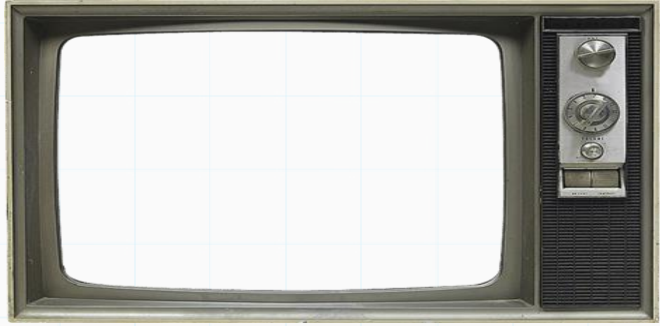


Métodos para PPI

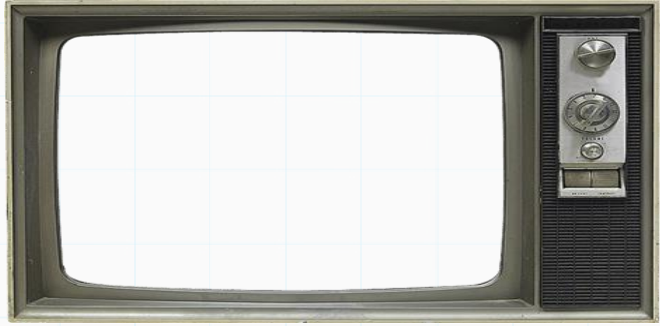
Professor : Yuri Frota

www.ic.uff.br/~yuri/pi.html

yuri@ic.uff.br

Essa vai ser outra aula teórica

Limites



Como encontrar solução ótima de um PPI ?

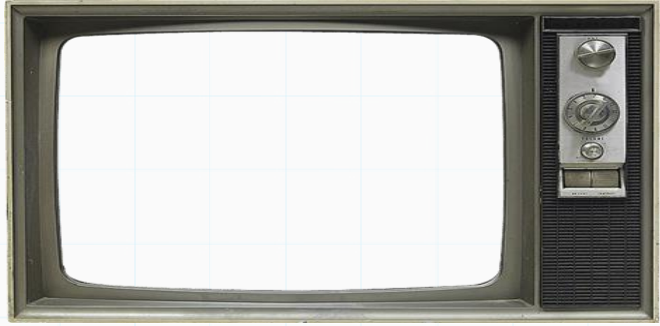
- usar limitantes:

$$z = \max\left\{c^T x : x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{Z}\right\}$$

$\overline{Z}$ limitante superior de Z

$\underline{Z}$ limitante inferior de Z

Limites



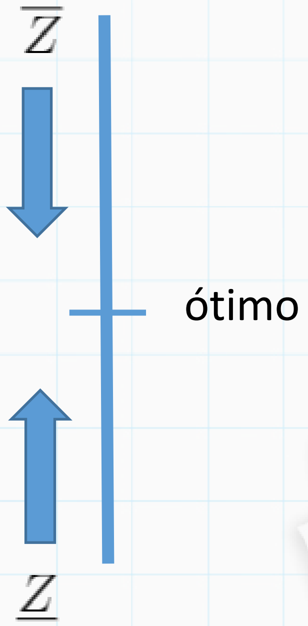
Como encontrar solução ótima de um PPI ?

- usar limitantes:

$$z = \max\,\{c^T x : x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{Z}\}$$

$\overline{Z}$ limitante superior de Z

$\underline{Z}$ limitante inferior de Z



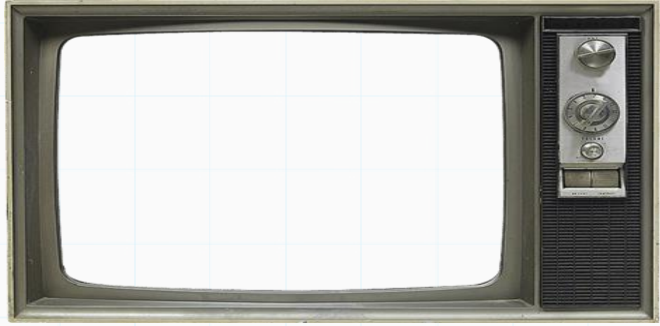
Algoritmo:

Iteração	0)	1)	3)	....

limite superior $\overline{Z}^0 \geq \overline{Z}^1 \geq \overline{Z}^2 \geq \ldots$

limite inferior $\underline{Z}^0 \leq \underline{Z}^1 \leq \underline{Z}^2 \leq \ldots$

Limites



Como encontrar solução ótima de um PPI ?

- usar limitantes:

$$z = \max \{c^T x : x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{Z}\}$$

$\overline{Z}$ limitante superior de Z

$\underline{Z}$ limitante inferior de Z

Algoritmo:

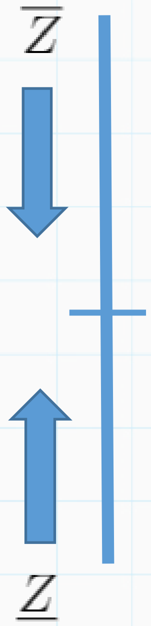
Iteração	0)	1)	3)	....

limite superior $\overline{Z}^0 \geq \overline{Z}^1 \geq \overline{Z}^2 \geq \ldots$

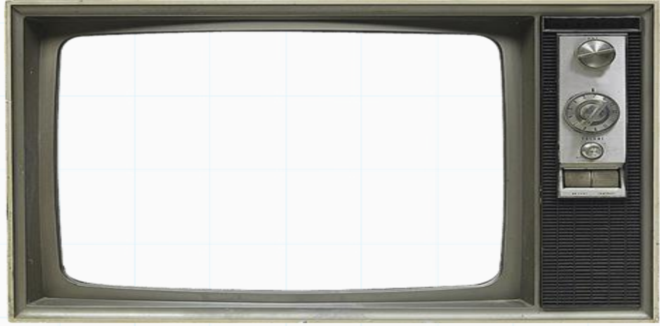
limite inferior $\underline{Z}^0 \leq \underline{Z}^1 \leq \underline{Z}^2 \leq \ldots$

Condição de Parada:

$$\underline{Z}^i = \overline{Z}^i \quad \text{ou} \quad \overline{Z}^i - \underline{Z}^i < \epsilon$$



Limites



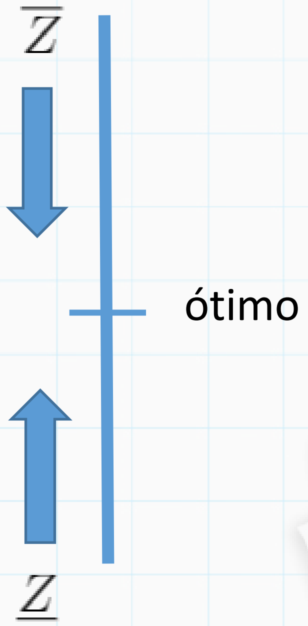
Como encontrar solução ótima de um PPI ?

- usar limitantes:

$$z = \max\ \{c^T x : x \in \mathbb{X} \subseteq \mathbb{Z}\}$$

$\overline{Z}$ limitante superior de Z

$\underline{Z}$ limitante inferior de Z



Algoritmo:

Iteração	0)	1)	3)	....

limite superior $\overline{Z}^0 \geq \overline{Z}^1 \geq \overline{Z}^2 \geq \ldots$

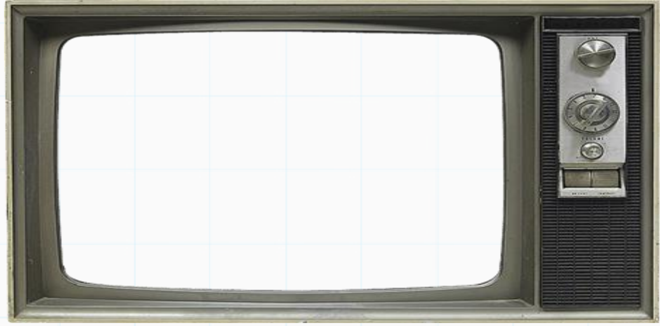
limite inferior $\underline{Z}^0 \leq \underline{Z}^1 \leq \underline{Z}^2 \leq \ldots$

Condição de Parada:

$\underline{Z}^i = \overline{Z}^i$ ou $\overline{Z}^i - \underline{Z}^i < \epsilon$

Todos os métodos para PPI usam essa ideia, o que muda é como conseguir os limitantes

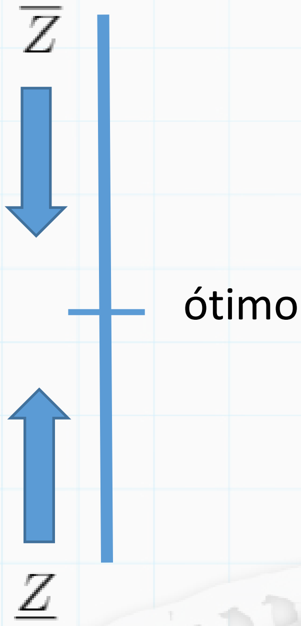
Limites



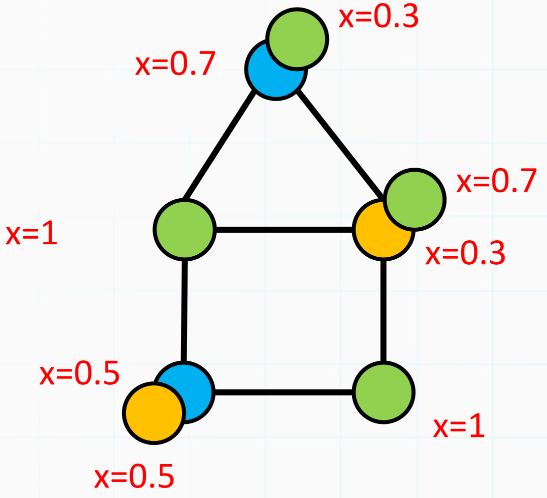
Como conseguir limites inferiores (primais):

- heurísticas, metaheurísticas, métodos aproximativos, etc

- heurísticas sobre o modelo (técnicas de arredondamento)

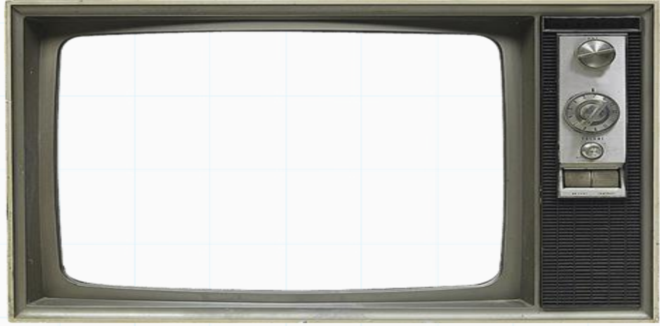


Problema de coloração



?

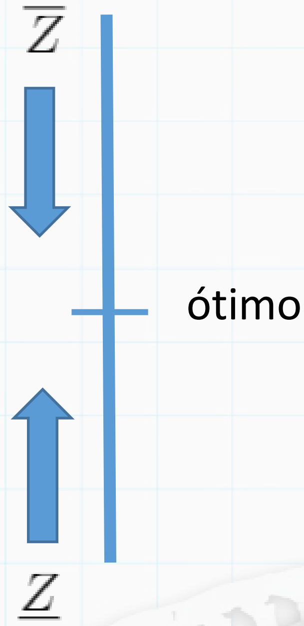
Limites



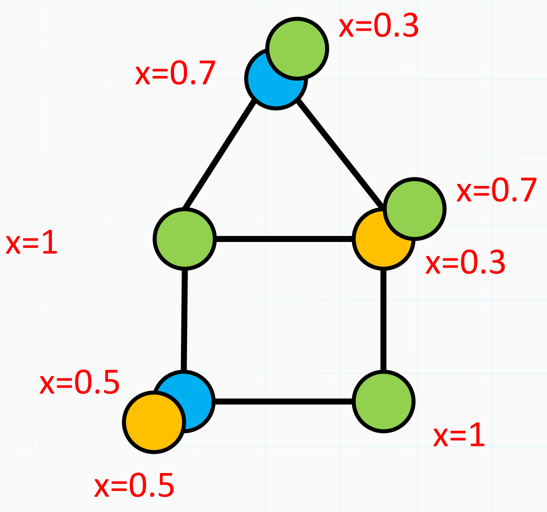
Como conseguir limites inferiores (primais):

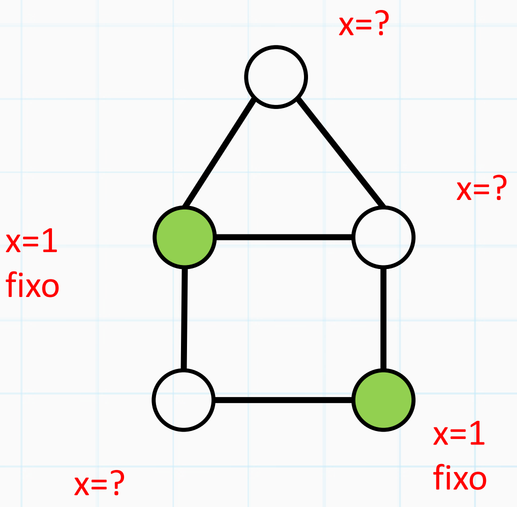
- heurísticas, metaheurísticas, métodos aproximativos, etc

- heurísticas sobre o modelo (técnicas de arredondamento)
- matheuristicas



Problema de coloração



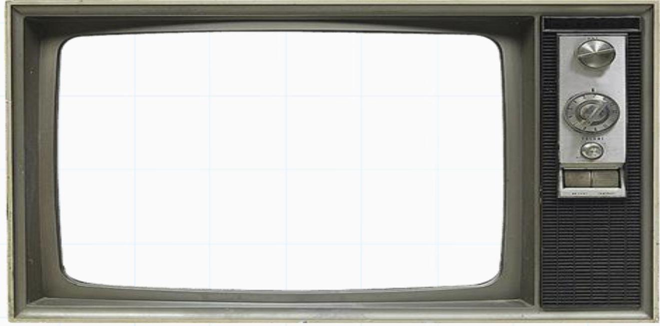


modelo reduzido

Existe (quase sempre) um tamanho de problema em que os modelos são mais rápidos que heurísticas

LNS (Large Neighborhood Search):
- Destroi
- Repara

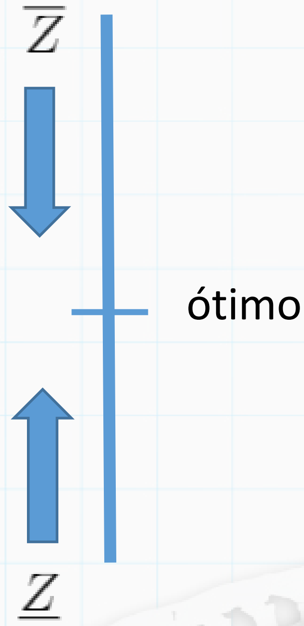
Limites

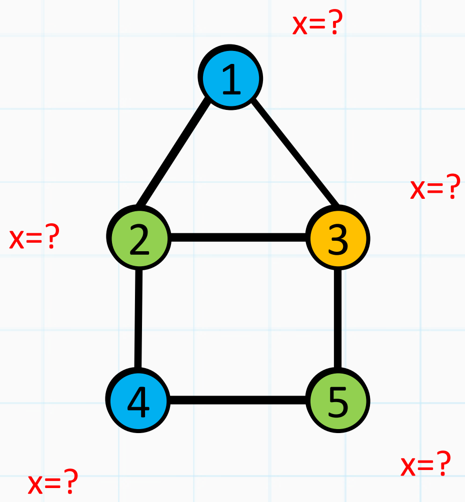


Como conseguir limites inferiores (primais):

- heurísticas, metaheurísticas, métodos aproximativos, etc

- heurísticas sobre o modelo (técnicas de arredondamento)
- matheuristicas
- metaheurísticas + matheuristicas
    - Vizinhanças de PPI





Variáveis na solução :
1 azul + 2 verde + 3 amarelo + 4 azul + 5 verde = 5

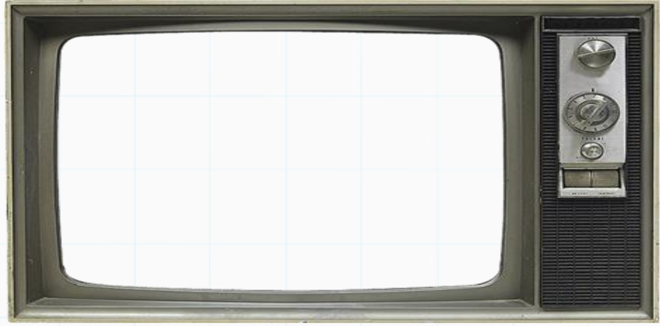
Buscar na vizinhança:
1 azul + 2 verde + 3 amarelo + 4 azul + 5 verde >= 4

A soma de um grupo de variáveis tem que ser maior que um valor

$$\sum X \geq \theta$$

domínio das variáveis reduzido

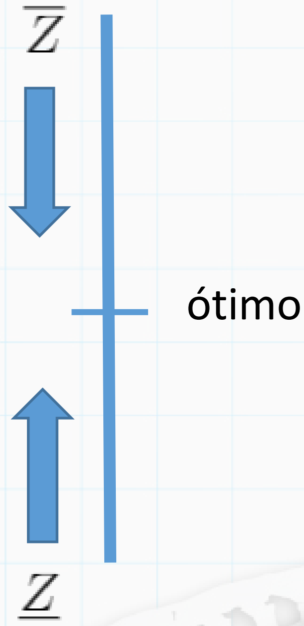
Limites

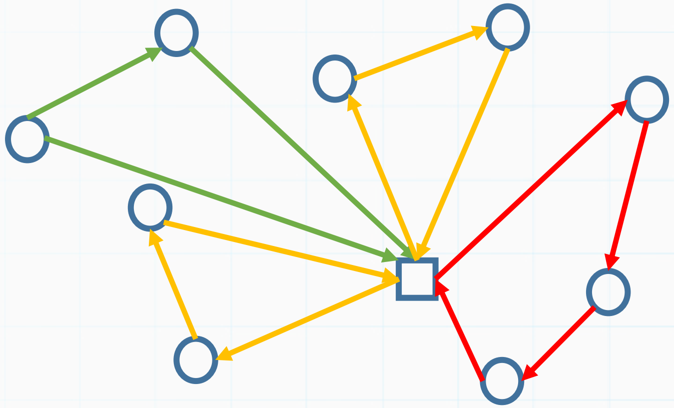


Como conseguir limites inferiores (primais):

- heurísticas, metaheurísticas, métodos aproximativos, etc

  - heurísticas sobre o modelo (técnicas de arredondamento)
  - matheuristicas
  - metaheurísticas + matheuristicas
    - Vizinhanças de PPI
    - utilizar informações da metaheurística para extrair padrões

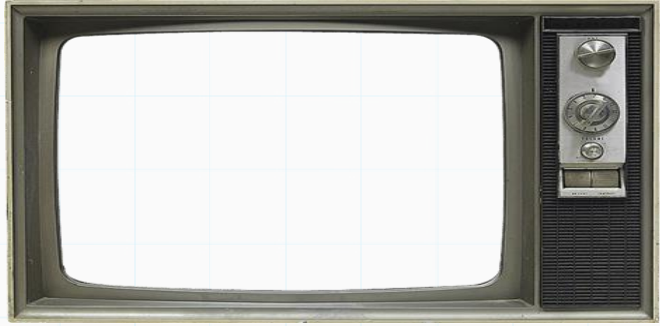




<u>Roteamento</u>

1) Guardar todas as rotas geradas durante a heurística
2) resolver um problema (MIP) de cobertura de vértices por rotas

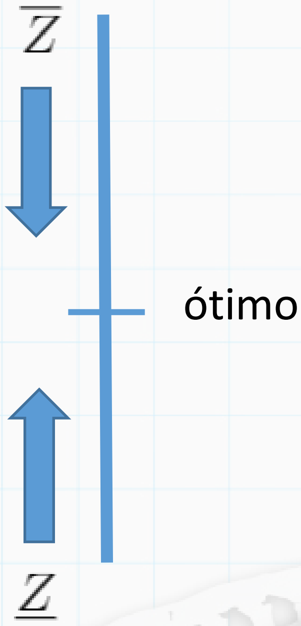
Limites

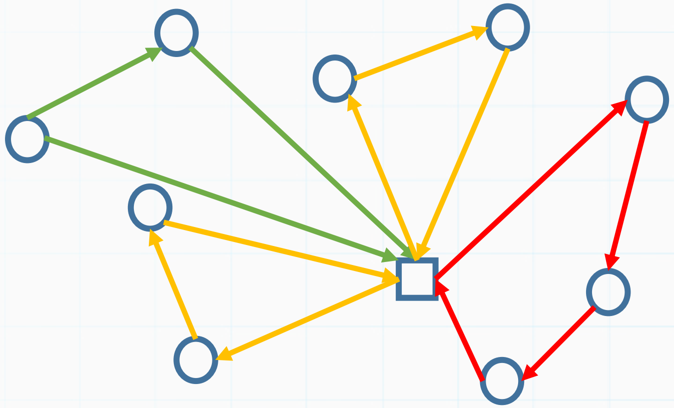


Como conseguir limites inferiores (primais):

- heurísticas, metaheurísticas, métodos aproximativos, etc

- heurísticas sobre o modelo (técnicas de arredondamento)
- matheuristicas
- metaheurísticas + matheuristicas
    - Vizinhanças de PPI
    - utilizar informações da metaheurística para extrair padrões





Roteamento

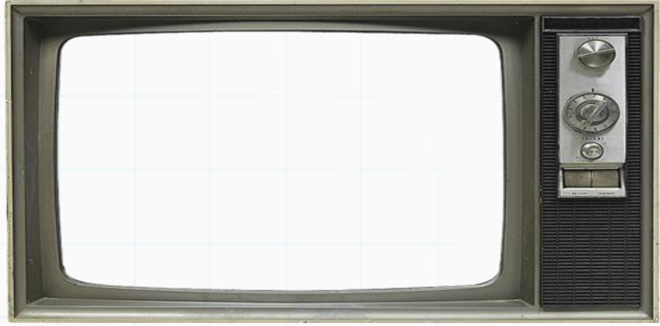
1) Guardar todas as rotas geradas durante a heurística
2) resolver um problema (MIP) de cobertura de vértices por rotas

Ideia 2)

1) Fixar algumas rotas e resolver o subproblema para os vértices não fixos

Essa ideia não utiliza padrões

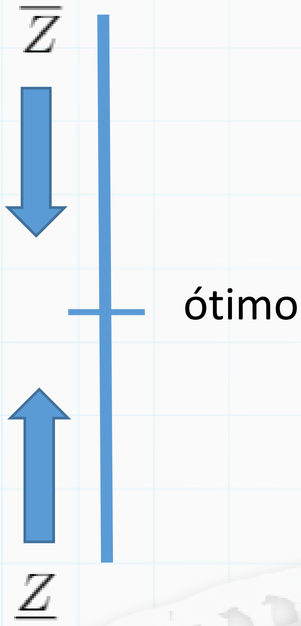
Limites

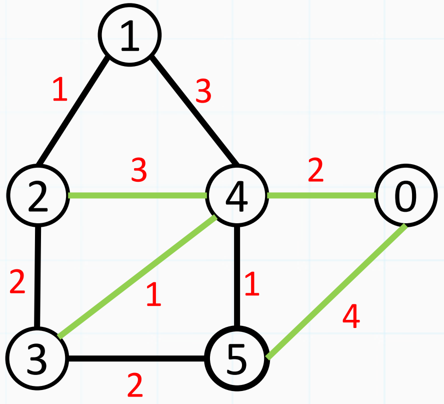


Como conseguir limites inferiores (primais):

- heurísticas, metaheurísticas, métodos aproximativos, etc

- heurísticas sobre o modelo (técnicas de arredondamento)
- matheuristicas
- metaheurísticas + matheuristicas
    - Vizinhanças de PPI
    - utilizar informações da metaheurística para extrair padrões



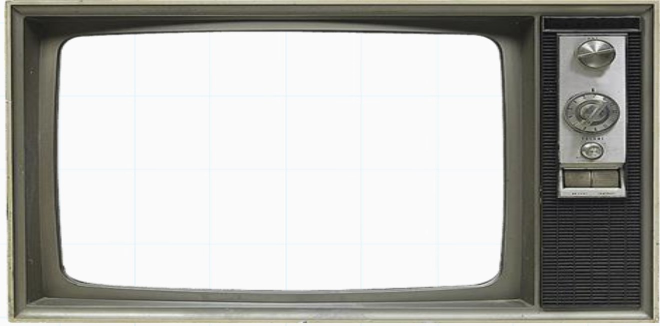


<u>K-Árvore máxima (arestas tem pesos, encontrar a árvore com árvore com k arestas de peso máximo)</u>

1) Guardar arestas que mais se repetem nas melhores soluções da heurística (a cada busca local)

2) resolver um problema da K-árvore (MIP) com estas arestas fixas na solução (contanto que não tenham ciclos)

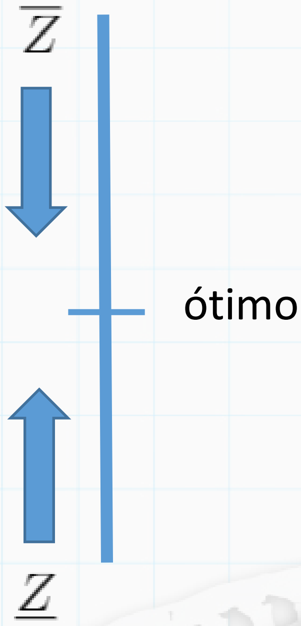
Limites

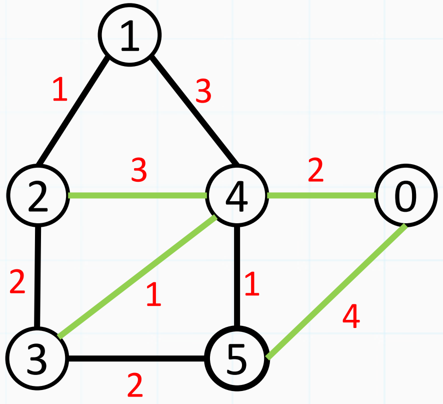


Como conseguir limites inferiores (primais):

- heurísticas, metaheurísticas, métodos aproximativos, etc

- heurísticas sobre o modelo (técnicas de arredondamento)
- matheuristicas
- metaheurísticas + matheuristicas
    - Vizinhanças de PPI
    - utilizar informações da metaheurística para extrair padrões





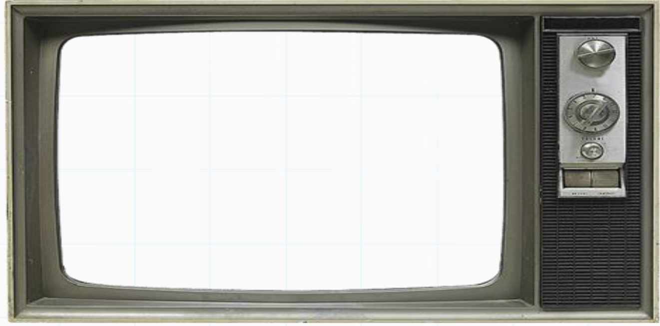
OU...

<u>K-Árvore máxima</u>

1) Guardar arestas que mais se repetem nas melhores soluções da heurística (a cada busca local)

2) resolver um problema da K-árvore (MIP) no subgrafo gerado por estas arestas

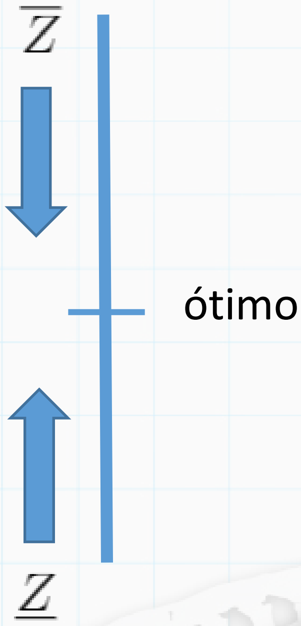
Limites

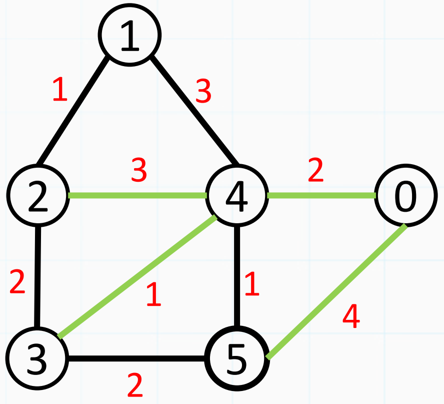


Como conseguir limites inferiores (primais):

- heurísticas, metaheurísticas, métodos aproximativos, etc

  - heurísticas sobre o modelo (técnicas de arredondamento)
  - matheuristicas
  - metaheurísticas + matheuristicas
    - Vizinhanças de PPI
    - utilizar informações da metaheurística para extrair padrões





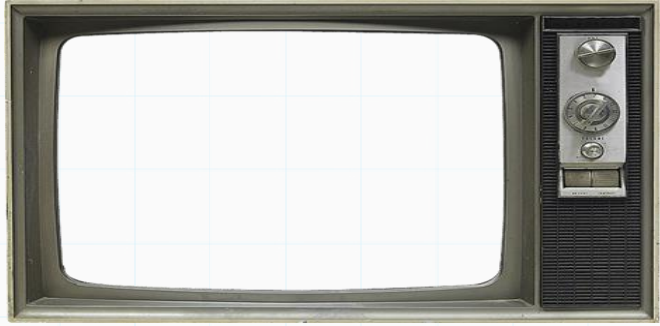
OU 2 ...

<u>K-Árvore máxima</u>

1) Guardar arestas que <u>nunca aparecem</u> nas melhores soluções da heurística (a cada busca local)

2) resolver um problema da K-árvore (MIP) no subgrafo gerado por retirar estas arestas

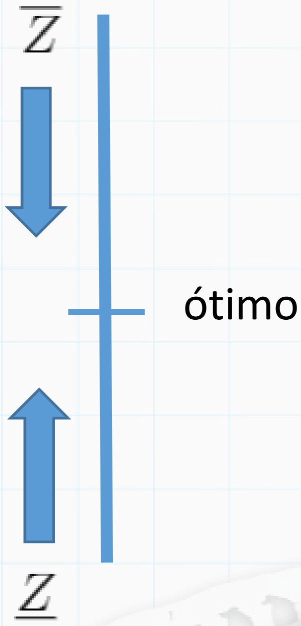
Limites

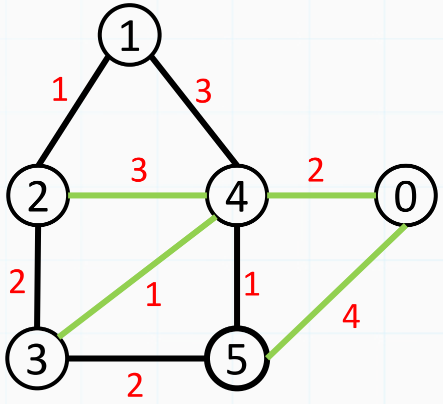


Como conseguir limites inferiores (primais):

- heurísticas, metaheurísticas, métodos aproximativos, etc

- heurísticas sobre o modelo (técnicas de arredondamento)
- matheuristicas
- metaheurísticas + matheuristicas
    - Vizinhanças de PPI
    - utilizar informações da metaheurística para extrair padrões





OU 2

K-Árvore m

1) Gu s melhores

sol

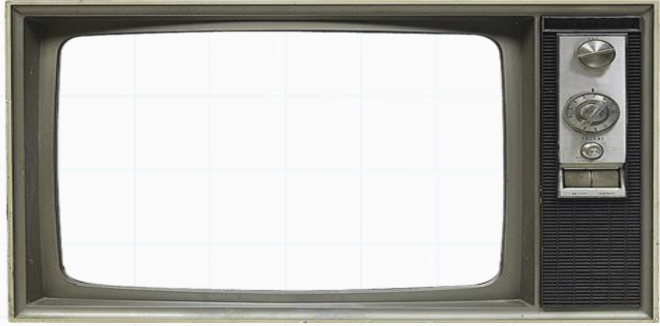
2) re P) no subgrafo

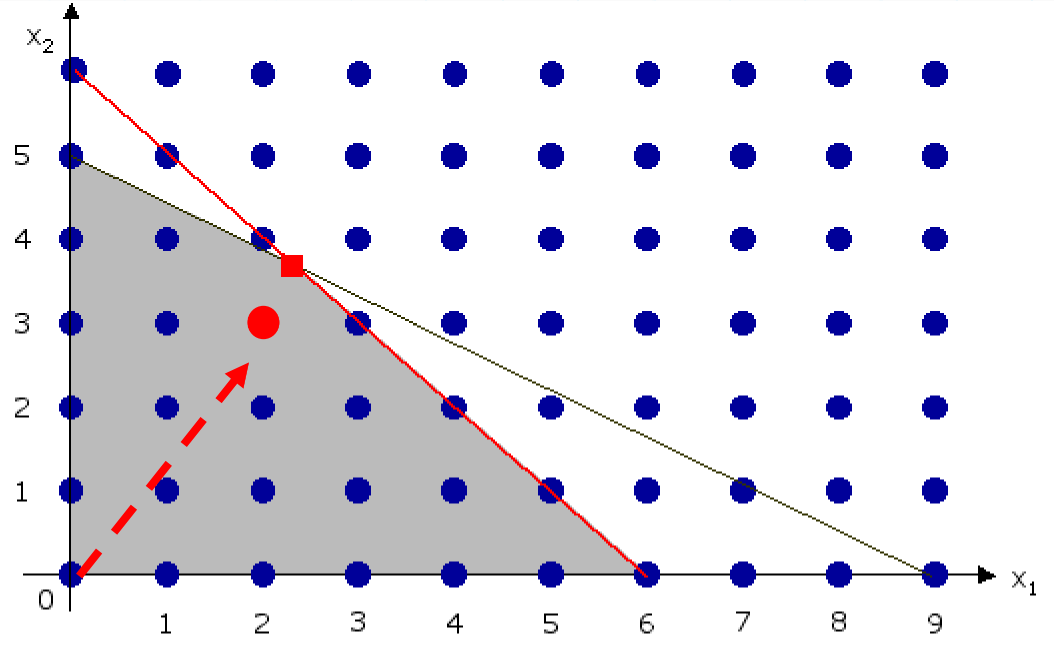
gerad

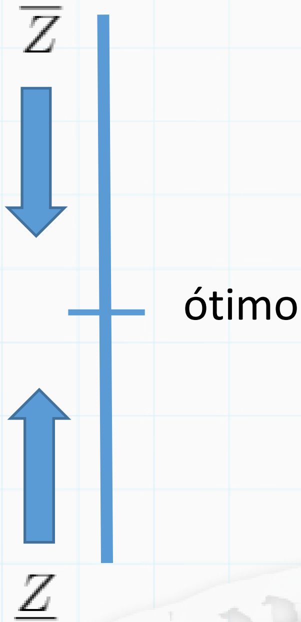
Limites

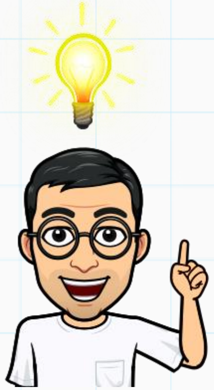
Como conseguir limites superiores (duais):

-relaxações lineares: relaxar as restrições de integralidade e resolver o PPL.



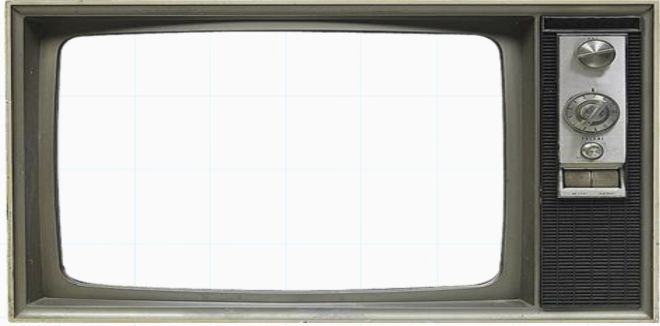






Haaaaa, então é por isso que é bom as relaxações serem apertadas (fortes)

Limites

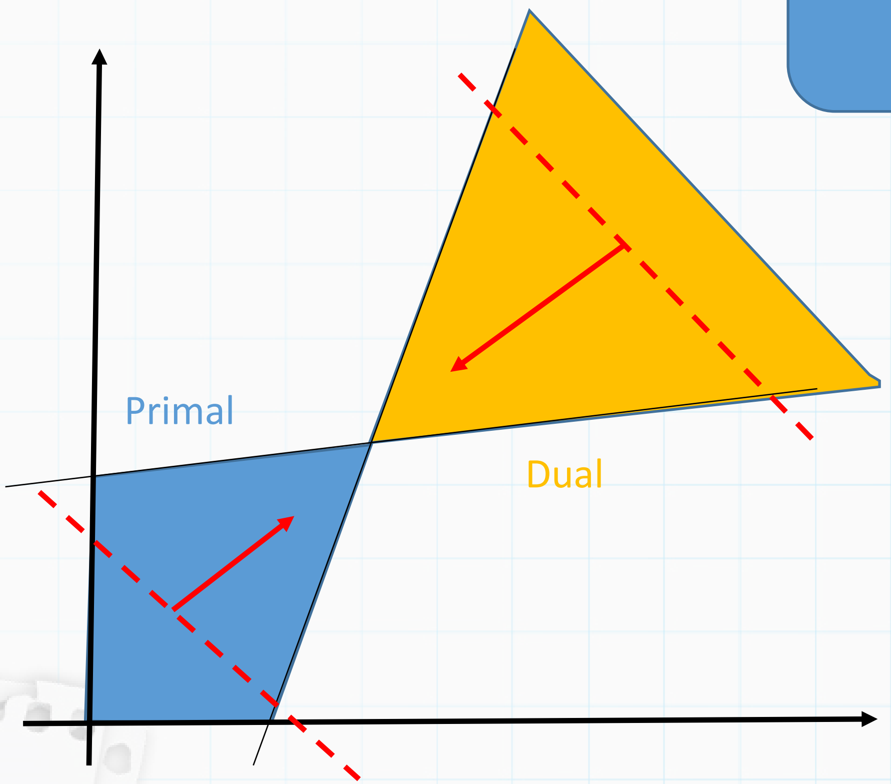


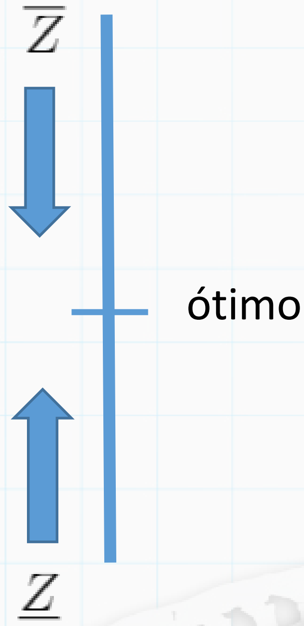
Como conseguir limites superiores (duais):

-relaxações lineares: relaxar as restrições de integralidade e resolver o PPL.

-resolver o dual da relaxação linear do problema

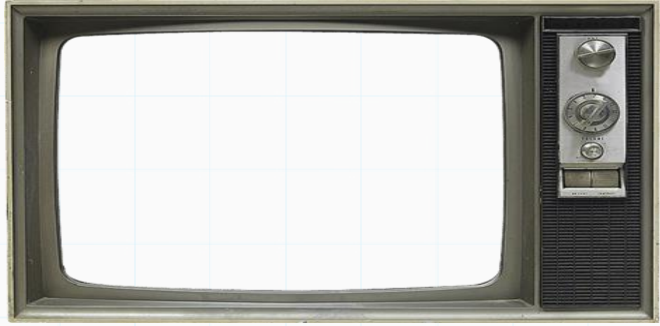
Podemos pensar no Problema Dual como o problema gerado pelo “reflexo” do primal



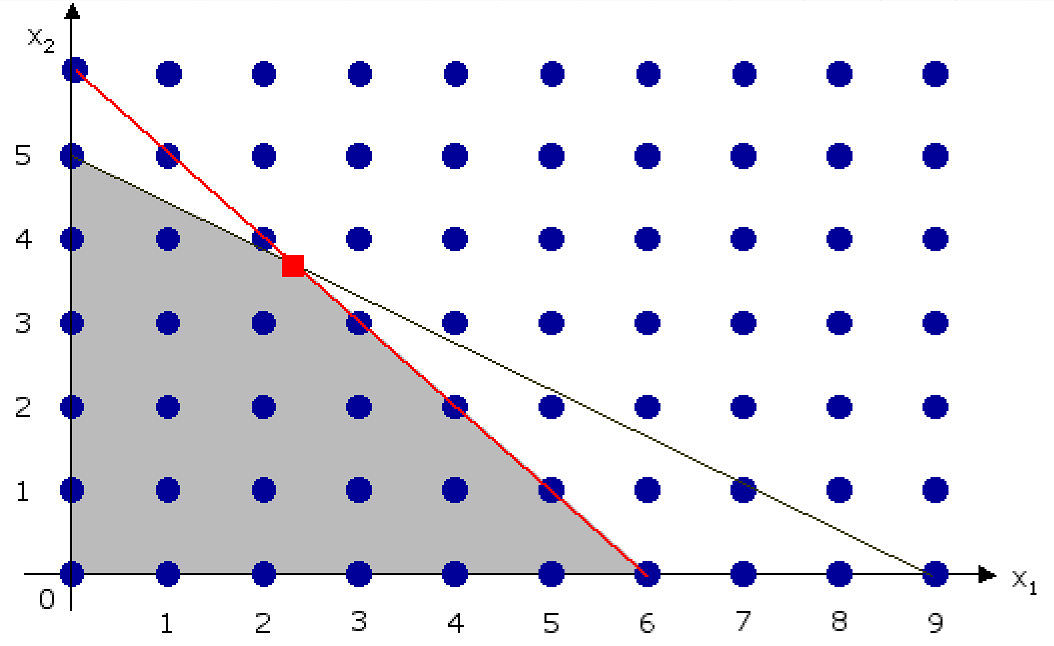


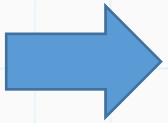
Qualquer solução do problema dual é um limite superior para o problema primal

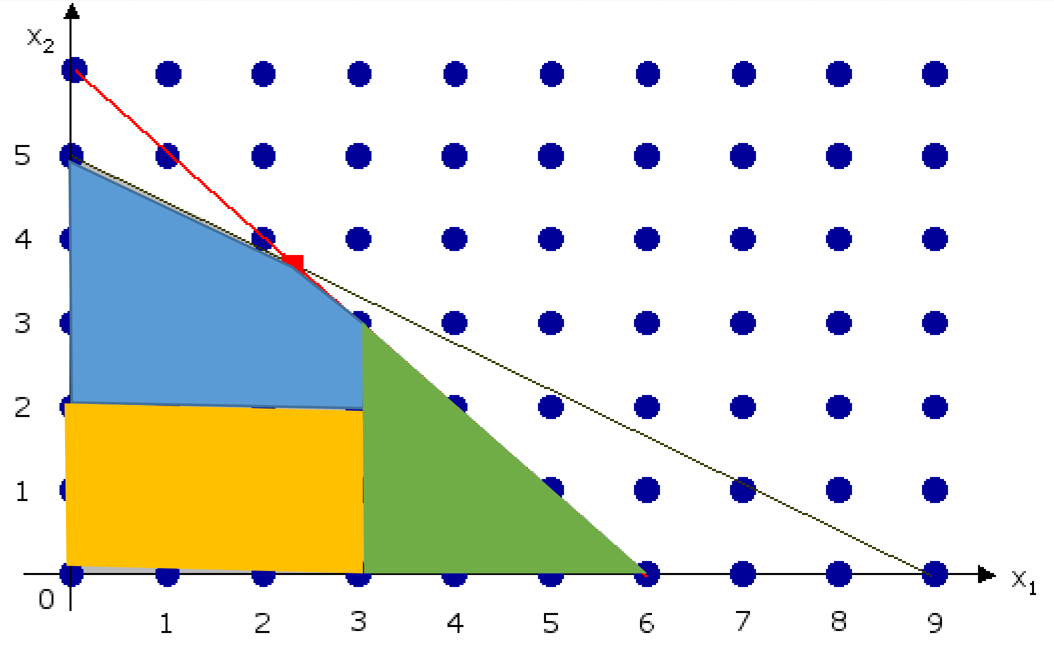
Branch and Bound



- <u>ideia</u> : dividir para conquistar -> particionar o conjunto solução do problema em subproblemas (subconjuntos) disjuntos:
    - resolver o problema para instancias menores
    - combinar as soluções dos subproblemas para obter a solução do problema original



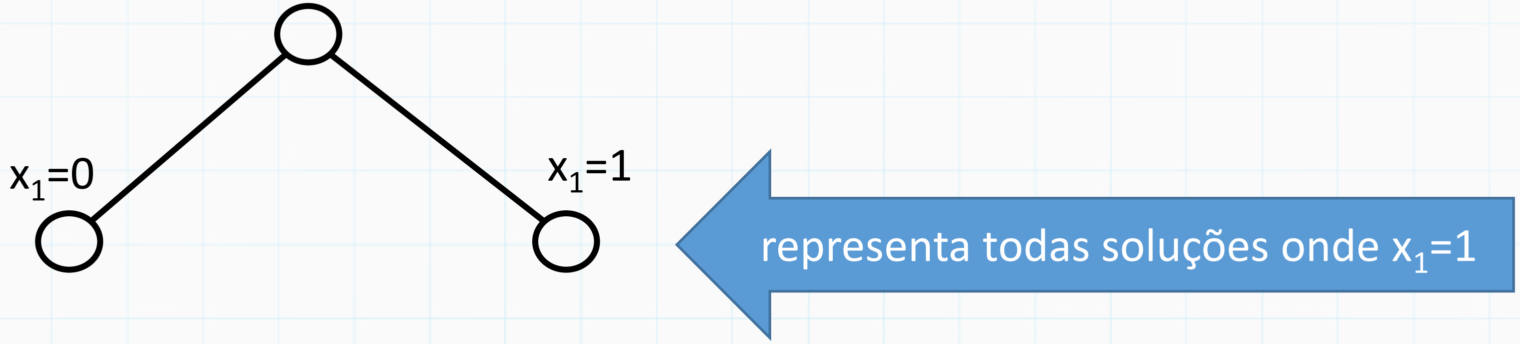




Branch and Bound

- <u>ex geral:</u> Vamos enumerar as soluções deste problema com uma árvore de enumeração:

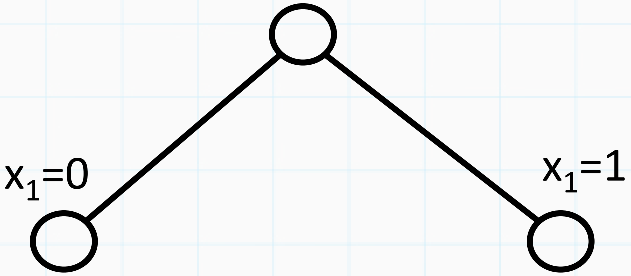
$$\max\ z = c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \in \mathbb{B}^3$$



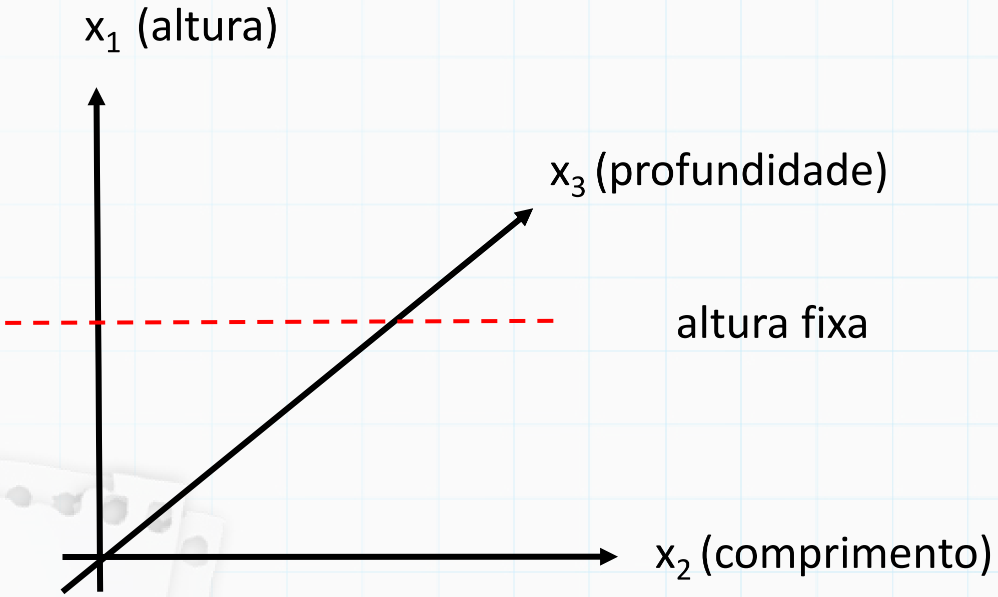
Branch and Bound

- <u>ex geral:</u> Vamos enumerar as soluções deste problema com uma árvore de enumeração:

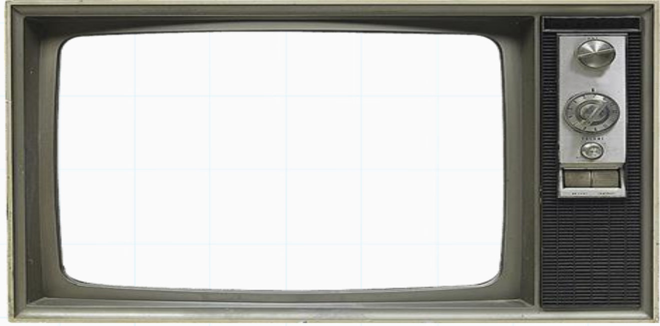
$$\max\ z = c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \in \mathbb{B}^3$$



representa todas soluções onde x_1=1

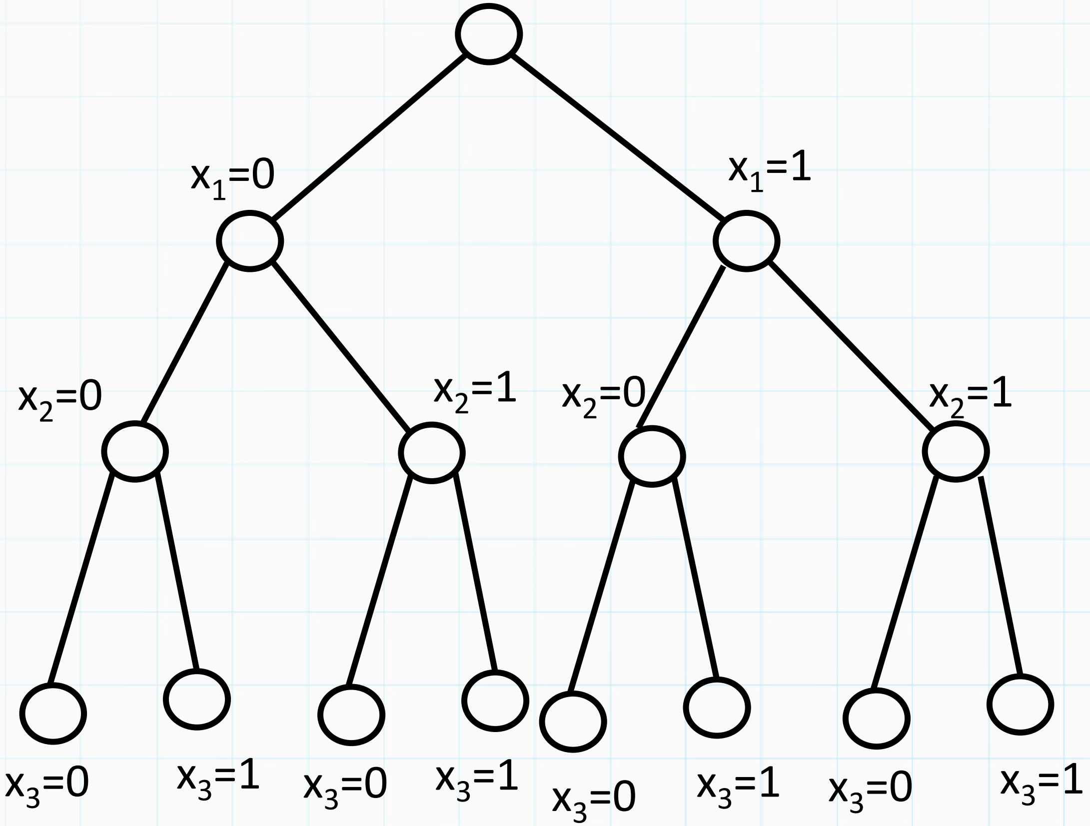


Branch and Bound



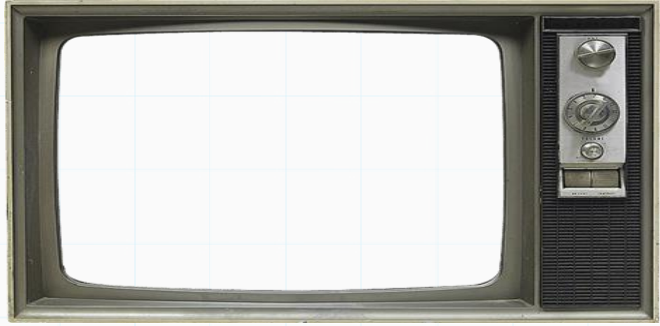
- ex geral: Vamos enumerar as soluções deste problema com uma árvore de enumeração:

$$\max\ z = c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \in \mathbb{B}^3$$



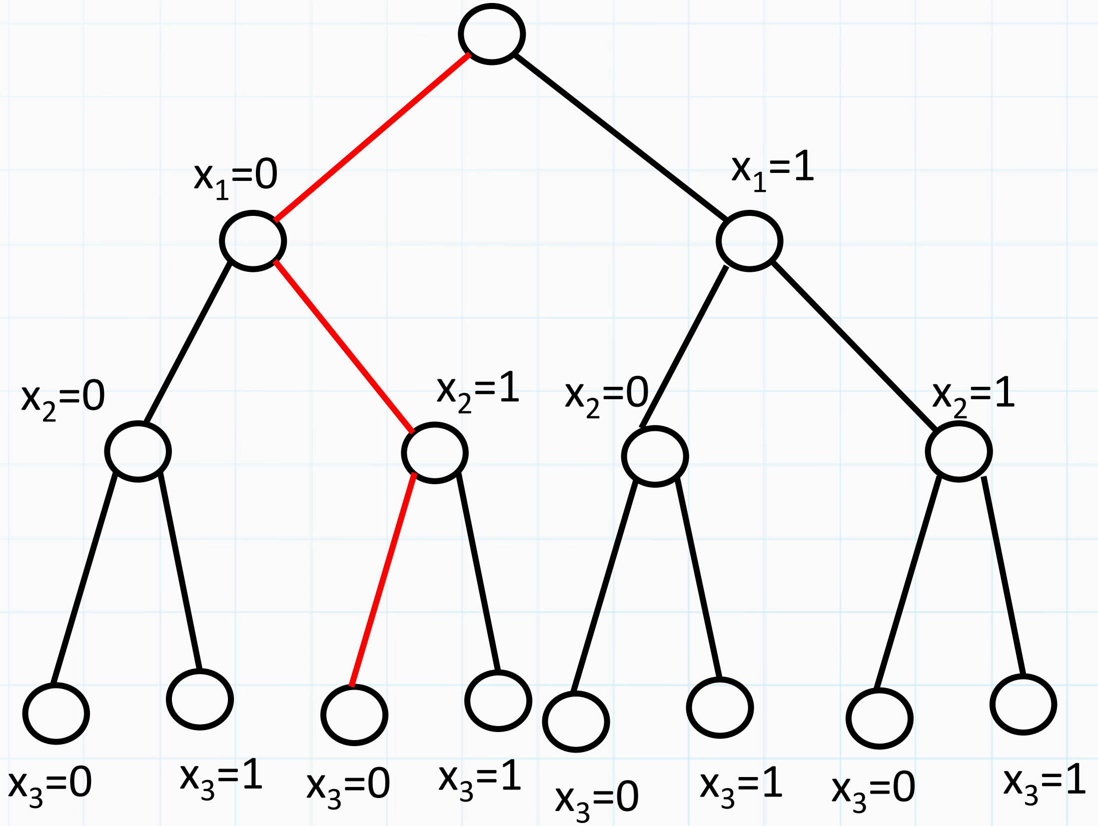
cada folha representa uma solução

Branch and Bound



- ex geral: Vamos enumerar as soluções deste problema com uma árvore de enumeração:

$$\max\ z = c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \in \mathbb{B}^3$$



cada folha representa uma solução

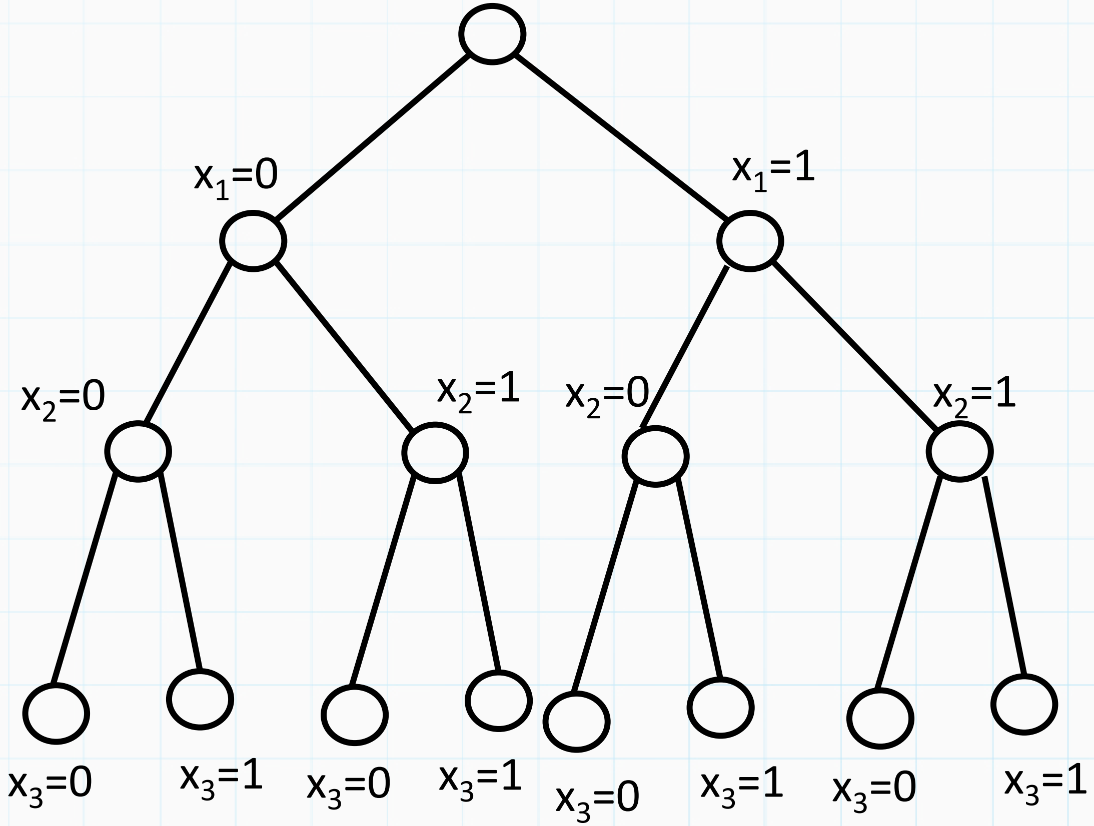
sol: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=0$

basta enumerarmos todas as soluções e pegar a melhor !

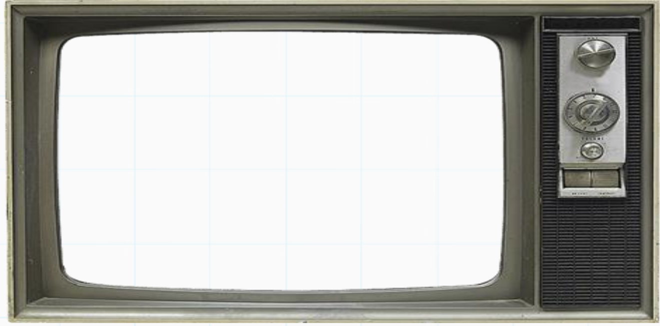
inviável

Branch and Bound

- <u>enumeração implícita:</u> enumerar soluções (branch) e utilizar limitantes para podar (bound) ramos da árvore que não contenham a solução ótima.



Branch and Bound

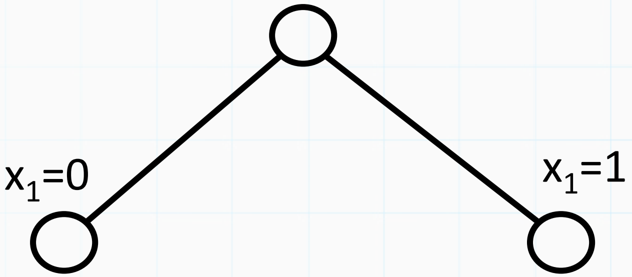


- <u>enumeração implícita:</u> enumerar soluções (branch) e utilizar limitantes para podar (bound) ramos da árvore que não contenham a solução ótima.

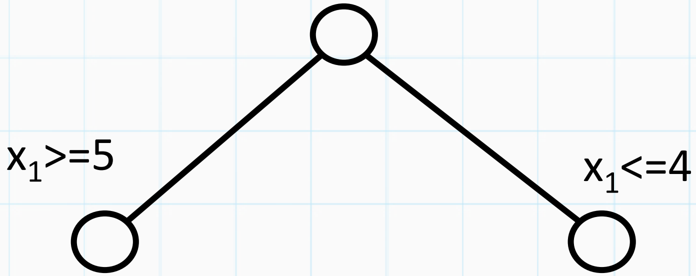
<u>Definições</u>:

- Branching em um nó: uma variável é escolhida para ter seu valor limitado

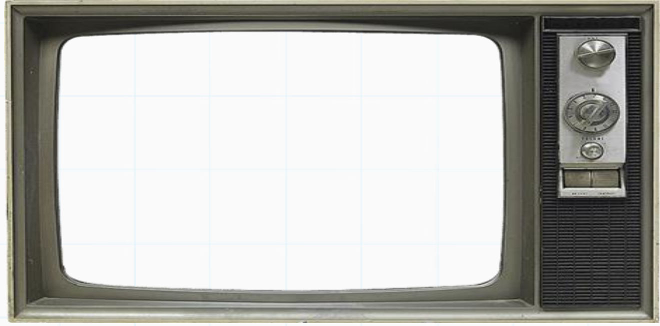
Binária



Inteira



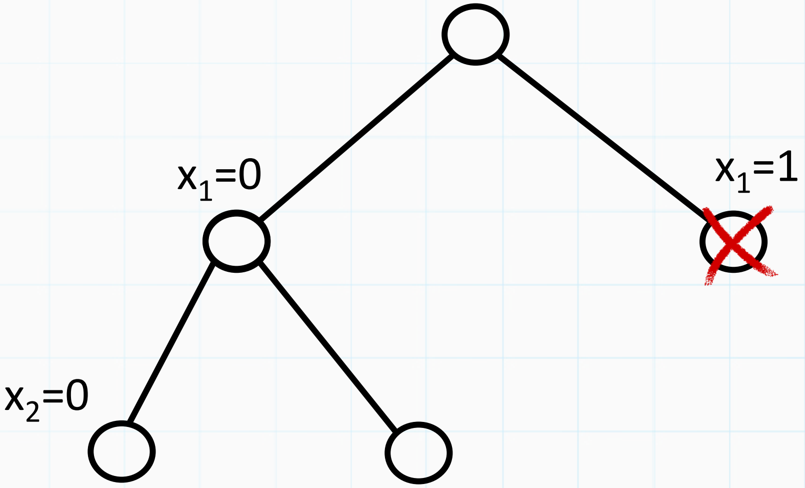
Branch and Bound



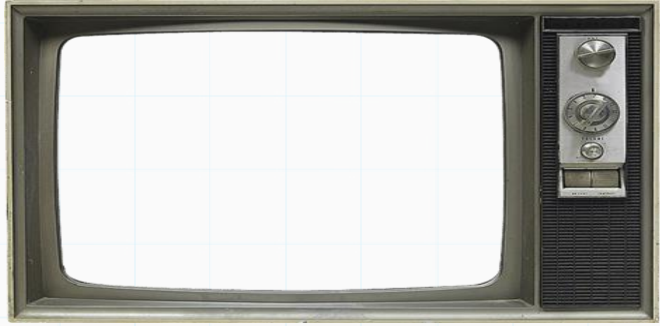
- <u>enumeração implícita:</u> enumerar soluções (branch) e utilizar limitantes para podar (bound) ramos da árvore que não contenham a solução ótima.

<u>Definições</u>:

- Branching (ramificação) em um nó: uma variável é escolhida para ter seu valor limitado
- Um nó podado, não sofrerá mais branching



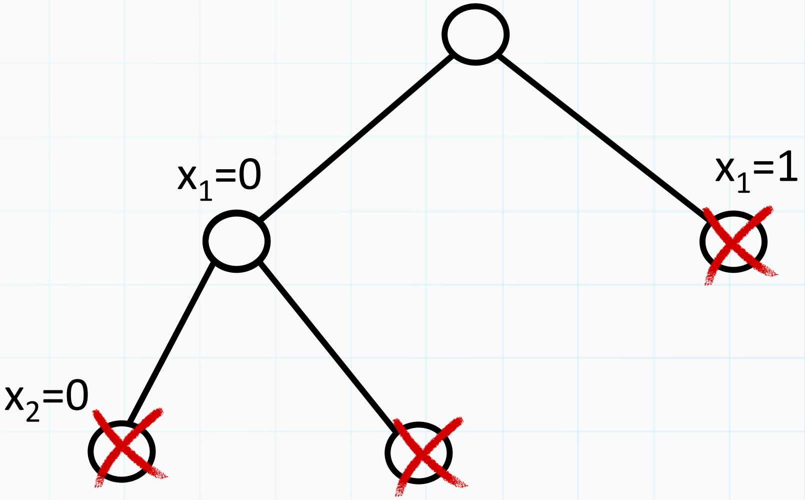
Branch and Bound

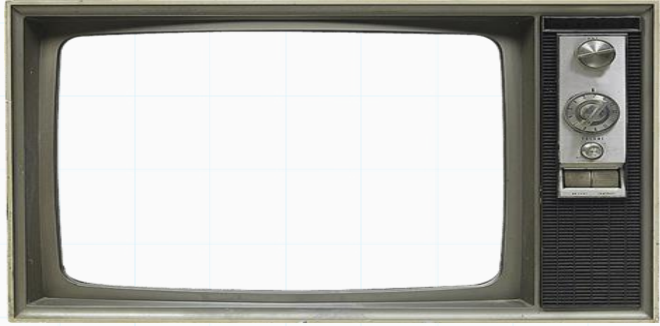


- <u>enumeração implícita:</u> enumerar soluções (branch) e utilizar limitantes para podar (bound) ramos da árvore que não contenham a solução ótima.

<u>Definições</u>:

- Branching (ramificação) em um nó: uma variável é escolhida para ter seu valor limitado
- Um nó podado, não sofrerá mais branching
- O objetivo é podar todos os nós da árvore usando limitantes

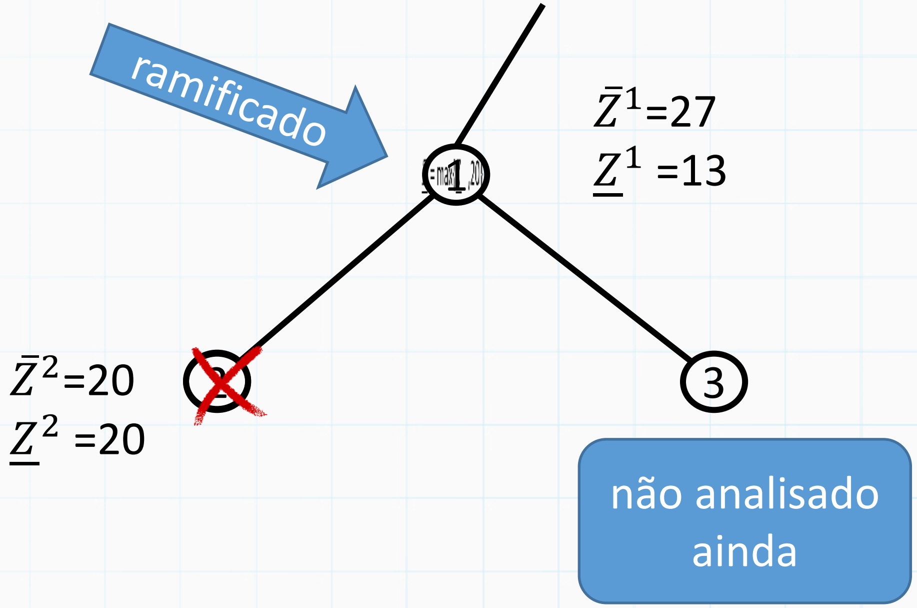




Branch and Bound

- <u>Tipos de poda:</u>

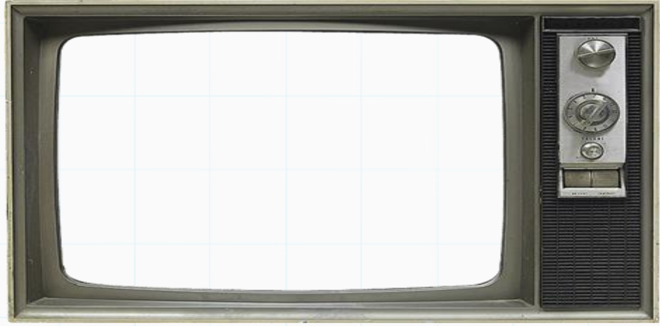
por <u>Otimalidade</u> :
o nó 2 pode ser podado pois sabemos que qualquer ramificação a partir de 2 terá solução ótima 20.



$\underline{Z} = \max\{\underline{Z}, 20\}$

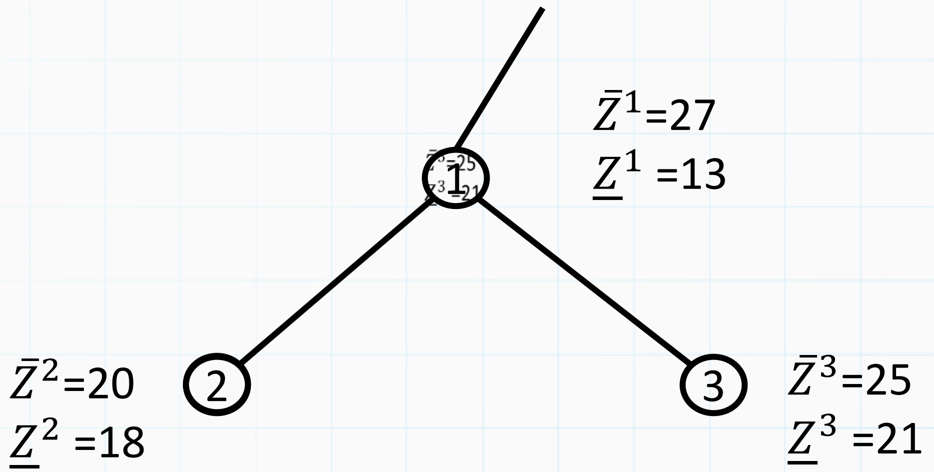
solução viável encontrada, atualiza limite inferior

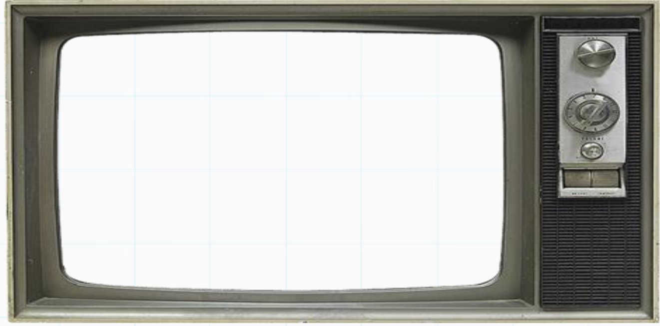
Branch and Bound



- <u>Tipos de poda:</u>

por <u>limitante</u> :
Primeiro observamos que $\underline{Z}$ = 21 (melhor solução encontrada) pois $\boxed{\underline{Z} = \max_K\{\underline{Z}^k\}}$

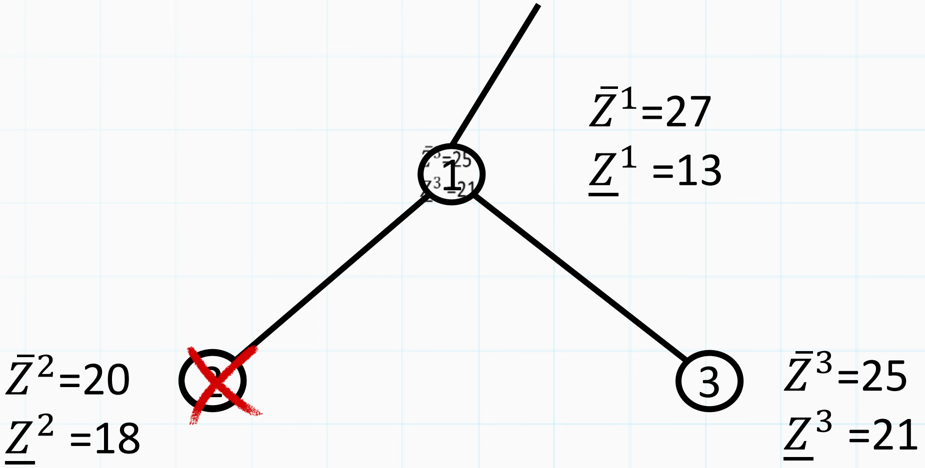




Branch and Bound

- <u>Tipos de poda:</u>

por <u>limitante</u> :
Primeiro observamos que $\underline{Z}$ = 21 (melhor solução encontrada) pois $\boxed{\underline{Z} = \max_K\{\underline{Z}^k\}}$

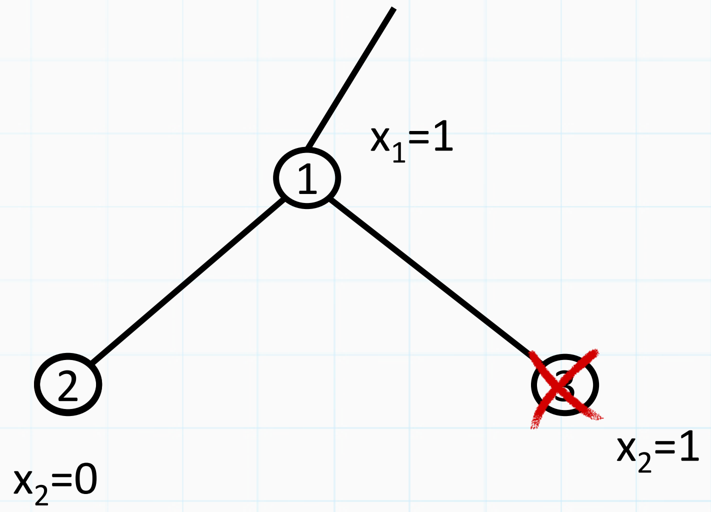


Vemos então que podemos podar o nó 2 pois qualquer solução a partir de 2 será no máximo 20, logo, o ótimo ñ está nesse ramo

Branch and Bound

- Tipos de poda:

por inviabilidade :
Seja um PPI que tenha a inequação: $8x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 <= 12$

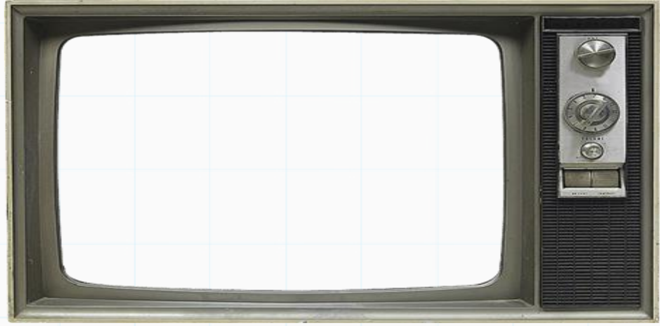


Vemos que o nó 3 pode ser podado pois em qualquer solução onde

$$x_1=x_2=1$$

temos que a inequação é inválida

Branch and Bound

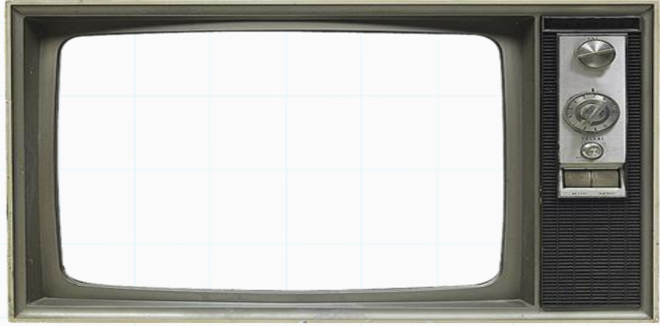


- <u>Concluindo:</u>

  Nós i que não podem ser podados:

  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

Branch and Bound



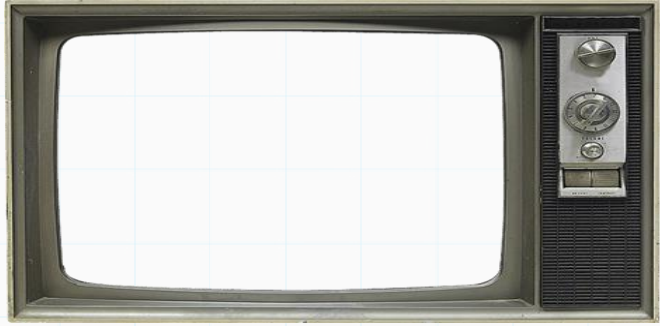
- <u>Concluindo:</u>

  Nós que não podem ser podados:

  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

Branch and Bound



- <u>Concluindo:</u>

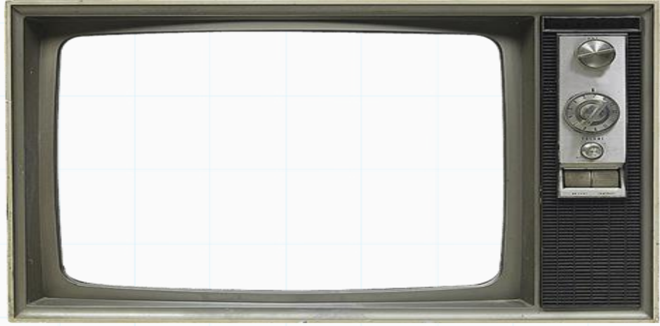
  Nós que não podem ser podados:

  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

- <u>Ordem de percurso na árvore de enumeração</u>: dado que temos um conjunto de nós ativos, qual escolher para ser analisado ?

Branch and Bound



- <u>Concluindo:</u>

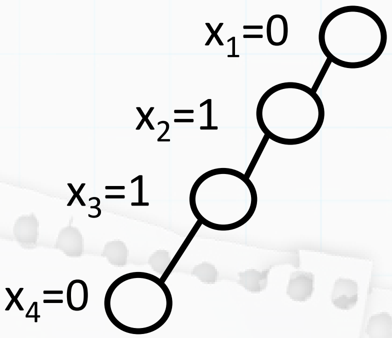
  Nós que não podem ser podados:

  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

- <u>Ordem de percurso na árvore de enumeração</u>: dado que temos um conjunto de nós ativos, qual escolher para ser analisado ?

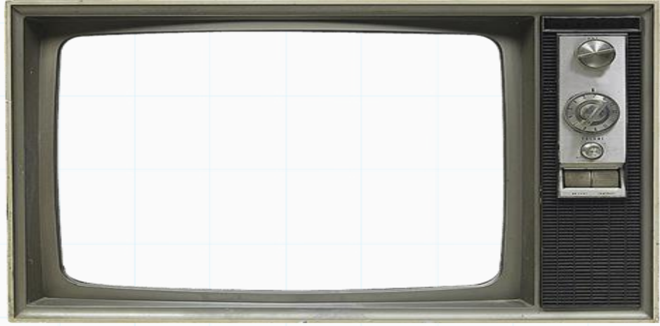
Estratégias:



Profundidade

bom para encontrar soluções viáveis rapidamente

Branch and Bound



- <u>Concluindo:</u>

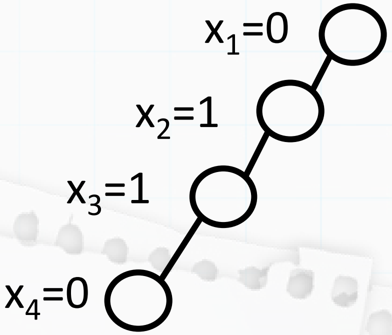
  Nós que não podem ser podados:

  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

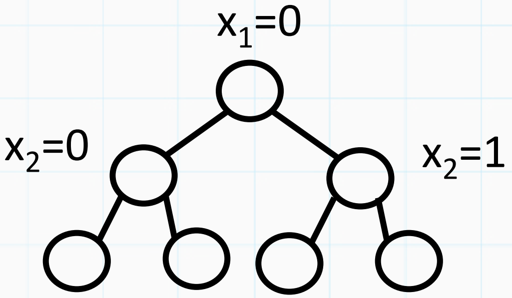
- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

- <u>Ordem de percurso na árvore de enumeração</u>: dado que temos um conjunto de nós ativos, qual escolher para ser analisado ?

Estratégias:

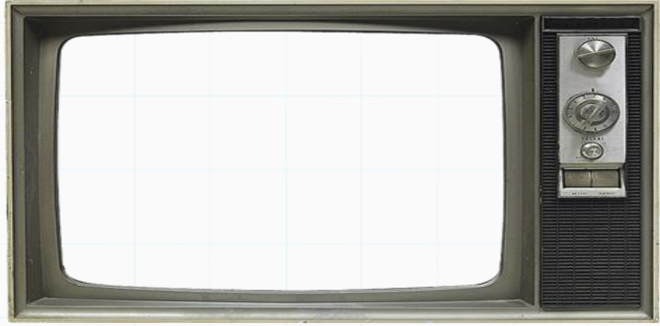


Profundidade



Largura

diversidade no espaço de solução



Branch and Bound

- <u>Concluindo:</u>

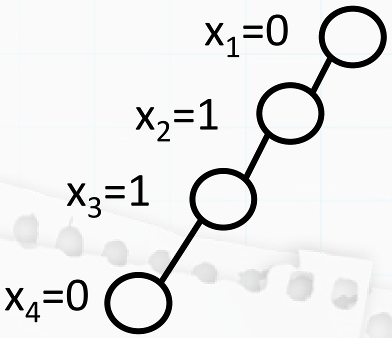
  Nós que não podem ser podados:

  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

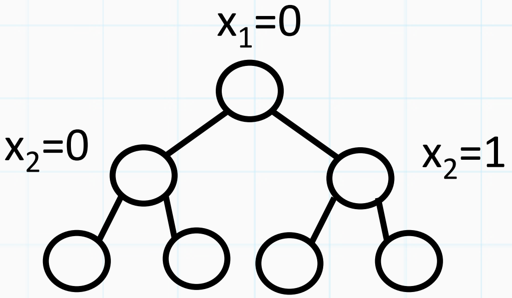
- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

- <u>Ordem de percurso na árvore de enumeração</u>: dado que temos um conjunto de nós ativos, qual escolher para ser analisado ?

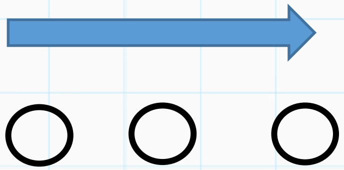
Estratégias:



Profundidade



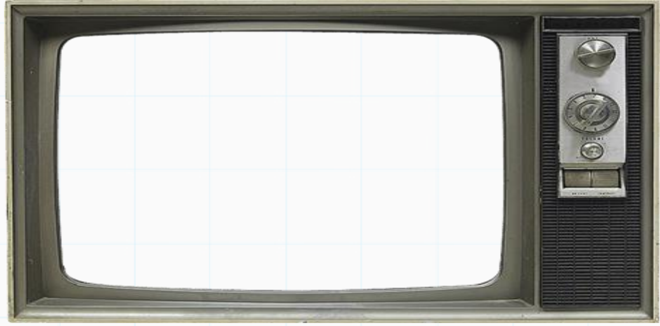
Largura



Ordenado por limitante

tende a melhorar os limitantes encontrados

Branch and Bound



- <u>Concluindo:</u>

  Nós que não podem ser podados:

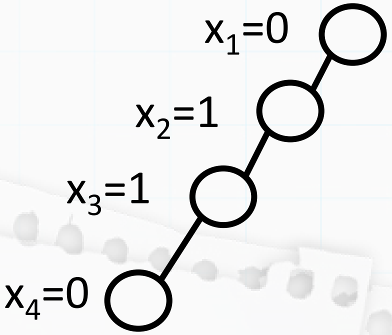
  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

os pacotes usam heurísticas para escolher a ordem. Podem inclusive alternar entre tipos de ordem durante a execução

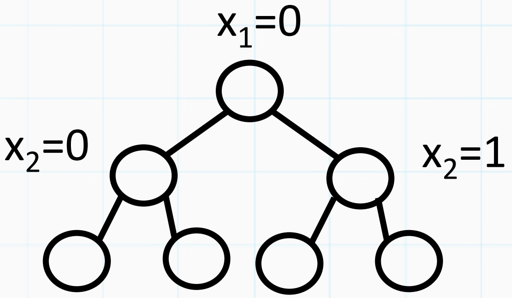
- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

- <u>Ordem de percurso na árvore de enumeração</u>: dado que temos um conjunto de nós ativos, qual escolher para ser analisado ?

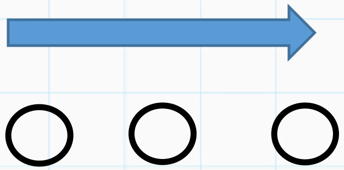
Estratégias:



Profundidade



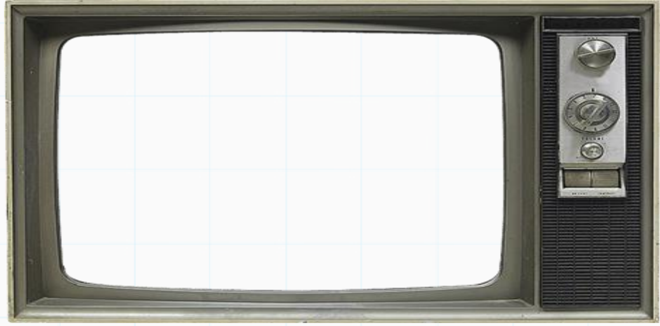
Largura



Ordenado por limitante

tende a melhorar os limitantes encontrados

Branch and Bound



- <u>Concluindo:</u>

  Nós que não podem ser podados:

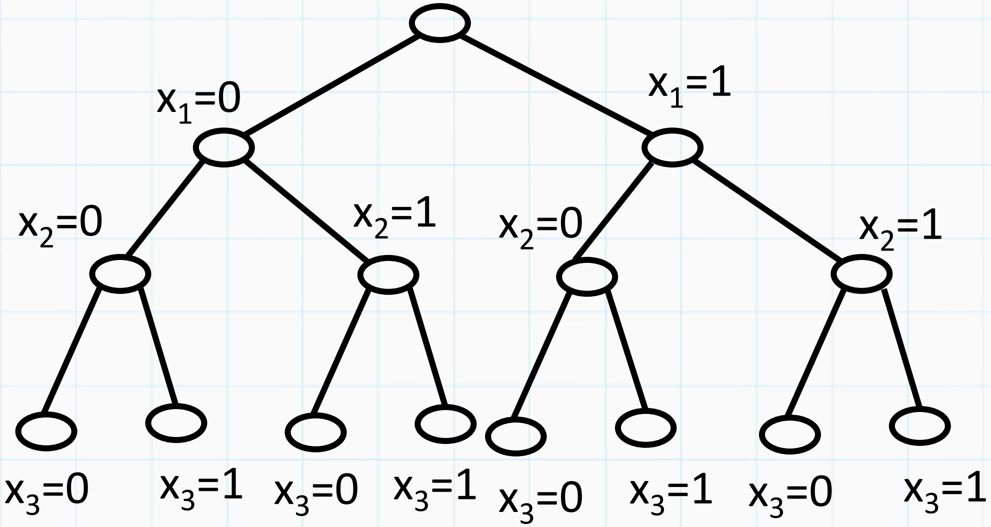
  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

Tipos de poda:

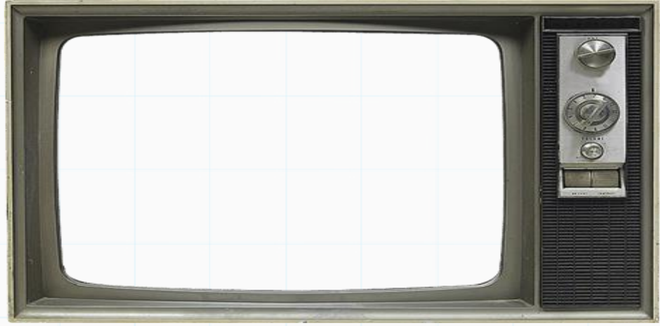
- Otimalidade
- Limitante
- Inviabilidade

- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

- <u>Ordem das variáveis a serem ramificadas</u>: dado que temos um conjunto de variáveis fracionárias, qual escolher para ser ramificada ?



Branch and Bound



- <u>Concluindo:</u>

  Nós que não podem ser podados:

  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

Tipos de poda:
- Otimalidade
- Limitante
- Inviabilidade

- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

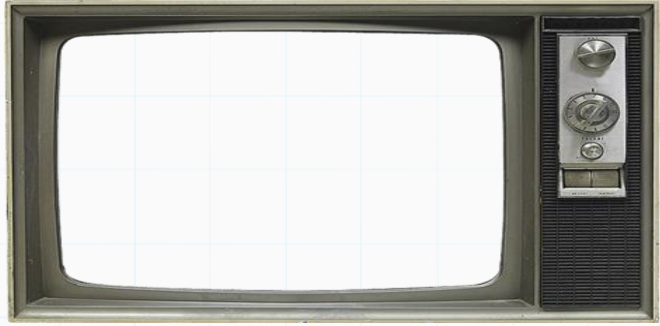
- <u>Ordem das variáveis a serem ramificadas</u>: dado que temos um conjunto de variáveis fracionárias, qual escolher para ser ramificada ?

Estratégias:

$x_1=0.2$ $x_2=0.9$ $x_3=0.4$

Mais "fracionária"

Branch and Bound



- <u>Concluindo:</u>

  Nós que não podem ser podados:

  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

Tipos de poda:
- Otimalidade
- Limitante
- Inviabilidade

- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

- <u>Ordem das variáveis a serem ramificadas</u>: dado que temos um conjunto de variáveis fracionárias, qual escolher para ser ramificada ?

Estratégias:

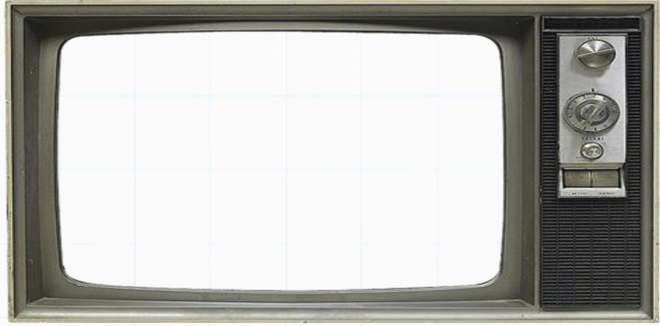
$x_1=0.2$ $x_2=0.9$ $x_3=0.4$

$$\sum x_i = y$$

Mais "fracionária"

Variáveis de decisão estratégicas

Branch and Bound



- <u>Concluindo:</u>

  Nós que não podem ser podados:

  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

Tipos de poda:
- Otimalidade
- Limitante
- Inviabilidade

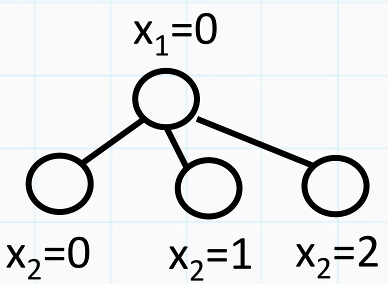
- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

- <u>Ordem das variáveis a serem ramificadas</u>: dado que temos um conjunto de variáveis fracionárias, qual escolher para ser ramificada ?

Estratégias:

x_1=0.2 x_2=0.9 x_3=0.4

$\sum x_i$=y

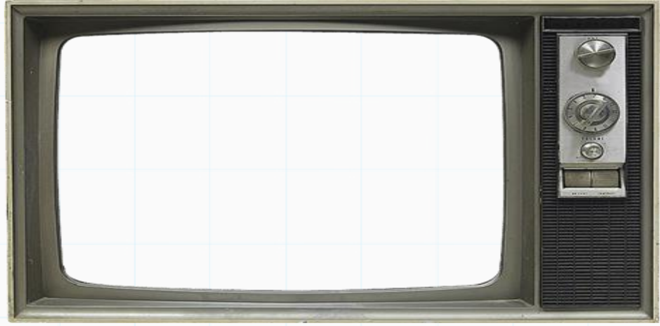


Mais “fracionária”

Variáveis de decisão estratégicas

Strong Branching

Branch and Bound



- <u>Concluindo:</u>

  Nós que não podem ser podados:

  - $\overline{Z}^i \neq \underline{Z}^i$ e
  - $\overline{Z}^i > \underline{Z}$ e
  - o nó é viável

Tipos de poda:
- Otimalidade
- Limitante
- Inviabilidade

e outras...

- Chamamos de <u>nós ativos</u> do período, os que não foram podados e nem ramificados naquele momento

- <u>Ordem das variáveis a serem ramificadas</u>: dado que temos um conjunto de variáveis fracionárias, qual escolher para ser ramificada ?

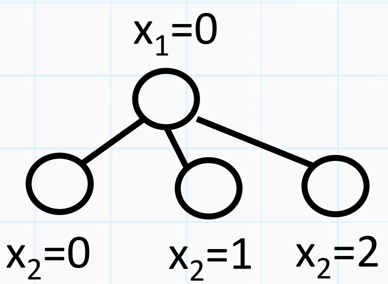
Estratégias:

$x_1=0.2$ $x_2=0.9$ $x_3=0.4$

Mais "fracionária"

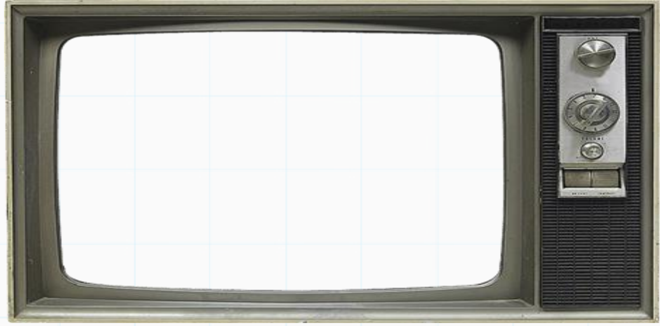
$\sum x_i = y$

Variáveis de decisão estratégicas



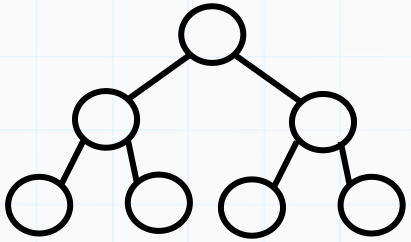
Strong Branching

Branch and Bound

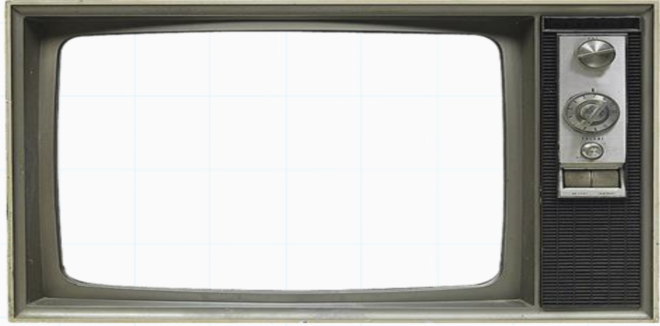


- <u>Algoritmo:</u>

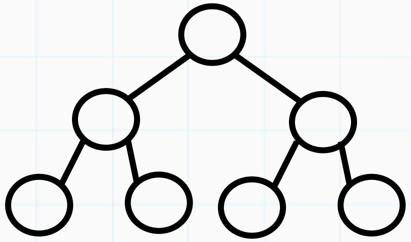
1) Selecione novo nó ativo P (se não tem novo nó ativo -> FIM)



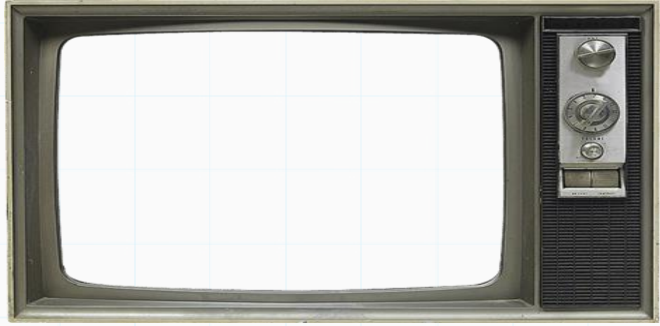
Branch and Bound



- <u>Algoritmo:</u>



1) Selecione novo nó ativo P (se não tem novo nó ativo -> FIM)
2) Seja $\bar{Z}^p$ o valor ótimo de Relax(P)

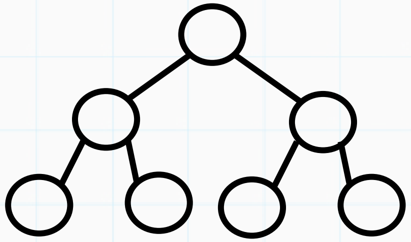


Branch and Bound

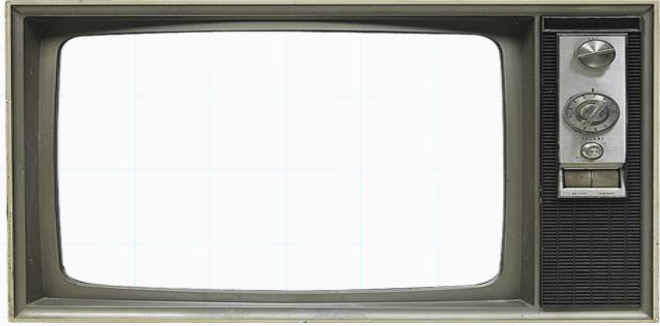
- <u>Algoritmo:</u>

1) Selecione novo nó ativo P (se não tem novo nó ativo -> FIM)
2) Seja $\bar{Z}^p$ o valor ótimo de Relax(P)
3) Se Relax(P) inviável ou $\bar{Z}^p <= \underline{Z}$ então volte para 1)

poda por inviabilidade e limite



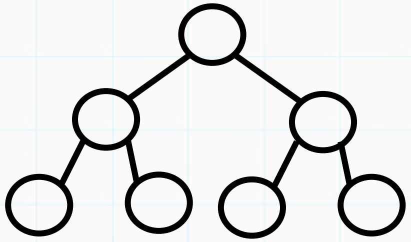
Branch and Bound



- <u>Algoritmo:</u>

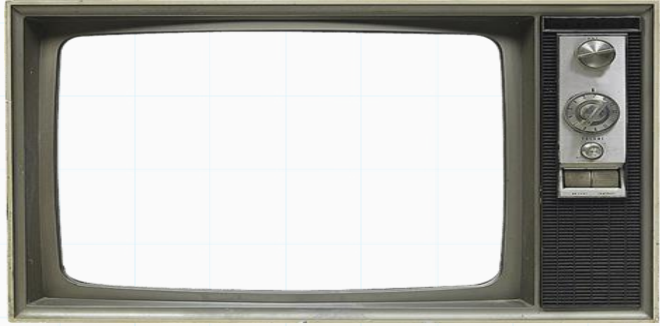
1) Selecione novo nó ativo P (se não tem novo nó ativo -> FIM)
2) Seja $\bar{Z}^p$ o valor ótimo de Relax(P)
3) Se Relax(P) inviável ou $\bar{Z}^p <= \underline{Z}$ então volte para 1)
4) Se Relax(P) inteiro e $\bar{Z}^p > \underline{Z}$ então $\underline{Z} = \bar{Z}^p$ e volte para 1)

atualiza melhor solução



se a solução for inteira mas não melhorar a melhor solução corrente, também vai para o passo 1)

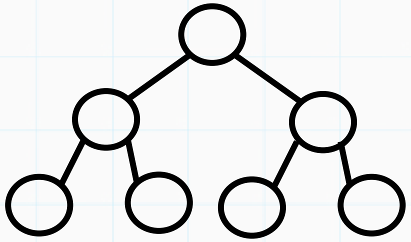
Branch and Bound



- <u>Algoritmo:</u>

1) Selecione novo nó ativo P (se não tem novo nó ativo -> FIM)
2) Seja $\bar{Z}^p$ o valor ótimo de Relax(P)
3) Se Relax(P) inviável ou $\bar{Z}^p <= \underline{Z}$ então volte para 1)
4) Se Relax(P) inteiro e $\bar{Z}^p > \underline{Z}$ então $\underline{Z} = \bar{Z}^p$ e volte para 1)
5) Seja x uma variável com valor fracionário $\tilde{x}$ em Relax(P)
    - Criar P_1 com x<= PISO($\tilde{x}$)
    - Criar P_2 com x>= TETO($\tilde{x}$)
    - volte para 1)

ramificação



Branch and Bound

Exemplo:

$$\max\ 4x_1 - x_2$$

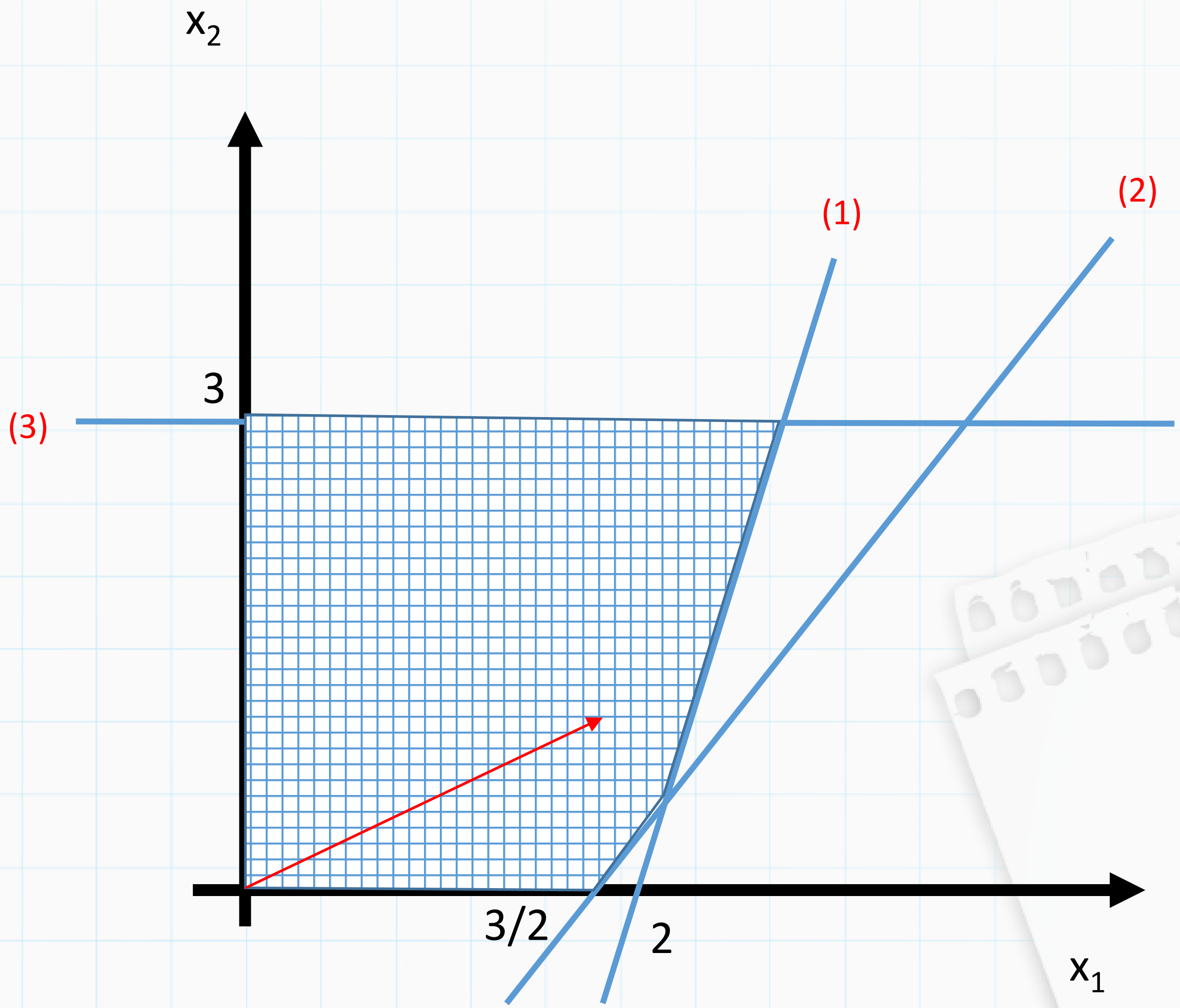
$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$

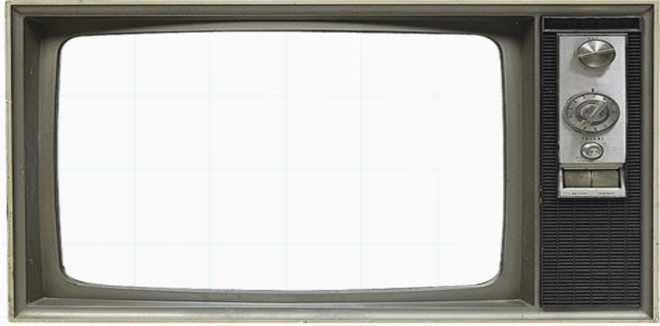
$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Resolvendo a relaxação pelo método gráfico



Branch and Bound



Exemplo:

$$\max\ 4x_1 - x_2$$

$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$

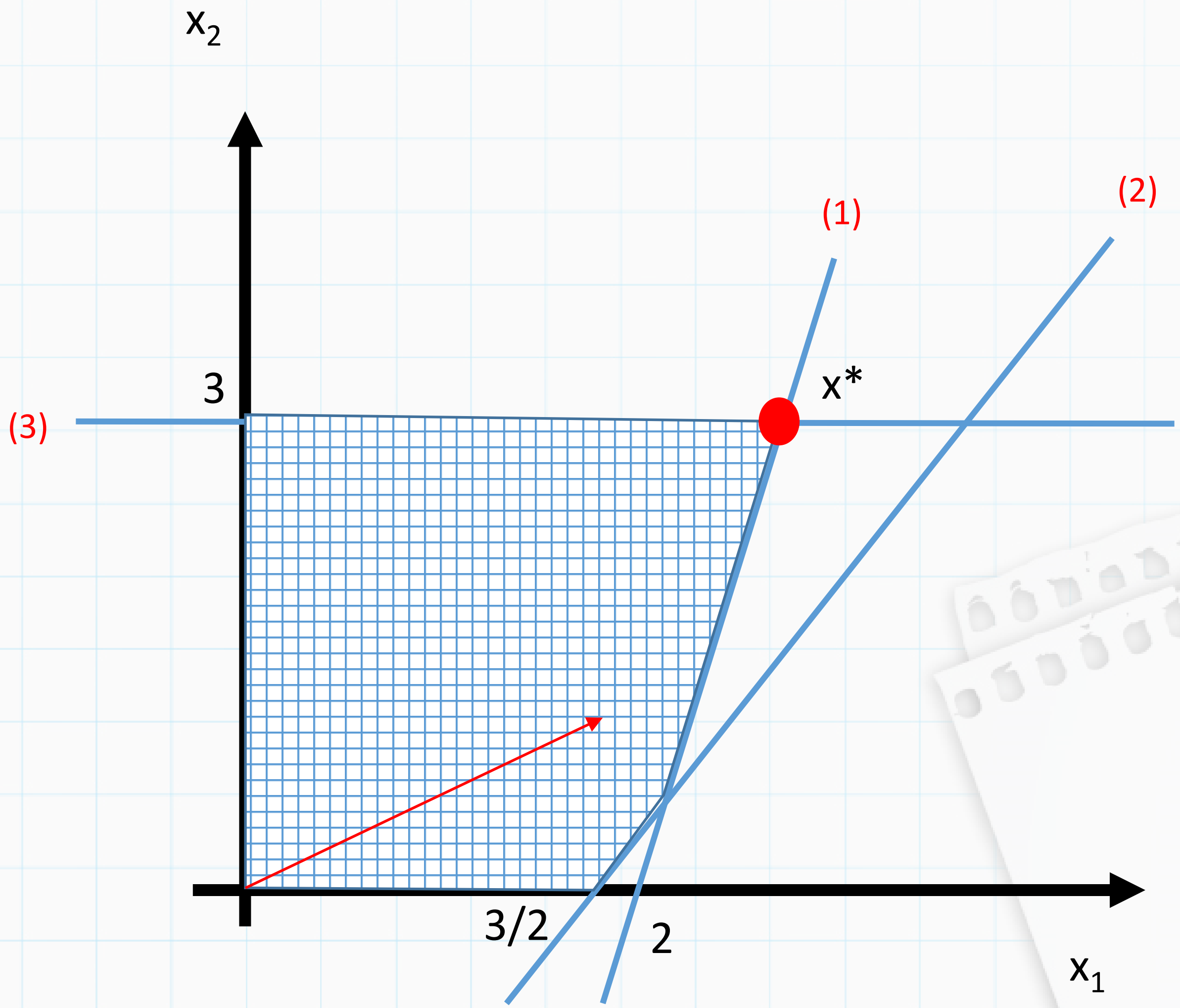
$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

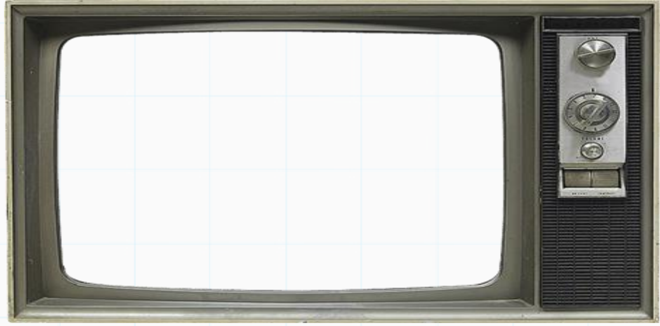
solução: $x_1^* = 20/7$, $x_2^* = 3$

limite sup. : $\bar{Z} = 59/7$

limite inf. $\underline{Z} = -\infty$



Branch and Bound



Exemplo:

$$\max\ 4x_1 - x_2$$

$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \qquad (1)$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \qquad (2)$$

$$x_2 \leq 3 \qquad (3)$$

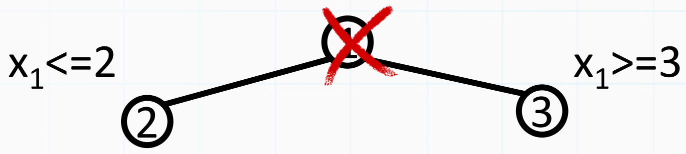
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

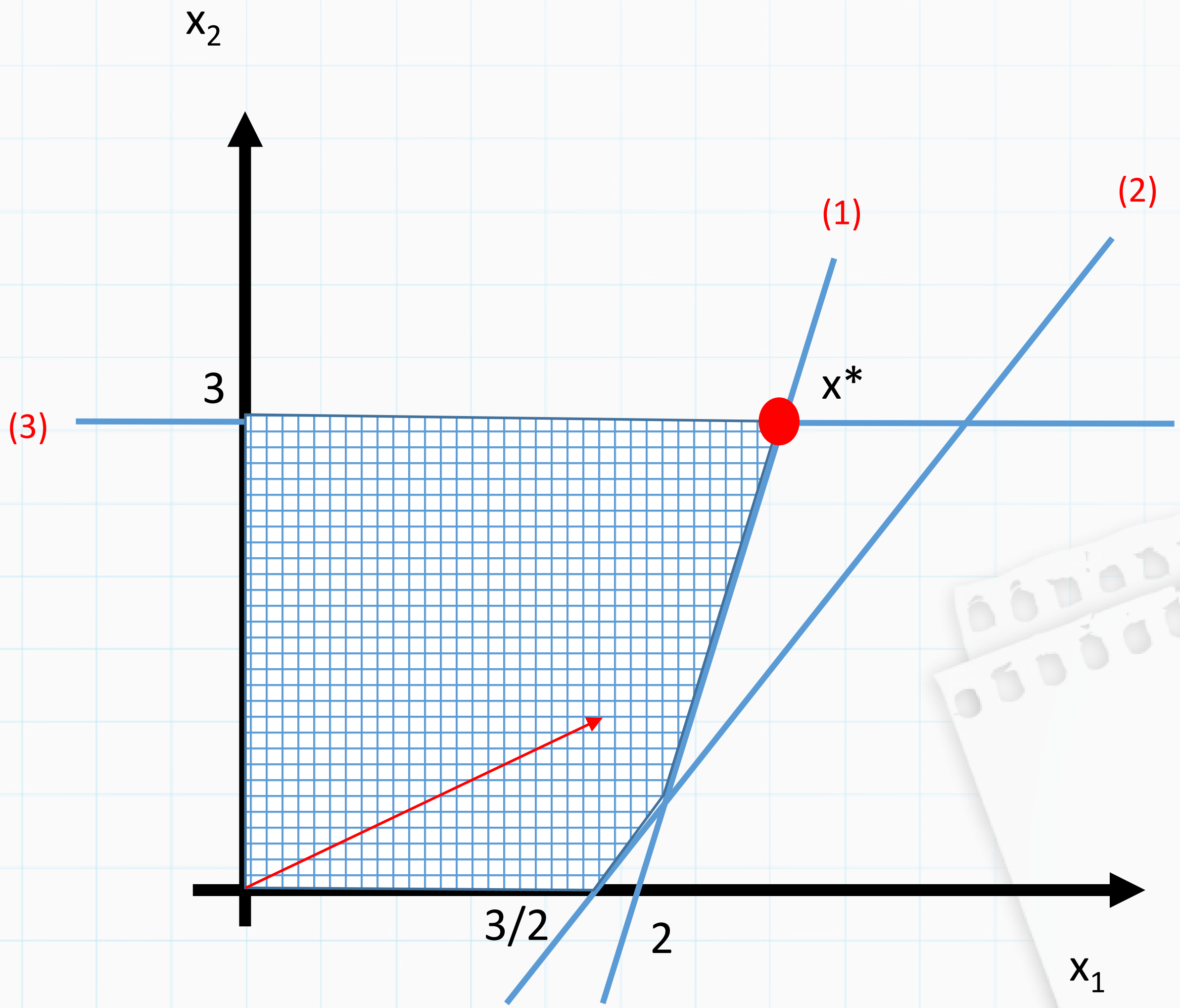
solução: $x_1^* = 20/7$, $x_2^* = 3$

limite sup. : $\bar{Z} = 59/7$

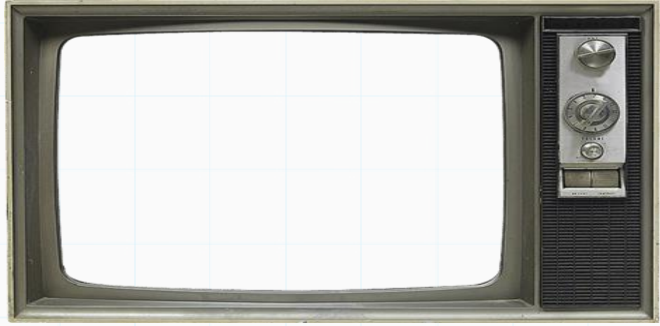
limite inf. $\underline{Z} = -\infty$

Ramificação: $x_1 \leq 2$, $x_1 \geq 3$





Branch and Bound



Exemplo:

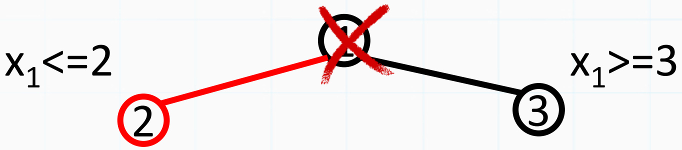
$$\max\ 4x_1 - x_2$$

$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$

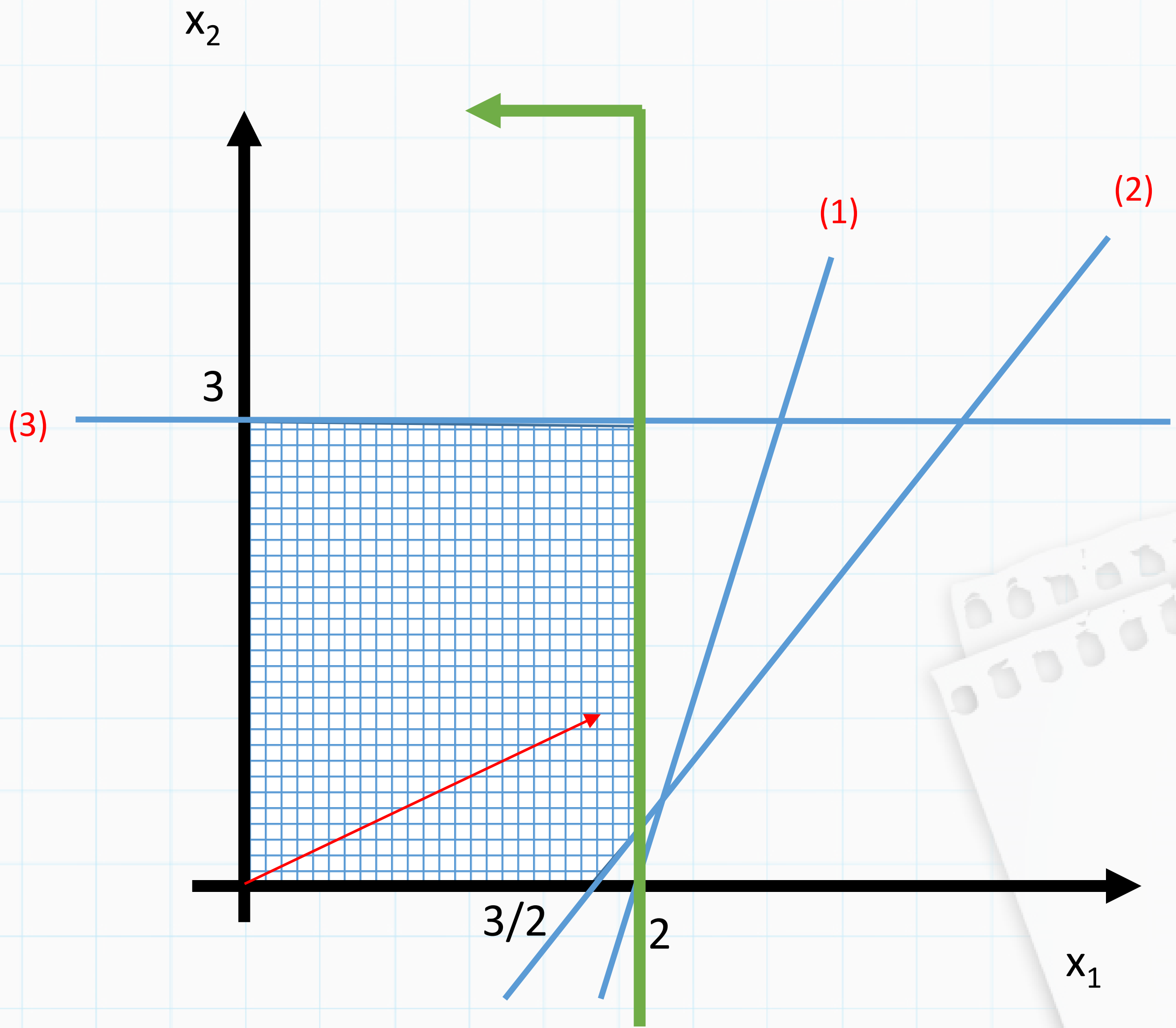
$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$

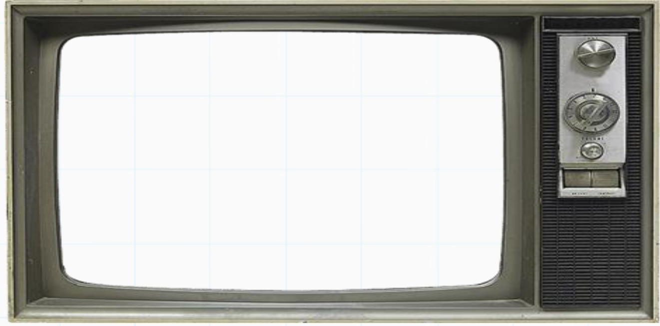
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$



acrescenta : x_1 <= 2

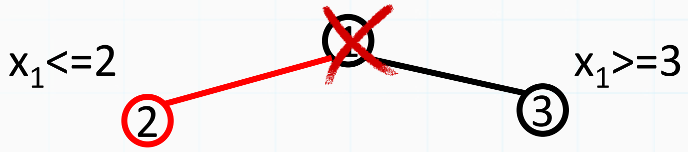


Branch and Bound

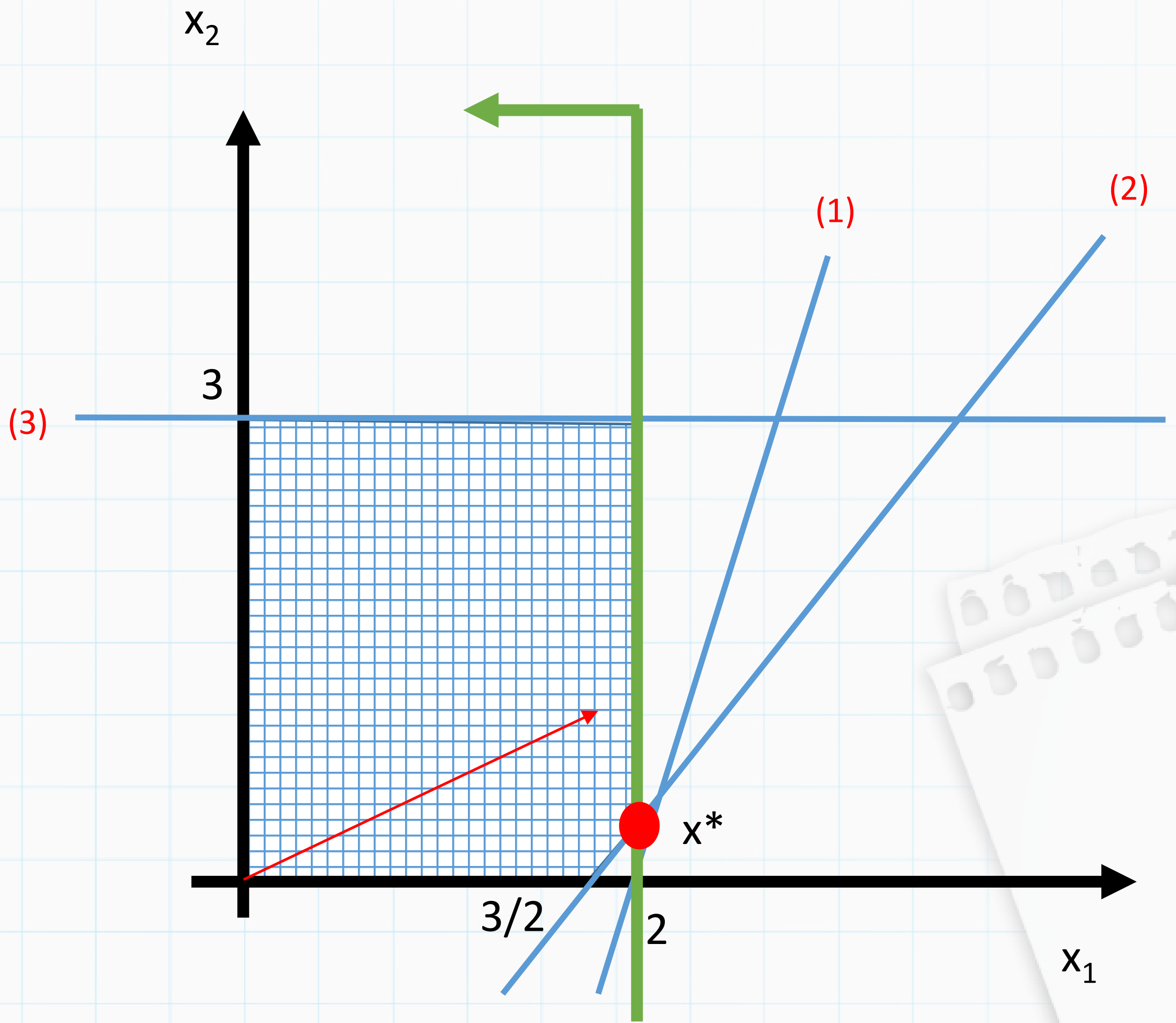


Exemplo:

$$\max\ 4x_1 - x_2$$
$$7x_1 - 2x_2 \le 14 \qquad (1)$$
$$2x_1 - 2x_2 \le 3 \qquad (2)$$
$$x_2 \le 3 \qquad (3)$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$



acrescenta : $x_1 <= 2$

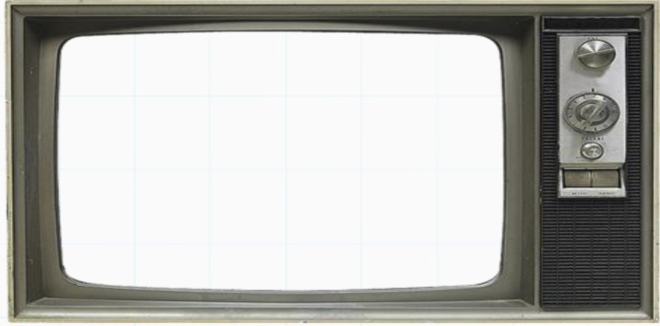


solução: $x_1^* = 2,\ x_2^* = 1/2$

limite sup. : $\bar{Z} = 15/2$

limite inf. $\underline{Z} = -\infty$

Branch and Bound



Exemplo:

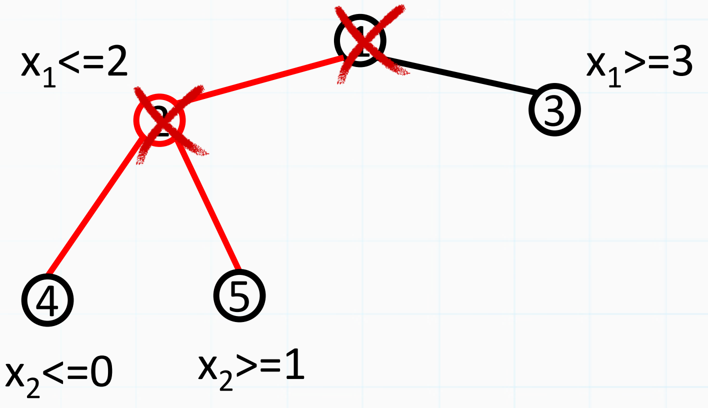
$$\max\ 4x_1 - x_2$$

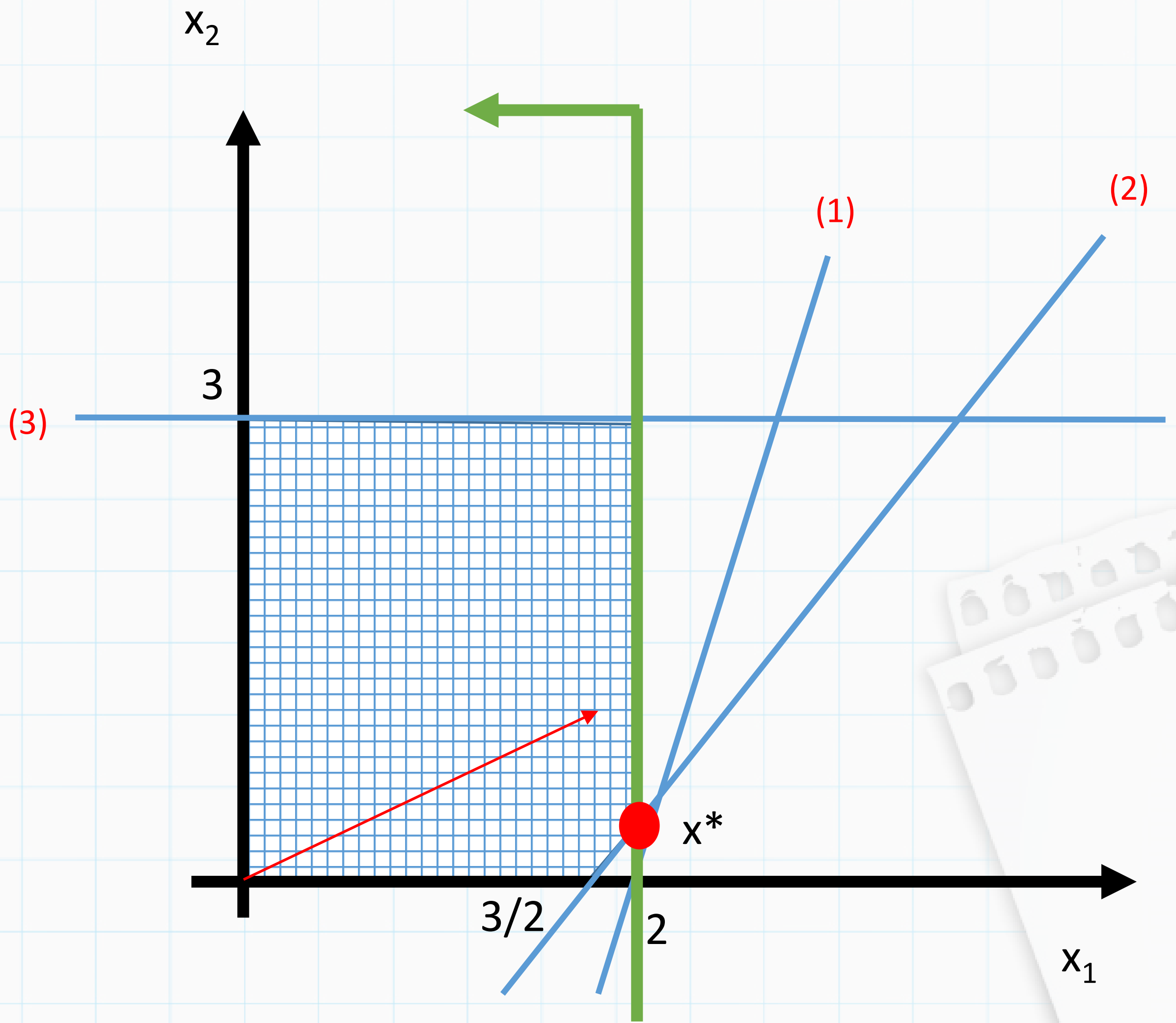
$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$





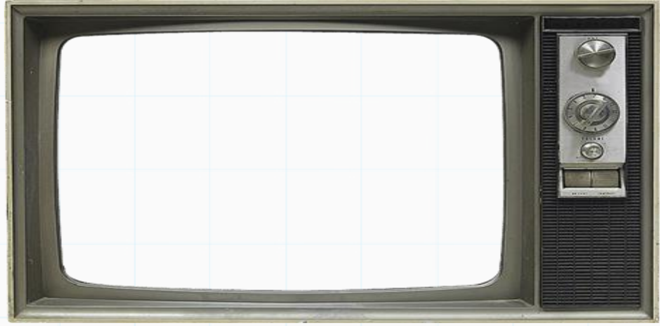
acrescenta : x_1 <= 2

solução: x_1*= 2, x_2*=1/2

limite sup. : $\bar{Z}$ = 15/2

limite inf. $\underline{Z}$ = - ∞

Branch and Bound



Exemplo:

$$\max\ 4x_1 - x_2$$

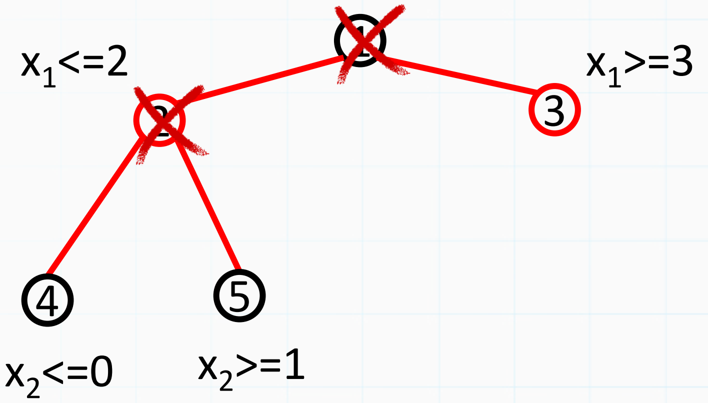
$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$

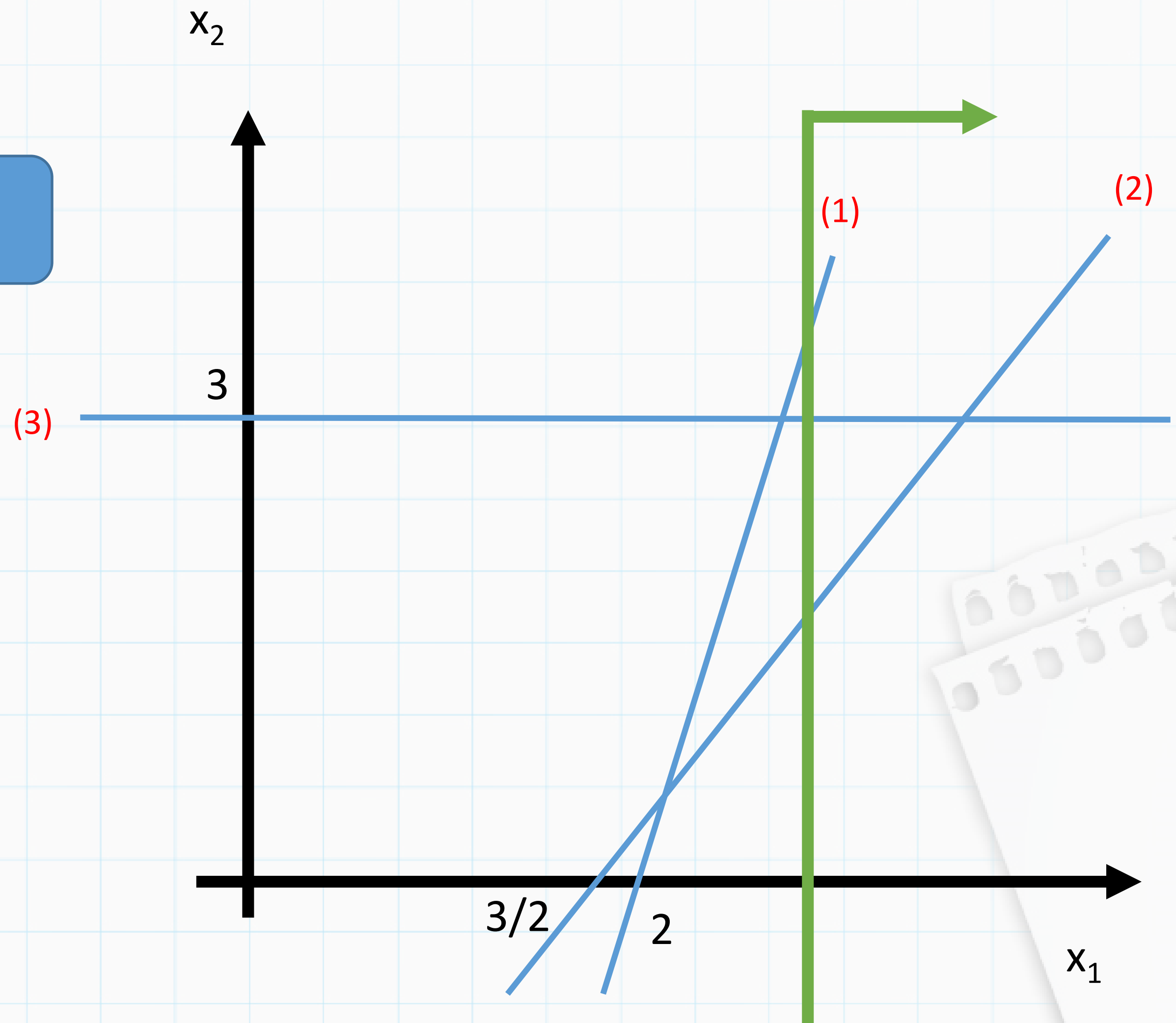
$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

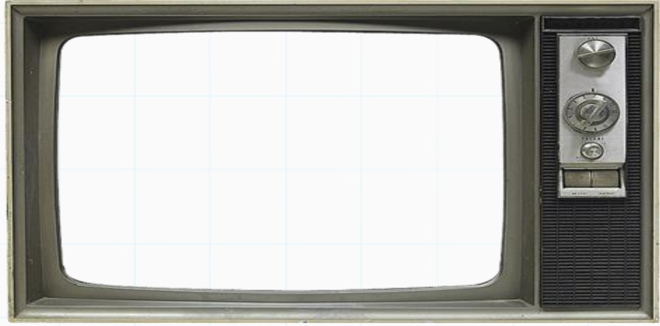
busca em largura



acrescenta : x_1 >=3



Branch and Bound



Exemplo:

$$\max\ 4x_1 - x_2$$

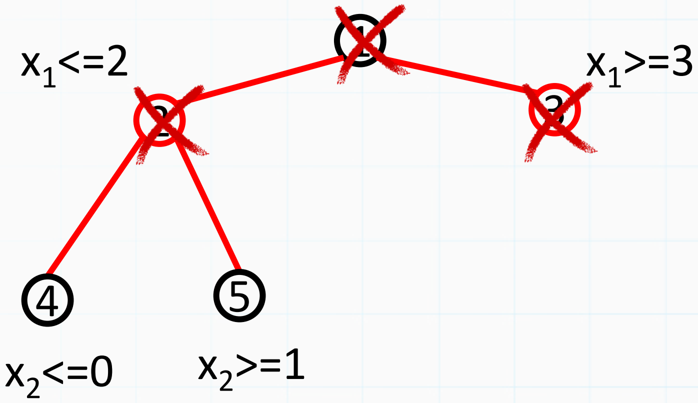
$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

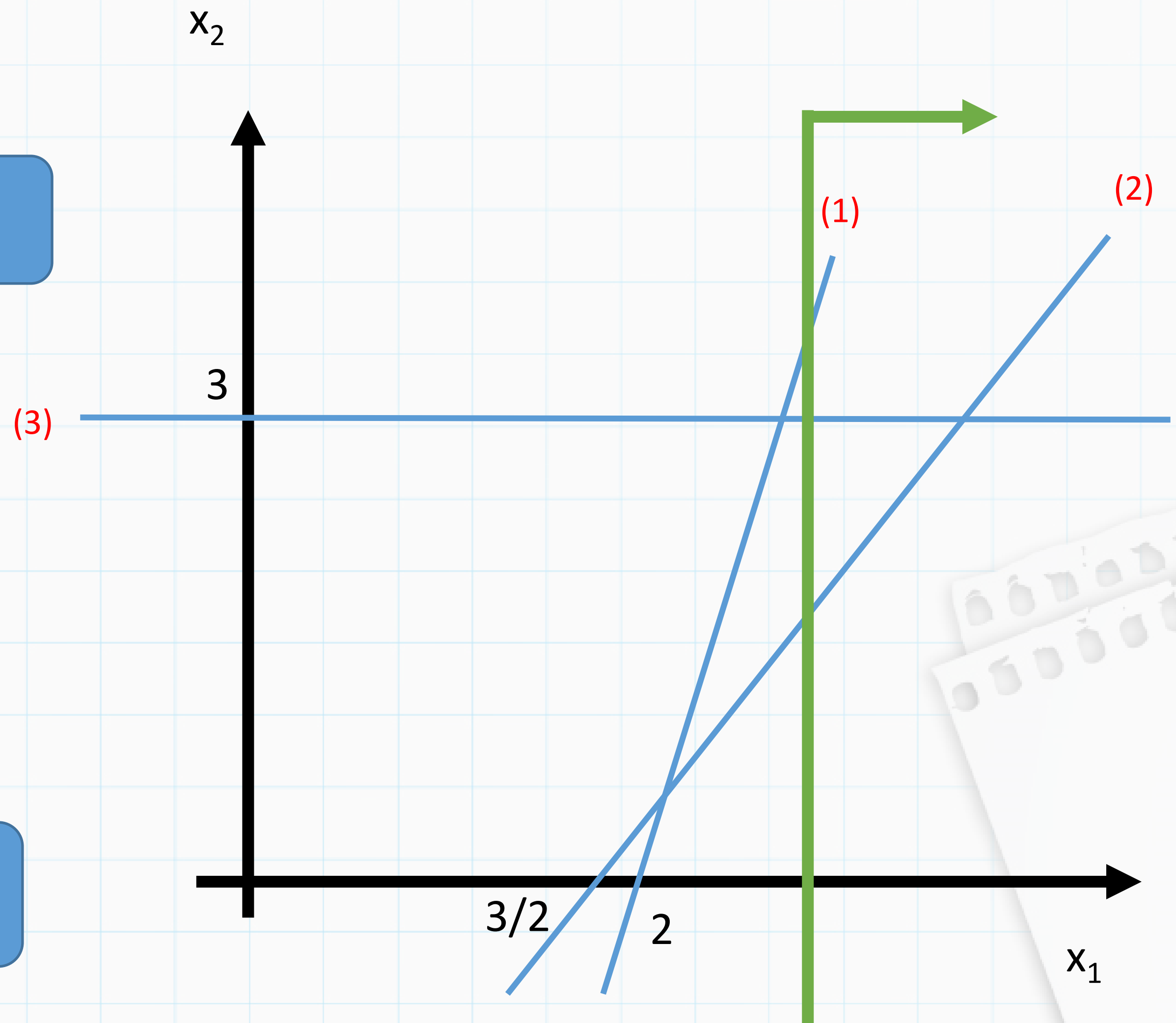
busca em largura



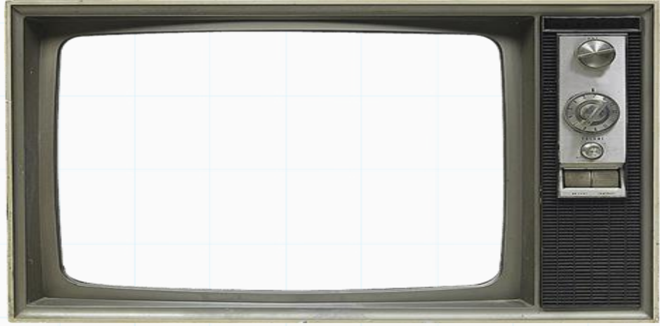
inviável

acrescenta : x_1 >=3

poda por inviabilidade



Branch and Bound



Exemplo:

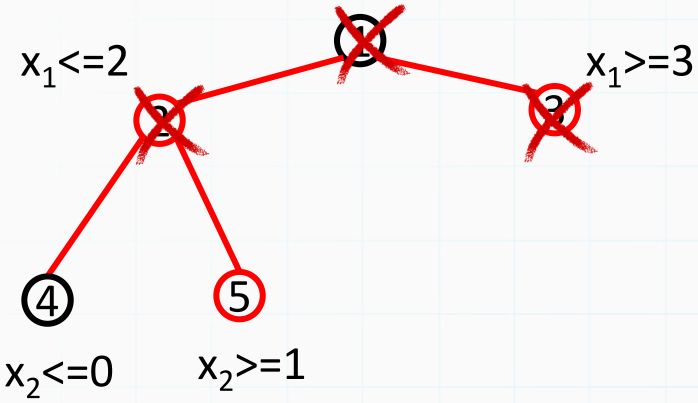
$$\max\ 4x_1 - x_2$$

$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \qquad (1)$$

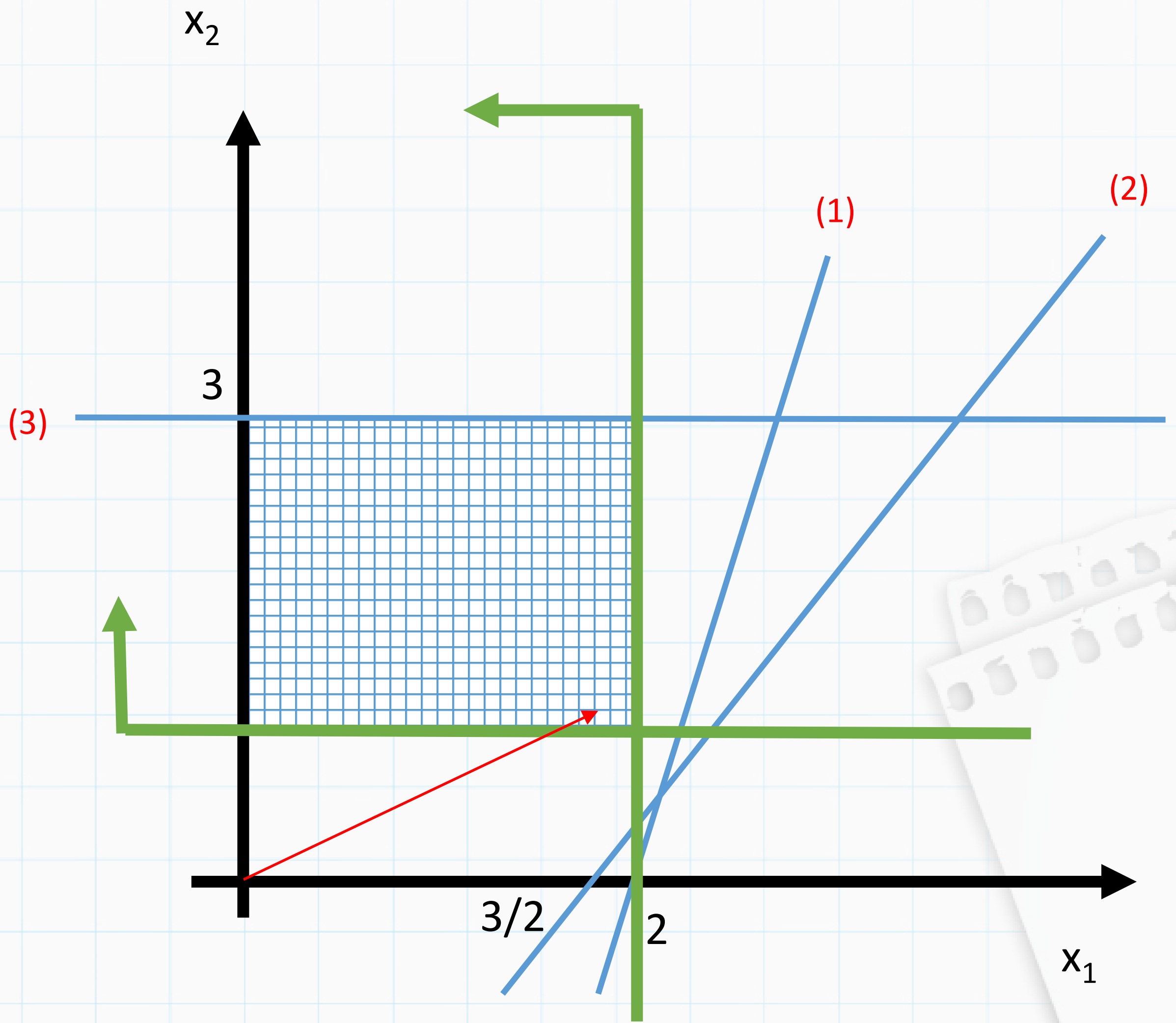
$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \qquad (2)$$

$$x_2 \leq 3 \qquad (3)$$

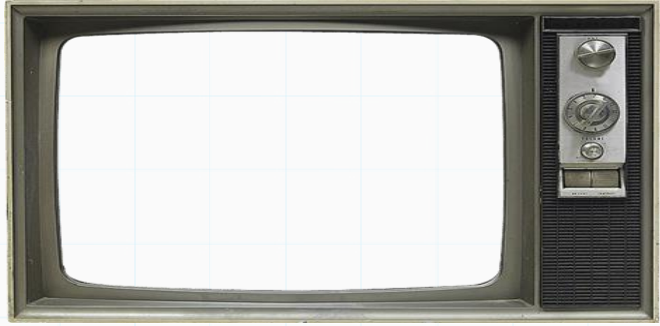
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$



acrescenta : x_2 >=1

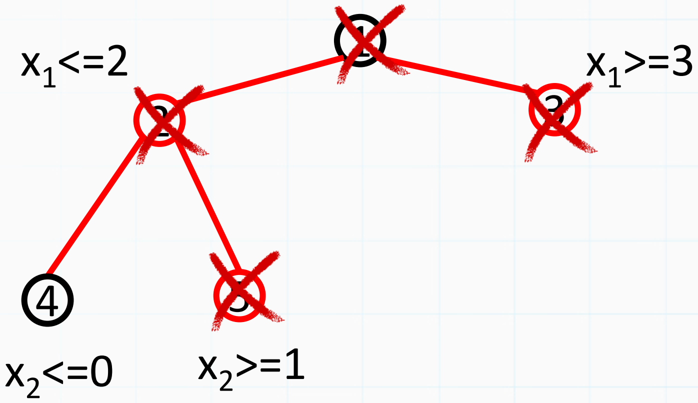


Branch and Bound



Exemplo:

$$\max\ 4x_1 - x_2$$
$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$
$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$
$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$



poda por otimalidade

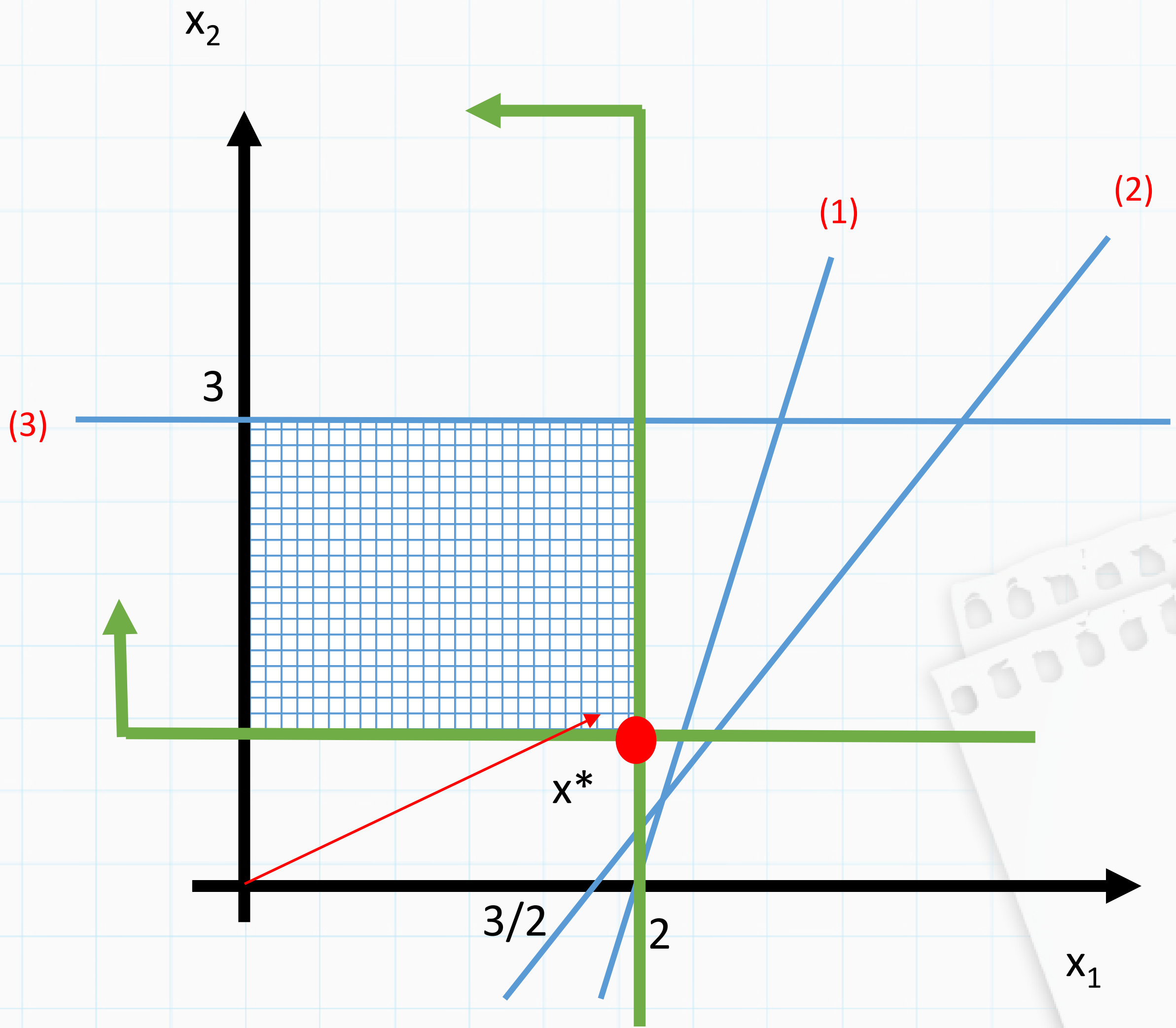
acrescenta : x_2 >=1

solução: x_1*= 2, x_2=1

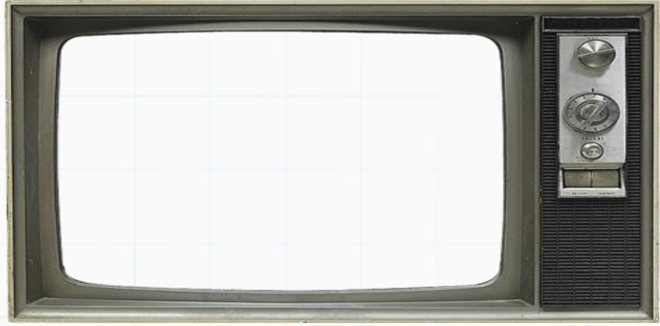
limite sup. : $\bar{Z}$ = 7

limite inf. $\underline{Z}$ = 7

solução inteira $\underline{Z}$ = 7



Branch and Bound



Exemplo:

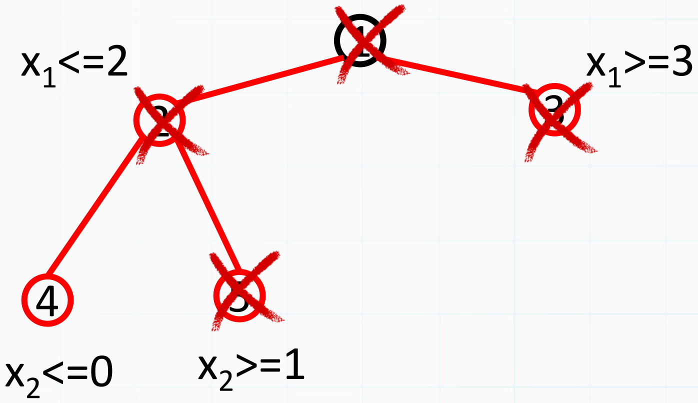
$$\max\ 4x_1 - x_2$$

$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$

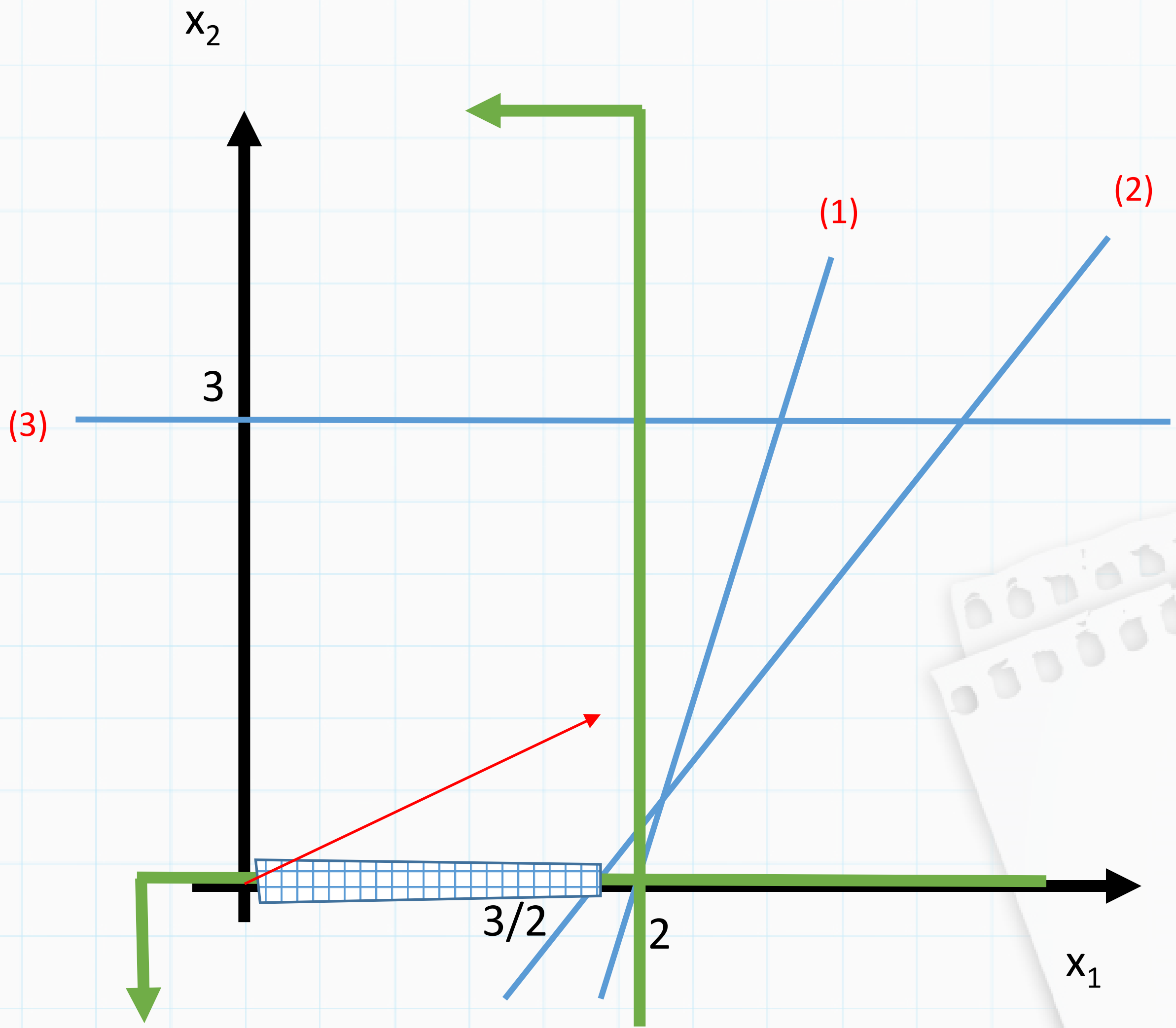
$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$

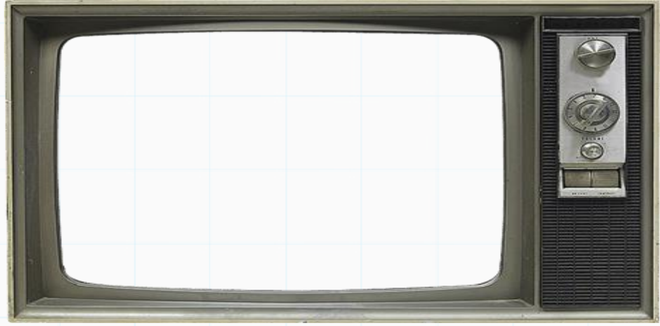
$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$



acrescenta : x_2 <=1





Branch and Bound

Exemplo:

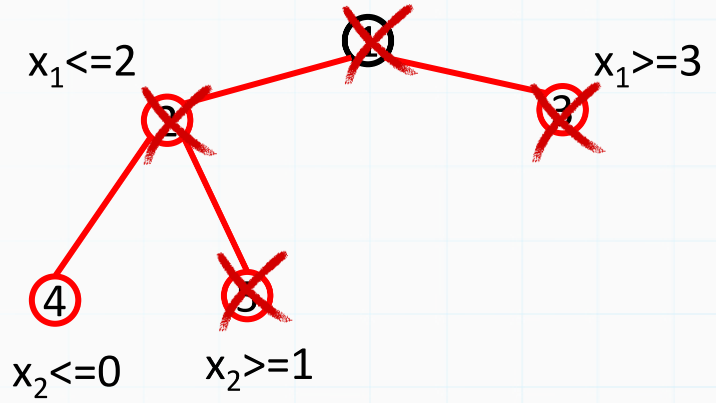
$$\max\ 4x_1 - x_2$$

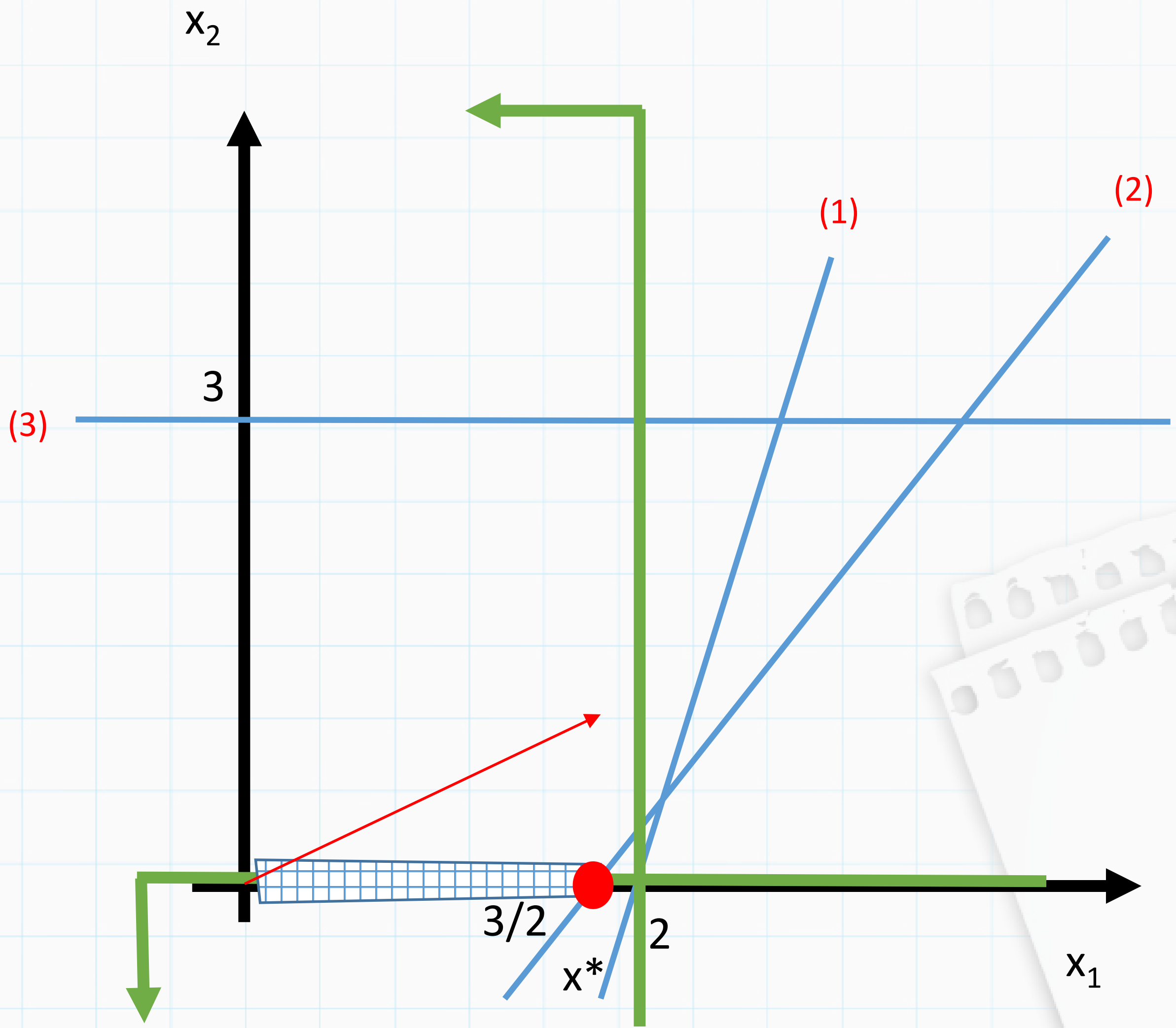
$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$

$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$





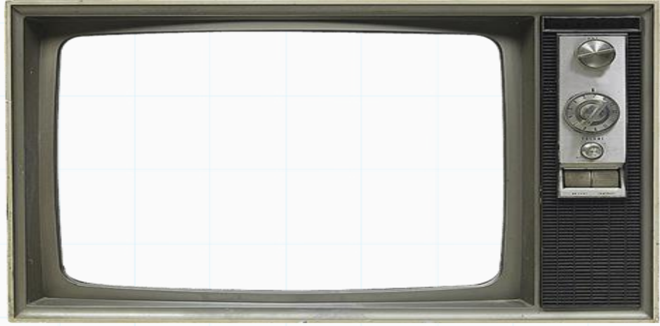
acrescenta : x_2 <=1

solução: x_1*= 3/2, x_2=0

limite sup. : $\bar{Z}$ = 6

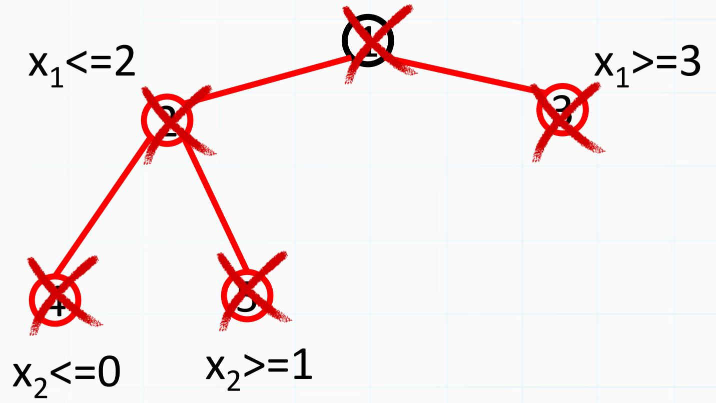
limite inf. $\underline{Z}$ = 7

Branch and Bound



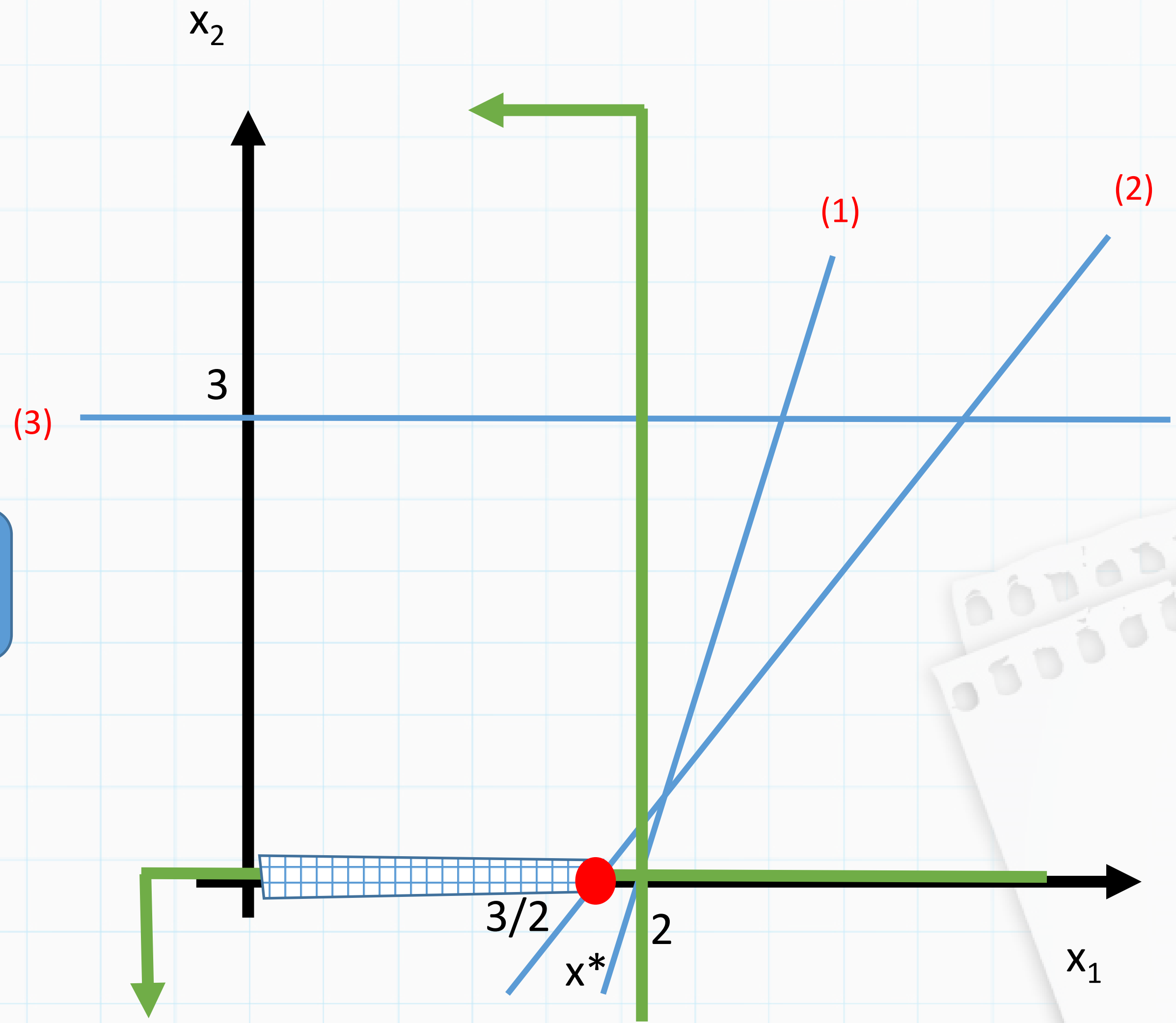
Exemplo:

$$\max\ 4x_1 - x_2$$
$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$
$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$
$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$



corte por limitante
$\bar{Z} = 6 \leq \underline{Z} = 7$

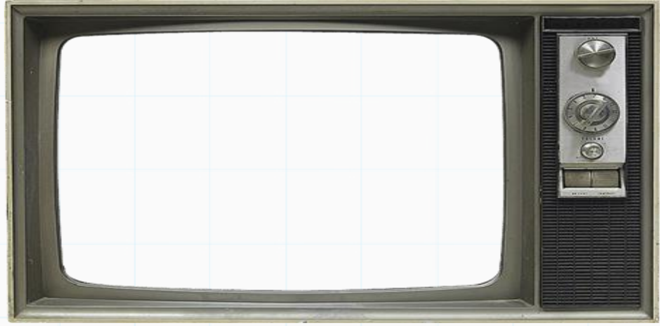
não tem mais nós
solução ótima $\underline{Z} = 7$



acrescenta : $x_2 \leq 1$

solução: $x_1^* = 3/2,\ x_2 = 0$
limite sup. : $\bar{Z} = 6$
limite inf. $\underline{Z} = 7$

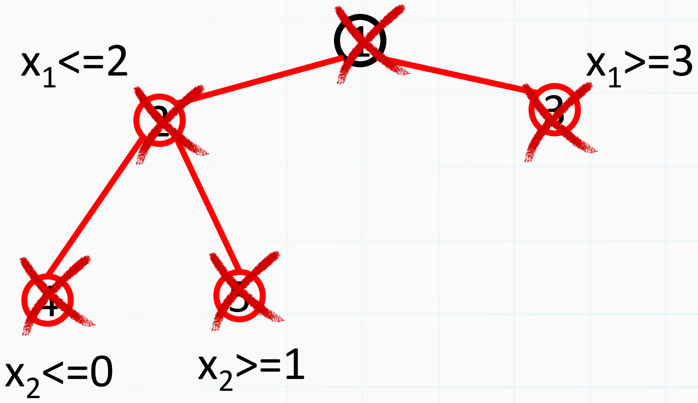
Branch and Bound

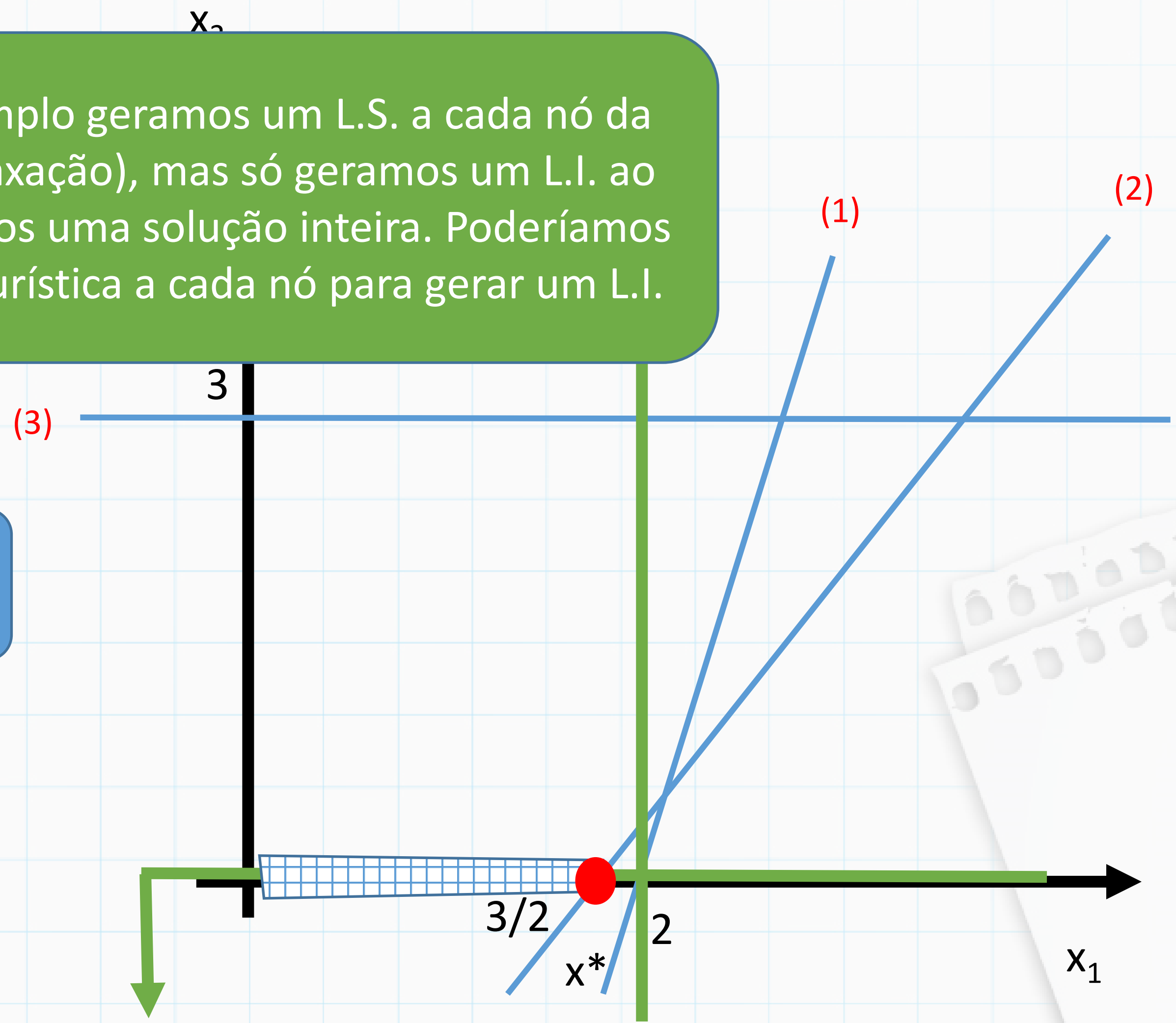


Exemplo:

$$\max\ 4x_1 - x_2$$
$$7x_1 - 2x_2 \leq 14 \quad (1)$$
$$2x_1 - 2x_2 \leq 3 \quad (2)$$
$$x_2 \leq 3 \quad (3)$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Nesse exemplo geramos um L.S. a cada nó da árvore (relaxação), mas só geramos um L.I. ao encontrarmos uma solução inteira. Poderíamos ter uma heurística a cada nó para gerar um L.I.





corte por limitante
$\bar{Z} = 6 <= \underline{Z} = 7$

não tem mais nós
solução ótima $\underline{Z} = 7$

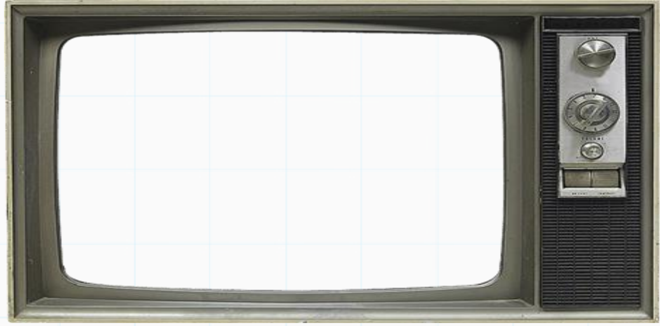
acrescenta : x_2 <=1

solução: x_1*= 3/2, x_2=0

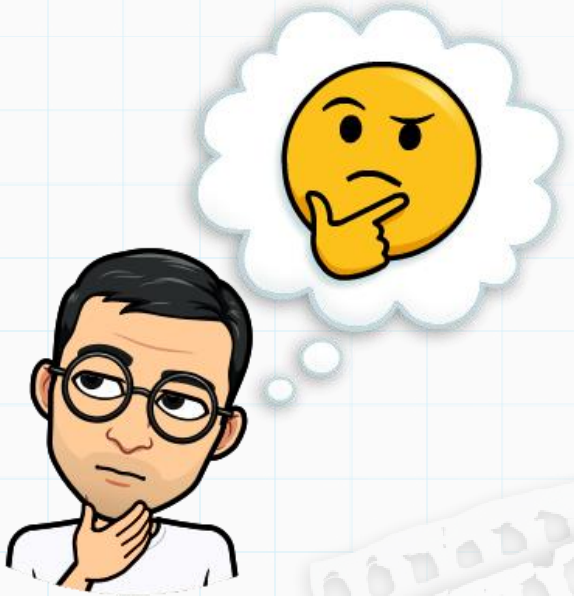
limite sup. : $\bar{Z}$ = 6

limite inf. $\underline{Z}$ = 7

Cortes

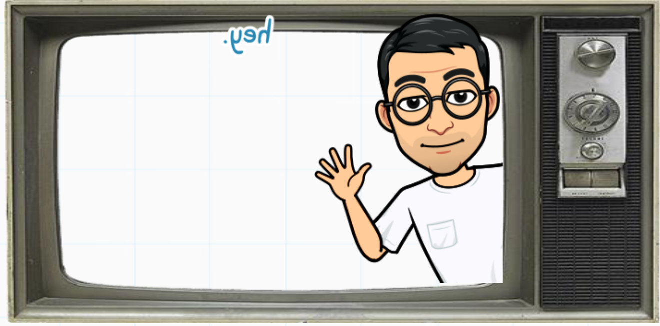


- O desempenho do método Branch-and-bound está ligado a formulação do problema:
  - Se a formulação é forte (apertada) -> afeta a qualidade dos limitantes
  - Se a formulação tem degeneração -> afeta a velocidade dos limitantes
  - Se a formulação tem simetria -> afeta a velocidade dos limitantes
  - etc



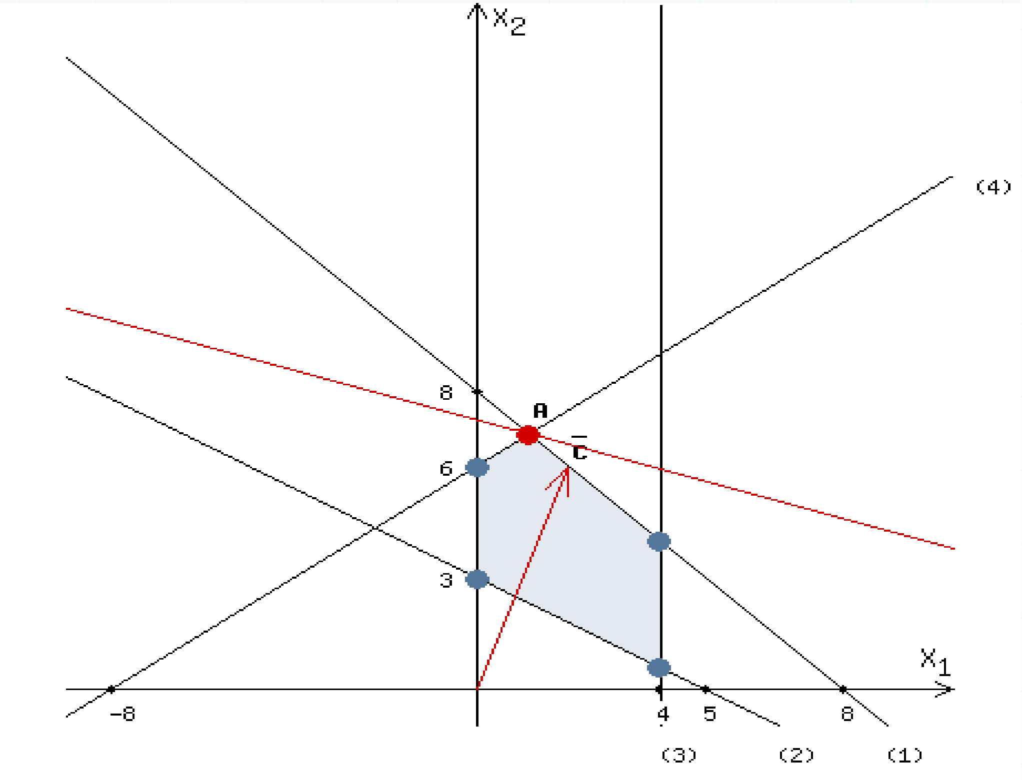
Uma forma de melhorarmos as formulações é aplicar novas restrições ao modelo, i.e., cortes !

Cortes



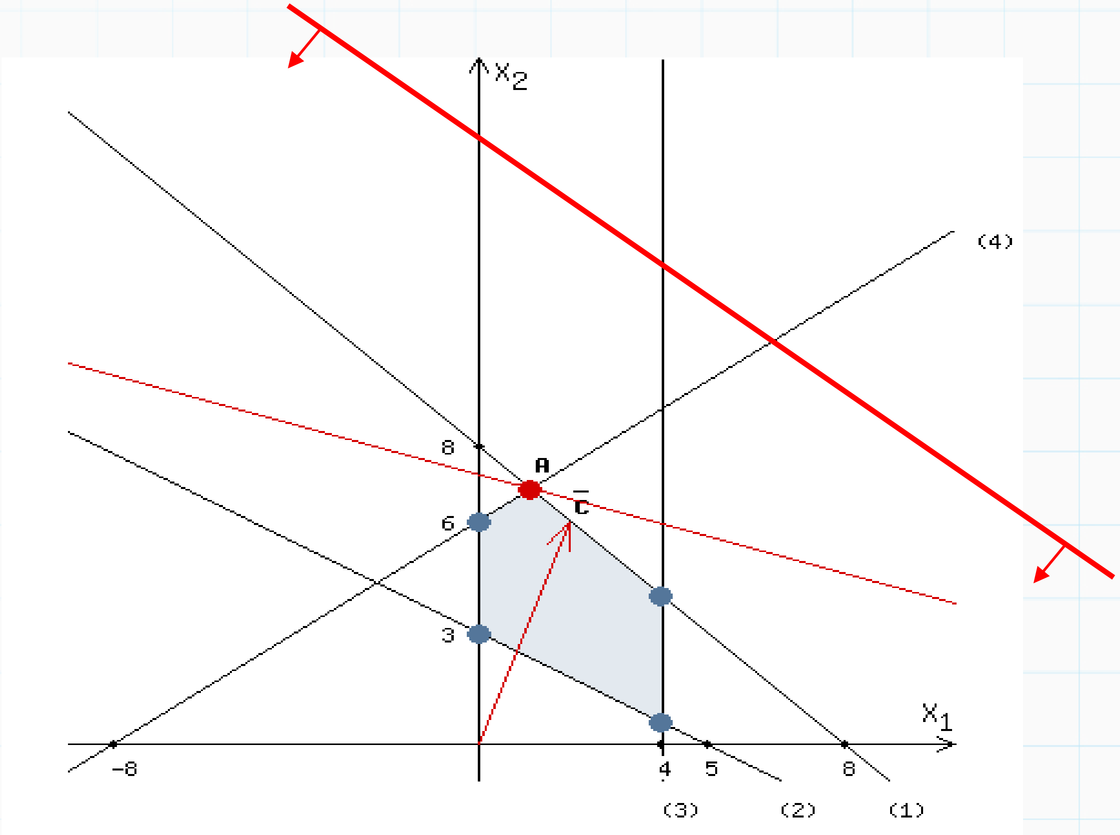
Primeiro, vamos apresentar algumas definições

- Um <u>poliedro</u> é definido como o conjunto de pontos viáveis definidos pelas restrições lineares de um PPL



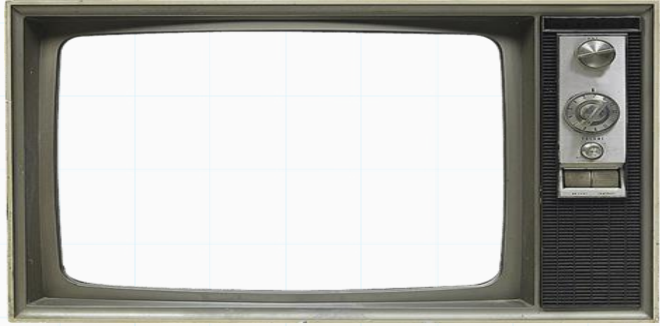
Cortes

- Um poliedro é definido como o conjunto de pontos viáveis definidos pelas restrições lineares de um PPL
- Uma inequação $a^T x \leq \beta$ é dita válida para um poliedro P, se para toda solução x ∈ P, esta solução satisfaz $a^T x \leq \beta$

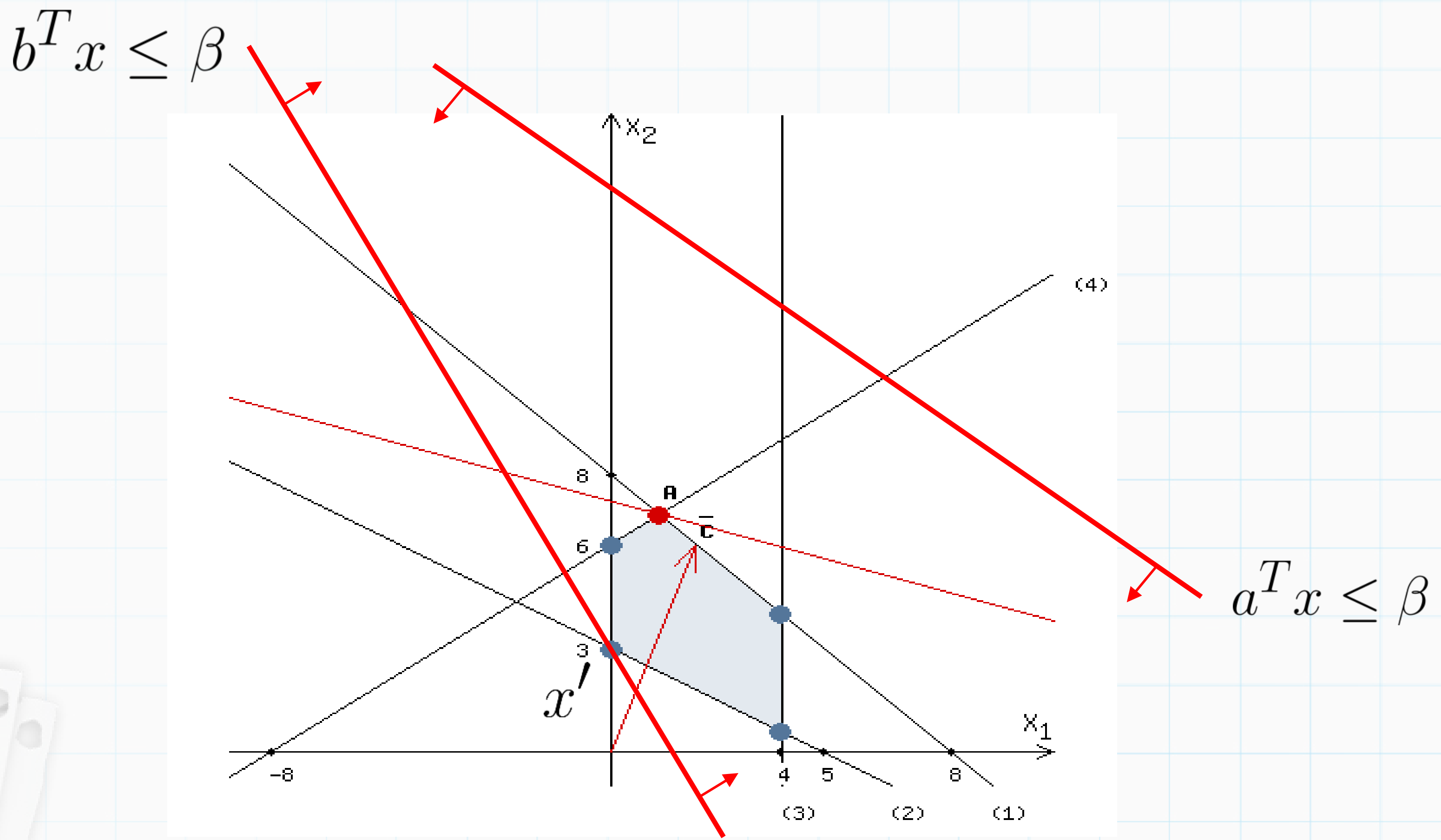


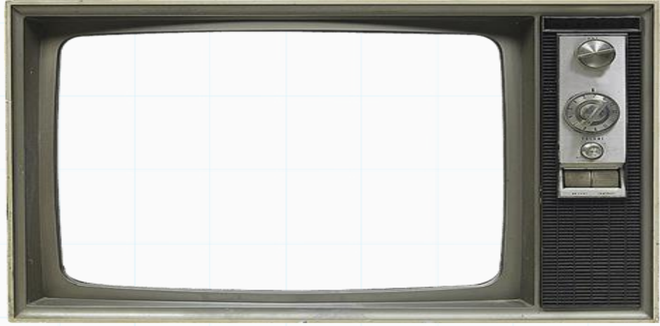
$a^T x \leq \beta$

Cortes



- Um <u>poliedro</u> é definido como o conjunto de pontos viáveis definidos pelas restrições lineares de um PPL
- Uma inequação $a^T x \leq \beta$ é dita <u>válida</u> para um poliedro P, se para toda solução x ∈ P, esta solução satisfaz $a^T x \leq \beta$
- Uma inequação válida $b^T x \leq \beta$ é dita <u>ativa</u> em um ponto x' ∈ P, se $b^T x' = \beta$

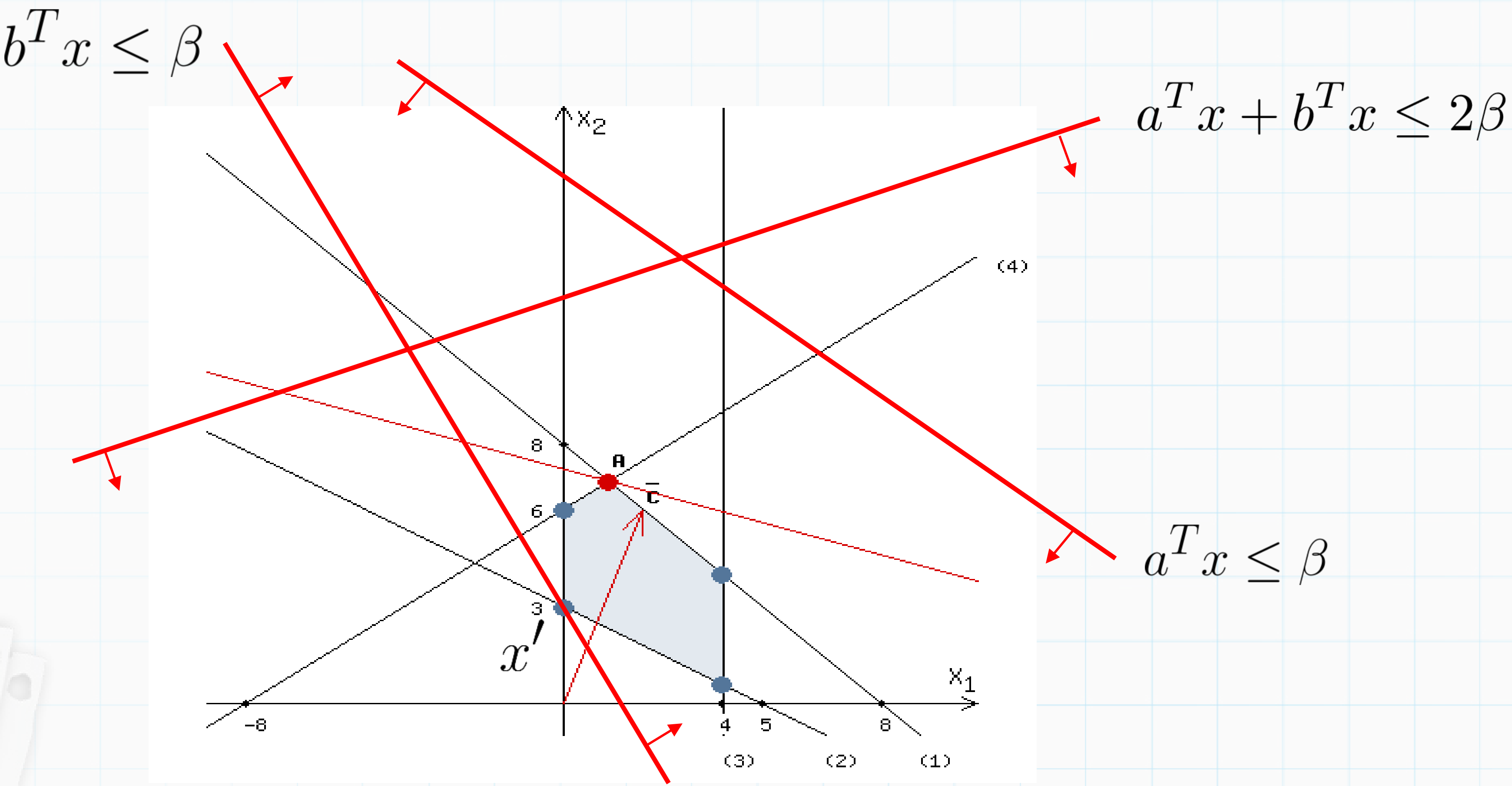


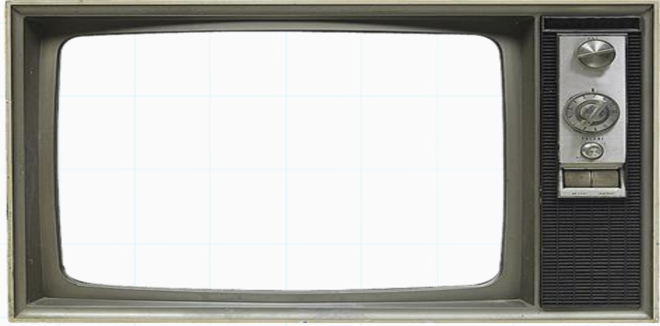


Cortes

- A combinação linear de inequações válidas de um poliedro também será uma inequação válida (ex: $a^Tx + b^Tx \leq 2\beta$)

Teorema





Cortes

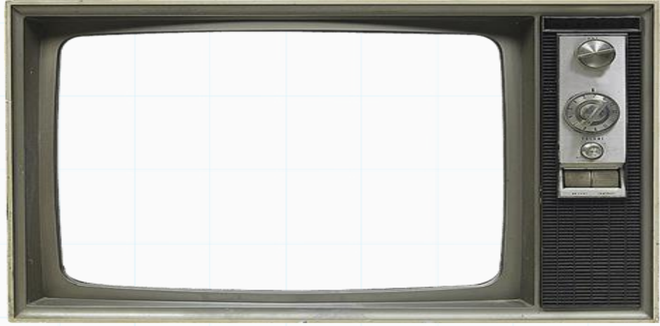
- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{B}^5 : 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -2\}$$

o que podemos concluir a partir de x_2 e x_4 ?

Observação

Cortes



- Exemplos de desigualdades válidas

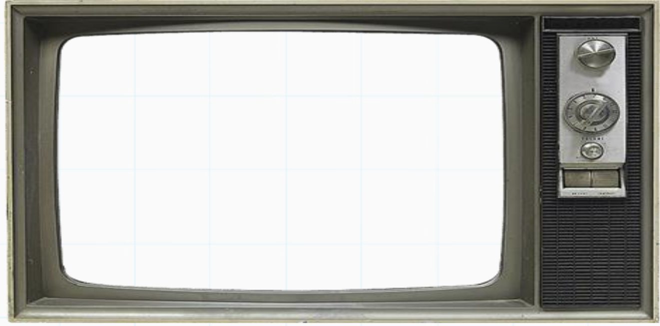
$$X = \{x \in \mathbb{B}^5 : 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -2\}$$

o que podemos concluir a partir de x_2 e x_4 ?

$$\boxed{x_2 + x_4 \geq 1}$$

Observação

Cortes



- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{B}^5 : 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -2\}$$

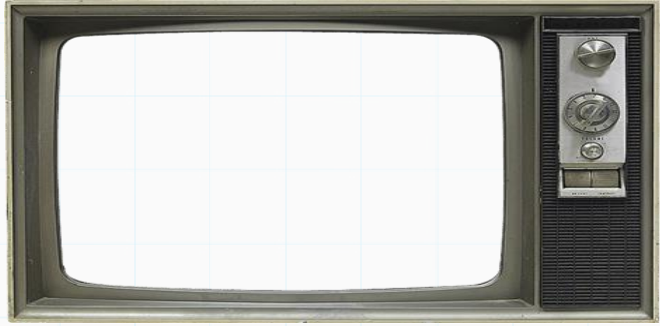
o que podemos concluir a partir de x_2 e x_4 ?

$$\boxed{x_2 + x_4 \geq 1}$$

o que podemos concluir a partir de x_1, x_2 e x_4 ?

Observação

Cortes



- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{B}^5 : 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 \leq -2\}$$

o que podemos concluir a partir de x_2 e x_4 ?

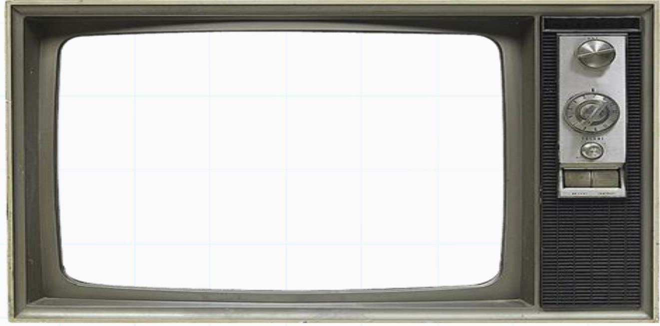
$$\boxed{x_2 + x_4 \geq 1}$$

o que podemos concluir a partir de x_1, x_2 e x_4 ?

$$\boxed{2x_1 \leq x_2 + x_4}$$

Observação

Cortes

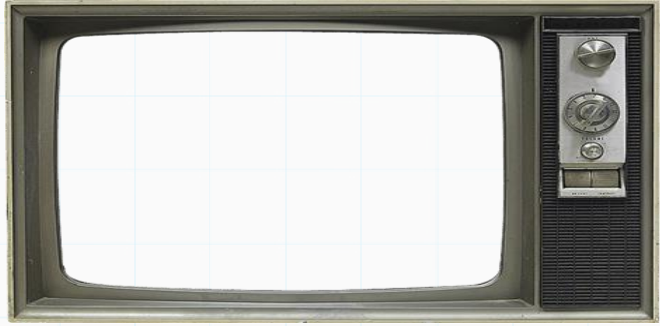


- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 \geq 3; 2x_1 - 3x_2 \geq 5\}$$

Combinação Linear

Cortes



- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 \geq 3; 2x_1 - 3x_2 \geq 5\}$$

Combinação Linear

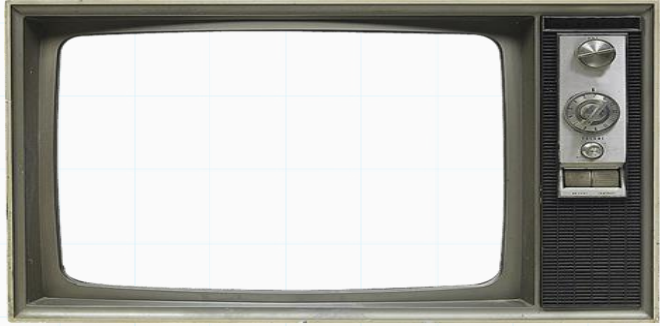
Ao somarmos temos:

$$x_1 + x_2 \geq 3;$$

$$2x_1 - 3x_2 \geq 5$$

$$\boxed{3x_1 - 2x_2 \geq 8}$$

Cortes

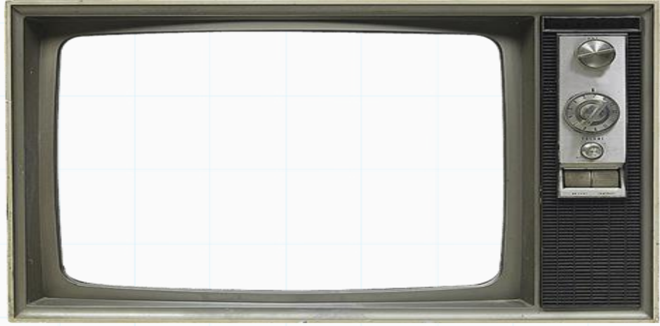


- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^4 : 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72\}$$

arredondamento
positivo
inteiro

Cortes



- Exemplos de desigualdades válidas

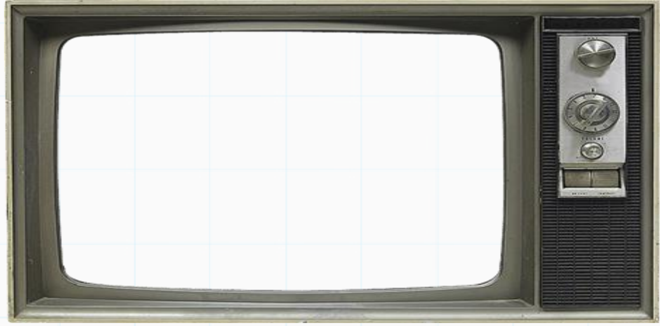
$$X = \{x \in \mathbb{Z}^4 : 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72\}$$

vamos dividir por 11

$$\frac{13x_1}{11} + \frac{20x_2}{11} + \frac{11x_3}{11} + \frac{6x_4}{11} \geq \frac{72}{11}$$

arredondamento
positivo
inteiro

Cortes



- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^4 : 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72\}$$

vamos dividir por 11

$$\frac{13x_1}{11} + \frac{20x_2}{11} + \frac{11x_3}{11} + \frac{6x_4}{11} \geq \frac{72}{11}$$

arredondamento
positivo
inteiro

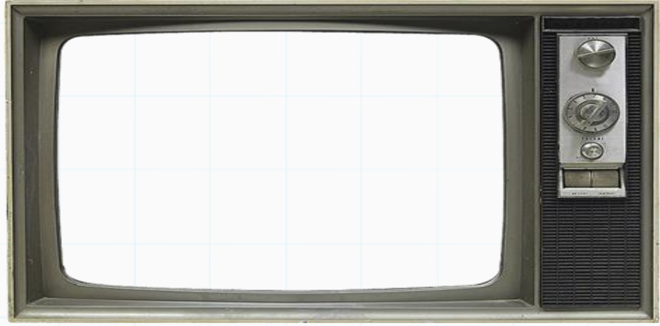
como as vaiáveis são positivas

$$\lceil 1, ... \rceil x_1 + \lceil 1, ... \rceil x_2 + x_3 + \lceil 0, ... \rceil x_4 \geq \frac{72}{11}$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq \frac{72}{11}$$

Deixou mais largo

Cortes



- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^4 : 13x_1 + 20x_2 + 11x_3 + 6x_4 \geq 72\}$$

vamos dividir por 11

arredondamento
positivo
inteiro

$$\frac{13x_1}{11} + \frac{20x_2}{11} + \frac{11x_3}{11} + \frac{6x_4}{11} \geq \frac{72}{11}$$

como as vaiáveis são positivas

$$\lceil 1, \ldots \rceil x_1 + \lceil 1, \ldots \rceil x_2 + x_3 + \lceil 0, \ldots \rceil x_4 \geq \frac{72}{11}$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq \frac{72}{11}$$

Deixou mais largo

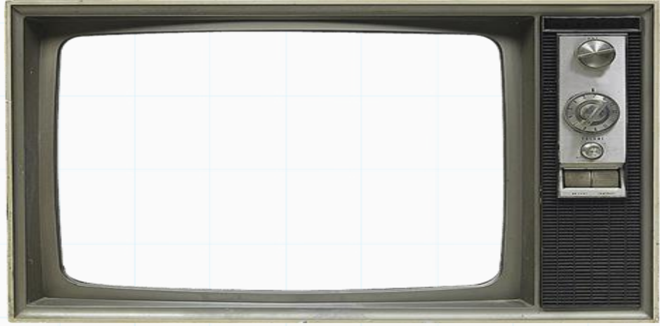
como os coeficientes e as variáveis são inteiros

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq \lceil 6, \ldots \rceil$$

$$\boxed{2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \geq 7}$$

Deixou mais acoxado

Cortes

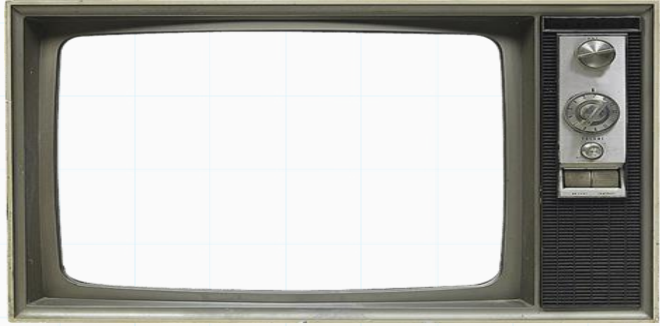


misturando as técnicas

- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^4 : 2x_1 + 3x_2 \leq 5; x_1 + 2x_2 \leq 3\}$$

Cortes



- Exemplos de desigualdades válidas

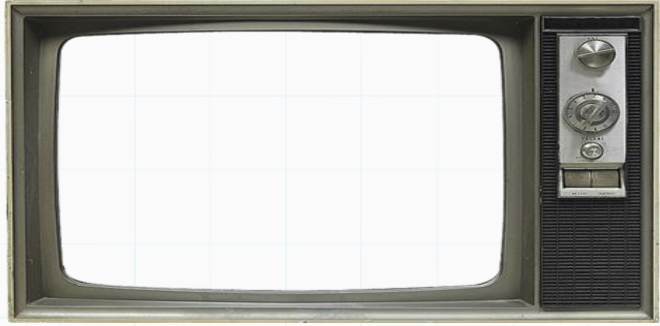
$$X = \{x \in \mathbb{Z}^4 : 2x_1 + 3x_2 \leq 5; x_1 + 2x_2 \leq 3\}$$

misturando as técnicas

$$\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \hline 3x_1 + 5x_2 \leq 8 \end{array}$$

combinação linear

Cortes



misturando as técnicas

- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^4 : 2x_1 + 3x_2 \leq 5; x_1 + 2x_2 \leq 3\}$$

$$\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \hline 3x_1 + 5x_2 \leq 8 \end{array}$$

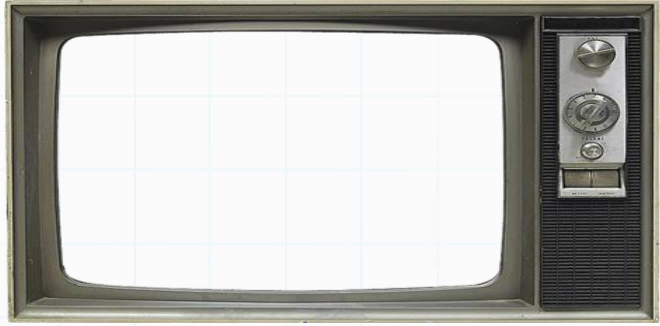
combinação linear

$$x_1 + \lfloor 1, \ldots \rfloor x_2 \leq 2, \ldots$$

divide por 3 e piso (var. pos.)

Deixou mais largo

Cortes



misturando as técnicas

- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^4 : 2x_1 + 3x_2 \leq 5; x_1 + 2x_2 \leq 3\}$$

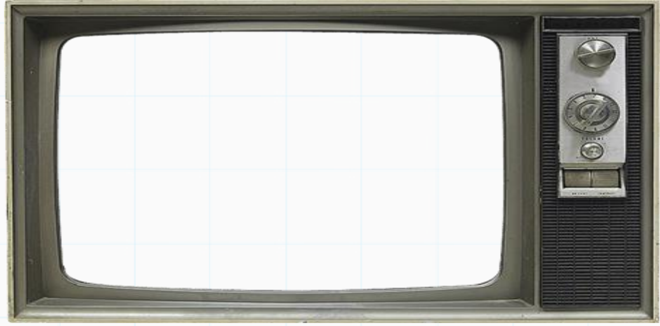
$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 8$$ combinação linear

$$x_1 + \lfloor 1, \ldots \rfloor x_2 \leq 2, \ldots$$ divide por 3 e piso (var. pos.) — Deixou mais largo

$$x_1 + x_2 \leq \lfloor 2, \ldots \rfloor$$ var. e coef. inteiros — Deixou mais acoxado

Cortes



misturando as técnicas

- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^4 : 2x_1 + 3x_2 \leq 5; x_1 + 2x_2 \leq 3\}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 5$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 3$$

$$3x_1 + 5x_2 \leq 8$$

combinação linear

$$x_1 + \lfloor 1, \ldots \rfloor x_2 \leq 2, \ldots$$

divide por 3 e piso (var. pos.)

Deixou mais largo

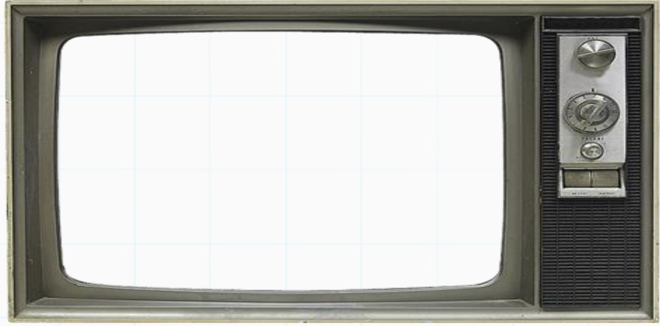
$$x_1 + x_2 \leq \lfloor 2, \ldots \rfloor$$

var. e coef. inteiros

Deixou mais acoxado

$$\boxed{x_1 + x_2 \leq 2}$$

Cortes



- Exemplos de desigualdades válidas

$$X = \{x \in \mathbb{Z}^4 : 2x_1 + 3x_2 \leq 5; x_1 + 2x_2 \leq 3\}$$

misturando as técnicas

$$\begin{array}{r} 2x_1 + 3x_2 \leq 5 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ \hline 3x_1 + 5x_2 \leq 8 \end{array}$$

combinação linear

$$x_1 + \lfloor 1, \ldots \rfloor x_2 \leq 2, \ldots$$

divide por 3 e piso (var. pos.)

Deixou mais largo

$$x_1 + x_2 \leq \lfloor 2, \ldots \rfloor$$

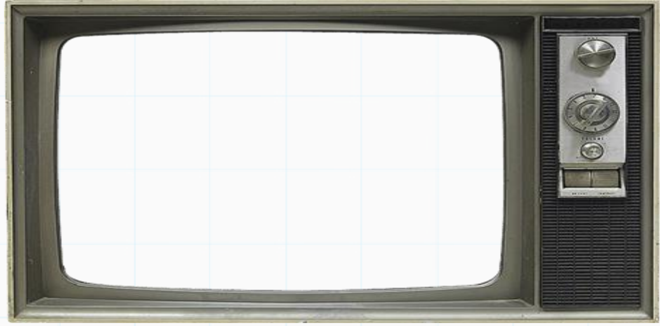
var. e coef. inteiros

Deixou mais acoxado

$$\boxed{x_1 + x_2 \leq 2}$$

essa técnica é muito forte e foi formalizada por Chvatal-Gomery

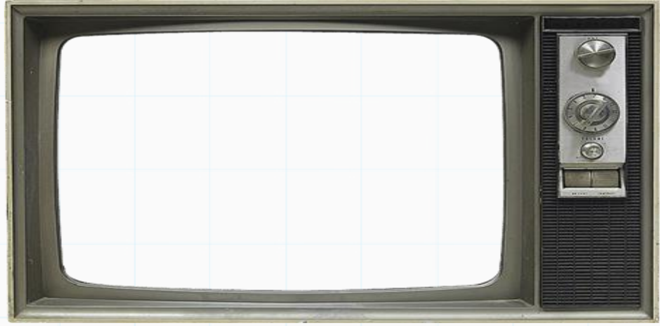
Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal – Gomery:

Seja $X = P \cap \mathbb{Z}_+$ onde $P = \{x \in \mathbb{R}_+ : Ax \leq b\}$, para $A_{m \times n}$ e $u \in \mathbb{R}^n_+$

Cortes Genéricos



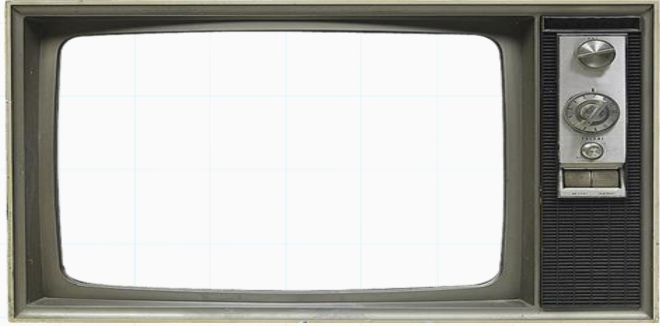
- Cortes de Chvatal – Gomery:

Seja $X = P \cap \mathbb{Z}_+ \text{ onde } P = \{x \in \mathbb{R}_+ : Ax \leq b\}, \text{ para } A_{m\times n} \text{ e } u \in \mathbb{R}^n_+$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} \right) x_j \leq ub$$

combinação linear

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal – Gomery:

Seja $X = P \cap \mathbb{Z}_+$ onde $P = \{x \in \mathbb{R}_+ : Ax \leq b\}$, para $A_{m\times n}$ e $u \in \mathbb{R}^n_+$

$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij})x_j \leq ub$$

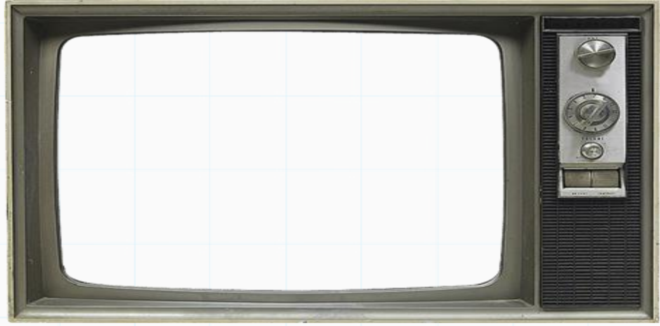
combinação linear

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij})\rfloor \; x_j \leq ub$$

variáveis positivas

Deixou mais largo

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal – Gomery:

Seja $X = P \cap \mathbb{Z}_+$ onde $P = \{x \in \mathbb{R}_+ : Ax \leq b\}$, para $A_{m \times n}$ e $u \in \mathbb{R}^n_+$

$$\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}) x_j \leq ub$$

combinação linear

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor (\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}) \rfloor \ x_j \leq ub$$

variáveis positivas

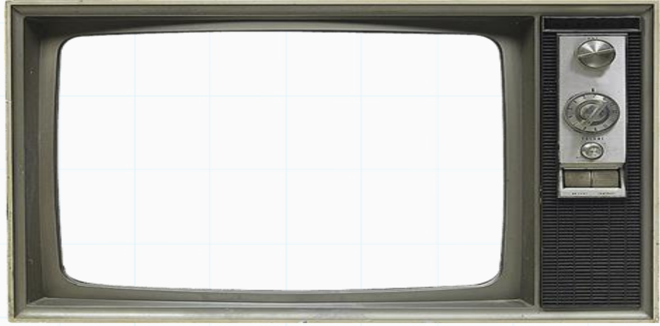
Deixou mais largo

$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor (\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij}) \rfloor \ x_j \leq \lfloor ub \rfloor$$

variáveis e coeficientes inteiros

Deixou mais acoxado

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal – Gomery:

Seja $X = P \cap \mathbb{Z}_+$ onde $P = \{x \in \mathbb{R}_+ : Ax \leq b\}$, para $A_{m \times n}$ e $u \in \mathbb{R}^n_+$

$$\sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij})x_j \leq ub$$

combinação linear

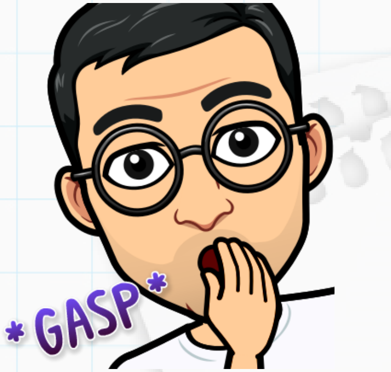
$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij})\rfloor \ x_j \leq ub$$

variáveis positivas

Deixou mais largo

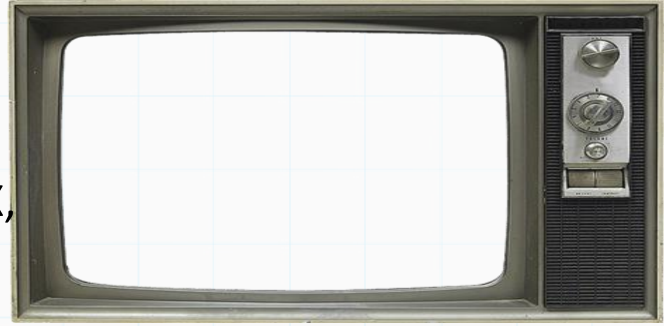
$$\sum_{j=1}^{n} \lfloor(\sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij})\rfloor \ x_j \leq \lfloor ub \rfloor$$

variáveis e coeficientes inteiros



Teorema: Toda desigualdade validade para X pode ser obtida por uma sequencia finita de aplicações do procedimento de Chvatal-Gomery

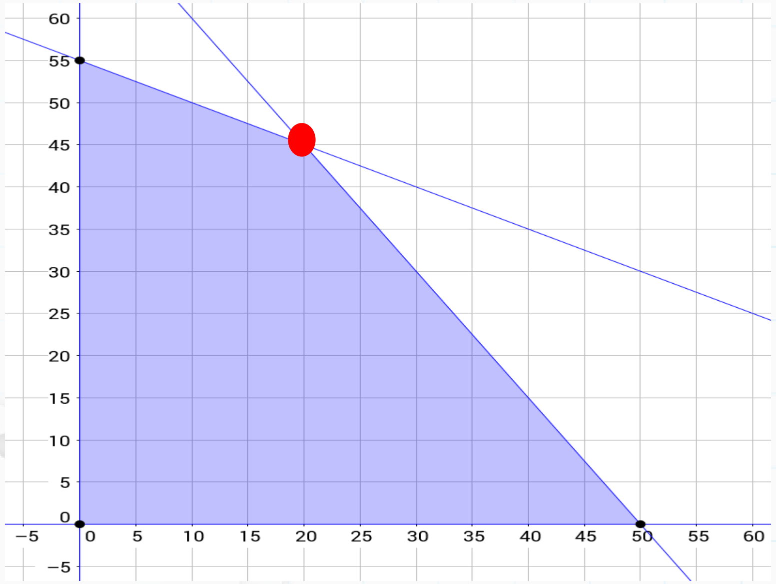
Cortes Genéricos

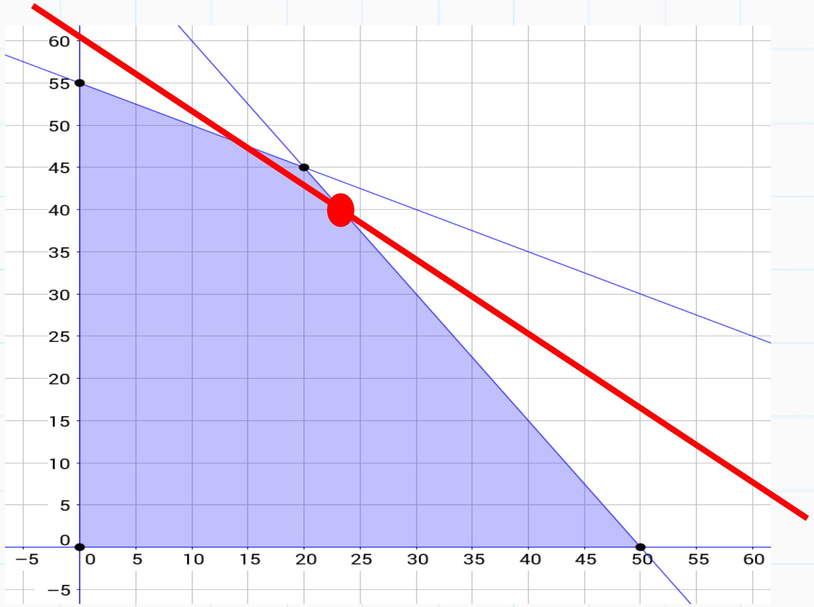


- Tudo bem, sei gerar alguns cortes, mas dado uma solução ótima de um PPL vinda do SIMPLEX, existe uma maneira fácil de corta-la ?

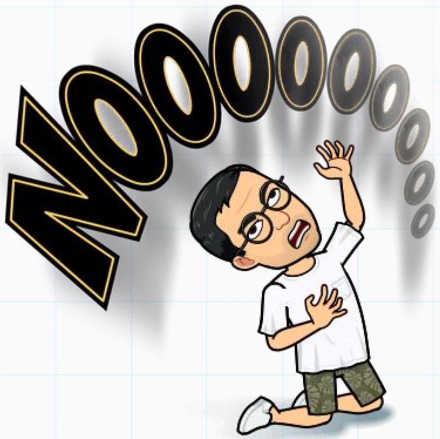
isso é interessante pois no branch-and-bound resolvemos a relaxação dos problemas (SIMPLEX) a cada nó da árvore de enumeração para conseguir limites inferiores

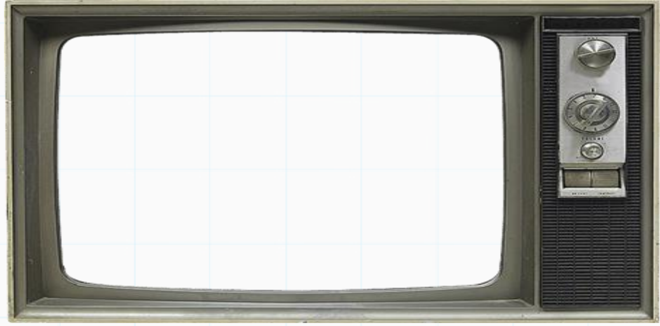
se gerarmos cortes nessas relaxações (SIMPLEX) podemos melhorar o valor do limitante.





Lembra do SIMPLEX ?





$$
\begin{aligned}
\max\ & c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N) x_N \\
\text{s.a.}\ & x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N \\
& x_B, x_N \geq 0
\end{aligned}
$$

$\bar{z} = c_B^T B^{-1} b \in \mathbb{R}$

$c_j - z_j = (c_N^T - c_B^T B^{-1} N)_j$; $(c - z)$ é um vetor

$\bar{x}_{B_i} = (B^{-1} b)_i$; $B^{-1} b$ é um vetor

$[B^{-1} N]_{ij} = y_{ij}$; $B^{-1} N$ é uma matriz

$$
\begin{aligned}
\max\ & \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j & \\
\text{s.a.}\ & x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j, & i = 1, \ldots, m \\
& x_j \geq 0 & i \in I_N \cup I_B
\end{aligned}
$$

$A = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$

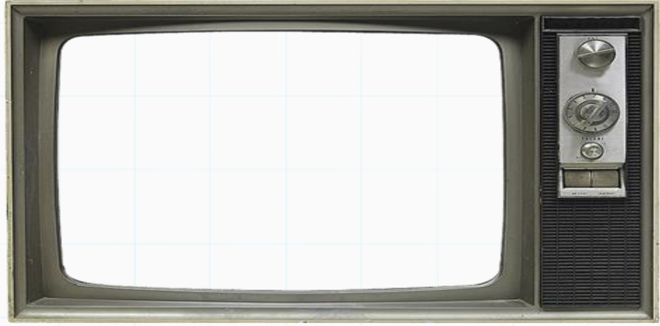
$I_N = \{j \mid a_j \in N\}$ - índice das variáveis não básicas

$I_B = \{j \mid a_j \in B\}$ - índice das variáveis básicas

- Chamamos de <u>formato padrão</u> em relação a uma base B

Sabemos que cada solução básica equivale a um vértice do poliedro e que a solução ótima está num vértice

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

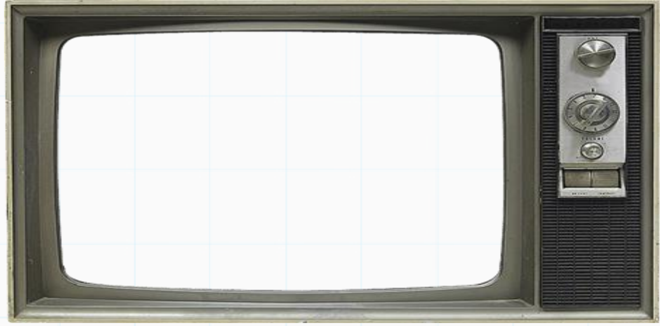
Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

Seja X_{Bu} a variável fracionária na solução (ou uma delas)

$$x_{B_u} = \overline{x}_{B_u} - \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j$$

Cortes Genéricos

- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

Seja X_{Bu} a variável fracionária na solução (ou uma delas)

$$x_{B_u} = \overline{x}_{B_u} - \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j$$

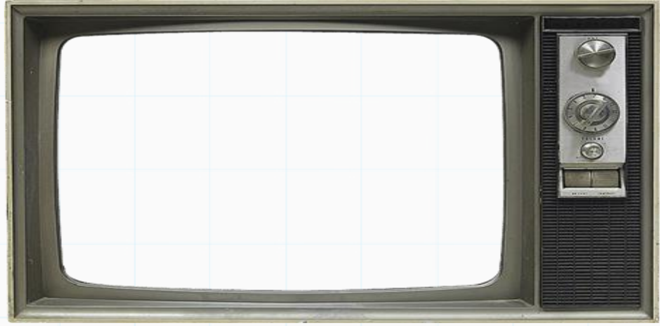
Vamos aplicar o procedimento C-G

$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \overline{x}_{B_u} \quad (1)$$

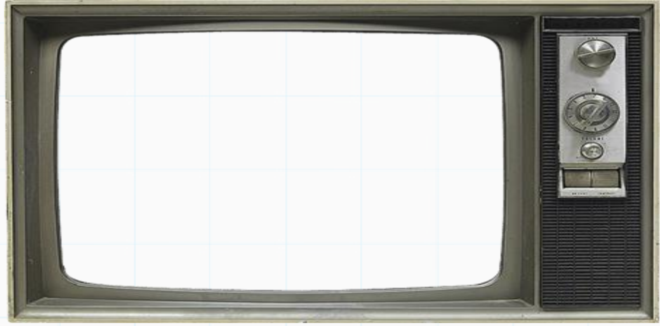
$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$



Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

Seja X_{Bu} a variável fracionária na solução (ou uma delas)

$$x_{B_u} = \overline{x}_{B_u} - \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j$$

Vamos aplicar o procedimento C-G

$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \overline{x}_{B_u} \quad (1)$$

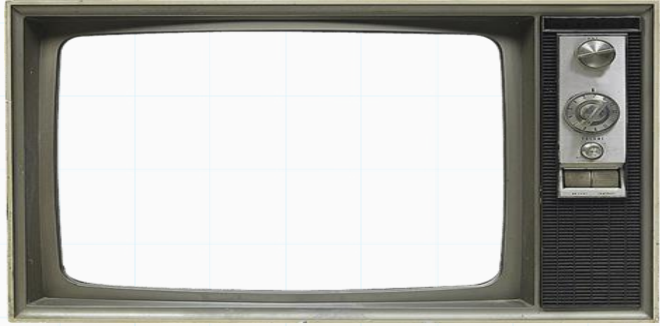
$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \overline{x}_{B_u}$$

var. posit.

vamos supor os y_{uj} positivos

Deixa mais largo

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

Seja X_{Bu} a variável fracionária na solução (ou uma delas)

$$x_{B_u} = \overline{x}_{B_u} - \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j$$

Vamos aplicar o procedimento C-G

$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \overline{x}_{B_u} \quad (1)$$

$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \overline{x}_{B_u}$$

var. posit.

vamos supor os y_{uj} positivos

Deixa mais largo

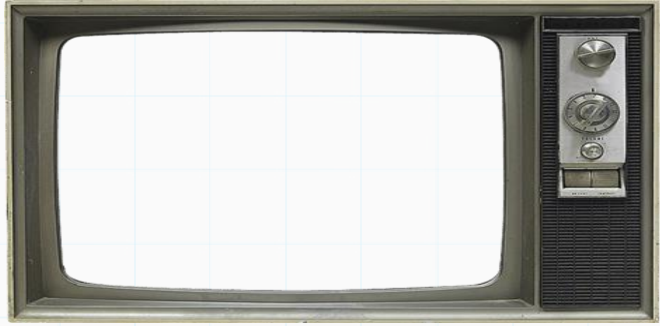
$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \lfloor \overline{x}_{B_u} \rfloor$$

(2)

var. e coef. inteiros

Deixa mais acoxado

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

Seja X_{Bu} a variável fracionária na solução (ou uma delas)

$$x_{B_u} = \bar{x}_{B_u} - \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j$$

Vamos aplicar o procedimento C-G

$$\boxed{x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \bar{x}_{B_u}} \quad (1)$$

$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \bar{x}_{B_u}$$

var. posit.

$$\boxed{x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{x}_{B_u} \rfloor}$$

var. e coef. inteiros

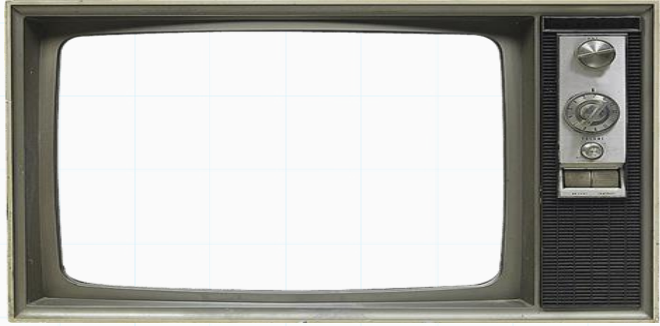
(2)

Somando (1) com (2) (x-1):

$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \bar{x}_{B_u}$$

$$-x_{B_u} - \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \geq -\lfloor \bar{x}_{B_u} \rfloor$$

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

Seja X_{Bu} a variável fracionária na solução (ou uma delas)

$$x_{B_u} = \bar{x}_{B_u} - \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j$$

Vamos aplicar o procedimento C-G

$$\boxed{x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \bar{x}_{B_u}} \quad (1)$$

$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \bar{x}_{B_u}$$

var. posit.

$$\boxed{x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \lfloor \bar{x}_{B_u} \rfloor} \quad (2)$$

var. e coef. inteiros

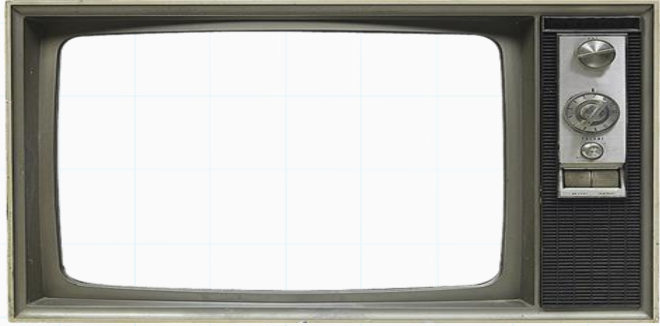
Somando (1) com (2) (x-1):

$$\cancel{x_{B_u}} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \bar{x}_{B_u}$$

$$-\cancel{x_{B_u}} - \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \geq -\lfloor \bar{x}_{B_u} \rfloor$$

$$\sum_{j \in I_N} (y_{uj} - \lfloor y_{uj} \rfloor) x_j \geq \bar{x}_{B_u} - \lfloor \bar{x}_{B_u} \rfloor$$

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

Seja X_{Bu} a variável fracionária na solução (ou uma delas)

$$x_{B_u} = \overline{x}_{B_u} - \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j$$

Vamos aplicar o procedimento C-G

$$\boxed{x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \overline{x}_{B_u}} \quad (1)$$

$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \overline{x}_{B_u}$$

var. posit.

$$\boxed{x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \lfloor \overline{x}_{B_u} \rfloor}$$

var. e coef. inteiros

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

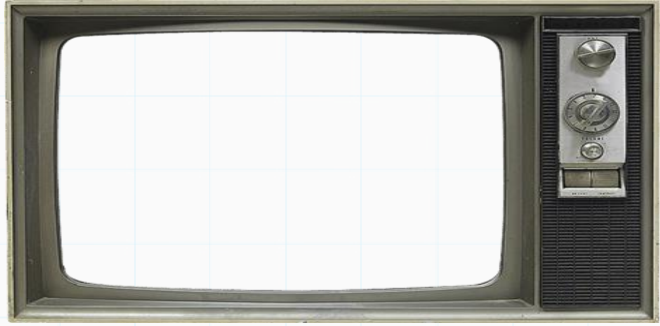
Somando (x-1):

$$\cancel{x_{B_u}} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \overline{x}_{B_u}$$

$$-\cancel{x_{B_u}} - \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \geq -\lfloor \overline{x}_{B_u} \rfloor$$

$$\sum_{j \in I_N} \underbrace{\boxed{(y_{uj} - \lfloor y_{uj} \rfloor)}}_{f_{uj}} x_j \geq \underbrace{\boxed{\overline{x}_{B_u} - \lfloor \overline{x}_{B_u} \rfloor}}_{f_{u0}}$$

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

Seja X_{Bu} a variável fracionária na solução (ou uma delas)

$$x_{B_u} = \overline{x}_{B_u} - \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j$$

Vamos aplicar o procedimento C-G

$$\boxed{x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \overline{x}_{B_u}} \quad (1)$$

$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \overline{x}_{B_u}$$

var. posit.

$$\boxed{x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \lfloor \overline{x}_{B_u} \rfloor}$$

var. e coef. inteiros

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Somando (x-1):

$$\cancel{x_{B_u}} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \overline{x}_{B_u}$$

$$-\cancel{x_{B_u}} - \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \geq -\lfloor \overline{x}_{B_u} \rfloor$$

$$\sum_{j \in I_N} \underbrace{\boxed{(y_{uj} - \lfloor y_{uj} \rfloor)}}_{f_{uj}} x_j \geq \underbrace{\boxed{\overline{x}_{B_u} - \lfloor \overline{x}_{B_u} \rfloor}}_{f_{u0}}$$

$$\sum_{j \in I_N} f_{uj} x_j \geq f_{u0}$$

onde

$$0 \leq f_{uj} < 1$$

$$0 < f_{u0} < 1$$

Cortes Genéricos

- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Seja B a base ótima da relaxação, temos que:

Seja X_{Bu} a variável fracionária na solução (ou uma delas)

$$x_{B_u} = \overline{x}_{B_u} - \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j$$

Vamos aplicar o procedimento C-G

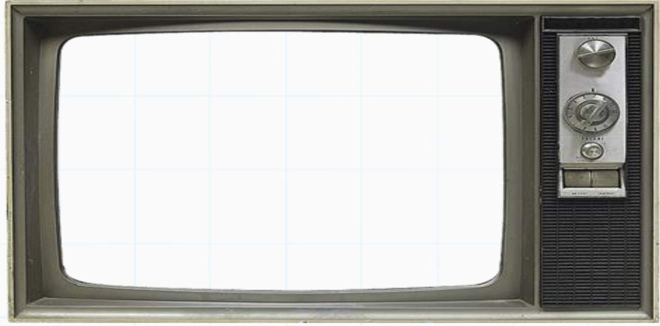
$$\boxed{x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \overline{x}_{B_u}} \quad (1)$$

$$x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \overline{x}_{B_u}$$

var. posit.

$$\boxed{x_{B_u} + \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \leq \lfloor \overline{x}_{B_u} \rfloor}$$

var. e coef. inteiros



$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

$$\sum_{j \in I_N} f_{uj} x_j \geq f_{u0}$$

onde

$$0 \leq f_{uj} < 1$$

$$0 < f_{u0} < 1$$

Somando (x-1):

$$\cancel{x}_{B_u} + \sum_{j \in I_N} y_{uj} x_j = \overline{x}_{B_u}$$

$$-\cancel{x}_{B_u} - \sum_{j \in I_N} \lfloor y_{uj} \rfloor x_j \geq -\lfloor \overline{x}_{B_u} \rfloor$$

$$\sum_{j \in I_N} \underbrace{\boxed{(y_{uj} - \lfloor y_{uj} \rfloor)}}_{f_{uj}} x_j \geq \underbrace{\boxed{\overline{x}_{B_u} - \lfloor \overline{x}_{B_u} \rfloor}}_{f_{u0}}$$

porque corta o ponto ótimo fracionário do PPL ?

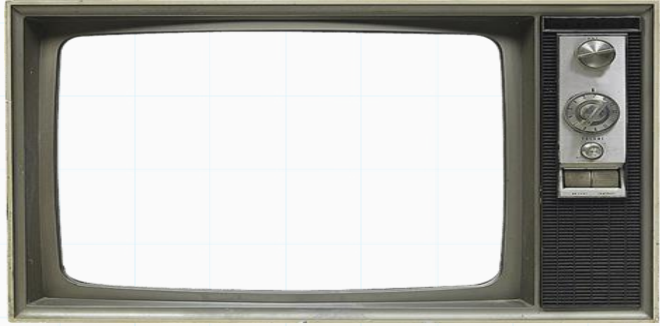
Cortes Genéricos

- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$



Ex:

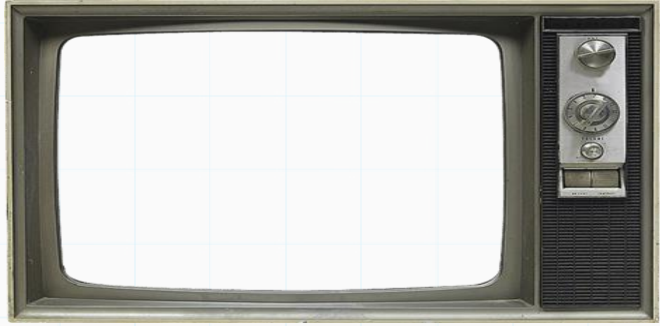
$$\max 3x_1 + 4x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 11$$

$$7x_1 + 2x_2 \leq 21$$

$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

Cortes Genéricos



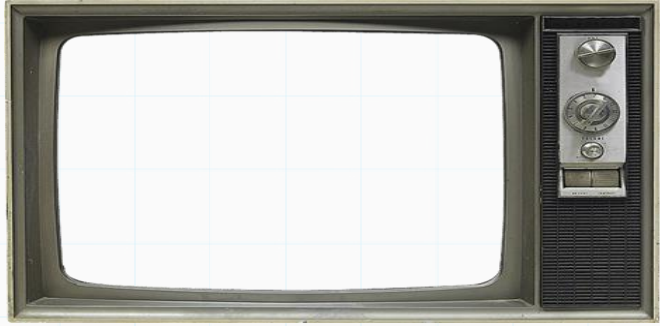
- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Ex:

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j \\ \text{s.a.}\ & x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j, \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Ex:

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

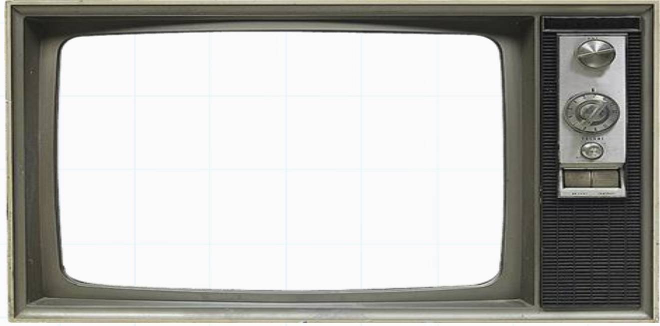
$$\begin{aligned} \max\ & \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j \\ \text{s.a.}\ & x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j, \\ & x_j \geq 0 \end{aligned}$$

Aplicando o SIMPLEX descobrimos base ótima I_B= {1,2} com PPL na forma base:

$$\begin{aligned} \max\ & \frac{317}{13} - \frac{25}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4 \\ & x_1 = \frac{31}{13} + \frac{1}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4 \\ & x_2 = \frac{56}{13} - \frac{7}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

repare que os custos estão negativos, logo otimalidade

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Ex:

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \le 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 \le 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \ge 0$$

Aplicando o SIMPLEX descobrimos base ótima I_B= {1,2} com PPL na forma base:

$$\max \frac{317}{13} - \frac{25}{13} x_3 - \frac{2}{13} x_4$$

C-G

$$\boxed{x_1 = \frac{31}{13} + \frac{1}{13} x_3 - \frac{2}{13} x_4}$$

$$x_2 = \frac{56}{13} - \frac{7}{13} x_3 + \frac{1}{13} x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

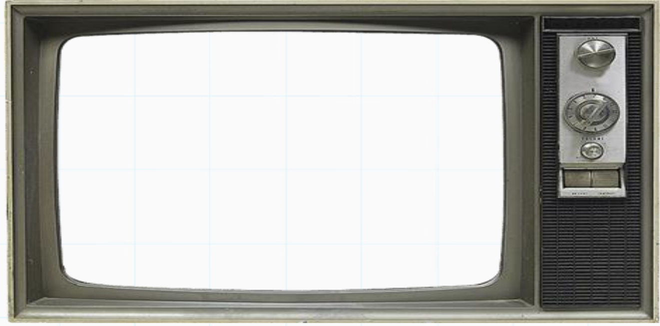
$$x_1 - \frac{1}{13} x_3 + \frac{2}{13} x_4 = \frac{31}{13}$$

$$x_1 \boxed{-} \lceil 0, \ldots \rceil x_3 + \lfloor 0, \ldots \rfloor x_4 \le \frac{31}{13}$$

tornar coef. inteiros

Mais largo

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Ex:

$$\max\ 3x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 11$$
$$7x_1 + 2x_2 \leq 21$$
$$x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$$

$$\max\ 3x_1 + 4x_2$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 11$$
$$7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$\max\ \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$
$$\text{s.a.}\quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$
$$x_j \geq 0$$

Aplicando o SIMPLEX descobrimos base ótima I_B= {1,2} com PPL na forma base:

$$\max\ \frac{317}{13} - \frac{25}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4$$

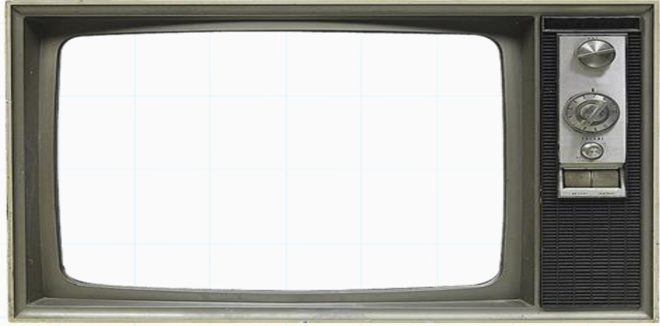
C-G

$$\boxed{x_1 = \frac{31}{13} + \frac{1}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4}$$
$$x_2 = \frac{56}{13} - \frac{7}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 - \frac{1}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 = \frac{31}{13}$$
$$x_1 \boxed{-} \lceil 0, \ldots \rceil x_3 + \lfloor 0, \ldots \rfloor x_4 \leq \frac{31}{13}$$
$$x_1 - x_3 \leq \frac{31}{13}$$

tornar coef. inteiros

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Ex:

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Aplicando o SIMPLEX descobrimos base ótima I_B= {1,2} com PPL na forma base:

$$\max \ \frac{317}{13} - \frac{25}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4$$

C-G

$$\boxed{x_1 = \frac{31}{13} + \frac{1}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4}$$

$$x_2 = \frac{56}{13} - \frac{7}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 - \frac{1}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 = \frac{31}{13}$$

$$x_1 \boxed{-} \lceil 0, \ldots \rceil x_3 + \lfloor 0, \ldots \rfloor x_4 \leq \frac{31}{13}$$

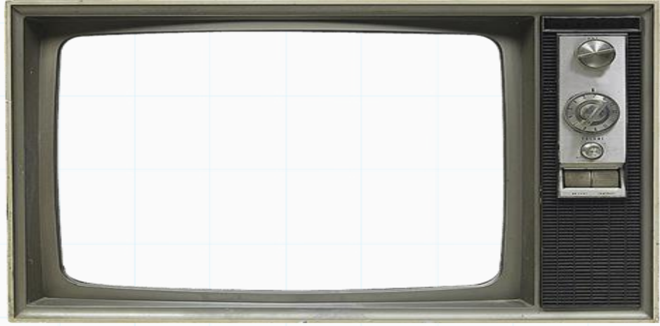
tornar coef. inteiros

$$x_1 - x_3 \leq \frac{31}{13}$$

$$x_1 - x_3 \leq \lfloor 2, \ldots \rfloor$$

Mais acoxado

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Ex:

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Aplicando o SIMPLEX descobrimos base ótima I_B= {1,2} com PPL na forma base:

$$\max \ \frac{317}{13} - \frac{25}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4$$

C-G

$$\boxed{x_1 = \frac{31}{13} + \frac{1}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4}$$

$$x_2 = \frac{56}{13} - \frac{7}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 - \frac{1}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 = \frac{31}{13}$$

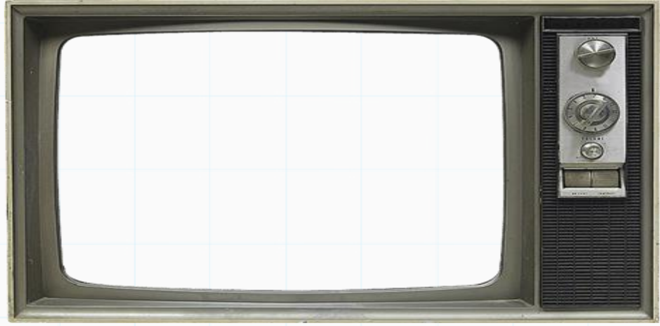
$$x_1 \boxed{-} \lceil 0, \ldots \rceil x_3 + \lfloor 0, \ldots \rfloor x_4 \leq \frac{31}{13}$$

$$x_1 - x_3 \leq \frac{31}{13}$$

$$x_1 - x_3 \leq \lfloor 2, \ldots \rfloor$$

$$x_1 - x_3 \leq 2$$

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Ex:

$$\begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ & x_1, x_2 \in \mathbb{Z} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & 3x_1 + 4x_2 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 = 11 \\ & 7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Aplicando o SIMPLEX descobrimos base ótima I_B= {1,2} com PPL na forma base:

$$\max \frac{317}{13} - \frac{25}{13} x_3 - \frac{2}{13} x_4$$

C-G

$$\boxed{x_1 = \frac{31}{13} + \frac{1}{13} x_3 - \frac{2}{13} x_4}$$

$$x_2 = \frac{56}{13} - \frac{7}{13} x_3 + \frac{1}{13} x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

$$\boxed{x_1 - \frac{1}{13} x_3 + \frac{2}{13} x_4 = \frac{31}{13}} \quad (1)$$

$$x_1 \boxed{-} \lceil 0, \ldots \rceil x_3 + \lfloor 0, \ldots \rfloor x_4 \leq \frac{31}{13}$$

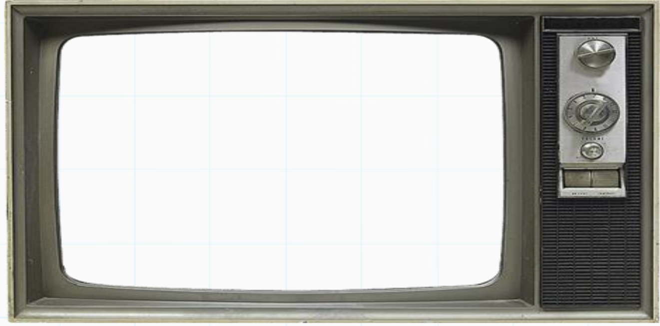
$$x_1 - x_3 \leq \frac{31}{13}$$

$$x_1 - x_3 \leq \lfloor 2, \ldots \rfloor$$

$$\boxed{x_1 - x_3 \leq 2} \quad (2)$$

Somando (1) e (2) (x-1):

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j) x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij} x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Somando (x-1):

$$x_1 - \frac{1}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 = \frac{31}{13}$$

$$-x_1 + x_3 \geq -2$$

corte C-G

$$\boxed{\frac{12}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 \geq \frac{5}{13}}$$

corta solução ótima fracionária

$$\max \quad \frac{317}{13} - \frac{25}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4$$

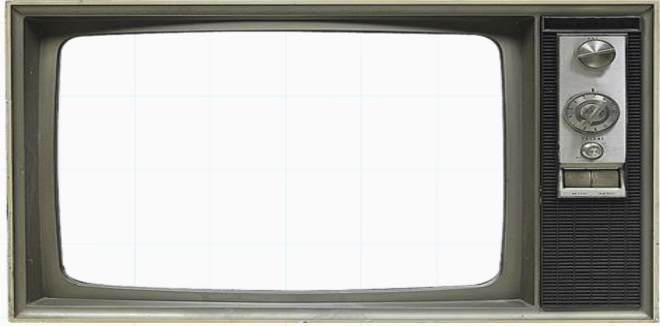
$$x_1 = \frac{31}{13} + \frac{1}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4$$

$$x_2 = \frac{56}{13} - \frac{7}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

Cortes Genéricos

- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL



Somando (x-1):

$$x_1 - \frac{1}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 = \frac{31}{13}$$

$$-x_1 + x_3 \geq -2$$

corte C-G

$$\boxed{\frac{12}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 \geq \frac{5}{13}}$$

corta solução ótima fracionária

$$\max \ \frac{317}{13} - \frac{25}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4$$

$$x_1 = \frac{31}{13} + \frac{1}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4$$

$$x_2 = \frac{56}{13} - \frac{7}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

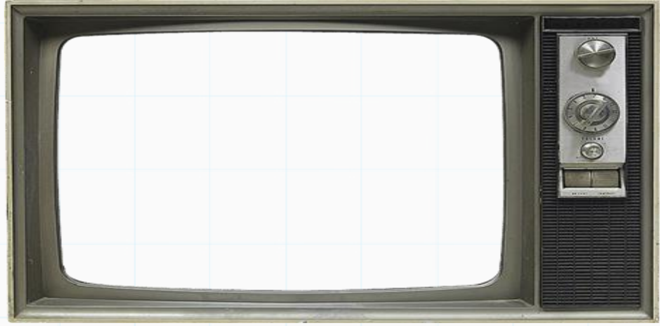
$$\max \ \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j)x_j$$

$$\text{s.a.} \ \ x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij}x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

Como do lado esquerdo só aparecem variáveis não básicas e do lado direito o valor é sempre maior que zero, o corte C-G sempre corta a solução fracionária

Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

Somando (x-1):

$$x_1 - \frac{1}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 = \frac{31}{13}$$

$$-x_1 + x_3 \geq -2$$

corte C-G

$$\boxed{\frac{12}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 \geq \frac{5}{13}}$$

$$\max \quad \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j)x_j$$

$$\text{s.a.} \quad x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij}x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

corta solução ótima fracionária

$$\max \ \frac{317}{13} - \frac{25}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4$$

$$x_1 = \frac{31}{13} + \frac{1}{13}x_3 - \frac{2}{13}x_4$$

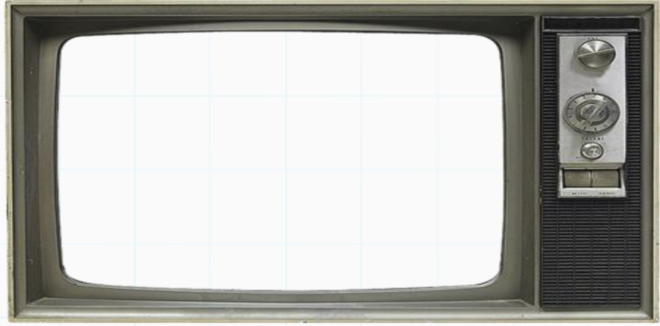
$$x_2 = \frac{56}{13} - \frac{7}{13}x_3 + \frac{1}{13}x_4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}$$

insere nova restrição na solução

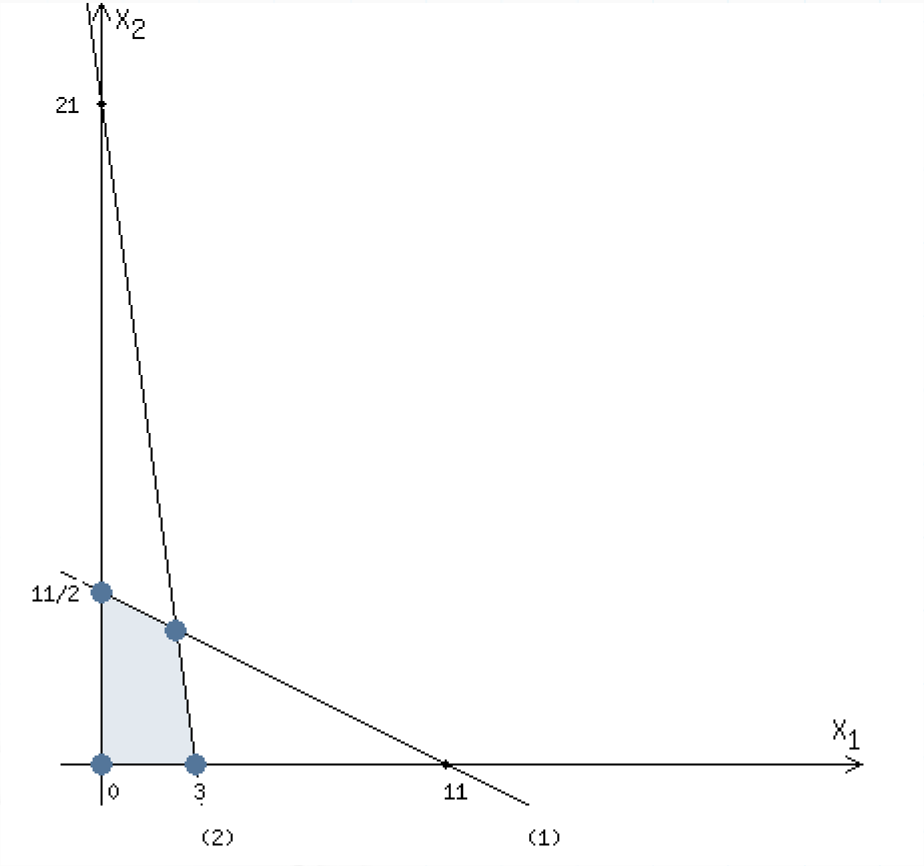
$$\frac{12}{13}x_3 + \frac{2}{13}x_4 - x_5 = \frac{5}{13}$$

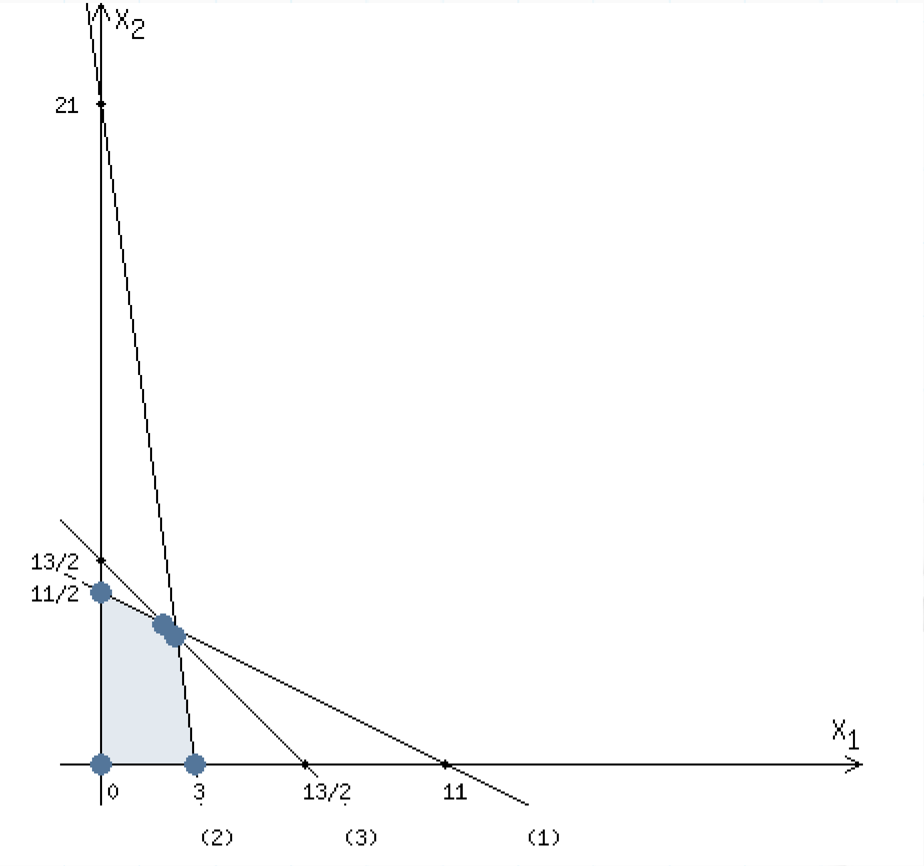
Cortes Genéricos



- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL

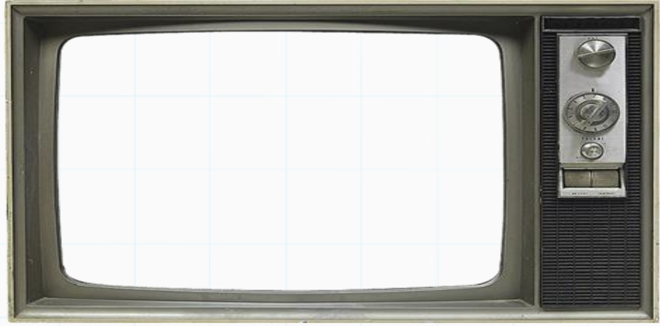
Graficamente:





Exercício

- Cortes de Chvatal-Gomery aplicados no ótimo do PPL



E se gerarmos mais um corte CG no exemplo apresentado. Veja que agora aplicando o SIMPLEX descobrimos base ótima $I_B = \{1,2,4\}$ com PPL na forma base:

$$\max\ 24 - x_3 - x_5$$

$$x_1 = 2 + x_3 - x_5$$

$$\boxed{x_2 = \frac{9}{2} - x_3 + \frac{1}{2}x_5}$$

$$x_4 = \frac{5}{2} - 6x_3 + \frac{13}{2}x_5$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{Z}$$

$$\max\ \bar{z} + \sum_{j \in I_N} (c_j - z_j)x_j$$

$$\text{s.a.}\ x_{B_i} = \bar{x}_{B_i} - \sum_{j \in I_N} y_{ij}x_j,$$

$$x_j \geq 0$$

E ai continua o método....

Até a próxima