INTRODUCTION
AUX PRODUITS DE TAUX

02/11/2022

SOMMAIRE

1. Taux d'intérêt :

- Un réel qui fixe la rémunération du capital prêté versée par l'emprunteur au prêteur à la fin d'une période déterminée.
- Exemple :
  - Si le taux d'intérêt annuel est r,
  - Et on place la somme de 1€ aujourd'hui,
  - Alors, la valeur acquise par le placement dans 1 an sera $1 + r$ €.
- Les intérêts peuvent être versés pendant n périodes et k fois pendant chaque période.
- Exemple (suite) : la valeur acquise par le placement dans 1 an sera dans le cas de taux :
  - simples : $1 + \frac{r}{k} \times k \times n$ €
  - composés : $\left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k \times n}$ €
  - continue : $e^{\frac{r}{k} \times k \times n}$ €
- Ce taux n'est pas fixe. A chaque instant t, il est noté r_t.
  - Dans une période infinitésimale, la valeur de la richesse V vérifie : $V_{t+dt} = V_t(1 + r_t dt)$.
  - Puisque $dV_t = V_{t+dt} - V_t = V_t r_t dt$, alors : $V_t = V_0 \times \exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$ à l'instant t où V_0 est la richesse initiale.
  - $\exp\left(\int_0^t r_s ds\right)$ est appelé facteur de capitalisation entre 0 et t.
  - $\frac{1}{\exp\left(\int_0^t r_s ds\right)} = \exp\left(- \int_0^t r_s ds\right)$ est appelé facteur d'actualisation entre 0 et t.

1. INTRODUCTION

2. Zéro-coupon :

- Le zéro-coupon de maturité T est l'instrument financier qui verse 1 à la date T.

- Son prix $B(t,T)$ à l'instant $t \leq T$ est donné par :

$$B(t,T) = E_t^Q\left[\exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)\right]$$

E_t^Q est l'espérance sous la mesure risque-neutre sachant la filtration à l'instant t.

3. Taux zéro-coupon :

- Le taux zéro-coupon (yield) de maturité T est le taux associé aux zéro-coupon de même maturité. Il est donné à l'instant t par :
  - dans le cas continue :

$$B(t,T) = \exp\big(-Y(t,T) \times \delta(t,T)\big)$$

  - dans le cas actuariel :

$$B(t,T) = \frac{1}{\big(1 + Y(t,T)\big)^{\delta(t,T)}}$$

où $\delta(t,T)$ est la fraction de temps en année selon une convention (ACT/360 par exemple).

4. Zéro-Coupon forward :

- Pour $T < S$, le zéro-coupon forward désigne le prix à payer en T pour recevoir 1 en S. Son prix $B(t,T,S)$ à l'instant t est donné par :

$$B(t,T,S) = \frac{B(t,S)}{B(t,T)}$$

- En effet, soit la stratégie :
  - achat de K zéro-coupons de maturité T;
  - vente du zéro-coupon de maturité S.
  - le prix de cette stratégie en t est : $-KB(t,T) + B(t,S)$.
  - on déduit la valeur de K par absence d'opportunité d'arbitrage.

5. Taux forward :

- Le taux forward $F(t,T,S)$ à l'instant t vérifie :

$$B(t,T,S) = \exp\big(-F(t,T,S) \times \delta(T,S)\big)$$

- Il est facile de montrer que :

$$F(t,t,S) = -\frac{1}{\delta(T,S)} \times \ln\left(\frac{B(t,S)}{B(t,T)}\right) = -\frac{\ln\big(B(t,S)\big) - \ln\big(B(t,T)\big)}{\delta(T,S)}$$

6. Taux forward instantané :

- Le taux forward instantané est défini par :

$$f(t,T) = \lim_{S \to T} F(t,T,S)$$

- Au passage, le taux court est défini par :

$$r_t = f(t,t)$$

- Puisque :

$$F(t,t,S) = -\frac{\ln\big(B(t,S)\big) - \ln\big(B(t,T)\big)}{S-T}$$

on obtient que :

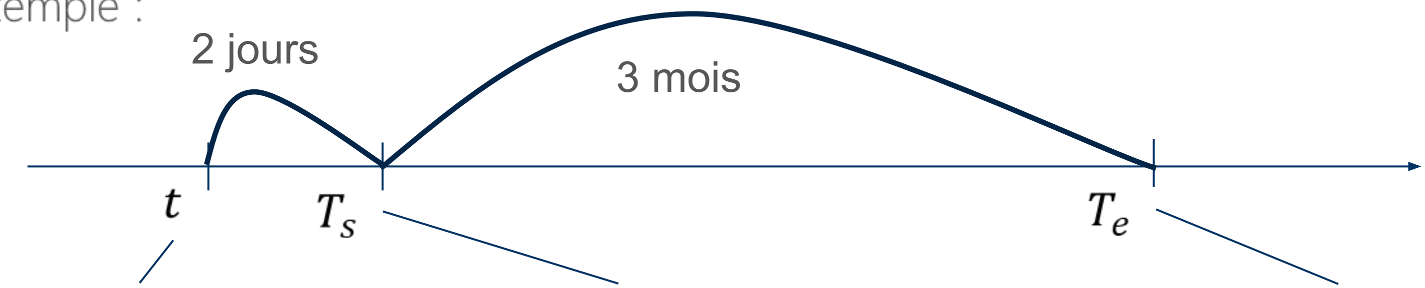
$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln\big(B(t,T)\big)}{\partial T}$$

- Il est facile de démontrer :

$$B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)ds\right)$$

1. Taux monétaire BOR :

- Les taux LIBOR et EURIBOR sont des taux de dépôt entre banques.
- Exemple :



Fixing du LIBOR 3M à un taux R

Départ de la période d'intérêt
Placement des fonds N au taux R

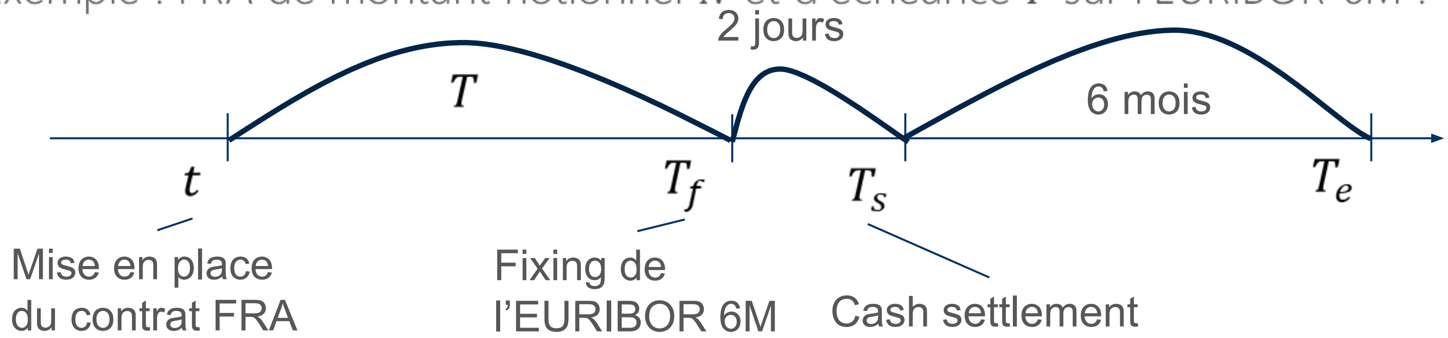
Fin de la période d'intérêts
Récupération des fonds placés N et des intérêts $\mathrm{N} \times \delta(T_s, T_e) \times R$

En résumé :

- Aujourd'hui, le LIBOR 3M fixe à une valeur R.
- La période de placement ne commence que deux jours ouvrés plus tard, à la date T_s et s'étend sur une durée de 3 mois.
- La date de fin de la période d'intérêt T_e, est éventuellement décalée si elle tombe un week-end ou un jour férié selon une convention (Modified Following par exemple).

2. Forward Rate Agreement (FRA) :

- Le FRA est un contrat forward spécifiant à terme l'échange d'un taux fixe déterminé à l'avance et d'un taux variable monétaire BOR
- Exemple : FRA de montant notionnel N et d'échéance T sur l'EURIBOR 6M :



En résumé :

- Le FRA est conclu à la date d'aujourd'hui t.
- L'échéance du FRA est la date $T_f = t + T$ (ajustée si elle tombe un week end ou jour férié). Le fixing de l'EURIBOR 6M se fera à cette date et à une valeur $\mathrm{F}(T_f\,, T_s, T_e)$, T_s et T_e définissant le début et la fin de la période d'intérêt de l'EURIBOR 6M.
- A la date t, les deux parties se mettent d'accord sur le taux fixe du FRA, noté $\mathrm{F}(t, T_s, T_e)$.
- L'échange de flux s'effectue à la date T_s de départ de l'EURIBOR 6M. Le flux net reçu par l'acheteur du FRA en T_s vaut :

$$N \times \frac{\left(\mathrm{F}\left(T_f\,, T_s, T_e\right) - \mathrm{F}(t\,, T_s, T_e)\right) \times \delta(T_s, T_e)}{1 + \delta(t, T_s) \times \mathrm{F}(t, t, T_s)}$$

3. Futures sur taux :

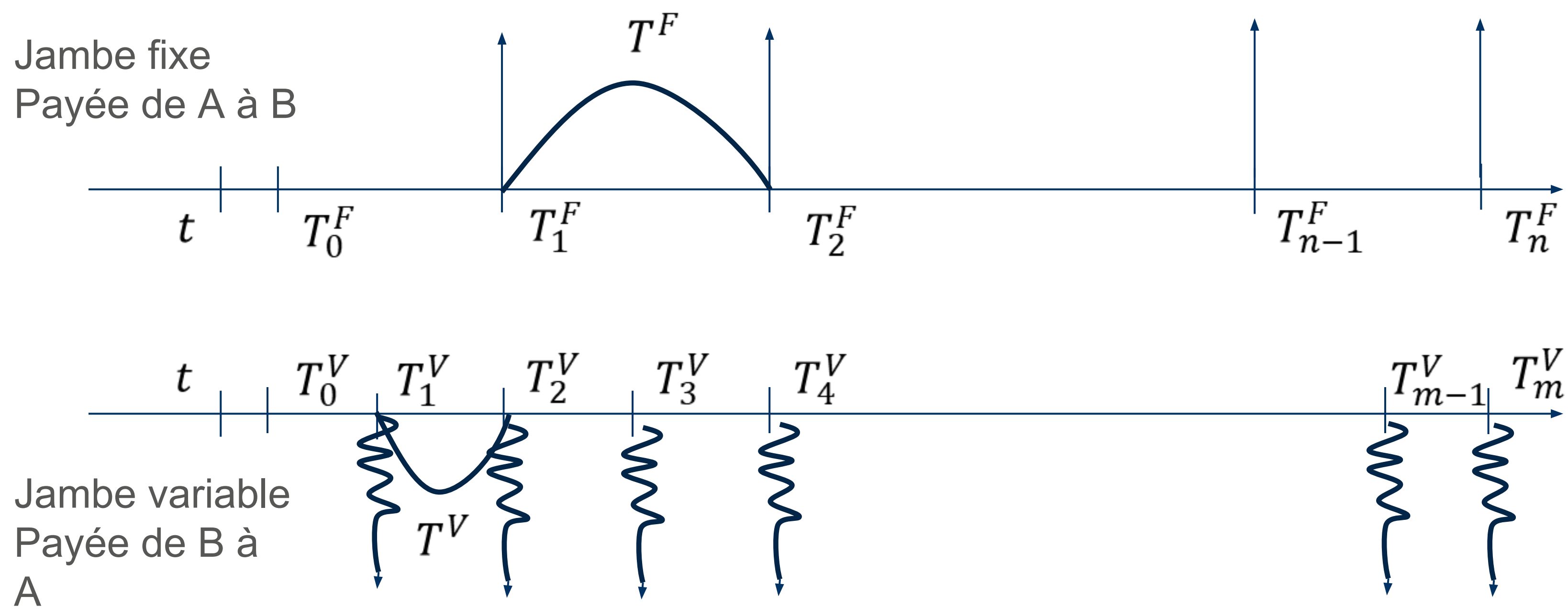
- Il s'agit de contrats sur taux interbancaires de tenor fixe.
- A l'inverse des FRA, les futures sur LIBOR sont échangés sur un marché organisé, disposant d'une chambre de compensation, et font l'objet d'appels de marge.
- Le prix coté d'un contrat future s'exprime comme :

$$100 \times \left(1 - \delta(T_s, T_e) \times F(t, T_s, T_e)\right)$$

- L'acheteur du contrat future ne décaisse pas la valeur du contrat. Il effectue un dépôt de garantie au moment de l'opération (qu'il récupère à la maturité du contrat), puis est soumis à un mark-to-market quotidien, sous forme d'appels de marge.
- Exemple :
  - Nous sommes le 30 juin 2022; nous venons de traiter $N = 10\,000$ future à 98.840 et avons effectué le dépôt de garantie exigé par la chambre de compensation.
  - Supposons que le lendemain la quote du future grimpe de $3bps$ pour atteindre 98.87 (le taux de référence du future a donc, lui, baissé de trois points de base) : cela fait augmenter notre position sur le future de $10\,000 \times 25 \times 3bps = 75$, qui va nous être versé par la chambre de compensation.
  - A l'inverse, si le lendemain la cote du future baisse de $5bps$, notre position se déprécie de $10\,000 \times 25 \times 5bps = 125$ que nous allons verser à la chambre de compensation.
  - Les montants sont versés en plus des intérêts calculés à la base d'un taux CSA.

4. Swaps de taux :

- Un swap de taux est un contrat par lequel deux contreparties A et B s’engagent, pendant une durée donnée, à s’échanger des flux à taux fixe contre des flux à taux variable.
- Dans un swap, si la contrepartie A paye le taux fixe à B, le swap est dit payeur du point de vue de A. Du point de vue de B, le swap est dit receveur.
- La jambe fixe est l’ensemble de flux fixes payés. (associé au taux fixe K).
- La jambe variable est l’ensemble de flux associé au taux variable.
- Exemple :



4. Swaps de taux (suite) :

- Le montant des flux échangés est calculé proportionnellement à un notionnel N.
- Les flux fixes sont déterminés à partir d'un taux fixe S.
- Les flux variables sont généralement déterminés à partir de l'observation (ou une combinaisons d'observations sur une période) d'un taux monétaire.
- La valeur actuelle de la jambe fixe s'obtient en actualisant l'ensemble des flux fixes :

$$PV_F(t, T_s, T_e) = N \sum_{i=1}^{n} S \times \delta\left(T_{i-1}^F, T_i^F\right) \times B\left(t, T_i^F\right)$$

- La valeur actuelle de la jambe fixe s'obtient en actualisant l'ensemble des flux fixes :

$$PV_V(t, T_s, T_e) = N \sum_{j=1}^{m} R_j \times \delta\left(T_{j-1}^V, T_j^V\right) \times B\left(t, T_j^V\right)$$

- Le prix du swap payeur est :

$$PV_{Swap}(t, T_s, T_e) = PV_V(t, T_s, T_e) - PV_F(t, T_s, T_e)$$

- Au moment de son émission, le swap doit être équitable pour les deux contreparties. Le taux fixe du swap est donc choisi de telle sorte que la valeur actuelle des deux jambes soient égales (On dit que le swap est au pair). Cela nous fournit l'expression du taux fixe S en fonction des zéro-coupons :

$$S = \frac{\sum_{j=1}^{m} R_j \times \delta\left(T_{j-1}^V, T_j^V\right) \times B\left(t, T_j^V\right)}{\sum_{i=1}^{n} \delta\left(T_{i-1}^F, T_i^F\right) \times B\left(t, T_i^F\right)}$$

4. Swaps de taux (suite) :

- C'est le taux swap qui est disponible sur le marché.
- Le taux variable dépend de la nature du swap :
  - Pour un swap BOR, il s'agit d'un taux forward :

$$R_j = F(T_{j-1} - 2D, T_{j-1}, T_j)$$

  - Pour un swap OIS, il s'agit du taux vérifiant :

$$1 + \delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \times R_j = \prod_{T_{j-1} \leq t_k \leq T_j} \left(1 + \delta(t_{k-1}, t_k) \times F(t_{k-1}, t_{k-1}, t_k)\right)$$

  où t_k sont des jours ouvrés entre T_{j-1} et T_j.

  - Pour un swap averagé, il s'agit du taux vérifiant :

$$\delta\left(T_{j-1}, T_j\right) \times R_j = \sum_{T_{j-1} \leq t_k \leq T_j} \delta(t_{k-1}, t_k) \times F(t_{k-1}, t_{k-1}, t_k)$$

  où t_k sont des jours ouvrés T_{j-1} et T_j.

- Le taux swap peut s'exprimer de la façon suivante :

$$S(t, T_s, T_e) = \frac{PV_V(t, T_s, T_e)}{LVL(t, T_s, T_e)}$$

- La quantité $LVL(t, T_s, T_e)$ est appelée le level du swap, ou encore PVBP (Price Value of a Basis Point).
- Après la crise de 2008, les swaps standards sont collatéralisés.

3. STRIPPING DES COURBES DE TAUX

- Le stripping de la courbe des taux est le processus par lequel on détermine de proche en proche les zéro-coupons (et donc la courbe zéro-coupon) en utilisant principalement les instruments de marché que nous avons déjà présentés.
- Exemple :

Algorithme de stripping en utilisant des Swaps OIS

Data : des taux Swaps OIS, $(S(0,T_0,T_i))_{1\leq i\leq N}$
Result : des zéros-coupons, $(P(0,T_i))_{1\leq i\leq N}$

$P(0,T_0) \leftarrow 1;$
$i \leftarrow 1;$
while $i \leq N$ **do**

$$P(0,T_i) = \frac{1 - S(0,T_0,T_i)\sum_{j=1}^{i-1}\delta(T_{j-1},T_j)P(0,T_j)}{1+\delta(T_0,T_i)S(0,T_0,T_i)}$$

- On se donne des maturités $(T_i)_{1\leq i\leq N}$ de swaps OIS.
- A l'issue du bootstrapping, on a déterminés les zéros-coupons : $\left(P(0,T_i)\right)_{1\leq i\leq N}$.
- Pour l'interpolation, il est possible de :
  - interpoler les valeurs de $\left(P(0,T)\right)_{Ti\leq T\leq Ti+1}$ en supposant une hypothèse sur la forme de P entre T_i et T_{i+1}.
  - calculer les valeurs $\left(y(0,T_i)\right)_{1\leq i\leq N}$ et interpoler les valeurs du yield en supposant que c'est linéaire, quadratique ou cubique par morceaux.

1. Cap et Floor :

Cap:

- Un cap est un instrument de taux dont la structure est calquée sur celle d'une jambe variable de swap.
- A chaque date T_i, le cap verse un flux égal à :

$$N \times \delta(T_{i-1}, T_i) \times (F(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i) - K)_+$$

Il s'agit d'un call de strike K sur un forward de taux.

- Un cap peut donc être vu comme un panier d'options sur un forward de taux. Chacune de ces options est appelée un caplet.
- Le prix du cap s'obtient comme la somme des prix des caplets le composant.

Floor:

- Un floor est un instrument de taux dont la structure est calquée sur celle d'une jambe variable de swap.
- A chaque date T_i, le floor verse un flux égal à :

$$N \times \delta(T_{i-1}, T_i) \times \left(\mathrm{K} - F(T_{i-1}, T_{i-1}, T_i)\right)_+$$

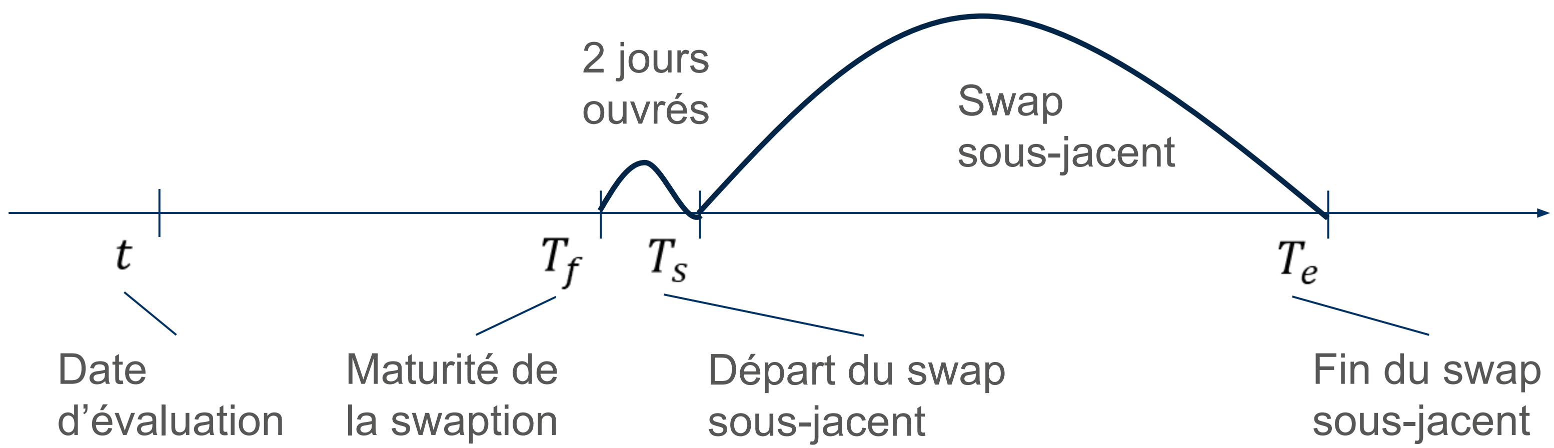
Il s'agit d'un put de strike K sur un forward de taux.

- Un floor peut donc être vu comme un panier d'options sur un forward de taux. Chacune de ces options est appelée un floorlet.
- Le prix du floor s'obtient comme la somme des prix des floorlets le composant.

2. Swaptions :

- Une swaption est une option dont le sous-jacent est un swap de taux commençant à une date future.
- Une swaption payeuse de strike K sur ce swap sous-jacent est l'option, à la date de maturité, d'entrer dans le swap payeur du taux fixe K. La swaption receveuse correspondante est l'option d'entrer dans le swap receveur du taux fixe K.
- Le payoff de la swaption payeuse de strike K est donné par :

$$\left(PV_V(t,T_s,T_e) - PV_F(t,T_s,T_e)\right)_+ = N \times LVL(t,T_s,T_e)(S(t,T_s,T_e) - K)_+$$



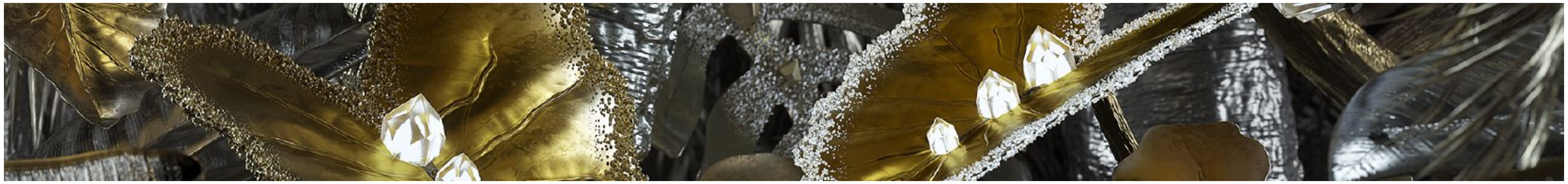
- L'évaluation des swaptions est aisée en utilisant le changement de numéraire.

3. Swaps CMS :

- Un swap CMS (Constant Maturity Swap) est un swap qui ressemble au swap de taux classique sauf que le taux de la jambe variable est un taux swap de maturité déterminée.
- Exemple :
  - La jambe fixe paye annuellement un coupon fixe;
  - La jambe variable CMS paye tous les 6 mois le taux swap 10 ans fixé deux jours ouvrés avant le début de la période d'intérêt correspondante.
- A chaque date T_i, la jambe variable d'un CMS verse un flux égal à :

$$N \times \delta(T_{i-1}, T_i) \times S(T_{i-1}^F, T_{i-1}, T_{i-1} + T)$$

$S(T_{i-1}^F, T_{i-1}, T_{i-1} + T)$ correspond au swap de taux sous-jacent qui débute à la date T_{i-1} (deux jours ouvrés après T_{i-1}^F) et qui a la maturité T.



MERCI POUR VOTRE ATTENTION

canopee group