

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. Poggendorff, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 9.

DER GANZEN REIHE 314. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT

UND INSBESENDERE VON

M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT FÜNF FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1902.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

19. Ueber Stromverzweigung in netzförmigen Leitern; von W. Feussner.

Für die Berechnung der Stromstärke in netzförmig ver-
bundenen Drähten bilden die bekannten von Kirchhoff¹⁾ auf-
gestellten Sätze die Grundlage. Sie gestatten in jedem Fall,
ein System von linearen Gleichungen zu bilden, aus denen die
Stromstärke in jedem Zweig als Quotient zweier Determinanten
erhalten wird. Aber die unmittelbare Ausrechnung dieser
Determinanten ist häufig, wenn die Verhältnisse nicht ganz
einfach sind, recht umständlich und beschwerlich und führt
wegen der Menge der zu bildenden Glieder und der zu be-
achtenden Vorzeichen nicht selten zu Irrtümern. Es ist daher
wünschenswert, leichtere und sicherere Wege zu kennen, um die
gesuchten Größen zu erhalten.

1. Kirchhoff hat selbst in dem Aufsatz: „Ueber die Au-
lösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung
der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird“²⁾
zwei Sätze über die Bildung der Nenner und Zähler der Aus-
drücke für die Stromstärken gegeben, die (mit unwesentlichen
Änderungen) folgendermaassen lauten:

„Es sei n die Zahl der Drähte, $w_1, w_2 \dots w_n$ ihre Wider-
stände, m die Anzahl der vorhandenen Kreuzungspunkte, d. h.
der Punkte, in denen drei oder mehr Drähte zusammenstossen,
und es sei $\mu = n - m + 1$, dann ist, vorausgesetzt, dass das
gegebene System von Drähten nicht in mehrere voneinander
getrennte zerfällt:

A. der gemeinschaftliche Nenner aller Stromstärken $i_1 \dots i_\mu$
die Summe derjenigen Combinationen von $w_1, w_2 \dots w_n$ zu je
 μ Elementen, welche die Eigenschaft haben, dass nach Fort-
nahme ihrer Drähte *keine geschlossene Figur übrig bleibt*,
und es ist

1) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 64. p. 512. 1845; Ges. Abh. p. 15.

2) G. Kirchhoff, Pogg. Ann. 72. p. 497. 1847; Ges. Abh. p. 22.

B. der Zähler von i_λ die Summe derjenigen Combinationen von $w_1, w_2 \dots w_n$ zu je $\mu - 1$ Elementen, welche die Eigenschaft haben, dass nach Fortnahme ihrer Drähte eine geschlossene Figur übrig bleibt, und dass in dieser λ vorkommt, eine jede Combination multiplicirt mit der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche sich auf der zugehörigen geschlossenen Figur befinden. Die elektromotorischen Kräfte sind hierbei in der Richtung als positiv zu rechnen, in der i_λ als positiv gerechnet ist.“

Diese wichtigen Sätze geben ein von der Berechnung der Determinanten unabhängiges Verfahren zur Bildung der Ausdrücke für die Stromstärken an; allein da sie keinen leichten Weg zur Auswahl der aufzunehmenden Combinationen aus der häufig sehr grossen Zahl aller möglichen zeigen, und infolge dessen auch die Vollständigkeit der aufgestellten Summen nicht selten zweifelhaft erscheinen kann, so haben sie bei den Physikern meines Wissens keine Anwendung gefunden. Das spricht sich auch darin aus, dass sie selbst in ausführlichen Handbüchern, wie z. B. dem von Wüllner, ja sogar in dem grossen Specialwerk über Elektricität von Wiedemann gar nicht angeführt werden.

Man sieht sich also, wenn man die Stromstärken in einem Netz von Drähten finden will, immer noch auf die Ausrechnung der erwähnten Determinanten angewiesen, und auch die neuere mathematische Behandlung der Sätze A. und B. von W. Ahrens¹⁾ hat ihre praktische Anwendung kaum erleichtert. Es scheint daher nicht ohne Nutzen zu sein, wenn ich im Folgenden ein Verfahren abzuleiten versuche, das die Functionen von denen die Stromstärken in sämtlichen Linien eines beliebigen Drahtnetzes abhängen und die zur Lösung anderer damit zusammenhängender Fragen erforderlich sind, durch ein einfaches schrittweises Vorgehen finden lässt.

2. Unter einem Drahtnetz (Netzwerk, System von Drähten oder Linien) soll eine Verbindung von beliebig gestalteten Drähten (deren Querschnitt als verschwindend betrachtet wird) verstanden werden, die die Eigenschaft hat, dass man von jedem Punkt des Netzes auf seinen Linien zu jedem andern

1) W. Ahrens, Math. Ann. 49. p. 311. 1897.

Punkt desselben gelangen kann, d. h. dass das Netz zusammenhängt. Es wird sich bei unseren Betrachtungen auch nur um Netze handeln, in denen keine freien Enden, d. h. Punkte, von denen man nur in *einer* Richtung ausgehen kann, vorkommen; wir nennen sie geschlossene Netze. Man kann also von einem jeden Punkt eines solchen mindestens nach zwei Richtungen ausgehen; diejenigen Punkte, von denen man nach drei oder mehr Richtungen ausgehen kann, nennen wir Verzweigungspunkte und zwar nach der Anzahl der in ihnen zusammenlaufenden Linien dreifache, vierfache etc. Verzweigungspunkte (oder Verzweigungspunkte dritter, vierter . . . Ordnung). Die Drähte als Bildungsstücke des Netzes rechnen wir immer von einem Verzweigungspunkt bis zum nächsten, sodass, wenn in einem Verzweigungspunkt die drei Drähte a , b , c zusammgestossen und der eine, z. B. a , aus dem Netz weggenommen wird, wodurch auch dieser Verzweigungspunkt verschwindet, die beiden anderen für die weitere Betrachtung als *ein* Draht ($b + c$) angesehen werden. Kann jedes Punktpaar des Netzes durch zwei vollständig getrennte Linienzüge verbunden werden, so nennen wir das Netz ein vollkommenes, ist das nicht der Fall, ein unvollkommenes. Jedes unvollkommene Netz besteht aus zwei oder mehr sich berührenden vollkommenen Netzen (Teilnetzen, im Grenzfall geschlossenen Einzelleitern); die Berührung kann in einem Punkt, der dann mindestens ein vierfacher Verzweigungspunkt ist, oder vermittelst einer Linie, der Verbindungsleitung, stattfinden. Die Punkte, wo die Teilnetze sich berühren oder wo die Verbindungsleitung sie trifft, nennen wir Verbindungspunkte. Einfachste Fälle unvollkommener

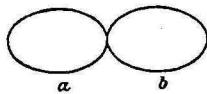


Fig. 1.



Fig. 2.

Netze sind in den Figg. 1 und 2 dargestellt. Wird ein weiterer Verbindungsdräht zwischen zwei Punkten verschiedener Teilnetze angebracht, so verwandeln sich diese nebst etwa noch zwischen ihnen liegenden Teilnetzen in ein vollkommenes Netz. Verbindungsleitungen oder -drähte nennen wir also auch in vollkommenen Netzen solche, durch deren Wegnahme diese in

unvollkommene Netze übergehen, z. B. in Fig. 3 die Drähte a , b , c und e . Als zusammengehörig bezeichnen wir Verbindungslien, wenn die durch Wegnahme einer derselben entstehenden Teilnetze durch die anderen verbunden werden. So entstehen in Fig. 3 durch Wegnahme von a die drei Teilnetze I, II und (IIIa, IIIb), die durch b und c verbunden sind, a , b und c sind also zusammengehörige Verbindungslien; durch Wegnahme von e entstehen zwei Teilnetze, die durch d verbunden sind, d und e sind zusammengehörig. Ausserdem kann sich ein vollkommenes Netz auch durch Aufeinanderlegung zweier Punkte in ein unvollkommenes verwandeln; dann nämlich, wenn es möglich ist, durch das Netz eine geschlossene oder eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche so zu legen, dass sie nur *zweimal* geschnitten wird. Werden diese zwei Schnittpunkte des Netzes vereinigt, so ist dieses jetzt in zwei Teile zerfallen, die sich nur in diesem einen Punkt berühren, so z. B. wenn in Fig. 3 die Punkte A und A' vereinigt werden. Natürlich kann man dies immer bei zwei Punkten desselben Drahtes ausführen, ob es aber bei Punkten verschiedener Drähte möglich ist, hängt von der Beschaffenheit des Netzes ab.

Der Begriff der stationären Strömung führt, wie leicht zu sehen, ebenso wie zu dem Kirchhoff'schen Satz über die Verzweigungspunkte zu der Folgerung, dass in unvollkommenen Netzen die einzelnen Teilnetze ganz unabhängig voneinander sind, sodass durch ihre Loslösung an den Berührungs punkten oder den Verbindungsdrähten bezüglich der Stromverteilung in ihnen nichts geändert wird. Wir haben also bei unserer Betrachtung von vollkommenen Netzen auszugehen.

3. Ich erinnere zunächst an die bekannten Eigenschaften der Kirchhoff'schen Gleichungen und der bei ihrer Lösung zu bildenden Determinanten.

Wenn das Netz aus n Drähten von den Widerständen $w_1, w_2 \dots w_n$ mit m Verzweigungspunkten und beliebig verteilten elektromotorischen Kräften E besteht, die Stromstärken in den einzelnen Drähten durch $i_1, i_2 \dots i_n$ bezeichnet werden und

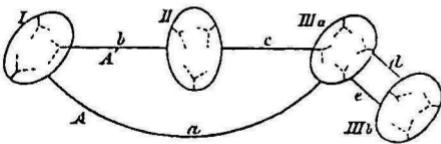


Fig. 3.

$a, b, c \dots$ solche Zahlen aus der Reihe $1 \dots n$ sind, dass die ihnen entsprechenden Drähte einen geschlossenen Kreis in dem Netz bilden, so bestehen nach dem ersten Kirchhoff'schen Satze für $\mu = n - m + 1$ solcher Kreise μ Gleichungen von der Form

$$(1) \quad w_a i_a + w_b i_b + w_c i_c + \dots = E_a + E_b + E_c + \dots,$$

wobei in jedem Kreis sowohl die i als die E in derselben, übrigens beliebigen Umlaufsrichtung positiv zu rechnen sind. Es bestehen ferner nach dem zweiten Kirchhoff'schen Satze, wenn $i_a, i_\beta, i_\gamma \dots$ die Stromstärken der in einem Verzweigungspunkt zusammentreffenden Drähte bezeichnen, $m - 1$ Gleichungen von der Form

$$(2) \quad i_a + i_\beta + i_\gamma + \dots = 0,$$

wobei die i der nach dem Verzweigungspunkt hin gerichteten Ströme mit dem einen, die der weggerichteten mit dem entgegengesetzten Vorzeichen zu versehen sind. Die $w_1, w_2 \dots w_n$ sowie die E sind als gegeben anzusehen, während die $i_1, i_2 \dots i_n$ die gesuchten, durch diese n linearen Gleichungen eindeutig bestimmten Grössen sind.

Nach bekannten Regeln ergeben sich die Werte der i als Brüche, deren Nenner und Zähler gewisse aus den Constanten der Gleichungssysteme (1) und (2) gebildete Determinanten sind. Sämtliche i haben einen und denselben Nenner, nämlich die aus den Coefficienten der i auf den linken Seiten der Gleichungen (1) und (2) gebildete Determinante. Bezeichnen wir durch $\epsilon_{11}, \epsilon_{12} \dots \epsilon_{nn}$ Grössen, die je nach den Umständen $+1, -1$ oder 0 bedeuten, so können wir diese Determinante, die wir durch N bezeichnen wollen, schreiben:

$$\begin{array}{cccccc|c} \epsilon_{11} & w_1 & \epsilon_{12} & w_2 & \epsilon_{13} & w_3 & \dots & \epsilon_{1n} & w_n \\ \epsilon_{21} & w_1 & \epsilon_{22} & w_2 & \epsilon_{23} & w_3 & \dots & \epsilon_{2n} & w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_{\mu 1} & w_1 & \epsilon_{\mu 2} & w_2 & \epsilon_{\mu 3} & w_3 & \dots & \epsilon_{\mu n} & w_n \\ \epsilon_{(\mu+1)1} & w_1 & \epsilon_{(\mu+1)2} & w_2 & \epsilon_{(\mu+1)3} & w_3 & \dots & \epsilon_{(\mu+1)n} & w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \epsilon_{n1} & w_1 & \epsilon_{n2} & w_2 & \epsilon_{n3} & w_3 & \dots & \epsilon_{nn} & w_n \end{array} = N.$$

Die Gestalt dieser Determinante zeigt, dass N eine homogene Function μ^{ten} Grades der w ist, in der jedes einzelne w , da es nur in einer und derselben Columnne der Determinante vorkommt, immer nur linear enthalten ist.

Der Zähler irgend eines i , z. B. von i_h , wird aus N dadurch erhalten, dass die h^{te} Column durch die rechten Seiten der Gleichungen (1) und (2) ersetzt wird; die letzten $m - 1$ Glieder dieser Columnen werden also Null, die ersten μ dagegen algebraische Summen der in den entsprechenden Kreisen enthaltenen E . Entwickeln wir die Determinante, so ergibt sich der Zähler von i_h als homogene lineare Function der E und die Coefficienten derselben sind homogene Functionen $\mu - 1^{\text{ten}}$ Grades der w , worin die einzelnen w nur linear vorkommen; w_h jedoch kommt in den Coefficienten überhaupt nicht vor, denn in N konnte es nur in den μ ersten Gliedern der h^{ten} Columnne enthalten sein, und diese sind durch die E ersetzt. Dieses Ergebnis bezüglich der Gestalt des alle i vertretenden i_h lässt sich auch so aussprechen: Wenn in einem beliebigen Drahtnetz elektromotorische Kräfte beliebig verteilt sind, so ist die Stromstärke in jedem einzelnen Draht die algebraische Summe der Stromstärken, welche jede einzelne elektromotorische Kraft allein wirkend darin erzeugt. Dieser Satz, den man als den von der Uebereinanderlagerung elektrischer Ströme bezeichnet, ist also nichts von den Kirchhoff'schen Sätzen Verschiedenes, sondern bildet einen untrennbar Bestandteil derselben. Die allgemeine Aufgabe ist damit auf die einfachere zurückgeführt, die Stromstärken in einem beliebigen Netz bei der Wirkung nur einer elektromotorischen Kraft E zu bestimmen. Mit dieser beschäftigen wir uns daher im Folgenden.

4. Die Entwicklung könnte rein mathematisch geführt werden, indessen ist es einfacher und besonders für den Physiker anschaulicher, wenn einige ganz einfache physikalische Sätze dabei benutzt werden. Ich stelle sie voran:

a) Eine endliche elektromotorische Kraft kann in einem Netz, das keinen geschlossenen Kreis von unendlich kleinem Widerstand enthält, nirgends eine unendlich grosse Stromstärke erzeugen.

b) Wird einem Draht ein unendlich grosser Widerstand gegeben, so ist das gleichbedeutend mit seiner Wegnahme aus dem Netz.

c) Wird der Widerstand eines Drahtes unendlich klein (Null) gemacht, so ist das gleichbedeutend damit, dass er hinweggenommen und die beiden Punkte des Netzes, die er verband, aufeinandergelegt werden.

d) Enthält der Draht, dessen Widerstand unendlich gross gemacht wird, die elektromotorische Kraft des Netzes, so ist die Stromstärke in allen Drähten Null.

5. *Bestimmung der Nenner.* Wir haben schon oben gesehen, dass sämtliche i in den Drähten eines Netzes durch die Auflösung des sie bestimmenden Gleichungssystems einen und denselben Nenner N erhalten. Der Einfachheit des Ausdruckes halber wollen wir ihn das N des betreffenden Netzes nennen. Wir haben seine Determinantenform angegeben und aus ihr geschlossen, dass N eine homogene Function μ^{10} Grades der w sein muss, worin die einzelnen w nur linear vorkommen. Es muss aber auch jedes w darin vorkommen; denn wir können uns E in jeden Draht des Netzes eingesetzt denken, lassen wir dann den Widerstand dieses Drahtes unendlich werden, so muss nach (d) die Stromstärke in jedem Draht Null werden; dass aber der Ausdruck für i durch Unendlichwerden eines bestimmten w Null wird, ist nur dann möglich, wenn dieses w in N enthalten ist.

Es werde nun der Widerstand eines Drahtes a durch w_a bezeichnet, der des übrigen Netzes (ohne a) zwischen den Endpunkten von a durch W_a , welches demnach unabhängig von w_a eine Function der Widerstände der übrigen Drähte ist. Nehmen wir E in a an, so ist

$$(3) \quad i_a = \frac{E}{w_a + W_a}.$$

Da aber jedes i ein Bruch mit dem Nenner N sein muss, so muss eine Erweiterung des Bruches in (3) ihn in diese Form bringen; d. h. es muss sein

$$(4) \quad (w_a + W_a) N_a = N.$$

Nach dem oben über N Gesagten folgt aus Gleichung (4), dass N_a eine homogene Function $\mu - 1^{\text{st}}$ Grades der Widerstände ohne w_a ist; ferner dass W_a ein Bruch ist mit dem Nenner N_a und einem Zähler, den wir durch $N_{a'}$ bezeichnen wollen, und der

eine homogene Function μ^{ten} Grades der Widerstände ohne w_a ist. Wir haben also

$$(5) \quad W_a = \frac{N_{a'}}{N_a}$$

und

$$(6) \quad N = w_a N_a + N_{a'}.$$

N geht dadurch in $N_{a'}$ über, dass $w_a = 0$ gemacht wird; nach Satz c) ist also $N_{a'}$ das N eines Netzes, das aus dem gegebenen dadurch entsteht, dass a entfernt und seine beiden Anknüpfungspunkte am Netz aufeinander gelegt werden. Verwandelt sich dabei das vorher vollkommene Netz in ein unvollkommenes. so ist $N_{a'}$ das Product der N der Teilnetze. Denn je nachdem man E in einem Draht annimmt, der nach der angegebenen Aenderung zu dem einen oder anderen Teilnetz gehört, muss das N des ursprünglichen Netzes in das N dieses Teilnetzes übergehen. Damit das aber möglich sei, muss $N_{a'}$ aus dem Product der N sämtlicher Teilnetze bestehen. Dass es auch keinen weiteren Factor enthalten kann, geht aus der Vergleichung seines Grades mit dem dieses Productes hervor.

Wird ferner $w_a = \infty$ gesetzt, was nach b) gleichbedeutend mit Entfernung des Drahtes a ist, so bleiben in Zähler und Nenner der i nur die mit w_a behafteten Glieder stehen. Nach (6) ist also N_a das N eines Netzes, das aus dem gegebenen durch Wegnahme von a entsteht. Ist das ein unvollkommenes, so ist aus dem gleichen Grunde wie vorhin N_a das Product der N der Teilnetze. Das Gesagte lässt sich in dem Satz zusammenfassen:

Das N eines beliebig gegebenen Netzes ist eine Summe, deren einer Summand der Widerstand w_a eines beliebigen Drahtes a des Netzes multiplicirt mit dem (durch N_a bezeichneten) N eines Netzes ist, das aus dem gegebenen durch Wegnahme von a entsteht, und dessen anderer Summand das (durch $N_{a'}$ bezeichnete) N eines Netzes ist, das aus dem gegebenen durch Wegnahme von a und Zusammenlegung der beiden Netzpunkte entsteht, die a verband.

Durch wiederholte Anwendung dieses Satzes wird die Bildung des Nenners der i für ein gegebenes Netz auf die Betrachtung immer einfacherer Netze zurückgeführt und so in regelmässigem Fortschreiten der gesuchte Ausdruck gebildet. Es tritt kein überflüssiges Glied auf, wie das bei der Berechnung

der Determinante häufig so lästig ist, und es ist hier aus der Bildungsweise von N von vornherein klar, dass es kein mit dem negativen Vorzeichen versehenes Glied enthalten kann, was bei dem anderen Verfahren keineswegs sofort einleuchtet. Wie man in vielen Fällen mittels weiterer Sätze und durch die Benutzung bekannter N einfacherer Netze, auf die das gegebene zurückführbar ist, die Rechnung noch mehr abkürzen kann, wird sich hernach zeigen.

6. Der eingeschlagene Weg hat uns in Gleichung (5) zu einer sehr allgemeinen Formel geführt, die häufig angewandt werden kann. Sie bezog sich auf den Widerstand des Netzes zwischen den Endpunkten des Drahtes a ; in der Formel (5) kommt aber offenbar gar keine Beziehung auf den Draht a mehr vor, wir können daher auch ganz allgemein den Satz aussprechen:

Der Widerstand eines beliebig verzweigten (vollkommenen) Netzes zwischen zwei gegebenen Punkten A und B wird erhalten, indem man das N dieses Netzes dividirt in das N eines Netzes, das aus ihm durch Vereinigung der Punkte A und B hervorgeht.

Für den Widerstand eines unvollkommenen Netzes ergibt sich leicht weiter:

Der Widerstand eines unvollkommenen Netzes zwischen zwei Punkten A und B ist die Summe der Widerstände der von dem Wege zwischen A und B berührten Teilnetze, jedesmal genommen zwischen den Verbindungspunkten (bez. zwischen einem der gegebenen Punkte [A und B] und dem auf dem Wege nach dem andern gelegenen Verbindungspunkt desselben Teilnetzes) vermehrt um die Summe der Widerstände der zwischenliegenden Verbindungsdrähte.

7. Bei der Bildung der Nenner nach Gleichung (6) ist der schon oben hervorgehobene Umstand zu beachten, dass, wenn ein aus dem Netz entfernter Draht an einem oder beiden Enden in einen dreifachen Verzweigungspunkt auslief, diese Punkte bei der Bildung der N mit den ungestrichenen Indices aufhören Verzweigungspunkte zu sein. Wir werden also, wenn wir von der Gleichung (6) aus weiter gehen, indem wir einen zweiten Draht b entfernen, in dem Fall, dass dieser sich überhaupt nicht oder nicht in einem dreifachen Verzweigungspunkt an a anschliesst, zu setzen haben

$$N = w_b N_{ab} + w_a N_{ab'} + w_b N_{a'b} + N_{a'b'},$$

wobei die Bedeutung der ungestrichenen und gestrichenen Indices b die entsprechende ist, wie die der a . Wenn dagegen b sich in einem dreifachen Verzweigungspunkt (mit c) an a anschliesst, so ist

$$N = w_a (w_b + w_c) N_{a(b+c)} + w_a N_{a(b+c)\prime} + w_b N_{a'b} + N_{a'b'}.$$

So kann man in leicht ersichtlicher Weise fortschreiten, und es ist unnötig, weitere Formeln dafür aufzustellen.

8. Häufig wird die Bildung des N besonders einfach, wenn man die zu entfernenden Drähte möglichst so wählt, dass das Netz ein unvollkommenes wird. Dabei kann man einen Satz benutzen, den wir an dem in Fig. 3 dargestellten Fall ableiten wollen. Es werde bei der Aufstellung des N hierfür zunächst der Verbindungsdräht a entfernt; es seien W_1 , W_{11} , W_{111} die Widerstände der dann entstehenden Teilnetze I, II und (IIIa, IIIb) zwischen den Verbindungspunkten an a , b und c , ferner N_1 , N_{11} , N_{111} die N derselben Teilnetze und N_1' , N_{11}' , N_{111}' die N von Netzen, welche aus den ebengenannten Teilnetzen durch Aufeinanderlegen der Verbindungspunkte jedes einzelnen entstehen. Dann erhält man aus Gleichung (4) und (5) in Verbindung mit dem oben in 6. abgeleiteten Satz über den Widerstand eines unvollkommenen Netzes

$$N = (w_a + w_b + w_c + W_1 + W_{11} + W_{111}) N_1 N_{11} N_{111}$$

und unter Benutzung des Satzes vom Widerstand vollkommener Netze:

$$\begin{aligned} N = & (w_a + w_b + w_c) N_1 N_{11} N_{111} + N_1' N_{11} N_{111} + N_1 N_{11'} N_{111} \\ & + N_1 N_{11} N_{111}'. \end{aligned}$$

Es ist leicht zu sehen, dass diese Formel sofort verallgemeinert und auf ein beliebiges Netz angewandt werden kann, sodass wir den Satz haben:

Das N eines (vollkommenen) Netzes, das in Teilnetze mit oder ohne Verbindungsdrähte zerlegt werden kann, ist eine Summe, deren erster Summand aus dem Product der Summe der Widerstände der zusammengehörigen Verbindungsdrähte mit den N aller Teilnetze besteht, während die folgenden Summanden Producte derselben N sind, worin jedesmal das N eines Teilnetzes durch dasjenige desselben Netzes mit vereinigten Berührungs punkten ersetzt ist.

Die zusammengehörigen Verbindungsdrähte in einem vollkommenen Netz bilden nebst den zwischenliegenden Teilnetzen einen geschlossenen Kreis, dessen Gesamtwiderstand, von einem Punkt eines Verbindungsdrähtes bis wieder zu demselben gerechnet, dem letzten Satz gemäss gleich ist dem N des ganzen Netzes dividirt durch das Product der N aller Teilnetze.

9. *Bestimmung der Zähler.* Wir wollen den Draht, in welchem sich die elektromotorische Kraft E befindet, mit a bezeichnen; dann ist, wie die Vergleichung von (3) und (4) ergiebt, der Zähler des Bruches Z/N , welcher mit E multiplicirt die Stromstärke i_a in diesem Draht giebt, gleich N_a . Dies ist nach dem Vorstehenden sofort angebbar.

Um den Zähler des Ausdrückes für die Stromstärke i_k in einem anderen Draht k zu finden, verfahren wir folgendermaassen. Wir denken uns jeden einzelnen der den Draht a enthaltenden geschlossenen Kreise $K_1, K_2 \dots K_p$ von einem constanten Strom von der Intensität $J_1, J_2 \dots J_p$ in der Richtung der Strömung von a durchflossen. Das auf die Verzweigungspunkte bezügliche Kirchhoff'sche Gesetz $\sum i_h = 0$ wird offenbar von der Gesamtheit dieser Ströme bei beliebigen Werten der J erfüllt. Wir wollen diese nun aber so bestimmen, dass in jedem Draht des Netzes die Summe der durch ihn fliessenden J die darin herrschende Stromstärke i ergiebt. Dann muss zunächst die Bedingung

$$\sum J = i_a$$

für jede Widerstandsverteilung in dem Drahtnetz erfüllt sein. Das ist der Fall, wenn wir setzen

$$J_f = \frac{Z_f E}{N} \text{ und } \sum Z_f = N_a.$$

Es ist also Z_f aus Gliedern von N_a zusammenzusetzen. Damit diese im allgemeinen noch auf sehr verschiedene Art mögliche Zusammensetzung die wirkliche Stromverteilung ergebe, benutzen wir, dass die Wegnahme irgend eines Drahtes die Kreise K , die ihn enthalten, unterbricht, dass also dadurch die Intensität der in ihnen fliessenden Strömen J Null werden muss. Damit die Form von J_f dem entspreche, darf Z_f kein w der K_f bildenden Drähte enthalten. Wir erhalten also die folgende Vorschrift:

Um den Zähler von i_k zu bilden, hat man, wenn sich E in a befindet, sämtliche geschlossene Kreise $K_1, K_2 \dots K_g$ zu benutzen, welche die beiden Drähte a und k zugleich enthalten. Man entnehme der Reihe nach aus N_a die Glieder, in welchen kein w der in K_1 enthaltenen Drähte vorkommt, füge zu diesen die Glieder, welche kein w aus K_2 enthalten, und so fort unter Benutzung aller Kreise $K_1, K_2 \dots K_g$. Die algebraische Summe dieser Glieder ist der Zähler von i_k . Bezuglich des Vorzeichens wähle man beliebig eine Richtung des Drahtes k als die positive, stimmt dann die Richtung des Stromes des betreffenden K hiermit überein, so haben die zugehörigen Glieder das positive Vorzeichen zu erhalten, wenn nicht, das negative.

Es ist mittels der von Kirchhoff angegebenen Betrachtungen nachzuweisen, dass sich, wenn man die auf die vorstehende Art gebildeten Werte der i in die auf irgend einen geschlossenen Kreis bezogene Gleichung (1) einsetzt, die Werte E oder Null ergeben, je nachdem der E enthaltende Draht a in dem betreffenden Kreis enthalten ist oder fehlt. Daraus folgt, dass die durch die eingeführten Ströme J dargestellte Stromverteilung den Kirchhoff'schen Sätzen genügt, also ihre Benutzung gerechtfertigt ist.

10. Den vorstehenden Folgerungen mag ein schon von Kirchhoff ausgesprochener, dann mehrfach von Anderen wiederholter Satz angefügt werden. Wir haben gesehen, dass zur Bestimmung der Stromstärke in einem Draht k , wenn die elektromotorische Kraft sich in a befindet, die geschlossenen Kreise dienen, die durch diese beiden Drähte (a und k) hindurchgehen. Dieselben geschlossenen Kreise dienen zur Bestimmung der Stromstärke in a , wenn die elektromotorische Kraft sich in k befindet. Da nun zu jedem geschlossenen Kreis eine bestimmte Anzahl von Combinationen der nicht in ihm enthaltenen Drähte zu je $\mu - 1$ gehört, durch deren Wegnahme aus dem Netz eben dieser eine geschlossene Kreis (natürlich im allgemeinen neben anderen ungeschlossenen Drahtstrecken) übrig bleibt, und nach Satz B alle diese Combinationen in den Zählern der i aller der Drähte, die den Kreis zusammensetzen, enthalten sind, so ist klar, dass E in k dieselbe Stromstärke in a bewirkt, wie sie mit E in a sich

in k ergiebt. Oder mit anderen Worten: Wenn in einem Drahtnetz die elektromotorische Kraft aus einem Zweig a ohne andere Änderungen in den k übertragen wird, so herrscht jetzt in a dieselbe Stromstärke, die vorher in k herrschte.

11. Maxwell hat nach der Mitteilung von Fleming¹⁾ in seiner letzten Universitätsvorlesung eine andere Art der Zerlegung der Ströme in einem Netzwerk von Drähten angegeben. In der Art, wie sie Fleming beschreibt, ist die Methode nicht allgemein anwendbar. Danach soll das Netz so in eine Ebene gelegt werden, dass die Drähte sich nirgends überdecken, und dann in dem Umfang jeder „Masche“ ein konstanter Strom angenommen werden, der die Fläche der Masche in einem bestimmten Sinn (entgegen den Uhrzeigern) umläuft. Durch jeden Draht im Innern des Netzes fliessen so die zwei Ströme der angrenzenden Maschen in entgegengesetztem Sinn, ihre Differenz ist die in dem Draht wirklich herrschende Stromstärke. Es ist klar, dass in sehr vielen Fällen eine solche Ausbreitung des Netzes in eine Ebene nicht möglich ist, so z. B. schon bei dem Netz, welches entsteht, wenn man in der Anordnung der Wheatstone'schen Brücke zwei Punkte gegenüberliegender Zweige durch einen Draht verbindet. Die Methode kann aber durch eine kleine Änderung allgemein anwendbar gemacht werden. Man kann, wie Kirchhoff gezeigt hat, für jedes Netz auf verschiedene Art ein System von $\mu = n - m + 1$ geschlossenen Kreisen angeben, aus welchen alle im Netz möglichen geschlossenen Kreise zusammengesetzt werden können. Wir denken uns ein solches System $K_1, K_2 \dots K_\mu$, und jeden Kreis desselben von einem constanten Strom durchflossen. Die Intensitäten dieser Ströme nennen wir $J_1, J_2 \dots J_\mu$ und setzen für jeden Kreis die Richtung beliebig fest, in der der Strom positiv gerechnet werden soll, ebenso setzen wir für jeden Draht (der zu 1, 2 bis μ Kreisen gehören kann) beliebig die Richtung fest, in der ein ihn durchflossender Strom i positiv gerechnet werden soll. Nun wenden wir auf jeden solchen Kreis die Gleichung (1) an, indem wir unter Beachtung der festgesetzten Richtungen

1) J. A. Fleming, Phil. Mag. (5) 20. p. 221. 1885.

die i durch die J ersetzen. So erhalten wir μ lineare Gleichungen zwischen E , den Widerständen des Netzes und $J_1 \dots J_\mu$, woraus diese zu bestimmen sind und dann die i liefern. Zur Erläuterung mag die Wheatstone'sche Drahtverbindung dienen. In Fig. 4 ist als das zu benutzende Kreissystem 1, 2, 3; 3, 5, 4 und 2, 6, 4 gewählt, die die einzelnen Maschen umfliessenden Ströme J_1, J_2, J_3 beliebig gerichtet angenommen und durch die runden Pfeile bezeichnet, ebenso geben die den Drähten beigesetzten Pfeile die Richtung an, in der ein darin fliessender Strom positiv gerechnet werden soll. Dabei sind, um die Willkürlichkeit der Wahl zu zeigen, einige Pfeile (bei 2 und 5) absichtlich entgegengesetzt der sich ergebenden Stromrichtung angenommen; der Ausdruck für die Stromstärke muss dann negativ werden. Der Zusammenhang zwischen den i und J ergibt sich nach den gemachten Annahmen folgendermaassen:

$$\begin{aligned} i_1 &= J_1, \quad i_2 = J_3 - J_1, \quad i_3 = J_1 + J_2, \\ i_4 &= -J_2 - J_3, \quad i_5 = J_2, \quad i_6 = J_3 \end{aligned}$$

und damit liefert die Anwendung der Gleichung (1) auf unsere drei Kreise die Gleichungen

$$\begin{aligned} (w_1 + w_2 + w_3) J_1 + w_3 J_2 - w_2 J_3 &= E, \\ w_3 J_1 + (w_3 + w_4 + w_5) J_2 + w_4 J_3 &= 0, \\ -w_2 J_1 + w_4 J_2 + (w_2 + w_4 + w_6) J_3 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die J als Brüche, deren gemeinschaftlicher Nenner die Determinante

$$\begin{vmatrix} w_1 + w_2 + w_3 & w_3 & -w_2 \\ w_3 & w_3 + w_4 + w_5 & w_4 \\ -w_2 & w_4 & w_2 + w_4 + w_6 \end{vmatrix} = N$$

ist, und deren Zähler durch die Ersetzung je einer Columnne durch die rechte Seite der vorstehenden Gleichungen hervorgehen. Wir erhalten so

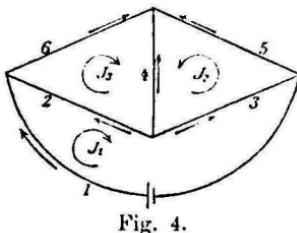


Fig. 4.

$$J_1 \frac{N}{E} = w_4(w_2 + w_3 + w_5 + w_6) + (w_2 + w_6)(w_3 + w_5),$$

$$J_2 \frac{N}{E} = -w_3(w_2 + w_4 + w_6) - w_2 w_4,$$

$$J_3 \frac{N}{E} = w_2(w_3 + w_4 + w_5) + w_3 w_4,$$

und damit

$$i_1 \frac{N}{E} = w_4(w_2 + w_3 + w_5 + w_6) + (w_2 + w_6)(w_3 + w_5),$$

$$i_2 \frac{N}{E} = -w_6(w_3 + w_4 + w_5) - w_4 w_5,$$

$$i_3 \frac{N}{E} = w_5(w_2 + w_4 + w_6) + w_4 w_6,$$

$$i_4 \frac{N}{E} = w_3 w_6 - w_2 w_5,$$

$$i_5 \frac{N}{E} = -w_3(w_2 + w_4 + w_6) - w_2 w_4,$$

$$i_6 \frac{N}{E} = w_2(w_3 + w_4 + w_5) + w_3 w_4.$$

Der Wert des N ist hier, wie aus den Beziehungen zwischen den i und den J hervorgeht, derselbe wie bei der Auflösung der ursprünglichen Gleichungen (1) und (2). Ich setze es zur Vergleichung auch in der letzteren Form für unseren Fall hierher:

$$\left| \begin{array}{cccccc} w_1 & -w_2 & w_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 & -w_4 & w_5 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 & -w_4 & 0 & w_6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right| = N.$$

Die Determinante ist in dieser ursprünglichen Kirchhoff'schen Form vom n^{ten} , in der Maxwell'schen dagegen nur vom μ^{ten} Grad. Der Vorteil für die Rechnung ist indessen nicht so gross, als es danach scheinen möchte. Die einzelnen Glieder sind in der Kirchhoff'schen Form natürlich auch nur vom μ^{ten} Grad in den w wegen der $m-1$ mal darin vorkommenden Factoren ± 1 , und die Anzahl der über-

flüssig zu bildenden, sich gegenseitig aufhebenden Glieder kann bei Maxwell, wo auch höhere Potenzen der einzelnen w vorkommen, sogar erheblich grösser werden. Der Vorzug des oben angegebenen ist daher auch diesem Verfahren gegenüber etwa der gleiche wie gegenüber dem ursprünglichen.

12. Es sollen nun die vorstehenden allgemeinen Betrachtungen auf die Netze im einzelnen angewandt werden, teils um Beispiele für ihre Benutzung zu geben, teils um zu zeigen, wie durch sie eine einfache Ordnung und Einteilung sämtlicher Netze gewonnen werden kann. Wir werden dabei noch einige allgemeine Sätze finden, welche zur Vereinfachung des Verfahrens bei der Berechnung von N benutzt werden können.

Es ist wohl kaum nötig, darauf hinzuweisen, dass für die Lösung mancher hierher gehöriger Fragen die Kenntnis des N nicht erforderlich ist, so namentlich für die Ableitung der Bedingungen, unter welchen bestimmte Drähte stromlos sind. Aber immer, wenn es sich um Angabe der Stromstärke in einem Draht, oder des Widerstandes zwischen zwei Punkten im Netz, oder um die Berechnung des zu erwartenden Fehlers bei einer Messung, oder um die Bestimmung der besten Versuchsanordnung und Aehnliches handelt, ist sie notwendig.

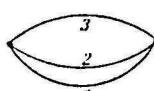
Wir teilen die Netze nach der Anzahl der in ihnen vorhandenen *Verzweigungspunkte* ein. Den Grenzfall bilden die Netze ohne Verzweigungspunkt: einzelne geschlossene Leiter. Auf sie sind die Sätze A und B nicht unmittelbar anzuwenden, wo aber in unseren Betrachtungen ein solches einfachstes Netz auftritt, ist sein N entsprechend der Gleichung $i = E/w$ immer das w des betreffenden Leiters. Geschlossene Netze mit *einem* Verzweigungspunkt giebt es nicht, von zwei an kann jede Zahl von Verzweigungspunkten vorkommen. *Benachbarte* Verzweigungspunkte nennen wir solche, bei denen man auf einer Linie des Netzes von dem einen zum anderen ohne Berührung weiterer Verzweigungspunkte gelangen kann. Die Verbindung zweier benachbarter Verzweigungspunkte soll eine *Strecke* des Netzes heissen; je nachdem sie durch einen, zwei, drei etc. Drähte bewirkt wird, nennen wir sie eine eindrähtige, zweidrähtige . . . oder einfache, zweifache etc. Strecke. Vollkommene Netze mit m Verzweigungspunkten haben von $m=3$

an mindestens m und höchstens $m(m-1)/2$ Strecken. Kommen nur eindrähtige Strecken vor, so ist die geringste Zahl $3m/2$.

13. Wir betrachten zuerst Netze mit zwei Verzweigungspunkten. Das einfachste ist das in Fig. 5 dargestellte, aus drei Drähten bestehende. Wenden wir hierauf die Gleichung (6) an, so bekommen wir

$$N = w_1 N_1 + N_1'.$$

Fig. 5.



Durch Wegnahme von w_1 entsteht das einfache aus 2 und 3 zusammengesetzte Netz ohne Verzweigungspunkte, also ist $N_1 = w_2 + w_3$. Durch Aufeinanderlegen der Verzweigungspunkte bei Wegnahme von 1 entsteht ein unvollkommenes Netz, gebildet aus den beiden sich berührenden geschlossenen Einzeldrähten 2 und 3, also ist $N_1' = w_2 w_3$. Folglich haben wir

$$N = w_1 w_2 + w_1' w_3 + w_2 w_3.$$

Mit Benutzung hiervon erhalten wir in gleicher Weise bei vier Drähten:

$$N = w_1 w_2 w_3 + w_1 w_2 w_4 + w_1 w_3 w_4 + w_2 w_3 w_4,$$

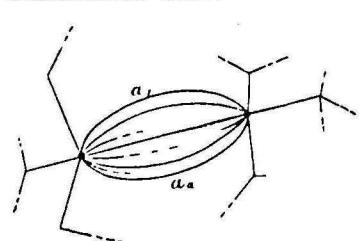
und man sieht leicht, wie es bei mehr Drähten weitergeht. Wir erhalten so den bekannten Satz:

Das N eines Netzes mit zwei Verzweigungspunkten und p Drähten ist die Summe aller Combinationen $p-1^{\text{ter}}$ Klasse der Widerstände der p Drähte.

Nach Satz Nr. 9 ist ferner die Stromstärke in k , wenn E in a sich befindet, gleich \mathcal{E} mal dem Product sämtlicher Widerstände ausser von a und k dividirt durch N_1 , und der

Widerstand des ganzen Netzes zwischen den beiden Verzweigungspunkten ist nach Satz Nr. 6 gleich dem Product aller Widerstände dividirt durch N .

14. Mit Hülfe des oben(Nr. 8) abgeleiteten Satzes können wir aus dem vorigen Abschnitt eine wichtige Folgerung ziehen.



Wenn in einem beliebigen Netz (Fig. 6) eine Strecke a durch mehrere Drähte $a_1 a_2 \dots a_n$, deren Widerstände wir mit denselben Buchstaben bezeichnen wollen, gebildet wird,

so können wir das ganze Netz als aus zwei Teilnetzen bestehend ansehen, von denen das erste die α Drähte der Strecke a bilden, während das zweite das ganze übrige Netz ist; auf dieses zusammengesetzte Netz wenden wir den oben erwähnten Satz an. Beziehen wir N auf ein dem gegebenen im übrigen gleiches Netz, in dem jedoch die Strecke a *einfach* ist, so ist nach unserer Bezeichnungsweise das N des zweiten Teilnetzes N_a und das desselben mit zusammengelegten Verbindungspunkten $N_{a'}$, während das N des ersten Teilnetzes die Summe der Combinationen $\alpha - 1^{\text{ter}}$ Klasse der $a_1 \dots a_a$ (wir wollen sie durch A_{a-1} bezeichnen) und das desselben Teilnetzes mit zusammengelegten Verbindungspunkten das Product aller $a_1, a_2 \dots a_a$ ist. Sind keine Verbindungslien da, so erhalten wir demnach für das N des gegebenen Netzes:

$$a_1 a_2 \dots a_a N_a + A_{a-1} N_{a'}.$$

Schliesst sich an die mehrfache Strecke a auf einer oder beiden Seiten nur je eine Strecke an, so kann man diese als Verbindungsdrähte mit dem zweiten Teilnetz betrachten. Wir wollen sie auf der einen Seite mit a_1 , auf der anderen mit a_2 bezeichnen. Es ist dann nach Satz Nr. 8 zu den beiden vorstehenden Gliedern noch

$$A_{a-1}(a_1 + a_2) N_a$$

hinzuzufügen. Der Factor von N_a , der an die Stelle des bei einfacher Strecke a vorhandenen $a + a_1 + a_2$ tritt, ist dann $a_1 \dots a_a + A_{a-1}(a_1 + a_2)$.

Sind noch andere mehrfache Strecken in dem Netz, so kann man auf diese die gleiche Betrachtung anwenden und erhält dadurch den allgemeinen Satz:

Wenn in einem Netz die Strecken $a, b, c \dots$ durch $\alpha, \beta, \gamma \dots$ Drähte gebildet werden, so wird das N dieses Netzes aus dem des entsprechenden Netzes mit nur einfachen Strecken dadurch erhalten, dass die $a, b, c \dots$ durch die Producte $a_1 \dots a_a, b_1 \dots b_\beta, c_1 \dots c_\gamma \dots$ ersetzt und die von a freien Glieder mit der Summe der Combinationen $\alpha - 1^{\text{ter}}$ Klasse der a , die von b freien mit der Summe der Combinationen $\beta - 1^{\text{ter}}$ Klasse der b etc. multiplicirt werden.

Damit ist die Behandlung der Netze mit mehrfachen Strecken auf die entsprechender mit nur einfachen Strecken zurückgeführt.

Man ersetzt zunächst die mehrfachen Strecken durch einfache. Die dabei an wegfällenden Verzweigungspunkten zusammenstossenden Drähte, etwa a_1 und a_2 , betrachtet man als einen, a . In dem dann erhaltenen Ausdruck für N ersetzt

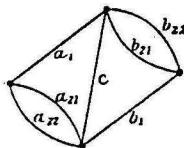


Fig. 7.

man wieder a durch $a_1 + a_2$ und versöhrt nach der vorstehenden Regel. So hat man z. B. bei der Bestimmung des N des durch Fig. 7 dargestellten Netzes a_2 statt a_{21} und a_{22} , ferner b_2 statt b_{21} und b_{22} zu setzen. Dann fallen zwei Verzweigungspunkte fort und wir betrachten

die in dem einen zusammenstossenden Drähte a_1 und a_2 als einen, den wir durch a bezeichnen, ebenso die in dem anderen zusammenstossenden als einen Draht b . Wir haben nun drei Drähte zwischen zwei Verzweigungspunkten, also nach Nr. 13 für das N dieses Netzes

$$(a + b)c + ab.$$

Setzen wir wieder a_1 , a_2 , b_1 und b_2 ein, so ist dies

$$c(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2),$$

und durch Anwendung des obigen Satzes erhalten wir hieraus

$$\begin{aligned} N = c((a_1 + b_1)(a_{21} + a_{22})(b_{21} + b_{22}) + a_{21}a_{22}(b_{21} + b_{22}) \\ + b_{21}b_{22}(a_{21} + a_{22})) \\ + (a_1(a_{21} + a_{22}) + a_{21}a_{22})(b_1(b_{21} + b_{22}) + b_{21}b_{22}). \end{aligned}$$

Die Leichtigkeit, mit der auf diese Weise immer Netze mit mehrfachen Strecken auf solche mit einfachen zurückgeführt werden können, empfiehlt die Anwendung des Verfahrens überall, wo es möglich ist.

Fig. 8.

15. Ich will hier gleich einen weiteren Satz beifügen, welcher häufig das Fortschreiten von einfacheren zu zusammengesetzten Netzen erleichtert. Er bezieht sich auf die Zufügung eines neuen Verzweigungspunktes zu einem bekannten Netz.

In Fig. 8 bedeuten A , B und C Verzweigungspunkte in dem bekannten Netz, in ihnen sollen die Drähte α , β , γ angebracht werden, die in dem dreifachen Verzweigungspunkt D zusammenlaufen. Das N des so erweiterten Netzes ist zu bestimmen.

Wir denken uns zunächst A , B und C als benachbarte Verzweigungspunkte, also durch die Drähte a , b und c verbunden. Wir wollen N auf das ursprüngliche Netz beziehen und das des neuen durch \mathfrak{N} bezeichnen. Nach Gleichung (6) ist nun

$$\mathfrak{N} = \alpha \mathfrak{N}_a + \mathfrak{N}_{a'}.$$

\mathfrak{N}_a ist aber das \mathfrak{N} eines Netzes, das aus dem ursprünglichen dadurch entsteht, dass die Strecke BC statt durch a , durch die beiden Drähte a und $(\beta + \gamma)$ gebildet wird. Nach dem eben bewiesenen Satz ist also

$$\mathfrak{N}_a = a(\beta + \gamma) N_a + (a + \beta + \gamma) N_{a'} = (\beta + \gamma) N + a N_{a'}.$$

Ferner ist $\mathfrak{N}_{a'}$ das N eines Netzes, das durch Zufügung der Linie γ neben b und von β neben c aus dem ursprünglichen entsteht. Da nun das N des ursprünglichen Netzes geschrieben werden kann (vgl. oben p. 1312)

$$b c N_{b,c} + b N_{b,c'} + c N_{b',c} + N_{b',c'},$$

so erhalten wir nach demselben Satz, wie eben

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_{a'} &= \beta \gamma b c N_{b,c} + \gamma b (\beta + c) N_{b,c'} + \beta c (\gamma + \beta) N_{b',c'} \\ &\quad + (\beta + c)(\gamma + b) N_{b',c'}, \\ &= \beta \gamma N + \beta b N_{b'} + \gamma c N_{c'} + b c N_{b',c'}, \end{aligned}$$

also durch Einsetzung in die obige Gleichung

$$\mathfrak{N} = (\alpha \beta + \alpha \gamma + \beta \gamma) N + \alpha a N_{a'} + \beta b N_{b'} + \gamma c N_{c'} + b c N_{b',c'}.$$

Die Unsymmetrie des letzten Gliedes ist nur scheinbar, da, wie man leicht sieht, $b c N_{b',c'} = c a N_{c',a'} = a b N_{a',b'}$ ist, nämlich gleich dem N eines Netzes, das (ohne Entfernung der Drähte a, b, c) durch Vereinigung der drei Punkte A , B und C in einen einzigen entsteht. Man beachte auch, dass $a N_{a'}$, $b N_{b'}$, $c N_{c'}$ die N von Systemen sind, die beziehungsweise durch Vereinigung der Punkte B und C , C und A , A und B entstehen. Nun können wir aber die gemachte Annahme, dass A , B und C durch Drähte verbunden seien, fallen lassen. Denn wächst der Widerstand z. B. von a ins Unendliche, so ist das gleichbedeutend mit der Wegnahme desselben aus dem Netz; in dem Ausdruck für \mathfrak{N} bleiben dann aber nur die mit a behafteten Glieder stehen, und man erkennt leicht, dass er bezüglich des Netzes ohne a dieselbe Bedeutung hat, wie der obige bezüglich des ursprünglichen Netzes. Es können also A , B und C irgendwelche Punkte des Netzes sein. Wir wollen daher hier eine

andere Bezeichnung anwenden, indem wir das N eines Netzes, welches aus dem ursprünglichen durch Vereinigung der Punkte A und B entsteht, durch $\widehat{N_{AB}}$ bezeichnen, und entsprechend bei den übrigen Netzen. Damit wird die Form von \mathfrak{N} :

$$\mathfrak{N} = (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)N + \alpha\widehat{N_{BC}} + \beta\widehat{N_{CA}} + \gamma\widehat{N_{AB}} + \widehat{N_{ABC}}.$$

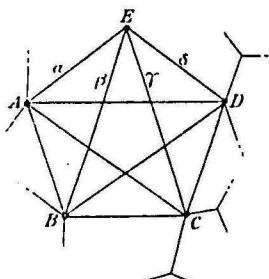


Fig. 9.

Wenn wir weiter einen vierfachen Verzweigungspunkt E einem bekannten Netz hinzufügen, welches von den von ihm ausgehenden Drähten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in den Punkten A, B, C, D getroffen wird (Fig. 9), so haben wir nach Gleichung (6) das oben erwähnte Resultat mit δ zu multipliciren und das N eines Netzes hinzuzufügen, das nach Entfernung von δ durch Vereinigung von E und D entsteht. Beachten wir

zugleich, dass bezüglich der vier Punkte A, B, C, D und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Symmetrie stattfinden muss, so findet man leicht, dass

$$\begin{aligned}\mathfrak{N} &= (\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta)N + \alpha\beta\widehat{N_{CD}} + \alpha\gamma\widehat{N_{BD}} + \alpha\delta\widehat{N_{BC}} \\ &\quad + \beta\gamma\widehat{N_{AD}} + \beta\delta\widehat{N_{AC}} + \gamma\delta\widehat{N_{AB}} \\ &\quad + \alpha\widehat{N_{BCD}} + \beta\widehat{N_{CAD}} + \gamma\widehat{N_{DAB}} + \delta\widehat{N_{ABC}} + \widehat{N_{ABCD}}\end{aligned}$$

wird. Wie es weiter geht, ist klar, und wir können den Satz aussprechen:

Wenn zu einem bekannten Netz ein p -facher Verzweigungspunkt hinzugefügt wird, dessen Drähte beliebige Ausgangspunkte an dem Netz haben, so ist das N des neuen Netzes eine Summe, deren Summanden aus sämtlichen Combinationen $p - 1^{\text{ter}}, p - 2^{\text{ter}} \dots$ bis 0^{ter} Klasse der Widerstände der neuen Drähte bestehen, welche multipliziert sind: die Combinationen $p - 1^{\text{ter}}$ Klasse mit dem N des ursprünglichen Netzes und jede folgende Combination mit dem N eines Netzes, das aus dem ursprünglichen durch die Vereinigung der Ausgangspunkte aller in der Combination nicht vorkommenden Drähte erhalten wird.

Dieser Satz kann häufig sowohl in seiner allgemeinen als auch in vereinfachter Form Anwendung bei der Behandlung gegebener Netze finden an Stelle der mehrfachen Anwendung der Gleichung (6).

16. Bei drei Verzweigungspunkten in vollkommenen Netzen giebt es immer drei Strecken. Davon kann nur eine eindrähtig sein, weil sonst ein Verzweigungspunkt wegfallen würde. Der einfachste Fall ist der in Fig. 10 dargestellte mit zwei zweifachen und einer einfachen Strecke. Hier liefert Gleichung (6) mit Berücksichtigung von Nr. 13 ohne jede Rechnung

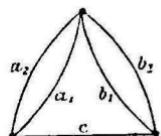


Fig. 10.

$N = c(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) + a_1 a_2(b_1 + b_2) + b_1 b_2(a_1 + a_2)$.
In dem allgemeinsten Fall, dass α Drähte die Strecke a , β die Strecke b und γ die Strecke c bilden, giebt der Satz Nr. 14, wenn wir die Combinationen $\alpha - 1^{\text{ter}}$ Klasse der a wieder mit $A_{\alpha-1}$, die $\beta - 1^{\text{ter}}$ Klasse der b mit $B_{\beta-1}$, die $\gamma - 1^{\text{ter}}$ Klasse der c durch $C_{\gamma-1}$ bezeichnen, sofort

$$N = a_1 \dots a_\alpha B_{\beta-1} C_{\gamma-1} + b_1 \dots b_\beta C_{\gamma-1} A_{\alpha-1} \\ + c_1 \dots c_\gamma A_{\alpha-1} B_{\beta-1}.$$

Wenn in dem Fall der Fig. 10 sich die elektromotorische Kraft E in c befindet, was z. B. der Anwendung des Differentialgalvanometers im Nebenschluss, sowie der Methode von Kirchhoff¹⁾ zur Vergleichung ungleicher Widerstände entspricht, so wird die Stromstärke in den (die Windungen des Differentialgalvanometers enthaltenden) Zweigen a_2 und b_2 nach dem Satz Nr. 9

$$a_1(b_1 + b_2) \frac{E}{N} \text{ bez. } b_1(a_1 + a_2) \frac{E}{N}.$$

Wenn umgekehrt E in a_2 sich befindet, ergibt sich nach demselben Satz oder auch nach Nr. 10 der gleiche erste Wert für die Stromstärke in c ; fügt man ein zweites Element von der elektromotorischen Kraft K in b_2 ein, das einen entgegengesetzt gerichteten Strom durch c sendet, so wird die Stromstärke darin

$$(a_1(b_1 + b_2)E - b_1(a_1 + a_2)K) : N,$$

das entspricht der Anordnung, welche ich zur Messung des inneren Widerstandes und der elektromotorischen Kraft stromdurchflossener Elemente angegeben habe.²⁾

1) G. Kirchhoff, Sitzungsber. d. k. Akad. d. Wissensch. zu Berlin p. 601. 1880.

2) W. Feussner, Anhang 2 der Dissert.: Ueber die Messung der Wärme etc., Marburg 1867.

17. Netze mit vier Verzweigungspunkten enthalten vier, fünf oder sechs Strecken. Die mit vier und fünf Strecken sind nach Nr. 14 immer leicht auf schon behandelte zurückzuführen, nur die mit sechs Strecken stellen eine neue Form dar, die einzige, bei der alle Strecken eindrähtig sein können. Das N dieses Netzes (Fig. 11) ist mit gleicher Leichtigkeit durch Anwendung von Gleichung (6).

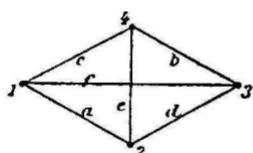


Fig. 11.

in Verbindung mit den angegebenen Formeln für die einfacheren Netze wie durch Benutzung des Satzes von Nr. 15 zu erhalten. Wir bekommen so auf dem ersten Weg z. B.

$$N = a(b(c + d + e + f)) + (c + f)(d + e) + b(c + e)(d + f) + c e(d + f) + d f(c + e).$$

Betrachtet man bei der Anwendung des Satzes Nr. 15 das von a , c und e gebildete Netz als das ursprüngliche, den Verzweigungspunkt, in dem b , d und f zusammenstossen als den hinzukommenden, so giebt dieser Satz sofort

$$N = (b(d + f) + df)(a + c + e) + ab(c + e) + cd(a + e) + ef(a + c) + ace.$$

Befindet sich die elektromotorische Kraft E in f , so sind nach Nr. 9 zur Bildung der Zähler der i die Glieder aus

$$N_r = e(a + b + c + d) + (a + c)(b + d)$$

zu entnehmen und zwar für i_a unter Benutzung der beiden Kreise $f a d$ und $f a e b$, was

$$i_a = \frac{eb + c(b + d + e)}{N} E$$

liefert.

Entsprechend ergeben sich i_b , i_c und i_d ; für i_e dagegen erhält man eine andere Form; hier sind die beiden Kreise $f a e b$ und $f c e d$ zu benutzen, und man erhält unter der Annahme, dass der positive Strom in f von 3 nach 1 fließt, für den von 2 nach 4 gerichteten Strom

$$i_e = \frac{cd - ab}{N} E.$$

Dieses Netz ist eines der am häufigsten zu Messungen benutzten. Die Wheatstone'sche Brücke mit ihren vielen Abänderungen gehört hierher, die Anordnung des Differentialgalvanometers

im übergreifenden Nebenschluss¹⁾, die Mance'sche Methode²⁾ der Widerstandsmessung stromdurchflossener Elemente etc.

18. Um Netze mit einer grösseren Anzahl von Verzweigungs-punkten zu behandeln, wird man gewöhnlich am besten nach Ersetzung etwa vorhandener mehrfacher Strecken durch einfache den Satz Nr. 15 verwenden. Man könnte daran denken, das N der allgemeinsten solcher m -punktigen Netze herzustellen, d. h. solcher, deren Verzweigungspunkte sämtlich benachbart, unmittelbar miteinander verbunden sind. Die Anzahl der Drähte (Strecken) hierin würde $m(m - 1)/2$ sein.³⁾ Aus ihnen könnten durch Wegnahme der geeigneten Drähte alle Netze mit ebensoviel Verzweigungspunkten aber geringerer Anzahl von Strecken abgeleitet werden. Sind die Strecken a, b, c zu entfernen, so ist das N dieses Netzes der Factor des Productes abc in dem des allgemeinen. Unser Satz Nr. 15 würde aus dem N eines allgemeinen m -punktigen das eines $m + 1$ -punktigen Netzes abzuleiten gestatten. Allein diesem Verfahren steht die übergrosse Anzahl der Glieder der N solcher allgemeiner mehrpunktiger Netze entgegen. Während das N des allgemeinen vierpunktigen Netzes, das wir in Nr. 17 angegeben haben, $16 = 4^2$ Glieder hat, hat das des fünfpunktigen schon $125 = 5^3$, das des sechspunktigen $1296 = 6^4$, das des m -punktigen also wohl $m^{m - 2}$ (einen strengen Beweis für diese Verallgemeinerung habe ich noch nicht). Man muss daher den entgegengesetzten Weg einschlagen: ausgehend von möglichst einfachen Netzen, durch die obigen Sätze das N des zu behandelnden bestimmten. Wir wollen in den folgenden Nummern noch einige Beispiele dazu geben.

19. Das fünfpunktige Netz Fig. 12 bildet eine Abänderung des in Nr. 16 behandelten dreipunktigen und kann, wie in einer demnächst erscheinenden Dissertation von Hrn. C. Seargent gezeigt werden wird, mit Nutzen zur Widerstandsbestimmung stromdurchflossener Elemente gebraucht werden. Sein N wird

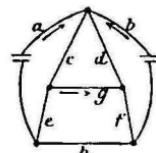


Fig. 12.

1) F. Kohlrausch, Wied. Ann. 20. p. 76. 1883.

2) H. Mance, Proc. Roy. Soc. 19. p. 248. 1871.

3) Maxwell betrachtet solche Netze in seinem Lehrbuch I Art. 280. p. 333. Oxford 1873.

am einfachsten gemäss Satz Nr. 15 durch die Hinzufügung des vierfachen Verzweigungspunktes zu dem einfachen Leiter $e + g + f + h$ erhalten. Bestimmt man dann nach Satz Nr. 9 die Stromstärke in g , so erhält man

$$i_g = [h(Ec(b+d+f) - Kd(a+c+e)) + (bE + aK)(cf - de)] : N.$$

Wählt man zunächst bei Weglassung von h die Widerstände so, dass ein in g befindliches Galvanometer keinen Strom anzeigt, also der Factor von h in der viereckigen Klammer Null ist, so fällt das erste Glied in dieser Klammer auch nach Herstellung der Verbindung durch h fort, und man kann aus der übrig bleibenden Gleichung in Verbindung mit zwei entsprechenden die Widerstände a und b bestimmen.

20. Für die Messung kleiner Drahtwiderstände ist eine von Thomson¹⁾ angegebene Methode gebräuchlich, bei welcher

das in Fig. 13 dargestellte sechspunktige Netz angewandt wird. Die zu vergleichenden kleinen Widerstände befinden sich in b_1 und b_2 , das Element in d und das Galvanometer in c_3 . Das N dieses Netzes erhält man wieder am einfachsten durch Zufügung des Verzweigungspunktes in dem die c zusammenstossen zu dem

zweipunktigen Netz der drei Drähte d , $a_1 + a_2$, $b_1 + b_3 + b_2$. Der Satz Nr. 15 liefert sofort:

$$\begin{aligned} N = & (c_1 c_2 + c_1 c_3 + c_2 c_3)((a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + b_3)d \\ & + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3)) \\ & + (c_1 + c_2 + b_3)(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)d + (c_1 + c_2)(a_1 a_2(b_1 + b_2 + b_3) \\ & + b_1 b_2(a_1 + a_2)) \\ & + c_1 b_3((a_2 + b_2)d + (a_1 + a_2)b_2) + c_2 b_3((a_1 + b_1)d + (a_1 + a_2)b_1) \\ & + c_3 b_3((a_1 + a_2 + b_1 + b_2)d + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)). \end{aligned}$$

Das hieraus unmittelbar abzulesende N_d giebt dann mit Hülfe der vier durch d und c_3 bestimmten Kreise $d a_1 c_3 c_1 b_3 b_2$, $d a_1 c_3 c_2 b_2$, $d b_1 c_1 c_3 a_2$ und $d b_1 b_3 c_2 c_3 a_2$, von denen die beiden letzten negative Glieder liefern, nach Satz 9 den Zähler des Ausdruckes für die Stromstärke in c_3 , nämlich:

$$(b_1 a_2 - a_1 b_2)(c_1 + c_2 + b_3) + (c_1 a_2 - c_2 a_1)b_4.$$

¹⁾ W. Thomson, Phil. Mag. (4) 24. p. 149. 1862.

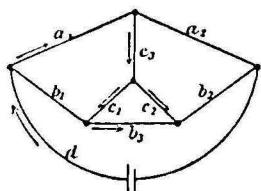


Fig. 13.

Wird nun $c_1 : c_2 = a_1 : a_2$ gemacht, so muss, wenn das Galvanometer keinen Strom anzeigt, auch $b_1 : b_2 = a_1 : a_2$ sein.

21. Zur Messung von Wechselströmen haben Paalzow und Rubens¹⁾ eine Vorrichtung angegeben, die den Zweck hat, die in einem von diesem Strömen durchflossenen Zweig der Wheatstone'schen Brücke erzeugte Wärme durch die Veränderung seines Widerstandes zu messen, und die im wesentlichen aus dem in Fig. 14 dargestellten achtpunktigen Netz besteht. Man kann dieses Netz als aus zwei Teilnetzen, $a_1 a_2 b_1 b_2 c$ und $a'_1 a'_2 \beta_1 \beta_2 \gamma$, mit den Verbindungsdrähten d_1 und d_2 zusammengesetzt ansehen. Bezeichnen wir das N des ersten Teilnetzes durch N_I , das des zweiten durch N_{II} und die der Netze, die durch Zusammenlegen der Verbindungspunkte aus den Teilnetzen entstehen, durch $N_{I'}$ und $N_{II'}$, so ist nach dem Satz Nr. 8:

$$N = (d_1 + d_2) N_I N_{II} + N_I N_{II'} + N_{I'} N_{II},$$

worin

$$N_I = c(a_1 + a_2 + b_1 + b_2) + (a_1 + a_2)(b_1 + b_2),$$

$$N_{II} = \gamma(a_1 + a_2 + \beta_1 + \beta_2) + (a_1 + a_2)(\beta_1 + \beta_2),$$

$$N_{I'} = c(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) + a_1 b_1 (a_2 + b_2) + a_2 b_2 (a_1 + b_1),$$

$$N_{II'} = \gamma(a_1 + \beta_1)(a_2 + \beta_2) + a_1 \beta_1 (\alpha_2 + \beta_2) + \alpha_2 \beta_2 (\alpha_1 + \beta_1)$$

ist. Wenn man, wie es Paalzow und Rubens thun, ein dem zweiten Teilnetz ähnliches noch in den Zweig b_2 des ersten einschaltet, so kann man dieses wieder als aus zwei Teilnetzen zusammengesetzt ansehen und den Satz Nr. 8 wiederholt auf N_I und $N_{I'}$ anwenden.

Die vorstehenden Beispiele werden genügen, um den Nutzen zu zeigen, welchen das angegebene Verfahren und die abgeleiteten Sätze bei der Berechnung des N gegebener Netze und der Lösung damit zusammenhängender Fragen leisten.

1) A. Paalzow u. H. Rubens, Wied. Ann. 37. p. 529. 1889

(Eingegangen 7. October 1902.)

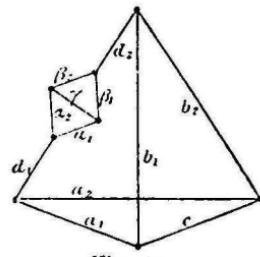


Fig. 14.

ANNALEN DER PHYSIK.

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
E. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF, G. UND E. WIEDEMANN.

VIERTE FOLGE.

BAND 15.

DER GANZEN REIHE 320. BAND.

KURATORIUM:

F. KOHLRAUSCH, M. PLANCK, G. QUINCKE,
W. C. RÖNTGEN, E. WARBURG.

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
UND INSbesondere von
M. PLANCK

HERAUSGEGEBEN VON

PAUL DRUDE.

MIT EINEM PORTRÄT UND VIER FIGURENTAFELN.



LEIPZIG, 1904.
VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH.

7. Zur Berechnung der Stromstärke in netzförmigen Leitern; von W. Feussner.

Zu dem vor zwei Jahren mitgeteilten Verfahren¹⁾ will ich im Folgenden einen Satz hinzufügen, der besonders geeignet ist, die Berechnung der Zähler der Ausdrücke für die Stromstärke zu erleichtern.

1. Um eine größere Einheitlichkeit der Formeln zu erzielen, werde ich hier das in der vorigen Abhandlung festgehaltene Verfahren, nur *geschlossene* Netze zu behandeln, fallen lassen und auch solche mit nur einseitig mit dem Netz zusammenhängenden, frei endigenden Drähten zulassen. Es entstehen solche, wenn im Verlauf des schrittweisen Überganges zu immer einfacheren Netzen durch folgeweises Entfernen der einzelnen Drähte alle an einem Verzweigungspunkt zusammenlaufenden mit Ausnahme von einem weggenommen sind.

Wenn in einem beliebigen Netz ein dreifacher Verzweigungspunkt vorhanden ist, in dem die Drähte a , b , c zusammenlaufen (Fig. 1), deren Widerstände durch die gleichen

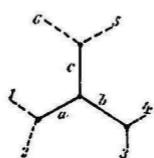


Fig. 1.

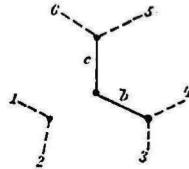


Fig. 2.

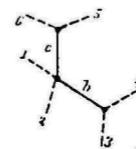


Fig. 3.

Buchstaben bezeichnet werden mögen, so kann nach Gleichung (6) der angezogenen Abhandlung zunächst

$$N = a N_a + N_{a'}$$

gesetzt werden, worin N_a dem durch Fig. 2, $N_{a'}$ dem durch Fig. 3 angedeuteten Netz zugehört. Bei weiterem Fortschreiten

1) W. Feussner, Ann. d. Phys. 9. p. 1304. 1902.

in der Zerlegung kann man nun, statt sofort in Fig. 2 den Leiter $b + c$ zu entfernen, auch zuerst b allein wegnehmen, also setzen

$$N_a = b N_{ab} + N_{ab'},$$

worin N_{ab} der Fig. 4, $N_{ab'}$ der Fig. 5 entspricht. Das durch Fig. 4 angedeutete Netz enthält den frei endigenden Draht c ,

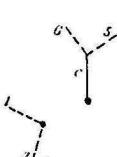


Fig. 4.



Fig. 5.

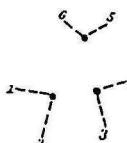


Fig. 6.



Fig. 7.

der bei der weiteren Zerlegung nicht mehr in Betracht kommt.
Man hat also

$$N = a b N_{ab} + a N_{ab'} + N_{a'b'}$$

Es ist aber

$$N_{ab'} = c N_{ab'c} + N_{ab'c'},$$

worin die auf der rechten Seite stehenden N den Fig. 6 bez. 7 entsprechen. Da nun

$$N_{ab} = N_{ab'c} = N_{a(b+c)} \quad \text{und} \quad N_{ab'c'} = N_{a(b+c)'}$$

ist, so geht die jetzt angewandte Zerlegung

$$N = a b N_{ab} + a N_{ab'} + N_{a'b'}$$

unmittelbar über in die frühere

$$N = a(b+c) N_{a(b+c)} + a N_{a(b+c)'} + N_{a'b'}$$

Die jetzige hat aber den Vorteil, bei jedem Verzweigungspunkt, einerlei ob er dreifach oder mehrfach ist, in gleicher Weise anwendbar zu sein.

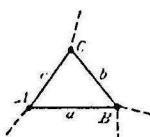


Fig. 8.

2. Bezeichnen wir durch \mathfrak{N} den gemeinschaftlichen Nenner der Ausdrücke für die Stromstärken in einem beliebigen gegebenen Netz, in welchem ein durch die drei Drähte a , b , c gebildeter geschlossener Kreis vorhanden ist (Fig. 8), so können wir durch wiederholte Anwendung der schon vorhin benutzten Gleichung (6) der früheren Abhandlung setzen

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} = & a b c \mathfrak{N}_{abc} + a b \mathfrak{N}_{ab'c'} + a c \mathfrak{N}_{a'b'c} + b c \mathfrak{N}_{a'b'c} + a \mathfrak{N}_{a'b'c'} \\ & + b \mathfrak{N}_{a'b'c'} + \mathfrak{N}_{a'b'c}. \end{aligned}$$

Wenn wir ferner das N desselben Netzes nach Entfernung der Drähte $a b c$ des geschlossenen Kreises — wir wollen es dann das *gekürzte* Netz nennen — durch N bezeichnen, und das eines hieraus durch Zusammenlegen zweier Anknüpfungspunkte der entfernten Drähte, z. B. A und B , entstehenden Netzes durch $\widehat{N_{AB}}$ und entsprechend in anderen Fällen, so ist

$$\mathfrak{N}_{abc} = N, \quad \mathfrak{N}_{ab'c'} = \widehat{N_{CA}}, \quad \mathfrak{N}_{a'b'c} = \widehat{N_{BC}}, \quad \mathfrak{N}_{a'b'c'} = \widehat{N_{AB}},$$

$$\mathfrak{N}_{a'b'c'} = \mathfrak{N}_{a'b'c} = \widehat{N_{ABC}}, \quad \mathfrak{N}_{a'b'} = c \widehat{N_{ABC}}.$$

Wir können daher schreiben

$$\mathfrak{N} = abcN + ab\widehat{N_{CA}} + ac\widehat{N_{BC}} + bc\widehat{N_{AB}} + (a+b+c)\widehat{N_{ABC}}.$$

Man kann also \mathfrak{N} in eine Summe von Gliedern zerlegen, die aus den Kombinationen dritter, zweiter und erster Klasse der drei Drähte des benutzten Kreises bestehen; jede Kombination multipliziert mit dem N eines Netzes, das aus dem gekürzten Netz durch Zusammenlegung der Endpunkte der in der Kombination *nicht* vorkommenden Drähte des Kreises entsteht. Ebenso bei Kreisen von vier Drähten $a b c d$ (Fig. 9)

$$\begin{aligned} \mathfrak{N} = & abcdN + abc\widehat{N_{DA}} + abd\widehat{N_{CD}} + acd\widehat{N_{BC}} + bcd\widehat{N_{AB}} \\ & + ab\widehat{N_{CDA}} + bc\widehat{N_{DAB}} + cd\widehat{N_{ABC}} + da\widehat{N_{BCD}} \\ & + ac\widehat{N_{BCDA}} + bd\widehat{N_{ABCD}} + (a+b+c+d)\widehat{N_{ABCD}}. \end{aligned}$$

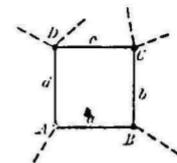


Fig. 9.

So kann man fortfahren, indem man andere, von mehr Drähten gebildete geschlossene Figuren benutzt. Dabei ist jedoch zweierlei zu beachten. Wenn n die Anzahl der Drähte, m die der Verzweigungspunkte in dem gegebenen Netz ist, so besteht \mathfrak{N} aus einer Summe von Kombinationen von je $\mu = n - m + 1$ Elementen; man kann daher bei der angegebenen Zerlegung von \mathfrak{N} in der Bildung der Kombinationen aus den Drähten des gewählten Kreises nicht über solche μ^{ter} Klasse hinausgehen, wenn auch der Kreis mehr als μ Drähte enthält. Da ferner bei der mehrfachen Anwendung der Gleichung (6) der früheren Abhandlung niemals ein Zerfall des Netzes in getrennte Teile vorkommt, so sind alle diejenigen Glieder wegzulassen, bei denen dies durch Entfernen der in ihnen enthaltenen Drähte des benutzten Kreises eintreten würde.

Es ergibt sich also:

Das N eines gegebenen Netzes kann in folgender Weise gebildet werden: Man wähle in ihm einen beliebigen geschlossenen Kreis aus, er möge h Drähte enthalten. Wenn $h \leq \mu$ ist, bilde man die Kombinationen h^{ter} , $h - 1^{ter} \dots 1^{ter}$ Klasse, wenn $h > \mu$ ist, nur die μ^{ter} , $\mu - 1^{ter} \dots 1^{ter}$ Klasse der Widerstände dieser h Drähte, mit Ausnahme derjenigen Kombinationen aus Drähten, durch deren Wegnahme das Netz in getrennte Teile zerfallen würde. Jede dieser Kombinationen multipliziere man mit dem N eines Netzes, das aus dem durch Entfernen der h Drähte gekürzten Netz durch Zusammenlegen der Punkte entsteht, welche durch nicht zu der Kombination beitragende Drähte des Kreises verbunden waren. Die Summe dieser Produkte ist das gesuchte N.

Kommen mehrfache Strecken in dem Netz vor, so ersetzt man sie durch einfache, verfährt nach der vorstehenden Anweisung und berücksichtigt dann die mehrfachen Strecken nach dem Satz in Nr. 14 der früheren Abhandlung.

3. Von besonderem Wert ist der abgeleitete Satz zur Bildung der Zähler der Ausdrücke für die Stromstärke. Wenn in einem Netz, dessen N durch \mathfrak{N} bezeichnet werden möge, die elektromotorische Kraft sich in a befindet und die Stromstärke i_k in k bestimmt werden soll, so erhält man den Zähler nach dem in Nr. 9 meiner früheren Abhandlung angegebenen Verfahren, indem man aus \mathfrak{N}_a , also dem Faktor von a in \mathfrak{N} , zunächst diejenigen Glieder entnimmt, welche frei von den Widerständen aller Drähte sind, die einen geschlossenen, a und h enthaltenden Kreis K_1 bilden, sodann die von den Widerständen eines zweiten solchen Kreises K_2 freien Glieder etc., bis alle zugleich durch a und h gehenden Kreise erschöpft sind. Denkt man sich nun \mathfrak{N} nach dem oben abgeleiteten Satz unter Benutzung des Kreises K_1 gebildet, so erkennt man leicht, daß a allein, ohne mit anderen Widerständen des Kreises K_1 multipliziert zu sein, nur im letzten Glied vorkommt, daß also der Beitrag zum Zähler, den dieser Kreis liefert, der gemeinsame Faktor seiner Kombinationen erster Klasse in dem Ausdruck von \mathfrak{N} ist. Entsprechendes liefern die anderen Kreise. Man kann also den folgenden Satz aussprechen:

Um den Zähler des Bruches zu bilden, welcher mit der elektromotorischen Kraft E multipliziert die Stromstärke i_k in dem

Draht k angibt, hat man, wenn sich E in a befindet, sämtliche geschlossene Kreise $K_1, K_2 \dots K_g$ zu benutzen, welche die beiden Drähte a und k zugleich enthalten. Man entferne zuerst sämtliche Drähte des Kreises K_1 und vereinige die auf ihm liegenden Verzweigungspunkte zu einem einzigen, das N des so entstehenden Netzes ist der Beitrag von K_1 zum Zähler von i_k . Ebenso verfahren man mit den übrigen Kreisen $K_2 \dots K_g$. Bezuglich des Vorzeichens wähle man beliebig eine Richtung des Drahtes k als die positive; stimmt die Richtung des Stromes, welchen E in einem der Kreise K für sich allein erzeugen würde, hiermit überein, so hat der von diesem Kreis gelieferte Beitrag das positive, wenn nicht, das negative Vorzeichen zu erhalten.

Dieser Satz vereinfacht die Bildung der Zähler der Ausdrücke für die Stromstärken sehr wesentlich und macht sie unabhängig von der Kenntnis des N des Netzes.

Wenn mehrfache Strecken in dem Netz vorkommen, so ist in dem Zähler mit ihnen ebenso zu verfahren, wie es in Nr. 14 meiner früheren Abhandlung bezüglich des N vorgeschrieben ist. Ausgenommen sind jedoch die Strecken, welche die elektromotorische Kraft und den zu bestimmenden Strom enthalten; sind diese mehrdrähtig, so ist der Zähler mit dem Produkt der Widerstände aller darin vorkommenden Drähte außer a und k (die die elektromotorische Kraft und den Strom i_k führen) zu multiplizieren. Das ergibt sich leicht, wenn man den eben abgeleiteten Satz auf Netze mit mehrfachen Strecken anwendet.

4. Als Beispiel möge zunächst das Netz der Wheatstone'schen Brücke dienen. Befindet sich die elektromotorische

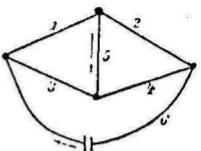


Fig. 10.

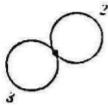


Fig. 10 a.

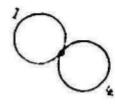


Fig. 10 b.

Kraft in 6 (Fig. 10) und soll die Stromstärke in 5 bestimmt werden, so sind die beiden geschlossenen Kreise 6 1 5 4 und 6 3 5 2 zu benutzen. Wenn der Strom in 6 und die positive Richtung in 5 durch die beigesetzten Pfeile bezeichnet sind,

hat der Beitrag des ersten Kreises zum Zähler das positive, der des zweiten das negative Vorzeichen zu erhalten. Entfernen wir nun die Drähte des ersten Kreises und vereinigen die auf ihm liegenden Verzweigungspunkte, welche hier die sämtlichen des Netzes sind, in einen einzigen, so entsteht aus dem Übriggebliebenen das Netz Fig. 10 a, dessen N nach meiner früheren Abhandlung¹⁾ $w_2 w_3$ ist. Ebenso liefert der zweite Kreis das Netz Fig. 10 b, dessen N $w_1 w_4$ ist. Also ergibt sich der mit E zu multiplizierende Faktor des Zählers: $w_2 w_3 - w_1 w_4$.

Ein zweites Beispiel möge die Ann. d. Phys. 9. p. 1328 behandelte Thomson sche Brücke bilden.²⁾ Die Stromquelle wird in 6 (Fig. 11) in der durch den Pfeil angegebenen Richtung wirkend angenommen und es soll die Stromstärke in 7, dessen

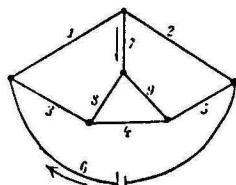


Fig. 11.

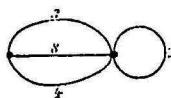


Fig. 11 a.

positive Richtung angegeben ist, bestimmt werden. Die zu benutzenden Kreise sind: 6 1 7 9 5, 6 1 7 8 4 5, 6 3 8 7 2, 6 3 4 9 7 2,

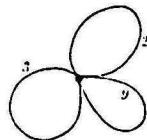


Fig. 11 b.

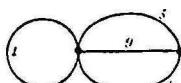


Fig. 11 c.

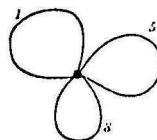


Fig. 11 d.

wovon die zwei ersten positive, die zwei letzten negative Beiträge liefern. Die Entfernung der Drähte der einzelnen Kreise und die Zusammenlegung der betreffenden Verzweigungspunkte

1) W. Feussner, Ann. d. Phys. 9. p. 1311. 1903.

2) Ich benutze die Gelegenheit zu der Bemerkung, daß in dem N dieses Netzes versehentlich die Glieder

$$b_3 (a_1 b_1 (a_2 + b_2) + a_2 b_2 (a_1 + b_1))$$

ausgelassen sind.

ergeben die in Fig. 11 a bis Fig. 11 d verzeichneten Netze, woraus sofort als Zähler des mit E zu multiplizierenden Bruches

$$w_2(w_3(w_4 + w_8) + w_4 w_8) + w_2 w_3 w_9 - w_1(w_5(w_4 + w_9) + w_4 w_9) - w_1 w_5 w_8$$

folgt, oder

$$(w_2 w_3 - w_1 w_5)(w_4 + w_8 + w_9) + (w_2 w_8 - w_1 w_9) w_4,$$

was mit dem in der früheren Abhandlung p. 1328 unten gegebenen Ausdruck übereinstimmt.

Endlich soll noch für das durch Fig. 12 dargestellte Netz, wo die elektromotorische Kraft E in 5 liegen mag, die Stromstärke in 7 bestimmt werden. Die zu benutzenden Kreise sind in diesem Fall: 5 6 7 8, 5 6 7 4 1, 5 2 3 7 8, sie liefern nur positive Glieder, die nach dem obigen Satz unmittelbar hingeschrieben werden können. Es ergibt sich so

$$i_7 = \frac{w_1 w_2 (w_3 + w_4) + w_3 w_4 (w_1 + w_2) + w_2 w_3 w_8 + w_1 w_4 w_6}{N} E.$$

Das N in diesem Ausdruck läßt sich nach Nr. 15 meiner früheren Abhandlung¹⁾ ebenfalls sofort angeben, wenn man sich das Netz durch Zusfügung des vierfachen Verzweigungspunktes, in dem die Drähte 1, 2, 3, 4 zusammenlaufen zu den übrigen entstanden denkt. Nämlich:

$$\begin{aligned} N = & (w_1 w_2 (w_3 + w_4) + w_3 w_4 (w_1 + w_2)) (w_5 + w_6 + w_7 + w_8) \\ & + w_1 w_2 w_7 (w_5 + w_6 + w_8) \\ & + w_2 w_3 w_8 (w_5 + w_6 + w_7) + w_3 w_4 w_5 (w_6 + w_7 + w_8) \\ & + w_1 w_4 w_6 (w_5 + w_7 + w_8) \\ & + w_1 w_3 (w_5 + w_8) (w_6 + w_7) + w_2 w_4 (w_5 + w_6) (w_7 + w_8) \\ & + w_1 w_6 w_7 (w_5 + w_8) \\ & + w_3 w_7 w_8 (w_5 + w_6) + w_3 w_5 w_8 (w_6 + w_7) \\ & + w_4 w_5 w_6 (w_7 + w_8) + w_5 w_6 w_7 w_8. \end{aligned}$$

Wenn gewisse von den eindrähtigen Strecken des Netzes durch mehrdrähtige ersetzt werden, so kann man ohne Schwierig-

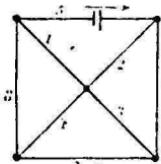


Fig. 12.

1) W. Feussner, Ann. d. Phys. 9. p. 1324. 1902.

keit nach der Schlußbemerkung in Nr. 3 und den früheren Vorschriften von den vorstehenden Ausdrücken zu den neuen übergehen. Wenn z. B. den Drähten 5,

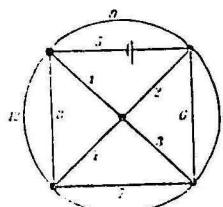


Fig. 13.

$$w_9 w_{11} \left((w_1 w_2 (w_3 + w_4) + w_3 w_4 (w_1 + w_2)) (w_6 + w_{10}) (w_8 + w_{12}) + w_2 w_3 w_8 w_{12} (w_6 + w_{10}) + w_1 w_4 w_6 w_{10} (w_8 + w_{12}) \right).$$

Ebenso ist gemäß Nr. 14 der ersten Abhandlung das neue N nach den angegebenen des Netzes Fig. 12 sofort hinzuschreiben.

5. Natürlich können in allen Ausdrücken statt der Widerstände w der Drähte ihre reziproken Werte, die Leitfähigkeiten l eingeführt werden. Man erhält die neue Form des Ausdrückes für die Stromstärke, indem man Zähler und Nenner der alten Form durch das Produkt sämtlicher w des Netzes dividiert und dann für die w die entsprechenden l einführt. Man hat so einen Bruch aus zwei ganzen homogenen algebraischen Funktionen der l , worin jedes l nur linear vorkommt. Wir wollen diese Form des Nenners durch P bezeichnen und sie „das P des Netzes“ nennen. Die Anzahl der Glieder ist in Nenner und Zähler dieselbe wie vorher, der Grad aber ist im allgemeinen ein anderer, und zwar für P gleich $n - \mu$ oder $m - 1$, also nur abhängig von der Anzahl der Verzweigungspunkte, nicht von der der Drähte im Netz. Je nachdem also n kleiner oder größer als $2(m - 1)$ ist, ist der Grad von N niedriger oder höher als der von P . Es kann daher unter Umständen empfehlenswert sein, die l statt der w in die Rechnung einzuführen. Der Grad des Zählers wird $n - (\mu - 1)$ oder m ; darin ist, wenn die elektromotorische Kraft in a liegt und die Stromstärke i_k in k auszudrücken ist, $l_a l_k$ gemeinschaftlicher Faktor, bei i_a nur l_a .

Leicht zu übersehen ist die Änderung, welche die ausgesprochenen Sätze durch die Einführung der *l* erfahren. Ich will beispielsweise nur einige der hauptsächlichsten anführen. Wenn wir das P eines durch Wegnahme des Drahtes *a* aus

dem ursprünglichen entstehenden Netzes durch P_a , das eines durch Wegnahme desselben Drahtes und Zusammenlegung der beiden Anknüpfungspunkte entstehenden durch $P_{a'}$ bezeichnen, so erhalten wir entsprechend der Gleichung (6) der früheren Abhandlung:

$$P = P_a + l_a P_{a'}.$$

Der in Nr. 14 der früheren Abhandlung abgeleitete Satz verwandelt sich in den folgenden:

Wenn in einem Netz die Strecken $a, b, c \dots$ durch $\alpha, \beta, \gamma \dots$ Drähte gebildet werden, so wird das P dieses Netzes aus dem des entsprechenden mit nur einfachen Strecken dadurch erhalten, daß die Leitfähigkeiten $l_a, l_b, l_c \dots$ jedesmal durch die Summen der Leitfähigkeiten der die einzelnen Strecken bildenden Drähte ersetzt werden.

Der Satz in Nr. 15 der früheren Abhandlung p. 1324 wird zum folgenden:

Wenn zu einem bekannten Netz ein p -sacher Verzweigungs-punkt hinzugefügt wird, dessen Drähte beliebige Ausgangspunkte am Netz haben, so ist das P des neuen Netzes eine Summe, deren Summanden aus sämtlichen Kombinationen $p^{\text{ter}}, p - 1^{\text{ter}} \dots$ bis 1^{ter} Klasse der Leitfähigkeiten der neuen Drähte bestehen, eine jede Kombination multipliziert mit dem P eines Netzes, das aus dem ursprünglichen durch die Vereinigung der Ausgangspunkte aller Drähte der Kombination erhalten wird.

Der oben p. 388 gegebene Satz wird:

Das P eines gegebenen Netzes kann in folgender Weise gebildet werden: Man wähle in ihm einen beliebigen geschlossenen Kreis aus, er möge h Drähte enthalten. Wenn $h \leq \mu$ ist, bilde man die Kombinationen $h - 1^{\text{ter}}, h - 2^{\text{ter}} \dots$ bis 0^{ter} Klasse, wenn $h > \mu$ ist, die $h - 1^{\text{ter}} \dots$ bis $h - \mu^{\text{ter}}$ Klasse der Leitfähigkeiten dieser h Drähte mit Ausnahme derjenigen Kombinationen aus Drähten, durch deren Wegnahme das Netz in getrennte Teile zerfallen würde. Jede dieser Kombinationen multipliziere man mit dem P eines Netzes, das aus dem durch Entfernen der h Drähte gekürzten Netz durch Zusammenlegen der Punkte entsteht, welche durch Drähte der Kombination verbunden waren. Die Summe dieser Produkte ist das gesuchte P .

Der Satz endlich zur Bildung der Zähler (oben p. 388 u. 389) lautet hier folgendermaßen:

Um den Zähler des Bruches zu bilden, welcher mit der elektromotorischen Kraft E multipliziert die Stromstärke i_k in dem Draht k angibt, hat man, wenn sich E in a befindet, sämtliche geschlossene Kreise $K_1, K_2 \dots K_g$ zu benutzen, welche die beiden Drähte a und k zugleich enthalten. Man vereinige zuerst nach Entfernung aller Drähte des Kreises K_1 die auf ihm gelegenen Verzweigungspunkte in einem einzigen. Das P des so entstandenen Netzes mit dem Produkt der Leitfähigkeiten aller Drähte von K_1 multipliziert ist der Beitrag dieses Kreises zu dem Zähler von i_k . Ebenso verfahre man mit den übrigen Kreisen $K_2 \dots K_g$. Das Vorzeichen bestimmt sich ebenso wie oben.

(Eingegangen 11. August 1904.)