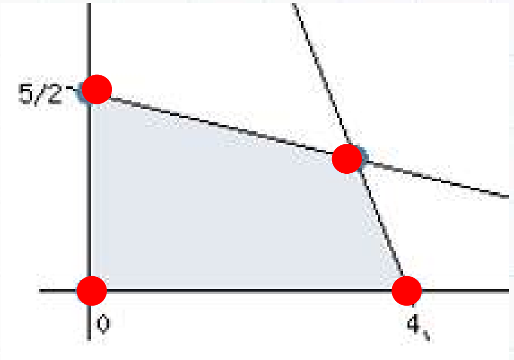
- A ideia é a matriz N ser composta pelas variáveis que vão ser zeradas
- E a matriz B (que tem m variáveis) ficarão livres

$$\begin{array}{cc} B & N \\ \boxed{\begin{array}{c} x \\ z \end{array}} + & \boxed{\begin{array}{c} y + a \\ w + b \end{array}} \end{array} \begin{array}{c} \\ = 1 \\ = 1 \end{array}$$

x,y,z,w,a,b>=0

$$\begin{array}{cc} B & N \\ \boxed{\begin{array}{c} x \\ z \end{array}} + & \boxed{\begin{array}{c} 0 + 0 \\ 0 + 0 \end{array}} \end{array} \begin{array}{c} \\ = 1 \\ = 1 \end{array}$$

x,y,z,w,a,b>=0



Algebra do PL

- Sem perda de generalidade, vamos supor que a matriz A possui m linhas (ou colunas) <u>linearmente independentes, i.e., posto(A)=m</u>

- Particionar A em A=[B,N], onde B é uma matriz quadrada mxm e <u>inversível</u> (pois suas colunas são LI)
- Também particionaremos $x^T = (x_B^T \; x_N^T)$ e $c = (c_B \; c_N)$

exemplo:

forma padrão

Vamos o processo com um exemplo real

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

Algebra do PL

- Sem perda de generalidade, vamos supor que a matriz A possui m linhas (ou colunas) <u>linearmente independentes, i.e., posto(A)=m.</u>

- Particionar A em A=[B,N], onde B é uma matriz quadrada mxm e <u>inversível</u> (pois suas colunas são LI)
- Também particionaremos $x^T = (x_B^T \; x_N^T)$ e $c = (c_B \; c_N)$

exemplo:

forma padrão

$$
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
& 2x_1 + x_2 \leq 6 \\
& x_1 + x_2 \leq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{aligned}
\max \quad & x_1 + 2x_2 \\
& 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\
& x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Algebra do PL

- Sem perda de generalidade, vamos supor que a matriz A possui m linhas (ou colunas) <u>linearmente independentes, i.e., posto(A)=m</u>

- Particionar A em A=[B,N], onde B é uma matriz quadrada mxm e <u>inversível</u> (pois suas colunas são LI)
- Também particionaremos $x^T = (x_B^T \; x_N^T)$ e $c = (c_B \; c_N)$

exemplo:

forma padrão

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} x1 & x2 & x3 & x4 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Algebra do PL

- Sem perda de generalidade, vamos supor que a matriz A possui m linhas (ou colunas) linearmente independentes, i.e., posto(A)=m

- Particionar A em A=[B,N], onde B é uma matriz quadrada mxm e inversível (pois suas colunas são LI)
- Também particionaremos $x^T = (x_B^T \; x_N^T)$ e $c = (c_B \; c_N)$

exemplo:

forma padrão

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \text{x1} & \text{x2} & \text{x3} & \text{x4} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

vamos escolher as colunas de x1 e x3 para fazer B pois são LI (porque?)

Algebra do PL

- Sem perda de generalidade, vamos supor que a matriz A possui m linhas (ou colunas) <u>linearmente independentes, i.e., posto(A)=m</u>

- Particionar A em A=[B,N], onde B é uma matriz quadrada mxm e <u>inversível</u> (pois suas colunas são LI)
- Também particionaremos $x^T = (x_B^T \; x_N^T)$ e $c = (c_B \; c_N)$

exemplo:

forma padrão

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x1 & x2 & x3 & x4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad B = \begin{array}{c} \begin{matrix} x1 & x3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

vemos de det(B) = (2x0)-(1-1) = 1 que é $\neq 0$, logo inversível

vamos escolher as colunas de x1 e x3 para fazer B pois são LI (porque?)

Algebra do PL

- Sem perda de generalidade, vamos supor que a matriz A possui m linhas (ou colunas) linearmente independentes, i.e., posto(A)=m

- Particionar A em A=[B,N], onde B é uma matriz quadrada mxm e inversível (pois suas colunas são LI)
- Também particionaremos $x^T = (x_B^T \; x_N^T)$ e $c = (c_B \; c_N)$

exemplo:

forma padrão

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Então, ao zerarmos x3 e x4, conseguimos um SD, onde os valores de x1 e x2 (vértice) seriam de ?

Vamos fazer no quadro ?

$$A = \begin{array}{cccc} x1 & x2 & x3 & x4 \end{array} \quad B = \begin{array}{cc} x1 & x3 \end{array} \quad N = \begin{array}{cc} x2 & x4 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

vamos escolher as colunas de x1 e x3 para fazer B pois são LI

Algebra do PL

- Encontrar os valores de xB=(x1, x2) (vértice) deu trabalho fazer as "continhas"

- Vamos rearranjar as restrições para me dar os valores de xB direto ?

$$Ax = b$$

?

Algebra do PL

Vamos fazer no quadro ?

- Podemos expressar as restrições do problema em função das variáveis x_B: (Como ?)

$$Ax = b$$

?

Algebra do PL

- Podemos expressar as restrições do problema em função das variáveis x_B: (Como ?)

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ Bx_B + Nx_N &= b \ (\rightarrow .B^{-1}) \\ B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\ x_B + B^{-1}Nx_N &= B^{-1}b \\ \boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N} \end{aligned}$$

Agora sim, depois de “zerar” xN, vamos ter as variáveis do SD (xB) direto

Algebra do PL

- Podemos expressar as restrições do problema em função das variáveis x_B: (Como ?)

$$Ax = b$$

$$Bx_B + Nx_N = b \ (\rightarrow .B^{-1})$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$\boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}$$

- Denominamos x_B de variáveis básicas e x_N de variáveis não básicas

Variáveis livres do SD

Variáveis zeradas

Algebra do PL

- Podemos expressar as restrições do problema em função das variáveis x_B: (Como ?)

$$Ax = b$$

$$Bx_B + Nx_N = b \ (\rightarrow .B^{-1})$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$\boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}$$

- Denominamos x_B de variáveis básicas e x_N de variáveis não básicas
- Ao anularmos x_N, (x_N=0) obtemos um sistema determinado (uma solução) com m equações e m incógnitas. Denominamos esta solução de básica.

Algebra do PL

- Podemos expressar as restrições do problema em função das variáveis x_B: (Como ?)

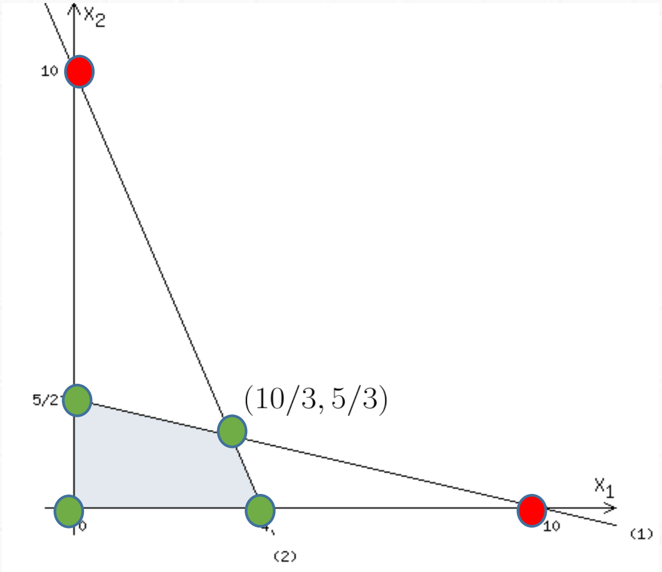
$$Ax = b$$

$$Bx_B + Nx_N = b \ (\rightarrow .B^{-1})$$

$$B^{-1}Bx_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$x_B + B^{-1}Nx_N = B^{-1}b$$

$$\boxed{x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N}$$



- Denominamos x_B de variáveis básicas e x_N de variáveis não básicas
- Ao anularmos x_N, (x_N=0) obtemos um sistema determinado (uma solução) com m equações e m incógnitas. Denominamos esta solução de básica.
- Além disso, se x_B>=0 e x_N=0, denominamos de solução básica viável

Algebra do PL

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- Continuando o exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Seja $B^{-1} =$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Como ficariam as restrições:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Algebra do PL

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- Continuando o exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Seja $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, temos

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Como ficariam as restrições:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Algebra do PL

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

- Continuando o exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Como ficariam as restrições:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Seja $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, temos

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

Algebra do PL

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

- Continuando o exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

E a solução básica seria ?

Seja $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, temos

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 + x_4 \\ -x_2 - 2x_4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 4 - x_2 - x_4 \\ -2 + x_2 + 2x_4 \end{bmatrix}}$$

Algebra do PL

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- Continuando o exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix} \quad x_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad x_N = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

E a solução básica seria ?

Seja $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, temos

$$x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_2 + x_4 \\ -x_2 - 2x_4 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 4 - x_2 - x_4 \\ -2 + x_2 + 2x_4 \end{bmatrix}}$$

Então $\begin{cases} x_2 = x_4 = 0 \\ x_1 = 4 \\ x_3 = -2 \end{cases}$, é uma solução básica porém inviável.

porque?

Algebra do PL

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

- Continuando o exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mas se tivéssemos escolhido uma base diferente ?

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = B^{-1}$$

Como ficariam as restrições:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

Algebra do PL

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

- Continuando o exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mas se tivéssemos escolhido uma base diferente ?

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = B^{-1}$$

Como ficariam as restrições:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 6 - 2x_1 - x_2 \\ 4 - x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Algebra do PL

$$\begin{array}{ll} \max & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{array}$$

- Continuando o exemplo anterior

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mas se tivéssemos escolhido uma base diferente ?

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = B^{-1}$$

Como ficariam as restrições:

$$x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$$

$$x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x_B = \begin{bmatrix} 6 - 2x_1 - x_2 \\ 4 - x_1 - x_2 \end{bmatrix}$$

Então $\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 4 \end{cases}$, solução básica e viável.

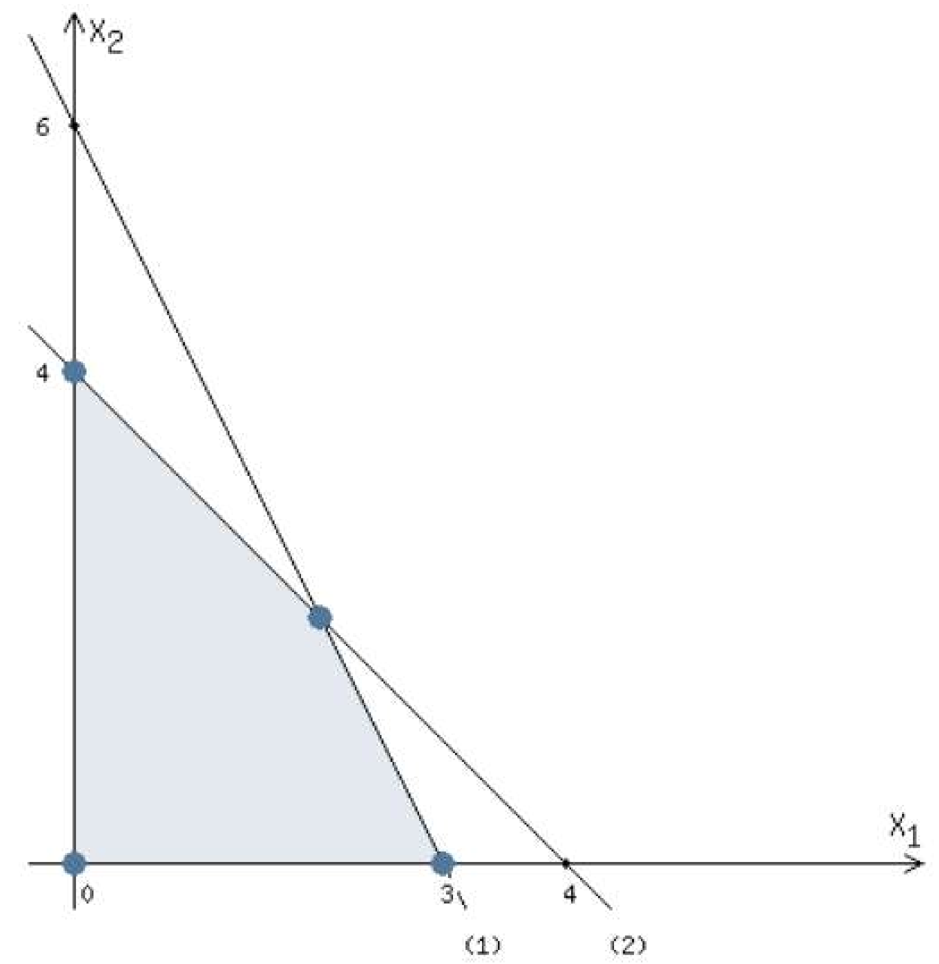
Algebra do PL

Agora veja o problema original plotado no gráfico

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$



Algebra do PL

Agora veja o problema original plotado no gráfico, e a solução básica encontrada

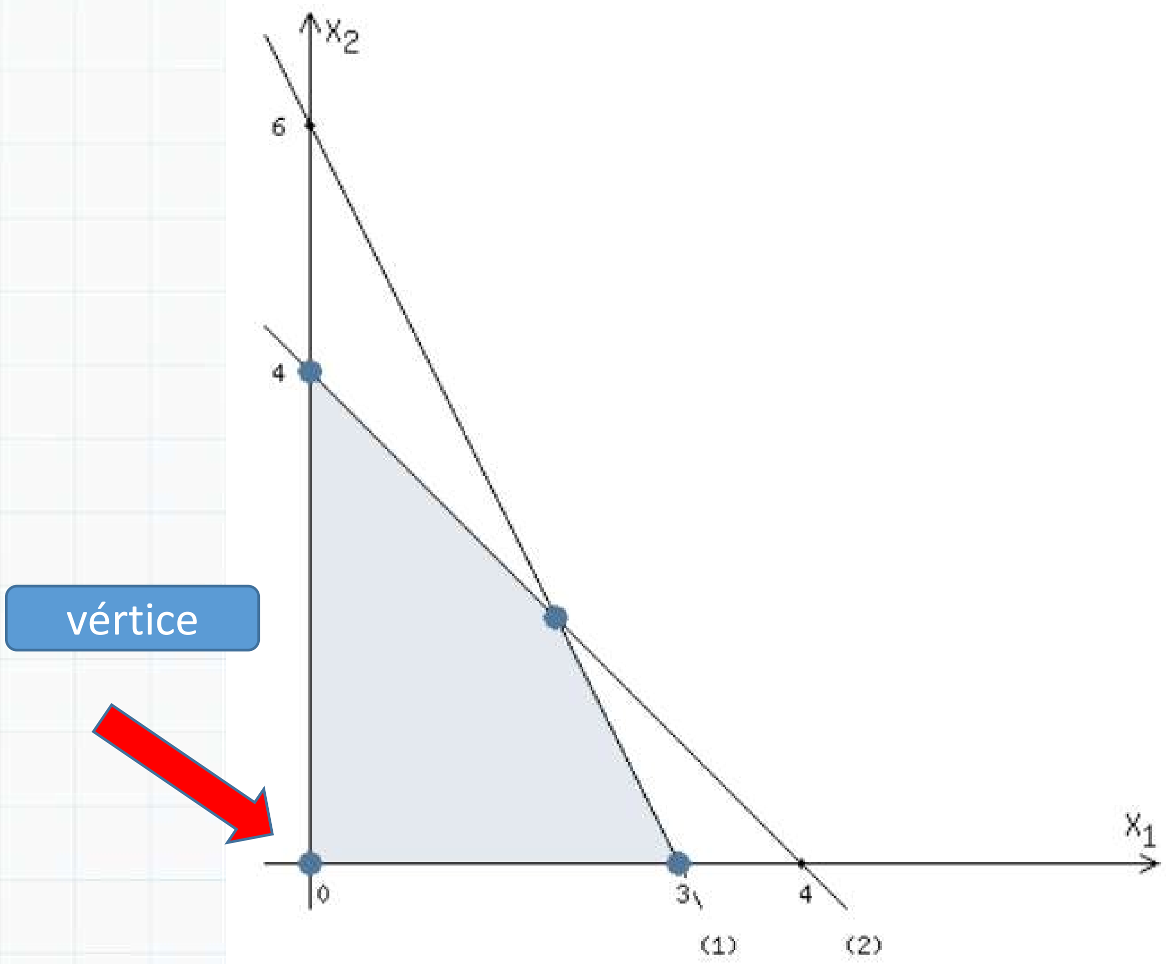
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = B^{-1}$$

$$\text{Então} \begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 4 \end{cases} \text{, solução básica e viável.}$$



Algebra do PL

TEOREMA 1 : Toda solução básica do PPL equivale a um vértice do poliedro, e todo vértice do poliedro equivale a pelo menos uma base

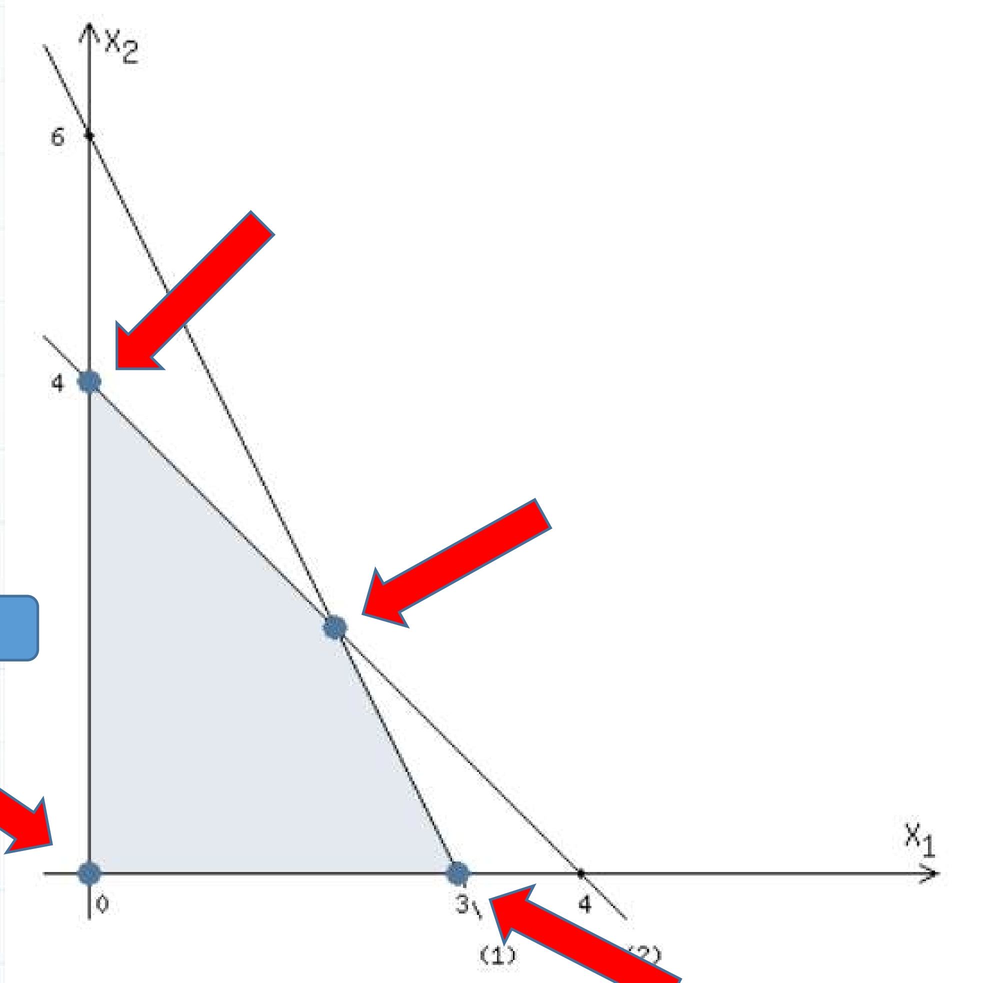
$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1 + x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

É fácil provar mas não vamos adentrar na prova !

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 2x_2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ & x_1 + x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

$$B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = B^{-1}$$

vértice



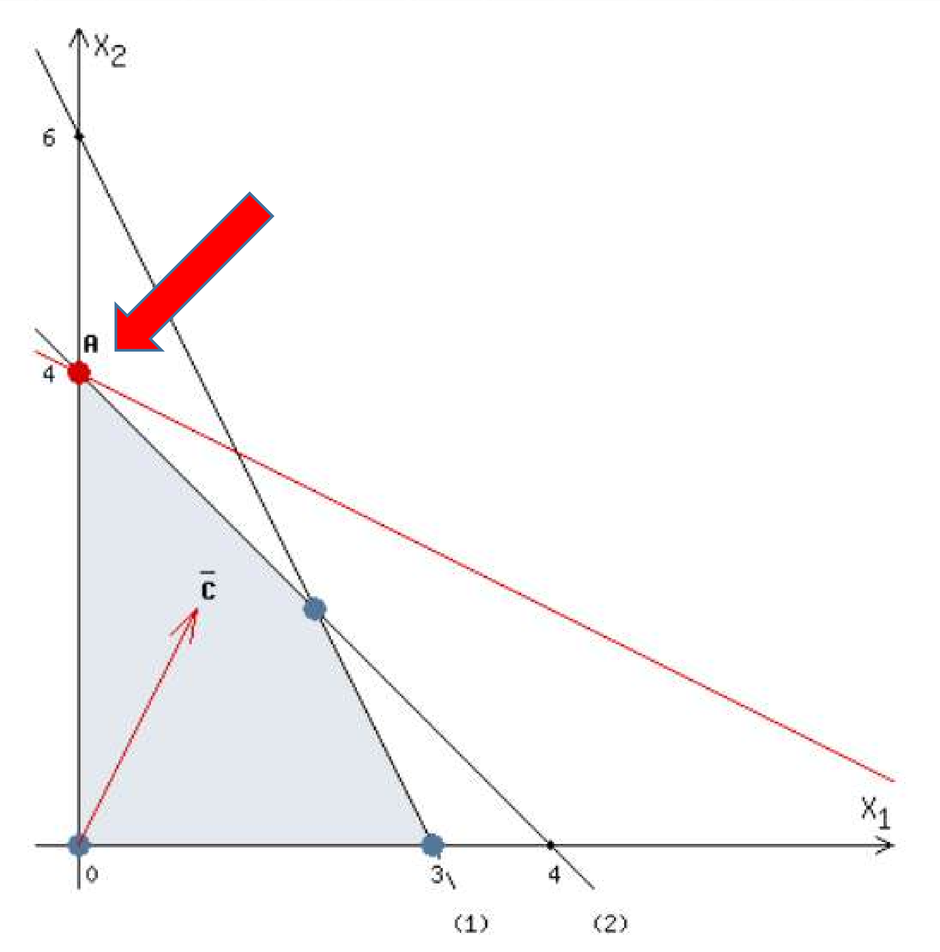
Então $\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 6 \\ x_4 = 4 \end{cases}$, solução básica e viável.

Algebra do PL

- Além disso, sabemos pelo método gráfico que a solução ótima de um PPL se encontra num vértice, logo podemos enunciar o seguinte teorema:

TEOREMA 2 : Se o PPL tiver solução ótima, então uma solução ótima é atingida por pelo menos um vértice do conjunto de pontos viáveis (logo, uma S.B.V.)

Também é fácil provar mas foge do foco do curso !

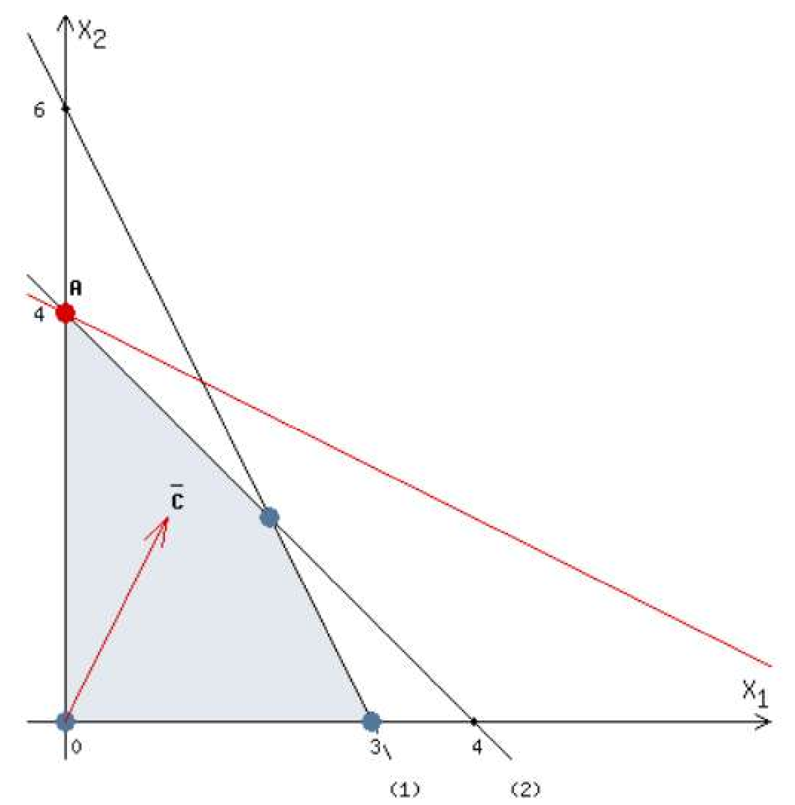


Algebra do PL

- Então concluindo:

TEOREMA 1 : Toda solução básica do PPL equivale a um vértice do poliedro, e todo vértice do poliedro equivale a pelo menos uma base

TEOREMA 2 : Se o PPL tiver solução ótima, então uma solução ótima é atingida por pelo menos um vértice do conjunto de pontos viáveis (logo, uma S.B.V.)



Até a próxima