EXTRACTION DES COURBES DISCOUNT ET FORWARD DANS LE CONTEXTE DU MULTI-COURBE

14/03/2023

SOMMAIRE

1. Stripping de courbes de taux ?

- C’est la procédure qui permet d’extraire des courbes de taux (de discount et de forward) à partir d’instruments au pair disponibles dans le marché et ordonnés dans le temps.
- Le choix des instruments est libre mais, les instruments liquides sont les plus utilisés.

2. Courbe de discount :

- La courbe de discount, ou la courbe d'actualisation, est utilisée pour actualiser les flux à une date donnée.
- Un flux F payé à la date T a pour valeur en t :

$$F \times B(t,T)$$

- $B(t,T)$ est appelé facteur d'actualisation. Par définition :

$$B(t,T) = E_t^Q\left[\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)\right]$$

E_t^Q est l'espérance sous la mesure risque-neutre sachant la filtration à l'instant t.

- Stripper la courbe de discount revient à définir la fonction suivante :

$$t \to B(0,t)$$

- Pour chaque devise, il existe au moins un indice OIS sur lequel portent les instruments utilisés pour stripper la courbe de discount.
- Exemples :
  - La courbe de discount EUR est strippée en utilisant les instruments sur ESTER;
  - La courbe de discount USD est strippée en utilisant les instruments sur SOFR;

3. Courbe de forward :

- La courbe de forward, ou la courbe de projection, est utilisée pour déterminer les flux variables à des dates données dans le futur.
- Le taux forward sur un taux portant sur la période $[T, S]$ a pour valeur en t :

$$F(t, T, S)$$

- Stripper la courbe de forward $3M$ revient à définir la fonction suivante :

$$t \rightarrow F(0, t, t + 3M)$$

- Le taux forward instantané est donné par :

$$f(t, T) = \lim_{S \rightarrow T} F(t, T, S)$$

- Si l'indice sur lequel porte le forward est un indice OIS :
  - Le taux forward peut s'exprimé en utilisant la courbe de discount :

$$F(t, T, S) = \frac{1}{\delta(T, S)} \times \left(\frac{B(t, T)}{B(t, S)} - 1\right)$$

  - Le zéro-coupon peut s'exprimer en utilisant le taux forward instantané :

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f(t, s) ds\right)$$

4. Framework multi-courbe :

- Quelle est la différence entre les deux stratégies suivantes :
  - D'une part, prêter N entre 0 et $6M$ au taux $F(0,0,6M)$.
  - Celui qui a prêté récupère à $6M$:

$$\mathrm{N} \times \left(1 + \delta(0{,}6M) \times F(0,0,6M)\right)$$

  - D'autre part :
    1. Prêter N entre 0 et $3M$ au taux $F(0,0,3M)$;
       - Celui qui a prêté récupère à $3M$:

$$\mathrm{N} \times \left(1 + \delta(0{,}3M) \times F(0{,}0{,}3M)\right)$$

    2. Prêter $N \times \left(1 + \delta(0{,}3M) \times F(0{,}0{,}3M)\right)$ au taux $F(0,3M,6M)$.
       - Celui qui a prêté récupère à $6M$:

$$N \times \left(1 + \delta(0{,}3M) \times F(0{,}0{,}3M)\right) \times \left(1 + \delta(3M,6M) \times F(0{,}3M,6M)\right)$$

- Est-ce qu'on a ?

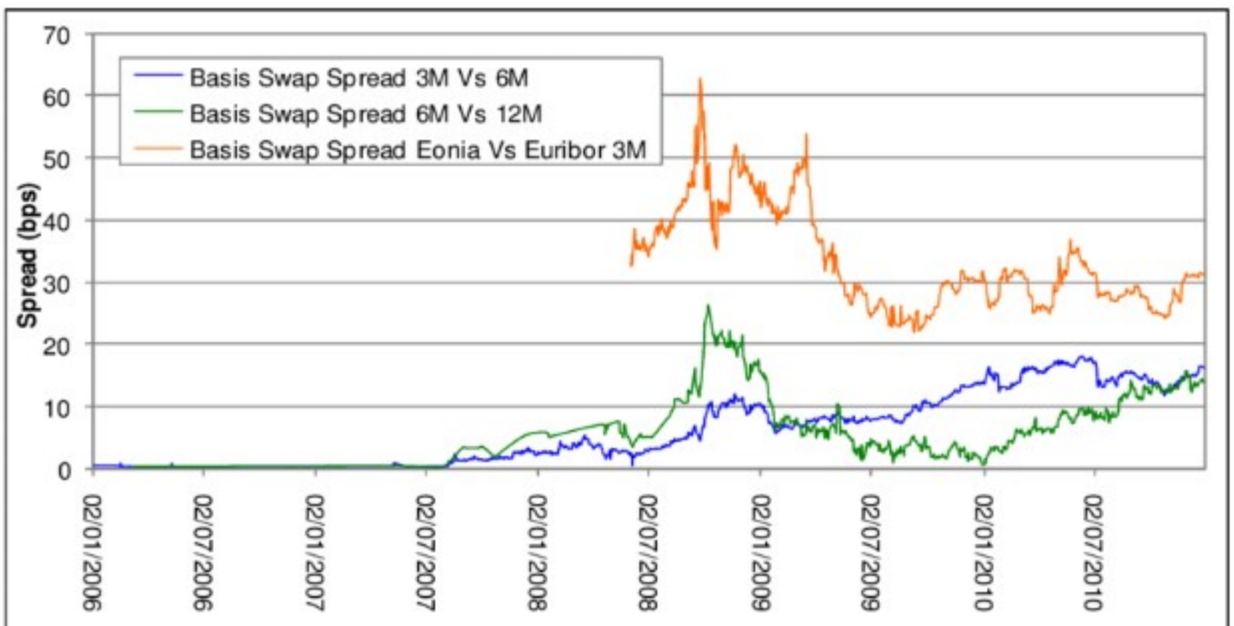
$$\left(1 + \delta(0{,}6M) \times F(0,0,6M)\right) = \left(1 + \delta(0{,}3M) \times F(0{,}0{,}3M)\right) \times \left(1 + \delta(3M,6M) \times F(0{,}3M,6M)\right)$$

  - Oui, dans le contexte mono-courbe;
  - Non, dans le contexte multi-courbe.

4. Framework multi-courbe (suite) :

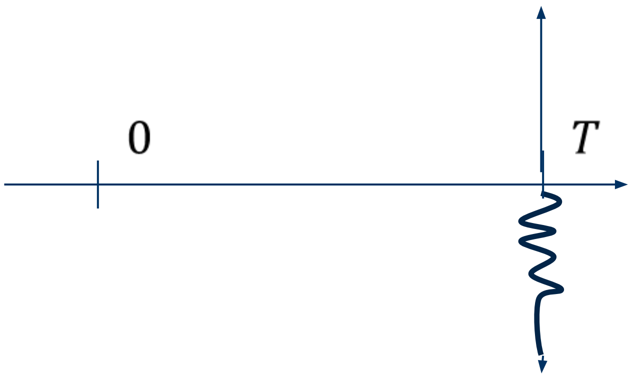
- Le contexte mono-courbe était le standard jusqu'à la crise de 2008.
- A partir de 2008, la confiance entre les banques devient fragile.
- Par conséquent, un spread a été introduit entre :
  - Le taux OIS et le taux BOR principal de la devise;
  - Le taux BOR principal de la devise et les autres taux BOR.

- Exemple : Pour l'EUR, la figure suivante démontre l'évolution du spread entre les indices :



1. Dépôt :

- Il s'agit d'un placement de courte durée entre institutions financières :



- Le prix de la jambe fixe est donné par :

$$PV_F = N \times S \times \delta(0,T) \times B(0,T)$$

où S est le taux fixe.

- Le prix de la jambe flottante est donné par :

$$PV_V = N \times R \times \delta(0,T) \times B(0,T)$$

où R est le taux variable.

- Le prix du dépôt est :

$$PV_{Dépôt} = PV_V - PV_F$$

2. Futures sur taux :

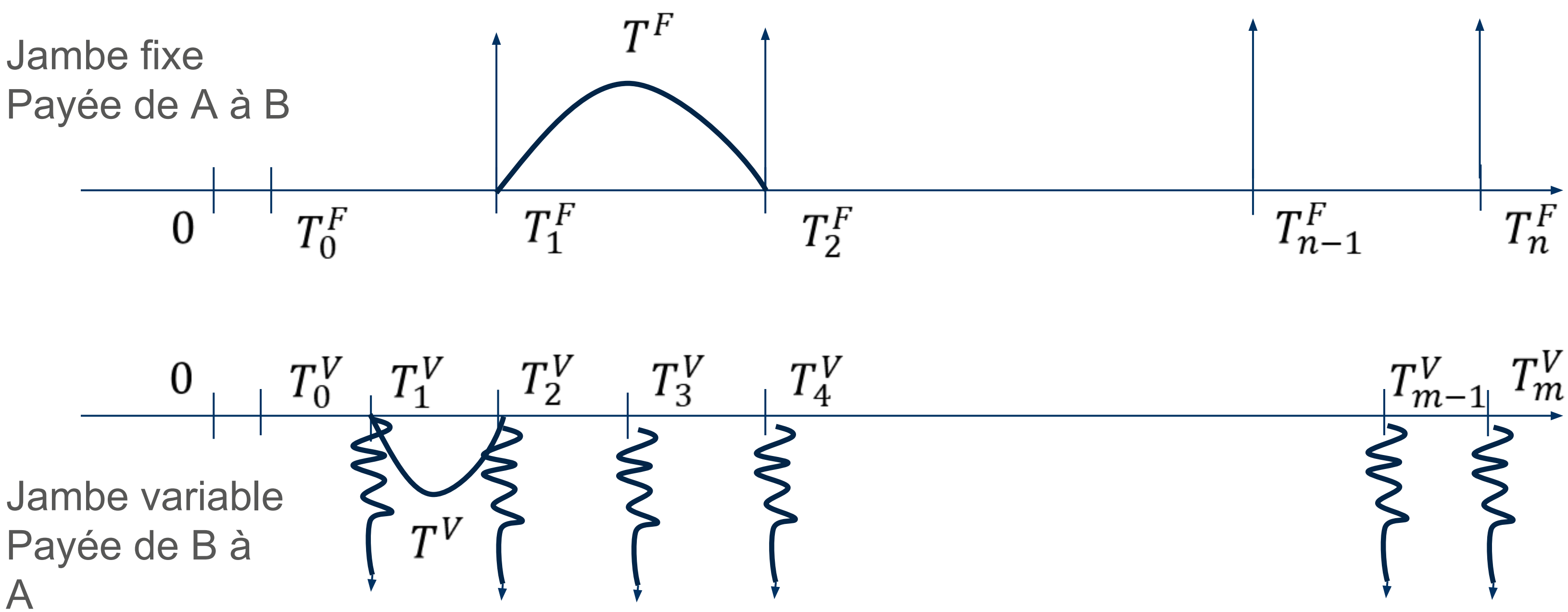
- Il s'agit de contrats sur taux interbancaires de tenor fixe.
- A l'inverse des FRA, les futures sur LIBOR sont échangés sur un marché organisé, disposant d'une chambre de compensation, et font l'objet d'appels de marge.
- Le prix quotté d'un contrat future s'exprime comme :

$$\mathbf{100 \times (1 - \delta(T_s, T_e) \times R)}$$

où R est le taux sur la période $[T_s, T_e]$ et T_s et T_e sont les dates de début et de fin du Future respectivement (ce sont des dates IMM en général).

3. Swaps de taux :

- Un swap de taux est un contrat par lequel deux contreparties A et B s'engagent, pendant une durée donnée, à s'échanger des flux à taux fixe contre des flux à taux variable.
- Dans un swap, si la contrepartie A paye le taux fixe à B, le swap est dit payeur du point de vue de A. Du point de vue de B, le swap est dit receveur.
- La jambe fixe est l'ensemble de flux fixes payés.
- La jambe variable est l'ensemble de flux associé au taux variable.
- Exemple :



3. Swaps de taux (suite) :

- Le montant des flux échangés est calculé proportionnellement à un notionnel N.
- Les flux fixes sont déterminés à partir d'un taux fixe S.
- Les flux variables sont généralement déterminés à partir de l'observation (ou une combinaisons d'observations sur une période) d'un taux monétaire.
- La valeur de la jambe fixe s'obtient en actualisant l'ensemble des flux fixes :

$$PV_F = N \sum_{i=1}^{n} S \times \delta\left(T_{i-1}^F, T_i^F\right) \times B\left(0, T_i^F\right)$$

- La valeur de la jambe flottante s'obtient en actualisant l'ensemble des flux variables :

$$PV_V = N \sum_{j=1}^{m} R_j \times \delta\left(T_{j-1}^V, T_j^V\right) \times B\left(0, T_j^V\right)$$

- Le prix du swap payeur est :

$$PV_{Swap} = PV_V - PV_F$$

- Au moment de son émission, le swap doit être équitable pour les deux contreparties. Le taux fixe du swap est donc choisi de telle sorte que la valeur actuelle des deux jambes soient égales (On dit que le swap est au pair). Cela nous fournit l'expression du taux fixe S en fonction des zéro-coupons et c'est la valeur qui est quottée sur le marché :

$$S = \frac{\sum_{j=1}^{m} R_j \times \delta\left(T_{j-1}^V, T_j^V\right) \times B\left(0, T_j^V\right)}{\sum_{i=1}^{n} \delta\left(T_{i-1}^F, T_i^F\right) \times B\left(0, T_i^F\right)}$$

3. SUR LES INDICES DE TAUX

- Le taux variable dépend de la nature de l'indice sur lequel porte l'instrument :
- Pour un instrument sur un indice BOR, il s'agit d'un taux forward :

$$R_{\mathrm{j}} = F\left(0, T_{j-1}, T_j\right)$$

- Pour un swap sur un indice OIS, il s'agit du taux vérifiant :

$$1 + \delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \times R_{\mathrm{j}} = \prod_{T_{j-1}+1D \leq t_k \leq T_j} \left(1 + \delta(t_{k-1}, t_k) \times F(0, t_{k-1}, t_k)\right)$$

où t_k sont des jours ouvrés entre $T_{j-1} + 1D$ et T_j.

- Les taux forwards peuvent s'exprimer en fonction des zéros-coupons :

$$F(0, t_{k-1}, t_k) = \frac{1}{\delta(t_{k-1}, t_k)} \times \left(\frac{B(0, t_{k-1})}{B(0, t_k)} - 1\right)$$

- Ce qui donne :

$$1 + \delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \times R = \prod_{T_{j-1}+1D \leq t_k \leq T_j} \left(\frac{B(0, t_{k-1})}{B(0, t_k)}\right)$$

- Ou encore :

$$1 + \delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \times R = \frac{B\left(0, T_{j-1}\right)}{B\left(0, T_j\right)}$$

4. STRIPPING D'UNE COURBE DE DISCOUNT

- On se donne des swaps S_i de tenor $3M$ (commun entre la jambe flottante et la jambe fixe), pour $1 \leq i \leq N$, de maturités multiples de $3M$.
  - Le spread du swap OIS de maturité $3M$ est donné par :
$$S_1 = \frac{B(0,0) - B(0,3M)}{\delta(0,3M) \times B(0,3M)}$$
  - Le spread du swap OIS de maturité $6M$ est donné par :
$$S_2 = \frac{B(0,0) - B(0,6M)}{\delta(0,3M) \times B(0,3M) + \delta(3M,6M) \times B(0,6M)}$$
  - Et ainsi de suite…
  - A l'issue de cette étape, on a déterminé les zéros-coupons : $\left(B(0,T_i)\right)_{1 \leq i \leq N}$.
- Exemples de modélisation :
  - $B(0,t) = \exp(-y(t)t)$;
  - $B(0,t) = \exp\left(-\int_0^t f(0,s)ds\right)$.
- Exemple d'interpolation :
  - $t \to y(t)$ doit être constante par morceaux;
  - $t \to f(0,t)$ doit être constante par morceaux.
- En général, et même si la fréquence de payement est $3M$, les swaps sur l'indice OIS disponibles n'ont pas toutes les maturités multiples de $3M$.

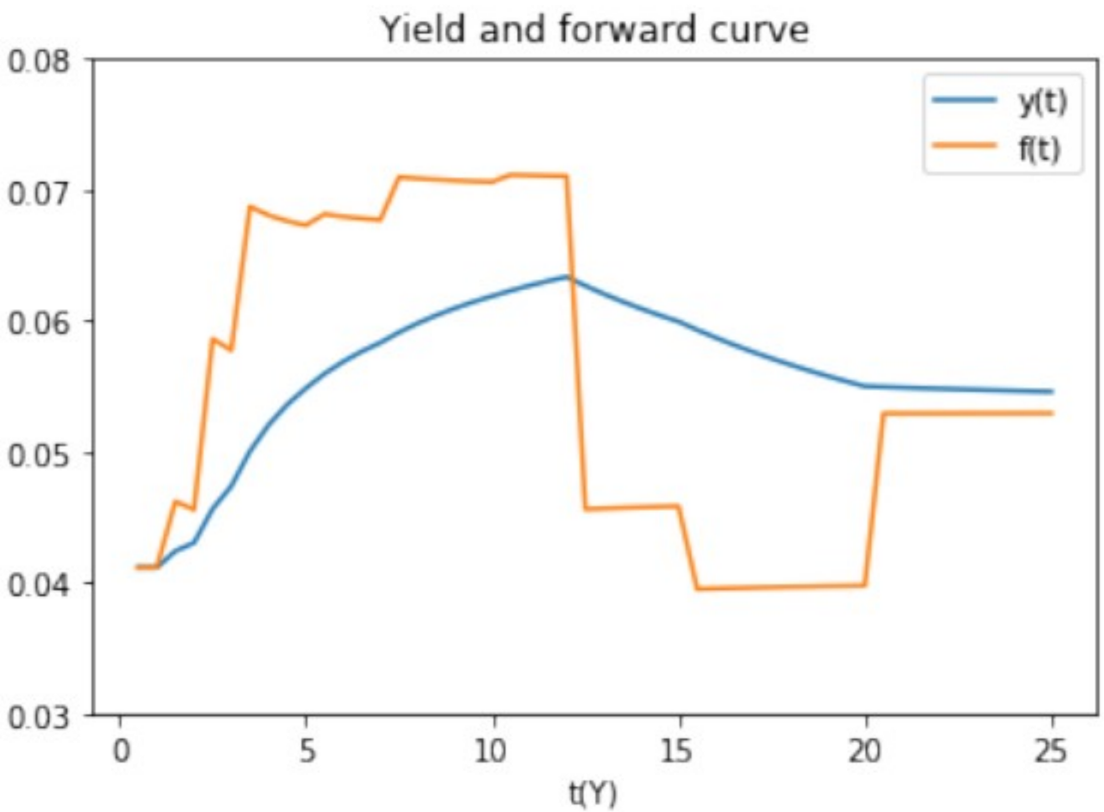
4. STRIPPING D'UNE COURBE DE DISCOUNT

- Exemple : Instruments quotté sur le marché

OIS swap 1Y	2020/11/09	0.01455
OIS swap 2Y	2021/11/08	0.01373
OIS swap 3Y	2022/11/08	0.01354
OIS swap 4Y	2023/11/08	0.01347
OIS swap 5Y	2024/11/08	0.01355
OIS swap 6Y	2025/11/10	0.01375
OIS swap 7Y	2026/11/09	0.01398
OIS swap 8Y	2027/11/08	0.01429
OIS swap 9Y	2028/11/08	0.01451
OIS swap 10Y	2029/11/08	0.01484
OIS swap 12Y	2031/11/10	0.01534
OIS swap 15Y	2034/11/08	0.01591
OIS swap 20Y	2039/11/08	0.01645
OIS swap 25Y	2044/11/08	0.01662
OIS swap 30Y	2049/11/08	0.01672
OIS swap 40Y	2059/11/10	0.01650
OIS swap 50Y	2069/11/08	0.01617

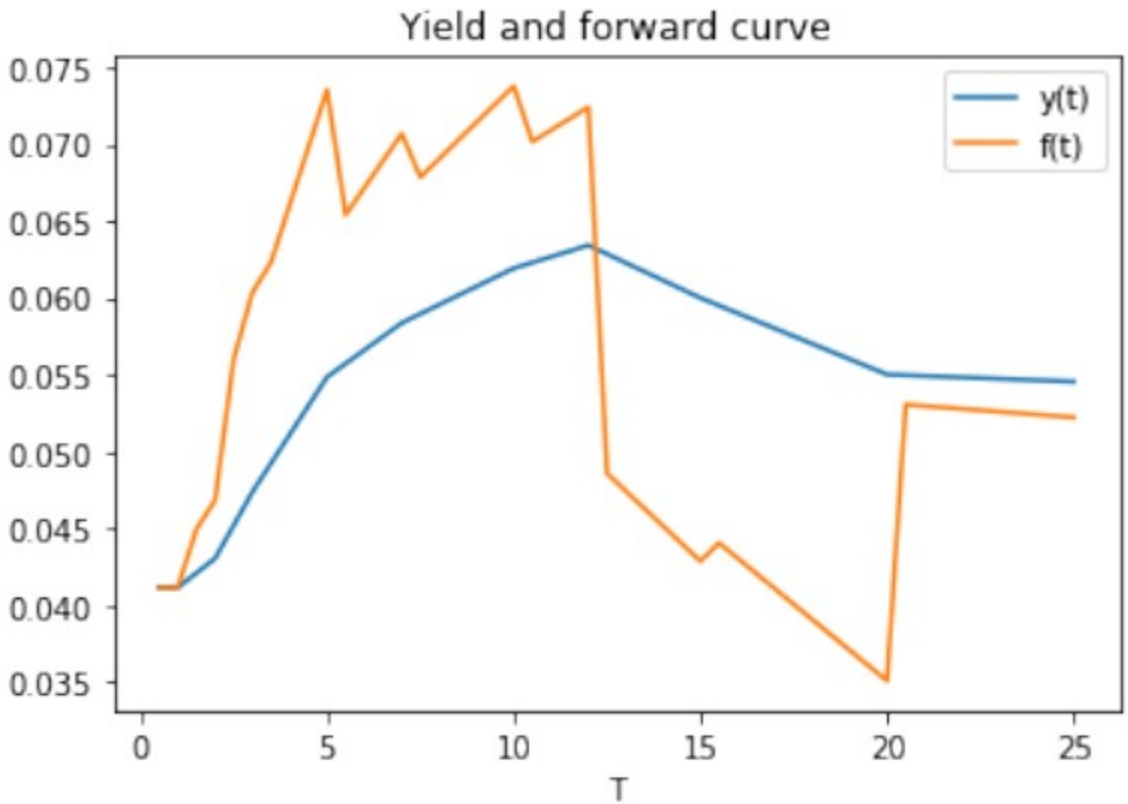
4. STRIPPING D'UNE COURBE DE DISCOUNT

- Exemple : Modélisation avec forward constant par morceaux



4. STRIPPING D'UNE COURBE DE DISCOUNT

- Exemple : Modélisation avec forward linéaire par morceaux



1. Stripping de la courbe de forward sur l'indice BOR principal :

- L'indice BOR peut-être différent d'une devise à une autre.
- Dans cette partie, on suppose que le tenor $3M$ est le tenor principal.
- On se donne des swaps S_i de tenor $3M$ (commun entre la jambe flottante et la jambe fixe), pour $1 \leq i \leq N$, de maturités multiples de $3M$.
  - Le spread du swap BOR de maturité $3M$ est donné par :

$$S_1 = \frac{\delta(0{,}3M) \times F(0{,}0{,}3M) \times B(0{,}3M)}{\delta(0{,}3M) \times B(0, 3M)}$$

  - Le spread du swap BOR de maturité $6M$ est donné par :

$$S_2 = \frac{\delta(0{,}3M) \times F(0{,}0{,}3M) \times B(0{,}3M) + \delta(3M, 6M) \times F(0{,}3M, 6M) \times B(0{,}6M)}{\delta(0{,}3M) \times B(0, 3M) + \delta(3M, 6M) \times B(0, 6M)}$$

  - Et ainsi de suite…
  - A l'issue de cette étape, on a déterminé les forwards : $\left(F(0, T_i, T_i + 3M)\right)_{1 \leq i \leq N}$.
- Exemples de modélisation :
  - $F(0, t, t + 3M) = F(0{,}0, 3M) \times \exp(-y_{3M}(t)t)$.
- Exemple d'interpolation :
  - $t \rightarrow y_{3M}(t)$ doit être cubique.
- En général, la courbe sur l'indice BOR $3M$ est strippée en utilisant :
  - Le dépôt $3M$;
  - Les Futures sur le moyen terme;
  - Les swaps sur le long terme.

2. Stripping de la courbe de forward sur les autres indices BOR :

- Il existe dans le marché des instruments échangeant l'indice BOR principal contre les autres indices BOR.
- Exemples de modélisation de la courbe BOR $6M$:
  - $F(0,t,t+6M) = F(0,0,6M) \times \exp(-y_{6M}(t)t)$ et $y_{6M}(t) = y_{3M}(t) + s(t)$.
- Exemple d'interpolation :
  - $t \to s(t)$ doit être cubique.

MERCI POUR VOTRE ATTENTION

canopee group