

STRUMENTI DI MISURA E CARATTERISTICA DI UNA LAMPADINA

Valentina Barletta – valentina.barletta@edu.unito.it – Beatrice Caccherano – beatrice.caccherano@edu.unito.it –
 Federico Collè – federico.colle@edu.unito.it – AII_03

Abstract

Lo scopo dell'esperienza consiste nel verificare la legge di Stefan-Boltzmann attraverso una lampadina ad incandescenza con filamento di tungsteno. Lo studio si suddivide in due parti. Nella prima sezione si prende confidenza con gli strumenti di misura, focalizzandosi nella stima della resistenza interna di due tester. Gli strumenti di misura sono un tester analogico e uno digitale. La seconda parte si prefigge di ricavare, sotto specifiche approssimazioni, la curva caratteristica di una lampadina in termini di corrente in funzione della tensione $I(V)$ e di verificare la validità della legge di corpo nero. I risultati ottenuti mettono in evidenza che la potenza dissipata dalla lampadina è ben descritta da un'espressione costituita da un termine con esponente prossimo a 4, come ci si aspetta dalla teoria.

1. Obiettivi della misura

1.1 Prima parte

- Misura della resistenza interna del voltmetro analogico e di quello digitale;
- Misura della resistenza interna dell'amperometro analogico.

1.2 Seconda parte

- Studio della curva caratteristica di corrente in funzione della tensione ai capi della lampadina;
- Verifica della legge di Stefan-Boltzmann.

2. Apparato sperimentale

2.1 Prima parte

Il circuito in *fig.2.1a*, impiegato per la stima della resistenza interna del voltmetro, è stato realizzato con le seguenti componenti:

- Generatore di tensione continua;
- Resistenza $R = 477 \pm 3 \text{ k}\Omega$;
- Tester digitale ed analogico (modello: AMPROBE 37XR-A);
- Basetta di plexiglass e cavi.

Per la misura della resistenza interna dell'amperometro si è utilizzato il circuito in *fig.2.1b*, dove il tester analogico della *fig.2.1a* è stato impiegato come amperometro.

2.2 Seconda parte

Il circuito in *Fig. 2.2* è stato impiegato sia per verificare la legge del corpo nero che la relazione tra corrente e tensione, $I(V)$. Le componenti usate sono:

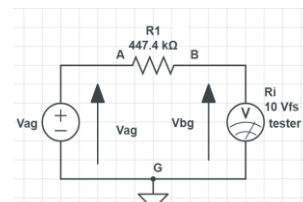


Fig. 2.1a Circuito realizzato per la stima della resistenza interna R_i del voltmetro

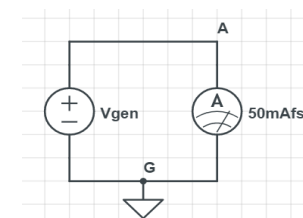


Fig. 2.1b Circuito realizzato per la stima della resistenza interna R_i dell'amperometro

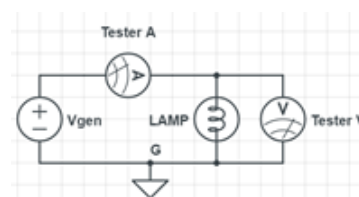


Fig. 2.2 Circuito realizzato per la seconda parte dell'esperienza

- Generatore di tensione continua;
- Lampadina ad incandescenza;
- Tester digitale usato come voltmetro e come amperometro (modello: AMPROBE 37XR-A);
- basetta di plexiglass e cavi;

3. Presa dati

3.1 Prima parte

Per stimare la resistenza interna del voltmetro è stata impostata la corrente massima erogabile dal generatore a 0,1A ed il tester analogico su volt. In *Tab.3.1a* sono riportati i valori della tensione misurati a destra (V_{bg}) e a sinistra (V_{ag}) della resistenza R di *fig.2.1a*.

In *Tab.3.1b* sono riportate le stesse grandezze fisiche di *Tab.3.1a* impiegando, in questo caso, il tester digitale.

Per misurare la resistenza interna dell'amperometro analogico è stata impostata la tensione del generatore a $V_{gen} = 78$ mV e misurata l'intensità di corrente I . Il valore è riportato in *Tab.3.1c*.

Tab.3.1a Dati voltmetro analogico

R	(477 ± 3) k Ω
V_{ag}	$(8,0 \pm 0,2)$ V
V_{bg}	$(2,3 \pm 0,2)$ V

Tab.3.1b Dati voltmetro digitale

R	(477 ± 3) k Ω
V_{ag}	$(7,99 \pm 0,01)$ V
V_{bg}	$(7,60 \pm 0,01)$ V

Tab 3.1c Dati amperometro analogico

I	$(11,0 \pm 0,1)$ mA
----------	---------------------

3.2 Seconda parte

Nella seconda parte dell'esperienza si è misurata la resistenza della lampadina a freddo $R_0 = (12,0 \pm 0,9) \Omega$ e la caduta di tensione variando la tensione in ingresso V_{in} . I risultati delle misure elettriche sono riportati in appendice A1.

4. Analisi dati

4.1 Prima parte

Mediante le relazioni (1), (2)

$$R_i = \frac{R \cdot V_{bg}}{(V_{ag} - V_{bg})} \quad (1) \quad P = \frac{V_{bg}^2}{R_i} \quad (2)$$

è stata valutata rispettivamente la resistenza interna R_i e la potenza dissipata P del voltmetro. In *Tab.4.1a* sono riportati i risultati col voltmetro analogico, mentre in *Tab.4.1b* quelli col voltmetro digitale. I risultati sono comprensivi degli errori sperimentali ricavati attraverso la propagazione degli errori.

In *Tab.4.1c* è riportata la potenza dissipata dall'amperometro analogico, stimata dalla (2), e la resistenza interna dello stesso strumento ricavata con l'espressione $R_i = \frac{V}{I}$ (3). Anche in questo caso le misure sono comprensive degli errori sperimentali.

Tab 4.1a Dati voltmetro analogico

V_{ag}	$(8,0 \pm 0,2)$ mA
V_{bg}	$(2,3 \pm 0,2)$ mV
R_{i1}	(193 ± 32) Ω
P₁	$(0,03 \pm 0,01)$ mW

Tab 4.1b Dati voltmetro digitale

V_{ag}	$(7,99 \pm 0,01)$ V
V_{bg}	$(7,60 \pm 0,01)$ V
R_{i2}	(9039 ± 671) k Ω
P₂	$(0,0064 \pm 0,0005)$ mW

Tab 4.1c Dati amperometro analogico

I	$(11,0 \pm 0,1)$ mA
R_{i3}	(7 ± 1) Ω
P₃	$(0,09 \pm 0,02)$ mW

4.2 Seconda parte

In appendice A1 è riportata la tabella in cui sono indicati i valori sperimentali di tensione e corrente e quelli ricavati della resistenza R , applicando la (3), e della potenza P dissipata della lampadina mediante l'espressione $P = VI$ (4).

La relazione tra potenza P e resistenza R è data da:

$$P = mR^q \quad (5)$$

dove m è un coefficiente, mentre l'esponente q è pari a 4γ , γ è una costante che dipende dal materiale. La (5) si ottiene sostituendo la relazione (6) nella legge del corpo nero (7):

$$R = R_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^b \rightarrow T = \beta R^\gamma \quad (6)$$

$$P = e\sigma A_s(T^4 - T_0^4) \quad (7)$$

dove nella (6) R è la resistenza, T è la temperatura riferita al tungsteno, mentre nella (7) e è l'emissività caratteristica del materiale, σ è la costante di Stefan-Boltzmann ed A_s superficie del filo.

Nello studio si trascura il valore della temperatura iniziale T_0 del filamento prima che sia collegato al generatore di tensione.

Si osservi che tanto più il valore di γ nella (6) è uguale ad I tanto più la relazione tra T ed R è lineare ed il valore dell'esponente q della (5) tende a $q_L = 4$.

❖ Stima di q

La fig.4.2a illustra la relazione tra la potenza P determinata ai capi della lampadina e la relativa resistenza R , stimata dalla (3). La relazione ipotizzata impiegata per il fit dei dati sperimentali è:

$$P = p_0(R + p_1)^{p_2} \quad (8)$$

dove, facendo riferimento alla (5), si associa p_0 al coefficiente m e p_2 all'esponente q . Ci si aspetta che il parametro p_1 sia nullo. Per verificare che la relazione funzionale (8) sia corretta, si applica un test del χ^2 .

Il valore del χ^2 ottenuto è $\chi^2 = 6,94$ con numero di gradi di libertà pari a 21. Considerando un livello di significatività $\alpha = 5\%$, essendo il $\chi^2 < \chi^2_{\text{critico}}$ se ne deduce che la relazione (8) descriva adeguatamente i dati sperimentali.

I parametri di fit ricavati sono i seguenti:

$$p_0 = (12 \pm 6) \cdot 10^{-6} \frac{mW}{\Omega^{p_2}} \quad p_1 = (0 \pm 1) \Omega \quad p_2 = (3,82 \pm 0,06)$$

Pertanto, il valore di q cercato è: $q_1 = (3,82 \pm 0,06)$. Il parametro p_1 risulta consistente con lo zero.

È possibile ricavare il valore di q anche dall'espressione (9):

$$I = s \cdot V^{\frac{(q-1)}{(q+1)}} \quad (9)$$

dove s è un coefficiente e V è la tensione misurata. La (9) si ottiene combinando le relazioni (5), (6) e la legge di Ohm (3). Essa esprime la relazione tra corrente e tensione $I(V)$ della lampadina. Verifichiamo la sua validità ipotizzando che la relazione funzionale H_0 sia:

$$I = p_0 \cdot V^{p_1}$$

dove p_0 è s e p_1 è l'esponente. La fig.4.2b mostra il trend dei dati sperimentali.

Il χ^2 ottenuto è 12,54 con 22 gradi di libertà. Poiché il $\chi^2 < \chi^2_{\text{critico}}$ con $\alpha = 5\%$, l'ipotesi H_0 è accettata e, pertanto, la (9) descrive efficacemente le misure. I parametri di fit ricavati sono i seguenti:

$$p_0 = (22,5 \pm 0,2) \frac{mA}{V^{p_1}} \quad p_1 = (0,587 \pm 0,004).$$

Pertanto, il valore di q cercato è: $q_2 = \frac{1+p_1}{1-p_1} \rightarrow q_2 = (3,84 \pm 0,05)$.

Si osservi che i valori q_1 e q_2 sono tra di loro consistenti.

Si rende, dunque, necessario applicare due test di Gauss. Il primo si utilizza per confrontare q_1 e q_2 con q_L , al fine di verificare che l'ipotesi di linearità tra T e R della (6) sia valida. Con il secondo, invece, si intende valutare la consistenza di q_1 e q_2 con il $q_{\text{teorico}} = 4 \cdot \gamma^{[1]} = 3,3084$ ricavato dalla letteratura.

Entrambi i due test di Gauss falliscono. Ciò può essere giustificato dalla presenza di pochi dati e da una possibile sottostima dell'errore, che hanno reso difficile soddisfare i criteri di compatibilità dei test.

❖ Studio del fit polinomiale di ordine 4

Al fine di trovare la migliore espressione che lega la potenza P e la resistenza R , si ipotizza che la relazione funzionale $P(R)$ sia una polinomiale di ordine 4 del tipo:

$$P = p_0 R^4 + p_1 R^3 + p_2 R^2 + p_3 R + p_4$$

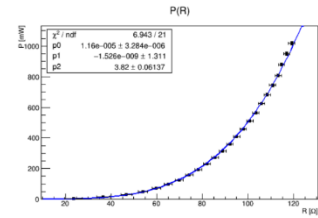


Fig.4.2a Grafico di $P(R)$ secondo la relazione funzionale (8).

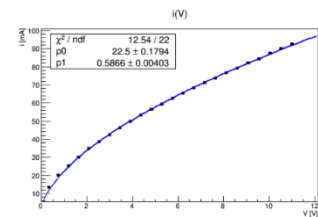


Fig. 4.2b Grafico di $I(V)$ secondo la relazione (9).

con parametri p_1 , p_2 , p_3 e p_4 che, come mostrato dalla (5), ci si aspetta siano compatibili con lo zero. Il χ^2 ottenuto è $\chi^2 = 0,71$ con 19 gradi di libertà. Considerando un livello di significatività $\alpha = 5\%$, il $\chi^2 < \chi^2_{\text{critico}}$: l'ipotesi è accettata.

Si osservi che il χ^2 ottenuto è indice di un intenso *overfitting*, che si deve essenzialmente all'alto numero di parametri, visibile nel grafico riportato in A2. I parametri di fit ricavati sono i seguenti:

$$p_0 = (76 \pm 5) \cdot 10^{-7} \frac{\text{mW}}{\Omega^4} \quad p_1 = (63 \pm 8) \cdot 10^{-5} \frac{\text{mW}}{\Omega^3} \quad p_2 = (0,05 \pm 0,01) \frac{\text{mW}}{\Omega^2}$$

$$p_3 = (-1,3 \pm 0,8) \frac{\text{mW}}{\Omega} \quad p_4 = (0,1 \pm 0,1) \text{ mW}$$

Si effettuano, infine, dei test di Gauss per la compatibilità di p_1 , p_2 , p_3 e p_4 con lo zero. L'esito del test è positivo per i parametri di fit p_3 e p_4 , ma è, tuttavia, negativo per p_1 e p_2 . Ciò evidenzia che la polinomiale di ordine 4 non descrive correttamente l'espressione teorica (5).

❖ Studio della quartica $P(R)$

Per questa parte dell'analisi si impone che la relazione tra la temperatura T e la resistenza R sia lineare fissando, quindi, nella (5) l'esponente $q = 4$. L'espressione $P(R)$ diventa, dunque, una quartica del tipo:

$$P = a \cdot R^4 \quad (11)$$

La fig.4.2c mostra il fit dei dati sperimentali.

Il χ^2 ottenuto è 13,8 con 23 gradi di libertà. Considerando un livello di significatività $\alpha = 5\%$ il $\chi^2 < \chi^2_{\text{critico}}$ e, dunque, la regressione effettuata descrive bene i dati sperimentali. Il parametro ricavato dal fit è: $a = (507 \pm 7) \cdot 10^{-8} \frac{\text{mW}}{\Omega^4}$.

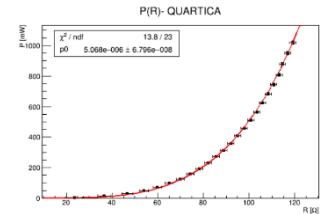


Fig.4.2c: Grafico di $P(R)$ secondo la relazione funzionale (11).

Si può modificare la relazione (11) in questo modo: $P = a(R - b)^4$, dove b rappresenta R_0 . Ci si aspetta che tale parametro sia nullo data l'approssimazione posta su T_0 , dichiarata all'inizio dell'analisi. Effettuando un fit si ottiene $\chi^2 = 4,39$ con 22 gradi di libertà. Essendo $\chi^2 < \chi^2_{\text{critico}}$ con $\alpha = 5\%$, l'ipotesi funzionale è accettata. I parametri di fit ricavati sono i seguenti: $a = (43 \pm 3) \cdot 10^{-7} \frac{\text{mW}}{\Omega^4}$ $b = (-4 \pm 1) \Omega$.

Eseguendo un test di Gauss tra b e 0, si ottiene esito negativo. Ciò può essere giustificato dal fatto che la resistenza R_0 della lampadina a freddo non è del tutto trascurabile. Tenendo conto dei pochi dati a disposizione e dell'ultimo χ^2 indice di *overfitting*, si ritiene sia più indicato rigettare quest'ipotesi funzionale, considerando più idonea la (11) formulata sotto le premesse iniziali.

5. Conclusione

La prima parte dell'esperienza ha consentito di verificare come atteso che la resistenza interna di un voltmetro è molto grande, dell'ordine di $10^7 \Omega$ per il digitale e $10^6 \Omega$ per l'analogico. Si osservi che la resistenza interna di un voltmetro digitale è maggiore di quella dell'analogico, ciò evidenzia la maggior precisione dello strumento digitale. Invece la resistenza interna di un amperometro è dell'ordine del Ω .

Il primo obiettivo dello studio era verificare la relazione funzionale (9) tra corrente I e tensione V ai capi della lampadina. Il risultato del test del χ^2 , relativo al fit in fig.4.2b, conferma la sua validità.

L'analisi condotta sulle relazioni tra $P(R)$ e $I(V)$, ha permesso di ricavare due valori di q consistenti tra loro, ma non con il q_{teorico} e con q_L atteso, secondo le approssimazioni di linearità tra T e R e di trascurabilità del termine T_0 . Nonostante ciò, si noti che i test del χ^2 effettuati sulle ipotesi funzionali (8) e (11) hanno esito positivo, pertanto, le relazioni funzionali sono accettabili con un q sperimentale di 3,84, confermando la legge di Stefan-Boltzmann.

6. Riferenze

[1] Ahmad, Imtiaz, Sidra Khalid, and Ehsan Khawaja. "Filament temperature of low power incandescent lamps: Stefan-Boltzmann law." (2010).

7. Appendici

A1. Dati seconda parte

Dati seconda parte acquisiti facendo variare la tensione V_{gen} con passo di 0,5 V

Vgen [V]	V [V]	$\pm\sigma_V$ [V]	I [mA]	$\pm\sigma_I$ [mA]	R [Ω]	$\pm\sigma_R$ [Ω]	P [W]	$\pm\sigma_P$ [W]
0,0	0	0,05	0,30	0,05	0		0	
0,5	0,32	0,05	13,6	0,1	24	4	0,0	0,2
1,0	0,74	0,05	20,2	0,2	37	3	0,01	0,08
1,5	1,18	0,05	25,3	0,2	47	2	0,03	0,05
2,0	1,63	0,05	30,2	0,2	54	2	0,05	0,04
2,5	2,08	0,05	34,8	0,2	60	2	0,07	0,03
3,0	2,53	0,05	38,8	0,2	65	2	0,10	0,03
3,5	2,98	0,05	42,6	0,3	70	2	0,13	0,02
4,0	3,44	0,05	46,3	0,3	74	2	0,16	0,02
4,5	3,90	0,05	49,9	0,3	78	2	0,19	0,02
5,0	4,37	0,05	53,2	0,3	82	2	0,23	0,02
5,5	4,83	0,05	56,4	0,3	86	1	0,27	0,02
6,0	5,29	0,06	59,5	0,3	89	1	0,31	0,02
6,5	5,76	0,06	62,6	0,4	92	1	0,36	0,02
7,0	6,22	0,06	65,5	0,4	95	1	0,41	0,01
7,5	6,69	0,06	68,4	0,4	98	1	0,46	0,01
8,0	7,17	0,06	71,2	0,4	101	1	0,51	0,01
8,5	7,64	0,06	73,9	0,4	103	1	0,56	0,01
9,0	8,12	0,06	76,8	0,4	106	1	0,62	0,01
9,5	8,60	0,06	79,4	0,4	108	1	0,68	0,01
10,0	9,08	0,06	82,0	0,5	111	1	0,74	0,01
10,5	9,56	0,06	84,5	0,5	113	1	0,81	0,01
11,0	10,04	0,06	87,6	0,5	115	1	0,88	0,01
11,5	10,53	0,06	90,1	0,5	117	1	0,95	0,01
12,0	11,01	0,06	92,5	0,5	119	1	1,02	0,01

A2. Grafici relativi ai fit della seconda parte dell'analisi dati

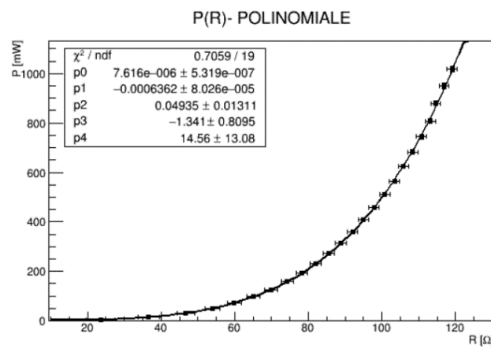


Fig. A2.a Grafico di $P(R)$ secondo la polinomiale di ordine 4

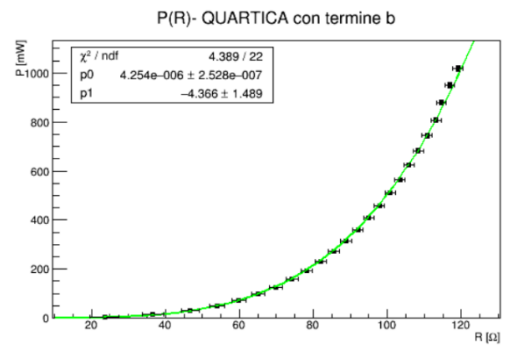


Fig. A2.b Grafico di $P(R)$ secondo la quartica con il parametro b