

*Modèles de la courbe des taux d'intérêt – 1<sup>ère</sup> partie*

---

# **Produits dérivés de taux**

## *Méthodes d'évaluation et de couverture*

**Antonin Chaix**

avec la participation de Richard Guillemot

# Table des matières

---

<b>1</b>	<b>Préambule et notations</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Les principaux instruments de taux et leur évaluation</b>	<b>6</b>
2.1	Taux monétaires LIBOR et EURIBOR . . . . .	6
2.2	FRA . . . . .	8
2.3	Les contrats <i>futures</i> sur LIBOR . . . . .	10
2.4	Swaps de taux . . . . .	12
<b>3</b>	<b>La courbe des taux</b>	<b>17</b>
3.1	Définition, typologie . . . . .	17
3.2	La courbe zéro-coupon . . . . .	18
3.3	Le <i>bootstrap</i> de la courbe . . . . .	19
3.4	Actualisation OIS ( <i>Richard Guillemot</i> ) . . . . .	24
<b>4</b>	<b>Options de taux</b>	<b>32</b>
4.1	Evaluer les actifs en présence de taux stochastiques . . . . .	32
4.2	Caps et floors . . . . .	34
4.3	Swaptions . . . . .	37
4.4	Au delà du modèle de Black . . . . .	39
4.5	Le modèle SABR . . . . .	43
4.6	<i>Risk-management</i> des options de taux . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Ajustements de convexité, exotiques de première génération</b>	<b>50</b>
5.1	Le concept d'ajustement de convexité : cas d'un LIBOR <i>in arrears</i> . . . . .	51
5.2	Swaps CMS . . . . .	54
5.3	Caps et floors CMS . . . . .	57
5.4	Produits digitaux . . . . .	59
<b>6</b>	<b>Exotiques de taux et modèles de courbe</b>	<b>63</b>
6.1	Modèles de taux court . . . . .	63

6.2	Le cadre HJM . . . . .	64
6.3	Le modèle Hull & White 1 facteur . . . . .	65
6.4	Swaptions bermudas . . . . .	74
6.5	Quelques autres produits exotiques . . . . .	79
<b>Bibliographie</b>		<b>83</b>
<b>7</b>	<b>Annexes</b>	<b>84</b>
	Formule de reconstruction des zéro-coupons dans le modèle Hull & White 1 facteur .	84
	Différences finies dans le cadre Hull & White 1 facteur . . . . .	85

## Partie 1

# Préambule et notations

---

### Taux court

Un taux d'intérêt est un réel  $r$  qui peut être compris comme le “loyer” de l'argent. Si je place la somme de 1 euro aujourd'hui, la valeur acquise par mon placement dans 1 an sera de manière certaine :

$$1 + r$$

Et  $V_0 \times (1 + r)$  pour le placement d'une somme  $V_0$ . Si je décide de réinvestir les intérêts sur plusieurs années, mon placement aura acquis la valeur

$$V_n = V_0 \times (1 + r)^n$$

à l'issue de  $n$  années de placement. Supposons que les intérêts soient versés non plus annuellement, mais  $m$  fois par an, et réinvestis à mesure qu'ils sont perçus. Dans ce cas, la valeur acquise par mon placement aura atteint au bout des  $n$  années la somme de :

$$V_n = V_0 \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \times m}$$

Quand cette fréquence de versement des intérêts tend vers l'infini, les intérêts sont alors composés en continu et cette valeur acquise devient :

$$V_n = \lim_{m \rightarrow \infty} V_0 \times \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{n \times m} = V_0 e^{r \times n}$$

Le taux  $r$  est alors un taux instantané. Bien évidemment, dans un monde stochastique ce taux aura changé entre aujourd'hui et demain, et on ne pourra pas placer notre capital au même taux. On note  $r_t$  sa valeur à la date  $t$  : il s'agit du *taux court* utilisé comme grandeur fondamentale des modèles de taux, et plus généralement de l'évaluation risque-neutre. Dans cette situation, la valeur de notre placement suit l'équation :

$$dV_t = r_t V_t dt$$

et la valeur acquise par le placement au bout d'un temps  $T$  est :

$$V_T = V_0 e^{\int_0^T r_t dt}$$

## Zéro-coupon

Le zéro-coupon de maturité  $T$  est le titre financier qui verse un unique flux de 1 euro (une unité monétaire) à la date  $T$ . On note  $B(t, T)$  sa valeur à la date  $t \leq T$ . Cette grandeur est également appelée facteur d'actualisation (*discount factor*) pour la maturité  $T$ . Il existe sur le marché quelques obligations zéro-coupon (dits *strips*) délivrant, à leur échéance, un seul flux égal à leur valeur nominale. Elles demeurent cependant très minoritaires par rapport aux obligations classiques à coupons.

Sous l'hypothèse d'AOA, il existe une mesure dite *risque-neutre* qui rend martingale le prix des actifs actualisés. Dans le cas du zéro-coupon cela implique :

$$B(t, T) = \mathbb{E}_t^Q \left( e^{-\int_t^T r_s ds} \right), \quad \forall t \leq T$$

où l'opérateur  $\mathbb{E}_t^Q$  désigne l'espérance sous mesure risque-neutre, sachant l'information disponible à la date  $t$ .

## Taux zéro-coupon

Le taux zéro-coupon de maturité  $T$  est le taux associé au zéro-coupon de même maturité. Ce taux est noté  $R(t, T)$  et défini par :

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)}$$

La durée  $(T - t)$  est conventionnellement calculée en base Exact/365 (nombre de jours entre les dates  $t$  et  $T$  divisé par 365). L'écriture ci-dessus utilise une convention de taux continu. Il est également possible de définir le taux zéro-coupon de façon actuarielle :

$$B(t, T) = \frac{1}{(1 + R(t, T))^{T-t}}$$

## Zéro-coupon forward

Si  $t \leq T < U$ ,  $B(t, T, U)$  désigne le prix du zéro-coupon  $T$ -forward de maturité  $U$ . Autrement dit c'est à la date  $t$ , le prix à payer en  $T$  pour recevoir un euro à la date  $U$ .

Il est facile de montrer que :

$$B(t, T, U) = \frac{B(t, U)}{B(t, T)}$$

En effet il suffit de considérer la stratégie consistant, à la date  $t$ , à acheter un zéro-coupon de maturité  $U$  et à vendre le zéro-coupon de maturité  $T$  en quantité  $B(t, U)/B(t, T)$ .

Si les zéro-coupons de maturité  $T$  et  $U$  sont liquides, je peux donc me garantir dès aujourd'hui (date  $t$ ) un taux d'emprunt pour la période future  $[T, U]$  : c'est le taux forward défini ci-après.

### Taux forward

Le taux forward  $F(t, T, U)$  est le taux tel que :

$$B(t, T, U) = e^{-F(t, T, U)(U-T)}$$

Il est donc relié au taux zéro-coupon de maturité  $T$  et  $U$  de la manière suivante :

$$F(t, T, U) = \frac{R(t, U)(U - t) - R(t, T)(T - t)}{U - T}$$

C'est le taux (zéro-coupon) que je peux me garantir à la date  $t$  pour la période future  $[T, U]$ .

### Taux forward instantané

Le taux forward instantané de maturité  $T$ , noté  $f(t, T)$ , est le taux forward portant sur la période d'intérêt débutant en  $T$  et finissant un instant (infiniment petit) plus tard. Il s'obtient donc comme :

$$f(t, T) = \lim_{U \rightarrow T} F(t, T, U)$$

On notera que le taux court  $r_t$  est égal à  $f(t, t)$ .

Ce taux forward instantané n'a aucune réalité de marché, mais s'avère incontournable dans la modélisation de la courbe des taux, notamment dans le cadre HJM.

Compte tenu de :

$$F(t, T, U) = -\frac{\ln(B(t, U)) - \ln(B(t, T))}{U - T}$$

la relation entre taux forward instantané et zéro-coupon est la suivante :

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln B(t, T)}{\partial T}$$

ou encore :

$$B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}$$

## Partie 2

# *Les principaux instruments de taux et leur évaluation*

---

### 2.1 Taux monétaires LIBOR et EURIBOR

Les taux LIBOR et EURIBOR sont des taux de dépôt entre banques de premier plan pour les maturités de 1 semaine à 12 mois.

- L'EURIBOR correspond aux dépôts en euros et est publié par la BCE tous les matins à 11h00. Il s'agit d'un taux moyen calculé à partir des contributions d'un échantillon de 43 grandes banques de la zone euro.
- Les taux LIBOR sont cotés sur la place de Londres et servent de référence sur les autres devises (USD, GBP, JPY, ...)

Il est important de bien comprendre le fonctionnement de ces taux et leur mode de calcul car ils servent de sous-jacents à une multitude d'instruments dérivés (swaps, caps, floors...)

Prenons l'exemple d'un placement à EURIBOR 6 mois :

- Aujourd'hui (date  $t$ ), l'EURIBOR 6M fixe à une valeur  $R$
- La période de placement ne commence que deux jours ouvrés plus tard, à la date  $T_{\text{start}}$  et s'étend sur une durée de 6 mois.
- La date de fin de la période d'intérêt,  $T_{\text{end}}$ , est éventuellement décalée si elle tombe un week end ou un jour férié (convention MODIFIED FOLLOWING)

Le nominal d'un montant  $N$  € est placé à la date départ  $T_{\text{start}}$ . Il est récupéré à la date  $T_{\text{end}}$  augmenté des intérêts. Ceux-ci sont calculés de la manière suivante :

$$\text{Intérêts} = N \times R \times \delta$$

Où par convention  $\delta$  est le nombre de jours de la période d'intérêt divisé par 360.

$$\delta = \frac{T_{\text{end}} - T_{\text{start}}}{360}$$

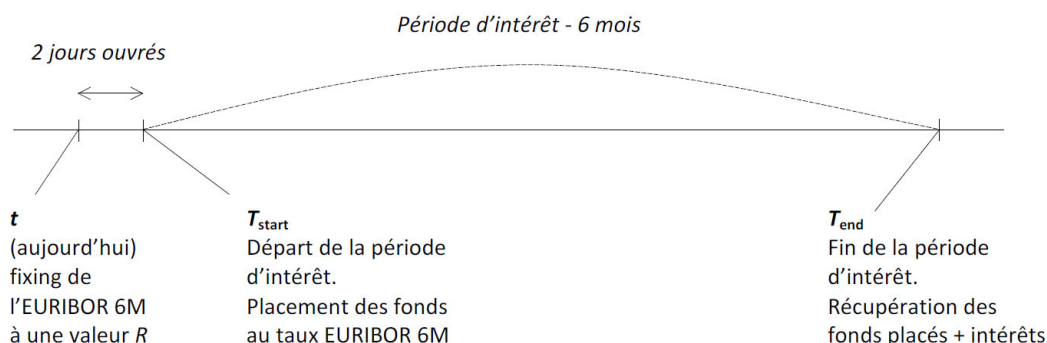


FIGURE 2.1 – EURIBOR 6 mois

Cette base de calcul est appelée Exact/360 ou Actual/360, ou encore *money market*. C'est une convention très répandue parmi les taux monétaires, mais pas systématique. Le LIBOR GBP (livre sterling) utilise par exemple la convention Exact/365.

En termes de flux, le placement à EURIBOR 6M se résume donc à :

- A la date  $T_{\text{start}}$  : un flux de  $-N$  euros
- A la date  $T_{\text{end}}$  : un flux de  $+N(1 + \delta R)$  euros

Dans la suite, on notera  $L(t, T, U)$  la valeur du taux l'EURIBOR fixant à la date  $t$  pour la période d'intérêt  $(T, U)$ . Le fixing  $R$  de l'EURIBOR 6M ci-dessus s'écrit donc  $L(t, T_{\text{start}}, T_{\text{end}})$ .

Le bilan en termes de flux permet d'explicitier la relation entre le taux EURIBOR  $L(t, T_{\text{start}}, T_{\text{end}})$  et les zéro-coupons. En effet l'EURIBOR étant le taux de marché, la valeur actuelle de l'opération consistant à placer les fonds en date  $T_{\text{start}}$  et à les récupérer en date  $T_{\text{end}}$  augmentés des intérêts à EURIBOR doit être nulle :

$$-NB(t, T_{\text{start}}) + N(1 + \delta L(t, T_{\text{start}}, T_{\text{end}}))B(t, T_{\text{end}}) = 0$$

Soit :

$$L(t, T_{\text{start}}, T_{\text{end}}) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{B(t, T_{\text{start}})}{B(t, T_{\text{end}})} - 1 \right)$$

Cette formule permettra donc :

- De calculer les zéro-coupons à partir du fixing des EURIBOR (étant étendu que  $B(t, T_{\text{start}})$  aura été préalablement déterminé, en utilisant par exemple le taux de dépôt au jour le jour et/ou 1 semaine). Et donc de déterminer la partie court-terme de la courbe zéro-coupon.
- Ou à l'inverse, de calculer la valeur des taux EURIBOR à partir d'une courbe zéro-coupon.



## 2.2 FRA

FRA signifie *Forward Rate Agreement* et se traduit par *accord de taux futur* en français.

Il s'agit d'un contrat forward spécifiant à terme l'échange d'un taux fixe déterminé à l'avance et d'un taux variable monétaire LIBOR ou EURIBOR. Contrairement aux futures qui sont l'objet d'un marché organisé (cf. section suivante), ce type de contrat est négocié de gré à gré sur le marché OTC<sup>1</sup>.

Prenons l'exemple d'un FRA de montant notionnel  $N$  euros et d'échéance 1 an sur EURIBOR 6 mois. Il se déroule de la manière suivante :

- Notons toujours  $t$  la date d'aujourd'hui, date de conclusion du contrat FRA
- L'échéance du FRA est la date  $T_f = t + 1$  an (ajustée si elle tombe un week end ou jour férié). Le fixing de l'EURIBOR 6M se fera à cette date et à une valeur  $L(T_f, T_1, T_2)$ ,  $T_1$  et  $T_2$  définissant le début et la fin de la période d'intérêt de l'EURIBOR.
- A la date  $t$ , les deux parties se mettent d'accord sur le taux fixe du FRA, que l'on notera  $L(t, T_1, T_2)$ .
- L'échange de flux s'effectue à la date  $T_1$  de départ de l'EURIBOR (cash settlement). Le flux net reçu par l'acheteur du FRA en  $T_1$  vaut :

$$N \times \frac{[L(T_f, T_1, T_2) - L(t, T_1, T_2)] \times \delta}{1 + \delta L(T_f, T_1, T_2)} \quad (2.1)$$

Où  $\delta = (T_2 - T_1)/360$  est comme précédemment la fraction d'année de l'EURIBOR sous-jacent, calculée en base Exact/360. Notons bien que ce montant peut s'avérer négatif (dans ce cas, il est donc payé par l'acheteur du FRA à sa contrepartie).

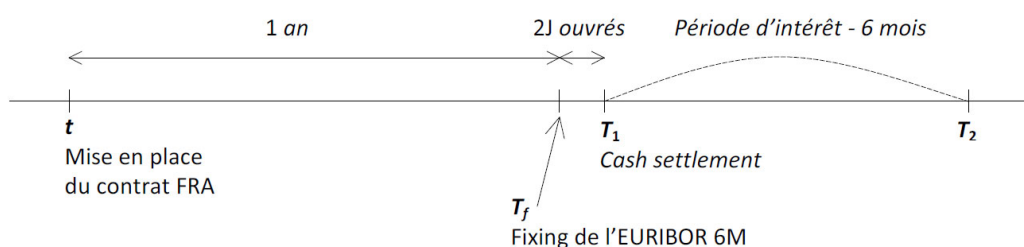


FIGURE 2.2 – FRA sur EURIBOR 6 mois

L'acheteur du FRA reçoit (paye) donc en  $T_1$  un montant proportionnel à la différence entre le taux du FRA,  $L(t, T_1, T_2)$ , contracté à la date initiale et l'EURIBOR 6 mois,  $L(T_f, T_1, T_2)$ , qui vient de fixer.

1. *Over-the-counter*

Pourquoi procéder à l'achat d'un FRA ? Car si on le combine avec un emprunt à EURIBOR sur la période d'intérêt  $(T_1, T_2)$ , il permet de répliquer un emprunt au taux fixe du FRA. En effet, regardons la combinaison des deux opérations suivantes :

- En  $t$  : achat d'un FRA sur EURIBOR 6M, d'échéance  $T_f$  et de montant notionnel  $N$
- En  $T_f$  : emprunt du notionnel  $N$  sur 6 mois au taux EURIBOR 6M

L'achat du FRA induit un unique flux en  $T_1$  : s'il est positif, ce montant peut être placé au taux EURIBOR  $L(T_f, T_1, T_2)$  en  $T_1$  et jusqu'à la date  $T_2$  ; s'il est négatif, ce montant peut être emprunté au même taux EURIBOR. Le FRA se transforme donc en un unique flux à la date  $T_2$  d'une valeur :

$$N \times [L(T_f, T_1, T_2) - L(t, T_1, T_2)] \times \delta$$

Par ailleurs, l'emprunt à EURIBOR consiste en un flux positif de  $N$  euros à la date  $T_1$  (emprunt du principal) et un flux négatif  $-N(1 + \delta L(T_f, T_1, T_2))$  à la date  $T_2$  (remboursement du principal + intérêts).

Au total, ces deux opérations génèrent les deux flux suivants :

- En  $T_1$  :  $+N$  euros
- En  $T_2$  :  $-N(1 + \delta L(t, T_1, T_2))$  euros

On a ainsi répliqué sur la période  $(T_1, T_2)$  un emprunt du montant  $N$  au taux  $L(t, T_1, T_2)$  fixé de manière anticipée à la date  $t$ . Autrement dit : combiné avec un emprunt à EURIBOR, l'achat d'un FRA aujourd'hui permet de se garantir un taux d'emprunt pour une période future.

Cela permet d'obtenir la relation entre le taux fixe du FRA et les zéro-coupons. En effet, l'opération décrite ci-dessus s'effectue dans le marché à un coût nul. La valeur actuelle des flux futurs doit donc être égale à 0 :

$$-N B(t, T_1) + N(1 + \delta L(t, T_1, T_2)) B(t, T_2) = 0$$

Soit :

$$L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{B(t, T_1)}{B(t, T_2)} - 1 \right)$$

Par conséquent, si l'on dispose des prix de marché d'une série de FRAs (FRA sur EURIBOR 6M de maturité 6 mois, 12 mois, 18 mois etc.), on pourra aisément déterminer itérativement la valeur des zéro-coupons.

Notons que l'expression du taux FRA en fonction des zéro-coupons est la même que pour l'EURIBOR, la différence étant que la période d'intérêt se situe dans un futur plus lointain. En ce sens le taux du FRA est qualifié de *taux EURIBOR forward*.

## 2.3 Les contrats *futures* sur LIBOR

Il s'agit de contrats sur taux interbancaires à 3 mois, tous fonctionnant sur le même modèle. Ils ont été construits comme une version standardisée des contrats FRA traités de gré-à-gré. A l'inverse des FRA, les futures sur LIBOR sont échangés sur un marché organisé, disposant d'une chambre de compensation, et font l'objet d'*appels de marge*.

Les principaux contrats futures sur taux LIBOR sont les suivants :

- Le contrat future sur taux LIBOR 3 mois dollar, appelé improprement *contrat Eurodollar*, et traité sur le Chicago Mercantile Exchange (CME). Il est coté également à Londres sur le LIFFE en heure européenne, et à Singapour en heure asiatique. Les maturités de ce contrat varient de 1 mois à 10 ans, avec des échéances mensuelles pour les maturités proches, et 40 échéances trimestrielles (le troisième mercredi des mois de mars, juin, septembre et décembre). Le nominal du contrat Eurodollar est 1,000,000 \$.
- Le contrat future sur EURIBOR 3 mois. Sur le même modèle que le précédent, il est fondé sur le taux EURIBOR 3 mois et porte sur un nominal de 1 million d'euros. Côté sur le LIFFE, il dispose de 4 échéances mensuelles pour le court terme et de 20 échéances trimestrielles (mars, juin, septembre, décembre), donc de maturités allant jusqu'à 5 ans.
- Et d'autres encore : les futures sur LIBOR GBP<sup>2</sup>, coté sur le LIFFE, sur LIBOR CHF<sup>3</sup> etc...

Le *prix coté* d'un contrat future sur LIBOR 3 mois s'exprime comme :

$$100 \times (1 - R)$$

où  $R$  est le taux de référence du contrat. Par exemple un cours de 97.50 correspond à un taux de référence de 2.50%. Dans le cas d'un contrat standard (LIBOR USD, EURIBOR) le nominal est de 1,000,000 (de dollars ou d'euros) et la *valeur* du contrat s'exprime comme<sup>4</sup> :

$$1,000,000 \times (1 - 0.25 \times R)$$

si bien qu'un mouvement de 1 point de base (0,01%) du taux de référence induira une variation de la valeur du contrat de 25 dollars (ou euros).

A la date de maturité du contrat, le taux de référence  $R$  du contrat est par définition égal au taux LIBOR sous-jacent : la *cash-settlement* s'effectue avec la valeur du taux LIBOR ou EURIBOR 3 mois fixée le matin du jour d'expiration du contrat.

Prenons un exemple pour fixer les idées. Nous sommes le 30 mars 2009 et nous souhaitons acheter un contrat Eurodollar d'échéance juin 2009. Celui-ci mature le 17 juin (troisième mercredi

2. Livre sterling

3. Franc suisse

4. Le choix du facteur 0.25 vient du fait que le taux de référence du contrat porte sur une période de 3 mois (un quart d'année). Les variations de la valeur du contrat seront ainsi homogènes à celles des intérêts d'un placement de 1,000,000 de dollars ou d'euros sur une période de 3 mois.

du mois). Aujourd'hui le contrat cote 98.840, soit un taux de référence de 1.160%. La valeur du contrat est

$$1,000,000 \times (1 - 0.25 \times 1.160\%) = 997,100 \$$$

Le taux LIBOR USD 3 mois cote aujourd'hui (30 mars 2009) à 1.22%. Supposons qu'arrivé à la maturité 17 juin 2009, il ait augmenté de 40 points de base, et cote désormais à 1.62%. Dans cette situation, la valeur du contrat à maturité sera

$$1,000,000 \times (1 - 0.25 \times 1.62\%) = 995,950 \$$$

Soit pour nous, acheteurs du contrat, une moins-value de 1,150 dollars<sup>5</sup>.

En réalité, l'acheteur (le vendeur) du contrat future ne décaisse (n'encaisse) pas la valeur du contrat. Il effectue un dépôt de garantie<sup>6</sup> au moment de l'opération (qu'il récupère à la maturité du contrat), puis est soumis à un *mark-to-market* quotidien, sous forme d'*appels de marge*<sup>7</sup>. Continuons sur l'exemple précédent pour clarifier ce dernier point. Nous sommes le 30 mars 2009 ; nous venons de traiter le future à 98.840 et avons effectué le dépôt de garantie exigé par le CME. Supposons que le lendemain la cote du future grimpe de 3 points de base pour atteindre 98.87 (le taux de référence du future a donc, lui, baissé de trois points de base) : cela renchérit notre position de future de  $3 \times 25 = 75 \$$ , qui vont nous être versés par la chambre de compensation. A l'inverse, si le lendemain la cote du future baisse de 5 points de base, notre position se déprécie de  $5 \times 25 = 125 \$$  que nous allons devoir verser à la chambre de compensation. Ce processus se poursuit jusqu'à la maturité du contrat future, date à laquelle nous effectuons notre dernier appel de marge (positif ou négatif) et récupérons notre dépôt de garantie. Au total la plus ou moins value réalisée correspond bien à la différence de valeur du contrat entre sa date d'achat et sa date de maturité<sup>8</sup>.

Même si la création des futures sur LIBOR tient à une volonté de simplification et de standardisation, l'évaluation précise de ces contrats se révèle plus complexe que celle des FRA, et ce pour deux raisons :

- (1) Le *cash-settlement* du future s'effectue à la date de départ du taux LIBOR sous-jacent<sup>9</sup>
- (2) Il existe des appels de marge quotidiens

5. Que l'on peut calculer directement comme  $46$  (points de base de variation du taux de référence)  $\times 25$  (variation de la valeur du contrat par point de base) = 1,150 \$.

6. Le montant de ce dépôt sera en général au moins égal à la fluctuation quotidienne maximale autorisée pour la valeur du contrat.

7. Ce mécanisme d'appels de marge (*variation margin* en anglais) permet d'éliminer presque totalement le risque de contrepartie dans les transactions de futures.

8. Notons qu'il est bien sûr possible de solder la position avant la fin du contrat, en revendant le contrat future sur le marché.

9. Comme on l'a vu dans la section précédente, un FRA est également dénoué à la date de départ du taux LIBOR sous-jacent. Néanmoins le flux payé par le FRA est actualisé (cf. équation (2.1)), ce qui le rend équivalent à un flux égal à la différence Taux LIBOR - Taux FRA reçu à la date de fin du LIBOR sous-jacent.

Ces deux points vont induire un renchérissement du taux future (taux de référence du contrat future noté  $R$  jusqu'ici) par rapport au taux forward du contrat FRA équivalent.

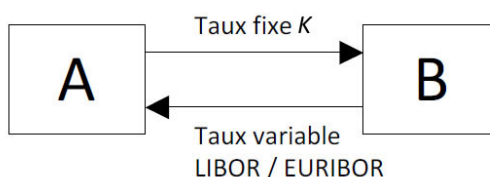
En effet, le point (1) implique un *ajustement de convexité* lié au paiement anticipé du taux LIBOR sous-jacent. Ce phénomène, analogue au cas d'un paiement *in arrears* du taux LIBOR, est abordé en détail section 5.1.

Le point (2) a un impact qui peut s'avérer encore plus important, notamment pour les maturités longues. Acheteur du contrat future, je vais être en *mark-to-market* positif si le prix coté du future augmente (c'est à dire si les taux baissent), et négatif si les taux montent. Je suis donc perdant car amené à placer des fonds en contexte de taux bas, et à en emprunter si les taux sont hauts – phénomène que je ne subirai évidemment pas dans le cas d'un contrat forward qui ne fait pas l'objet d'appels de marge. Pour compenser cela, le prix d'un future avec appels de marge doit donc être plus bas : son taux de référence sera plus élevé<sup>10</sup>. La quantification précise de cet ajustement n'est pas aisée ; elle requiert l'utilisation d'un modèle de courbe (Ho et Lee, Hull & White...) et ne sera pas abordée ici.

## 2.4 Swaps de taux

Un swap de taux est un contrat par lequel deux contreparties A et B s'engagent, pendant une durée donnée, à s'échanger des flux à taux fixe contre des flux à taux variable.

- Le montant des flux échangés est calculé proportionnellement à un notionnel  $N$
- Les flux fixes sont déterminés à partir d'un taux fixe  $K$  contractuel
- Les flux variables sont généralement déterminés à partir de l'observation d'un taux monétaire LIBOR ou EURIBOR (suivant la devise).



Dans le schéma ci-dessus, c'est A qui paye le taux fixe à B : du point de vue de A, le swap est dit **payeur**. Du point de vue de B, le swap est dit **receveur**.

L'ensemble des flux fixes payés par A à B est appelé la **jambe fixe** du swap. Les flux variables payés par B à A en constituent la **jambe variable** (appelée aussi jambe flottante ou jambe LIBOR).

10. Si tel n'était pas le cas on pourrait faire l'arbitrage suivant : vente du future avec appels de marge et achat du forward correspondant (sans appels de marge).

Les flux fixes et variables sont payés sur des échéanciers distincts : la fréquence de paiement de la jambe fixe peut différer de celle de la jambe variable. Le swap de taux standard sur l'euro a par exemple une jambe fixe de fréquence annuelle et une jambe variable de fréquence semi-annuelle (EURIBOR 6M). C'est le cas considéré dans le schéma ci-dessous :

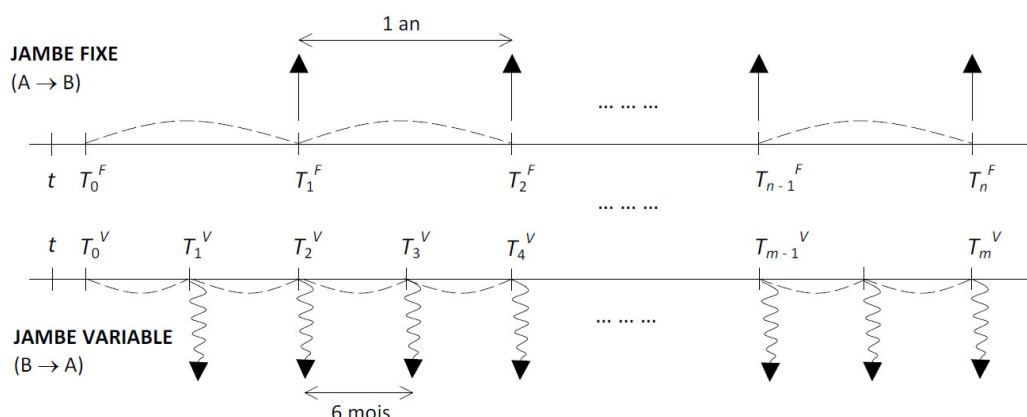


FIGURE 2.3 – Flux d'un swap standard sur l'euro

Utilisons les notations du schéma : l'échéancier de la jambe fixe est constitué des dates  $(T_0^F, T_1^F, \dots, T_n^F)$ ; celui de la jambe variable des dates  $(T_0^V, T_1^V, \dots, T_m^V)$ . Notons bien que les deux échéanciers coïncident par leur date de début et de fin :  $T_0^V = T_0^F$  et  $T_m^V = T_n^F$ . Notons également que les dates des échéanciers sont ajustées suivant des conventions précises lorsqu'elles tombent sur des week-ends ou des jours fériés.

La date de départ d'un swap standard se situe deux jours ouvrés après la date où le contrat est conclu :  $T_0^V = T_0^F = t + 2$  jours ouvrés. Les flux – fixes ou variables – vont être payés à la fin de chaque période, si bien qu'il n'y a pas d'échange de flux à la date de départ du swap. Les flux échangés se calculent de la manière suivante :

La **jambe fixe** est définie comme suit :

- Les flux fixes sont payés par A à B aux dates  $T_1^F, \dots, T_n^F$
- A la date  $T_i^F$ ,  $i = 1, \dots, n$ , le flux payé par A à B vaut :

$$\delta_i^F \times K \times N$$

où  $\delta_i^F$  représente la fraction d'année de la période d'intérêt  $(T_{i-1}^F, T_i^F)$ . Pour le swap standard sur l'euro, cette fraction d'année est calculée en utilisant la base de calcul 30/360 (appelée aussi *bond basis*).

Et pour la **jambe variable** :

- Les flux variables sont payés par B à A aux dates  $T_1^V, \dots, T_m^V$

- A la date  $T_i^V$ ,  $i = 1, \dots, m$ , le flux payé par A à B vaut :

$$\delta_i^V \times \text{EURIBOR 6M} \times N$$

- $\delta_i^V$  (fraction d'année de la période d'intérêt  $(T_{i-1}^V, T_i^V)$ ) est calculée dans la base de calcul de l'EURIBOR, à savoir Exact/360.
- EURIBOR 6M est le fixing du taux EURIBOR 6 mois, deux jours ouvrés avant le début de la période d'intérêt. Si l'on note  $T_{i-1}^f = T_{i-1}^V - 2J$  ouvrés cette date de fixing, le taux EURIBOR pris en compte est donc  $L(T_{i-1}^f, T_{i-1}^V, T_i^V)$ . On notera que le premier flux variable est déjà connu au moment de la mise en place du contrat swap ( $T_0^f = t$ ).

L'évaluation d'un swap en fonction des zéro-coupons est aisée. La valeur actuelle (*Present Value*) de la jambe fixe s'obtient directement en actualisant l'ensemble des flux fixes :

$$\mathbf{PV}_F(t) = \sum_{i=1}^n \delta_i^F \times K \times N \times B(t, T_i^F)$$

La valeur de la jambe variable  $\mathbf{PV}_V(t)$  peut s'obtenir en remarquant qu'un flux d'intérêt futur à taux EURIBOR est équivalent au taux du FRA correspondant :

$$\mathbf{PV}_V(t) = \sum_{i=1}^m \delta_i^V \times L(t, T_{i-1}^V, T_i^V) \times N \times B(t, T_i^V)$$

En utilisant l'expression des FRA en fonction des zéro-coupons :

$$\mathbf{PV}_V(t) = \sum_{i=1}^m \delta_i^V \times \frac{1}{\delta_i^V} \left( \frac{B(t, T_{i-1}^V)}{B(t, T_i^V)} - 1 \right) \times N \times B(t, T_i^V)$$

Et après simplification :

$$\mathbf{PV}_V(t) = N \times (B(t, T_0^V) - B(t, T_m^V))$$

On peut retrouver ce résultat directement et plus intuitivement de la manière suivante. Considérons la stratégie d'investissement consistant à :

- Placer le notionnel  $N$  au taux EURIBOR 6 mois de marché à la date de départ du swap  $T_0^V$ .
- Récupérer ce montant  $N$  augmenté des intérêts à EURIBOR en date  $T_1^V$ .
- Réinvestir immédiatement le montant  $N$  en date  $T_1^V$  au nouveau taux EURIBOR de marché.
- Récupérer  $N$  augmenté des intérêts à EURIBOR en date  $T_2^V$ .
- Poursuivre cette stratégie jusqu'à la date de fin de swap  $T_m^V$ , date à laquelle on récupère un dernier flux d'intérêt à taux EURIBOR et le montant notionnel  $N$ .

Au total cette stratégie équivaut donc à :

- Investir le montant  $N$  en date  $T_0^V$
- Recevoir la jambe variable du swap
- Récupérer le montant  $N$  en date  $T_m^V$

L'EURIBOR étant par hypothèse le taux de marché auquel peuvent être placés les fonds, cette stratégie a une valeur actuelle nulle :  $-N \times B(t, T_0^V) + \mathbf{PV}_V(t) + N \times B(t, T_m^V) = 0$ . Ce qui permet de retrouver l'expression de la jambe variable en fonction des zéro-coupons.

La valeur de la jambe variable dépend uniquement des dates de début et de fin du swap ; autrement dit, la fréquence de la jambe variable n'a aucun impact sur sa valeur (et donc sur celle du swap). Un swap taux fixe contre EURIBOR 12 mois vaudra en théorie la même chose si on remplace l'EURIBOR 12 mois par de l'EURIBOR 3 mois. Dès lors, en termes d'évaluation, on ne s'intéresse plus qu'à l'échéancier de la jambe fixe que l'on note désormais  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ .

Du point de vue de la contrepartie A, la valeur actuelle du swap est :

$$\mathbf{PV}_S(t) = \mathbf{PV}_V(t) - \mathbf{PV}_F(t) = N \left( B(t, T_0) - B(t, T_n) - K \sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i) \right)$$

et l'opposé du point de vue de B.

Au moment de son émission, le swap doit être équitable pour les deux contreparties. Le taux fixe du swap est donc choisi de telle sorte que la valeur actuelle des deux jambes soient égales. On dit que le swap est au pair. Cela nous fournit l'expression du taux fixe  $K$  en fonction des zéro-coupons :

$$K = S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)}$$

$S(t, T_0, T_n)$  est appelé le taux swap. C'est au moyen de ce taux que sont cotés les swaps sur le marché. L'écran Bloomberg suivant (fig. 2.4) est une page de cotation de swaps. A la date considérée il était donc possible de rentrer dans un swap 7 ans receveur du taux fixe  $K = 4,64\%$ , ou de rentrer dans le swap inverse, payeur du taux fixe  $K = 4,67\%$ .

Il est fréquent d'écrire la PV de taux fixe  $K$  du swap de la façon suivante :

$$\mathbf{PV}_S(t) = N \times \text{LVL}(t, T_0, T_n) \left( S(t, T_0, T_n) - K \right)$$

avec :

$$\text{LVL}(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)$$

La quantité  $\text{LVL}(t, T_0, T_n)$  est appelée le *level* du swap, ou encore PVBP (Price Value of a Basis Point). En effet si le taux swap bouge de 1 point de base (toutes choses égales par ailleurs), la



Press 98<GO> to make a copy, 99<GO> to clear news alerts. Index **IRSB**

15:07 **FRANCE € SWAP RATES** Page 1 / 2

94<GO> View News.

SECURITY	TIME	BID	ASK	CHANGE	OPEN	HIGH	LOW	PRV CLS
1) 1 Yr	15:07	3.4475	3.4700	+0.300	3.4600	3.5050	3.4125	3.4300
2) 2 Yr	15:07	3.6210	3.6410	+0.415	3.5940	3.6400	3.5625	3.5899
3) 3 Yr	15:07	3.8740	3.8950	+0.390	3.8460	3.8900	3.8385	3.8459
4) 4 Yr	15:07	4.1000	4.1250	+0.365	4.1100	4.1250	4.0200	4.0760
5) 5 Yr	15:07	4.3150	4.3370	+0.390	4.3200	4.3327	4.1312	4.2870
6) 6 Yr	15:07	4.4900	4.5170	+0.263	4.4725	4.5150	4.4675	4.4762
7) 7 Yr	15:07	4.6400	4.6700	+0.192	4.6700	4.6715	4.6225	4.6363
8) 8 Yr	15:07	4.7700	4.7990	+0.188	4.7625	4.8000	4.7577	4.7662
9) 9 Yr	15:07	4.8800	4.9000	+0.155	4.8725	4.9135	4.8655	4.8750
10) 10 Yr	15:07	4.9700	4.9975	+0.150	5.0000	5.0030	4.9537	4.9688
11) 12 Yr	15:07	5.1300	5.1510	+0.142	5.1200	5.1613	5.1200	5.1263
12) 15 Yr	15:07	5.3050	5.3250	+0.143	5.2950	5.3350	5.2950	5.3012
13) 20 Yr	15:07	5.4600	5.4750	+0.212	5.4400	5.4838	5.4400	5.4462
14) 25 Yr	15:07	5.5250	5.5550	+0.287	5.5050	5.5538	5.5050	5.5113
15) 30 Yr	15:07	5.5300	5.5440	+0.208	5.5100	5.5575	5.5100	5.5162

Page Fud for SWAP Spreads.

FIGURE 2.4 – Cotation des swaps sur *Bloomberg*

valeur actuelle du swap variera de la quantité<sup>11</sup>  $N \times \text{LVL}(t, T_0, T_n) \times 1 \text{ bp}$ .

Deux remarques pour conclure sur les swaps de taux :

- Un swap est un instrument de taux extrêmement répandu, mais, comme le FRA, il est considéré comme un produit dérivé : le notionnel est fictif ; il n'est pas échangé mais sert juste de référence pour calculer les flux fixes et variables.
- Un swap est coté au moyen de son taux fixe et a une valeur actuelle nulle au moment de son émission. Une fois en portefeuille, à mesure que le temps passe et que le marché des taux bouge, sa valeur actuelle fluctue. Un swap payeur voit sa valeur augmenter si le marché des taux monte et diminuer s'il baisse.

11. Ce résultat est exact si le swap est au pair. Il devient approximatif si le swap est loin du pair, car le taux swap impacte le level du swap.

## Partie 3

# La courbe des taux

### 3.1 Définition, typologie

La courbe des taux, ou *structure par terme* des taux d'intérêts, est la fonction qui à chaque maturité (en abscisse) associe le niveau du taux d'intérêt associé (en ordonnée). Cette courbe correspond à une date donnée ; c'est une "photo" de la structure par termes des taux d'intérêt à cette date.

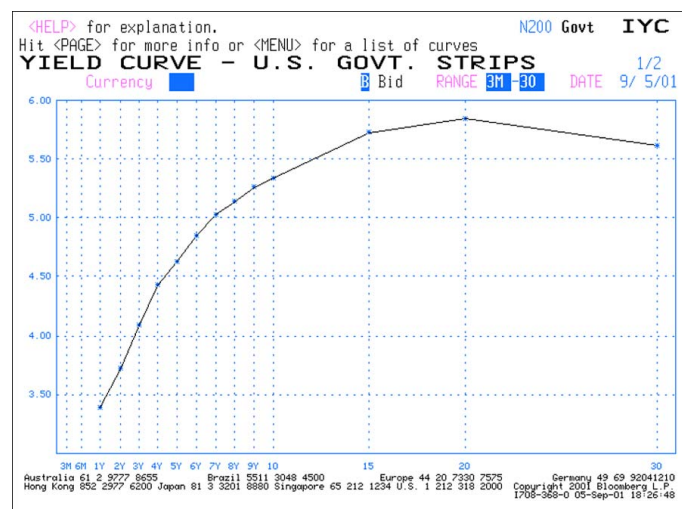


FIGURE 3.1 – Courbe des taux sur les emprunts d'état US (Bloomberg)

Il existe en réalité une multitude de courbes des taux, car peuvent varier :

- (1) La nature du taux représenté
- (2) Les instruments de marché à partir desquels la courbe est construite

Concernant le point (1), on peut en effet représenter un taux de marché en fonction de sa maturité : taux swap, taux de rendement obligataire, taux FRA etc. On parle dans ce cas de **courbe de marché** car le taux représenté est directement observable dans le marché. A l'inverse, notre

courbe peut représenter un taux implicite, non observable en tant que tel : taux zéro-coupon ou taux forward instantané par exemple. Il s'agit alors d'une **courbe implicite**.

Concernant le point (2), on distingue trois grands types de courbes :

- **La courbe d'état** : c'est la courbe des taux "sans risque" déduite à partir des cotations d'obligations d'état : OAT, BTAN, BTF...
- **Les courbes corporate** : elles sont déduites du prix des obligations émises par les entreprises. On peut s'intéresser aux obligations d'une entreprise en particulier (si la liquidité est suffisante), d'un groupe d'entreprises de *rating* équivalent (par exemple AAA), d'un secteur industriel en particulier, d'une zone géographique etc. Ces courbes intègrent par nature le risque de crédit des émetteurs : elles présentent donc un *spread* par rapport à la courbe d'état. Cette catégorie de courbes ne sera pas abordée dans ce support.
- **La courbe interbancaire** : c'est la courbe utilisée par les banques pour évaluer les produits fondés sur les taux LIBOR (FRA, swaps, caps & floors, swaptions, exotiques...), et plus généralement l'ensemble de leurs engagements du bilan, car cette courbe correspond à leur coût de financement. Elle est déterminée à partir des taux de dépôt (LIBOR) à court terme, des futures sur LIBOR pour les maturités intermédiaires, et des taux swaps pour les maturités plus longues.

## 3.2 La courbe zéro-coupon

On représente souvent le taux zéro-coupon en fonction de la maturité. On parle alors de *courbe zéro-coupon*<sup>1</sup>. Rappelons que le taux zéro-coupon de maturité  $T$ , noté  $R(t, T)$  à la date  $t$ , est relié au prix du zéro-coupon de la façon suivante :

$$B(t, T) = e^{-R(t, T)(T-t)} \quad (\text{convention continue})$$

$$\text{ou } B(t, T) = \frac{1}{(1 + R(t, T))^{T-t}} \quad (\text{convention actuarielle})$$

La courbe zéro-coupon est une courbe implicite au sens où les zéro-coupons ne sont pas directement observables sur le marché. Il existe bien sûr quelques obligations zéro-coupon (ne serait-ce que les obligations couponnées à qui il ne reste plus qu'une date anniversaire), mais elles sont rares et surtout peu liquides. Il va donc falloir déterminer la courbe zéro-coupon indirectement, à partir de la cotation des instruments liquides (obligations d'état dans le cas de la courbe d'état ; taux de dépôt, futures et swaps pour la courbe interbancaire).

L'intérêt de la courbe zéro-coupon est clair : comme elle permet d'obtenir la valeur des zéro-coupons pour toute maturité  $T$ , on pourra par son biais calculer le prix de n'importe quel instrument à revenus fixes, et plus généralement – comme on l'a vu dans la partie précédente –

1. *Discount curve* en anglais

celui des instruments standard fondés sur le LIBOR (FRA, swaps etc...). A l'inverse, une courbe de marché représentant par exemple le taux swap en fonction de la maturité serait peu exploitable en tant que telle : comment faire dans ce cas si l'on souhaite coter un swap aux caractéristiques non standard (jambe fixe trimestrielle, swap loin du pair...) ou tout autre produit à revenus fixes ?

La section suivante se propose de décrire la méthode de construction des courbes zéro-coupon d'état et interbancaire.

### 3.3 Le *bootstrap* de la courbe

Le *bootstrap* de la courbe des taux, appelé aussi *stripping*, est le processus par lequel on va déterminer de proche en proche les zéro-coupons (et donc la courbe zéro-coupon) à partir des instruments de marché. Il s'agit en quelque sorte d'inverser la perspective : dans la partie précédente, nous avons supposé les zéro-coupons connus afin d'évaluer les produits standard sur LIBOR, comment faire maintenant pour les déterminer à partir de l'information de marché disponible ?

#### 3.3.1 Courbe d'état

La courbe d'état est déterminée à partir de la cotation des obligations d'état (OAT, BTAN, BTF...). Rappelons qu'une obligation est une part d'emprunt qui rémunère son détenteur d'un coupon  $C$  périodique (annuel en France), le principal de l'emprunt étant remboursé à maturité de l'obligation, en même temps que le dernier coupon. Le prix coté d'une obligation, entendu pour un nominal de 100, s'écrit donc de la façon suivante en fonction des zéro-coupons :

$$100 \times B(t, T_n) + \sum_{i=1}^n C \times B(t, T_i)$$

La méthode théorique de reconstitution des zéro-coupon est immédiate si l'on dispose des prix d'une série d'obligation ayant :

- les mêmes dates anniversaire
- des maturités multiples de la fréquence de paiement des coupons

En effet, considérons  $n$  obligations de maturités  $T_1, T_2, \dots, T_n$  et de coupons respectifs  $C_1, C_2, \dots, C_n$  respectant ces conditions<sup>2</sup>. Les prix cotés des obligations sont donnés par :

2. Cela signifie donc que l'obligation de maturité  $T_i$  a pour dates anniversaires  $T_1, \dots, T_i$

$$\begin{aligned}
PV_{\text{Obl}}^1 &= (100 + C_1)B(t, T_1) \\
PV_{\text{Obl}}^2 &= C_2B(t, T_1) + (100 + C_2)B(t, T_2) \\
&\vdots \\
PV_{\text{Obl}}^n &= C_nB(t, T_1) + \dots + C_nB(t, T_{n-1}) + (100 + C_n)B(t, T_n)
\end{aligned}$$

Les zéro-coupons  $B(t, T_1), \dots, B(t, T_n)$  sont donc obtenus de proche en proche en résolvant ce système triangulaire. On en déduit les taux zéro-coupon pour les horizons  $T_1, \dots, T_n$ , qui définissent notre courbe zéro-coupon. Une méthode d'interpolation (typiquement linéaire ou polynomiale) est ensuite requise pour calculer le taux zéro-coupon entre deux dates anniversaires.

Cette méthode théorique est bien sûr peu réaliste car on ne dispose pas en pratique d'une série aussi régulière de prix d'obligations. Les obligations liquides ont des maturités réparties aléatoirement dans le temps ; on dispose typiquement de :

- Quelques obligations zéro-coupon liquides de maturités inférieures à 1 an<sup>3</sup>
- Une série d'obligations liquides de maturités  $T_1 < T_2 < \dots < T_n$  supérieures à 1 an.

Dès lors, on devra avoir recours à une méthode d'interpolation au sein même du processus de bootstrap de la courbe. L'algorithme suivant est robuste et fonctionnera dans toutes les situations :

1. Les obligations zéro-coupon de maturité inférieure à 1 an fournissent directement les zéro-coupons (et donc les taux zéro-coupon) correspondants à leur maturité. On note  $\bar{T}$  la maturité de la plus longue obligation zéro-coupon.
2. L'obligation de maturité  $T_1$  a potentiellement des dates de tombée de coupon inférieures à  $\bar{T}$  et au moins une date de tombée supérieure à  $\bar{T}$ . Son prix coté s'écrit schématiquement comme :

$$\sum_{T \leq \bar{T}} F_T B(t, T) + \sum_{T > \bar{T}} F_T B(t, T)$$

où les dates  $T$  représentent les dates de tombée de coupon de l'obligation de maturité  $T_1$  et  $F_T$  la valeur du flux à la date  $T$  ( $C$  en général et  $100 + C$  s'il s'agit de la date de maturité). Disposant du prix coté de l'obligation maturant en  $T_1$ , nous obtenons la valeur du zéro-coupon de maturité  $T_1$  en faisant les deux hypothèses suivantes :

- (a) Les zéro-coupons de maturité inférieure à  $\bar{T}$  sont calculés par interpolation linéaire des taux zéro-coupon calculés à l'étape précédente.

---

3. Il s'agit généralement d'obligations d'état en fin de vie sur lesquelles il reste suffisamment de liquidité.

- (b) La courbe zéro-coupon est continue en  $\bar{T}$  et le taux zéro-coupon est supposé affine sur l'intervalle  $[\bar{T}, T_1]$
3. La même méthode est appliquée pour déterminer le zéro-coupon de maturité  $T_2$  : interpolation linéaire des taux zéro-coupon sur l'intervalle  $[0, T_1]$  et taux zéro-coupon affine sur l'intervalle  $[T_1, T_2]$ .
4. On itère la stratégie pour chacune des obligations suivantes. Pour déterminer le zéro-coupon de maturité  $T_k$ , on interpolera linéairement les taux zéro-coupon sur l'intervalle  $[0, T_{k-1}]$  et on les supposera affines sur  $[T_{k-1}, T_k]$

Voici un exemple pour préciser un peu chacun des points ci-dessus.

**Exemple.** Nous disposons de 4 obligations liquides de maturités respectives 3 mois, 9 mois, 2 ans et demi et 4 ans. Les deux premières n'ont plus qu'un flux à verser : elles sont donc zéro-coupon. Les deux suivantes vont verser respectivement 3 flux et 4 flux.

Obligation	Maturité	Coupon	Prix
A	0.25	5.00	104.31
B	0.75	3.50	101.31
C	2.5	4.30	103.78
D	4	5.50	105.25

**Les obligations zéro-coupon A et B** nous donnent directement les zéro-coupons de maturités 0.25 et 0.75 :

$$104.31 = 105 \times B(0.25) = \frac{105}{(1 + R(0.25))^{0.25}} \quad \text{et} \quad 101.31 = 103.50 \times B(0.75) = \frac{103.50}{(1 + R(0.75))^{0.75}}$$

d'où :

$$B(0.25) = 0.9935 \quad R(0.25) = 2.65\% \quad \text{et} \quad B(0.75) = 0.9788 \quad R(0.75) = 2.90\%$$

**L'obligation C** a trois flux, aux dates 0.5, 1.5 et 2.5. Son prix est donc :

$$103.78 = 4.30 \times B(0.5) + 4.30 \times B(1.5) + 104.30 \times B(2.5) \quad (3.1)$$

$B(0.5)$  est calculé par interpolation linéaire des taux zéro-coupon de maturité 0.25 et 0.75 obtenus précédemment. Nous cherchons à présent le zéro-coupon / taux zéro-coupon de maturité 2.5.

- On se donne  $R(2.5)$  quelconque. Il donne la valeur de  $B(2.5)$
- Le zéro-coupon  $B(1.5)$  de (3.1) est calculé au moyen du taux zéro-coupon  $R(1.5)$  obtenu par interpolation linéaire des taux zéro-coupon  $R(0.75)$  et  $R(2.5)$ .

- On recherche numériquement le taux  $R(2.5)$  qui vérifie la relation (3.1)

L'obligation D a pour valeur :

$$105.25 = 5.50 \times B(1) + 5.50 \times B(2) + 5.50 \times B(3) + 105.50 \times B(4) \quad (3.2)$$

$B(1)$  et  $B(2)$  sont calculés en interpolant linéairement les taux  $R(0.75)$  et  $R(2.5)$  déterminés précédemment. On procède ensuite comme pour l'obligation C :

- On se donne  $R(4)$  quelconque. Il donne la valeur de  $B(4)$
- Le zéro-coupon  $B(3)$  de (3.2) est calculé au moyen du taux zéro-coupon  $R(3)$  obtenu par interpolation linéaire des taux zéro-coupon  $R(2.5)$  et  $R(4)$ .
- On recherche numériquement le taux  $R(4)$  qui vérifie la relation (3.2)

Ce qui conduit après calcul à la courbe zéro-coupon suivante :

Maturité	Taux zéro-coupon
0.25	2.65%
0.75	2.90%
2.5	3.61%
4	4.10%

### 3.3.2 Courbe interbancaire

La courbe interbancaire est déterminée à partir de la cotation des taux de dépôt pour la partie court terme, des futures sur taux LIBOR pour les maturités intermédiaires, et des swaps pour la partie long terme. Voici un exemple des instruments que l'on pourrait utiliser sur le dollar :

- Taux *overnight* et taux de dépôt LIBOR 1 semaine, 2 semaines, 1 mois, 2 mois et 3 mois
- 8 premiers contrats Eurodollar trimestriels
- Swaps de maturités 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20 et 30 ans

La détermination de la partie courte de la courbe (a) est immédiate. Le taux *overnight* s'applique à une durée de 1 jour (ouvré) pour un placement à départ spot. Les intérêts sont calculés de la même manière que pour un taux LIBOR. En notant  $T_{1J}$  la maturité du taux *overnight* (aujourd'hui + 1 jour ouvré) et  $\delta_{1J}$  la fraction d'année correspondante (base Exact/360) on a :

$$R_{OVN} = \frac{1}{\delta_{1J}} \left( \frac{1}{B(0, T_{1J})} - 1 \right)$$

La cotation du taux *overnight*  $R_{OVN}$  permet donc de déduire  $B(0, T_{1J})$ , et le taux zéro-coupon correspondant  $R(0, T_{1J})$ .

Comme on l'a vu dans la partie précédente le LIBOR 1 semaine s'exprime de la façon suivante en fonction des zéro-coupons :

$$\text{LIBOR}_{1W} = \frac{1}{\delta_{1W}} \left( \frac{B(0, T_{2J})}{B(0, T_{1W})} - 1 \right)$$

Où  $T_{2J}$  est aujourd'hui + deux jours ouvrés et où  $T_{1W}$  est la date de fin du LIBOR (à savoir  $T_{2J} + 1$  semaine, ajustée si jour férié). Une bonne approche consiste à calculer le zéro-coupon de maturité  $T_{2J}$  au moyen du taux zéro-coupon obtenu précédemment :

$$B(0, T_{2J}) = \frac{1}{(1 + R(0, T_{1J}))^{T_{2J}}}$$

Dès lors la cotation du LIBOR 1 semaine fournit le zéro-coupon de maturité  $T_{1W}$  :

$$B(0, T_{1W}) = \frac{B(0, T_{2J})}{1 + \delta_{1W} \times \text{LIBOR}_{1W}}$$

On procède de même pour les autres taux LIBOR, qui fournissent la valeur des zéro-coupons  $B(0, T_{2W})$ ,  $B(0, T_{1M})$ ,  $B(0, T_{2M})$  et  $B(0, T_{3M})$ .

La partie intermédiaire (b) de la courbe est obtenue à partir de la cotation des contrats futures. Rappelons que le taux de référence du future portant sur un LIBOR de période d'intérêt  $(T_1, T_2)$  est relié au taux FRA par un ajustement de convexité :

$$R_{\text{FUT}}(0, T_1, T_2) = L(0, T_1, T_2) + \text{Adj}$$

avec :

$$L(0, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{B(0, T_1)}{B(0, T_2)} - 1 \right)$$

A la date de départ du premier contrat future, le taux zéro-coupon sera interpolé à partir des taux zéro-coupons déjà obtenus sur le court terme. Cela permet alors de déterminer le zéro-coupon correspondant à la date de fin du contrat future. Pour les contrats suivants, le taux zéro-coupon de la date de départ sera soit interpolé à partir de la courbe existante si la date de départ tombe avant la date de fin du précédent contrat, soit extrapolé si elle tombe après.

La partie long terme (c) de la courbe s'obtient à partir de la cotation des taux swaps. Rappelons que pour un swap débutant en  $T_0$  (typiquement aujourd'hui + 2 jours ouvrés), de maturité  $T_n$ , et dont les flux fixes sont versés aux dates  $T_1, T_2, \dots, T_n$  avec fractions d'intérêt  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ , le taux swap est :

$$S(0, T_0, T_n) = \frac{B(0, T_0) - B(0, T_n)}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(0, T_i)}$$

Si l'on dispose de cotations pour les taux swaps de maturités  $T_1, T_2, \dots, T_n$ , on va pouvoir déterminer itérativement les zéro-coupons. En effet, le zéro-coupon de maturité  $T_k$  s'exprime en



fonction du taux swap  $S(0, T_0, T_k)$  et des zéros coupons de maturités  $T_{k-1}$  et inférieures :

$$B(0, T_k) = \frac{B(0, T_0) - S(0, T_0, T_k) \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i B(0, T_i)}{1 + \delta_n S(0, T_0, T_k)}$$

En pratique on se heurte néanmoins aux problèmes suivants :

- Par le jeu des ajustements de dates, il se peut que les échéanciers des différents swaps ne coïncident pas rigoureusement. Plus généralement, la méthode ci-dessus ne fonctionne pas si la fréquence de la jambe fixe varie d'un swap à l'autre.
- Et surtout : il n'existe pas de liquidité sur toutes les maturités consécutives jusqu'à 30 ans. Comme mentionné plus haut on dispose par exemple de la cotation des swaps 2, 3, 4, 5, 7, 10, 15, 20 et 30 ans.

Il faudra donc intégrer une méthode d'interpolation dans le bootstrap des zéro-coupons (à la manière de la méthode décrite pour la courbe d'état, cf. section précédente).

### 3.4 Actualisation OIS (*Richard Guillemot*)

#### 3.4.1 L'unicité de la courbe des taux

Jusqu'à présent nous avons supposé l'existence d'une "unique" courbe des taux dite sans risque. Cette hypothèse a 2 conséquences très pratiques sur la méthode de valorisation :

- Première conséquence, il existe une structure des taux. Si on connaît le continuum des taux zéro coupon au comptant (c'est à dire les dire les taux zéro coupon qui fixent aujourd'hui et pour un tenor quelconque), il est possible de fixer le taux d'un emprunt forward, que l'on le réplique par 2 emprunts au comptant.
- Seconde conséquence, toutes les jambes variables de swap qui débutent et se terminent à la même date et de fréquence quelconque ont la même valeur. Elles sont équivalentes à recevoir le nominal en date de départ et à le rembourser à la fin : c'est la formule du double nominal. Ainsi le prix d'une obligation qui paie un coupon égal au LIBOR ou à l'EURIBOR vaut toujours 100 aux dates de son échéancier. Bien entendu les taux variables doivent être payés en fin de période en utilisant la base de calcul Exact 360. Dans le cas particulier d'une obligation qui paie quotidiennement le taux **EONIA** ou **Federal Funds**<sup>4</sup>, l'obligation est tous les jours au pair (de valeur égale à 100).

Le taux sans risque signifie sans risque de crédit. Chacune des 2 contreparties respectera ses engagements financiers. Dans le cas d'un prêt/emprunt, cette responsabilité repose entière-

4. Les taux EONIA (Euro Overnight Index Average) en euros et le taux Federal Funds sont les taux interbancaires qui prévalent pour un emprunt du jour au lendemain ou "overnight".

ment sur l'emprunteur. Une fois qu'il a reçu le nominal, tous les flux suivants, le paiement des intérêts et le remboursement, sont à sa charge. Dans le cas des produits dérivés, par exemple un swap de taux, la situation est symétrique et dépend de l'évolution des taux d'intérêt relativement au taux fixe du swap.

Avant la crise financière de 2008, les taux interbancaires LIBOR et EURIBOR étaient considérés comme sans risque de crédit. Les courbes de taux associées étaient utilisées pour valoriser tous les produits dérivés de taux. La faillite de la banque Lehman Brothers et le renflouement par les Etats de plusieurs grandes banques d'investissement ont remis en cause cette hypothèse.

### 3.4.2 Multiples courbes des taux et risque de liquidité

Dans le cas d'un prêt emprunt/emprunt le risque de crédit est principalement supporté par le prêteur, en effet le paiement des flux à venir est de la responsabilité de l'emprunteur. En échange l'emprunteur fait face à un nouveau problème : le manque de liquidité. En d'autres termes, l'emprunteur peut ne pas trouver de prêteur pour la durée dont il a besoin. Il devra emprunter pour une durée plus courte et trouver un nouveau prêteur pour la période restante. Il risque que le niveau des taux et la liquidité se soient dégradés à ce moment là. Le risque de liquidité et le risque de crédit sont les 2 facettes d'un même problème : le prêteur doit avoir confiance dans l'emprunteur et ce dernier ne doit pas trahir cette confiance.

Ce risque de liquidité se matérialise sur le marché des taux d'intérêt sous la forme de swap de basis. 2 parties s'échangent des jambes variables de fréquences différentes. Par exemple un swap 10Y EURIBOR 3M contre EURIBOR 6M - Xbps. La valeur théorique du taux 6M, obtenue par composition des taux 3M, doit être réduite d'une certaine marge, la **marge de basis**, afin que la valeur du swap lors de sa mise en place soit nulle. Cette marge nous indique l'existence de plusieurs courbes de taux associées à chaque tenor 1D, 1M, 3M, 6M, 12M.

La courbe un jour, "one day", 1D ou **OIS**<sup>5</sup> joue un rôle bien particulier. Elle est associée au prêt/emprunt à taux variable OIS. C'est le prêt/emprunt qui présente le moins de risque de crédit pour le prêteur et qui par conséquent a le plus faible coût de liquidité pour l'emprunteur. Chaque jour le prêteur récupère son nominal et il est libre de choisir une nouvelle contrepartie moins risquée. Il apparaît donc comme une bonne solution de considérer cette courbe comme la courbe sans risque.

### 3.4.3 L'usage du collatéral et l'actualisation OIS

L'usage du collatéral (ou hypothèque) est la méthode en pratique la plus utilisée pour supprimer ou tout au moins réduire le risque de crédit d'un produit dérivé. Le débiteur met en gage

---

5. **OIS** (Overnight Indexed Swap) est un terme générique pour qualifier les swaps ou les taux d'intérêt de fréquence quotidienne (EONIA ou bien Federal Funds).

de l'argent ou des actifs financiers à hauteur de sa dette. Chaque jour on constate l'évolution de la valeur du produit et chacune des parties poste ou reçoit le montant qui couvre la nouvelle exposition, ce sont les **appels de marge**. Le détenteur du collatéral doit rémunérer sa contrepartie à un taux dit **taux de collatéral**. Du fait des échanges quotidiens ce taux est le plus souvent le taux OIS. On remarque que le futur est un cas particulier de la collatéralisation dans lequel le taux de collatéral est nul.

En pratique l'usage du collatéral est régi par le Credit Support Annex (CSA) du contrat ISDA (International Swaps and Derivatives Association), le contrat standard entre 2 contreparties qui traitent des swaps. Le CSA définit tous les aspects techniques des échanges de collatéral et en particulier la fréquence d'échange, la devise de paiement et le taux de collatéral.

En pratique l'usage du collatéral ne supprime pas complètement le risque de contrepartie pour 2 raisons :

- Le suivi du collatéral et le paiement des appels de marge ne sont pas effectués en continu. Ainsi peu de temps avant le défaut, l'exposition de crédit peut fortement se dégrader sans que les mouvements de valeurs soient capturés par les appels de marge.
- Les valeurs des actifs financiers mis en gage comme collatéral peuvent parfois être négativement corrélées avec le défaut de la contrepartie. Ainsi la valeur du collatéral ne couvre plus le montant emprunté par le créancier une fois le défaut survenu. On parle alors de "**Wrong Way Risk**" (risque de mauvais sens). Ce problème n'existe pas si le collatéral est dans la devise de l'opération collatéralisée.

Vladimir Piterbarg [6] propose une adaptation du cadre classique de valorisation des produits dérivés. Il démontre que le drift d'un actif collatéralisé doit être le taux de collatéral sous la probabilité risque neutre. Par conséquent les flux des produits dérivés doivent être actualisés au taux de collatéral. Le taux OIS est utilisé de façon standard dans les contrats CSA. Nous devons donc actualiser les flux des dérivés standards (Money market, FRA, Swap) avec la courbe OIS. Ce nouveau choix d'actualisation nécessite une adaptation de l'algorithme de calibration de la courbe présenté précédemment. On appelle généralement cette technique **actualisation OIS** ou **OIS discounting**.

### 3.4.4 Calibration des différentes courbes

La liquidité entraîne des cotations distinctes pour des swaps de même maturité mais faisant intervenir des taux de tenors différents. On peut distinguer 2 catégories parmi les produits disponibles sur le marché :

- **les swaps à taux fixe** : on distingue les différentes cotations de ce swap suivant la fréquence de la jambe variable  $K^f$ . Nous supposons que la fréquence de la jambe fixe est toujours la

même (annuelle en euro et semi-annuelle en dollar).

- **les swaps de basis** : ces produits échangent des jambes variables de fréquences différentes. On retire une marge  $m^{f_1-f_2}$  à la jambe de la fréquence la plus faible afin que la valeur du swap soit nulle lors de sa mise en place.

Le tableau ci dessous illustre les différentes cotations possibles pour un tenor donné.

Jambe	Fixe	OIS	1M	3M	6M	12M
Fixe		$K^{OIS}$	$K^{1M}$	$K^{3M}$	$K^{6M}$	$K^{12M}$
OIS			$m^{OIS-1M}$	$m^{OIS-3M}$	$m^{OIS-6M}$	$m^{OIS-12M}$
1M				$m^{1M-3M}$	$m^{1M-6M}$	$m^{1M-12M}$
3M					$m^{3M-6M}$	$m^{3M-12M}$
6M						$m^{6M-12M}$

Ces cotations sont redondantes et peuvent être reliées les unes aux autres par des arguments de réplication. L'achat et la vente de 2 swaps payeurs de taux fixe et de fréquences variables distinctes, réplique un swap de basis.

Soient 2 échéanciers de fréquences différentes et synchronisées. Nous supposons que le premier échéancier contient  $n$  flux et le second  $m$  flux. Nous disposons des 3 équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \delta_i^n L(T_{i-1}^n, T_i^n) B(t, T_i^n) &= K^n LVL(T_0, T_n) \\
 \sum_{i=1}^m \delta_i^m L(T_{i-1}^m, T_i^m) B(t, T_i^m) &= K^m LVL(T_0, T_m) \\
 \sum_{i=1}^n \delta_i^n L(T_{i-1}^n, T_i^n) B(t, T_i^n) &= \sum_{i=1}^m \delta_i^m [L(T_{i-1}^m, T_i^m) - m^{n,m}] B(t, T_i^m)
 \end{aligned}$$

- les quantités avec un **exposant n** sont associées à la jambe variable de la fréquence la plus grande.
- les quantités avec un **exposant m** sont associées à la jambe variable de la fréquence la plus faible.
- les quantités **sans exposant** sont associées à la jambe fixe des 2 swaps.

On en déduit ainsi que :

$$K^m - K^n = \frac{LVL^m(T_0^m, T_m^m)}{LVL(T_0, T_n)} m^{n,m}$$

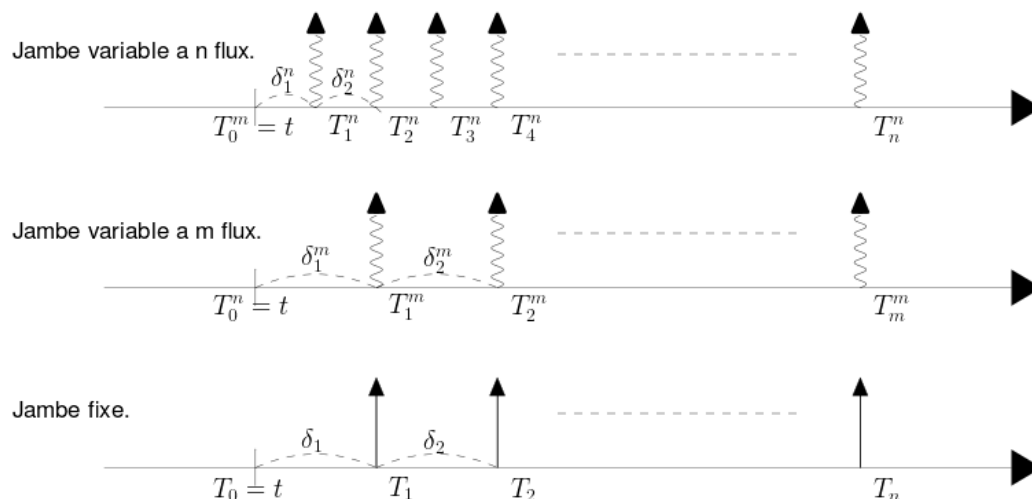


FIGURE 3.2 – Les différents échéanciers.

On peut approcher cette relation :

$$K^m - K^n \simeq m^{n,m}$$

On en déduit une "sorte" de relation de Chasles pour les marges de basis :

$$m^{n,m} + m^{m,p} \simeq m^{n,p}$$

$m, n$  et  $p$  correspondent à trois fréquences différentes.

Pour établir les relations précédentes nous n'avons fait aucune hypothèse sur la courbe d'actualisation, c'est à dire comment sont calculés les facteurs d'actualisation  $B(t, T_i)$  ou les différents levels  $LVL^n(T_0, T_n), LVL^m(T_0, T_n), LVL(T_0, T_n)$ .

On peut considérer les cotations des swaps comme des invariants et elles vont être utilisées comme valeurs cibles pour l'algorithme de calibration des courbes. L'objectif de l'algorithme est de construire une courbe pour chaque fréquence OIS, 1M, 3M, 6M et 12M, que l'on utilisera pour estimer les taux forward des jambes variables associées. Le niveau des taux sera déterminé afin que la valeur de ces swaps de marché soit nulle.

L'algorithme :

- **Etape 1 : la courbe OIS**

La courbe OIS joue un rôle bien particulier dans l'algorithme. En effet on utilisera la même courbe pour estimer les taux forward des swaps OIS et actualiser leurs flux. Par conséquent

l'algorithme classique sera utilisé.

• **Etape 2 : les courbes de forward**

Si l'on utilise l'algorithme classique de construction de la courbe des taux pour les index non OIS, on ne respectera pas les cotations de marché du fait de l'actualisation. Le nouvel algorithme déterminera donc de nouveaux taux forward pour chaque index (1M, 3M, 6M, 12M) afin que les swaps de marché soient au pair.

Nous allons illustrer l'algorithme avec un exemple très simple. On considère :

- les 2 Money Market EURIBOR 6M et EURIBOR 12M,
- les 2 swaps de basis 6M vs. EONIA et 12M vs. EONIA, qui ont la même marge de basis,
- et enfin le swap taux fixe de maturité 12M et de tenor 6M (la jambe fixe est payée annuellement et la jambe variable semi-annuellement). Son taux est égal à l'EURIBOR 12M. On remarque que dans cet exemple la marge 12M vs 6M est nulle.

Produit	Taux (%)	Symbole
EURIBOR 6M	1%	$R_1$
EURIBOR 12M	1.5%	$R_2$
EONIA vs BOR 6M	50bps	$m$
EONIA vs BOR 12M	50bps	$m$
SWAP 12M vs 6M	1.5%	$R_2$
FRA 6M dans 6M	??	F

On veut calculer le taux forward 6M dans 6M, que l'on notera F. On actualisera tous les flux avec la courbe OIS. Il nous faut donc résoudre l'équation suivante :

$$\delta_1 B^{OIS}(t, T_{6M}) R_1 + \delta_2 B^{OIS}(t, T_{12M}) \times F = (\delta_1 + \delta_2) R B^{OIS}(t, T_{12M}) \quad (3.3)$$

Par souci de simplicité, on considère que les conventions de calcul des fractions d'années sont les mêmes sur les jambes variables et les jambes fixes.

**L'étape 1** consiste à déterminer les facteurs d'actualisation à partir des swaps OIS. Le choix de la courbe OIS pour l'actualisation permet de les déduire directement par les formules classiques :

$$B^{OIS}(t, T_{6M}) = \frac{1}{1 + \delta_1(R_1 - m)}$$

$$B^{OIS}(t, T_{12M}) = \frac{1}{1 + (\delta_1 + \delta_2)(R_2 - m)}$$

**L'étape 2** consiste simplement à résoudre l'équation (3.3) :

$$F = \frac{(\delta_1 + \delta_2)R_2}{\delta_2} - R_1\delta_1 \frac{1 + (\delta_1 + \delta_2)(R_2 - m)}{\delta_2(1 + \delta_1(R_1 - m))}$$

Après quelques simplifications :

$$F = L^{OIS}(t, T_{6M}, T_{12M}) + m[1 - \delta_1 L^{OIS}(t, T_{6M}, T_{12M})] \simeq L(t, T_{6M}, T_{12M})$$

avec :

$$L^{OIS} = \frac{1}{\delta_2} \left[ \frac{B^{OIS}(t, T_{6M})}{B^{OIS}(t, T_{12M})} - 1 \right] \quad L = \frac{1}{\delta_2} \left[ \frac{B(t, T_{6M})}{B(t, T_{12M})} - 1 \right] = \frac{1}{\delta_2} \left[ \frac{1 + (\delta_1 + \delta_2)R_2}{1 + \delta_1 R_1} - 1 \right]$$

La formule précédente nous indique que le nouveau taux  $F$ , prenant en compte l'actualisation OIS, est très proche de la formule classique du forward  $L(T_{6M}, T_{12M})$ . Le tableau suivant illustre que l'ajustement, c'est à dire  $F - L(T_{6M}, T_{12M})$ , est une fraction de point de base.

<b>m=OIS-BOR</b>	<b>F</b>	<b>Ajustement</b>
0 bps	1.9900%	0.00 bps
10 bps	1.9905%	0.05 bps
20 bps	1.9910%	0.10 bps
30 bps	1.9915%	0.15 bps
40 bps	1.9920%	0.20 bps
<b>50 bps</b>	<b>1.9925%</b>	<b>0.25 bps</b>

### 3.4.5 Gestion dans un environnement multi courbes

Nous avons vu précédemment que les produits dérivés collatéralisés doivent être actualisés au taux de collatéral standard OIS. L'algorithme de calage des courbes des taux doit être adapté en conséquence. En pratique la formule de calcul des taux forward est légèrement ajustée. Si l'on gère un portefeuille qui ne contient que des produits dérivés collatéralisés, l'actualisation OIS a peu d'impact. Une banque se collatéralise seulement avec ses contreparties bancaires. En effet le client d'une banque qui traite un swap adossé à une obligation ne souhaite pas que sa trésorerie soit perturbée par des appels de marge sur lesquels il n'a aucun contrôle. La banque devra alors couvrir des opérations non collatéralisées avec des opérations collatéralisées. Une opération non collatéralisée ne sera pas actualisée au taux OIS mais au taux de financement de la banque plus proche de l'EURIBOR.

Considérons un swap 20 ans, standard, non collatéralisé, d'un nominal de 100 Millions d'euros payeur de taux fixe (**Swap Client**) couvert par un swap 20 ans, collatéralisé, receveur de taux fixe (**Swap de Marché**). Les taux d'intérêt valent 2% et la marge OIS vs. EURIBOR 50 points de base.

Le swap client sera actualisé au taux EURIBOR et le swap de marché au taux OIS. Ci-dessous la sensibilité et la convexité de chacune des 2 opérations :

	PV (Mios EUR)	Sensi (kEUR)	Convexité (EUR)
<b>Swap de Marché</b>	0	172	-333
<b>Swap Client</b>	2	-166	315

Il faudra traiter 96.5 millions d'euros ( $= \frac{166}{172} \times 100$  millions d'euros) du swap de marché pour couvrir le swap du client. Le portefeuille couvert au premier ordre génère une convexité négative de 6 euros  $\text{bp}^2$ , c'est à dire une perte de 30 kEUR ( $\frac{1}{2} \times 6 \times 10000$ ) pour un mouvement de taux à la hausse ou à la baisse de 100 points de base.



## Partie 4

# Options de taux

---

### 4.1 Evaluer les actifs en présence de taux stochastiques

Les résultats qui suivent sont présentés succinctement et sans démonstration. Pour plus de détails on pourra se reporter au très bon support de cours de A. Lesniewski [5], disponible en ligne.

Sous les hypothèses habituelles d'absence d'opportunités d'arbitrage, on sait qu'il existe une mesure de probabilité  $Q$ , dite probabilité risque-neutre, sous laquelle les prix actualisés des actifs du marché sont des martingales. En d'autres termes si l'on considère un actif  $X$  du marché, de prix  $X_t$  à la date  $t$ , alors le processus :

$$M_t = e^{-\int_0^t r_s ds} X_t$$

est une  $Q$ -martingale. Cela implique que, connaissant la valeur en  $T > t$  de cet actif, on pourra obtenir sa valeur en  $t$  par l'espérance :

$$X_t = \mathbb{E}_t^Q \left( e^{-\int_t^T r_s ds} X_T \right)$$

Cette formulation est suffisante si l'on suppose les taux d'intérêt déterministes, car le terme d'actualisation peut être sorti de l'espérance. On fera la plupart du temps cette hypothèse sur les dérivés sur actions ou change dans lesquels le risque de taux est négligeable par rapport aux autres aléas. En revanche dès que l'on s'intéresse aux dérivés de taux, on devra par nature supposer les taux aléatoires. Dans une telle situation l'évaluation risque-neutre n'est pas adaptée car le terme d'actualisation (désormais stochastique) complique énormément les calculs. Le concept de numéraire et la technique de changement de numéraire va nous faciliter les choses.

Un **numéraire** est un actif financier ne distribuant pas de dividendes, et dont le processus de prix  $N_t$  reste toujours strictement positif. Sous l'hypothèse d'AOA, pour tout numéraire  $N$ , il existe une mesure de probabilité  $Q^N$  – appelée mesure martingale équivalente – telle que tout actif du marché exprimé en unité de numéraire soit une  $Q^N$ -martingale. Autrement dit, la mesure  $Q^N$  est telle que pour tout actif  $X$  du marché de prix  $X_t$  à la date  $t$ , le processus  $X_t / N_t$  est une  $Q^N$ -martingale.

Considérons à nouveau notre actif  $X$ . La propriété précédente implique qu'il existe une mesure de probabilité  $Q^N$  telle que :

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}_t^{Q^N} \left( \frac{X_T}{N_T} \right)$$

Pour passer d'un numéraire  $N$  à un numéraire  $N'$  on écrira donc :

$$X_t = N_t \mathbb{E}_t^{Q^N} \left( \frac{X_T}{N_T} \right) = N'_t \mathbb{E}_t^{Q^{N'}} \left( \frac{X_T}{N'_T} \right)$$

Ainsi, la probabilité risque-neutre est la mesure associée au numéraire :

$$N_t = \exp \left( \int_0^t r_s ds \right)$$

qui n'est autre que la valeur de 1 euro placé à la date initiale et réinvesti en continu au taux sans risque instantané.

Revenons à notre problème d'évaluation en présence de taux stochastiques. Pour faire sortir l'actualisation de l'espérance, l'idée est d'utiliser comme numéraire le zéro-coupon de maturité  $T$ . On pose donc  $N_t = B(t, T)$  et on note  $Q^T$  la mesure martingale équivalente correspondante. Cette mesure est appelée **probabilité forward-neutre de maturité  $T$** . Sous cette nouvelle mesure l'évaluation de  $X$  s'écrira :

$$X_t = B(t, T) \mathbb{E}_t^{Q^T} \left( \frac{X_T}{B(T, T)} \right) = B(t, T) \mathbb{E}_t^{Q^T} (X_T)$$

Ce qui permet en effet de faire disparaître le taux court de l'espérance.

Voici sur un exemple très classique la façon d'exploiter ce résultat. Supposons que l'actif  $X$  soit un call de maturité  $T$  sur un actif  $S$  sous-jacent (on suppose que  $S$  ne distribue pas de dividendes). On a donc  $X_T = (S_T - K)^+$ ,  $X_t$  représentant la valeur de l'option à la date  $t < T$ . Ce n'est pas directement l'actif  $S$  que l'on va modéliser mais le forward  $F_t = S_t / B(t, T)$ , qui n'est autre que l'actif  $S$  exprimé en unités du numéraire  $B(t, T)$ . L'intérêt de la manœuvre est que ce forward est par construction une martingale sous la mesure  $Q^T$ , donc un processus sans drift ; si l'on suppose sa dynamique log-normale on pourra écrire :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma F_t dW_t^{Q^T} \\ \text{où } W^{Q^T} \text{ est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^T \end{cases}$$

L'évaluation de l'option est alors directe au moyen de la formule de Black & Scholes :

$$X_t = B(t, T) \mathbf{BS}_{\text{call}}(T - t, K, F_t, \sigma)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{BS}_{\text{call}}(\tau, K, F, \sigma) = F\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2) \\ \mathbf{BS}_{\text{put}}(\tau, K, F, \sigma) = K\mathcal{N}(-d_2) - F\mathcal{N}(-d_1) \\ \mathcal{N} : \text{fonction de répartition de la loi normale centrée réduite} \\ d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F}{K}\right) + \frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Pour résumer :

- L'évaluation des dérivés de taux utilise systématiquement la technique de changement de numéraire.
- Ce changement de numéraire permet de sortir le terme d'actualisation de l'espérance et d'écrire les payoffs optionnels sur des martingales, i.e. des processus sans drift.
- Cette technique est indispensable pour l'évaluation des caps, floors et swaptions détaillée dans les paragraphes suivants.

## 4.2 Caps et floors

Un cap est un instrument de taux dont la structure est calquée sur celle d'une jambe variable de swap.

Considérons un cap sur EURIBOR 6 mois, de strike  $K$ , de date de départ  $T_0$  et de fin  $T_n$ . Il est défini sur un échéancier  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  identique à celui de la jambe variable correspondante. Dans ce qui suit nous supposons le notionnel unitaire. A chaque date  $T_i$  ( $i > 0$ ), le cap verse un flux égal à :

$$\delta_i \max(L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i) - K, 0)$$

où  $\delta_i$  correspond à la fraction d'année de la période d'intérêt  $(T_{i-1}, T_i)$  (base Exact/360), et où la date de fixing  $T_{i-1}^f$  se situe deux jours ouvrés avant  $T_{i-1}$ . Il s'agit donc du même taux EURIBOR que dans la jambe variable d'un swap, sauf que dans le cas du cap le flux est égal au payoff d'un call de strike  $K$  sur ce taux.

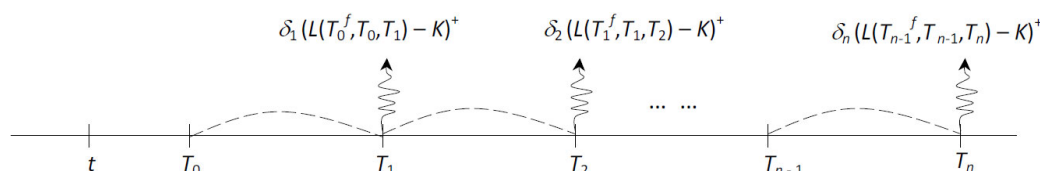


FIGURE 4.1 – Cap sur EURIBOR

Un cap peut donc être vu comme un panier d'options sur EURIBOR. Chacune de ces options est appelée un caplet. Le prix du cap s'obtient comme la somme des prix des caplets le composant.

A l'instar du cap, un floor est composé de floorlets, chacun étant défini comme un put de strike  $K$  sur EURIBOR. Le flux versé par le floor en date  $T_i$  vaut donc  $\delta_i \max(K - L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i), 0)$ .

### Exemples.

- **CAP 10Y sur EURIBOR 6M, strike 4,50%, départ spot.** Il consistera en 19 caplets consécutifs, de même strike 4,50%. Le premier caplet est exclu car le fixing de l'EURIBOR correspondant est d'ores et déjà connu au moment de l'émission du cap.
- **FLOOR 1Y x 5Y ("1 by 5") sur LIBOR USD 3M, strike 5,00%.** Il s'agit d'un floor à départ forward, composé de 16 floorlets. Le premier floorlet expire dans un an (paiement 3 mois plus tard), le dernier floorlet expire dans 4 ans et 9 mois (paiement dans 5 ans). A la différence de l'exemple précédent, le premier floorlet est pris en compte car il correspond à un fixing de LIBOR encore inconnu.

L'utilisation des caps et des floors peut être la suivante. Remarquons tout d'abord que pour toute variable aléatoire  $X$  :

- $X$  *cappé* à la valeur  $C = X - (X - C)^+$
- $X$  *flooré* à la valeur  $F = X + (F - X)^+$
- $X$  *cappé* à  $C$  et *flooré* à  $F = X + (F - X)^+ - (X - C)^+$

En conséquence, si on combine l'achat d'une jambe LIBOR/EURIBOR avec la vente d'un cap et/ou l'achat d'un floor, on pourra synthétiser une jambe variable où le taux est cappé et/ou flooré à certaines valeurs définies par les strikes du cap et du floor. Du point de vue de l'ALM, une banque de détail proposant aux particuliers des emprunts immobiliers à taux variable cappé pourra donc couvrir son bilan en empruntant à EURIBOR et en achetant des caps aux strikes adéquats.

La parité call-put pour les caps et floors s'écrit de la façon suivante. Considérons l'achat d'un cap de date de début  $T_0$  et de fin  $T_n$  combiné avec la vente d'un floor de mêmes caractéristiques. A la date  $T_i$  le flux résultant est

$$\delta_i (L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i) - K)$$

qui n'est autre que le flux net d'un swap payeur LIBOR contre taux fixe  $K$  (le taux fixe étant payé sur les mêmes échéancier et base de calcul que le LIBOR). En valeur actuelle on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{PV}_{\text{CAP}}(t) - \mathbf{PV}_{\text{FLOOR}}(t) &= \mathbf{PV}_{\text{SWAP}}(t) \\ &= B(t, T_0) - B(t, T_n) - K \sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i) \end{aligned}$$

Par définition, le cap et le floor sont à la monnaie (*At The Money*) s'ils ont même valeur, ce qui correspond au strike suivant :

$$K_{\text{ATM}} = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i)}$$

soit  $K_{\text{ATM}}$  = le taux swap (forward) associé à l'échéancier du cap. Attention : ce taux swap diffère légèrement d'un taux swap standard en raison des conventions utilisées sur la jambe fixe (fréquence : celle du cap, base de calcul : celle du LIBOR soit Exact/360).

Notons enfin que ce strike ATM est un strike "moyen". Aucun des caplets/floorlets ne sera réellement à la monnaie ; il faudrait pour cela utiliser un strike différent pour chaque caplet/floorlet égal au LIBOR forward (taux FRA) correspondant.

Passons maintenant à l'évaluation d'un cap. Considérons le caplet payé à la date  $T_i$  ; il verse à cette date le payoff :

$$\delta_i \left( L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i) - K \right)^+$$

Utilisons les techniques de la section précédente, et évaluons ce flux futur en utilisant la mesure forward-neutre associée à la date de paiement  $T_i$  :

$$\mathbf{PV}_{\text{Caplet}}^i(t) = \delta_i B(t, T_i) \mathbb{E}_t^{Q^{T_i}} \left( \left( L(T_{i-1}^f, T_{i-1}, T_i) - K \right)^+ \right)$$

Le taux LIBOR  $L(t, T_{i-1}, T_i)$  sous-jacent à l'option est par construction une martingale sous cette mesure forward :

$$L(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1 \right) = \frac{1}{\delta_i} \left( \frac{B(t, T_{i-1}) - B(t, T_i)}{B(t, T_i)} \right)$$

Il s'exprime en effet comme un actif du marché ( $1/\delta_i \times$  le portefeuille constitué de l'achat du zéro-coupon de maturité  $T_i$  et de la vente du zéro-coupon de maturité  $T_{i-1}$ ), exprimé en unité du numéraire  $B(t, T_i)$ .

On peut donc, sous cette mesure, modéliser ce taux LIBOR comme un processus sans drift. Le cas considéré ci-dessous est celui du modèle de Black, qui suppose une dynamique log-normale sur le LIBOR :

$$\begin{cases} dL(t, T_{i-1}, T_i) = \sigma L(t, T_{i-1}, T_i) dW_t^{Q^{T_i}} \\ \text{où } W^{Q^{T_i}} \text{ est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{T_i} \end{cases}$$

Sous cette hypothèse, l'évaluation du caplet est directe au moyen de la formule de Black & Scholes :

$$\mathbf{PV}_{\text{Caplet}}^i(t) = \delta_i B(t, T_i) \mathbf{BS}_{\text{call}}(T_{i-1}^f - t, K, L(t, T_{i-1}, T_i), \sigma)$$

où la fonction  $\mathbf{BS}_{\text{call}}$  est définie par (4.1).

Attention : la date de paiement du caplet est bien  $T_i$  (ce qui justifie l'utilisation de la mesure forward associée), mais la maturité intervenant dans la formule est la date  $T_{i-1}^f$  de fixing du taux LIBOR, car celui-ci diffuse uniquement de la date  $t$  à sa date de fixing.

Sous les hypothèses du modèle de Black, on sait maintenant évaluer chacun des caplets ; le prix du cap correspondant est :

$$\mathbf{PV}_{\text{CAP}}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{PV}_{\text{Caplet}}^i(t)$$

### 4.3 Swaptions

Une swaption est une option dont le sous-jacent est un swap de taux commençant à une date future.

Plus concrètement, notons  $T_0$  la date de départ du swap sous-jacent,  $T_n$  sa date de fin,  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$  l'échéancier de sa jambe fixe, et  $(\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n)$  les fractions d'années correspondantes. Pour alléger les notations on supposera le notionnel du swap égal à 1.

Une **swaption payeuse** de strike  $K$  sur ce swap sous-jacent est l'option, à la date de maturité  $T_f = T_0 - 2$  jours ouvrés, d'entrer dans le swap payeur du taux fixe  $K$ . La **swaption receveuse** correspondante est l'option d'entrer dans le swap receveur du taux fixe  $K$ .

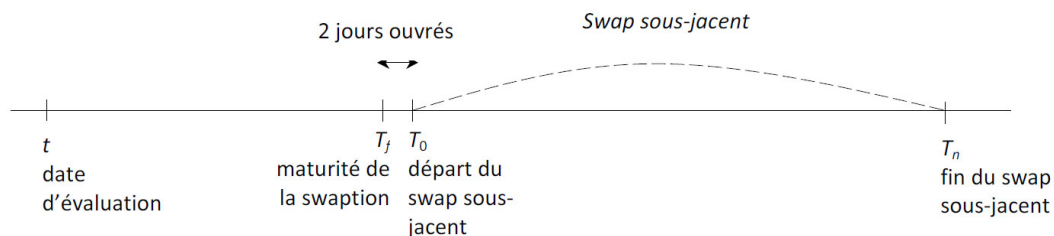


FIGURE 4.2 – Swaption

**Exemples.** Le marché des swaptions est relativement liquide. Les swaptions cotées sur le marché sont écrites pour des swaps sous-jacents de caractéristiques standard (jambe fixe annual bond basis vs. variable EURIBOR 6M money market sur l'euro ; jambe fixe semi-annual bond basis vs. variable LIBOR USD 3M money market sur le dollar). Voici deux exemples sur l'euro :

- **Swaption receveuse 1Y → 5Y ("1 into 5"), strike 5,50%** : donne le droit à son détenteur de rentrer dans 1 an dans le swap 5 ans receveur du taux fixe 5,50% et payeur de l'EURIBOR 6M. Notons bien que la date de fin du swap sous-jacent se situe donc dans 6 ans = 1 an + 5 ans.
- **Swaption payeuse 5Y → 10Y ("5 into 10"), strike 6,00%** : donne le droit à son détenteur de rentrer dans 5 ans dans le swap 10 ans payeur du taux fixe 6,00% et receveur de l'EURIBOR

6M.

L'évaluation des swaptions est aisée dès lors que l'on maîtrise la technique de changement de numéraire. Nous reprenons ici les notations utilisées dans le paragraphe consacré aux swaps de taux.

Le détenteur de la swaption payeuse exercera l'option si, arrivé à la maturité  $T_f$ , le swap sous-jacent s'avère profitable ; c'est à dire si  $\mathbf{PV}_V(T_f) - \mathbf{PV}_F(T_f) > 0$ . Dans ce cas, il "empoche" la PV du swap (virtuellement car il rentre en fait physiquement dans le swap). Dans le cas inverse, le gain est nul. Le payoff de la swaption en date  $T_f$  s'écrit ainsi  $(\mathbf{PV}_V(T_f) - \mathbf{PV}_F(T_f))^+$ . En utilisant la mesure forward-neutre associée à la date  $T_f$ , la swaption payeuse peut donc s'évaluer ainsi :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(t) = B(t, T_f) \mathbb{E}_t^{Q^{T_f}} \left( (\mathbf{PV}_V(T_f) - \mathbf{PV}_F(T_f))^+ \right)$$

Comme on l'a vu dans la section consacrée aux swaps de taux, la PV du swap peut s'écrire en fonction du taux swap et du level du swap. Le prix de la swaption se réécrit :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(t) = B(t, T_f) \mathbb{E}_t^{Q^{T_f}} \left( \text{LVL}(T_f, T_0, T_n) (S(T_f, T_0, T_n) - K)^+ \right)$$

avec :

$$\text{LVL}(t, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^n \delta_i B(t, T_i) \quad \text{et} \quad S(t, T_0, T_n) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\text{LVL}(t, T_0, T_n)}$$

Considérons le numéraire défini par le level du swap (panier de zéro-coupons), et notons  $Q^{\text{LVL}}$  la mesure martingale équivalente associée. L'évaluation de la swaption sous cette nouvelle mesure s'écrit :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(t) = \text{LVL}(t, T_0, T_n) \mathbb{E}_t^{Q^{\text{LVL}}} \left( (S(T_f, T_0, T_n) - K)^+ \right)$$

En utilisant la mesure associée au level du swap, dite aussi mesure *swap-neutre*, la swaption payeuse peut s'interpréter comme un call sur le taux swap. De plus, le taux swap est une martingale sous la probabilité  $Q^{\text{LVL}}$  puisque qu'il s'écrit comme la valeur d'un actif de marché (un portefeuille constitué de deux zéro-coupons) divisée par le numéraire. Comme dans le cas du cap, on peut donc modéliser le taux swap comme un processus sans drift au moyen du modèle de Black :

$$\begin{cases} dS(t, T_0, T_n) = \sigma S(t, T_0, T_n) dW_t^{Q^{\text{LVL}}} \\ \text{où } W^{Q^{\text{LVL}}} \text{ est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{\text{LVL}} \end{cases}$$

Avec pour résultat :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(t) = \text{LVL}(t, T_0, T_n) \mathbf{BS}_{\text{call}}(T_f - t, K, S(t, T_0, T_n), \sigma)$$

Quelques remarques pour conclure :

- Inversement, une swaption receveuse s'écrit comme un put sur le taux swap.
- La parité call-put est immédiate : l'achat d'une swaption payeuse (strike  $K$ ) combiné à la vente d'une swaption receveuse de mêmes caractéristiques réplique exactement le swap payeur du taux fixe  $K$ . En termes de prix on aura donc  $\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(t) - \mathbf{PV}_{\text{Sw}}^R(t) = \text{valeur du swap payeur du taux fixe } K$ .
- Une swaption est à la monnaie lorsque le swap sous-jacent est au pair (PV nulle), c'est à dire pour le strike  $K_{\text{ATM}} = S(t, T_0, T_n)$ .
- Un swap peut être vu comme un panier de taux forwards LIBOR – et donc une swaption comme une option sur ce panier. Cela mène à une stratégie classique de valeur relative : par exemple achat du straddle<sup>1</sup> swaption 1Y → 5Y contre vente du cap/floor straddle correspondant 1Y × 6Y. Une telle stratégie permet de prendre position sur la corrélation entre les taux LIBOR forwards et tirer bénéfice d'une inconsistance (supposée) entre la volatilité des caps/floors et celle des swaptions.

## 4.4 Au delà du modèle de Black

Le modèle de Black utilisé jusqu'à présent spécifie la dynamique du forward (taux swap ou LIBOR) comme un processus log-normal de volatilité  $\sigma$  constante, donc indépendante du niveau du forward. L'existence d'un *smile de volatilité* assez prononcé sur les options de taux, c'est à dire d'une dépendance de la volatilité implicite des options vis à vis de leur strike, met en évidence les limites du modèle de Black.

Les opérateurs de marché ont bien conscience de l'inadéquation de ce modèle : de fait, il n'est utilisé que comme un référent permettant de coter les options vanilles en termes de volatilité implicite. Dès que l'on s'intéresse à la gestion du risque de ces options (via une couverture en delta, éventuellement en véga), ou à l'évaluation de produits plus complexes, il est souhaitable d'avoir recours à des modèles plus riches et d'une cohérence accrue avec le smile de volatilité.

La classe des modèles à volatilité locale est une piste pour améliorer le modèle de Black. Ces modèles consistent à spécifier la volatilité instantanée du forward comme une fonction déterministe  $\sigma(t, F)$  du temps et du niveau du forward :

$$dF_t = \sigma(t, F_t) dW_t$$

Même si l'on ne connaît pas réellement la nature de la volatilité (l'observation empirique montre qu'elle est stochastique), on peut en revanche calibrer la fonction  $\sigma$  afin que le modèle reproduise au mieux les prix cotés des options (et donc les volatilités implicites correspondantes). Parmi les modèles à volatilité locale, on peut notamment considérer les trois cas suivants qui fournissent des solutions analytiques pour le prix des calls et puts :

1. Un straddle est une stratégie consistant à acheter simultanément un call et un put de mêmes strikes.



- le modèle normal
- le modèle log-normal décalé
- le modèle CEV

#### 4.4.1 Le modèle normal

Dans le modèle normal la dynamique du taux forward est défini de la manière suivante :

$$dF_t = \sigma dW_t$$

sous le numéraire adéquat. Le paramètre  $\sigma$  est appelé la **volatilité normale** (ou volatilité absolue, ou encore “vol bp”). L'EDS s'intègre immédiatement en :

$$F_t = F_0 + \sigma W_t$$

Ce qui met en évidence le principal problème du modèle normal : le taux forward  $F$  a une probabilité non nulle de devenir négatif. Dans les circonstances habituelles d'utilisation du modèle cette probabilité est néanmoins très faible.

Dans le modèle normal, le prix à la date  $t$  du call et du put de maturité  $T$  et de strike  $K$  s'écrivent :

$$\mathbf{PV}_{\text{call}}(t) = N(t) \mathbf{N}_{\text{call}}(T - t, K, F_t, \sigma)$$

$$\mathbf{PV}_{\text{put}}(t) = N(t) \mathbf{N}_{\text{put}}(T - t, K, F_t, \sigma)$$

Où  $N(t)$  représente la valeur en  $t$  du numéraire utilisé (zéro-coupon de maturité la date de fin du LIBOR pour un caplet, level du swap sous-jacent pour une swaption etc...), et où les fonctions  $\mathbf{N}_{\text{call}}$  et  $\mathbf{N}_{\text{put}}$  sont données par :

$$\mathbf{N}_{\text{call}}(\tau, K, F, \sigma) = \sigma \sqrt{\tau} \left( d^+ \mathcal{N}(d^+) + \mathcal{N}'(d^+) \right)$$

$$\mathbf{N}_{\text{put}}(\tau, K, F, \sigma) = \sigma \sqrt{\tau} \left( d^- \mathcal{N}(d^-) + \mathcal{N}'(d^-) \right)$$

avec :

$$d^\pm = \pm \frac{F - K}{\sigma \sqrt{\tau}}$$

Le modèle normal est souvent utilisé dans le monde des options de taux et a parfois tendance à remplacer le modèle de Black. De nombreux opérateurs préfèrent parler en termes de volatilité normale (plutôt que log-normale) car ils jugent que les variations des taux sont absolues plutôt que relatives.

La figure 4.3 ci-après représente le smile de volatilité (Black-implicite) dans le modèle normal. On remarquera que celui ci est décroissant en fonction du strike des options ; on parle dans ce cas de *skew* de volatilité.

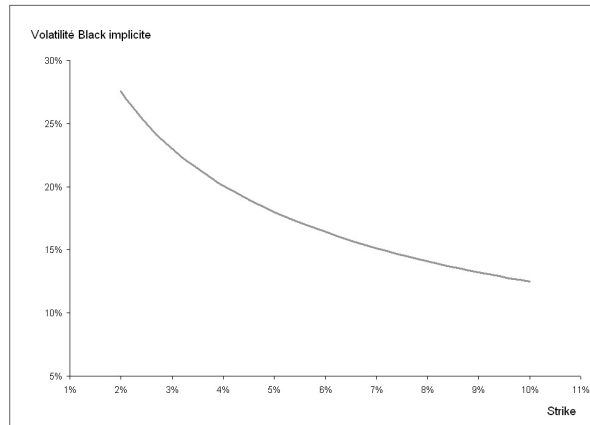


FIGURE 4.3 – Smile Black-implicite du modèle normal. Le taux forward est 5%. La volatilité normale  $\sigma$  est égale à 0,90%.

#### 4.4.2 Le modèle log-normal décalé

En anglais on parle de *shifted log-normal model*. La dynamique du forward sous le numéraire  $N$  adéquat s'écrit au moyen d'une volatilité  $\sigma$  et d'un paramètre  $d$  de décalage :

$$dF_t = \sigma(F_t + d)dW_t$$

Il s'intègre donc en :

$$F_T = (F_t + d) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(T-t) + \sigma(W_T - W_t)\right) - d$$

On en déduit :

$$\mathbf{PV}_{\text{call}}(t) = N(t) \mathbf{SL}_{\text{call}}(T-t, K, F_t, \sigma, d)$$

$$\mathbf{PV}_{\text{put}}(t) = N(t) \mathbf{SL}_{\text{put}}(T-t, K, F_t, \sigma, d)$$

avec :

$$\mathbf{SL}_{\text{call/put}}(\tau, K, F, \sigma, d) = \mathbf{BS}_{\text{call/put}}(\tau, K + d, F + d, \sigma)$$

Ce modèle est assez fréquemment utilisé en pratique. Il peut être vu comme un compromis entre le modèle log-normal et le modèle normal. Le paramètre de décalage permet de se calibrer sur certaines formes de smile décroissantes en fonction du strike<sup>2</sup>, parfois observées sur les marchés caps / floors / swaptions.

2. On parle dans ce cas de *skew* de volatilité.

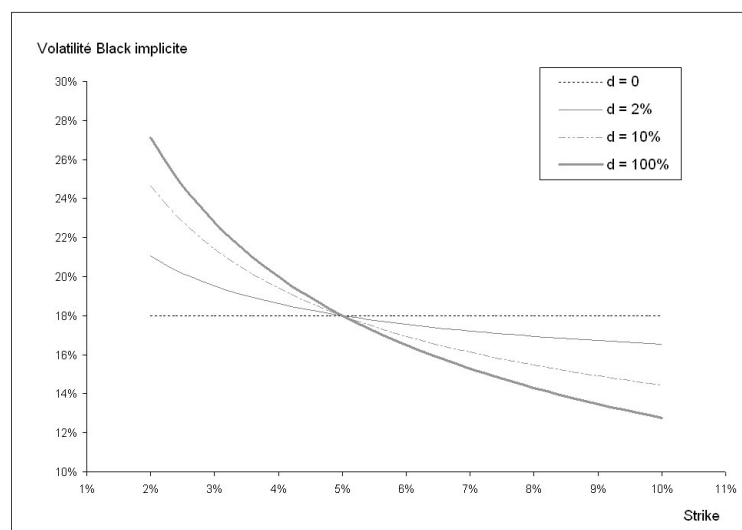


FIGURE 4.4 – Smile Black-implicite du modèle log-normal décalé pour différentes valeurs du paramètre  $d$ . Le forward est égal à 5%. Le paramètre  $\sigma$  est calibré de telle sorte que la volatilité à la monnaie (strike 5%) demeure égale à 18%.

#### 4.4.3 Le modèle CEV

CEV = *Constant Elasticity of Variance*.

La dynamique du taux forward est spécifiée comme suit :

$$dF_t = \sigma F_t^\beta dW_t$$

avec  $0 < \beta < 1$ . Les cas aux limites ( $\beta = 1$  et  $\beta = 0$ ) donnent respectivement le modèle log-normal (Black) et le modèle normal.

Le prix d'un call et d'un put dans le cadre du modèle CEV s'expriment via la fonction de répartition d'une loi du  $\chi^2$  décentrée. Pour leurs expressions exactes on peut se reporter à [5] (Lecture 2).

Tout comme le modèle log-normal décalé, le modèle CEV peut être vu comme un moyen terme entre l'approche log-normale et l'approche gaussienne. A l'instar du paramètre  $d$  du modèle log-normal décalé, le  $\beta$  permettra de contrôler la pente du smile : proche de 1, la volatilité Black-implicite sera constante en fonction du strike ; proche de 0, le smile sera celui du modèle normal.

## 4.5 Le modèle SABR

Les modèles présentés dans la section 4.4 permettent d'obtenir un *skew* de volatilité, c'est à dire une volatilité implicite décroissante en fonction du strike. Ces améliorations du modèle de Black sont pourtant insuffisantes. Elles ne permettent pas de reproduire les formes de volatilité implicites observées en pratique – notamment la forme en U (le fameux *smile*), très fréquente sur les maturités courtes. Une autre limitation de ce type de modèle, plus subtile, concerne la dynamique parfois incohérente du *smile* de volatilité<sup>3</sup>.

En réponse à ces insuffisances on pourra considérer deux nouvelles catégories de modèles. Tout d'abord les modèles à *volatilité stochastique*, où la volatilité est elle même modélisée comme un processus aléatoire ; mais aussi les *modèles à sauts* (écrits au moyen de processus de Levy) où la dynamique du taux sous-jacent présente des discontinuités. Dans ce qui suit nous nous intéressons à un modèle à volatilité stochastique particulier : le modèle SABR, devenu une référence dans le monde des options de taux.

SABR est l'acronyme de Sigma-Alpha-Beta-Rho. C'est une extension du modèle CEV spécifié de la manière suivante sous le numéraire adéquat<sup>4</sup> :

$$\begin{cases} dF_t = \sigma_t F_t^\beta dW_t^1 \\ \frac{d\sigma_t}{\sigma_t} = \alpha dW_t^2 \end{cases}$$

Etant donné une valeur initiale  $F_0$  pour le taux forward, le modèle SABR se définit donc au moyen des quatre paramètres suivants :

- $\sigma_0$  : valeur initiale de la volatilité
- $\alpha$  : volatilité (log-normale) de la volatilité (*volvol*)
- $\beta$  : exposant CEV, compris entre 0 et 1
- $\rho$  : corrélation entre les deux browniens ( $d\langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho dt$ ,  $\rho \in [-1, 1]$ )

Sauf dans le cas dégénéré où  $\beta = 0$  (modèle gaussien à volatilité stochastique), on ne connaît pas de solution explicite pour évaluer les calls et les puts dans le modèle SABR. Dans le cas général, on utilise une méthode approximative de développement asymptotique, au moyen de la perturbation  $\varepsilon = T\alpha^2$ , où  $T$  est la maturité de l'option considérée<sup>5</sup>. Cette méthode conduit

3. Par *dynamique du smile* on entend la façon dont le smile se déplace (dans le modèle) lors d'une variation du taux sous-jacent. Si, en toute généralité, les modèles à volatilité locale permettent un calibrage parfait au smile de volatilité (notamment via la formule de Dupire (1994)), ils sont connus pour induire une dynamique du smile incohérente avec la réalité empirique.

4. i.e. le numéraire rendant le taux modélisé martingale

5. En général  $\varepsilon$  est petit, ce qui rend l'approximation assez précise.

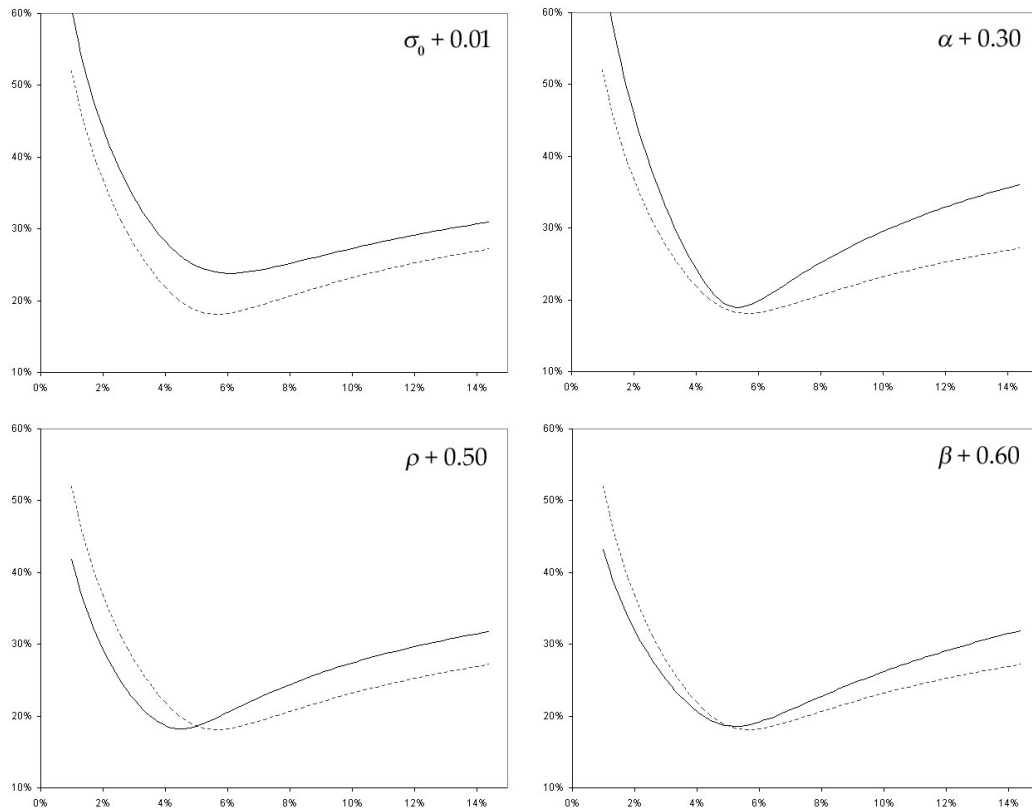


FIGURE 4.5 – **Impact des paramètres sur le smile de volatilité SABR.** On considère une option de maturité 1 an sur un taux sous-jacent de forward  $F_0 = 5.00\%$ . On part du jeu de paramètres SABR suivant :  $\sigma_0 = 0.03$ ,  $\alpha = 0.60$ ,  $\rho = -0.10$ ,  $\beta = 0.40$ . Le smile correspondant (vol. implicite de l'option en fonction de son strike) est représenté en pointillé sur les quatre graphiques. On modifie ensuite chacun des paramètres en le décalant de la valeur indiquée, conduisant au smile représenté en trait plein. Pour le décalage de  $\beta$ , on recalibre au préalable le paramètre  $\sigma_0$  afin que la volatilité à la monnaie reste inchangée.

à une formule approchée donnant la volatilité Black-implicite<sup>6</sup> du call/put de maturité  $T$  et de strike  $K$  :

$$\sigma_{bs}(T, K; F_0, \sigma_0, \alpha, \beta, \rho) = \frac{\sigma_0}{(F_0 K)^{\frac{1-\beta}{2}} \left\{ 1 + \frac{(1-\beta)^2}{24} \log^2 \left( \frac{F_0}{K} \right) + \frac{(1-\beta)^4}{1920} \log^4 \left( \frac{F_0}{K} \right) + \dots \right\}} \left( \frac{x}{y(x)} \right) \times \left\{ 1 + \left[ \frac{(1-\beta)^2}{24} \frac{\sigma_0^2}{(F_0 K)^{1-\beta}} + \frac{1}{4} \frac{\rho \beta \sigma_0 \alpha}{(F_0 K)^{\frac{1-\beta}{2}}} + \frac{2-3\rho^2}{24} \alpha^2 \right] T + \dots \right\} \quad (4.2)$$

Avec :

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha}{\sigma_0} (F_0 K)^{\frac{1-\beta}{2}} \log \left( \frac{F_0}{K} \right) \\ y(x) = \log \left( \frac{\sqrt{1-2\rho x + x^2} + x - \rho}{1-\rho} \right) \end{cases}$$

6. On peut dériver une formule analogue pour la volatilité normale-implicite.

Le prix d'un call de maturité  $T$  et de strike  $K$  sera donc :

$$\mathbf{PV}_{\text{call}} = N(0) \mathbf{BS}_{\text{call}}(T, K, F_0, \sigma_{\text{bs}}(T, K; F_0, \sigma_0, \alpha, \beta, \rho)) \quad (4.3)$$

où  $N(0)$  désigne la valeur initiale du numéraire associé au taux  $F$ .

L'impact des paramètres SABR sur le smile de volatilité est bien résumé par la figure 4.5 précédente. On retiendra que :

- Une augmentation du paramètre  $\sigma_0$  induit une translation à la hausse du smile de volatilité
- Le paramètre  $\alpha$  impacte la convexité du smile. Plus la *volvol* est importante, plus le smile est convexe.
- Les paramètres  $\beta$  et  $\rho$  jouent sur la pente du smile : la diminution d'un de ces paramètres induit un mouvement de "pentification" du smile de volatilité.

## 4.6 Risk-management des options de taux

### 4.6.1 Le cube de volatilité

Les prix des caps / floors / swaptions sont représentés par leur volatilité implicite. On parle alors de *volatilités de marché* ; elle sont organisées par :

- (a) Maturité de l'option
- (b) *Tenor*<sup>7</sup> du sous-jacent
- (c) Strike de l'option

Cet objet à trois dimensions est appelé *cube de volatilité*. On dispose typiquement d'une série de points liquides en maturité (1 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an, 2 ans etc.), tenor (3 mois, 6 mois, 1 an, 2 ans etc.) et strike (ATM, ATM + 50 bp, ATM – 50 bp, ATM + 100 bp, ATM – 100 bp etc.), comme illustré par la figure 4.6. Le tout est ensuite d'interpoler (ou extrapoler) intelligemment pour obtenir la volatilité implicite d'un instrument de maturité / tenor / strike quelconque.

Ce *cube de volatilité*, combiné à la donnée d'une courbe des taux, permet l'évaluation des portefeuilles optionnels, vanilles et/ou exotiques. Les options vanilles sont évaluées par interpolation de la volatilité implicite dans le cube ; les options exotiques dépendent tout aussi directement du cube de volatilité car elles sont évaluées via des modèles calibrés sur les volatilités de marché (voir chapitres suivants). La problématique du *trader option* est alors d'utiliser tous les produits vanilles disponibles (monétaire, futures, swaps, caps & floors, swaptions) pour couvrir au mieux son portefeuille. Cette couverture s'implémente généralement comme suit :

7. i.e. la "longueur" de l'instrument LIBOR / EURIBOR sous-jacent : un caplet est de *tenor* 6 mois s'il porte sur de l'EURIBOR 6 mois. Une swaption est de *tenor* 20 ans si elle porte sur un swap sous-jacent 20 ans.

VOL_CUBE_EURIBOR @ VEGA_CUBE SIGMA_BETA											
Volatility	Name		VOL_CUBE_EURIBOR								
	Date		17/12/2003								
3M	2.00%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%	9.00%	10.00%
1M	18.40%	17.57%	17.85%	18.24%	18.65%	19.04%	19.76%	20.37%	20.89%	21.33%	21.71%
3M	21.88%	20.68%	20.95%	21.38%	21.84%	22.23%	23.12%	23.83%	24.43%	24.95%	25.33%
6M	26.23%	24.41%	24.77%	25.37%	26.03%	26.67%	27.64%	28.64%	29.68%	30.40%	31.03%
1Y	36.12%	31.51%	31.03%	31.13%	31.52%	32.03%	33.14%	34.19%	35.13%	35.96%	36.69%
2Y	34.03%	27.53%	25.88%	25.04%	24.78%	24.88%	25.53%	26.51%	27.41%	28.24%	28.93%
3Y	31.33%	24.91%	22.95%	21.67%	20.98%	20.73%	21.00%	21.70%	22.49%	23.24%	23.94%
4Y	29.51%	23.28%	21.25%	19.84%	18.98%	18.59%	18.71%	19.36%	20.13%	20.88%	21.59%
5Y	28.37%	22.17%	20.05%	18.48%	17.42%	16.85%	16.75%	17.34%	18.10%	18.88%	19.60%
7Y	26.17%	20.40%	18.33%	16.70%	15.48%	14.68%	14.20%	14.59%	15.27%	16.00%	16.70%
9Y	24.30%	19.00%	17.08%	15.54%	14.37%	13.56%	12.95%	13.19%	13.77%	14.41%	15.03%
10Y	23.31%	18.25%	16.42%	14.94%	13.73%	12.98%	12.29%	12.46%	12.97%	13.57%	14.16%
15Y	19.48%	15.25%	13.69%	12.39%	11.34%	10.54%	9.69%	9.67%	10.05%	10.54%	11.03%
20Y	16.93%	13.26%	11.88%	10.74%	9.81%	9.11%	8.41%	8.43%	8.79%	9.24%	9.70%
25Y	15.65%	11.97%	10.60%	9.48%	8.60%	7.98%	7.58%	7.69%	8.41%	8.95%	9.45%
6M	2.00%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%	9.00%	10.00%
1M	18.28%	17.32%	17.58%	17.96%	18.37%	18.77%	19.50%	20.12%	20.64%	21.09%	21.48%
3M	21.68%	20.29%	20.52%	20.93%	21.39%	21.84%	22.68%	23.41%	24.02%	24.55%	25.01%
6M	26.00%	23.75%	24.03%	24.59%	25.24%	25.88%	27.07%	28.09%	28.96%	29.70%	30.35%
1Y	35.95%	30.95%	30.31%	30.32%	30.65%	31.14%	32.25%	33.32%	34.28%	35.13%	35.88%
2Y	34.07%	27.46%	25.72%	24.73%	24.46%	24.51%	25.18%	26.08%	26.93%	27.83%	28.58%
3Y	31.18%	24.74%	22.74%	21.41%	20.67%	20.33%	20.64%	21.33%	22.12%	22.89%	23.59%
4Y	29.37%	23.12%	21.08%	19.63%	18.74%	18.32%	18.40%	19.04%	19.81%	20.58%	21.29%
5Y	28.24%	22.05%	19.91%	18.31%	17.22%	16.61%	16.47%	17.04%	17.81%	18.53%	19.22%
7Y	26.03%	20.27%	18.20%	16.56%	15.32%	14.50%	13.97%	14.35%	15.04%	15.77%	16.48%
9Y	24.15%	18.86%	16.95%	15.40%	14.22%	13.39%	12.74%	12.98%	13.55%	14.20%	14.83%
10Y	23.16%	18.12%	16.29%	14.80%	13.64%	12.81%	12.09%	12.25%	12.76%	13.36%	13.96%
15Y	19.32%	15.12%	13.56%	12.26%	11.20%	10.39%	9.52%	9.49%	9.87%	10.36%	10.87%
20Y	16.83%	13.12%	11.74%	10.60%	9.67%	8.96%	8.24%	8.26%	8.62%	9.08%	9.54%
25Y	15.48%	11.82%	10.46%	9.34%	8.45%	7.82%	7.40%	7.71%	8.24%	8.79%	9.29%
1Y	2.00%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%	9.00%	10.00%
1M	28.40%	25.74%	25.27%	25.07%	25.03%	25.08%	25.30%	25.58%	25.86%	26.12%	26.36%
3M	30.63%	27.59%	27.11%	26.96%	26.99%	27.12%	27.51%	27.93%	28.34%	28.71%	29.05%
6M	33.76%	29.95%	29.36%	29.35%	29.57%	29.91%	30.70%	31.48%	32.19%	32.83%	33.39%
1Y	35.47%	29.79%	28.64%	28.65%	28.88%	29.33%	30.43%	31.53%	32.53%	33.43%	34.22%
2Y	33.31%	26.57%	24.69%	23.62%	23.19%	23.19%	23.84%	24.77%	25.70%	26.58%	27.37%
3Y	30.82%	24.35%	22.28%	20.86%	20.03%	19.68%	19.86%	20.55%	21.35%	22.13%	22.85%
4Y	29.25%	22.99%	20.90%	19.38%	18.41%	17.92%	17.91%	18.52%	19.30%	20.07%	20.79%
5Y	28.30%	22.10%	19.94%	18.28%	17.12%	16.43%	16.16%	16.68%	17.43%	18.21%	18.94%
7Y	25.82%	20.10%	18.02%	16.35%	15.08%	14.21%	13.59%	13.94%	14.62%	15.36%	16.07%
9Y	23.91%	18.66%	16.74%	15.18%	13.97%	13.10%	12.38%	12.59%	13.16%	13.81%	14.45%
10Y	22.91%	17.91%	16.07%	14.57%	13.39%	12.52%	11.74%	11.86%	12.37%	12.98%	13.58%
15Y	19.21%	15.03%	13.47%	12.17%	11.10%	10.27%	9.35%	9.28%	9.64%	10.14%	10.65%
20Y	17.07%	13.35%	11.97%	10.62%	9.68%	8.95%	8.37%	8.34%	8.67%	9.11%	9.56%
25Y	16.08%	12.31%	10.93%	9.85%	8.95%	8.30%	7.79%	7.82%	8.10%	8.50%	8.92%
2Y	2.00%	3.00%	3.50%	4.00%	4.50%	5.00%	6.00%	7.00%	8.00%	9.00%	10.00%
1M	34.37%	28.27%	27.10%	26.70%	26.74%	27.02%	27.84%	28.72%	29.54%	30.28%	30.95%
3M	38.27%	31.50%	29.97%	29.25%	29.04%	29.13%	29.72%	30.48%	31.23%	31.94%	32.58%
6M	37.11%	29.98%	28.25%	27.33%	27.12%	27.20%	27.84%	28.67%	29.51%	30.28%	30.98%

FIGURE 4.6 – Cube de volatilité (partiel) sur les caps / floors / swaptions EURIBOR. Chaque sous-tableau correspond à un tenor particulier (3 mois, 6 mois, 1 an, 2 ans...) et représente la volatilité implicite en fonction de la maturité et du strike des options.

- **Calcul du véga.** On calcule la sensibilité du portefeuille vis-à-vis de chacun des points du cube de volatilité. En d'autres termes, on perturbe une par une les volatilités de marché de 1% et on calcule la nouvelle valeur du portefeuille. Le véga correspond à la différence entre la valeur perturbée et la valeur initiale du portefeuille.
- **Couverture en véga (*vega-hedge*).** Pour chacun des points du cube, on traite des caps/floors et swaptions en proportion du véga, de telle sorte qu'au total, le portefeuille résultant soit véga-neutre. *Exemple* : si notre portefeuille a un véga de +50,000 € par rapport à la volatilité 5Y/10Y strike 5.00%, on traitera une quantité de swaptions 5Y/10Y strike 5.00% ayant pour véga – 50,000 € (en l'occurrence, on *vendra* les swaptions en quantité nécessaire).
- **Calcul du delta.** On calcule le *Delta* du portefeuille résultant (portefeuille initial + *vega-hedge*) sur la courbe des taux, pilier par pilier. Ce delta est calculé en décalant successivement tous les inputs de la courbe de 1 point de base (taux monétaires, prix des futures, taux swap).
- **Couverture en delta.** Il s'agit ici de réaliser le *delta-hedge* du portefeuille global (initial +

*vega-hedge*). On va traiter les instruments de la courbe en proportion du delta (prêts/emprunts sur le court terme, futures sur le moyen terme, et swaps sur le long terme), de telle sorte que le portefeuille résultant soit localement insensible aux variations des taux. *Exemple* : si le portefeuille présente un delta de  $-10,000$  € vis-à-vis du taux swap 10 ans, on traite le montant nominal de swap 10 ans ayant pour delta  $+10,000$  € (i.e. on rentre dans un swap 10 ans payeur de nominal  $N = \frac{10,000}{\text{IVL}(10Y) \times 0,01\%}$ ).

Ce processus de couverture est nécessairement dynamique : entre aujourd'hui et demain, le temps s'est écoulé ; les taux (et les volatilités) ont bougé, si bien que le portefeuille n'est plus ni véga, ni delta-neutre. Il faut donc ajuster la position au moyen de caps / floors / swaptions pour retourner à la véga-neutralité, et de cash / futures / swaps pour rendre l'ensemble de la position à nouveau delta-neutre.

#### 4.6.2 SABR, une alternative au cube de volatilité

L'utilisation d'une *cube de volatilité* telle que présentée dans le paragraphe précédent rencontre les limites suivantes :

- La liquidité des options de taux est limitée : on dispose en général de quelques couples maturité / tenor liquides, pour des strikes à la monnaie ou légèrement décalés. La figure 4.6 représente en réalité des données qui sont pour la plupart extrapolées à partir des points de marché disponibles.
- Par conséquent la mise en place d'un *vega-hedge* point par point est peu réaliste.
- L'évaluation et le *risk-management* des options est dépendante du choix de la discrétisation dans la dimension strike, et de la façon dont les interpolations / extrapolations sont réalisées.

Pour ces raisons, le modèle SABR s'est peu à peu imposé comme outil de *market making* et de *risk-management* des options de taux. La logique, illustrée par la figure 4.7 ci-après, est la suivante : pour chaque couple maturité / tenor, le smile de volatilité du taux sous-jacent est représenté par un modèle SABR, c'est à dire par quatre paramètres  $\sigma_0$ ,  $\alpha$ ,  $\rho$ ,  $\beta$ . Pour un strike donné, la volatilité implicite correspondante est alors obtenue avec (4.2). En général, comme  $\rho$  et  $\beta$  ont un impact similaire sur la forme du smile, on choisit de figer  $\beta$  et de ne jouer que sur les trois paramètres restants<sup>8</sup>.

L'intérêt de cette démarche est multiple :

- Les volatilités de marché sont représentées par un "vrai" modèle. Cela exclut en particulier les risques d'arbitrage pour le *market-maker*.
- La question épineuse de l'interpolation / extrapolation des volatilités est évacuée.

8. On verra dans la suite que la valeur choisie pour  $\beta$  permet de jouer sur la dynamique du smile de volatilité.





- calcul de la sensibilité de notre portefeuille vis-à-vis de  $\sigma_0$  (vega),  $\alpha$  (volga) et  $\rho$  (vanna).  
Dans le cas d'un call vanille, partant de (4.2) et (4.3) :

$$\begin{aligned}\text{vega} &= \frac{\partial \text{PV}_{\text{call}}}{\partial \sigma_0} = N(0) \frac{\partial \text{BS}_{\text{call}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma_{\text{bs}}}{\partial \sigma_0} \\ \text{volga} &= \frac{\partial \text{PV}_{\text{call}}}{\partial \alpha} = N(0) \frac{\partial \text{BS}_{\text{call}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma_{\text{bs}}}{\partial \alpha} \\ \text{vanna} &= \frac{\partial \text{PV}_{\text{call}}}{\partial \rho} = N(0) \frac{\partial \text{BS}_{\text{call}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma_{\text{bs}}}{\partial \rho}\end{aligned}$$

- construction, au moyen des caps/floors ou swaptions liquides, d'un *vega-hedge* présentant les vega, volga et vanna inverses. Le portefeuille résultant est donc vega/volga/vanna neutre, c'est à dire (localement) insensible aux principales déformations du smile de volatilité (changements de niveau / convexité / pente).

Le *delta-hedge* d'un portefeuille géré avec la représentation SABR se trouve également modifié. La perturbation du taux forward sous-jacent implique un mouvement sur la volatilité implicite. Schématiquement :

$$\begin{aligned}F_0 &\rightarrow F_0 + \Delta F_0 \\ \sigma_{\text{bs}}(T, K; F_0, \sigma_0, \alpha, \beta, \rho) &\rightarrow \sigma_{\text{bs}}(T, K; F_0 + \Delta F_0, \sigma_0, \alpha, \beta, \rho)\end{aligned}$$

La façon dont la volatilité implicite est affectée dépend de la valeur du paramètre  $\beta$ . On dit que le  $\beta$  contrôle le *backbone* du smile, c'est à dire sa dynamique lorsque le taux sous-jacent varie.

- $\beta = 1$  (vol. stochastique log-normale) : la volatilité (Black)-implicite à la monnaie se conserve lorsque le forward bouge. Le smile se translate horizontalement.
- $\beta = 0$  (vol. stochastique normale) : la volatilité normale à la monnaie se conserve lors d'un mouvement du forward. La volatilité Black-implicite à la monnaie a tendance à décroître lorsque le taux forward augmente.
- $\beta = 0.5$  (vol. stochastique CIR) : c'est l'ordre de grandeur généralement utilisé sur les marchés euro et dollar. La volatilité Black-implicite à la monnaie diminue lors d'une hausse du forward, mais dans des proportions moindres que dans le cas gaussien ( $\beta = 0$ ).

Le choix du paramètre  $\beta$  est censé représenter la dynamique "habituelle" du smile de volatilité lors des mouvement du taux forward sous-jacent. Ce faisant on apporte une modification au delta Black classique, en y intégrant une partie du véga (celle correspondant aux mouvements de la volatilité implicite liés aux variations du sous-jacent). Dans le cas d'un call, partant de (4.3), cela se traduira par :

$$\Delta = \frac{\partial \text{PV}_{\text{call}}}{\partial F_0} = N(0) \left( \frac{\partial \text{BS}_{\text{call}}}{\partial F_0} + \frac{\partial \text{BS}_{\text{call}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma_{\text{bs}}}{\partial F_0} \right)$$

Le delta Black habituel est donc corrigé par le terme  $\frac{\partial \text{BS}_{\text{call}}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma_{\text{bs}}}{\partial F_0}$ , c'est à dire par le véga Black multiplié par la variation de volatilité prévue par le modèle lors d'une variation du forward.

## Partie 5

# *Ajustements de convexité, exotiques de première génération*

---

En plus des options vanilles (caps & floors, swaptions), le marché des dérivés de taux s'est enrichi de produits plus complexes faisant intervenir d'autres types de payoffs (digitales, corridors, spread options...) ou le paiement d'un taux de référence à des dates non standard. Voici quelques exemples de produits très populaires<sup>1</sup> :

**Swap *in-arrears*.** Ce produit est identique à un swap standard à ceci près que le taux LIBOR de la jambe variable, payé à la fin de chaque période d'intérêt, est fixé au moment où il est payé (on rappelle que dans le cas d'un swap standard, il est fixé en début de période). L'évaluation d'un tel swap fait intervenir des *ajustements de convexité*. C'est l'objet de la section 5.1.

**Corridor sur LIBOR.** C'est un swap où l'investisseur paye le LIBOR contre réception d'un coupon "exotique". Celui-ci est défini comme un taux fixe multiplié par le pro-rata sur la période d'intérêt du nombre de jours où le LIBOR a fixé dans un certain intervalle  $[K_{\min}, K_{\max}]$ . Par exemple l'investisseur reçoit à la fin de chaque période d'intérêt  $6\% \times n/N$  où  $n$  est le nombre de jours de la période d'intérêt où le taux EURIBOR 6M a fixé en dessous de 4,50%, et  $N$  le nombre total d'observations de l'EURIBOR 6M sur la période d'intérêt<sup>2</sup>. Le cas de cette structure est traité en détail section 5.4.2.

**Swaps CMS, caps et floors CMS.** Il s'agit de produits faisant intervenir dans leurs paiements la valeur d'un taux swap (par exemple 10 ans, 20 ans...). On parle alors de produits CMS (Constant Maturity Swap). Le fait que le taux swap en question soit payé à une date unique (et non sur l'échéancier de la jambe fixe du swap) implique là aussi des *ajustements de convexité*. Ces produits sont abordés en détail dans les sections 5.2 et 5.3.

**CMS spread option.** Une telle option versera par exemple la différence entre le taux swap 20 ans et le taux swap 2 ans telle qu'observée à maturité de l'option. Le caractère optionnel vient

---

1. Cette liste n'est bien sûr pas exhaustive

2. Intérêt de ce produit : si le taux EURIBOR reste bas (ce dont l'investisseur a parfois la conviction), le corridor délivre un coupon de 6%, nettement plus important que le taux fixe du swap standard correspondant.

du fait que cette différence est floorée (souvent à 0) et parfois cappée. Au delà de la convexité liée à l'aspect CMS, un tel produit présente de plus un important risque de corrélation taux court/taux long. Ce type de structure ne sera pas abordé dans ce support de cours.

Ces différents produits sont souvent qualifiés d'exotiques de *première génération*. Bien que plus complexes (et moins liquides) que les options vanilles, ils peuvent néanmoins être évalués avec des outils relativement simples et sans avoir recours aux modèles stochastiques de la courbe de taux. En effet, leur caractère européen (une date de maturité, sous-jacent bien identifié, absence de caractère bermudéen ou *path-dependent*) permettent d'obtenir des formules d'évaluation fermées ou quasi analytiques.

## 5.1 Le concept d'ajustement de convexité : cas d'un LIBOR *in arrears*

Considérons une période d'intérêt future  $(T_1, T_2)$ . Le taux LIBOR  $L(T_f, T_1, T_2)$  prévalant pour cette période fixe donc à la date  $T_f$ , deux jours ouvrés avant  $T_1$ .

Imaginons à présent les deux contrats forwards suivants, conclus à la date  $t$  :

- **Le contrat A**, qui verse à son acheteur le flux  $(L(T_f, T_1, T_2) - R_A)$  à la date  $T_2$
- **Le contrat B**, qui verse à son acheteur le flux  $(L(T_f, T_1, T_2) - R_B)$  à la date  $T_1$

Chacun de ces contrats n'engendre qu'un flux (respectivement en  $T_2$  et  $T_1$ ). Les deux taux  $R_A$  et  $R_B$  sont donc déterminés de manière à ce que la valeur des deux contrats soit nulle au moment de leur conclusion à la date  $t$ . Que valent alors  $R_A$  et  $R_B$  ? Sont ils différents ?

Le contrat A s'apparente au FRA étudié en détail section 2.2. Le taux  $R_A$  n'est autre que le taux du FRA,  $L(t, T_1, T_2)$ , qui s'exprime directement en fonction des discount factors :

$$R_A = L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{B(t, T_1)}{B(t, T_2)} - 1 \right)$$

On peut également retrouver ce résultat au moyen de la probabilité forward neutre de maturité  $T_2$ . En effet, le fait que le règlement du contrat A s'effectue en  $T_2$  implique :

$$B(t, T_2) \mathbb{E}_t^{Q^{T_2}} (L(T_f, T_1, T_2) - R_A) = 0$$

Ce qui permet de conclure :

$$R_A = \mathbb{E}_t^{Q^{T_2}} (L(T_f, T_1, T_2)) = L(t, T_1, T_2)$$

La dernière égalité s'obtenant grâce à la propriété de martingale du processus  $L(t, T_1, T_2)$  sous la mesure forward de maturité  $T_2$ .

Le contrat B va être plus problématique. En effet le taux LIBOR n'est plus payé à sa date naturelle de paiement (fin de la période d'intérêt), mais à la date  $T_1$  de début de la période d'intérêt du LIBOR. On parle de **LIBOR *in arrears***.

$R_B$  s'exprime de la manière suivante :

$$B(t, T_1) \mathbb{E}_t^{Q^{T_1}} (L(T_f, T_1, T_2) - R_B) = 0 \Rightarrow R_B = \mathbb{E}_t^{Q^{T_1}} (L(T_f, T_1, T_2))$$

La différence entre les taux des deux contrats vient du fait qu'ils s'expriment comme l'espérance du LIBOR sous deux mesures différentes. Dans le cas de  $R_A$  (contrat FRA), c'est la mesure naturelle de paiement du LIBOR qui intervient. Dans le cas de  $R_B$  c'est celle associée à la date  $T_1$ .

Pour calculer  $R_B$  on procède en passant de la mesure forward de maturité  $T_1$  à celle de maturité  $T_2$  :

$$\begin{aligned} R_B &= \mathbb{E}_t^{Q^{T_1}} (L(T_f, T_1, T_2)) \\ &= \frac{B(t, T_2)}{B(t, T_1)} \mathbb{E}_t^{Q^{T_2}} \left( \frac{B(T_f, T_1)}{B(T_f, T_2)} L(T_f, T_1, T_2) \right) \end{aligned}$$

Les ratios de zéro-coupons peuvent être exprimés en fonction du taux LIBOR forward  $L(t, T_1, T_2)$  et du taux LIBOR spot  $L(T_f, T_1, T_2)$  :

$$\begin{aligned} R_B &= \frac{1}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)} \mathbb{E}_t^{Q^{T_2}} \left( (1 + \delta L(T_f, T_1, T_2)) L(T_f, T_1, T_2) \right) \\ &= \frac{L(t, T_1, T_2) + \delta \mathbb{E}_t^{Q^{T_2}} (L(T_f, T_1, T_2)^2)}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Compte tenu de la convexité de la fonction carré, l'inégalité de Jensen implique :

$$\mathbb{E}_t^{Q^{T_2}} (L(T_f, T_1, T_2)^2) > \mathbb{E}_t^{Q^{T_2}} (L(T_f, T_1, T_2))^2 = L(t, T_1, T_2)^2$$

ce qui nous permet de conclure que le taux  $R_B$  du contrat B est toujours supérieur au taux forward "naturel"  $R_A = L(t, T_1, T_2)$ . On dit que le taux  $R_B$  fait l'objet d'un **ajustement de convexité**.

Cette propriété, obtenue très formellement, peut être également comprise plus intuitivement. Imaginons un instant que les deux contrats forwards aient le même taux  $R_B = R_A = L(t, T_1, T_2)$  (le taux FRA standard). Dans ce cas, j'ai une nette préférence pour le contrat B. En effet, si les taux montent entre la date de début du contrat et la maturité  $T_f$ , le flux du contrat B est positif, et je peux placer ce flux à un taux LIBOR élevé jusqu'en  $T_2$ . A l'inverse si les taux baissent, le flux du contrat est négatif, et je peux emprunter ce montant jusqu'en  $T_2$  à un taux LIBOR avantageusement bas. Dans les deux cas je suis gagnant<sup>3</sup>. Pour compenser, le taux  $R_B$  doit donc être plus élevé que le taux  $R_A$  du FRA standard.

3. Plus précisément, cela se matérialise par l'arbitrage suivant : achat de 1 contrat B, vente de  $(1 + \delta L(t, T_1, T_2))$  contrats A. Arrivé à la date  $T_f$  je place (ou emprunte) le flux du contrat B au taux LIBOR  $L(T_f, T_1, T_2)$  jusqu'en  $T_2$ . Le solde de ces deux opérations en date  $T_2$  est  $\delta \times (L(T_f, T_1, T_2) - L(t, T_1, T_2))^2$ , qui se révèle toujours positif et strictement positif avec une probabilité non nulle.

Intéressons nous au calcul exact de l'ajustement de convexité. D'après l'équation (5.1), il nécessite l'évaluation de l'espérance du carré du taux LIBOR à horizon  $T_f$  : nous sommes donc contraints de spécifier une dynamique pour le taux LIBOR. Dans ce qui suit, on considère à nouveau un modèle de Black sur le taux LIBOR :

$$\begin{cases} \frac{dL(t, T_1, T_2)}{L(t, T_1, T_2)} = \sigma dW_t^{Q^{T_2}} \\ \text{avec } W^{Q^{T_2}} \text{ mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{T_2} \end{cases}$$

L'expression du taux LIBOR à horizon  $T_f$  est alors :

$$L(T_f, T_1, T_2) = L(t, T_1, T_2) \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 (T_f - t) + \sigma \left( W_{T_f}^{Q^{T_2}} - W_t^{Q^{T_2}} \right) \right)$$

Elevé au carré :

$$\begin{aligned} L(T_f, T_1, T_2)^2 &= L(t, T_1, T_2)^2 \exp \left( -\sigma^2 (T_f - t) + 2\sigma \left( W_{T_f}^{Q^{T_2}} - W_t^{Q^{T_2}} \right) \right) \\ &= L(t, T_1, T_2)^2 \exp \left( \sigma^2 (T_f - t) \right) \exp \left( -\frac{1}{2} (2\sigma)^2 (T_f - t) + 2\sigma \left( W_{T_f}^{Q^{T_2}} - W_t^{Q^{T_2}} \right) \right) \end{aligned}$$

La dernière exponentielle est par construction d'espérance 1, ce qui conduit à :

$$\mathbb{E}_t^{Q^{T_2}} \left( L(T_f, T_1, T_2)^2 \right) = L(t, T_1, T_2)^2 \exp \left( \sigma^2 (T_f - t) \right)$$

D'où on déduit la valeur du taux  $R_B$  :

$$R_B = L(t, T_1, T_2) \frac{1 + \delta L(t, T_1, T_2) \exp \left( \sigma^2 (T_f - t) \right)}{1 + \delta L(t, T_1, T_2)}$$

Cet ajustement de convexité *in arrears* reste cependant limité. Dans le cas d'un LIBOR 12 mois, avec une hypothèse de volatilité de 20%, il se limitera à 1 ou 2 points de base si le contrat est d'échéance 1 an, et à une petite dizaine de points de base pour une échéance 10 ans. Il en serait bien sûr autrement si, dans le contrat B, le taux LIBOR était par exemple payé 5 ou 10 ans après son fixing. Néanmoins, lorsque l'on considère un swap *in arrears* (identique à un swap standard sauf que le LIBOR de la jambe variable est fixé ET payé en fin de période), cette différence de quelques points de base a un impact non négligeable sur la PV du swap.

Finissons sur cette remarque : dans le contrat B, le fait que le taux LIBOR ne soit pas payé à sa date naturelle de paiement implique un ajustement de convexité qui renchérit le taux forward. Cette prime supplémentaire peut s'expliquer du point de vue de la gestion du risque. Le taux forward *in arrears* (B) est une fonction convexe du taux FRA standard (A). Autrement dit, si l'on cherche à couvrir (en delta-neutre) un contrat B par une certaine quantité de contrat A, cette quantité (le delta) sera variable selon le niveau des taux. On devra donc réajuster la quantité de contrat A au fil du temps, à mesure que les taux bougent. L'ajustement de convexité correspond précisément au coût de ces réajustements.

## 5.2 Swaps CMS

Les instruments CMS (*Constant Maturity Swaps*) sont de plus en plus répandus sur les marchés fixed income. On parle de CMS lorsqu'un produit dépend de fixings futurs d'un ou plusieurs taux swap. Le cas le plus classique est celui du swap CMS, dont voici un exemple :

- La jambe fixe paye annuellement un coupon fixe (base 30/360)
- La jambe variable CMS paye tous les 6 mois le taux swap 10 ans fixé deux jours ouvrés avant le début de la période d'intérêt correspondante. Le paiement s'effectue en base Exact/360.

Le swap CMS est donc en tout point semblable au swap de taux classique, si ce n'est que le taux LIBOR de la jambe variable est remplacé par le taux swap 10 ans.

Intéressons nous à un des flux de la jambe variable du swap CMS. Son paiement s'effectue à la date  $T_p$  (fin de la période d'intérêt considérée). Il est proportionnel à la valeur du taux swap 10 ans qui a fixé à la date  $T_f$ , à savoir 2 jours ouvrés avant le début de la période d'intérêt. Ce taux swap 10 ans, noté  $S(T_f, T_0, T_n)$ , correspond au swap de taux sous-jacent qui débute à la date  $T_0$  (deux jours ouvrés après  $T_f$ ) et qui se termine 10 ans après, en date  $T_n$ . Ces notations sont rappelées dans le schéma suivant.

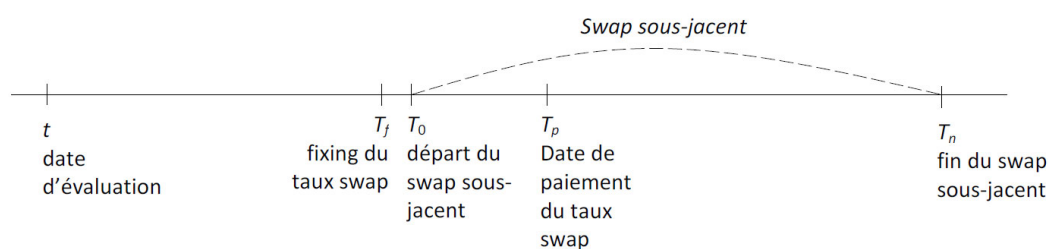


FIGURE 5.1 – CMS

Évaluer ce flux du swap CMS équivaut à répondre à la question : quelle est la valeur aujourd'hui (à la date  $t$ ) de recevoir à la date  $T_p$  le taux swap  $S(T_f, T_0, T_n)$  qui a fixé en date  $T_f$  ? On cherche donc à calculer :

$$\mathbf{PV}_{\text{CMS}}(t) = B(t, T_p) \mathbb{E}_t^{Q^{Tp}} (S(T_f, T_0, T_n))$$

Nous voilà de nouveau confrontés au calcul de l'espérance d'un taux sous une mesure qui n'est pas sa mesure naturelle de paiement, c'est à dire sous une mesure qui ne rend pas ce taux martingale. Comme dans le cas LIBOR *in arrears*, l'idée est de repasser sous la mesure adaptée (au taux swap cette fois ci) :

$$\mathbf{PV}_{\text{CMS}}(t) = \text{LVL}(t, T_0, T_n) \mathbb{E}_t^{Q^{\text{LVL}}} \left( \frac{B(T_f, T_p)}{\text{LVL}(T_f, T_0, T_n)} S(T_f, T_0, T_n) \right)$$

Le terme  $B(t, T_p)/\text{LVL}(t, T_0, T_n)$ , tout comme le taux swap  $S(t, T_0, T_n)$ , est une martingale sous la mesure  $Q^{\text{LVL}}$  car il s'écrit comme le quotient du prix d'un actif de marché par le numéraire. En se plaçant dans le modèle de Black on peut donc écrire leurs dynamiques de la façon suivante :

$$\begin{cases} X(t) = B(t, T_p)/\text{LVL}(t, T_0, T_n) \\ dS(t, T_0, T_n) = \sigma S(t, T_0, T_n) dW_t^{Q^{\text{LVL}}} \\ dX(t) = \sigma' X(t) dW_t^{Q^{\text{LVL}}} \\ W^{Q^{\text{LVL}}} \text{ mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{\text{LVL}} \end{cases}$$

Notons que nous avons utilisé le même brownien pour modéliser  $X$  et  $S$  : on suppose implicitement que les deux processus sont parfaitement corrélés, autrement dit que la dynamique de la courbe des taux est mono-facteur.

La résolution des EDS de  $X$  et  $S$  conduit à :

$$\begin{cases} X(T_f) = X(t) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma'^2(T_f - t) + \sigma' (W_{T_f}^{Q^{\text{LVL}}} - W_t^{Q^{\text{LVL}}})\right) \\ S(T_f, T_0, T_n) = S(t, T_0, T_n) \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2(T_f - t) + \sigma (W_{T_f}^{Q^{\text{LVL}}} - W_t^{Q^{\text{LVL}}})\right) \end{cases}$$

D'où le produit de  $X$  par  $S$  :

$$X(T_f)S(T_f, T_0, T_n) = X(t)S(t, T_0, T_n) e^{\sigma\sigma'(T_f-t)} e^{-\frac{1}{2}(\sigma+\sigma')^2(T_f-t) + (\sigma+\sigma')(W_{T_f}^{Q^{\text{LVL}}} - W_t^{Q^{\text{LVL}}})}$$

La seconde exponentielle est par construction d'espérance 1, d'où :

$$\mathbb{E}_t^{Q^{\text{LVL}}}(X(T_f)S(T_f, T_0, T_n)) = X(t)S(t, T_0, T_n) e^{\sigma\sigma'(T_f-t)}$$

On en conclut finalement :

$$\mathbf{PV}_{\text{CMS}}(t) = B(t, T_p)S(t, T_0, T_n) e^{\sigma\sigma'(T_f-t)}$$

Le taux CMS est défini comme l'espérance du taux swap sous la mesure forward associée à la date de paiement  $T_p$  :

$$\text{CMS}(t, T_0, T_n, T_p) = \mathbb{E}_t^{Q^{T_p}}(S(T_f, T_0, T_n))$$

de sorte que  $\mathbf{PV}_{\text{CMS}}(t) = B(t, T_p) \text{CMS}(t, T_0, T_n, T_p)$ . Sous les hypothèses du modèle de Black on obtient donc :

$$\text{CMS}(t, T_0, T_n, T_p) = S(t, T_0, T_n) e^{\sigma\sigma'(T_f-t)} > S(t, T_0, T_n) \quad (5.2)$$

qui met en lumière l'ajustement de convexité dont fait l'objet le taux CMS par rapport au taux swap.



Cependant nous n'avons pas tout à fait terminé. La volatilité  $\sigma$  du taux swap pourra se calculer de manière implicite à partir du prix de la swaption  $(T_0 \rightarrow T_n)$  à la monnaie. En revanche, il nous faut estimer la volatilité  $\sigma'$  du terme  $B(T_f, T_p)/LVL(T_f, T_0, T_n)$ . L'idée est d'approcher ce terme par une fonction du taux swap. Notons  $m$  la fréquence de la jambe fixe du swap sous-jacent ( $m = 1$  pour une fréquence annuelle,  $m = 2$  pour une fréquence semi-annuelle etc...).

On a :

$$\frac{B(T_f, T_p)}{LVL(T_f, T_0, T_n)} = \frac{B(T_f, T_p)}{B(T_f, T_0) - B(T_f, T_n)} S(T_f, T_0, T_n)$$

Les zéro-coupons sont calculés approximativement en actualisant avec le taux swap :

$$\begin{cases} B(T_f, T_0) \approx 1 \\ B(T_f, T_n) \approx \left(1 + \frac{S(T_f, T_0, T_n)}{m}\right)^{-n} \\ B(T_f, T_p) \approx \left(1 + \frac{S(T_f, T_0, T_n)}{m}\right)^{-m \times (T_p - T_f)} \end{cases}$$

Ces expressions sont quasi exactes lorsque la courbe des taux est plate, mais deviennent plus approximatives lorsque la courbe est pentue.

On en déduit l'approximation de  $B(T_f, T_p)/LVL(T_f, T_0, T_n)$  :

$$\frac{B(T_f, T_p)}{LVL(T_f, T_0, T_n)} \approx f(S(T_f, T_0, T_n)) \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{x \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{-m \times (T_p - T_f)}}{1 - \left(1 + \frac{x}{m}\right)^{-n}}$$

Le lemme d'Itô nous fournit la dynamique de  $f(S)$  :

$$df(S(t, T_0, T_n)) = f'(S(t, T_0, T_n)) dS(t, T_0, T_n) + (\dots)dt$$

Compte tenu de l'hypothèse log-normale sur le taux swap (volatilité  $\sigma$ ), on a :

$$\frac{df(S(t, T_0, T_n))}{f(S(t, T_0, T_n))} = \frac{f'(S(t, T_0, T_n))}{f(S(t, T_0, T_n))} S(t, T_0, T_n) \sigma dW_t^{Q^{LVL}}$$

La volatilité Black  $\sigma'$  de  $f(S)$  est en réalité stochastique, car elle dépend de la trajectoire du taux swap entre  $t$  et  $T_f$ . On l'approxime de manière déterministe en figeant le taux swap à sa valeur de départ :

$$\sigma' = \frac{f'(S(t, T_0, T_n))}{f(S(t, T_0, T_n))} S(t, T_0, T_n) \sigma$$

Ce qui permet d'achever le calcul du taux CMS avec (5.2).

Remarques :

- Ce qui précède permet de calculer un flux de la jambe CMS de notre swap. Si on note  $(T_0, T_1, \dots, T_q)$  l'échéancier de la jambe CMS, la PV totale de la jambe CMS est :

$$\mathbf{PV}_{\text{jambeCMS}}(t) = \sum_{i=1}^q \delta_i B(t, T_i) \text{CMS}(t, T_{i-1}, T_{i-1} + 10 \text{ ans}, T_i)$$

- La méthode d'ajustement de convexité présentée ici est très approximative. En pratique on utilisera une méthode dite par réplication prenant en compte le smile de volatilité sur les swaptions. Cela est abordé brièvement dans le paragraphe suivant.

### 5.3 Caps et floors CMS

On pourrait définir un cap CMS de la façon suivante : Il est à la jambe CMS ce que le cap standard est à la jambe LIBOR.

Le cap CMS est donc fondé sur un échéancier constitué de  $n$  périodes d'intérêt. Il est composé de  $n$  caplets payant chacun en fin de période le payoff  $\delta \times \max(\text{CMS} - K, 0)$ , où CMS est un taux swap de maturité constante fixé en début de période. Dans ce qui suit, nous nous intéressons à l'évaluation d'un seul caplet CMS. Le cap CMS sera obtenu en sommant les prix des  $n$  caplets.

Reprenons les notations de la section précédente : le fixing du taux swap à lieu à la date  $T_f$  (deux jours ouvrés avant le début de la période d'intérêt). La jambe fixe du swap sous-jacent a pour échéancier  $(T_0, T_1, \dots, T_n)$ . Le flux du caplet CMS est payé à la date  $T_p$  (fin de la période d'intérêt) et vaut  $\delta(S(T_f, T_0, T_n) - K)^+$ . Son prix en  $t$  est :

$$\mathbf{PV}_{\text{CapletCMS}}(t) = \delta B(t, T_p) \mathbb{E}_t^{Q^{T_p}} \left( (S(T_f, T_0, T_n) - K)^+ \right)$$

Cette écriture est peu commode car le taux swap sous-jacent à l'option n'est pas martingale sous la mesure forward associée à la date de paiement  $T_p$ . L'idée est d'utiliser le taux  $\text{CMS}(t, T_0, T_n, T_p)$  défini dans le paragraphe précédent :

$$\text{CMS}(t, T_0, T_n, T_p) = \mathbb{E}_t^{Q^{T_p}} (S(T_f, T_0, T_n))$$

Par construction celui-ci est une martingale sous la mesure de paiement, et il coïncide avec le taux swap  $S(T_f, T_0, T_n)$ , pour  $t = T_f$ . Dès lors il suffit de spécifier la dynamique de ce taux au moyen d'un modèle de Black :

$$\begin{cases} d\text{CMS}(t, T_0, T_n, T_p) = \sigma \text{CMS}(t, T_0, T_n, T_p) dW_t^{Q^{T_p}} \\ \text{où } W^{Q^{T_p}} \text{ est un mouvement brownien standard sous la mesure } Q^{T_p} \end{cases}$$

et d'utiliser la formule de Black & Scholes :

$$\mathbf{PV}_{\text{CapletCMS}}(t) = \delta B(t, T_p) \mathbf{BS}_{\text{call}}(T_f - t, K, \text{CMS}(t, T_0, T_n, T_p), \sigma)$$

Le forward CMS( $t, T_0, T_n, T_p$ ) intervenant dans la formule d'évaluation peut être obtenu par ajustement de convexité, comme décrit dans la section précédente. En première approximation, la volatilité  $\sigma$  est prise égale à la volatilité implicite de la swaption de sous jacent le swap ( $T_0 \rightarrow T_n$ ) et de strike  $K$ .

On voit néanmoins les limites de cette approche :

- Le forward CMS a été obtenu par un ajustement de convexité plus qu'approximatif ne prenant pas en compte le smile de volatilité sur les swaptions.
- La dynamique du taux CMS est supposée la même que celle du taux swap. A cet égard, est-il légitime de prendre comme volatilité de pricing du caplet CMS la volatilité implicite de la swaption de strike  $K$  ?

Pour ces raisons, les praticiens privilégient une approche par (sur)réplication. L'idée est d'écrire le payoff du caplet CMS comme un panier de swaptions *cash-settled*. Par opposition à la swaption à *physical settlement* utilisée jusqu'à présent, une swaption (payeuse) à *cash settlement* fait l'objet d'un règlement unique à sa date de maturité, d'un montant :

$$\text{LVL}_{\text{CASH}}(T_f, T_0, T_n) \left( S(T_f, T_0, T_n) - K \right)^+$$

où le *level cash* est défini de la façon suivante :

$$\text{LVL}_{\text{CASH}}(T_f, T_0, T_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{(1 + \delta_i S(T_f, T_0, T_n))^i}$$

Autrement dit, dans le level cash, les zéro-coupons habituels sont remplacés par les facteurs d'actualisation calculés à partir du taux swap. Le payoff du caplet CMS est une fonction linéaire par morceaux du taux swap, alors que celui d'une swaption *cash-settled* est concave au delà du strike du fait du level cash en facteur de son payoff. Comme le montre la figure suivante, il est possible de sur-répliquer le payoff du caplet CMS au moyen de plusieurs swaptions *cash-settled* prises à différents strikes. Plus le nombre de strikes considérés sera important (et donc plus les strikes seront resserrés), plus cette sur-réplication s'approchera d'une réplication exacte.

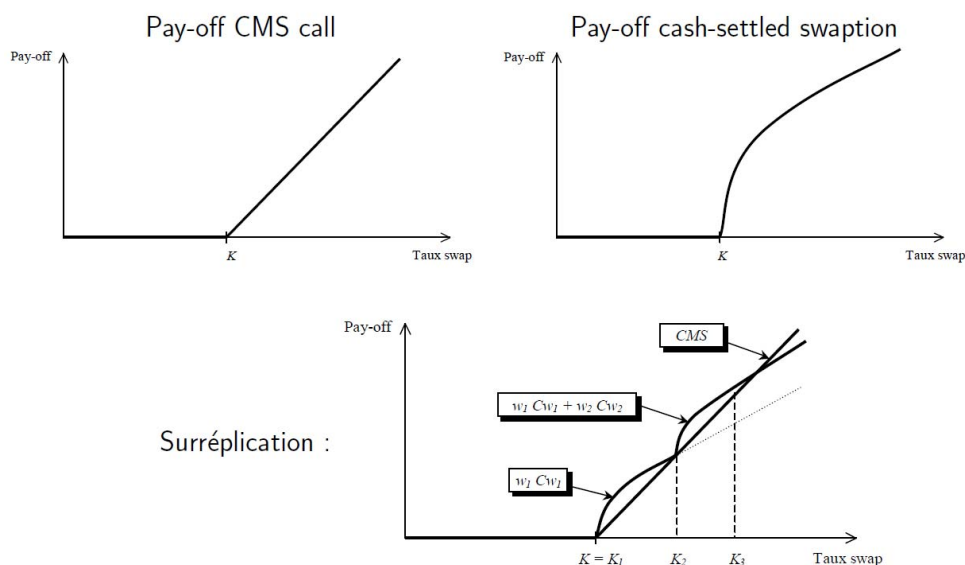
Cette technique permet donc d'obtenir le prix du caplet CMS de strike  $K$  comme celui d'un panier de swaptions *cash-settled* prises à une multitude de strikes  $K_1 = K$ , et  $K_2, K_3, \dots, K_m > K$ . A l'inverse, un floorlet CMS pourra être (sur)répliqué par un panier de swaptions *cash-settled* de strikes plus petits que  $K$ .

Le forward CMS peut être déduit de la parité call-put sur le caplet et le floorlet de strike  $K$  évalués par réplication. En effet :

$$\text{PV}_{\text{CapletCMS}}(t) - \text{PV}_{\text{FloorletCMS}}(t) = B(t, T_p) (\text{CMS}(t, T_0, T_n, T_p) - K)$$

d'où :

$$\text{CMS}(t, T_0, T_n, T_p) = \frac{\text{PV}_{\text{CapletCMS}}(t) - \text{PV}_{\text{FloorletCMS}}(t)}{B(t, T_p)} + K$$

FIGURE 5.2 – Sur-réplication d'un caplet CMS au moyen de swaptions *cash-settled*

L'approche par réplication se révèle bien plus cohérente que l'ajustement de convexité standard, car elle correspond à une stratégie couverture statique par des swaptions dont on connaît le prix<sup>4</sup>. On constate en pratique que le forward CMS (tout comme le prix de caplets/floorlets CMS) est extrêmement sensible au smile de volatilité des swaptions. Le fait que la volatilité implicite sur les strikes extrêmes (les ailes du smile) soit généralement plus élevée que la volatilité à la monnaie implique que les forwards CMS obtenus par réplication sont sensiblement plus élevés que les forward obtenus par l'ajustement de convexité classique. Les différences observées peuvent être très importantes – de l'ordre de plusieurs dizaines de points de base sur le taux – pour les maturités longues et grands tenors (e.g. taux CMS 30 ans payé dans 20 ans).

## 5.4 Produits digitaux

Pour terminer cette partie, abordons brièvement le cas des options digitales (dites aussi *options binaires*). De telles options vont payer à leur détenteur une somme d'argent prédéterminée suivant que le taux sous-jacent (e.g. LIBOR) fixe au dessus ou en dessous d'un seuil contractuel. On parle alors d'option *cash-or-nothing*.

Il existe également des produits binaires où l'on reçoit un taux (LIBOR, CMS ou autre) conditionnellement au niveau du LIBOR à maturité. Il s'agit alors d'une option *asset-or-nothing*. Ce second cas ne sera pas abordé ici.

4. Même s'il n'existe pas nécessairement de liquidité sur l'ensemble des swaptions impliquées dans la réplication, le pricing des CMS sera néanmoins cohérent avec le smile de volatilité swaption contribué par la banque.

### 5.4.1 Une digitale sur LIBOR

Prenons le cas le plus standard : celui d'une option binaire sur LIBOR payée à la date de fin du LIBOR. Une telle option versera 1 euro à la date de fin du LIBOR si celui-ci a fixé au dessus d'un strike  $K$  (l'option duale verserait 1 euro si le LIBOR a fixé en dessous de  $K$ ).

En reprenant les notations habituelles ( $T_f$  : date de fixing du LIBOR pour la période d'intérêt  $(T_1, T_2)$ ), le payoff de la digitale (reçu à la date  $T_2$ ) s'écrit formellement sous forme de l'indicatrice  $\mathbb{1}_{L(T_f, T_1, T_2) > K}$ . L'évaluation est donc directe au moyen de la mesure forward neutre  $Q^{T_2}$  :

$$\begin{aligned} \mathbf{PV}_{\text{Digitale}}(t) &= B(t, T_2) \mathbb{E}_t^{Q^{T_2}} (\mathbb{1}_{L(T_f, T_1, T_2) > K}) \\ &= B(t, T_2) \mathbb{P}_t^{Q^{T_2}} (L(T_f, T_1, T_2) > K) \end{aligned}$$

L'évaluation "naïve" d'une telle option consisterait à spécifier un modèle de Black sur le LIBOR (volatilité  $\sigma$ ) :

$$L(T_f, T_1, T_2) = L(t, T_1, T_2) \exp \left( -\frac{1}{2} \sigma^2 (T_f - t) + \sigma (W_{T_f}^{Q^{T_2}} - W_t^{Q^{T_2}}) \right)$$

Ce qui fournit le prix de l'option digitale au moyen de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$\mathbf{PV}_{\text{Digitale}}(t) = B(t, T_2) (1 - \mathcal{N}(d)), \quad \text{avec} \quad d = \frac{\ln(K/L(t, T_1, T_2)) + \frac{1}{2} \sigma^2 (T_f - t)}{\sigma \sqrt{T_f - t}}$$

Néanmoins cette approche est à proscrire, car elle peut être source d'arbitrage. En effet une option binaire sur un sous-jacent donné peut être répliquée approximativement par la différence de deux calls de strikes voisins<sup>5</sup> sur ce sous-jacent, comme le montre la figure 5.3 ci-après.

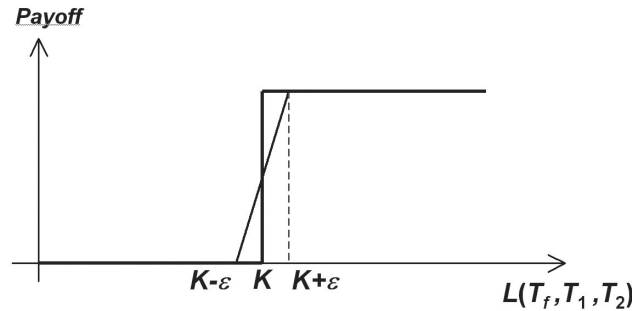


FIGURE 5.3 – Réplication d'une digitale sur LIBOR de strike  $K$  par la différence de deux calls de strikes  $K - \varepsilon$  et  $K + \varepsilon$  (*call spread*).

Dans le cas de la digitale sur LIBOR, on utilise donc deux caplets de strike voisins. Le prix de la digitale s'approche alors comme :

$$\mathbf{PV}_{\text{Digitale}}(t) \approx \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{\delta} \left( \mathbf{PV}_{\text{Caplet}, K-\varepsilon}(t) - \mathbf{PV}_{\text{Caplet}, K+\varepsilon}(t) \right)$$

5. On parle d'approximation par *call spread*.

Où  $PV_{\text{Caplet},K}(t)$  désigne à la date courante  $t$  le prix du caplet de strike  $K$  et de maturité  $T_f$  sur notre LIBOR de période d'intérêt  $(T_1, T_2)$ , où  $\delta$  est la fraction d'année de la période d'intérêt du LIBOR, et où  $\varepsilon$  est pris "suffisamment" petit<sup>6</sup>. Notons que, même si cela ne peut être mis en oeuvre en pratique, la réplication est exacte pour  $\varepsilon$  infiniment petit :

$$\begin{aligned} PV_{\text{Digitale}}(t) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\varepsilon} \frac{1}{\delta} \left( PV_{\text{Caplet},K-\varepsilon}(t) - PV_{\text{Caplet},K+\varepsilon}(t) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial K} \left( \frac{1}{\delta} PV_{\text{Caplet},K}(t) \right) \end{aligned}$$

En présence d'un smile de volatilité, le prix obtenu par la réplication en *call spread* peut s'avérer très différent du prix obtenu par la méthode naïve (modèle de Black à volatilité unique). La différence observée sera d'autant plus grande que le smile de volatilité sur les caplets de sous-jacent le LIBOR  $(T_1, T_2)$  est pentu au voisinage du strike  $K$ . En effet, si l'on note  $\sigma(x)$  la volatilité implicite du caplet sur le LIBOR  $(T_1, T_2)$  de strike  $x$ , on a :

$$\frac{1}{\delta} PV_{\text{Caplet},K}(t) = B(t, T_2) \mathbf{BS}_{\text{call}}(T_f - t, K, L(t, T_1, T_2), \sigma(K))$$

d'où on déduit :

$$\begin{aligned} PV_{\text{Digitale}}(t) &= -B(t, T_2) \left( \frac{\partial \mathbf{BS}_{\text{call}}}{\partial K}(T_f - t, K, L(t, T_1, T_2), \sigma(K)) \right. \\ &\quad \left. + \sigma'(K) \frac{\partial \mathbf{BS}_{\text{call}}}{\partial \sigma}(T_f - t, K, L(t, T_1, T_2), \sigma(K)) \right) \end{aligned}$$

qui met en lumière via le terme  $\sigma'(K)$  l'impact de la pente du smile sur le prix de la digitale.

### 5.4.2 Le corridor sur LIBOR

Le corridor sur LIBOR, appelé aussi *Corridor Range Accrual* dans le jargon des salles de marché, a été évoqué en introduction de cette partie. Une jambe corridor a la même structure qu'une jambe de swap ; elle va verser à la fin de chaque période d'intérêt un coupon égal à :

$$\delta \times R \times \frac{n}{N}$$

où  $\delta$  est la fraction d'année de la période d'intérêt (base à définir),  $R$  un taux fixe (par exemple 6%),  $n$  le nombre de jours de la période d'intérêt où un taux LIBOR (par exemple l'EURIBOR 6 mois) fixe dans un intervalle  $[K_{\min}, K_{\max}]$  (par exemple  $[0; 4.50\%]$ ), et  $N$  le nombre total d'observations de ce taux LIBOR durant la période d'intérêt. Le receveur de cette jambe corridor percevra donc le coupon plein de 6% si l'EURIBOR 6 mois est resté en dessous du seuil de 4.50% tout au long de la période d'intérêt.

Formellement le coupon corridor peut donc s'écrire au moyen des indicatrices suivantes :

$$\delta \times R \times \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{K_{\min} < L(t_i) < K_{\max}\}}$$

6. Le  $\varepsilon$  choisi en pratique est typiquement de l'ordre de 10 points de base.

Où les  $t_i$  désignent les dates ouvrées de la période d'intérêt, et où  $L(t)$  représentent le fixing à la date  $t$  du taux LIBOR considéré<sup>7</sup>.

Pour évaluer ce flux on utilise la mesure forward-neutre  $Q^{T_p}$  associée à la date de paiement  $T_p$  du coupon corridor (c'est à dire la date de fin de la période d'intérêt correspondante) :

$$\mathbf{PV}_{\text{Coupon Corridor}}(t) = \delta \times R \times \frac{1}{N} B(t, T_p) \sum_{i=1}^N \mathbb{E}_t^{Q^{T_p}} \left( \mathbb{1}_{\{K_{\min} < L(t_i) < K_{\max}\}} \right) \quad (5.3)$$

avec :

$$\mathbb{E}_t^{Q^{T_p}} \left( \mathbb{1}_{\{K_{\min} < L(t_i) < K_{\max}\}} \right) = \mathbb{E}_t^{Q^{T_p}} \left( \mathbb{1}_{\{L(t_i) > K_{\min}\}} \right) - \mathbb{E}_t^{Q^{T_p}} \left( \mathbb{1}_{\{L(t_i) \geq K_{\max}\}} \right)$$

Nous voilà donc en présence d'une série de  $2N$  options digitales. Elles se révèlent légèrement plus complexes à évaluer que la digitale standard de la section précédente du fait que leur date de paiement ne coïncide pas avec la date de fin du taux LIBOR observé. Néanmoins on conserve l'approche par *call spread*, en utilisant des caplets non standard, payés à la date  $T_p$ . Considérons le cas de la digitale fixant à la date  $t_i$  de strike  $K = K_{\min}$  ou  $K_{\max}$ . Elle sera évaluée de la manière suivante :

$$\mathbb{E}_t^{Q^{T_p}} \left( \mathbb{1}_{\{L(t_i) > K\}} \right) = \frac{1}{2\varepsilon} \left( \mathbf{BS}_{\text{call}}(t_i - t, K - \varepsilon, \tilde{L}_i(t), \sigma(K - \varepsilon)) - \mathbf{BS}_{\text{call}}(t_i - t, K + \varepsilon, \tilde{L}_i(t), \sigma(K + \varepsilon)) \right)$$

où  $\sigma(x)$  est la volatilité implicite du LIBOR au strike  $x$  (déduite du prix du caplet standard) et où  $\tilde{L}_i(t)$  est le forward :

$$\tilde{L}_i(t) = \mathbb{E}_t^{Q^{T_p}} (L(t_i))$$

Comme  $T_p$  n'est en général pas la date de fin du taux  $L(t_i)$ ,  $\tilde{L}_i(t)$  ne correspond pas au taux FRA standard. Il en est déduit par un ajustement de convexité suivant une technique analogue à celle présentée section 5.1.

Les  $2N$  digitales étant évaluées de cette manière, il ne reste plus qu'à les sommer selon (5.3) pour obtenir la valeur actuelle du flux de notre corridor. Il faudra réitérer ce calcul pour chacun des flux du corridor pour arriver à la valeur de la jambe corridor dans son intégralité.

7. Pour reprendre les notations utilisées jusqu'ici :  $L(t) := L(t, T_1, T_2)$  avec  $T_1 = t+2$  jours ouvrés et  $T_2 = T_1 + 6$  mois (ajusté).

## Partie 6

# Exotiques de taux et modèles de courbe

---

Cette partie a pour objectif d'aborder les produits plus complexes, c'est à dire ceux qui ne peuvent s'évaluer avec les méthodes présentées dans les parties précédentes. Le premier – et le plus populaire – de ces produits est la swaption bermuda, étudiée en détails dans la section 6.4. Dans un tel produit, la multiplicité des dates d'exercice ne permet pas d'identifier un seul taux sous-jacent, si bien qu'une modélisation de la courbe des taux dans sa globalité est requise. Cette approche est *a fortiori* nécessaire pour les structures annulables plus complexes (*callable reverse floater*, *callable corridor range accrual*, *callable CMS spread* etc.), de même que pour les produits *path-dependent*. Ces exotiques sont abordés dans la section 6.5, en insistant tout particulièrement sur les risques de ces produits et le choix d'un modèle adapté à leur évaluation.

Plutôt que de faire un “catalogue” des modèles de la courbe des taux (ce que de nombreux ouvrages font très bien, notamment [1]), on préférera s'intéresser en détail à un modèle particulier : le Hull & White 1 facteur. C'est probablement le plus simple des modèles de taux utilisables en pratique, mais il se révèle tout à fait adapté à l'évaluation des bermudas et de certains autres swaps annulables. Son étude détaillée (section 6.3) permet d'appréhender beaucoup des questions que l'*analyste quantitatif* doit se poser lorsqu'il développe et utilise un modèle : analytiques pour les caps/floors/swaptions, stratégie de calibration, effet des paramètres sur les instruments non calibrés et sur la *volatilité forward*... Bien que très utilisé dans les salles de marché, dans sa version standard ou dans des versions “améliorées”, le modèle BGM (*Labor Market Model*) ne sera pas abordé. On pourra à nouveau se reporter à [1] pour une revue détaillée, ou à [5] pour une présentation plus succincte.

### 6.1 Modèles de taux court

Historiquement, ce sont les premiers modèles de la courbe des taux. Ils partent d'une modélisation directe du taux court, sous la mesure risque-neutre :

$$dr_t = A(t, r_t)dt + B(t, r_t)dW_t$$

Les deux exemples les plus connus sont :



- Le modèle de Vasicek :

$$dr_t = \lambda(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

- Le modèle CIR :

$$dr_t = \lambda(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Ce type de modèle est inutilisable en pratique, car la courbe de taux est endogène au modèle. Avec le peu de paramètres disponibles, il est impossible de calibrer la courbe des taux initiale. Et même si c'était le cas, il ne resterait plus de degrés de liberté pour se calibrer sur des prix de caps, floors ou swaptions !

Le cadre HJM évoqué dans le paragraphe suivant est une réponse à cette problématique. Concrètement, cela revient à remplacer le paramètre  $b$  constant dans les modèles ci-dessus par une fonction déterministe  $b(t)$  calibrée sur la courbe des taux initiale.

## 6.2 Le cadre HJM

Le cadre HJM propose une modélisation directe des zéro-coupons de toutes maturités ou, de manière équivalente, des taux forwards instantanés. La dynamique du zéro-coupon de maturité  $T$  est spécifiée comme :

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T) \cdot dW_t^Q \quad (6.1)$$

où  $W^Q$  est un mouvement brownien standard  $d$ -dimensionnel sous la probabilité risque-neutre  $Q$ . A ce stade, aucune hypothèse n'est formulée sur le processus de volatilité  $d$ -dimensionnel  $\Gamma(t, T)$  : il peut être déterministe ou stochastique.

Le taux forward instantané de maturité  $T$  est défini par :

$$f(t, T) = -\frac{\partial \ln(B(t, T))}{\partial T}, \quad \text{c'est à dire} \quad B(t, T) = e^{-\int_t^T f(t, s) ds}$$

La dynamique de  $f(t, T)$  sous la mesure risque-neutre est alors :

$$df(t, T) = -\gamma(t, T) \cdot \Gamma(t, T) dt + \gamma(t, T) dW_t^Q$$

avec

$$\gamma(t, T) = -\frac{\partial \Gamma(t, T)}{\partial T}$$

L'intérêt du cadre HJM est que la valeur initiale de la courbe des taux (les zéro-coupons  $B(0, T)$  pour toute maturité  $T$ , ou les taux forwards instantanés  $f(0, T)$ ) est prise comme un *input*. Le modèle est donc automatiquement calibré sur cette courbe initiale.

## 6.3 Le modèle Hull & White 1 facteur

Le modèle Hull & White 1 facteur est la “version HJM” du modèle de Vasicek. Dans la littérature (et les salles de marché), on l’appelle aussi *HJM gaussien 1 facteur*, *Linear Gauss-Markov* (LGM) ou encore *Extended Vasicek*.

### 6.3.1 Spécification

Un modèle HJM (§ 6.2) est dit *gaussien* si les volatilités  $\gamma(t, T)$  et  $\Gamma(t, T)$  sont déterministes. On considère le cas 1 facteur ( $d = 1$ ), de telle sorte que  $\gamma(t, T)$  and  $\Gamma(t, T)$  sont des scalaires. Le modèle Hull & White 1 facteur spécifie la volatilité du forward instantané de la façon suivante :

$$|\gamma(t, T)| = \sigma(t) \exp \left\{ - \int_t^T \lambda(s) ds \right\}$$

où  $\sigma$  et  $\lambda$  sont des fonctions déterministes. Dans ce cas, le modèle devient *markovien*, i.e. la dynamique du modèle pour les dates  $s > t$  peut être entièrement déduit de son état à la date  $t$ .

Dans la suite on fait l’hypothèse que la fonction  $\sigma$  est constante par morceaux et que  $\lambda$  est une constante. En conséquence :

$$\gamma(t, T) = \sigma(t) e^{-\lambda(T-t)}, \quad \Gamma(t, T) = \frac{\sigma(t)}{\lambda} \left( e^{-\lambda(T-t)} - 1 \right)$$

Dans le cadre Hull & White, étant donnée la courbe des taux initiale, le modèle sera donc entièrement déterminé par :

- Le paramètre de *mean reversion*  $\lambda$
- La fonction de volatilité  $\sigma(t)$  du taux court, constante par morceaux

Par ailleurs , le caractère déterministe des volatilités  $\gamma(t, T)$  et  $\Gamma(t, T)$  implique que :

- Le taux court et les taux forwards instantanés sont des processus gaussiens
- Les zéro-coupons sont des processus log-normaux (cf. éq. (6.1))

Dans ce qui suit on notera simplement  $W$  le mouvement brownien standard unidimensionnel associé à la mesure risque-neutre.

### 6.3.2 Taux forward instantané

La dynamique du taux forward instantané de maturité  $T$  est la suivante :

$$df(t, T) = -\gamma(t, T) \cdot \Gamma(t, T) dt + \gamma(t, T) dW_t$$

Donc, dans le cas d'une volatilité Hull & White :

$$f(t, T) = f(0, T) - \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} \left( e^{-2\lambda(T-s)} - e^{-\lambda(T-s)} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) e^{-\lambda(T-s)} dW_s \quad (6.2)$$

### 6.3.3 Taux court

Par définition le taux court s'écrit  $r_t = f(t, t)$ , soit :

$$\begin{aligned} r_t &= f(0, t) - \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} \left( e^{-2\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t-s)} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) e^{-\lambda(t-s)} dW_s \\ &= f(0, t) - \frac{e^{-2\lambda t}}{\lambda} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{2\lambda s} ds + \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{\lambda s} ds + e^{-\lambda t} \int_0^t \sigma(s) e^{\lambda s} dW_s \end{aligned} \quad (6.3)$$

D'une part :

$$d(e^{\lambda t} r_t) = e^{\lambda t} dr_t + \lambda e^{\lambda t} r_t dt$$

D'autre part, en utilisant (6.3) :

$$d(e^{\lambda t} r_t) = \left[ \lambda e^{\lambda t} f(0, t) + e^{\lambda t} \partial_2 f(0, t) + e^{-\lambda t} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{2\lambda s} ds \right] dt + \sigma(t) e^{\lambda t} dW_t$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient :

$$dr_t = \left[ \lambda(f(0, t) - r_t) + \partial_2 f(0, t) + e^{-2\lambda t} \int_0^t \sigma(s)^2 e^{2\lambda s} ds \right] dt + \sigma(t) dW_t \quad (6.4)$$

### 6.3.4 Formule de reconstruction des zéro-coupons

L'équation (6.4) se réécrit :

$$dX_t = [\phi(t) - \lambda X_t] dt + \sigma(t) dW_t$$

avec

$$X_t = r_t - f(0, t) \quad \text{et} \quad \phi(t) = \int_0^t \sigma(s)^2 e^{-2\lambda(t-s)} ds$$

$X_t$  est par construction une variable d'état gaussienne de valeur initiale nulle. Pour toute date  $t$ , et pour toute maturité  $T \geq t$ , le zéro-coupon  $B(t, T)$  peut s'écrire comme une fonction déterministe de  $X_t$  :

$$\begin{aligned} B(t, T) &= B_{t,T}(X_t) \\ &= \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta(t, T)^2 \phi(t) - \beta(t, T) X_t \right\} \end{aligned} \quad (6.5)$$

avec

$$\beta(t, T) = \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} = \int_t^T e^{-\lambda(u-t)} du$$

Ce résultat est démontré en annexe page 84.

Cette *formule de reconstruction* des zéro-coupons est très importante ; c'est elle qui fait toute la simplicité (et l'attrait) du modèle. Elle nous dit que la dynamique de l'ensemble de la courbe des taux est régie par une unique variable d'état gaussienne : cela nous permettra notamment d'évaluer les swaptions et d'implémenter facilement des méthodes numériques de pricing (EDP, arbre, Monte Carlo...).

### 6.3.5 Evaluation des caps & floors

Un cap (resp. un floor) est composé de plusieurs caplets (resp. floorlets). Chaque caplet est un call de strike  $K$  sur taux LIBOR. Notons  $T_f$  la maturité du caplet (date de fixing du LIBOR),  $T_1$ , la date de départ du LIBOR sous-jacent (située deux jours ouvrés après  $T_f$ ),  $T_2$  sa date de fin, et  $\delta$  la fraction d'année correspondante (base Exact/360). Le caplet délivre en date  $T_2$  le flux :

$$\delta(L(T_f, T_1, T_2) - K)^+$$

En utilisant la mesure forward  $Q^{T_2}$  rendant le taux  $L(t, T_1, T_2)$  martingale, le caplet s'évalue donc comme suit :

$$\mathbf{PV}_{\text{Caplet}}(0) = \delta B(0, T_2) \mathbb{E}_0^{Q^{T_2}} [(L(T_f, T_1, T_2) - K)^+] \quad \text{avec} \quad L(t, T_1, T_2) = \frac{1}{\delta} \left( \frac{B(t, T_1)}{B(t, T_2)} - 1 \right)$$

Soit :

$$\mathbf{PV}_{\text{Caplet}}(0) = B(0, T_2) \mathbb{E}_0^{Q^{T_2}} \left[ \left( \frac{B(T_f, T_1)}{B(T_f, T_2)} - (1 + \delta K) \right)^+ \right]$$

Le caplet apparaît donc comme un call de strike  $(1 + \delta K)$  sur zéro-coupon forward. Dans le cadre Hull & White,  $B(t, T_1)/B(t, T_2)$  est une  $Q^{T_2}$ -martingale log-normale de volatilité instantanée  $\Gamma(t, T_1) - \Gamma(t, T_2)$  (utiliser le lemme d'Itô). En conséquence :

$$\mathbf{PV}_{\text{Caplet}}^{\text{HW}}(0) = B(0, T_2) \mathbf{BS}_{\text{call}} \left( T_f, 1 + \delta K, \frac{B(0, T_1)}{B(0, T_2)}, \sigma \right)$$

Avec :

$$\sigma^2 = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} (\Gamma(t, T_1) - \Gamma(t, T_2))^2 dt = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \sigma(s)^2 \left( \frac{e^{-\lambda(T_1-t)} - e^{-\lambda(T_2-t)}}{\lambda} \right)^2 dt$$

Soit :

$$\sigma^2 = \frac{1}{T_f} \left( \frac{e^{-\lambda(T_1-T_f)} - e^{-\lambda(T_2-T_f)}}{\lambda} \right)^2 \phi(T_f)$$

Où  $\phi(T_f)$  est la variance du taux court à horizon  $T_f$ , définie dans la section précédente.

Le floorlet s'évalue de manière analogue, en remplaçant  $\mathbf{BS}_{\text{call}}$  par  $\mathbf{BS}_{\text{put}}$ .

**Remarque.** On notera au passage que la dynamique d'un taux LIBOR dans le modèle Hull & White est log-normale décalée (cf. section 4.4.2), avec comme paramètres la volatilité  $\sigma$  définie précédemment et le décalage  $d = 1/\delta$ . Le modèle Hull & White présente donc un *skew* de volatilité intrinsèque, c'est à dire une volatilité implicite décroissante en fonction du strike. Le paramètre de décalage étant fixe, il ne sera pas possible, dans ce modèle, de contrôler la pente du *skew*.

### 6.3.6 Evaluation des swaptions

Les swaptions sont décrites en détail section 4.3. Nous utilisons ici les mêmes notations ( $T_f$  : maturité de la swaption,  $T_0, T_1, \dots, T_n$  : échéancier de la jambe fixe,  $\delta_1, \dots, \delta_n$  : fractions d'années correspondantes).

Pour un notionnel unitaire, le prix de la swaption payeuse de prix d'exercice  $K$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(0) &= B(0, T_f) \mathbb{E}_0^{Q^{T_f}} \left( (\mathbf{PV}_V(T_f) - \mathbf{PV}_F(T_f))^+ \right) \\ &= B(0, T_f) \mathbb{E}_0^{Q^{T_f}} \left[ \left( B(T_f, T_0) - B(T_f, T_n) - K \sum_{i=1}^n \delta_i B(T_f, T_i) \right)^+ \right] \\ &= B(0, T_f) \mathbb{E}_0^{Q^{T_f}} \left[ \left( B(T_f, T_0) - \sum_{i=1}^n c_i B(T_f, T_i) \right)^+ \right] \end{aligned}$$

Où les coefficients  $c_i$  sont définis par :

$$\begin{aligned} c_i &= \delta_i K \text{ pour } i = 1, \dots, n-1 \\ c_n &= 1 + \delta_n K \end{aligned}$$

Passons sous la mesure forward  $Q^{T_0}$  :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(0) = B(0, T_0) \mathbb{E}_0^{Q^{T_0}} \left[ \left( 1 - \sum_{i=1}^n c_i \frac{B(T_f, T_i)}{B(T_f, T_0)} \right)^+ \right]$$

Utilisons maintenant la formule de reconstruction des zéro-coupons (6.5). Compte tenu de la positivité des coefficients  $c_i$ , la fonction :

$$x \mapsto \sum_{i=1}^n c_i \frac{B_{T_f, T_i}(x)}{B_{T_f, T_0}(x)}$$

est décroissante et réalise une bijection entre  $\mathbb{R}$  et  $]0, +\infty[$ , si bien qu'il existe un unique réel  $x_0$  (dit *frontière d'exercice*) tel que :

$$\sum_{i=1}^n c_i \frac{B_{T_f, T_i}(x_0)}{B_{T_f, T_0}(x_0)} = 1 \quad (6.6)$$

Posons maintenant :

$$K_i = \frac{B_{T_f, T_i}(x_0)}{B_{T_f, T_0}(x_0)}$$

Et regardons le produit payant à la date  $T_0$  :

$$\sum_{i=1}^n c_i \left( K_i - \frac{B(T_f, T_i)}{B(T_f, T_0)} \right)^+ \quad (6.7)$$

Dans le modèle, les  $n$  options apparaissant ci-dessus ont toutes la même frontière d'exercice que la swaption (à savoir  $\{X_{T_f} > x_0\}$ ) : elles sont exercées simultanément. Par ailleurs, le choix des  $K_i$  implique que la valeur du payoff (6.7) coïncide avec celui de la swaption en cas d'exercice. La swaption peut donc s'évaluer comme :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(0) = B(0, T_0) \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{E}_0^{Q^{T_0}} \left[ \left( K_i - \frac{B(T_f, T_i)}{B(T_f, T_0)} \right)^+ \right]$$

C'est à dire comme la somme de  $n$  puts sur zéro-coupon forward. Chaque processus  $B(t, T_i)/B(t, T_0)$  étant une  $Q^{T_0}$ -martingale log-normale de volatilité instantanée  $\Gamma(t, T_i) - \Gamma(t, T_0)$ , on obtient :

$$\mathbf{PV}_{\text{Sw}}^P(0) = B(0, T_0) \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{BS}_{\text{put}} \left( T_f, K_i, \frac{B(0, T_i)}{B(0, T_0)}, \sigma_i \right)$$

où (cf. section précédente) :

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T_f} \left( \frac{e^{-\lambda(T_0 - T_f)} - e^{-\lambda(T_i - T_f)}}{\lambda} \right)^2 \phi(T_f)$$

Le prix de la swaption *receveuse* correspondante est obtenu en remplaçant  $\mathbf{BS}_{\text{put}}$  par  $\mathbf{BS}_{\text{call}}$ .

L'évaluation pratique d'une swaption dans le modèle Hull & White est donc directe et exacte ; elle nécessite néanmoins la recherche numérique<sup>1</sup> de la frontière d'exercice (racine de l'équation (6.6)).

### 6.3.7 Procédure de calibration

La calibration de la volatilité  $\sigma(t)$  du modèle s'effectue à partir de prix de marché de caplets (ou floorlets) et swaptions. Les instruments de calibration se choisissent méticuleusement, au cas par cas, suivant la nature et les caractéristiques du produit que l'on cherche à évaluer. Cet aspect est abordé plus loin dans le cadre des swaptions bermudas et autres produits exotiques (sections 6.4 et 6.5).

La problématique est la suivante : on se donne une  $n$  instruments de calibration (caplets, floorlets, swaptions) de maturités distinctes  $T_1 < T_2 < \dots < T_n$ . On choisit une valeur du paramètre de *mean reversion*  $\lambda$  ; on cherche à calibrer la fonction  $\sigma(t)$  (constante par morceaux) afin que le modèle réévalue correctement les  $n$  instruments de marché. Les maturités des instruments considérés sont nécessairement distinctes car il est impossible de jouer sur le smile du modèle, et donc de calibrer plusieurs strikes par maturité (cf. remarque en fin de section 6.3.5).

1. Pour des raisons d'efficacité, on préférera une méthode du type Newton-Raphson.

Le prix de l'instrument de calibration de maturité  $T_i$  dépend de  $\sigma(t)$  via la variance  $\phi(T_i)$  (cf. deux précédents paragraphes). Cela conduit à la stratégie de calibration suivante :

1. **Calcul des variances  $\phi$ .** Pour chaque instrument  $i = 1, \dots, n$ , déterminer la valeur  $\phi(T_i)$  qui rend le prix Hull & White de l'instrument égal à son prix de marché. Cela requiert une méthode numérique de recherche de racine.
2. **Bootstrap de  $\sigma(t)$ .** Pour  $i = 0, \dots, n-1$ , avec pour convention  $T_0 = 0$  (date initiale), utiliser  $\phi(T_i)$  et  $\phi(T_{i+1})$  pour déterminer la valeur  $\sigma_i$  de la fonction  $\sigma$  sur l'intervalle  $[T_i, T_{i+1}]$  :

$$\begin{aligned}\phi(T_{i+1}) &= e^{-2\lambda(T_{i+1}-T_i)}\phi(T_i) + \int_{T_i}^{T_{i+1}} \sigma(t)^2 e^{-2\lambda(T_{i+1}-t)} dt \\ &= e^{-2\lambda(T_{i+1}-T_i)}\phi(T_i) + \frac{\sigma_i^2}{2\lambda} \left(1 - e^{-2\lambda(T_{i+1}-T_i)}\right)\end{aligned}$$

de telle sorte que :

$$\sigma_i^2 = 2\lambda \frac{\phi(T_{i+1}) - e^{-2\lambda(T_{i+1}-T_i)}\phi(T_i)}{1 - e^{-2\lambda(T_{i+1}-T_i)}} \quad (6.8)$$

L'étape 2 ci-dessus pose problème si  $\phi(T_{i+1}) < e^{-2\lambda(T_{i+1}-T_i)}\phi(T_i)$  car l'équation (6.8) n'a alors pas de solution<sup>2</sup>. Cela peut arriver en cas de baisse brutale de la volatilité implicite d'une maturité à la suivante, ou si les instruments de calibration sont hétérogènes (e.g. une swaption de tenor 30 ans juste après un caplet). Par ailleurs, pour la stabilité des méthodes numériques utilisées en aval, on souhaite que la volatilité du modèle soit bornée inférieurement, i.e. :

$$\forall t, \sigma(t) \geq \sigma_{\min}$$

Si l'équation (6.8) n'a pas de solution ou fournit une solution inférieure à  $\sigma_{\min}$ , on procédera de la manière suivante :

1. Poser  $\sigma_i = \sigma_{\min}$
2. Mettre à jour la valeur suivante de  $\phi$  :

$$\phi(T_{i+1}) \rightsquigarrow \tilde{\phi}(T_{i+1}) = e^{-2\lambda(T_{i+1}-T_i)}\phi(T_i) + \frac{\sigma_{\min}^2}{2\lambda} \left(1 - e^{-2\lambda(T_{i+1}-T_i)}\right)$$

et passer au calcul de  $\sigma_{i+1}$ .

Dans cette situation, l'instrument de maturité  $T_{i+1}$  sera surévalué par le modèle, mais les suivants seront correctement calibrés s'il n'y a pas d'autre *variance squeeze*.

**Remarque.** Dans ce qui précède, on a figé la *mean reversion*  $\lambda$  puis calibré  $\sigma(t)$  sur une série d'instruments de marché. Il est possible d'itérer la procédure afin de calibrer également le paramètre  $\lambda$ . Une stratégie fréquente, dans le cadre de produits *callable* (swaptions bermuda et

---

2. On parle de *variance squeeze*.

autres produits annulables) est de calibrer  $\sigma(t)$  sur une diagonale de swaptions<sup>3</sup>, et  $\lambda$  sur un cap à la monnaie<sup>4</sup>. Cependant la calibration de  $\lambda$  n'est pas indispensable; beaucoup d'opérateurs préfèrent gérer ce paramètre manuellement, en le choisissant à un niveau qu'ils jugent conservateur. C'est l'objet du paragraphe 6.4.5.

### 6.3.8 Effet de la *mean reversion*

La *mean reversion*  $\lambda$  joue un rôle important dans l'évaluation et le *risk-management* de nombreux exotiques de taux (voir plus loin le cas de la swaption bermuda).

**Prix des produits non calibrés.** Le paramètre  $\lambda$  a d'une part un impact sur le prix des options que l'on a pas calibrées. Prenons un exemple : si on calibre le modèle sur un caplet LIBOR 6 mois de maturité 2 ans, le prix d'une swaption de même maturité et de tenor 20 ans sera affecté par la *mean reversion*. En effet, la calibration sur le caplet implique que la volatilité suivante reste constante<sup>5</sup> :

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{T_f} \left( \frac{e^{-\lambda(T_1-T_f)} - e^{-\lambda(T_2-T_f)}}{\lambda} \right)^2 \phi(T_f)$$

Or la swaption de tenor 20 ans est évaluée dans le modèle au moyen de plusieurs volatilités de la forme<sup>6</sup> :

$$\sigma^2 = \frac{1}{T_f} \left( \frac{e^{-\lambda(T_1-T_f)} - e^{-\lambda(T_i-T_f)}}{\lambda} \right)^2 \phi(T_f) \quad \text{avec} \quad T_i > T_2$$

Soit :

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 \left( \frac{e^{-\lambda(T_1-T_f)} - e^{-\lambda(T_i-T_f)}}{e^{-\lambda(T_1-T_f)} - e^{-\lambda(T_2-T_f)}} \right)^2$$

qui s'avère décroissante en fonction du paramètre  $\lambda$ . Autrement dit, si on augmente la *mean reversion*  $\lambda$  (et recalibre le modèle au prix du caplet), le prix de la swaption de même maturité va diminuer. On peut généraliser ce résultat : si on calibre le modèle sur un instrument de tenor donné, alors le prix d'un instrument de même maturité et de tenor plus long diminuera si on augmente la *mean reversion*. A l'inverse, si on calibre le modèle sur un instrument de tenor donné, alors le prix d'un instrument de même maturité et de tenor plus court augmentera avec la *mean reversion*.

**Impact sur la *volatilité forward*.** Le deuxième aspect concerne la forme de la volatilité instantanée dans le modèle. Prenons le cas d'un caplet de maturité  $T_f$  (la période d'intérêt du LIBOR sous-jacent étant comme d'habitude notée  $(T_1, T_2)$ ). Comme on l'a vu la dynamique Hull &

3. Par *diagonale* de swaptions, on entend une série de swaptions vérifiant maturité + tenor = constante (les swaps sous-jacents ont donc tous même date de fin). Par exemple, une diagonale 10 ans serait constituée des 9 swaptions suivantes : 1Y/9Y, 2Y/8Y, 3Y/7Y, ..., 9Y/1Y.

4. On va donc faire varier  $\lambda$  pour atteindre le prix de marché du cap, en recalibrant  $\sigma(t)$  sur la diagonale de swaptions à chaque itération.

5. cf. section 6.3.5.

6. cf. section 6.3.6.



White du LIBOR sous-jacent est de type log-normale décalée. Le processus log-normal associé est  $B(t, T_1)/B(t, T_2)$ , dont la volatilité instantanée s'écrit :

$$\begin{aligned}\Gamma(t, T_1) - \Gamma(t, T_2) &= \frac{\sigma(t)}{\lambda} \left( e^{-\lambda(T_1-t)} - e^{-\lambda(T_2-t)} \right) \\ &= \left( e^{-\lambda T_1} - e^{-\lambda T_2} \right) \frac{\sigma(t)}{\lambda} e^{\lambda t}\end{aligned}$$

Pour  $\lambda > 0$  cette volatilité instantanée est donc exponentiellement croissante avec le temps. Si on calibre le modèle sur le prix du caplet, on fixe la valeur de l'intégrale  $\int_0^{T_f} (\Gamma(t, T_1) - \Gamma(t, T_2))^2 dt$ . En changeant la valeur de *mean reversion* (et recalibrant le modèle sur le caplet), on va affecter la forme de la volatilité instantanée entre  $t = 0$  et  $T_f$  (son intégrale quadratique restant constante). Pour  $\lambda = 0$  la volatilité instantanée est constante ; plus  $\lambda$  est grand plus la volatilité a tendance à se répartir vers la fin, au voisinage de la maturité  $T_f$  de l'instrument de calibration. On dit que la *volatilité forward* est d'autant plus grande que la *mean reversion* est importante. Ce phénomène est illustré par la figure 6.1 suivante.

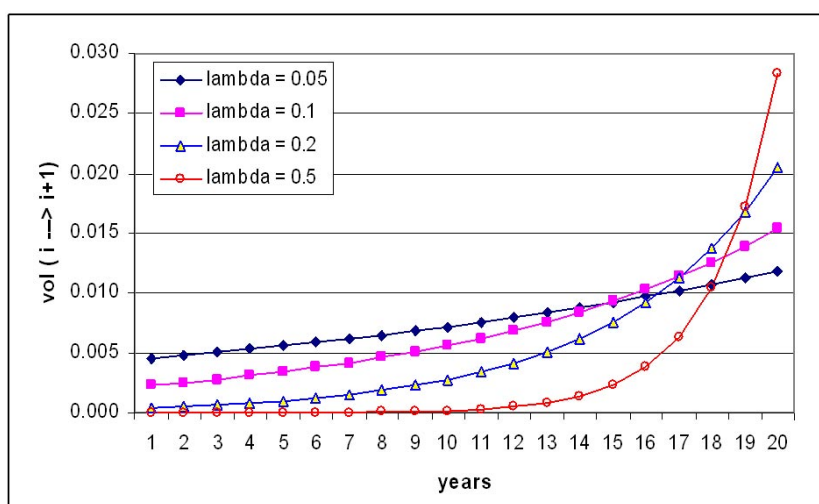


FIGURE 6.1 – Volatilité instantanée d'un caplet de maturité 20 ans sur LIBOR 1 an. On calibre le modèle sur le prix du caplet pour différentes valeurs de la *mean reversion*  $\lambda$ . Pour chaque valeur de  $\lambda$ , on représente en fonction du temps la volatilité instantanée du ratio de zéro-coupons  $B(t, T_1)/B(t, T_2)$  où  $T_1 = 20$  ans, et  $T_2 = 21$  ans. La calibration au caplet implique que l'intégrale quadratique de cette volatilité instantanée demeure constante, mais plus  $\lambda$  est grand, plus la volatilité sera faible au début et importante au voisinage de la maturité du caplet.

Cet effet est crucial pour comprendre le prix des swaptions bermudéennes (section 6.4).

### 6.3.9 Monte Carlo

Considérons un produit exotique générant les flux aléatoires  $F(T_1), F(T_2), \dots, F(T_n)$  aux dates  $T_1, T_2, \dots, T_n$ . Son prix s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{PV}_{\text{exot}} = \sum_{i=1}^n B(0, T_i) \mathbb{E}_0^{Q^{T_i}} (F(T_i))$$

Soit, en passant toutes les espérances sous la mesure  $Q^{T_n}$  associée à la date finale de paiement :

$$\mathbf{PV}_{\text{exot}} = \sum_{i=1}^n B(0, T_n) \mathbb{E}_0^{Q^{T_n}} \left( \frac{F(T_i)}{B(T_i, T_n)} \right)$$

Pour évaluer ce produit en Monte Carlo, une stratégie consiste donc à simuler la variable d'état  $X_t$  du modèle Hull & White sous la mesure terminale  $Q^{T_n}$ . Le changement de drift entre les mouvements browniens risque-neutre et forward neutre fait intervenir la volatilité du zéro-coupon de maturité terminale :

$$dW_t^{Q^{T_n}} = dW_t^Q - \Gamma(t, T_n) dt$$

de sorte que :

$$\begin{aligned} dX_t &= (\phi(t) - \lambda X_t) dt + \sigma(t) dW_t^Q \\ &= (\phi(t) - \lambda X_t + \sigma(t) \Gamma(t, T_n)) dt + \sigma(t) dW_t^{Q^{T_n}} \end{aligned}$$

On peut donc simuler le processus  $X_t$  de façon exacte sous  $Q^{T_n}$ , sur une discrétisation  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T_n$  incluant les dates  $T_1, T_2, \dots, T_n$  :

$$X_{t_j} = e^{-\lambda t_j} \left( e^{\lambda t_{j-1}} X_{t_{j-1}} + \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{\lambda t} (\phi(t) + \sigma(t) \Gamma(t, T_n)) dt + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma(t) e^{\lambda t} dW_t^{Q^{T_n}} \right), \quad j = 1, \dots, m$$

En effet, la première intégrale ci-dessus est déterministe et se calcule en fonction de  $\lambda$  et  $\sigma(t)$ , tandis que l'intégrale stochastique se simule comme :

$$\varepsilon \times \sqrt{\int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma(t)^2 e^{2\lambda t} dt} \quad \text{avec} \quad \varepsilon \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

A chaque date  $t_j$ , les zéro-coupons nécessaires à l'évaluation des payoffs  $F(T_i)/B(T_i, T_n)$  sont calculés en fonction de la valeur du processus  $X_t$  via la formule de reconstruction (6.5).

### 6.3.10 Evaluation par EDP

Considérons un modèle de taux représenté par une variable d'état  $X_t$  uni-dimensionnelle et dont la dynamique est la suivante sous la mesure risque-neutre  $Q$  :

$$dX_t = \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

avec  $\mu$  et  $\sigma$  fonctions déterministes. Dans le cadre Hull & White 1 facteur,  $\mu$  et  $\sigma$  sont définies par :

$$\mu(t, x) = \phi(t) - \lambda x \quad \text{et} \quad \sigma(t, x) = \sigma(t)$$

Nous cherchons à écrire l'EDP d'évaluation d'un produit (typiquement une option) dont la valeur en  $t$  s'écrit  $v(t, X_t)$ . Le produit en question s'assimile à un actif liquide : sous hypothèse d'AOA, sa valeur actualisée est donc une  $Q$ -martingale, ce qui implique :

$$dv(t, X_t) = r(t, X_t)v(t, X_t)dt + (\dots)dW_t$$

Par ailleurs, d'après le Lemme d'Itô, le drift intervenant dans la diffusion de  $v(t, X_t)$  s'écrit :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, X_t) + \mu(t, X_t)\frac{\partial v}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma(t, X_t)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, X_t)$$

En identifiant les deux drifts il vient :

$$r(t, X_t)v(t, X_t) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, X_t) + \mu(t, X_t)\frac{\partial v}{\partial x}(t, X_t) + \frac{1}{2}\sigma(t, X_t)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, X_t)$$

Ce qui aboutit à l'EDP suivante :

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t, x) + \mu(t, x)\frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}\sigma(t, x)^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) - r(t, x)v(t, x) = 0 \quad (6.9)$$

Cette équation est résolue numériquement via un schéma de *différences finies* de type Crank-Nicholson. Cette méthode est décrite en annexe page 85 et suivantes.

## 6.4 Swaptions bermudas

### 6.4.1 Définition

Une swaption bermuda (bermuδέenne) est une option permettant de rentrer dans un swap de taux à différentes dates d'exercice. Supposons que le swap sous-jacent commence en  $T_0$  et finisse en  $T_n$ , avec pour échéancier  $T_0, T_1, \dots, T_n$  sur la jambe fixe. Une swaption Bermuda permettra par exemple de rentrer dans le swap sous-jacent à la date  $T_0$ , puis, si l'exercice n'a pas eu lieu en  $T_0$ , d'y rentrer à la date  $T_1$ , puis si l'exercice n'a pas eu lieu en  $T_1$ , d'y rentrer à la date  $T_2$  etc (cf. figure 6.2 ci-après). Comme dans le cas des swaptions standard, on parle de bermuda *payeuse* (on rentre dans un swap où l'on paye le taux fixe) ou *receveuse* (on reçoit le taux fixe).

En pratique la fréquence d'exercice ne correspond pas nécessairement à celle de la jambe fixe. Généralement :

- La périodicité des exercices est un multiple de la périodicité de la jambe du swap versant ses flux le moins fréquemment. *Exemple* : pour un swap sous-jacent payant LIBOR 3M contre

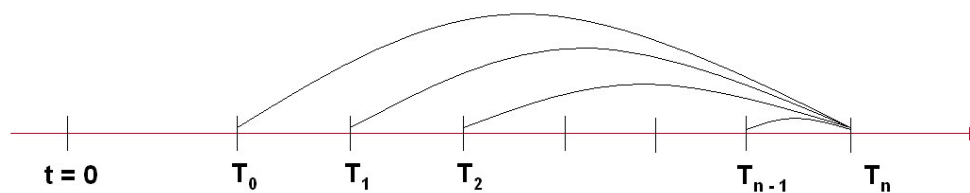


FIGURE 6.2 – Swaption bermuda

taux fixe semi-annuel, la fréquence d'exercice sera au maximum semi-annuelle, mais pourra être annuelle ou même bisannuelle.

- Les dates d'exercice se situent au plus tard deux jours ouvrés avant la date anniversaire du swap sous-jacent, mais sont souvent situées quelques jours auparavant (5, 10, 15 jours ouvrés...). On parle de *notice period* ou encore de *call notice*.

#### 6.4.2 Utilisation et intérêt du produit

Les swaptions bermudas permettent de structurer des swaps annulables (*cancellable* ou *callable* swaps en anglais). En effet, si on combine un swap payeur et une bermuda receveuse de sous-jacent le même swap, on crée un swap annulable aux dates d'exercice de la bermuda, car le fait d'exercer la bermuda nous fait rentrer dans un swap dont les flux sont rigoureusement inverses à ceux du swap initial. En résumé :

**Swap annulable receveur** = Swap vanille receveur + bermuda payeuse

**Swap annulable payeur** = Swap vanille payeur + bermuda receveuse

**Exemple.** Swap 10 ans payeur (rec. LIBOR 6M Exact/360 contre pay. taux fixe 4.00% annuel 30/360) annulable tous les ans à partir de la deuxième année. Ce swap annulable peut être synthétisé en rentrant dans le swap 10 ans payeur du taux fixe 4% et en achetant la swaption bermuda 2Y/8Y receveuse de strike 4% et exerçable annuellement. Le swap ne pourra pas être annulé au cours des deux premières années : on dit qu'il y a une *no call period* de deux ans.

En général le taux fixe (4% dans l'exemple ci-dessus) est choisi de tel sorte que le swap annulable soit au pair. Si la banque traite un tel produit avec un client<sup>7</sup>, l'intérêt pour le client est que le taux fixe qu'il va recevoir de la part de la banque va être "bonifié" c'est à dire supérieur au taux swap standard de maturité 10 ans, car il vend implicitement l'option d'annulation à la banque. C'est la logique de tous les produits annulables (*callable reverse floater*, *callable corridor*, *callable spread options*, etc., voir section 6.5) : l'option d'annulation détenue par la banque permet de rendre plus attractifs les coupons exotiques reçus par l'investisseur final.

7. En réalité le client final investit un *capital*. La banque place ce capital à taux EURIBOR et traite un swap pour convertir ce taux variable en un taux fixe qu'il verse à l'investisseur. En cas de swap annulable, l'investisseur récupère donc son capital de manière anticipée si l'option d'annulation est exercée par la banque.

### 6.4.3 Evaluation dans le modèle Hull & White

Le modèle Hull & White 1 facteur est tout à fait adapté à l'évaluation des bermudas. La forme du produit nous incite fortement à calibrer la fonction  $\sigma(t)$  du modèle sur la *diagonale de swaptions* (c'est à dire sur chacune des swaptions européennes  $(T_0 \rightarrow T_n), (T_1 \rightarrow T_n), \dots, (T_{n-1} \rightarrow T_n)$  de la figure 6.2). Dans l'exemple du paragraphe précédent (swap annulable 10 ans, taux fixe 4%, *no call* 2 ans), on calibrerait donc le modèle sur les 8 swaptions suivantes :

- swaption 2Y / 8Y, strike 4.00%
- swaption 3Y / 7Y, strike 4.00%
- ...
- swaption 9Y / 1Y, strike 4.00%

Le paramètre de mean reversion  $\lambda$  est soit choisi "manuellement" (cf. discussion dans les paragraphes suivants), soit calibré sur un instrument de tenor court (typiquement sur le cap 10 ans à la monnaie).

D'un point de vue numérique, les bermudas sont évaluées par une méthode *backward* (arbre ou différences finies), caractère bermudéen oblige. La description du schéma de différences finies figure en annexe page 85 et suivantes. La discrétisation en temps contient toutes les dates d'exercices  $T_0, T_1, \dots, T_{n-1}$  et s'étend de  $t = 0$  à  $t = T_{n-1}$ . L'évaluation de la swaption bermuda dans ce schéma se déroule comme suit :

1. La valeur finale  $v(T_{n-1}, x)$  de la bermuda est initialisée pour chaque  $x$  de la discrétisation en espace avec le payoff du dernier exercice, qui n'est autre que celui d'une swaption vanille :

$$v(T_{n-1}, x) = \max(V_{\text{swap}}^{n-1}(x), 0)$$

où  $V_{\text{swap}}^{n-1}(x)$  représente la valeur à la date  $T_{n-1}$  et dans l'état  $x$  du swap sous-jacent à l'exercice en  $T_{n-1}$ . Cette valeur s'exprime en fonction de zéro-coupons, calculés via la formule de reconstruction (6.5).

2. La valeur de la bermuda  $v(t, x)$  est rétro-propagée dans le schéma jusqu'à la précédente date d'exercice  $T_{n-2}$ . A cette date, la fonction valeur est mise à jour sur la grille de la manière suivante :

$$v(T_{n-2}, x) = \max(V_{\text{swap}}^{n-2}(x), v(T_{n-2}, x))$$

où comme à l'étape 1,  $V_{\text{swap}}^{n-2}(x)$  représente la valeur à la date  $T_{n-2}$  et dans l'état  $x$  du swap sous-jacent à l'exercice en  $T_{n-2}$ . On traduit donc ainsi la stratégie optimale d'exercice consistant à exercer la bermuda si le bénéfice lié à l'exercice (rentrer dans le swap sous-jacent) est plus important que celui lié à la conservation de l'option pour les dates d'exercice ultérieures.

3. On poursuit la rétro-propagation en mettant à jour la fonction valeur à chaque date d'exercice comme à l'étape 2. Une fois arrivé en  $t = 0$  le prix de la swaption bermuda est la valeur  $v(0, 0)$ .

#### 6.4.4 *Switch option* et effet de la *mean reversion*

la swaption bermuda peut s'exercer à chaque date d'exercice : son prix est donc supérieur à celui de chacune des swaptions européennes sous-jacentes. La bermuda vaut même strictement plus que la plus chère d'entre elles. Ce surplus de valeur est appelé *switch option*. On écrit :

$$\text{Bermuda} = \text{Swaption européenne la plus chère} + \text{Switch option}$$

Vue d'aujourd'hui, la swaption européenne la plus chère est celle qui a la plus grande probabilité d'être exercée. La *switch option* correspond à la possibilité future de retarder ou avancer l'exercice si le moment venu les conditions de marché rendent cela plus intéressant.

La calibration du modèle sur les swaptions diagonales permet, via un *vega-hedge* composé de swaptions, d'évacuer l'essentiel du risque "vanille" de la bermuda. La *switch option* correspond à un risque "orthogonal", purement exotique, dit risque de *volatilité forward*. La valeur de la *switch option* est en effet déterminée par la façon dont, depuis chaque date d'exercice, les swaptions restantes sont évaluées dans le modèle. En d'autres termes, le paramètre d'intérêt est la *volatilité forward* de chaque taux swap, vue des différentes dates d'exercice. On l'a vu dans la section 6.3.8, cette *volatilité forward* est d'autant plus importante que la *mean reversion* est élevée. Cela conduit au résultat suivant :

**Plus la *mean reversion*  $\lambda$  est grande, plus la *volatilité forward* des taux swaps est importante, et donc plus la bermuda est chère.**

#### 6.4.5 Choix de la *mean reversion*

La valeur de *mean reversion* – et plus généralement la forme de la *volatilité forward* – est donc déterminante dans l'évaluation des produits annulables. Voilà quelques pistes pour la déterminer.

**Mean reversion implicite.** Il existe parfois suffisamment de liquidité sur le marché des swaptions bermudas<sup>8</sup> pour déterminer des *mean reversions* implicites à partir des prix observés. À la manière des volatilités implicites, on peut alors maintenir des grilles de  $\lambda$  suivant la maturité et la *no call period* des produits.

**Volatilité historique des FRAs.** En comparant la volatilité historique d'un forward LIBOR à long

---

8. Ce fut notamment le cas il y a quelques années sur le marché US, les bermudas étant alors très utilisées par les banques dans la couverture des *mortgages*.

terme et d'un forward à court terme, on peut estimer statistiquement une *mean reversion*. Cette méthode est peu utilisée (tout comme la volatilité historique dans l'évaluation des options).

**Swaption longue vs. swaption courte.** Sur données historiques, on calibre tous les jours un modèle Hull & White sur une swaption de tenor long (e.g. 20 ans). On choisit une valeur de  $\lambda$  telle que, en moyenne, une swaption de tenor court (e.g. 2 ans) ou un caplet soit correctement évalué par le modèle.

**Volatilité forward vs. volatilité de marché.** Sur données historiques, on calibre tous les jours un modèle Hull & White sur la diagonale de swaptions, et, vu de la maturité de la swaption la plus chère, on compare les volatilités forward Hull & White des swaptions restantes aux volatilités implicites de marché des swaptions de même tenor et maturité.

**Back-testing de la gestion delta/vega-neutre.** Sur données historiques, on *vega-hedge* tous les jours la bermuda au moyen des swaptions diagonales et *delta-hedge* l'ensemble de la position. On étudie ensuite la moyenne et l'écart-type du P&L pour différentes valeurs de *mean reversion*, et choisit le meilleur compromis moyenne-variance.

#### 6.4.6 1 facteur vs. multi-facteurs

Pour conclure sur les bermudas, on peut se demander si un modèle 1 facteur tel que le modèle Hull & White est suffisant pour évaluer et gérer le risque des swaptions bermudas. La question peut se formuler ainsi : de quelle manière la décorrélation des taux affecte-t-elle le prix des bermudas ?

Pour tenter d'appréhender cette question, intéressons nous au cas d'une bermuda à deux dates d'exercices  $T_1$  et  $T_2$ . La date de fin du swap sous jacent est notée  $T_{\text{end}}$  :

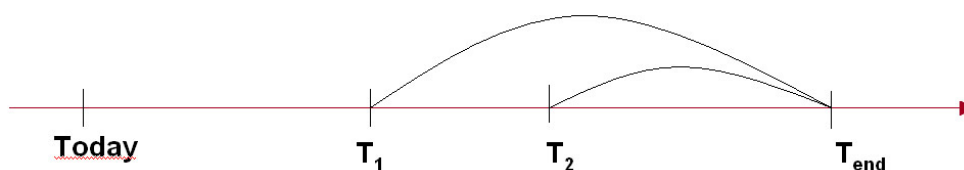


FIGURE 6.3 – Bermuda, deux dates d'exercice

Le payoff à la date  $T_1$  de la swaption bermuda (payeuse) peut s'écrire comme :

$$\max \left( \text{LVL}_1(T_1)(S_1(T_1) - K), \text{LVL}_2(T_1) \mathbb{E}_{T_1}^{\text{LVL}_2} [(S_2(T_2) - K)^+] \right)$$

où  $S_1$  et  $\text{LVL}_1$  désignent le taux swap et le level associés au premier swap exercé ( $T_1 \rightarrow T_{\text{end}}$ ), et  $S_2$  et  $\text{LVL}_2$  les équivalents pour le second swap exercé ( $T_2 \rightarrow T_{\text{end}}$ ). Dans le payoff précédent, le premier argument du max est le gain d'un exercice immédiat (i.e. en  $T_1$ ) de la bermuda, tandis que le second argument correspond à un exercice différé en  $T_2$ .

Etant donné que le modèle utilisé est calibré sur les deux swaptions européennes ( $T_1 \rightarrow T_{\text{end}}$ ) et ( $T_2 \rightarrow T_{\text{end}}$ ), le prix de notre bermuda à deux dates d'exercice dépend principalement de deux choses :

- **La volatilité forward** du taux swap  $S_2$  entre les dates  $T_1$  et  $T_2$  : plus grande est cette volatilité, plus élevée est le prix de la bermuda.
- **La corrélation** entre le taux swap  $S_1(T_1)$  et le taux swap forward  $S_2(T_1)$  : plus grande est cette corrélation, plus petit est le prix de la bermuda.

Considérons un modèle 1 facteur et un modèle multi-facteurs tous deux calibrés sur les deux swaptions diagonales. Supposons également que l'on paramètre les deux modèles afin d'obtenir les mêmes grandeurs de *volatilité forward* pour le taux swap  $S_2$ . Alors, étant donné que la corrélation est égale à 1 dans le modèle 1 facteur et à  $\rho < 1$  dans le modèle multi-facteur, le prix 1 facteur obtenu pour la bermuda va être plus faible que le prix multi-facteur.

Néanmoins cet effet corrélation est marginal dans le prix de la bermuda, notamment du fait que les deux taux swap considérés sont "imbriqués" et ont donc structurellement une corrélation très proche de 1 – y compris dans un modèle multi-facteur. La petite différence de prix entre les deux modèles peut se compenser en augmentant légèrement la *mean reversion* dans le modèle 1 facteur, qui s'avère en conséquence suffisant pour évaluer les produits bermudéens.

## 6.5 Quelques autres produits exotiques

Le but de cette dernière section est de présenter succinctement quelques autres produits exotiques de seconde génération populaires. On s'intéresse plus particulièrement aux *risques* de ces produits ; leur compréhension est une étape indispensable dans le choix du modèle d'évaluation et de sa stratégie de calibration.

### 6.5.1 Callable reverse floater

Un *reverse floater* est un swap taux variable LIBOR/EURIBOR (+ marge) contre coupon exotique défini par :

$$(K - \alpha \text{ LIBOR})^+$$

Où  $\alpha$  est un coefficient positif (dans le cas négatif on parle de *cap floater*). En tant que tel, le *reverse floater* est un produit vanille car la jambe exotique s'apparente à un floor sur LIBOR. Un *callable reverse floater* est un swap *reverse floater* assorti d'une option d'annulation. En général, comme dans le cas de la plupart des produits *callable*, la banque reçoit LIBOR de la part du client, lui verse périodiquement le coupon  $(K - \alpha \text{ LIBOR})^+$ , et détient l'option d'annulation (ce qui, comme on l'a déjà vu, a tendance à rendre le coupon plus attractif pour le client).



L'intérêt d'un tel produit est qu'en contexte de courbe pentue (les taux LIBOR spot sont moins élevés que les taux LIBOR forwards) l'investisseur a le sentiment de recevoir un gros coupon "à bas coût". Autrement dit, le marché cote des taux LIBOR forwards qui, dans la perception de l'investisseur ne vont pas se réaliser<sup>9</sup>.

L'option d'annulation du *callable reverse floater* présente deux principaux risques : (a) un caractère bermudéen induit par l'option d'annulation (à la manière d'une bermuda) et (b) les options sur LIBOR de la jambe exotique. Un modèle candidat à l'évaluation de cette option d'annulation doit donc :

- Etre calibré sur les swaptions diagonales afin d'évaluer correctement l'option d'annulation.
- Etre calibré sur les caplets/floorlets (strikes  $K/\alpha$ ), afin de réévaluer correctement le swap sous-jacent

Ces deux points sont cruciaux. La prise en compte de l'aspect bermudéen doit être réalisée de la même façon que pour les swaptions bermudas<sup>10</sup>, et implique donc une calibration à la diagonale de swaptions et une gestion du risque de *volatilité forward*. Le second point est tout aussi important : lorsque l'option d'annulation se trouve très dans la monnaie (i.e. va être exercée), sa valeur tend vers celle du swap *reverse floater* sous-jacent qui se doit d'être correctement évaluée par le modèle (il y a arbitrage sinon).

Le modèle Hull & White ne permet pas en tant que tel cette double calibration. Deux possibilités :

- Utiliser un autre modèle, plus riche, permettant la calibration simultanée à la diagonale de swaptions et aux caplets de strike  $K/\alpha$ .
- Utiliser une version "transformée" du modèle Hull & White : on modifie l'évaluation de l'option d'annulation au niveau de la méthode de différences finies. A chaque date d'exercice, au lieu d'évaluer les options de la jambe exotique dans le modèle, on les évalue par formules fermées (modèle normal) avec des *volatilités forward* calibrées de telle sorte que, vu d'aujourd'hui, la jambe exotique soit correctement évaluée.

9. Le développement du marché des structurés de taux, tout comme celui de nombre d'autres marchés dérivés, repose beaucoup sur cette différence entre les anticipations du marché et celles des investisseurs.

10. En effet, les coupons *reverse floater* sont souvent très dans la monnaie (notamment au moment de l'émission du produit), si bien qu'ils s'apparentent à  $(K - \alpha \text{ LIBOR})$  (sans le floor à 0). Le swap *reverse floater* est alors presque un swap vanille (notionnel  $(1 + \alpha)$ , taux fixe  $K/(1 + \alpha)$ ). Dans ce cas l'option d'annulation *reverse floater* ressemble fortement à une swaption bermuda. La méthode d'évaluation doit donc être la même que pour la bermuda sous peine d'incohérence, voire d'arbitrage.

### 6.5.2 Autres produits annulables

**Callable corridor range accrual.** Il s'agit de la version annulable du swap décrit dans le paragraphe 5.4.2. Le swap en question paye des coupons proportionnels au nombre de jours où un taux LIBOR a fixé dans un intervalle donné. Comme dans le cas du *callable reverse floater*, l'évaluation d'un tel produit requiert un modèle qui (a) soit calibré sur valeur du swap exotique sous-jacent et (b) évalue correctement le caractère bermudéen du produit (calibration aux swaptions diagonales, gestion efficace du risque de *volatilité forward*).

**Callable CMS spread.** Le swap *CMS spread* paye LIBOR contre un coupon exotique défini par  $(\text{CMS}_1 - \text{CMS}_2 - K)^+$ , où  $\text{CMS}_1$  et  $\text{CMS}_2$  représentent les fixings de deux taux swaps (e.g. tenors 20 ans et 2 ans). Le tout est annulable au gré de la banque. L'évaluation du swap sous-jacent n'est pas évidente (ajustements de convexités sur les taux CMS, co-dépendance à spécifier...), celle de l'option d'annulation le sera encore moins ! Les mêmes contraintes que pour le *corridor* ou le *reverse floater* sont de mise (prise en compte du caractère annulable et réévaluation correcte des *spread options* sous-jacentes). De plus, la valeur du swap sous-jacent étant fondée sur la décorrélation entre taux court et taux long, l'utilisation d'un modèle (au moins) 2-facteurs est indispensable.

et bien d'autres encore...

### 6.5.3 Produits *path-dependent*

**Ratchet cap.** C'est une jambe payant à chaque période d'intérêt  $i$  un coupon de la forme  $(\text{LIBOR}_i - K_i)^+$  avec  $K_i = f(\text{LIBOR}_i, \text{LIBOR}_{i-1}, K_{i-1})$ . Autrement dit, le coupon a la forme d'un caplet sur LIBOR à ceci près que le strike du caplet est aléatoire et se définit en fonction du LIBOR prévalant pour la période d'intérêt, du précédent fixing de LIBOR (période d'intérêt précédente), et également du strike utilisé pour le précédent coupon. Le caractère *path-dependent* du produit implique une évaluation par méthode de Monte-Carlo<sup>11</sup>. La calibration du modèle s'effectue sur la volatilité des caplets. L'incertitude sur les strikes rend préférable l'utilisation d'un modèle permettant de calibrer l'ensemble du smile de volatilité des caplets (quadratique gaussien, BGM ou Hull & White à volatilité stochastique etc...). Enfin, le modèle utilisé doit idéalement être multi-facteur afin d'obtenir une décorrélation réaliste entre taux LIBOR successifs.

**Snowball.** Une jambe *snowball* verse à la fin de chaque période d'intérêt  $i$  un coupon de la forme  $\text{cpn}_i = (\text{cpn}_{i-1} + K_i - \text{LIBOR}_i)^+$ , où les strikes  $K_i$  sont fixés à l'avance. Comme son nom l'indique, ce produit présente un effet "boule de neige" : en contexte de taux bas la valeur des coupons peut croître très rapidement. Du point de vue de l'analyse des risques, ce genre de produit est comparable au *ratchet cap* : on utilisera généralement le même genre d'approche

11. On peut également procéder par différences finies, en ajoutant des variables d'état supplémentaires correspondant aux fixings passés du LIBOR et du strike.

pour l'évaluation. Si le *snowball* est de plus annulable (swap LIBOR contre coupon *snowball*, le tout annulable au gré de la banque), il faudra de plus calibrer les swaptions diagonales et, du fait de l'aspect *forward-backward* du produit, utiliser un Monte Carlo "américain" (e.g. une méthode par régression de type Longstaff & Schwartz).

**Vol bond.** Une jambe *vol bond* verse à chaque période  $i$  un coupon de type  $|CMS_i - CMS_{i-1}|$ , où  $CMS_k$  représente le fixing d'un taux swap (e.g. 10 ans) au début de période  $k$ . On reçoit donc à la fin de chaque période d'intérêt la différence absolue entre le fixing d'un taux swap au début de la période d'intérêt et le fixing du même taux au début de la période d'intérêt précédente. Ce type de produit est hautement exotique : il n'a quasiment pas de delta / gamma par rapport à la courbe des taux, et dépend exclusivement de la volatilité swaption future (du fait que les coupons s'apparentent à des CMS *straddles*<sup>12</sup> presque à la monnaie). Nous sommes donc en présence d'un pur produit de *volatilité forward*. Difficile dans ces conditions de s'affranchir d'un modèle à volatilité stochastique.

**Target redemption note.** Ou TARN pour faire plus court. Ce type de produit est structuré sous forme d'un swap LIBOR (+ marge) contre coupon exotique (typiquement  $(K - \alpha \text{ LIBOR})^+$ , comme dans le cas du *reverse floater*). Le caractère complexe du produit vient du fait que le swap s'arrête dès que le montant des coupons versés atteint un montant cible  $X$  prédéterminé. *Exemple* : le client paye LIBOR et reçoit  $(8\% - \text{LIBOR})^+$  pendant 10 ans, mais le swap s'arrête de manière anticipée si le montant reçu par le client atteint 14%. L'analyse du produit est la suivante : (1) la jambe couponnée est assez peu sensible au niveau des taux, car la somme  $X$  perçue est connue, (2) le risque porte principalement sur la jambe LIBOR qui s'arrête lorsque le montant  $X$  est atteint : si les taux baissent, la valeur de cette jambe baisse doublement car (a) les LIBORs sont plus bas et (b) le montant  $X$  va être atteint plus rapidement, ce qui ampute la jambe variable d'autant plus de flux. Chaque flux de la jambe variable est de la forme  $(\text{LIBOR}_i + \text{marge}) \mathbf{1}(\sum_{j \leq i} (K - \alpha \text{ LIBOR}_j)^+ \leq X)$ . Le modèle candidat à l'évaluation du TARN doit donc : (1) être multi-facteur pour générer des décorrélations réalistes entre fixings successifs du LIBOR et (2) être calibré au *smile* des caplets pour évaluer correctement l'option digitale qui intervient lorsque la somme des coupons perçus approche du montant cible  $X$ .

12. *Straddle* : combinaison de l'achat d'un call et d'un put de même strike sur un sous-jacent donné.

# Bibliographie

---

- [1] BRIGO D. AND MERCURIO, F. (2006) : *Interest Rate Models - Theory and Practice*, Springer Verlag.
- [2] HAGAN P., KUMAR D., LESNIEWSKI A. AND WOODWARD D. (2002) : *Managing Smile Risk*, Wilmott Magazine, novembre 2002.
- [3] HULL J. (1999), *Options, futures and other derivatives*, Prentice Hall.
- [4] HULL J. (2008), *Options, futures et autres actifs dérivés*. Version française, Pearson Education, 6ème édition.
- [5] LESNIEWSKI A. (2007) : *Interest Rate and Credit Models*, excellent support d'un cours donné à NYU, disponible en ligne à l'adresse [http ://www.math.nyu.edu/ alberts/spring07/](http://www.math.nyu.edu/alberts/spring07/).
- [6] PITERBARG V. (2012), *Cooking with collateral*, Risk Magazine [http ://www.risk.net/digital \\_ assets/5658/risk \\_ 0812 \\_ piterbarg.pdf](http://www.risk.net/digital_assets/5658/risk_0812_piterbarg.pdf).
- [7] MARTELLINI L. ET PRIAULET P. (2000), *Produits de taux d'intérêt : méthodes dynamiques d'évaluation et de couverture*, Economica.
- [8] MARTELLINI L., PRIAULET P. ET PRIAULET S. (2003), *Fixed-Income Securities : Valuation, Risk Management and Portfolio Strategies*, Wiley.
- [9] MUSIELA M. AND RUTKOWSKY M. (2005) : *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer.
- [10] REBONATO R. (2005) : *Interest Rate Option Models*, Wiley.

## Partie 7

# Annexes

---

### Formule de reconstruction des zéro-coupons dans le modèle Hull & White 1 facteur

On considère la variable d'état gaussienne :

$$dX_t = [\phi(t) - \lambda X_t] dt + \sigma(t) dW_t$$

avec

$$X_t = r_t - f(0, t) \quad \text{et} \quad \phi(t) = \int_0^t \sigma(s)^2 e^{-2\lambda(t-s)} ds$$

L'objectif est d'écrire les zéro-coupons comme des fonctions déterministes de la variable d'état  $X_t$ , c'est à dire :

$$\forall (t, T), \quad B(t, T) = B_{t,T}(X_t)$$

où  $x \mapsto B_{t,T}(x)$  est une fonction déterministe.

Déterminons tout d'abord l'expression du taux forward instantané  $f(t, T)$  en fonction de  $X_t$ . Pour ce faire, il suffit de noter que  $f(t, T)$  et  $e^{-\lambda(T-t)} r_t$  ont le même terme stochastique, et de calculer la différence  $f(t, T) - e^{-\lambda(T-t)} r_t$  pour obtenir le résultat. L'équation (6.3) conduit à :

$$\begin{aligned} e^{-\lambda(T-t)} r_t &= e^{-\lambda(T-t)} f(0, t) \\ &\quad - e^{-\lambda(T-t)} \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} \left( e^{-2\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t-s)} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) e^{-\lambda(T-s)} dW_s \end{aligned}$$

En utilisant (6.2) :

$$\begin{aligned} f(t, T) - e^{-\lambda(T-t)} r_t &= f(0, T) - \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} \left( e^{-2\lambda(T-s)} - e^{-\lambda(T-s)} \right) ds \\ &\quad + e^{-\lambda(T-t)} \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} \left( e^{-2\lambda(t-s)} - e^{-\lambda(t-s)} \right) ds - e^{-\lambda(T-t)} f(0, t) \end{aligned}$$

En réarrangeant et introduisant  $X_t = r_t - f(0, t)$  on obtient finalement :

$$f(t, T) = f(0, T) + e^{-\lambda(T-t)} X_t + \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} \left( e^{-\lambda(T+t-2s)} - e^{-2\lambda(T-s)} \right) ds$$

Pour arriver à l'expression du zéro-coupon, il nous faut à présent calculer :

$$\begin{aligned} \int_t^T f(t, u) du &= \int_t^T f(0, u) du + X_t \int_t^T e^{-\lambda(u-t)} du \\ &\quad + \int_t^T \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} \left( e^{-\lambda(u+t-2s)} - e^{-2\lambda(u-s)} \right) ds du \end{aligned}$$

La première intégrale à droite de l'égalité ci-dessus est :

$$\begin{aligned} \int_t^T f(0, u) du &= \int_0^T f(0, u) du - \int_0^t f(0, u) du \\ &= -\ln B(0, T) + \ln B(0, t) \end{aligned}$$

L'intégrale double se calcule directement :

$$\begin{aligned} \int_t^T \int_0^t \frac{\sigma(s)^2}{\lambda} \left( e^{-\lambda(u+t-2s)} - e^{-2\lambda(u-s)} \right) ds du \\ &= -\frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\lambda(T-t)} \right)^2 \int_0^t \left( \frac{\sigma(s)}{\lambda} \right)^2 e^{-2\lambda(t-s)} ds \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} \right)^2 \phi(t) \end{aligned}$$

Définissons  $\beta(t, T)$  par :

$$\beta(t, T) = \frac{1 - e^{-\lambda(T-t)}}{\lambda} = \int_t^T e^{-\lambda(u-t)} du$$

Alors :

$$\begin{aligned} B(t, T) &= \exp \left( - \int_t^T f(t, u) du \right) \\ &= \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \beta(t, T)^2 \phi(t) - \beta(t, T) X_t \right\} \end{aligned}$$

Ce qui prouve le résultat de la section 6.3.4

## Différences finies dans le cadre Hull & White 1 facteur

Le but de cette section est de présenter le schéma de différences finies associé à l'EDP (6.9). On utilise une grille temps/espace  $(t_i) \times (x_i)$ . Dans ce qui suit, si  $x = x_i$ ,  $x^+$  doit être compris comme  $x_{i+1}$  et  $x^-$  comme  $x_{i-1}$ . De manière analogue, si  $t = t_j$ ,  $t^+$  correspond à la date  $t_{j+1}$ .

Les opérateurs discrets dans la dimension espace sont :

$$\frac{\partial v}{\partial x}(t, x) \leftrightarrow D_1 v(t, x) = \frac{v(t, x^+) - v(t, x^-)}{x^+ - x^-}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) &\leftrightarrow D_2 v(t, x) = \frac{\frac{v(t, x^+) - v(t, x)}{x^+ - x} - \frac{v(t, x) - v(t, x^-)}{x - x^-}}{\frac{x^+ + x}{2} - \frac{x + x^-}{2}} \\ &= 2 \left\{ \frac{v(t, x^+) - v(t, x)}{(x^+ - x^-)(x^+ - x)} - \frac{v(t, x) - v(t, x^-)}{(x^+ - x^-)(x - x^-)} \right\}\end{aligned}$$

Définissons l'opérateur  $A$  :

$$Av(t, x) = \bar{\mu}(t, x) D_1 v(t, x) + \frac{1}{2} \bar{\sigma}(t, x)^2 D_2 v(t, x)$$

avec :

$$\begin{aligned}\bar{\mu}(t, x) &= \mathbb{E}[X_{t^+} - X_t \mid X_t = x] = \mathbb{E} \left[ \int_t^{t^+} \mu(s, X_s) ds \mid X_t = x \right] \\ \bar{\sigma}(t, x)^2 &= V[X_{t^+} - X_t \mid X_t = x] = \mathbb{E} \left[ \int_t^{t^+} \sigma(s, X_s)^2 ds \mid X_t = x \right]\end{aligned}$$

De manière analogue, définissons  $\bar{r}(t, x)$  comme :

$$\bar{r}(t, x) = \mathbb{E} \left[ \int_t^{t^+} r(s, X_s) ds \mid X_t = x \right]$$

On a alors les correspondances suivantes entre les formes continues et discrètes :

$$\begin{aligned}\mu(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) &\leftrightarrow \frac{\bar{\mu}(t, x)}{t^+ - t} D_1 v(t, x) \\ \frac{1}{2} \sigma(t, x)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) &\leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{\bar{\sigma}(t, x)^2}{t^+ - t^-} D_2 v(t, x) \\ r(t, x) v(t, x) &\leftrightarrow \frac{\bar{r}(t, x)}{t^+ - t} v(t, x)\end{aligned}$$

de telle sorte que :

$$\mu(t, x) \frac{\partial v}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma(t, x)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, x) - r(t, x) v(t, x) \leftrightarrow \frac{1}{t^+ - t} [Av(t, x) - \bar{r}(t, x) v(t, x)]$$

La version discrète de l'EDP (6.9) est donné par le  $\theta$ -schema :

$$\frac{v(t^+, x) - v(t, x)}{t^+ - t} + \frac{\theta}{t^+ - t} [Av(t, x) - \bar{r}(t, x) v(t, x)] + \frac{1 - \theta}{t^+ - t} [Av(t^+, x) - \bar{r}(t, x) v(t^+, x)] = 0$$

ou de manière équivalente :

$$v(t^+, x) - v(t, x) + \theta [Av(t, x) - \bar{r}(t, x) v(t, x)] + (1 - \theta) [Av(t^+, x) - \bar{r}(t, x) v(t^+, x)] = 0$$

En laissant dans le membre de gauche les termes en  $t$  et en déplaçant dans le membre de droite ceux en  $t^+$ , on obtient :

$$v(t, x) - \theta [Av(t, x) - \bar{r}(t, x) v(t, x)] = v(t^+, x) + (1 - \theta) [Av(t^+, x) - \bar{r}(t, x) v(t^+, x)] \quad (7.1)$$

Si  $\theta = 0$ , le schéma est dit explicite, i.e. les valeurs  $v(t, x)$  peuvent être directement calculées à partir des valeurs  $v(t^+, x)$ . Si  $\theta > 0$ , le schéma devient implicite, impliquant qu'un système linéaire (tri-diagonal) doit être inversé pour calculer les  $v(t, x)$  à partir des  $v(t^+, x)$ . On préfère néanmoins utiliser des schémas implicites pour des raisons de stabilité, car un schéma explicite nécessite une discrétisation en temps très fine pour converger. Le cas  $\theta = 1/2$  (schéma de Crank-Nicholson) est souvent utilisé en pratique.

Réécrivons l'équation (7.1). Pour  $A$ , nous avons :

$$Av(t, x) = \alpha_u v(t, x^+) + \alpha_c v(t, x) + \alpha_d v(t, x^-)$$

où :

$$\begin{aligned}\alpha_u &= \frac{\bar{\sigma}(t, x)^2 + \bar{\mu}(t, x)(x^+ - x)}{(x^+ - x^-)(x^+ - x)} \\ \alpha_d &= \frac{\bar{\sigma}(t, x)^2 - \bar{\mu}(t, x)(x - x^-)}{(x^+ - x^-)(x - x^-)} \\ \alpha_c &= -\bar{\sigma}(t, x)^2 \left[ \frac{1}{(x^+ - x^-)(x^+ - x)} + \frac{1}{(x^+ - x^-)(x - x^-)} \right]\end{aligned}$$

L'EDP discrète (7.1) devient alors :

$$p_u^l v(t, x^+) + p_c^l v(t, x) + p_d^l v(t, x^-) = p_u^r v(t^+, x^+) + p_c^r v(t^+, x) + p_d^r v(t^+, x^-) \quad (7.2)$$

où on a défini :

$$\begin{aligned}p_u^r &= (1 - \theta)\alpha_u \\ p_d^r &= (1 - \theta)\alpha_d \\ p_c^r &= (1 - \theta)\alpha_c + 1 - (1 - \theta)\bar{r}(t, x) \\ p_u^l &= -\theta\alpha_u \\ p_d^l &= -\theta\alpha_d \\ p_c^l &= -\theta\alpha_c + 1 + \theta\bar{r}(t, x)\end{aligned} \quad (7.3)$$

En pratique, l'EDP est résolue numériquement sur un domaine borné en espace (les bornes dépendent généralement de la date  $t$  où on se trouve, cf. plus loin). Si  $x$  est la borne supérieure de notre grille pour une date  $t$  donnée, on ne dispose pas de  $v(t, x^+)$  et la dérivée première sera approchée par :

$$D_1 v(t, x) = \frac{v(t, x) - v(t, x^-)}{x - x^-}$$

On utilise la condition aux limites de Neumann, qui suppose que la dérivée en espace de  $v$  reste constante au niveau de la frontière. Cela implique :

$$\frac{v(t, x^+) - v(t, x)}{x^+ - x} = \frac{v(t, x) - v(t, x^-)}{x - x^-}$$



De telle sorte que :

$$D_2 v(t, x) = 0$$

L'opérateur  $A$  se réduit alors à :

$$Av(t, x) = \bar{\alpha}_c v(t, x) + \bar{\alpha}_d v(t, x^-)$$

avec :

$$\bar{\alpha}_c = \frac{\bar{\mu}(t, x)}{x - x^-} \quad \text{et} \quad \bar{\alpha}_d = -\frac{\bar{\mu}(t, x)}{x - x^-}$$

L'EDP discrète s'écrit alors :

$$\bar{p}_c^l v(t, x) + \bar{p}_d^l v(t, x^-) = \bar{p}_c^r v(t^+, x) + \bar{p}_d^r v(t^+, x^-) \quad (7.4)$$

où les  $\bar{p}$  sont définis comme les  $p$ , en remplaçant  $\alpha$  par  $\bar{\alpha}$  (cf. équations (7.3)).

De manière analogue, si  $x$  est la borne basse de notre domaine à l'étape  $t$  :

$$Av(t, x) = \alpha_u v(t, x^+) + \alpha_c v(t, x)$$

avec :

$$\alpha_u = \frac{\bar{\mu}(t, x)}{x^+ - x} \quad \text{et} \quad \alpha_c = -\frac{\bar{\mu}(t, x)}{x^+ - x}$$

et l'EDP devient :

$$\underline{p}_u^l v(t, x^+) + \underline{p}_c^l v(t, x) = \underline{p}_u^r v(t^+, x^+) + \underline{p}_c^r v(t^+, x) \quad (7.5)$$

**Les différences finies en pratique.** On considère les discrétisations en temps  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$  et en espace  $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ . On procède en remontant le temps, partant de la condition terminale  $v(t_n, x)$ , et déduisant itérativement les valeurs  $v(t_j, x)$  des valeurs  $v(t_{j+1}, x)$  depuis  $j = n - 1$  jusque  $j = 0$ . A chaque date  $t_j$ , les valeurs  $v(t_j, x)$  peuvent être modifiées suivant le payoff du produit évalué (par exemple, pour un produit bermudéen, les valeurs  $v(t_j, x)$  seront modifiées si  $t_j$  est une date d'exercice). Supposons connaître les valeurs  $v(t_{j+1}, x)$  pour tous les états  $x$ . On cherche maintenant à déterminer les valeurs  $v(t_j, x)$ . A la date  $t_j$ , la frontière basse (resp. haute) en espace est  $x_{i_d}$  (resp.  $x_{i_u}$ ). En utilisant les équations (7.2), (7.4) et (7.5), le passage de  $t_{j+1}$  à  $t_j$  s'écrit :

Si  $i_d < i < i_u$  :

$$p_u^l v(t_j, x_{i+1}) + p_c^l v(t_j, x_i) + p_d^l v(t_j, x_{i-1}) = p_u^r v(t_{j+1}, x_{i+1}) + p_c^r v(t_{j+1}, x_i) + p_d^r v(t_{j+1}, x_{i-1})$$

Si  $i = i_u$  :

$$\bar{p}_c^l v(t_j, x_i) + \bar{p}_d^l v(t_j, x_{i-1}) = \bar{p}_c^r v(t_{j+1}, x_i) + \bar{p}_d^r v(t_{j+1}, x_{i-1})$$

Si  $i = i_d$  :

$$\underline{p}_u^l v(t_j, x_{i+1}) + \underline{p}_c^l v(t_j, x_i) = \underline{p}_u^r v(t_{j+1}, x_{i+1}) + \underline{p}_c^r v(t_{j+1}, x_i)$$

Les membres de droite des équations ci-dessus sont connus ; il reste à inverser ce système tri-diagonal pour obtenir les valeurs  $v(t_j, x)$ .

**Cas du Modèle Hull & White.** Dans le cas du modèle Hull & White 1 facteur, on a identifié une variable d'état  $X_t = r_t - f(0, t)$ , dont la dynamique sous  $Q$  risque-neutre est donnée par :

$$dX_t = (\phi(t) - \lambda X_t)dt + \sigma(t)dW_t$$

En reprenant les précédentes notations, le modèle Hull & White correspond donc au cas particulier :

$$\mu(t, x) = \phi(t) - \lambda x \quad \text{et} \quad \sigma(t, x) = \sigma(t)$$

Comme précédemment, on considère les discrétisations en temps / espace  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  et  $x_0 < x_1 < \dots < x_m$ . Les bornes de la grille en espace sont déterminées via la variance  $\phi(t_n)$  de  $X_{t_n}$  :  $x_0 = -\text{nstdev} \times \sqrt{\phi(t_n)}$  et  $x_m = +\text{nstdev} \times \sqrt{\phi(t_n)}$ , où  $\text{nstdev}$  est typiquement de l'ordre de 5 ou 6. En remontant le temps dans le schéma, les bornes sont modifiées en fonction de la variance, i.e. à chaque pas  $t_j$ , les indices  $i_d$  et  $i_u$  mentionnés dans le précédent paragraphe sont choisis tels que  $x_{i_d} \approx -\text{nstdev} \times \sqrt{\phi(t_j)}$  et  $x_{i_u} \approx +\text{nstdev} \times \sqrt{\phi(t_j)}$ .

On supposera que les dates de discontinuité de  $\sigma(t)$  sont incluses dans la discrétisation  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ . Les fonctions  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\mu}$  et  $\bar{r}$  intervenant dans les coefficients des différences finies sont prises égales à :

$$\bar{\sigma}(t_j, x_i)^2 = \sigma_j^2(t_{j+1} - t_j) \quad \text{et} \quad \bar{\mu}(t_j, x_i) = \left( \frac{\phi(t_j) + \phi(t_{j+1})}{2} - \lambda x_i \right) (t_{j+1} - t_j)$$

Compte tenu  $r_t = r(t, X_t) = X_t + f(0, t)$  :

$$\begin{aligned} \bar{r}(t_j, x_i) &= x_i(t_{j+1} - t_j) + \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(0, t) dt \\ &= x_i(t_{j+1} - t_j) + \ln \left( \frac{B(0, t_j)}{B(0, t_{j+1})} \right) \end{aligned}$$