

Barletta Valentina

Gruppo 8

*a.a 2019/2020*

## Bilancia di Cavendish

## Introduzione e scopo dell'esperienza

Lo scopo dell'esperienza consiste nel determinare la costante di gravitazione universale  $G$  attraverso l'impiego della Bilancia di Cavendish, sia col metodo dell'accelerazione iniziale che con quello dell'escursione finale.

La bilancia di Cavendish è assimilabile ad una bilancia di torsione, dove due piccole masse sferiche sono fissate all'estremità di un'asta. L'asta è sospesa per il suo centro ad un filo inestensibile, vincolato ad un sostegno metallico. Solidale al filo inestensibile è applicato uno specchietto che ha il compito di riflettere un fascio laser su un'asta graduata distante  $L$  dall'apparato sperimentale.

L'esperienza consiste nell'avvicinare due masse sferiche più grandi alle piccole. La forza attrattiva che si instaura tra esse causa una rotazione delle masse piccole e, conseguentemente, la torsione del filo, amplificato dallo spostamento del fascio laser riflesso dello specchietto.

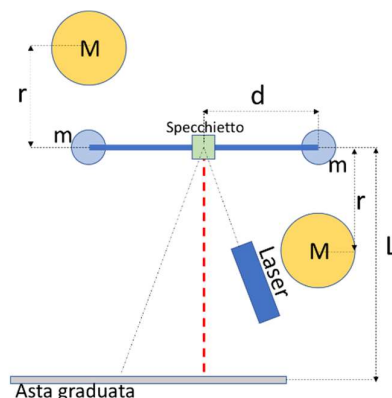
Acquisendo la posizione dello spot luminoso sull'asta graduata in intervalli di tempi predefiniti, fino al raggiungimento della posizione di equilibrio, sarà possibile determinare la costante  $G$ .

Le piccole masse sono racchiuse all'interno di una teca, al fine di evitare che agenti esterni (correnti d'aria, ect.) possano perturbare il sistema.

## Strumentazione

La Fig.1 mostra lo schema dell'apparato sperimentale della Bilancia di Cavendish costituito da:

- Due sfere di piombo grandi:  $M = (1,503 \pm 0,001) \text{ kg}$  ciascuna;
- Due sfere di piombo piccole:  $m = (15,00 \pm 0,12) 10^{-3} \text{ kg}$  ciascuna;
- Un'asta di massa  $m_a = 1 \text{ g}$  e semi-lunghezza  $d = (5,0 \pm 0,1) 10^{-2} \text{ m}$  che sostiene le piccole sfere. La semi-lunghezza  $d$  è considerata dal centro della piccola sfera;
- Distanza tra i centri della sfera piccola e sfera grande più vicine:  $r = (4,5 \pm 0,1) 10^{-2} \text{ m}$ ;
- Distanza della scala graduata dallo specchietto della bilancia:  $L = (5,47 \pm 0,01) \text{ m}$ ;
- Scala graduata con errore di sensibilità del millimetro ( $10^{-3} \text{ m}$ );
- Il tempo è acquisito con un cronometro digitale di sensibilità  $10^{-2} \text{ s}$ . Nel corso dell'elaborazione dati si è scelto, tuttavia, di assegnare al tempo un errore pari ad  $1 \text{ s}$ , per considerare i ritardi temporali che intercorrono tra gli operatori tra l'inizio e la fine dell'acquisizione di una misura.



**Fig.1** Schema dell'apparato sperimentale della bilancia di Cavendish (le dimensioni non sono in scala).

## Raccolta dati

La prima operazione di acquisizione dati consiste nel determinare la posizione di equilibrio  $S_0$  del sistema ad intervalli regolari di 1 minuto. Acceso il fascio laser viene rilevata la posizione dello spot luminoso sull'asta graduata. I valori sono riportati in Tab.1.

Successivamente la posizione delle due sfere di piombo più grandi di massa  $M$  è ruotata di circa  $180^\circ$ . Si verifica, quindi, lo spostamento delle masse più piccole

Tab.1

Posizione di equilibrio iniziale $S_0$					
n.	$t \pm 1 \text{ (s)}$	$S_0(t) \pm 0,1 \text{ (cm)}$	n.	$t \pm 1 \text{ (s)}$	$S_0(t) \pm 0,1 \text{ (cm)}$
1	0	-1,6	12	660	-1,3
2	60	-1,6	13	720	-1,3
3	120	-1,5	14	780	-1,3
4	180	-1,5	15	840	-1,3
5	240	-1,5	16	900	-1,3
6	300	-1,5	17	960	-1,3
7	360	-1,5	18	1020	-1,4
8	420	-1,4	19	1080	-1,3
9	480	-1,4	20	1140	-1,3
10	540	-1,4	21	1200	-1,4
11	600	-1,3	22	1260	-1,4

per raggiungere una nuova posizione di equilibrio. Il movimento è rilevato attraverso il fascio luminoso proiettato sull'asta graduata. Per applicare il metodo dell'accelerazione iniziale si registrano le posizioni dello spot luminoso per i primi 120s ad intervalli regolari di 5s.

Per il metodo dell'escursione finale si acquisiscono le posizioni ad intervalli di 20s per 6 oscillazioni complete. I valori sono riportati rispettivamente in Tab.2 e in Tab.3.

Tab.2

Posizione indice luminoso dei primi 120s		
n.	t ± 1 (s)	S(t) ± 0,1 (cm)
1	0	-1,4
2	5	-1,5
3	10	-1,1
4	15	-1,0
5	20	-0,9
6	25	-0,6
7	30	-0,3
8	35	0,0
9	40	0,5
10	45	0,8
11	50	1,2
12	55	1,8
13	60	2,0
14	65	2,6
15	70	3,2
16	75	3,9
17	80	4,5
18	85	5,0
19	90	5,8
20	95	6,4
21	100	7,0
22	105	7,7
23	110	8,3
24	115	9,0
25	120	9,9

Tab.3

Posizione indice luminoso dopo 120s					
n.	t ± 1 (s)	S(t) ± 0,1 (cm)	n.	t ± 1 (s)	S(t) ± 0,1 (cm)
26	140	13,0	85	1320	16,5
27	160	15,4	86	1340	16,5
28	180	18,2	87	1360	16,3
29	200	20,5	88	1380	16,0
30	220	22,1	89	1400	15,3
31	240	23,0	90	1420	14,6
32	260	23,5	91	1440	13,9
33	280	23,5	92	1460	13,0
34	300	23,0	93	1480	12,3
35	320	21,5	94	1500	11,5
36	340	19,8	95	1520	10,7
37	360	18,0	96	1540	10,2
38	380	15,5	97	1560	10,0
39	400	13,4	98	1580	9,4
40	420	11,2	99	1600	9,5
41	440	9,1	100	1620	9,6
42	460	7,4	101	1640	9,9
43	480	6,0	102	1660	10,3
44	500	5,1	103	1680	10,9
45	520	4,6	104	1700	11,5
46	540	4,5	105	1720	12,2
47	560	5,0	106	1740	12,6
48	580	5,7	107	1760	13,3
49	600	7,0	108	1780	13,9
50	620	8,4	109	1800	14,3
51	640	10,2	110	1820	15,0
52	660	11,9	111	1840	15,1
53	680	13,6	112	1860	15,0
54	700	15,1	113	1880	14,9
55	720	16,6	114	1900	14,6
56	740	17,8	115	1920	14,0
57	760	18,8	116	1940	13,7
58	780	19,1	117	1960	13,0
59	800	19,3	118	1980	12,7
60	820	19,0	119	2000	12,2
61	840	18,5	120	2020	11,7
62	860	17,6	121	2040	11,4
63	880	16,6	122	2060	11,0
64	900	15,3	123	2080	10,9
65	920	14,0	124	2100	10,6
66	940	12,6	125	2120	10,7
67	960	11,2	126	2140	10,9
68	980	10,1	127	2160	11,0
69	1000	9,1	128	2180	11,3
70	1020	8,3	129	2200	11,6
71	1040	7,9	130	2220	12,0
72	1060	7,5	131	2240	12,4
73	1080	7,7	132	2260	12,8
74	1100	8,0	133	2280	13,0
75	1120	8,6	134	2300	13,5
76	1140	9,4	135	2320	13,8
77	1160	10,3	136	2340	14,0
78	1180	11,4	137	2360	14,0
79	1200	12,5	138	2380	14,1
80	1220	13,5	139	2400	14,0
81	1240	14,4	140	2420	14,1
82	1260	15,2	141	2440	14,0
83	1280	15,8	140	2460	13,8
84	1300	16,3	141	2480	13,5
			142	2500	13,4
			143	2520	13,1
			144	2540	12,7
			145	2560	12,5
			146	2580	12,1
			147	2600	12,0
			148	2620	11,8
			149	2640	11,6
			150	2660	11,5
			151	2680	11,4
			152	2700	11,4
			153	2720	11,6
			154	2740	11,7
			155	2760	11,8
			156	2780	12,1
			157	2800	12,3
			158	2820	12,5
			159	2840	12,8
			160	2860	13,0
			161	2880	13,1
			162	2900	13,2
			163	2920	13,4
			164	2940	13,4
			165	2960	13,5
			166	2980	13,5
			167	3000	13,3
			168	3020	13,2
			169	3040	13,0
			170	3060	12,8
			171	3080	12,5
			172	3100	12,4
			173	3120	12,3
			174	3140	12,1
			175	3160	12,0
			176	3180	12,0
			177	3200	11,9
			178	3220	11,9
			179	3240	12,0
			180	3260	12,0
			181	3280	12,1
			182	3300	12,2
			183	3320	12,3
			184	3340	12,5
			185	3360	12,5
			186	3380	12,6
			187	3400	12,8
			188	3420	13,0
			189	3440	13,0
			190	3460	13,1
			191	3480	13,0
			192	3500	13,0
			193	3520	13,0
			194	3540	13,0
			195	3560	12,9
			196	3580	12,8
			197	3600	12,6
			198	3620	12,5
			199	3640	12,4
			200	3660	12,3

## Analisi Dati

- Posizione di equilibrio iniziale  $S_0$

Dall'analisi della Tab.1 si evince che i dati sperimentali non evidenziano alcuna oscillazione significativa. Pertanto, è possibile ricavare la posizione di equilibrio iniziale  $S_0$  mediante la media aritmetica.

**Tab. 4 Posizione di equilibrio media  $S_0$**

Posizione di equilibrio media $S_0$ (m)	Deviazione standard della media $\sigma_{S_0m}$ (m)
-0,01400	0,00005

Poiché la deviazione standard della media è minore della sensibilità dell'asta graduata, è stato associato come errore la sensibilità dello strumento.

$$\diamond \quad S_0 = (-0,014 \pm 0,001) \text{ m} \quad (1)$$

Un metodo alternativo per stimare la posizione di equilibrio  $S_0$  è indicato in appendice A.2, dove si fa uso del fit lineare.

- Metodo dell'accelerazione iniziale

Lo scopo del metodo dell'accelerazione iniziale consiste nel ricavare la costante di gravitazione universale  $G$  tramite la seguente relazione:

$$G = \frac{r^2 da}{4LM} \quad (2)$$

Facendo riferimento alla Fig.1,  $r$  è la distanza tra i centri delle sfere piccole e le grandi, considerata costante,  $d$  la semi-lunghezza dell'asta che sostiene le due masse  $m$ ,  $L$  la distanza tra l'asta graduata e l'apparato sperimentale,  $M$  è la massa delle sfere più grandi, ed infine  $a$  è l'accelerazione che subiscono le piccole masse  $m$  dopo aver messo in funzione la bilancia. Nei primi istanti dell'esperimento il moto a cui è soggetto la massa piccola può essere paragonato ad un moto uniformemente accelerato. Difatti, è possibile considerare come unica forza agente sul sistema la forza di attrazione gravitazionale  $F_G$ . L'attrito viscoso dell'aria e il momento torcente del filo possono essere, invece, trascurati. Il moto uniformemente accelerato è descritto dalla seguente relazione:

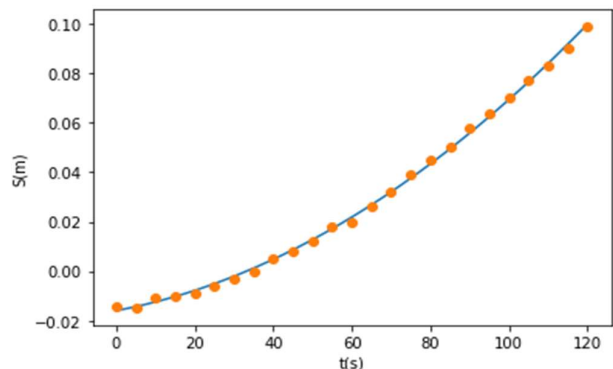
$$S(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + S_0 \quad (3)$$

dove  $a$  è l'accelerazione incognita in (2) subita dalla massa  $m$ ,  $v_0$  è la velocità iniziale e  $S_0$  è la posizione iniziale.

Nel presente caso  $v_0$  è nulla, in quanto il sistema era inizialmente in quiete;  $S_0$  rappresenta la posizione d'equilibrio iniziale stimata nella (1).

In Fig.2 sono riportati i dati raccolti durante i primi 120s (Tab.2), modellizzati attraverso un fit parabolico. Sull'asse delle ordinate è stato riportato la posizione  $S$  dello spot sull'asta graduata, mentre l'asse delle ascisse rappresenta la variazione temporale  $t$ . Si osservi che sia nel grafico, che nelle stime effettuate, è stato trascurato l'errore sui tempi e considerato solo quello sullo spazio, pari alla sensibilità della scala graduata ( $10^{-3}$ m).

Attraverso il test del  $\chi^2$  si verifica che la relazione ipotizzata (3) sia corretta e che i dati siano rappresentati efficacemente mediante il fit parabolico.



**Fig.2** Fit parabolico ottenuto dai dati di Tab.2. Si osservi che le bande di errore non sono visibili, in quanto molto piccole ( $10^{-3}$  m).

Il valore chi-quadro considerando tutti i 25 valori indicati in Tab.2 è:

- $\chi^2 = 34,46$ , ottenuto applicando la relazione (1A) in Appendice A.1.

### Test $\chi^2$

Sia  $H_0$  l'ipotesi che sussista una dipendenza parabolica tra spazio  $S$  e tempo  $t$  e che i valori attesi  $y_{i-st}$ , ricavati dalla relazione funzionale ipotizzata, rispecchino adeguatamente quelli sperimentali  $y_i$ .

Scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$ , considerando che il numero di misure è  $N=25$  e il numero di parametri ricavati è  $m=3$ , i gradi di libertà sono  $(N-m)=22$ , il chi quadro critico è  $\chi^2_{critico} = 33,9$ .

Poiché  $\chi^2 > \chi^2_{critico}$  l'ipotesi  $H_0$  è rigettata. Pertanto, il fit di Fig.2 non rappresenta in maniera soddisfacente le misure.

Il fallimento del test  $\chi^2$  potrebbe essere dovuto a una sovrastima del tempo in cui è possibile trascurare i contributi della forza di attrito viscoso dell'aria e del momento torcente del filo. Pertanto, si procede escludendo alcuni valori dei 25 impiegati per formulare il primo fit, al fine di superare il test del  $\chi^2$  e i test di Gauss impiegati per verificare la consistenza tra i parametri  $a_{fit}$  con  $S_0$  e  $b_{fit}$  con  $v_0$ .

Escludendo gli ultimi 15 dati dalla Tab.2 e considerando, quindi, solo i primi 45s, si ricava un nuovo fit, mostrato in Fig.3.

I parametri  $a$ ,  $b$  e  $c$  ottenuti dal nuovo fit sono:

- $a_{fit} = (-14,4 \pm 0,8)10^{-3} \text{ m}$
- $b_{fit} = (1,4 \pm 0,8) 10^{-4} \text{ m/s}$
- $c_{fit} = (0,8 \pm 0,2) 10^{-5} \text{ m/s}^2$

Il valore chi-quadro è:

- dalla (1A) il  $\chi^2 = 5,47$ .

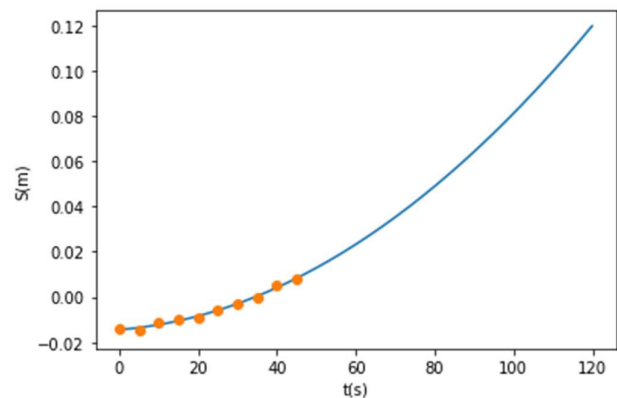
### Test $\chi^2$

Come in precedenza, ipotizzando che sussista una dipendenza parabolica tra spazio  $S$  e tempo  $t$  e scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$ , considerando che il numero di misure è  $N=10$  e il numero di parametri ricavati è  $m=3$ , i gradi di libertà sono  $(N-m)=7$ , il chi quadro critico è  $\chi^2_{critico} = 14,1$ .

Poiché  $\chi^2 < \chi^2_{critico}$  l'ipotesi  $H_0$  è accettata: il fit di Fig.3 rappresenta in maniera soddisfacente le misure.

Alla luce di questo risultato si deduce che l'intervallo di tempo in cui è possibile considerare il moto della massa  $m$  uniformemente accelerato è di 45s.

Si rende, dunque, necessario applicare il test di Gauss per verificare che i parametri  $a_{fit}$  e  $b_{fit}$  ottenuti attraverso il metodo dei minimi quadrati (MMQ) siano compatibili rispettivamente con la posizione di equilibrio iniziale  $S_0$  della (1) e la velocità iniziale  $v_0$  indicati nella relazione (3).



**Fig.3** Fit parabolico ottenuto escludendo gli ultimi 15 dati di Tab.2. Si osservi che le bande di errore non sono visibili, in quanto molto piccole ( $10^{-3} \text{ m}$ ).

### Test di Gauss per il termine noto

Sia  $H_0$  l'ipotesi che il parametro di fit  $a_{fit}$  ricavato dalla parabola dei minimi quadrati sia consistente con la posizione iniziale  $S_0$ .

Scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$  e, dunque,  $Z_{critico}$  assume valore  $Z_{critico} = 1,96$ , poiché:

$$Z = \left| \frac{a_{fit} - S_0}{\sqrt{\sigma_a^2 + \sigma_{S_0}^2}} \right| = 0,4$$

$Z < Z_{critico}$  l' $H_0$  è accettata e, dunque, il termine noto ottenuto attraverso l'MMQ è consistente con la posizione iniziale di equilibrio.

### Test di Gauss per il parametro b

Sia  $H_0$  l'ipotesi che il parametro di fit  $b_{fit}$  ricavato dalla parabola dei minimi quadrati sia consistente con il valore della velocità iniziale nulla  $v_0$ .

Scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$  e, dunque,  $Z_{critico}$  assume valore  $Z_{critico} = 1,96$ , poiché:

$$Z = \left| \frac{b_{fit} - v_{0m}}{\sigma_b} \right| = 1,75$$

$Z < Z_{critico}$  l' $H_0$  è accettata e, dunque, il parametro  $b_{fit}$  ottenuto attraverso l'MMQ è consistente con la velocità iniziale.

L'espressione, dunque, che descrive il moto uniformemente accelerato della massa  $m$  per i primi 45s è:

$$S(t) = c_{fit} t^2 + S_0$$

dove, dalla (3)  $c_{fit} = a/2$ , pertanto l'accelerazione iniziale  $a$  della massa  $m$  è:

$$a = 2c_{fit} = (1,6 \pm 0,4) \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$$

Dalla relazione (2), sostituendo l'accelerazione incognita sopra stimata, si ricava il valore della costante di gravitazione universale  $G$ .

$$G_1 = \frac{r^2 da}{4LM} = (5 \pm 1) \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \quad (4)$$

L'errore  $\sigma_{G_1}$  della costante gravitazionale  $G_1$  è stato ricavato attraverso la propagazione dell'errore per grandezze derivate.

Per verificare la consistenza tra la costante di gravitazione universale  $G_1$  trovata sperimentalmente attraverso la (4) e il valore atteso,  $G_{teorico} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$ , si dovrebbe applicare il test di Gauss. Tuttavia, le approssimazioni introdotte sono tali da poter compromettere la riuscita del test. Va comunque evidenziato che l'ordine di grandezza della  $G$  sperimentale, coincide con quello atteso.

### - Metodo dell'escursione finale

Il metodo dell'accelerazione iniziale si basava sull'ipotesi che nei primi istanti del moto delle piccole masse  $m$  era possibile trascurare le azioni dell'attrito viscoso dell'aria e del momento torcente del filo. Nel

trascorrere del tempo tali approssimazioni non sono più valide, infatti, rappresentando i dati cumulativi di Tab.2 e Tab.3 in Fig.4, si osserva che il moto è di tipo armonico smorzato.

L'obiettivo del metodo dell'escursione finale consiste nello stimare la costante di gravitazione universale  $G$ , attraverso la seguente relazione:

$$G = \frac{\pi^2 \Delta S r^2 d}{MLT^2} \quad (5)$$

dove, facendo riferimento alla Fig.1,  $r$ ,  $d$ ,  $L$ ,  $M$  sono rispettivamente la distanza tra i centri delle sfere piccole e le grandi vicine, la semi-lunghezza dell'asta che sostiene le due masse  $m$ , la distanza tra l'asta graduata e l'apparato sperimentale, la massa delle sfere più grandi.

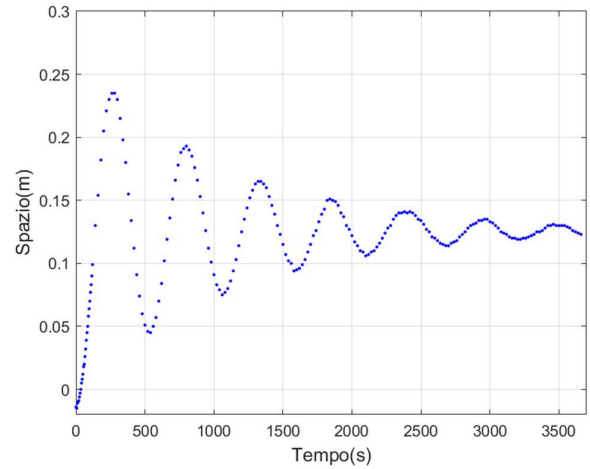
$\Delta S$  e  $T$  sono due termini incogniti e rappresentano rispettivamente la differenza tra il valore della posizione d'equilibrio finale  $S_{eq}$  e iniziale  $S_0$ , e lo pseudo-periodo.

Le oscillazioni dello spot luminoso nell'intorno delle massime escursioni possono essere approssimate a delle parabole. Pertanto, lo pseudo-periodo sarà ricavato come media delle differenze tra massimi e minimi consecutivi.

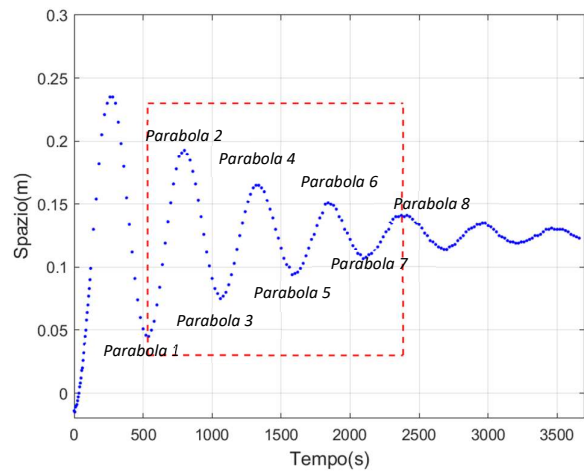
La stima della posizione di equilibrio  $S_{eq}$  sarà, invece, ottenuta come media dinamica tra le coordinate spaziali di tre massimi e due minimi.

L'errore spaziale, così come quello temporale, sarà considerato uniforme per tutti i punti. Per questa ragione, nella stima dei due parametri  $T$  e  $S_{eq}$ , non sono state impiegate tutte le oscillazioni rappresentate in Fig.4, ma solo quelle indicate nel riquadro rosso di Fig.5. Le restanti sono escluse, in quanto gli errori che si commettono nell'acquisizione delle coordinate spaziali e temporali all'inizio e alla fine dell'oscillazione sono rilevanti, tali da non poter più assegnare lo stesso errore.

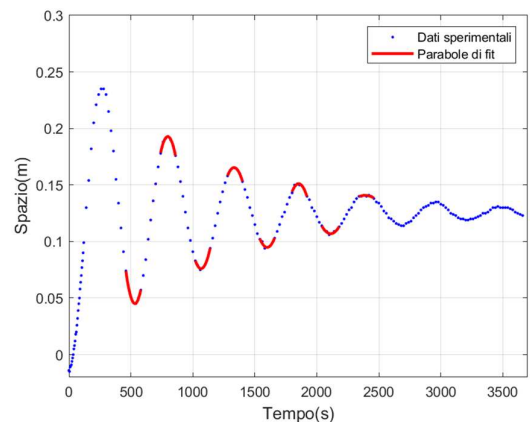
Nella Tab. 5 sono stati riassunti i parametri **a**, **b**, **c** di fit delle parabole esaminate e nell'ultima colonna il rispettivo valore di  $\chi^2$ , ottenuto applicando la (1A). I singoli fit sono indicati in Appendice A.3, mentre in un'unica figura (Fig.6) sono mostrati tutti i fit.



**Fig.4** La figura mostra il moto armonico smorzato descritto dalla massa  $m$  della bilancia di Cavendish (Tab.3).



**Fig.5** Il riquadro rosso nella figura individua le oscillazioni considerate per ricavare i parametri  $T$  e  $S_{eq}$



**Fig.6** In rosso sono evidenziate le parabole di fit impiegate per la stima dei vertici. Le bande di errore non sono visibili, in quanto molto piccole ( $10^{-3}$  m).

Si osservi che tutte le parabole prese in esame superano il test del  $\chi^2$ , pertanto sono modellizzate efficacemente attraverso un fit parabolico. Infatti, scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$ , considerando che il numero di punti impiegati è  $N=7$  e il numero di parametri ricavati è  $m=3$ , i gradi di libertà sono  $(N-m)=4$ , il chi quadro critico è  $\chi^2_{\text{critico}} = 9,49$ .

Tab.5	$(c \pm \sigma_c) \times 10^{-6}$ m/s <sup>2</sup>	$(b \pm \sigma_b) \times 10^{-3}$ m/s	$(a \pm \sigma_a)$ m	$\chi^2$
Parabola 1	$(5,4 \pm 0,3)$	$(-5,8 \pm 0,3)$	$(1,6 \pm 0,1)$	1,00
Parabola 2	$(-4,3 \pm 0,3)$	$(6,9 \pm 0,4)$	$(-2,6 \pm 0,2)$	2,52
Parabola 3	$(3,3 \pm 0,3)$	$(-7,1 \pm 0,6)$	$(3,9 \pm 0,3)$	2,10
Parabola 4	$(-2,6 \pm 0,3)$	$(7,1 \pm 0,7)$	$(-4,5 \pm 0,5)$	0,81
Parabola 5	$(2,2 \pm 0,3)$	$(-7,1 \pm 0,9)$	$(5,8 \pm 0,7)$	6,43
Parabola 6	$(-2,5 \pm 0,3)$	$(-9 \pm 1)$	$(-8,5 \pm 0,9)$	5,10
Parabola 7	$(1,3 \pm 0,2)$	$(-5,7 \pm 0,8)$	$(6,1 \pm 0,9)$	3,07
Parabola 8	$(-0,2 \pm 0,4)$	$(1 \pm 2)$	$(-1 \pm 2)$	0,98

Poiché in tutti i casi  $\chi^2 < \chi^2_{\text{critico}}$  l'ipotesi che sussista una dipendenza parabolica tra spazio  $S$  e tempo  $t$  è verificata.

Per la stima della posizione dei vertici delle parabole sono state applicate le seguenti relazioni:

$$x = -\frac{b}{2c} \quad y = -\frac{b^2 - 4ac}{4c} \quad (6)$$

dove la coordinata  $x$  indica la coordinata temporale da cui poter stimare lo pseudo-periodo  $T$ , mentre la coordinata  $y$ , quella spaziale, sarà impiegata nel calcolo della posizione di equilibrio  $S_{eq}$ ;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono i parametri di fit indicati in Tab.5.

Per assegnare gli errori alle coordinate  $x$ ,  $y$  della (6), sarebbe necessario applicare la propagazione degli errori per ogni parabola. Tuttavia, considerando solo le oscillazioni racchiuse nel riquadro rosso di Fig. 5, è assunto che gli errori siano equivalenti per ogni vertice. Pertanto, è possibile stimare tali errori considerando una sola parabola.

Nel presente caso è stata presa in esame la Parabola 1 di Tab.5. Poiché in questo caso i termini di fit  $a$ ,  $b$ ,  $c$  sono tra loro correlati, non è possibile trascurare nella relazione della propagazione degli errori i termini di covarianza, indicati in Tab. 6.

Tab.6

Termini di covarianza Parabola 1			Errori da associare alle coordinate temporali e spaziali	
$\sigma_{ab} (m^2/s)$	$\sigma_{bc} (m^2/s^3)$	$\sigma_{ac} (m^2/s^2)$	$\sigma_x (s)$	$\sigma_y (m)$
$-2,08 \cdot 10^{-5}$	$-7,74 \cdot 10^{-11}$	$-2 \cdot 10^{-8}$	1	0,0005

Poiché l'errore sulla coordinata spaziale  $\sigma_y$  è minore della sensibilità dell'asta graduata, sarà impiegato la sensibilità dello strumento ( $10^{-3}m$ ). L'errore associato alla coordinata temporale  $x$ ,  $\sigma_x$ , coincide, invece, con l'errore che finora è stato impiegato per i tempi.

Nelle Tab.7a/b sono riportate le coordinate temporali  $x$  e spaziali  $y$  dei vertici di ogni parabola con gli errori stimati in Tab. 6. Nell'ultima colonna è stato riportato lo pseudo-periodo  $T$ , come differenza tra massimi o minimi consecutivi. L'errore sullo pseudo-periodo è stato stimato con la propagazione degli errori.

Minimi delle parabole di fit				Massimi delle parabole di fit			
Tab. 7a	Coordinata temporale $x \pm 1$ (s)	Coordinata spaziale $y \pm 0,001$ (m)	Pseudoperiodo $T \pm 2$ (s)	Tab. 7b	Coordinata temporale $x \pm 1$ (s)	Coordinata spaziale $y \pm 0,001$ (m)	Pseudoperiodo $T \pm 2$ (s)
Parabola 1	533	0,045	533	Parabola 2	797	0,193	535
Parabola 3	1066	0,076	533	Parabola 4	1332	0,165	521
Parabola 5	1599	0,095	513	Parabola 6	1853	0,151	531
Parabola 7	2111	0,107		Parabola 8	2384	0,142	



In Tab.8 sono riportati i valori dello pseudo-periodo medio  $T_m$ , ottenuto mediante la media di tutti gli pseudo-periodi di Tab.7.

**Tab.8 Pseudoperiodo medio  $T_m$**

Pseudo-periodo medio $T_m$ (s)	Deviazione standard della media $\sigma_{Tm}$ (s)
528	4

❖ Uno dei parametri incogniti per ricavare  $G$  dalla (5) è lo pseudo-periodo medio  $T_m$ :

$$T_m = (528 \pm 4)s$$

La stima della posizione di equilibrio finale  $S_{eq}$  è stata ottenuta mediante la media dinamica tra le coordinate spaziali dei massimi di Parabola 2, 4, 6 e i minimi di Parabola 3 e 5. Pertanto, la  $S_{eq}$  vale:

$$S_{eq} = \frac{\frac{y_2 + y_4 + y_6}{3} + \frac{y_3 + y_5}{2}}{2} = (0,128 \pm 0,001) m$$

il cui errore è pari alla sensibilità della scala graduata.

❖ Il secondo parametro incognito della (5) è la differenza  $\Delta S$  tra la posizione di equilibrio finale  $S_{eq}$  e iniziale  $S_0$  (1), stimata all'inizio dell'analisi dati. Il valore di  $\Delta S$  è, dunque, dato da:

$$\Delta S = (S_{eq} - S_0) = (0,142 \pm 0,001) m$$

il cui errore è stato ricavato attraverso la propagazione degli errori.

Noti i parametri incogniti della (5) è, adesso, possibile stimare la costante di gravitazione universale  $G$ :

$$G_2 = (6,2 \pm 0,3) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg s^2} \quad (6)$$

L'errore  $\sigma_{G2}$  della costante gravitazionale  $G_2$  è stato ricavato attraverso la propagazione dell'errore per grandezze derivate.

Per verificare la consistenza tra la costante di gravitazione universale  $G_2$  trovata sperimentalmente attraverso la (6) e il valore atteso,  $G_{teorico} = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3/Kg s^2$ , si applica il test di Gauss.

### Test di Gauss

Sia  $H_0$  l'ipotesi che la costante di gravitazione universale  $G_2$  ricavata dalla (6) sia consistente con la  $G_{teorico}$ .

Scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$  e, dunque,  $Z_{critico}$  assume valore  $Z_{critico} = 1,96$ , poiché:

$$Z = \left| \frac{G_2 - G_{teorico}}{\sigma_{G_2}} \right| = 1,53$$

$Z < Z_{critico}$  l' $H_0$  è accettata. I due valori sono compatibili tra loro.

In Tab.9 sono riassunti i valori delle grandezze impiegate per la stima di  $G_2$  (6). Si osservi che la distanza  $r$  e la semi-lunghezza dell'asta  $d$  sono le entità più rilevanti nel calcolo dell'errore  $\sigma_{G_2}$  della costante di gravitazione universale.

- Fattore di correzione della costante di gravitazione universale  $G$

Si osservi, tuttavia, che la relazione (5) tiene conto solo dell'interazione reciproca della massa  $m$  e la massa  $M_1$  più vicina, trascurando in realtà l'interazione della massa  $M_2$  più lontana, come schematizzato in Fig.7. Al fine di considerare anche l'interazione con la massa  $M_2$  più lontana, è necessario applicare delle correzioni alla relazione (5).

L'espressione della costante di gravitazione  $G$  corretta è:

$$G_3 = \frac{G_2}{1 - \gamma} \quad (7)$$

dove  $G_2$  è la grandezza indicata nella (6),  $\gamma$  è il fattore di correzione che tiene conto della distanza  $r$  tra la massa  $m$  e  $M$  e la semi-distanza  $d$  tra le due masse  $m$ , stimato tramite:

$$\gamma = \frac{r^3}{(r^2 + 4d^2)^{\frac{3}{2}}} = (0,069 \pm 0,005)$$

il cui errore è stato ricavato attraverso la propagazione degli errori.

Dalla (7) il valore della costante di gravitazione universale corretto  $G_3$  vale:

$$G_3 = (6,7 \pm 0,3) \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \ s^2} \quad (8)$$

L'errore  $\sigma_{G_3}$  della costante gravitazionale  $G_3$  è stato ricavato attraverso la propagazione dell'errore per grandezze derivate.

Per verificare la consistenza tra la costante di gravitazione universale  $G_3$  trovata sperimentalmente attraverso la (8) e il valore atteso,  $G_{teorico} = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3/Kg \ s^2$ , si applica il test di Gauss.

#### Test di Gauss

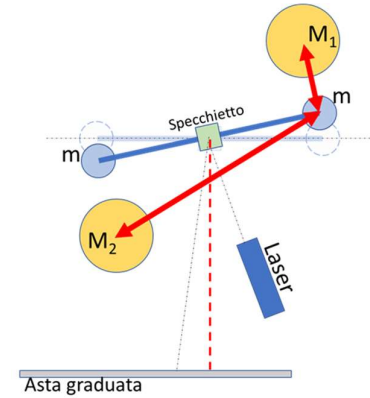
Sia  $H_0$  l'ipotesi che la costante di gravitazione universale  $G_3$  ricavata dalla (8) sia consistente con la  $G_{teorico}$ .

Scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$  e, dunque,  $Z_{critico}$  assume valore  $Z_{critico} = 1,96$ , poiché:

$$Z = \left| \frac{G_3 - G_{teorico}}{\sigma_{G_2}} \right| = 0,04$$

$Z < Z_{critico}$  l' $H_0$  è accettata. I due valori sono tra loro compatibili.

Tab. 9	Valori	Errore relativo
<b>r</b>	$(0,045 \pm 0,001) \text{ m}$	2,22%
<b>d</b>	$(0,050 \pm 0,001) \text{ m}$	2,00%
<b>M</b>	$(1,503 \pm 0,001) \text{ Kg}$	0,07%
<b>L</b>	$(5,47 \pm 0,01) \text{ m}$	0,18%
<b><math>\Delta S</math></b>	$(0,142 \pm 0,001) \text{ m}$	0,70%
<b><math>T_m</math></b>	$(528 \pm 4) \text{ s}$	0,69%



**Fig.7** La figura schematizza le mutue interazioni tra la massa  $m$  e le masse  $M_1$  e  $M_2$ . Le masse  $M_1$  e  $M_2$  hanno stessa massa  $M$ , ma per comodità di rappresentazione sono state indicate diversamente. Le dimensioni non sono in scala.

- Stima della costante elastica del filo

Nella descrizione del metodo dell'escursione finale si è assunto che il moto delle piccole masse  $m$  fosse un moto oscillatorio armonico. Sotto questa ipotesi, noto lo pseudo-periodo  $T_m = (528 \pm 4)s$  è possibile stimare la costante elastica del filo:

$$k = \frac{8\pi^2 m d^2}{T_m^2} = (1,06 \pm 0,01) \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{m} \quad (9)$$

dove  $m$  è la massa della sfera piccola,  $d$  la semi-distanza tra le due masse  $m$ . L'errore nella (9) è stato ricavato attraverso la propagazione degli errori.

- Variazione della distanza  $r$  tra le masse  $m$  e  $M$

La distanza  $r$  tra i centri delle masse  $m$  e  $M$  più vicine è stata finora considerata costante. In realtà, a causa della mutua interazione tra le due masse, tale valore non rimane fisso. Difatti, la massa piccola  $m$  compie un breve spostamento  $w$  verso la massa  $M$  e, pertanto, ci si aspetta che  $r$  sia minore del valore impiegato (Fig.8). Si intende, dunque, stimare  $w$  e verificare che l'ipotesi di considerare  $r$  costante sia valida o meno.

La relazione impiegata nella stima di  $w$  è:

$$w = \frac{d \cdot \Delta S}{2L} = (6,5 \pm 0,8) \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

dove  $d$  è la semi-distanza tra le masse  $m$  e  $\Delta S$  è la differenza tra la posizione di equilibrio iniziale  $S_0$  e finale  $S_{eq}$ , mentre  $L$  è la distanza tra l'apparato sperimentale e l'asta graduata. L'errore è stato ricavato attraverso la propagazione degli errori.

Poiché il valore di  $w$  è addirittura minore dell'incertezza associata a  $r = (0,045 \pm 0,001)\text{m}$ , si può concludere che lo spostamento  $w$  è trascurabile. Pertanto, l'ipotesi di considerare  $r$  costante è corretta.

- Momento di inerzia della sbarra

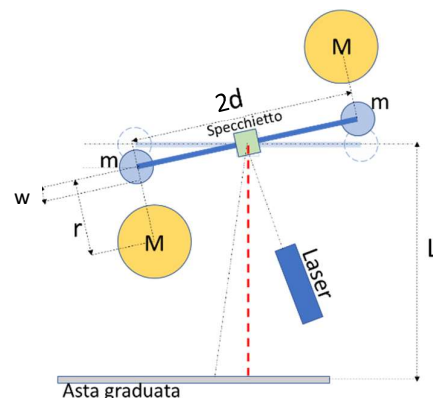
In tutte le relazioni impiegate per ricavare la costante di gravitazione universale  $G$  (4), (6), (8), così come nella stima della costante elastica del filo  $k$  (9), è stato considerato trascurabile il momento di inerzia dell'asta di semi-lunghezza  $d$  che sostiene le due sfere piccole  $m$ . Per verificare che tale approssimazione sia valida, si ricava il momento d'inerzia dalla sbarra e lo si confronta con il momento di inerzia delle sfere piccole, considerandole puntiformi.

Il momento d'inerzia per un'asta sottile è dato da:

$$I_a = \frac{1}{12} m_a 4d^2 = (8,3 \pm 8,3) \cdot 10^{-7} \text{ kg m}^2$$

dove  $m_a$  è la massa dell'asta e  $d$  la sua semi-lunghezza. Si osservi che il valore del momento d'inerzia  $I_d$  è pari all'errore associato. Ciò è dovuto probabilmente al fatto che alla massa della sbarretta  $m_a$  è stato associato l'incertezza di  $1\text{g}$  pari al suo stesso valore.

Il momento d'inerzia di due piccole sfere puntiformi  $m$  è dato da:



**Fig.8** La figura evidenzia schematicamente il breve spostamento  $w$  che compie la massa  $m$  verso la massa  $M$ , a causa della mutua interazione. Le dimensioni non sono in scala.

$$I_m = 2md^2 = (7,5 \pm 0,3) \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$$

In ambo le relazioni dei momenti di inerzia  $I_d$  e  $I_m$  gli errori sono stati ricavati propagando.

Poiché il valore del momento d'inerzia dell'asta  $I_d$  è addirittura minore dell'incertezza associata al momento d'inerzia delle due masse  $m$ , si può concludere che è possibile trascurare il contributo del momento d'inerzia  $I_d$  sia nella stima delle costanti di gravitazione universale  $G$  che nella costante elastica del filo  $k$ .

## Conclusioni

In questo studio è stata stimata la costante di gravitazione universale  $G$  mediante i metodi dell'accelerazione iniziale e dell'escursione finale.

Tramite il primo metodo è stato ricavato il primo valore approssimato della costante gravitazionale  $G_1$ , supponendo che il moto a cui era soggetto la massa piccola fosse di tipo uniformemente accelerato. In questo primo caso è stato trascurato l'attrito viscoso dell'aria e il momento torcente del filo, considerando come unica forza agente sul sistema la forza di attrazione gravitazionale  $F_G$ . Già attraverso questo primo metodo il risultato ottenuto nella (4) risulta essere molto vicino al valore teorico  $G_{\text{teorico}}$ . Infatti, lo scostamento di  $G_1$  rispetto  $G_{\text{teorico}}$  è pari solo al 25%.

Il secondo metodo, contrariamente al primo, tiene conto dei contributi dell'attrito viscoso dell'aria e del momento torcente del filo. Il moto della massa  $m$  risulta essere di tipo oscillatorio armonico smorzato. Considerando questi ulteriori fattori il valore della costante di gravitazione universale  $G_2$  nella (6) si discosta dal valore  $G_{\text{teorico}}$  solamente del 7%.

Infine, prendendo in esame anche la mutua interazione che si sviluppa tra la massa  $m$  e le due masse  $M$ , quella più vicina e quella più lontana, si ottiene un valore  $G_3$  nella (8) che si discosta da quello teorico solo del 0,4%. Quest'ultimo risultato è stato ottenuto nell'ipotesi di trascurare la variazione della distanza  $r$  tra le masse  $m$  e  $M$  vicine, a causa della loro mutua interazione, e il momento di inerzia dell'asta che sostiene le masse  $m$ . Tuttavia, è stato dimostrato che i loro contributi sono marginali nella stima della costante  $G$ .

Alla luce di questi risultati è sorprendente come uno strumento apparentemente semplice come la Bilancia di Cavendish, si riveli così sensibile da stimare il valore "vero" della costante di gravitazione universale  $G$ , e desta ancora più stupore pensare come Cavendish, con mezzi meno sofisticati di oggi, sia riuscito a stimare la  $G$  "corretta" nel 1788.

## Appendice A.1 – Principali relazioni statistiche impiegate

- Media:  $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$
- Deviazione standard:  $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$
- Errore standard della media:  $\sigma_s = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- Propagazione di una grandezza derivata  $G(x,y,z,...)$  costituita da grandezze indipendenti:

$$\sigma_G = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2 \sigma_z^2 + \dots}$$

- Chi-quadro: 
$$X^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - y_{i-st})^2}{\sigma_i^2} \quad (1A)$$

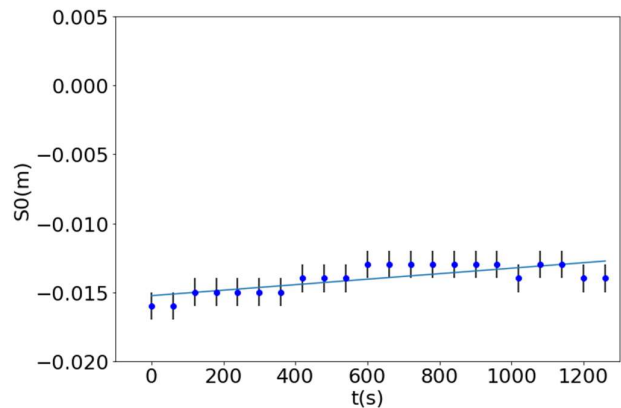
dove  $y_{i-st}$  rappresenta la stima, tramite la relazione funzionale ipotizzata, dei valori aspettati delle diverse variabili  $y_i$ , aventi deviazione standard  $\sigma_i$ .

## Appendice A.2 – Stima della posizione di equilibrio iniziale $S_0$ attraverso fit lineare

Un modo alternativo per stimare la posizione di equilibrio iniziale  $S_0$  è attraverso un fit lineare.

La Fig.A1 mostra i dati di Tab.1, dove sull'asse delle ordinate è riportato lo spazio  $S_0$ , sull'asse delle ascisse il tempo  $t$ . Si osservi che è stato considerato solo l'errore relativo allo spazio, trascurando l'errore sul tempo.

Si noti che il valore della posizione dello spot luminoso  $S_0$  non è esattamente costante al variare del tempo  $t$ , ma evidenzia una leggera oscillazione. Ci si aspetta, tuttavia, che i dati si distribuiscano lungo una retta orizzontale, il cui coefficiente angolare sia zero, e il termine noto  $a$  corrisponda alla posizione di equilibrio.



**Fig.A1** Grafico ottenuto dai dati di Tab.1

Per dimostrare ciò, è stato eseguito un fit lineare. I parametri di fit e il chi-quadro ottenuto sono:

- Termine noto  $a = (15,3 \pm 0,4) \cdot 10^{-3} \text{m}$
- Coefficiente angolare  $b = (2,0 \pm 0,6) \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$
- $\chi^2=9,31$  ottenuto con dalla (1A)

Eseguendo il test del  $\chi^2$  considerando tutti i dati sperimentali, l'esito del test è positivo. Pertanto, è corretto modellizzare tali misure attraverso un fit lineare.

### Test $\chi^2$

Sia  $H_0$  l'ipotesi che sussista una dipendenza lineare tra spazio  $S$  e tempo  $t$  e che i valori attesi  $y_{i-st}$ , ricavati dalla relazione funzionale ipotizzata, rispecchino adeguatamente quelli sperimentali  $y_i$ .

Scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$ , considerando che il numero di misure è  $N=22$  e il numero di parametri ricavati è  $m=2$ , i gradi di libertà sono  $(N-m)=20$ , il chi quadro critico è  $\chi^2_{critico} = 31,4$ .

Poiché  $\chi^2 < \chi^2_{\text{critico}}$  l'ipotesi  $H_0$  è accettata.

Tuttavia, eseguendo il test di Gauss per verificare la consistenza del coefficiente angolare **b** con lo zero, l'esito è negativo.

#### Test di Gauss

Sia  $H_0$  l'ipotesi che il parametro di fit **b** ricavato dalla retta attraverso il metodo dei minimi quadrati (MMQ) sia consistente con lo zero.

Scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$  e, dunque,  $Z_{\text{critico}}$  assume valore  $Z_{\text{critico}} = 1,96$ , poiché:

$$Z = \left| \frac{b - 0}{\sigma_b} \right| = 3,56$$

$Z > Z_{\text{critico}}$  l' $H_0$  è rigettata e, dunque, il coefficiente angolare ottenuto attraverso l'MMQ non è consistente con lo zero.

Si procede escludendo i punti che più visibilmente si discostano dalla retta orizzontale ipotizzata, in particolare escludendo i primi cinque punti (Fig.A2). Applicando nuovamente i test  $\chi^2$  e di Gauss, si ottiene:

- Termine noto **a** =  $(-14 \pm 1) 10^{-3} \text{m}$
- Coefficiente angolare **b** =  $(1,1 \pm 0,8) 10^{-6} \text{m/s}$
- $\chi^2 = 6,46$ , ottenuto dalla (1A)

#### Test $\chi^2$

Scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$ , considerando che il numero di misure è  $N=17$  e il numero di parametri ricavati è  $m=2$ , i gradi di libertà sono  $(N-m)=15$ , il chi quadro critico è  $\chi^2_{\text{critico}} = 25,0$ .

Poiché  $\chi^2 < \chi^2_{\text{critico}}$  l'ipotesi che il fit sia lineare è accettata.

#### Test di Gauss

Come in precedenza, si suppone che il parametro di fit **b** sia consistente con lo zero.

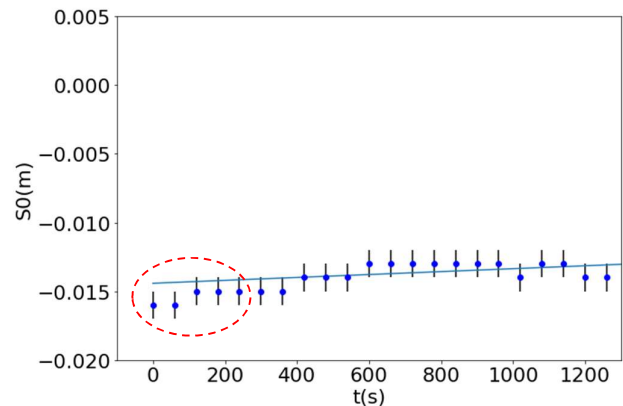
Scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$  e, dunque,  $Z_{\text{critico}}$  assume valore  $Z_{\text{critico}} = 1,96$ , poiché:

$$Z = \left| \frac{b - 0}{\sigma_b} \right| = 1,29$$

$Z < Z_{\text{critico}}$  l' $H_0$  è accettata e, dunque, il coefficiente angolare ottenuto attraverso l'MMQ è consistente con lo zero.

- ❖ Ciò dimostra che la retta orizzontale modella i dati di Tab.1, e la posizione di equilibrio  $S_0$  è data dal termine noto

$$S_0 = (-0,014 \pm 0,001) \text{ m}$$

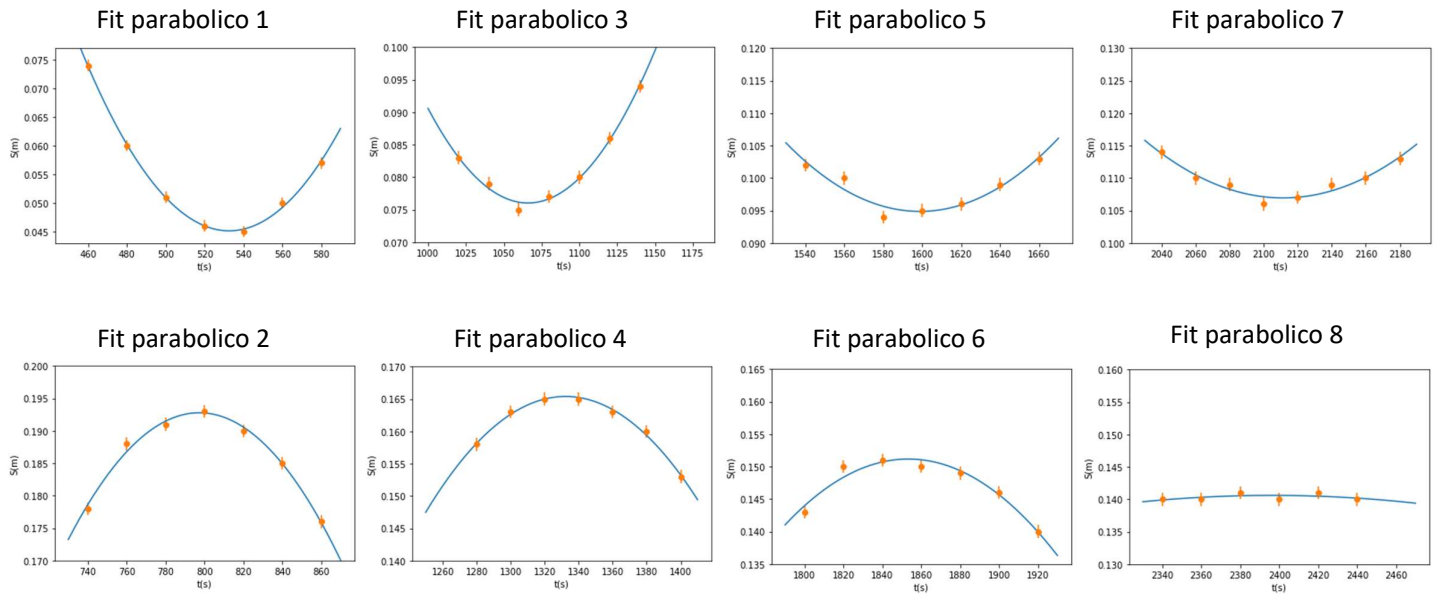


**Fig.A2** La figura mostra i dati sperimentali in Tab.1 e la retta di best fit ottenuta escludendo i punti sperimentali indicati nell'ovale

Si osservi che il valore ottenuto con un procedimento più elaborato, coincide con quello stimato attraverso la media dei di Tab.1 in (1).

### Appendice A.3 – Fit delle parabole impiegate nel metodo dell’escursione finale

Le figure mostrano il fit parabolici impiegati per ricavare i valori dei vertici, per la stima degli pseudo-periodi e per la posizione di equilibrio finale  $S_{eq}$ . I parametri di fit **a, b, c** sono riassunti in Tab.5.



### Appendice A.4 – Coefficiente di smorzamento

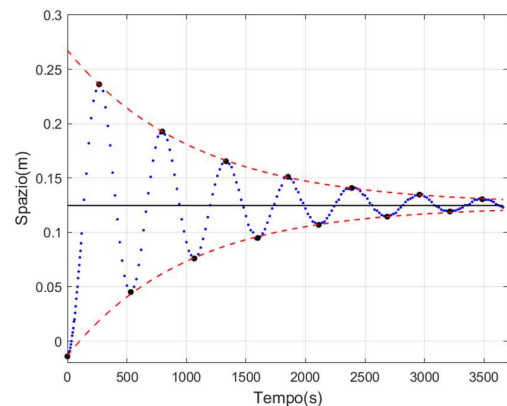
La presenza dell’attrito viscoso dell’aria porta ad uno smorzamento esponenziale del moto delle masse  $m$ , come illustra la Fig.4. La legge alla base del moto è data dalla relazione dell’oscillatore armonico smorzato che, nella forma completa, è:

$$\varphi(t) = Ae^{-\zeta t} \cos(\omega' t + \phi) + S_{eq}$$

dove  $A$  è una costante,  $\omega'$  è la pseudo-pulsazione,  $\phi$  la fase che dipende dalle condizioni iniziali,  $S_{eq}$  è la posizione di equilibrio finale stimata in precedenza ed infine,  $\zeta$  è il coefficiente di smorzamento.

Ci proponiamo di stimare, come ultima parte di questo studio, il coefficiente di smorzamento  $\zeta$ . A tal fine si interpolano i vertici delle massime escursioni delle oscillazioni con un andamento esponenziale, come mostra la figura A3.

Per studiare adeguatamente gli andamenti esponenziali attraverso l’MMQ, si effettua una traslazione lungo l’asse delle ordinate, facendo coincidere la posizione di equilibrio  $S_{eq}$  con l’origine come mostra la Fig. A4.



**Fig.A3** La figura mostra il moto armonico smorzato, evidenziando lo smorzamento esponenziale  $\zeta$  in rosso. La linea nera rappresenta la posizione di equilibrio finale  $S_{eq}$ .

Le espressioni degli andamenti esponenziali si riducono, dunque, alle seguenti:

$$\Delta y_1 = a_1 e^{\zeta_1 x_{\min}} \quad (2A)$$

$$\Delta y_2 = a_2 e^{\zeta_2 x_{\max}} \quad (2B)$$

dove  $a_1$  e  $a_2$  sono delle costanti,  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$  sono i coefficienti di smorzamento che si vogliono stimare,  $x_{\min}$  e  $x_{\max}$  sono le coordinate temporali dei minimi e massimi.  $\Delta y_1$  e  $\Delta y_2$  rappresentano, invece, le traslazioni dei dati sperimentali rispetto la posizione di equilibrio finale  $S_{eq} = (0,128 \pm 0,001)\text{m}$ .

Il metodo dei minimi quadrati si applica linearizzando le due relazioni (2A) e (2B) nel seguente modo:

$$\ln|\Delta y_1| = \ln|a_1| + \zeta_1 x_{\min}$$

$$\ln|\Delta y_2| = \ln|a_2| + \zeta_2 x_{\max}$$

Posto, dunque:

$$Y_1 = \ln|\Delta y_1|, \quad A_1 = \ln|a_1|, \quad B_1 = \zeta_1 \quad (3A)$$

$$Y_2 = \ln|\Delta y_2|, \quad A_2 = \ln|a_2|, \quad B_2 = \zeta_2 \quad (3B)$$

Si riportano in Tab.10a/b i valori delle variabili funzionali  $Y_1$ ,  $Y_2$  delle equazioni (3A) e (3B), con le relative posizioni temporali  $x_{\min}$ ,  $x_{\max}$ . Gli errori  $\sigma_{Y1}$ ,  $\sigma_{Y2}$  sono ottenuti propagando. Per completezza sono state riportate anche le traslazioni in valore assoluto dei dati sperimentali  $\Delta y_1$  e  $\Delta y_2$  con i relativi errori.

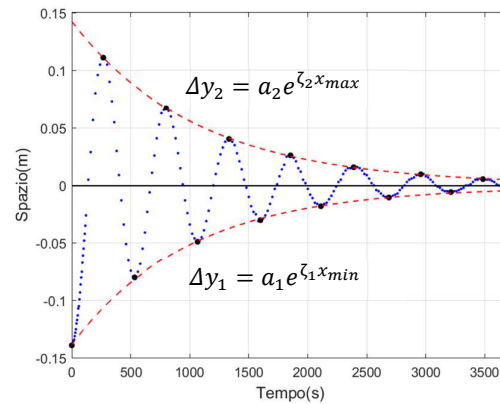
**Tab.10a Valori linearizzati dell'esponenziale inferiore (eq. 3A)**

Coordinata temporale dei minimi ( $x_{\min} \pm 1$ )s	$ \Delta y_1  \pm 0,001$ (m)	$Y_1 \pm \sigma_{Y1}$
0	0,142	(-1,95 $\pm$ 0,01)
533	0,082	(-2,5 $\pm$ 0,02)
1066	0,052	(-2,96 $\pm$ 0,03)
1599	0,033	(-3,42 $\pm$ 0,04)
2111	0,021	(-3,9 $\pm$ 0,1)
2687	0,013	(-4,3 $\pm$ 0,1)
3213	0,008	(-4,8 $\pm$ 0,2)

**Tab.10b Valori linearizzati dell'esponenziale superiore (eq. 3B)**

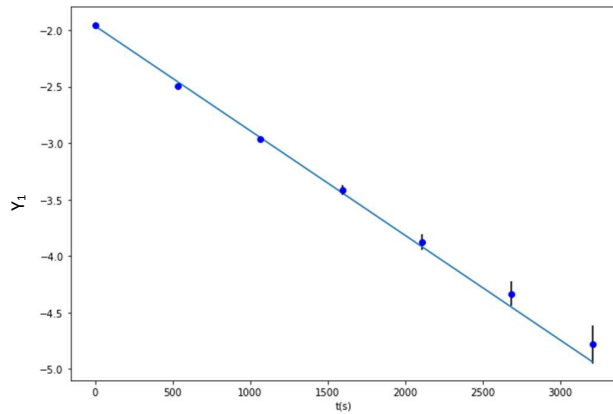
Coordinata temporale dei massimi ( $x_{\max} \pm 1$ )s	$ \Delta y_2  \pm 0,001$ (m)	$Y_2 \pm \sigma_{Y2}$
267	0,108	(-2,22 $\pm$ 0,01)
797	0,065	(-2,73 $\pm$ 0,02)
1332	0,038	(-3,28 $\pm$ 0,04)
1853	0,024	(-3,75 $\pm$ 0,06)
2389	0,014	(-4,2 $\pm$ 0,1)
2957	0,007	(-4,9 $\pm$ 0,2)
3485	0,003	(-5,8 $\pm$ 0,5)

Dall'elaborazione dei dati di Tab.10a/b con l'MMQ si ottengono i due fit lineari (Fig.A5/A6). Sull'asse delle ascisse di Fig.A5 sono riportate le coordinate temporali delle escursioni minime indicate in Tab.10a, mentre sull'asse delle ordinate della stessa figura è stato riportato il valore  $Y_1$  definito nella (3A). Analogamente in Fig.A6 sono riportate le coordinate temporali delle escursioni massime indicate in Tab.10b, mentre sull'asse delle ordinate della stessa figura è stato riportato il valore  $Y_2$  definito nella (3B). Si osservi che, come già applicato in precedenza, è stato trascurato il contributo dell'errore sulle coordinate temporali.

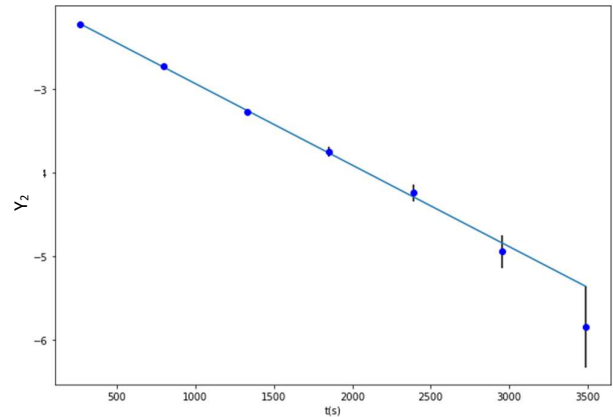


**Fig.A4** La figura mostra il fit ottenuto traslando opportunamente il grafico A3, facendo coincidere la posizione di equilibrio finale  $S_{eq}$  con l'origine dell'asse delle ordinate.





**Fig.A5** Fit lineare 1 ottenuto dai dati di Tab.10a, riferito all'esponenziale inferiore di Fig.A4



**Fig.A6** Fit lineare 2 ottenuto dai dati di Tab.10b, riferito all'esponenziale superiore di Fig.A4

Fit lineare 1 relativo  
all'esponenziale inferiore (2A)

$$A_1 = (-1,97 \pm 0,01) \text{ m}$$

$$B_1 = (-9,2 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$$

$$\chi^2 = 8,78$$

Fit lineare 2 relativo  
all'esponenziale superiore (2B)

$$A_2 = (-1,96 \pm 0,02) \text{ m}$$

$$B_2 = (-9,8 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$$

$$\chi^2 = 1,86$$

Per verificare che i fit lineari modellizzino correttamente i dati sperimentali si esegue il test del  $\chi^2$ . L'esito è positivo per entrambi i fit. Infatti, scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$ , considerando che il numero di misure è  $N=7$  e il numero di parametri ricavati è  $m=2$ , i gradi di libertà sono  $(N-m)=5$ , il chi quadro critico è  $\chi^2_{\text{critico}} = 11,1$ .

Poiché  $\chi^2 < \chi^2_{\text{critico}}$  l'ipotesi che i fit siano lineari è accettata.

Si applica, dunque, il test di Gauss per verificare che i coefficienti di smorzamento  $B_1$  e  $B_2$ , legati ai due coefficienti angolari, siano consistenti tra loro.

#### Test di Gauss

Sia  $H_0$  l'ipotesi che i parametri di fit  $B_1$  e  $B_2$  ricavato mediante l'MMQ siano compatibili tra loro. Scelto un livello di significatività  $\alpha = 5\%$  e, dunque,  $Z_{\text{critico}}$  assume valore  $Z_{\text{critico}} = 1,96$ , poiché:

$$Z = \left| \frac{B_1 - B_2}{\sqrt{\sigma_{B_1}^2 + \sigma_{B_2}^2}} \right| = 1,15$$

$Z < Z_{\text{critico}}$  l' $H_0$  è accettata e, dunque, i due coefficienti angolari sono consistenti tra loro.

Il coefficiente di smorzamento  $\zeta$  del sistema è dato dunque dalla media dei due  $\zeta_1$  e  $\zeta_2$ :

$$\zeta = (9,5 \pm 0,3) \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$$

il cui errore è stato ottenuto propagando.