

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Ульяновский государственный технический университет

СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

Международный сборник научных трудов

Вып. 9

Ульяновск 2011

УДК 516.7.24/25+519.873

ББК 32.85

С38

УДК 516.7.24/25+519.873

Синтез, анализ и диагностика электронных цепей :

Международный сборник научных трудов / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск : УлГТУ, 2011. – Вып. 9. – 236 с.

Сборник продолжает серию специализированных сборников, изданных и издаваемых в Ульяновском государственном техническом университете (УлГТУ) в рамках международных конференций: «Континуальные логико-алгебраические исчисления и нейроматематика», «Конференция по логике, информатике, науковедению» и «Волгинские чтения».

В данном выпуске обсуждаются теоретические вопросы и практические приложения современной теории электрических цепей. В числе обсуждаемых вопросов: преобразования электрических цепей, структурный и параметрический синтез, анализ и диагностика сложных цепей и сетей, компьютерное символьное и символьно-численное моделирование, автоматизация схемотехнического проектирования.

Рекомендуется для специалистов в области схемотехники аналоговых и аналого-дискретных электрических цепей, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

Редакционная коллегия:

Войциеховски Я. М., полный д-р наук (Dr. hab.), Варшавский технологический ун-т,

Горшков К.С., канд. техн. наук (ответственный секретарь)

Гришкевич А. А., д-р техн. наук, Ченстоховский политехн. ин-т (Польша),

Курганов С. А., д-р техн. наук (зам. ответственного редактора),

Соловьева Е. Б., д-р техн. наук, СПбГЭУ – ЛЭТИ им. В.И.Ленина,

Филаретов В. В., д-р техн. наук (ответственный редактор).

Научное издание

**СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА
ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

Международный сборник научных трудов

Выпуск 9

Под редакцией В. В. Филаретова

Компьютерная верстка К. С. Горшков

Подписано в печать 22.12.2011. Формат 60x84/16. Бумага писчая.

Усл.печ.л. 13,87. Тираж 100 экз. Заказ

Ульяновский государственный технический университет

432027, Ульяновск, Северный Венец, 32

Типография УлГТУ. 432027, Ульяновск, Северный Венец, 32

ISBN

© Авторы, 2011

© Оформление. УлГТУ, 2011

**ВЫПУСК посвящается
Георгу Симону Ому**

СИНТЕЗ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

МЕТОД СТРУКТУРНОГО СИНТЕЗА НЕУРАВНОВЕШЕННОГО ПАССИВНОГО ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА

Е. Н. Меньшов, А. С. Егорушкин

В [1–3] предложен оригинальный метод синтеза линейных пассивных четырехполюсников по передаточной функции. Он основан на разложении передаточной функции в такую систему уравнений, которая являлась бы изоморфной системе уравнений электрической цепи. За основу берется система уравнений цепи, составленная по методу узловых напряжений (МУН), и далее устанавливается эквивалентное соответствие между этой системой и системой уравнений разложения передаточной функции. Результатом реализации являлся топологический граф канонической структуры с обобщенными ветвями, представляющие собой проводимости. Методология реализации обобщенных ветвей позволяет определить оптимальную схему четырехполюсника. В данной работе приведем развитие некоторых положений методики синтеза.

В работе [4] высказывается теоретическое положение, что степень сложности линейных RLC схем определяется числом конечных и не лежащих в начале координат нулей определителей систем контурных или узловых напряжений. Поэтому, во-первых, будем применять такие разложения передаточной функции в систему операторных алгебраических уравнений, число уравнений в которых соответствовало бы числу полюсов передаточной функции для случая, если корни отрицательные или действительные. Если полюса комплексно сопряженные, то число уравнений равно числу пар таких полюсов. Во-вторых, в работах [1–3] использованы два типа разложения передаточной функции (1): один тип традиционный (2), широко применяемый в теории цепей и теории автоматического управления, другой – оригинальный (3)-(4),

разработанный автором [1].

$$U_{\text{вых}} = \frac{B_n(p)}{A_n(p)} = \left(\frac{p+\lambda_n}{p+p_n} \right) \left(\frac{p+\lambda_{n-1}}{p+p_{n-1}} \right) \dots \left(\frac{p+\lambda_1}{p+p_1} \right) b_n U_{\text{вх}}, \quad (1)$$

$$\begin{cases} (p + p_n)U_{\text{вых}} - (p + \lambda_n)f_{n-1} = 0, \\ (p + p_{n-1})f_{n-1} - (p + \lambda_{n-1})f_{n-2} = 0, \\ \dots \\ (p + p_1)f_1 = b_n(p + \lambda_1)U_{\text{вх}}, \end{cases} \quad (2)$$

где b_n – коэффициент при старшей степени p полинома $B_n(p)$ степени n ; $-p_1, -p_2, \dots, -p_n$ – отрицательные нули полинома знаменателя; $-\lambda_1, -\lambda_2, \dots, -\lambda_n$ – отрицательные нули полинома числителя. Для реализации второго типа разложения передаточной функции представляем $B_n(p)$ в следующем виде

$$B_n(p) = B_{n-1}(p)(p + p_1) + (b_{1,1}p + b_{0,n})$$

и осуществляем замену переменной $f_1 = (b_{1,1}p + b_{0,n})(p + p_1)^{-1}U_{\text{вх}}$, получаем систему из двух уравнений

$$\begin{cases} (p + p_2)(p + p_3) \dots (p + p_n) = B_{n-1}(p)U_{\text{вх}} + f_1, \\ (p + p_1)f_1 = (b_{1,1}p + b_{0,n})U_{\text{вх}}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $B_{n-1}(p)$ – полином $(n-1)$ порядка, который определяется на основе метода неопределенных коэффициентов.

Проводя аналогичное разложение каждого остаточного полинома $B_k(p)$, приходим к следующему виду

$$\begin{cases} (p + p_n)U_{\text{вых}} - f_{n-1} = pb_n U_{\text{вх}}, \\ (p + p_{n-1})f_{n-1} - f_{n-2} = pf_{n-1,0} U_{\text{вх}}, \\ \dots \\ (p + p_1)f_1 = (f_{1,0}p + b_{0,n})U_{\text{вх}}. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь $f_{n-1,0}, \dots, f_{1,0}$ постоянные коэффициенты. Чередуя оба способа разложения, можно получить гибридные системы разложения.

Представим системы уравнений (2), (4) в матрично-векторной форме

$$P\vec{f} = \vec{b}, \quad (5)$$

где P – квадратная матрица размером $n \times n$, \vec{f} – n -мерный вектор некоторого функционального пространства V_n , $\vec{b} = U_{\text{вх}}B$ – n -мерный вектор с компонентами для (2) и (4) соответственно

$$\vec{b} = U_{\text{вх}}[0, 0, \dots, b_n(p + \lambda_1)]^t, \quad \vec{b} = U_{\text{вх}}[pb_n, pf_{n-1,0}, \dots, (f_{1,0}p + b_{0,n})]^t. \quad (6)$$

Представляем отклик $U_{\text{вых}}$ и воздействие $U_{\text{вх}}$ компонентами $n+1$ -

мерного вектора узловых напряжений $\vec{U}_{n+1} = [U_{\text{вых}}, U_{n-1}, \dots, U_1, U_{\text{вх}}]^t$. Тогда для пассивной схемы система уравнений МУН в матрично-векторной форме будет

$$(AYA^t)_{n+1} \vec{U}_{n+1} = \vec{I}. \quad (7)$$

Здесь $\vec{I} = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, J_{\text{вх}}]$ – $n+1$ -мерный вектор источников тока, где $J_{\text{вх}}$ – ток ветви идеального генератора напряжений (входной ток), $(AYA^t)_{n+1}$ – матрица узловых проводимостей $n+1$ -порядка. Представляем (7) в форме

$$\begin{bmatrix} (AYA^t)_n A_1 \\ A_1^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{U}_n \\ U_{\text{вх}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ J_{\text{вх}} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где A_1 – матрица столбец n -порядка, A_2 – матрица первого порядка. На основе (8) записываем систему уравнений цепи, изоморфной системе (5)

$$(AYA^t)_n \vec{U}_n = -U_{\text{вх}} A_1 = \vec{b}. \quad (9)$$

Так как изоморфные модели можно представлять одну через другую, устанавливаем эквивалентное преобразование между уравнениями (7) и (9)

$$\vec{f} = \Gamma \vec{U}_n, \quad QP\Gamma = (AYA^t)_n, \quad QB = -A_1. \quad (10)$$

Здесь Γ и Q квадратные матрицы преобразования, определяющие число ветвей и их соответствие узлам схемы. Необходимо применять такие преобразования исходных систем уравнений разложения передаточной функции в систему уравнений МУН, чтобы сохранялось строгое соответствие между определителем системы уравнений МУН и характеристическим уравнением передаточной функции. Поэтому коэффициенты матрицы должны удовлетворять условию инвариантности исходной передаточной функции (1), которое выражается равенством определителей матриц

$$\|(AYA^t)_n\| = \|Q\| \cdot \|P\| \cdot \|\Gamma\| = (p + p_n)(p + p_{n-1})(p + p_1). \quad (11)$$

Если линейное преобразование (5) подобное (линейный оператор P отображает n -мерное векторное пространство само в себя, т.е. вектора \vec{f} и \vec{b} выражаются в одном и том же базисе), тогда при переходе к новому базису (к выражению (9)) матрица $QP\Gamma$ подобна матрице P [4]. Это означает условие $Q = \Gamma^{-1}$.

Из сопоставления сигнальных графов уравнений (7) и (9) в [1, 2] показано, что структура матриц Γ и Q должна быть нижне-треугольной, а искомый топологический граф синтезируемой схемы будет образовываться из сигнального графа уравнений (2) или (4) добавлением дополнительного (опорного) узла с соответствующими дополнительными ребрами.

Пример. Задана передаточная функция по напряжению (12), для которой корни полинома знаменателя вещественные и отрицательные ($-p_1$, $-p_2$). Определить все возможные структурные реализации (12).

$$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{(p + p_2)(p + p_1)}. \quad (12)$$

1. Разложим (12) в систему уравнений (4) с матрицами разложения P и B , которой соответствует сигнальный (рис. 2,а) и топологический (рис. 2,б) графы.

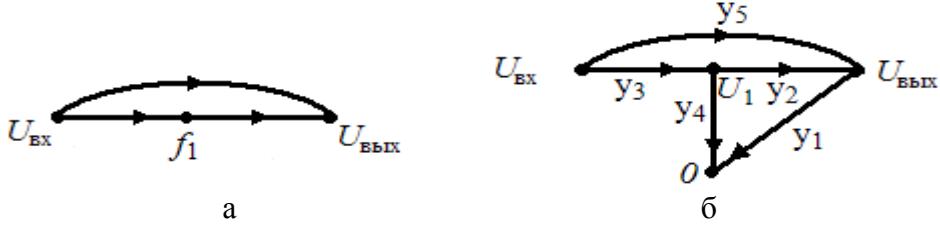


Рис. 2: а – Сигнальный граф системы уравнений (4) второго порядка; б – топологический граф, реализуемый системой уравнения (4) второго порядка

Соблюдая условие (11), соответствующие матрицы принимают вид:

$$P = \begin{bmatrix} p + p_2 & -1 \\ 0 & p + p_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_2 p \\ (b_1 - b_2 p_1)p + b_0 \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_1 \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ q_2 & \frac{1}{q_1 \gamma_2} \end{bmatrix},$$

$$QP\Gamma = \begin{bmatrix} q_1(p + p_2 - \gamma_1) & -q_1 \gamma_2 \\ \frac{\gamma_1}{q_1 \gamma_2}(p + p_1) + q_2(p + p_2 - \gamma_1) & \frac{p + p_1}{q_1} - q_2 \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad -A_1 = \begin{bmatrix} y_5 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

$$QB = \begin{bmatrix} q_1 b_2 p \\ \frac{b_1 - b_2(p_1 - q_1 q_2 \gamma_2)}{q_1 \gamma_2} p + \frac{b_0}{q_1 \gamma_2} \end{bmatrix}, \quad (AYA^t) = \begin{bmatrix} (y_1 + y_2 + y_5) & -y_2 \\ -y_2 & (y_2 + y_3 + y_4) \end{bmatrix}.$$

Из условий (10) следуют следующие соотношения:

$$\frac{\gamma_1}{q_1 \gamma_2}(p + p_1) + q_2(p + p_2 - \gamma_1) = -q_1 \gamma_2, \quad \text{которое приводит к}$$

$$y_2 = q_1 \gamma_2 = \sqrt{\gamma_1(p_2 - p_1 - \gamma_1)}, \quad y_5 = q_1 b_2 p, \quad y_3 = \frac{b_1 - b_2(p_1 + \gamma_1)}{q_1 \gamma_2} p + \frac{b_0}{q_1 \gamma_2}, \quad (13)$$

где $(p_2 - p_1) > \gamma_1 > 0$, $q_1 > 0$, $\gamma_2 > 0$, $q_2 = -\frac{\gamma_1}{q_1 \gamma_2}$, $q_2 < 0$, $\frac{b_1}{b_2} \geq (p_1 + \gamma_1)$;

$$y_1 = q_1(1 - b_2)p + q_1(p_2 - \gamma_1 - \gamma_2); \quad (14)$$

$$y_4 = \frac{\gamma_2 + b_2(p_1 + \gamma_1) - b_1}{q_1 \gamma_2} p + \frac{\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1(p_1 + \gamma_1) - \gamma_1 p_2 - b_0}{q_1 \gamma_2}, \quad (15)$$

где $p_2 \geq \gamma_1 + \gamma_2$, $b_2(p_1 + \gamma_1) - b_1 \geq 0$, $\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1(p_1 + \gamma_1) - \gamma_1 p_2 - b_0 \geq 0$.

Выражения (13)–(15) дают реализацию резистивно-емкостной схемы (рис. 3,а) и допускают её множественное параметрическое разнообразие,

причем в ветви y_3 емкостная проводимость, а в ветвях y_1 и y_4 емкостная и активная проводимости могут принимать нулевые значения.

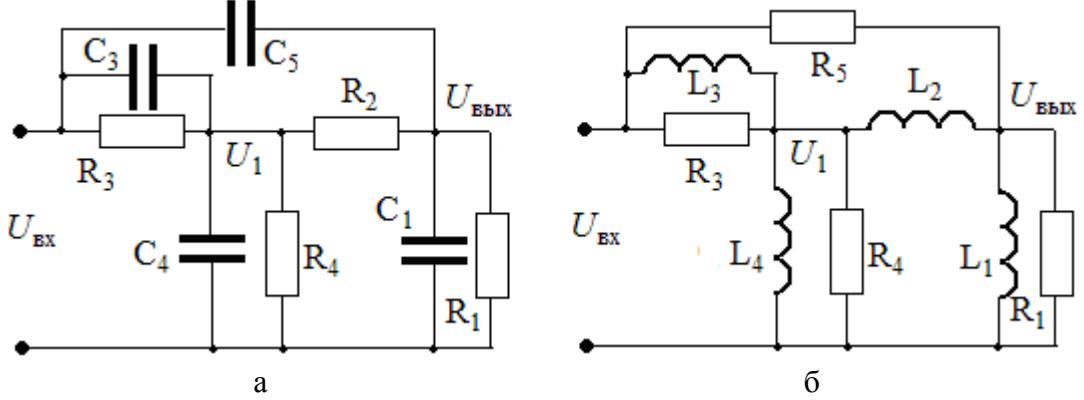


Рис. 3. Синтезированные схемы, соответствующие системе уравнений (4):
а – резистивно-емкостная реализация; б – резистивно-индуктивная реализация

2. Преобразуем систему уравнений (4), поделив каждый её член на оператор p , тогда все матрицы для сигнального и топологического графов, представленных на рис. 2, примут вид

$$P = \begin{bmatrix} 1 + \frac{p_2}{p} & -\frac{1}{p} \\ 0 & 1 + \frac{p_1}{p} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_2 \\ \frac{(b_1 - b_2 p_1)p + b_0}{p} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ q_2 & \frac{1}{q_1 \gamma_2} \end{bmatrix},$$

$$QP\Gamma = \begin{bmatrix} q_1 \left(\frac{p + p_2 - \gamma_1}{p} \right) & -\frac{q_1 \gamma_2}{p} \\ \frac{\gamma_1}{q_1 \gamma_2 p} (p + p_1) + \frac{q_2 (p + p_2 - \gamma_1)}{p} & \frac{p + p_1}{q_1 p} - \frac{q_2 \gamma_2}{p} \end{bmatrix}, \quad -A_1 = \begin{bmatrix} y_5 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

$$QB = \begin{bmatrix} q_1 b_2 \\ \frac{b_1 - b_2 (p_1 - q_1 q_2 \gamma_2)}{q_1 \gamma_2} + \frac{b_0}{q_1 \gamma_2 p} \end{bmatrix}, \quad (AYA^t) = \begin{bmatrix} (y_1 + y_2 + y_5) & -y_2 \\ -y_2 & (y_2 + y_3 + y_4) \end{bmatrix}.$$

$$y_2 = \frac{q_1 \gamma_2}{p} = \frac{\sqrt{\gamma_1(p_2 - p_1 - \gamma_1)}}{p}, \quad y_5 = q_1 b_2, \quad y_3 = \frac{b_1 - b_2(p_1 + \gamma_1)}{q_1 \gamma_2} + \frac{b_0}{q_1 \gamma_2 p}, \quad (16)$$

$$y_1 = q_1(1 - b_2) + \frac{q_1(p_2 - \gamma_1 - \gamma_2)}{p}; \quad (17)$$

$$y_4 = \frac{\gamma_2 + b_2(p_1 + \gamma_1) - b_1}{q_1 \gamma_2} p + \frac{\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_1(p_1 + \gamma_1) - \gamma_1 p_2 - b_0}{q_1 \gamma_2}. \quad (18)$$

Условия реализации те же самые, что и для первого примера. Выражения (16)–(18) дают реализацию резистивно-индуктивной схемы (рис. 3,б) и допускают её множественное параметрическое разнообразие, причем в ветви y_3 активная проводимость, а в ветвях y_1 и y_4 индуктивная и активная проводимости могут принимать нулевые значения. Заметим, что

для данной реализации модернизированная система уравнений (4) дает передаточную функцию, приводимую к передаточной функции (12)

$$W(p) = \frac{b_2 + b_1 p^{-1} + b_0 p^{-2}}{(1+p_2 p^{-1})(1+p_1 p^{-1})} = \frac{p^2(b_2 p^2 + b_1 p + b_0)}{p^2(p+p_2)(p+p_1)}.$$

3. Если нули числителя функции (12) отрицательные ($-\lambda_1, -\lambda_2$), тогда разложим её в систему уравнений (2) с матрицами разложения P и B , которой соответствует сигнальный (рис. 4,а) и топологический (рис. 4,б) графы.

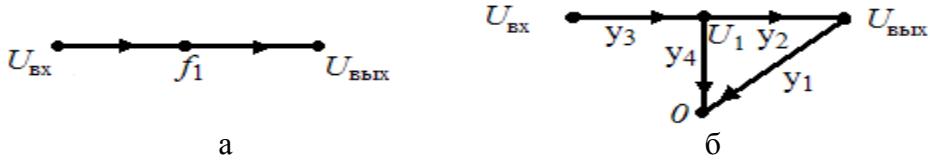


Рис. 4: а – Сигнальный граф системы уравнений (2) второго порядка;
б – топологический граф, реализуемый системой уравнения (2) второго порядка

$$P = \begin{bmatrix} p + p_2 & -(p + \lambda_2) \\ 0 & (p + p_1) \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2(p + \lambda_1) \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_1 \gamma_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ q_2 & \frac{1}{q_1 \gamma_2} \end{bmatrix},$$

$$Q P \Gamma = \begin{bmatrix} q_1(p + p_2 - \gamma_1(p + \lambda_2)) & -q_1 \gamma_2(p + \lambda_2) \\ \frac{\gamma_1}{q_1 \gamma_2}(p + p_1) + q_2(p + p_2 - \gamma_1(p + \lambda_2)) & \frac{p + p_1}{q_1} - q_2 \gamma_2(p + \lambda_2) \end{bmatrix},$$

$$Q B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_2(p + \lambda_1)}{q_1 \gamma_2} \end{bmatrix}, \quad -A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad (AYA^t) = \begin{bmatrix} (y_1 + y_2) & -y_2 \\ -y_2 & (y_2 + y_3 + y_4) \end{bmatrix}.$$

Из условий (10) следуют следующие соотношения:

a) $\frac{\gamma_1}{q_1 \gamma_2}(p + p_1) + q_2(p + p_2 - \gamma_1(p + \lambda_2)) = -q_1 \gamma_2(p + \lambda_2)$, которое приводит к

$$\gamma_2 q_1 = \frac{\gamma_1}{q_2} \left(\frac{\lambda_2 - p_1}{p_2 - \lambda_2} \right);$$

$$q_2 = -\sqrt{\frac{-\gamma_1(\lambda_2 - p_1)}{(1 - \gamma_1)(p_2 - \lambda_2) + (\lambda_2 - p_1)}} \quad (19)$$

$$y_2 = q_1 \gamma_2(p + \lambda_2), \quad y_3 = \frac{b_2(p + \lambda_1)}{q_1 \gamma_2}; \quad (20)$$

б) $y_1 = q_1(1 - \gamma_1 - \gamma_2)p + q_1(p_2 - \lambda_2(\gamma_1 + \gamma_2));$ (21)

в) $y_4 = \left[\frac{1}{q_1} \left(1 - \frac{b_2}{\gamma_2} \right) - \gamma_2(q_1 + q_2) \right] p + \frac{1}{q_1} \left(p_1 - \frac{b_2 \lambda_1}{\gamma_2} \right) - \gamma_2 \lambda_2(q_1 + q_2),$ (22)

где $\gamma_1 < 0, \quad q_2 < 0, \quad q_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0, \quad 1 \geq \gamma_1 + \gamma_2, \quad \frac{p_2}{\lambda_2} \geq \gamma_1 + \gamma_2,$

$$\frac{1}{q_1} \left(1 - \frac{b_2}{\gamma_2} \right) - \gamma_2 (q_1 + q_2) \geq 0, \quad \frac{1}{q_1} \left(p_1 - \frac{b_2 \lambda_1}{\gamma_2} \right) - \gamma_2 \lambda_2 (q_1 + q_2) \geq 0.$$

Выражения (20)–(22) дают реализацию резистивно-емкостной схемы (рис. 5,а) и допускают её множественное параметрическое разнообразие, причем в ветвях y_1 и y_4 емкостная и активная проводимости могут принимать нулевые значения.

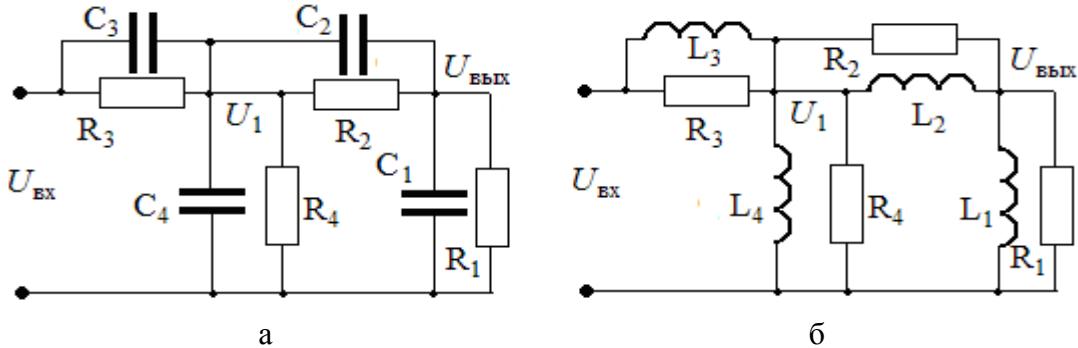


Рис. 5. Синтезированные схемы, соответствующие системе уравнений (2): а – резистивно-емкостная реализация; б – резистивно-индуктивная реализация.

Это так называемая лестничная схема, которая (и это следует из (20)) требует отрицательных значений нулей полинома числителя функции (12).

Аналогично, как и в примере 2 разложение в систему уравнений (2) дает также резистивно-индуктивную реализацию (рис. 5,б).

4. Метод допускает при действительных отрицательных полюсах передаточной функции реализацию схем с гибридными типами элементов, соединяющих каскады RC (из рис.3,а или 5,а) с каскадами RL (из рис.3,б или 5,б). Эти схемы реализуются тогда, когда только часть уравнений систем (4) и (2) подвергаются делению на оператор p .

Например:

$$P = \begin{bmatrix} p + p_2 & -1 \\ 0 & 1 + \frac{p_1}{p} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_2 p \\ (b_1 - b_2 p_1) + \frac{b_0}{p} \end{bmatrix}, \quad \Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ q_2 & \frac{1}{q_1 \gamma_2} \end{bmatrix},$$

$$QP\Gamma = \begin{bmatrix} q_1(p + p_2 - \gamma_1) & -q_1 \gamma_2 \\ \frac{\gamma_1}{q_1 \gamma_2} \left(\frac{p + p_1}{p} \right) + q_2(p + p_2 - \gamma_1) & \frac{p + p_1}{q_1 p} - q_2 \gamma_2 \end{bmatrix}, \quad -A_1 = \begin{bmatrix} y_5 \\ y_3 \end{bmatrix},$$

$$QB = \begin{bmatrix} q_1 b_2 p \\ \frac{b_1 - b_2 p_1 + \frac{b_0}{q_1 \gamma_2}}{q_1 \gamma_2} p + q_2 b_2 p \end{bmatrix}, \quad (AYA^t) = \begin{bmatrix} (y_1 + y_2 + y_5) & -y_2 \\ -y_2 & (y_2 + y_3 + y_4) \end{bmatrix}.$$

Из условия (10) должны следовать соотношения:

$$a) \quad \frac{\gamma_1}{q_1 \gamma_2} \left(\frac{p + p_1}{p} \right) + q_2(p + p_2 - \gamma_1) = -q_1 \gamma_2,$$

$$b) \quad y_5 = q_1 b_2 p, \quad y_3 = \frac{b_1 - b_2 p_1}{q_1 \gamma_2} + \frac{b_0}{q_1 \gamma_2 p} + q_2 b_2 p.$$

Проводимость y_3 может содержать один реактивный элемент только тогда, когда коэффициент $b_2=0$. Реализация ветвей будет иметь следующий вид:

$$y_3 = \frac{b_1}{q_1 \gamma_2} + \frac{b_0}{q_1 \gamma_2 p}, \quad y_1 = q_1(p + p_2 - \gamma_1) - q_1 \gamma_2, \quad y_2 = q_1 \gamma_2, \quad q_1(p_2 - \gamma_2) \geq 0, \quad (23)$$

$$y_5 = 0, \quad y_4 = \frac{1}{q_1} + \frac{p_1}{q_1 p} - \frac{b_0}{q_1 \gamma_2 p} - \frac{b_1}{q_1 \gamma_2} - (q_1 + q_2) \gamma_2, \quad \gamma_1 = p \gamma_0, \quad \gamma_0 = \frac{q_1 q_2 \gamma_2}{q_1 q_2 \gamma_2 - 1}, \quad (24)$$

$$\frac{q_2 \gamma_2}{q_1 q_2 \gamma_2 - 1} + q_2 p_2 + q_1 \gamma_2 = 0, \quad q_1 > 0, \quad \gamma_2 > 0, \quad q_2 < 0, \quad \frac{1}{q_1} - \frac{b_1}{q_1 \gamma_2} - (q_1 + q_2) \gamma_2 \geq 0. \quad (25)$$

Выражения (23)–(25) дают реализацию резистивно-реактивной схемы (рис.6) и допускают её множественное параметрическое разнообразие.

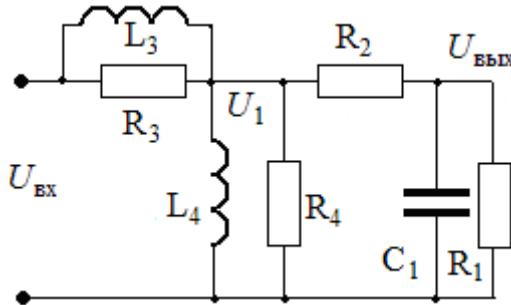


Рис. 6. Синтезированная схема, соответствующая системе уравнений (2) в случае $b_2=0$.

Выводы

1. Предложенный метод подтверждает связь степени сложности схемы с числом полюсов схемной функции и позволяет провести структурный синтез пассивных неуравновешенных четырехполюсников как минимально-фазовых, так и не минимально фазовых в широком диапазоне реализации типов элементов (RLC, RC, RL). Метод устанавливает аналитическую связь между элементами схемы и корректирует наличие некоторых ребер исходного топологического графа. Множество параметрической реализации позволяет вводить целевые функции для удовлетворения специфическим требованиям.

2. Метод, проиллюстрированный на базе передаточной функции второго порядка, позволяет решить задачу синтеза в аналитической форме. Для более сложных передаточных функций синтез необходимо проводить машинным методом на компьютере по специальной программе, которая позволит рассмотреть совокупность комбинаций всех возможных путей реализации. Метод может быть полезен для реализации схем замещений электрокомпонентов [6].

Литература

1. Меньшов Е. Н. Разработка помехоподавляющих сетевых устройств для систем питания цифровой аппаратуры: дис. ... канд. техн. наук; Ульян. политехн. ин-т; науч. рук. Ю. А. Савиновский; науч. консульт. Р.Х. Бальян– Ульяновск: УлПИ, 1990. – 204 с.– Библиогр.: 102 назв.
2. Савиновский Ю.А., Меньшов Е.Н. Синтезирование электрической модели пассивного четырехполюсника; Ред. журн. Изв. высш. учеб. заведений. Радиоэлектроника. – Киев, 1989. – 14 с. – Библиогр.: 7 назв. – Деп. в ВИНИТИ 02.08.89, № 5155-В89.
3. Савиновский Ю. А. , Меньшов Е.Н. Синтез электрической модели пассивного четырехполюсника // Известия вузов. Радиоэлектроника. – 1990. – Т. 33.– № 3. – С. 96.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.
5. Сешу С., Рид М.Д. Линейные графы и электрические схемы.– М.: Высшая школа, 1971.– 448 с.
6. Меньшов Е.Н., Дворянинов К.В. Методы синтеза эквивалентных схем // Материалы 2-й Международной науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы энергетики АПК», апрель 2011г., г. Саратов. – СГАУ: Саратов, 2011. – С. 196–198.

Меньшов Евгений Николаевич – к.т.н., доцент УлГТУ, г. Ульяновск.
E-mail: men@ulstu.ru.

Егорушкин Александр Сергеевич – студент третьего курса СФ УлГТУ.

ОПТИМИЗАЦИЯ МОРФОЛОГИЧЕСКОГО ГРАФА РЕШЕНИЙ

С. А. Сухов

Введение. Имеется множество походов к решению задачи структурного синтеза. Но наибольшее распространение в системах САПР получили различные методы, принадлежащие к классу комбинаторно-логических. В основе данных методов лежит организованный перебор в массиве решений. Основной проблемой комбинаторно-логических методов поиска решений является выбор варианта из множества очень большой конечной или даже счетной мощности. В данной работе рассматривается один из возможных подходов позволяющий оптимизировать формирование графа решений и выборки проектного решения.

Формирование морфологического графа решений. Предположим, что имеется функциональное описание технического объекта (ТО), представленное множеством подфункций $F = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, которые в комплексе обеспечивают реализацию основной функции ТО. Ставится задача: на основе имеющегося множества F получить возможные маршруты технических реализаций $M(F)$, выполнив оптимизацию последовательности и содержания F .

Для решения задачи сформируем граф решений $G(T(f_i), R)$. Поставим в соответствии каждой подфункции f_i множество $T_i = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$ содержащее описания известных технических реализаций подфункции f_i . Рассмотрим отношения между элементами множеств $T(f_i)$ и $T(f_j)$. Факт наличия отношения $r_k(T(f_i), T(f_j))$, $r_k \in R$ (опыт совместного использования технических реализаций) отобразим в виде ребра в графе решений G .

В процессе формирования графа G возможны следующие случаи:

1. Если $r_k(T(f_i), T(f_j))$ то $+(f_{j+1})$. Означает, что если имеет место отношение r_k , то появляется необходимость в добавлении подфункции f_{j+1} , связанных с ней множества технических реализаций $T(f_{j+1})$ и соответствующих отношений (рис 1).
2. Если $r_k(T(f_i), T(f_j))$, то $-(f_m)$. Означает, что если имеет место отношение r_k , то возможно игнорирование некоторой подфункции f_m и соответствующих отношений (рис. 2).
3. Если $r_k(T(f_i), T(f_j))$, то $-(f_{j+1})$ и $+(f_m)$. Означает, что если имеет место отношение r_k , то подфункция f_{j+1} заменяется на подфункцию f_m с соответствующим множеством $T(f_m)$ и набором отношений (рис. 3).

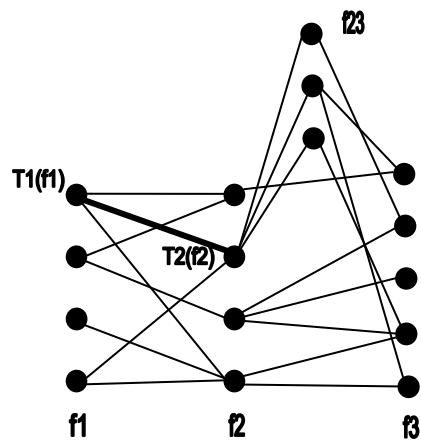


Рис 1. Добавление подфункции

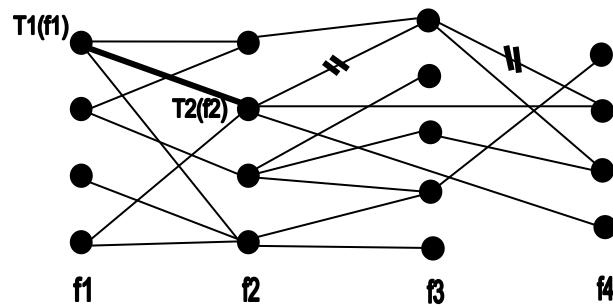


Рис 2. Игнорирование подфункции

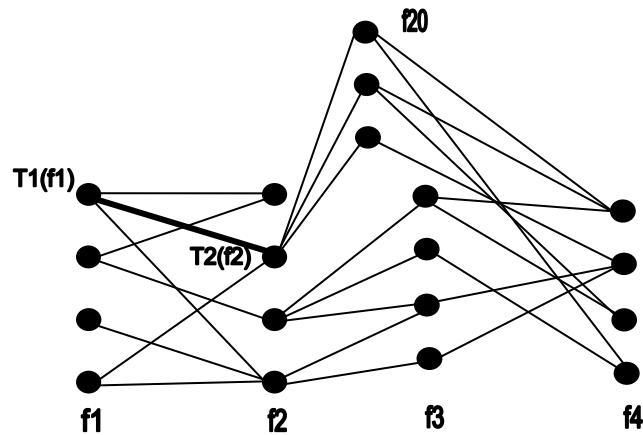


Рис. 3. Замена подфункции

Оптимизация поиска проектных решений. Для оптимизации процедуры поиска решений в полученном графе G будем использовать следующие правила:

1. Если для отношения $r_k(T(f_i), T(f_j))$ имеется множество свойств $P = \{p_1, p_2, \dots, p_l\}$ таких что $(P \neq P_{np})$, где P_{np} – свойства проектируемого объекта, то отношение $r_k(T(f_i), T(f_j))$ удаляется (рис. 4).

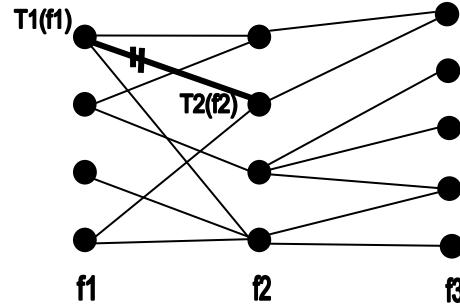


Рис. 4. Удаление конфликтного отношения

2. Если для отношения $r_k(T(f_i), T(f_j))$ существует $r_m(T(f_i), T(f_j))$ и эти отношения эквивалентны (взаимозаменяемые), то отношение, $r_m(T(f_i), T(f_j))$ можно удалить из графа (рис. 5).

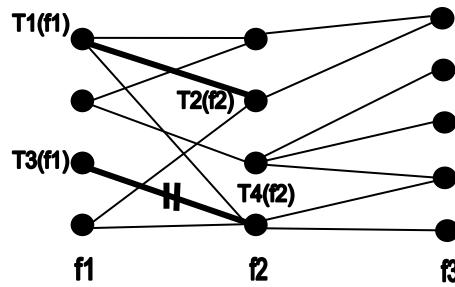


Рис. 5. Удаление эквивалентного отношения

3. Если имеет место отношение $r_k(T(f_i), T(f_j))$, и обязательно использование отношения $r_m(T(f_j), T(f_l))$ (операция принуждения), то все отношения для $T_m(f_j)$ кроме $r_m(T(f_j), T(f_l))$ можно удалить (рис. 6).

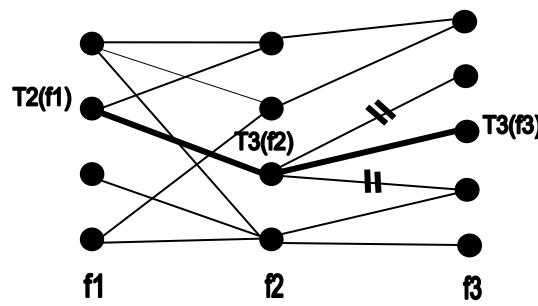


Рис. 6. Использование принудительного отношения

В реальных проектных ситуациях, количество технических реализаций подфункций $k = |T_i|$, а также степень разбиения на подфункции могут достигать десяток, сотен значений. В этом случае резко возрастает трудоемкость решения задачи ввиду большого количества переборов по графу.

Внесем изменения в граф G . Ребро в графе преобразуем в дугу, если отношение $r_k(T(f_i), T(f_j))$ разных долей графа отражает успешный опыт совместного использования в объектах рассматриваемого класса. Наличие ребра в графе отражает факт успешного отношения $r_k(T(f_i), T(f_j))$, имевший место в объектах иного от рассматриваемого класса. Отсутствие ребра, рассматривается как невозможность совместного использования технических реализаций.

Назначим ребрам (дугам) графа G вес m , отражающий количество ранее использованных отношений между парой технических реализаций $m = \sum_1^p r_k(T(f_i), T(f_j))$. Сама идея назначения весовых характеристик ребрам графа не нова. Но в данном случае, речь идет именно о количестве ранее использованных отношений, рассматриваемых в контексте текущего класса проектируемого объекта. В данном случае вес m отражает количественно накопленный опыт. Вес отношения $m=0$, информирует о том, что опыт использования отношения $r_k(T(f_i), T(f_j))$ отсутствует.

Пример графа решений для поиска маршрутов технических реализаций показан на рис.7.

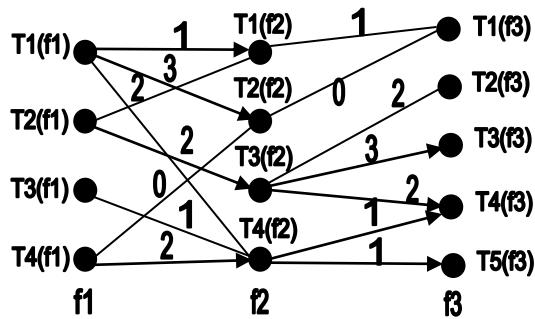


Рис.7. Модифицированный граф решений

С учетом применения описанных выше правил и системы весовых отношений программно реализован алгоритм поиска маршрутов технических реализаций на основе функционального описания ТО.

Литература

1. Божко А.Н., Толпаров А.Ч. Структурный синтез на элементах с ограниченной сочетаемостью // Инженерное образование.– 2004.– №5.
2. Одрин В.М., Карташов С.С. Морфологический анализ систем: построение морфологических таблиц. Киев: Наукова думка, 1977.
3. Свищева Э.А. Структурный синтез неизоморфных систем с однородными компонентами / Харьков : ХТУРЕ, 1998.
4. Сухов С.А. Модель для решения задачи структурно-параметрического синтеза проектных решений // Межвузовский сборник научных трудов «Математические методы и модели: Теория, приложения и роль в образовании» / Ульяновск, УлГТУ, 2009. С. 271–276.

Сухов Сергей Альбертович – доцент кафедры «Системы автоматизированного проектирования» Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ). e-mail: ijt@ulx.ru

Комментарий редактора

Следующая статья, публикуемая в порядке обсуждения, не случайно помещена в этот выпуск, посвященный Ому. Эта статья написана живым языком, и в ней обсуждается оригинальное современное применение первой в истории мостовой схемы – «мостика Уитстона». Как известно, Ом и Уитстон были современниками. В настоящий выпуск помещена краткая биография Ома.

Уитстон пытался решить задачу анализа произвольной электрической цепи и подошел к открытию (в 1844 году), но не открыл, законы, которые вскоре после его попытки в 1845 году сформулировал студент Кирхгоф. На страницах выпуска также помещено подробное обсуждение топологических правил Кирхгофа, в основе которых лежат его законы.

В порядке обсуждения

ТРУБКА УИТСТОНА КАК ПРИГЛАШЕНИЕ К СИНТЕЗУ ЭЛЕКТРОННЫХ КРИСТАЛЛОВ

Г. Ф. Прищепов

Трубка Уитстона получается при перемещении мостика Уитстона, изображённого в системе координат X Y, по оси Z. Далее Z-схемы мостиков следует соединить RC-цепями, чтобы создать трёхмерную однородную электронную структуру, рукотворный электронный кристалл. Трубка Уитстона способна одновременно передать два разных сигнала и выделить каждый сигнал на выходе. Для разделения каналов не требуется диэлектрик, частотные, временные или другие методы фильтрации сигналов. Материал излагается в свете задач микро- и наноэлектроники.

Мостик Уитстона. Есть довольно старое изобретение, которое сегодня – в эпоху микро- и наноэлектроники – обретает особую ценность. Это мостик Чарльза Уитстона образца 1843 года [1]. Уитстон усовершенствовал его для измерения сопротивлений. Мостик составлен из четырёх резисторов – рис. 1. Простейшее *условие баланса мостика*: $R_1=R_2=R_3=R_4=R$. При этом вольтметр V_2 , включённый в горизонтальную диагональ CD показывает 0 вольт. Пусть вольтметр V_2 имеет нуль посередине шкалы. Тогда, если R_2 больше, чем R , то стрелка V_2 отклонится вправо (покажет плюс-напряжение), а если R_2 меньше R , то стрелка покатится влевую сторону шкалы V_2 .

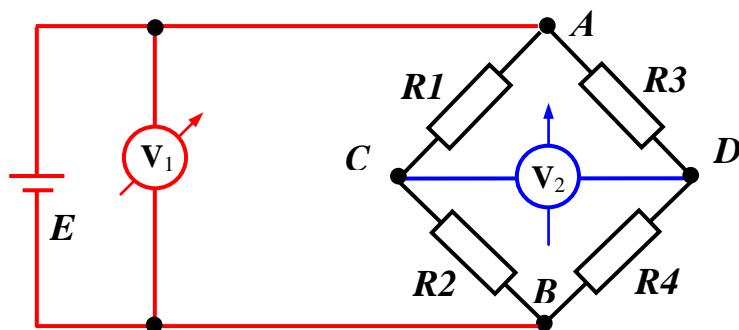


Рис. 1. Мостик Уитстона

Почти сто лет мостик Уитстона служил омметром, но после того, как возникла радиоэлектроника, в очертаниях мостика Конструкторы разглядели как минимум три принципа построения электронных устройств.

1. Принцип электрической развязки элементов и схем. Отметим, что вертикальная и горизонтальная диагонали *сбалансированного мостика* *электрически развязаны*. Всё, что происходит в диагонали AB , никак «не ощущается» диагональю CD . Вольтметр V_2 при всех вариациях в диагонали AB показывает 0 вольт. И наоборот, если в диагональ CD включить генератор частоты 1 Гц и сигнальную лампочку, то наблюдатель, стоящий возле постоянной ЭДС E , будет удивлён мигающим светом, исходящим из диагонали CD , поскольку стрелка его вольтметра V_1 совершенно не испытывает колебаний. Отсюда Величайший парадокс Уитстона: диагонали мостика *физически соединены* через резисторы, но *электрически изолированы*, развязаны друг от друга, причём для изоляции не использован диэлектрик.

Этот принцип развязки цепей применяется в устройствах радиоэлектроники, а для наноэлектроники он, пожалуй, будет единственным методом разделения элементов и схем внутри кристалла полупроводника. При расстояниях порядка 1 нм (10^{-9} м) вообще невозможна изоляция: через тончайший диэлектрик свободно проникают токи туннелирования, тепловые потоки и т.д.

2. Принцип симметрии. Это принцип, который *порождает методы стабилизаций, компенсаций и однородную электронику*. Если, к примеру, имеется *один делитель напряжения* (R_1, R_2) и его резистор R_2 увеличивается с ростом температуры, то напряжение U_{R_2} тоже нестабильно. Чтобы получить стабильное напряжение, надо сделать *второй такой же делитель* (R_3, R_4) с сопротивлением R_4 , нестабильным точно так же, как и R_3 . Надо *поставить делители рядом, использовать разницу напряжений* между ними. В мостике Уитстона напряжение, снятое с диагонали CD , будет стабильным. Проблему создания одинаковых (симметричных) элементов успешно решает технология микроэлектроники. Если на кристалле полупроводника *расположить элементы близко друг от друга*, то их параметры будут отличаться не более чем на 0,1 %.

Имея *зеркальные копии цепей*, схем, можно получать стабильные разности напряжений, компенсации нелинейностей и т.д. Если электронная среда выполнена из одинаковых элементов, то в ней должны проявить себя физические эффекты интерференции токов и другие полезные эффекты однородных сред. Должны появляться и новые схемы, – *однородные электронные структуры*, и *схемотехника однородных электронных структур*.

3. Принцип управления потоками энергии в RR-среде (без диэлектрика). Осуществляется с помощью настройки параметров элементов. Поясним принцип с помощью среды рис. 2, заполненной мостиками Уитстона. Чтобы направить энергию от источника E вверх из мостика M_1 в M_2 и далее в M_3 , надо сопротивления элементов в ветвях,

обозначенных звёздочками, сделать равными нулю или меньше R. Внизу справа на рис. 2 показан сбалансированный мостик M4. Напряжение его горизонтальной диагонали равно нулю, поэтому путь для выхода энергии источника E вниз закрыт. Так в среде из R-элементов можно создать управляемые пути распространения энергии без проводов и изоляции.

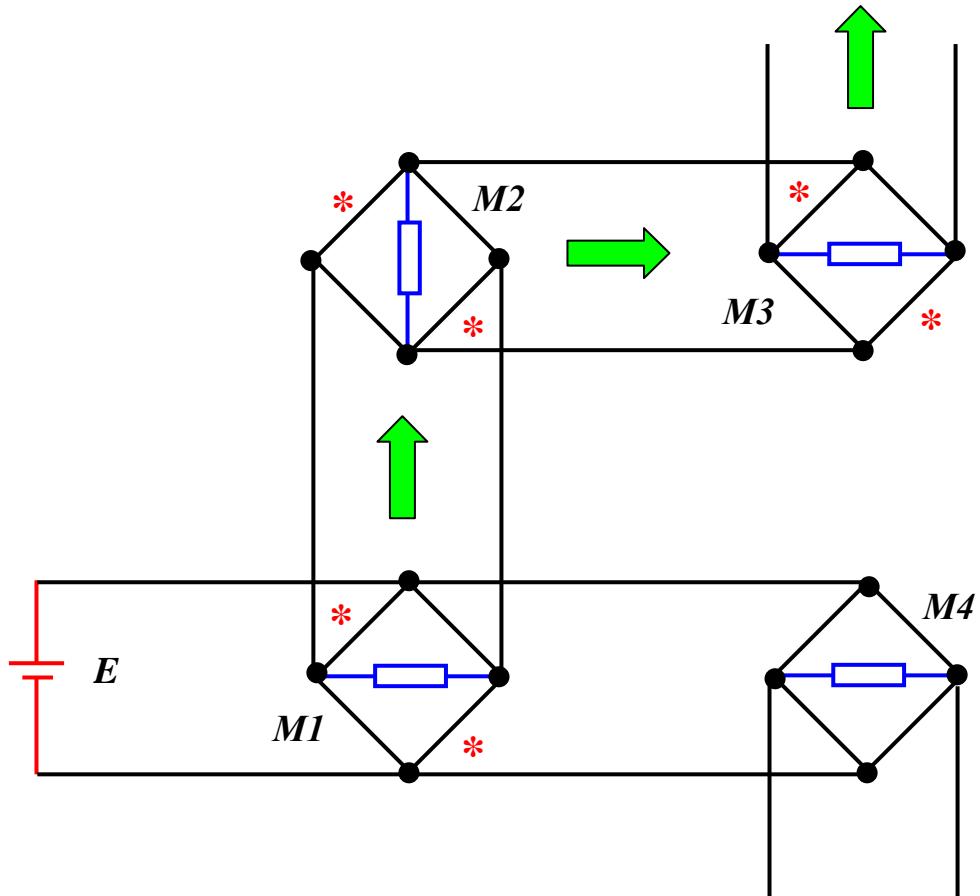


Рис. 2. Передача энергии по цепям из мостиков Уитстона

Проведём фантастический эксперимент. Заполним всё Пространство мостиками – «молекулами Уитстона» – и создадим кривизну «Вселенной Уитстона» – рис. 3. Наблюдатель в такой Вселенной видит Звезду на расстоянии нескольких световых лет от себя. Но если изменить величины R1...R4 «молекул Уитстона» в нужном месте Пространства, то откроется «червоточина, туннель» и окажется, что до далёкой Звезды – рукой подать (рис. 4). Так мостик Уитстона внедряется в тему «Физики шутят», приводит нас к мысли, что частицы Мирового Эфира могут быть не просто шарами, но могут иметь свою структуру и схему.

Синтез трубки Уитстона. Предположим, что существует среда, состоящая из RC-элементов, из «RC-молекул» и освоена Технология осаждения «RC-молекул» на плёнки или на другие затравки-катализаторы. Сделаем два опыта. В первом опыте создадим плёночный канал передачи

электрических колебаний. Пусть канал представляет собой RC-линию, состоящую из компенсированных делителей (КД) – рис. 5. Если у звеньев-делителей «тай» горизонтальных и вертикальных RC-цепей равны ($R_G \cdot C_G = R_V \cdot C_V$), а внутреннее сопротивление источника сигнала R_{BH} стремится к нулю, то коэффициент передачи напряжения RC-линии постоянен в широком диапазоне частот [2]. Для рис. 5: $R_G = R_V = 1 \text{ кОм}$; $C_G = C_V = 100 \text{ пФ}$. При $R_{BH} = 3 \text{ Ома}$ частота среза АЧХ линии – 1 ГГц.

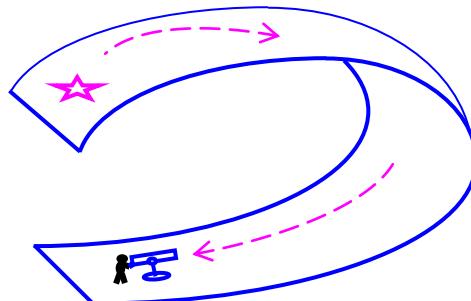


Рис. 3. Кривизна «Вселенной Уитстона»

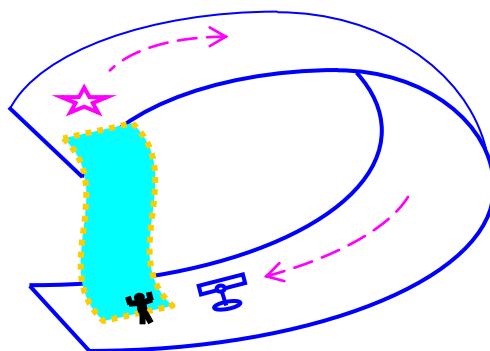


Рис. 4. С跳跃 в «Пространстве Уитстона»

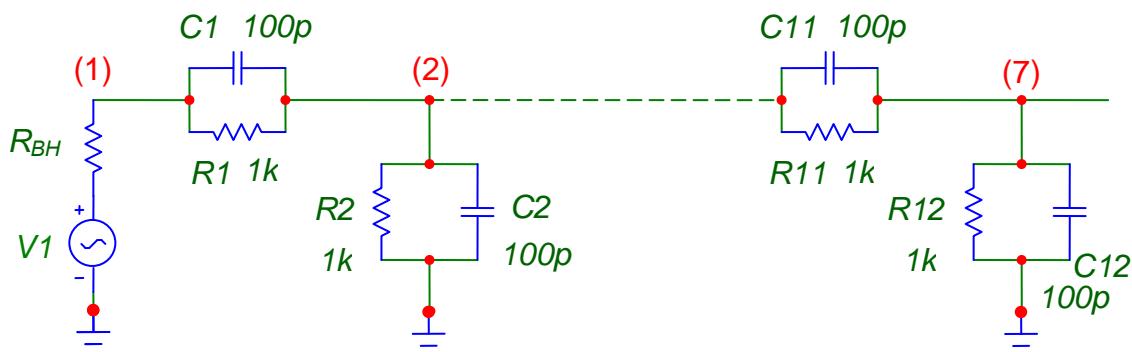
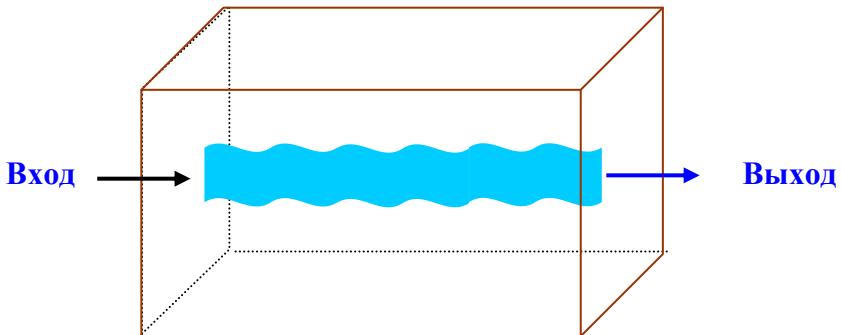
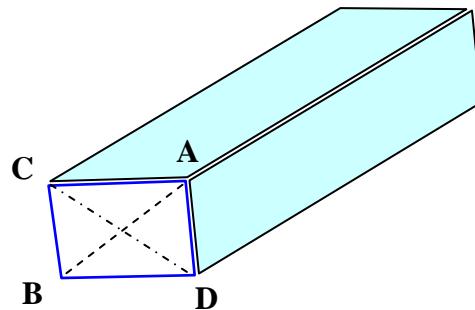


Рис. 5. RC-линия, состоящая из шести компенсированных делителей

На рис. 6 изображена RC-среда и выращенная в ней RC-линия. Для наглядности линия раскрашена голубым цветом, её поверхности придана волнистая структура. Так синтезированы двухмерные объекты, 2D-схемы, плоские электронные кристаллы.



Опыт 1. Плёночная линия, выросшая в среде из RC-элементов



Опыт 2. Плёночные линии, осаждённые на грани мостика Уитстона, образуют трёхмерную трубку Уитстона

Рис. 6. RC-среда и выращенные в ней RC-линия, трубка Уитстона

Цель второго эксперимента – синтез объёмной электронной структуры, по которой одновременно можно передать несколько сигналов, причём для разделения каналов не потребуется диэлектрик.

Для второго опыта помещаем в RC-среду (рис. 6) «затравку» – мостик Уитстона и наблюдаем, как плёночные линии оседают на гранях мостика Уитстона, образуя **объёмный электронный кристалл – трубку Уитстона** (рис. 6 и 7).

Чтобы облегчить изображение трёхмерных схем на плоскости, улучшить восприятие 3D-рисунков, операции выполняем последовательно. Вначале изображаем каркас, скелет 3D-схемы – рис. 7а. Затем превращаем длинные продольные (становые) рёбра каркаса AA', BB' ... в горизонтальные RC-элементы ($R_G = 1$ кОм, $C_G = 100$ пФ), а поперечные

рёбра – в вертикальные элементы ($R_V = 1$ кОм, $C_V = 100$ пФ). Трубка Уитстона, показанная на рис. 7, построена из одинаковых элементов, её длина равна шести RC-делителям, её грани аналогичны рис. 5.

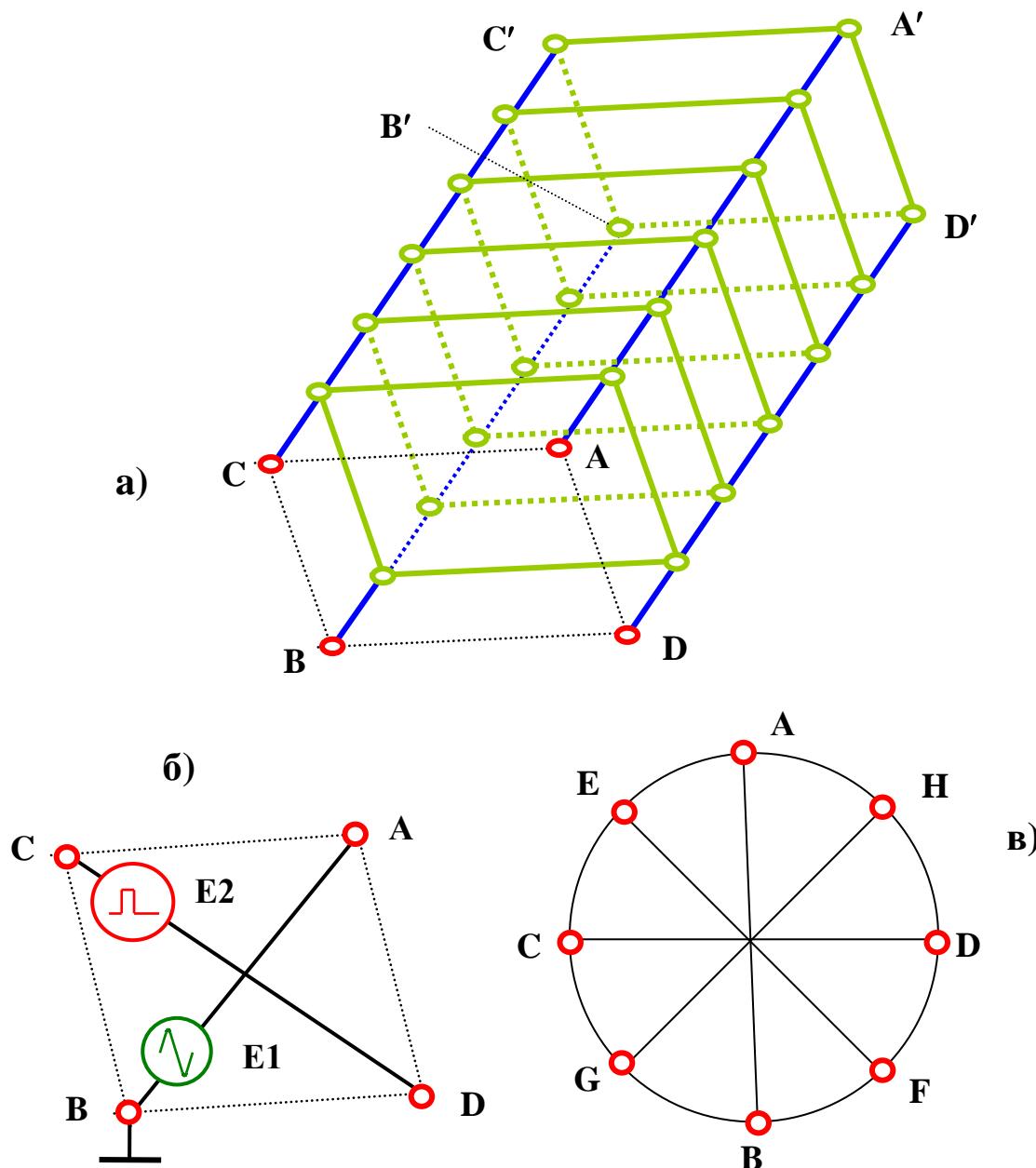


Рис. 7. Каркас трубы Уитстона

Внимание: чтобы получить виртуальную трубку Уитстона, а затем испытать её средствами программы MICROCAP (MC), надо вначале склеить трубку из бумаги, сделать плоскую выкройку трубы, выяснить

места сшивок элементов, сшить раскрой трубы невидимыми проводами – операторами «Tie» программы МС [3].

Уникальные свойства трубы Уитстона. Уникальные свойства сбалансированного мостика Уитстона отражены на рис. 1. Всё, что происходит в диагонали АВ, никак «не ощущается» диагональю СD и наоборот. Это **Величайший Парадокс Уитстона:** диагонали *физически соединены* через резисторы, но *электрически изолированы друг от друга*, причём *без диэлектрика!*

Важно проверить, сохраняются ли уникальные свойства мостика в объёмном теле – в трубке Уитстона. Включим на вход трубы, в диагональ АВ, источник синусоидальной ЭДС, а в диагональ СD – источник импульсной ЭДС. На рис. 7,б узел «В» заземлён по требованию программы МС.

После включения источников ЭДС волны тока бегут *по всем элементам* трубы, от её входов (AB, CD) до выходов A'B', C'D'. Если уникальные свойства мостика сохранены в трубке Уитстона, то на её зажимах A'B' мы обнаружим только синусоидальное напряжение, а на зажимах C'D' – только импульсное. Опыт подтверждает эту гипотезу.

Результат опыта: по трубке Уитстона можно одновременно передавать и синусоидальное, и импульсное напряжение *как по двум независимым каналам* (рис. 8).

Ещё раз подчеркнём, что в трубке нет диэлектрика, *нет изоляции проводов каждого канала!* Для испытаний применены генераторы МС: E = 1В; частота – 1 кГц; R_{вн} = 0,001 Ом. Резисторы-нагрузки для выходов A'B' и C'D' взяты по 10 кОм.

Отметим, что на входе трубы источники E₁, E₂ взаимно перпендикулярны, *ортогональны* – рис. 7,б; на выходе трубы независимые напряжения считаются тоже с ортогональных диагоналей. Но возможна ли трубка с количеством ортогональных диагоналей больше, чем 4? Да, на рис. 7в показана трубка круглого сечения и в ней 4 ортогональные диагонали (AB, CD; EF, GH). Видно, что в *круглую трубку* можно вписать 4-, 8-, 16-сторонние многоугольники. Можно ли в *круглой* трубке создать 4, 8, 16....независимых каналов передачи информации? К сожалению, нет: при одновременном включении четырёх сигналов в диагонали AB, CD; EF, GH (рис. 7в) мы получаем сумму сигналов уже на входе трубы. Таким образом, уникальные свойства присущи только *ромбической трубке Уитстона*.

Если для такой трубы выполняется *принцип ортогональности*, осцилограммы сняты с зажимов A'B' и C'D', то получаем неискажённые гармонические и импульсные колебания. Если отклониться от принципа ортогональности, выбрать, к примеру, напряжение C'B' и т.п., то можно наблюдать какую-то линейную комбинацию входных сигналов – рис. 8.

В трубке Уитстона информационные каналы разделяются геометрически по принципу их взаимной ортогональности. Разделять каналы по частоте, по времени не требуется.

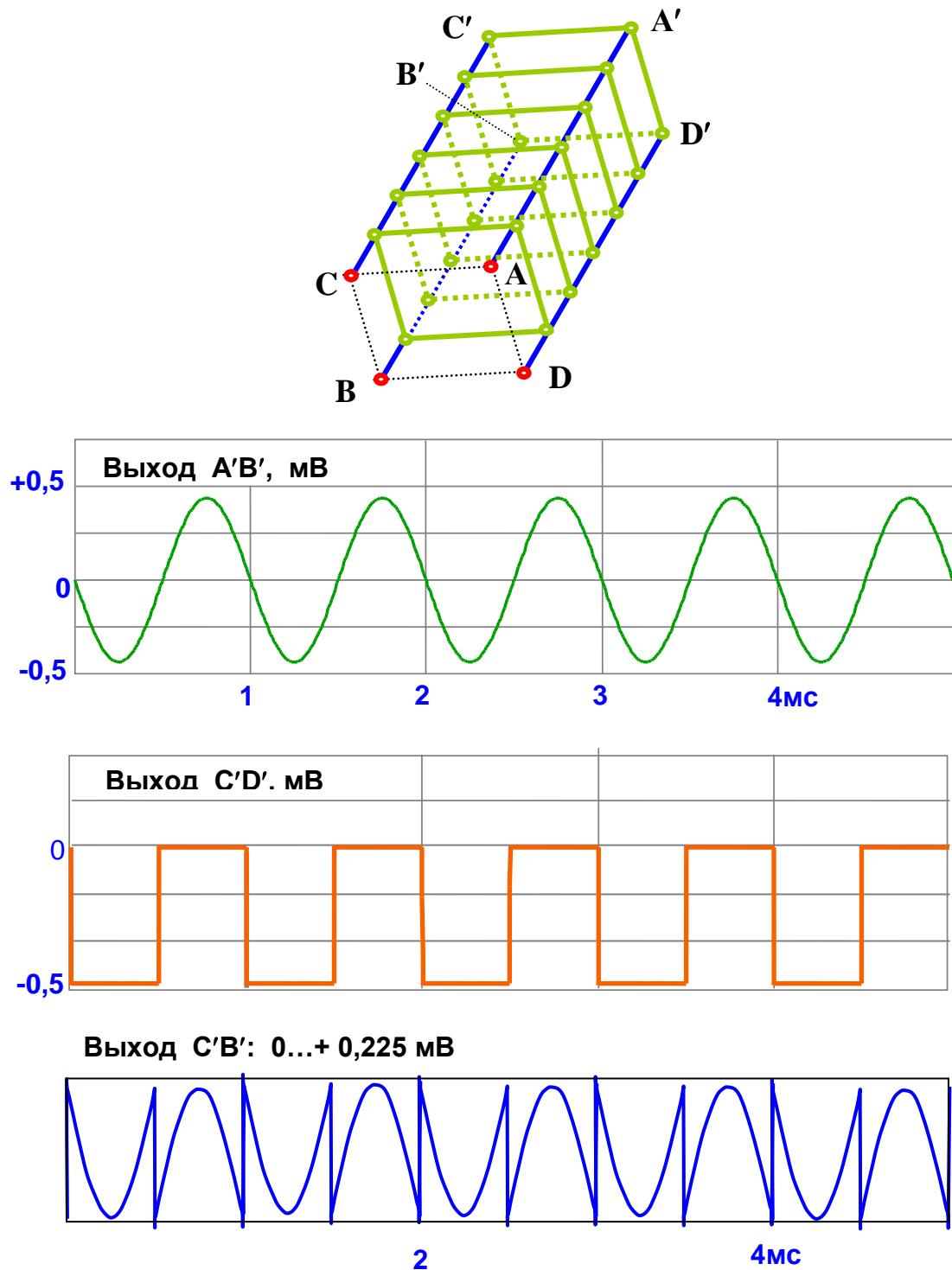


Рис. 8. Испытание трубы Уитстона

Таким образом, создана 3D-схема – трубка Уитстона. В её структуре есть строгий порядок расположения элементов, характерный для кри-

сталлов, в данном случае – для рукотворных электронных кристаллов. Получена новая информация о свойствах трубчатых структур и сформулированы вопросы для проверки свойств молекулярных трубок в Биологии и в других Науках. При этом возникают вопросы. Во-первых, трубка Уитстона, это что: изобретение, или открытие нового класса схем? Во-вторых, следует ли развивать «3D-схемотехнику» трубок, имеющих разные формы, ответвления, слияния, линейные и нелинейные элементы?

Примечательно, что трубка Уитстона даёт Философам информацию к размышлению, поскольку для них найдена хоть какая-то *модель Вселенной, состоящей из параллельных Миров* (Галактик), а если говорить точнее, *из ортогональных, не мешающих друг другу, Миров*. Для пояснения этой популярной фантастики используем рис. 7а. Здесь «Мир №1» – это канал №1, – разрез трубы $B - A - A' - B' - B$. «Мир №2» соответствует сечению трубы $C-D-D'-C'-C$. В каждом Мире есть:

- 1) свой источник энергии (E_1, E_2); 2) своя материя – становые элементы $R_G = 1 \text{ кОм}, C_G = 100 \text{ пФ}$, по которой бегут волны тока, энергии; 3) своя «тёмная материя» ($R_V = 1 \text{ кОм}, C_V = 100 \text{ пФ}$), по которой убегает куда-то по сторонам и рассеивается неизвестно где энергия от E_1, E_2 ; 4) ощущение уникальности, единственности каждого ортогонального Мира, ощущение изолированности Миров друг от друга, ощущение невозможности переходов из одного Мира в другой; 5) фантастическое единство, связь и непостижимое взаимное проникновение Миров, доступное пониманию только тогда, когда взлетишь над Вселенной и увидишь весь каркас Вселенной – рис. 7а.

В изложенном контексте уместно вспомнить изречение Биологов о том, что «Мозг – это целая Вселенная»; можно анализировать загадочный рисунок Эшера «Птица Феникс» и т.д.

Заключение. Хочется надеяться, что «трубка Уитстона» привлечет внимание схемотехников, специалистов по теории цепей к синтезу электронных устройств микро- и наноэлектроники. Трубка – очень простой и вместе с тем интересный объект, который вполне может создать любой инженер-схемотехник или радиолюбитель [3, 4].

Следует подчеркнуть, что методы конструирования электронных устройств непрерывно совершенствуются. Прошли времена, когда Конструктор имел усилительный элемент только *n-p-n* типа проводимости – электронную лампу. Теперь биполярные транзисторы *n-p-n* и *p-n-p* типов проводимостей легко соединить друг с другом в транзисторные структуры, поскольку при этом не требуется ни цепей накала, ни высоковольтного питания. Теперь можно (и нужно) собирать виртуальные устройства [3, 4], отбирать из них лучшие варианты. Автоматизирован анализ и синтез устройств на ЭВМ, имеется программа MICROCAP [3], – большой виртуальный мир, в котором есть всё: радиоэлементы, измери-

тельные приборы и «паяльник» для быстрой сборки самых фантастических устройств.

Пока преобладают *одномерные электронные структуры*. Их каскады автономны, выстроены в длину, по оси X, вдоль шин плюс-минус общего источника питания. Есть и *двухмерные структуры*, использующие «высоту» – Y [2, 5]. В них каскады теряют вспомогательные цепи, теряют автономность, но образуют стабильные экономичные устройства за счёт симбиоза, взаимодействия частей структуры. При рациональной системе связей возникают полезные эффекты, в частности, в 2...5 раз снижается количество элементов устройства [5].

Будущее, конечно, за *трёхмерными структурами*, рукотворными *электронными кристаллами*, которые сделает Человек с помощью ЭВМ [3, 4]. Тогда микро- и наноэлектроника обогатятся новыми схемными решениями, а разные Науки – новыми моделями для познания Природы.

Литература

1. Wheatstone C. Beschreibung verschiedener neuen Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer Volta'schen Kette // Annalen der Physik und Chemie.– Leipzig, 1844.– Bd 62.– S. 499–543.
2. Прищепов Г.Ф. Миниатюрные усилители с распределённым усилением // Схемотехника.– 2007.– №2.– С. 9–12.
3. Амелина М. А. Описание программы MC8 // <http://guapsoft.spb.ru/mc8/setup.exe>.
4. Прищепов Г.Ф. Быстрое проектирование электронных устройств // РадиоХобби.– 2009.– № 2.– С. 54–58.
5. Прищепов Г.Ф. Транзисторные структуры – экономичные усилители // Сайт МФТИ <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2005/136.pdf110>
6. Прищепов Г.Ф. Персональный сайт: <http://gen-fed.narod2.ru>

Прищепов Геннадий Федорович – доцент кафедры радиоприемных устройств и телевидения Таганрогского технологического института Южного федерального университета РФ. E-mail: gen-fed@km.ru

АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

БЕЗЫЗБЫТОЧНЫЙ СИМВОЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ЦЕПЕЙ

И. О. Анисимов, С. А. Курганов

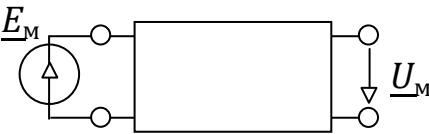
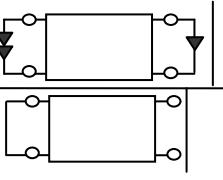
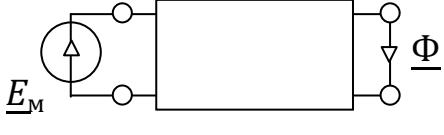
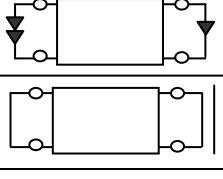
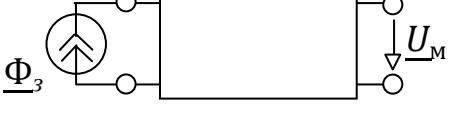
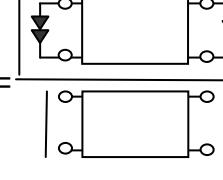
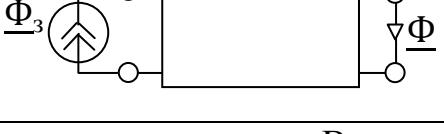
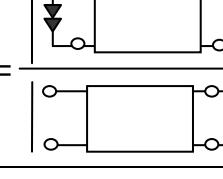
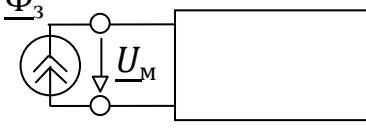
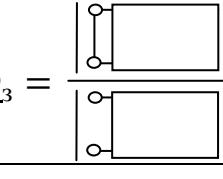
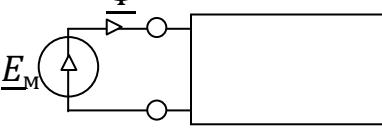
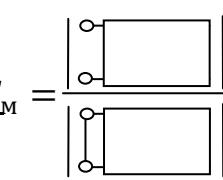
Предложено обобщение метода схемных определителей на линейные магнитные цепи. Обобщенный метод позволяет получить для электромагнитных цепей безызбыточные символьные выражения.

Магнитные цепи работают в линейном режиме при малой магнитной индукции или при наличии зазоров в магнитопроводе. Линейные модели используются также при анализе нелинейных электромагнитных цепей итерационными методами, подобно линейным моделям электрических цепей при анализе нелинейных электрических цепей. При этом наиболее экономичными являются символьные алгоритмы, поскольку они не требуют переформирования линейных уравнений на каждом итерационном шаге решения нелинейных уравнений.

Однако символьный анализ линейной модели электромагнитной цепи матричными методами [1] приводит, как и при анализе электрических цепей, к появлению избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых. В то же время метод схемных определителей не создает избыточных слагаемых при расчете электрических цепей [2]. Можно предположить, что при использовании его для анализа электромагнитных цепей так же будут отсутствовать избыточные слагаемые. Однако метод схемных определителей (МСО) не разработан для анализа таких цепей. Поэтому целью настоящей статьи является *обобщение метода схемных определителей на магнитные и электромагнитные цепи*.

Формулы метода схемных определителей для магнитных цепей. Схемно-алгебраические формулы для магнитных передаточных и входных функций приведены в табл. 1. Они получены из соответствующих формул для электрической цепи исходя из подобия законов электрической и магнитной цепей, и аналогии их переменных и параметров [3]. В табл. 1: E_M , U_M , Φ , Φ_3 – комплексные действующие значения магнитодвижущей силы (МДС), магнитного напряжения, магнитного потока и задающего магнитного потока соответственно.

Таблица 1. Схемно-алгебраические формулы (САФ) схемных функций для магнитной цепи

	Исходная схема	САФ
Коэффициент передачи магнитного напряжения		
1		$K_M = \underline{U}_M / \underline{E}_M = \frac{\boxed{\text{---}}}{\boxed{\text{---}}}$ 
Передаточная магнитная проводимость		
		$G_M = \underline{\Phi} / \underline{E}_M = \frac{\boxed{\text{---}}}{\boxed{\text{---}}}$ 
3		$R_M = \underline{U}_M / \underline{\Phi}_3 = \frac{\boxed{\text{---}}}{\boxed{\text{---}}}$ 
4		$B_M = \underline{\Phi} / \underline{\Phi}_3 = \frac{\boxed{\text{---}}}{\boxed{\text{---}}}$ 
Входное магнитное сопротивление		
		$R_{M \text{ вх}} = \underline{U}_M / \underline{\Phi}_3 = \frac{\boxed{\text{---}}}{\boxed{\text{---}}}$ 
6		$G_{M \text{ вх}} = \underline{\Phi} / \underline{E}_M = \frac{\boxed{\text{---}}}{\boxed{\text{---}}}$ 

САФ для коэффициентов передачи магнитного напряжения и магнитного потока (строки 1 и 4 в табл. 1) аналогичны выражениям для коэффициентов передачи по напряжению и току в электрической цепи, а

САФ для передаточных и входных магнитных проводимостей и сопротивлений (строки 2, 3, 5 и 6 в табл. 1) – выражениям для передаточных и входных проводимостей, и сопротивлений в электрической цепи.

Аналогично получаются САФ для смешанных переменных, когда воздействием является электрическая переменная, а откликом – магнитная переменная или наоборот. Для примера рассмотрим электромагнитную цепь на рис. 1.

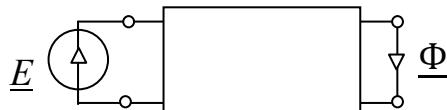


Рис. 1. Схема замещения электромагнитной цепи для построения САФ со смешенными переменными

САФ коэффициента преобразования ЭДС \underline{E} в магнитный поток $\underline{\Phi}$ электромагнитной цепи на рис. 1 имеет вид

$$\underline{K} = \underline{\Phi}/\underline{E} = \left| \begin{array}{c} \downarrow \\ \square \end{array} \right| / \left| \begin{array}{c} \square \\ \downarrow \end{array} \right|. \quad (1)$$

Формулы выделения магнитного сопротивления R_m и проводимости G_m имеют вид соответственно:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c} R_m \\ \square \end{array} \right| &= R_m \left| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right|; \\ \left| \begin{array}{c} G_m \\ \square \end{array} \right| &= G_m \left| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right|. \end{aligned} \quad (2)$$

При анализе ЭМЦ преобразуется к схеме замещения. Для «сшивания» моделей электрической и магнитной цепей используется пара упомянутых выше управляемых источников (УИ) – источник МДС, управляемый током, и источник ЭДС, управляемый магнитным потоком [4]. Воздействие электрической цепи на магнитную цепь отражается в виде источника МДС, управляемого током. Направление этого источника определяется правилом правого винта. Действие магнитной цепи на электрическую цепь отражается в виде источника ЭДС, управляемого магнитным потоком. Направление – обратное направлению магнитного потока.

Формулы выделения перечисленных выше УИ следующие:

	$= r_M$		$= k_M$		$= \beta_M$		$= g_M$		$= w$		$= \xi$
--	---------	--	---------	--	-------------	--	---------	--	-------	--	---------

(3); (4); (5); (6); (7); (8)

Формулы (3)–(6) предназначены для выделения параметров источника МДС, управляемого магнитным потоком и магнитным напряжением; источника магнитного потока, управляемого магнитным потоком и магнитным напряжением. Формула (7) – для выделения параметра источника МДС, управляемого током $E_M = wI$, где w – количество витков в обмотке, а формула (8) для выделения источника ЭДС $E = \xi\Phi$ ($\xi = j\omega w$), управляемого магнитным потоком. Формулы выделения элементов магнитной цепи получены по аналогии с формулами для электрической цепи [3]. Также можно получить частные формулы выделения и нейтрализации элементов для магнитной цепи.

Сравнение результатов расчета линейной электромагнитной цепи [1] обобщенным методом схемных определителей и известными методами. Исходная электромагнитная цепь дана на рис. 2 [1].

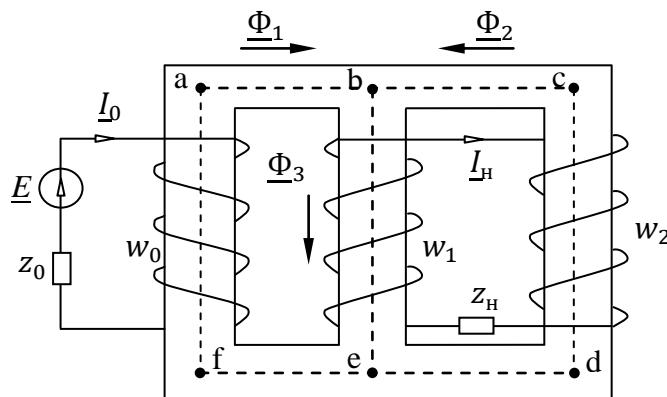


Рис. 2. Исходная электромагнитная цепь

Здесь: l_1 , l_2 , l_3 – средние длины соответственно $b-a-f-e$, $b-c-d-e$ и $b-e$ отрезков магнитопровода; S_1 , S_2 , S_3 – площади поперечных сечений соответственно $b-a-f-e$, $b-c-d-e$ и $b-e$ стержней; w_o , w_1 , w_2 – число витков обмоток с соответствующими номерами; z_0 , z_h – комплексные сопротивления источника ЭДС \underline{E} и нагрузки. Требуется найти символьное выражение магнитного потока Φ_2 .

Эквивалентная схема заданной цепи приведена на рис. 3. Магнитные сопротивления участков магнитопровода определяются по формулам [2]

$$R_{M1} = \frac{l_1}{\mu_0 \mu S_1}, R_{M2} = \frac{l_2}{\mu_0 \mu S_2}, R_{M3} = \frac{l_3}{\mu_0 \mu S_3}.$$

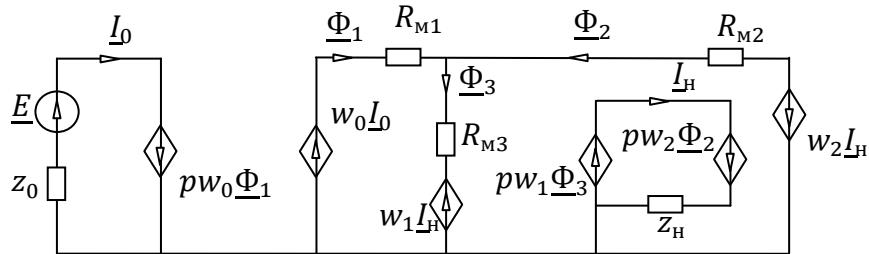


Рис. 3. Эквивалентная схема электромагнитной цепи на рис. 2

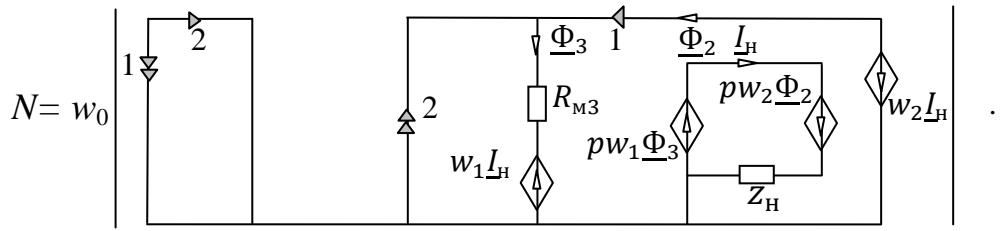
Расчет цепи обобщенным методом схемных определителей.
Искомый магнитный поток находится, исходя из формулы (1),

$$\Phi_2 = \frac{N}{D} \cdot \underline{E}, \quad (9)$$

в которой числитель

$$N = \left| \begin{array}{c} I_0 \\ \hline z_0 \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \underline{E} \\ \hline \Phi_1 & R_{M1} & \Phi_2 & R_{M2} \\ \hline w_0 I_0 & R_{M3} & p w_2 \Phi_2 & \\ w_1 I_H & p w_1 \Phi_3 & Z_H & \\ \hline \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} w_2 I_H \\ \hline \end{array} \right|.$$

Используя формулы (7) и (8), выделяем УИ. Нейтрализуем УИ $p w_0 \Phi_1$, поскольку он соединен последовательно с норатором и выделим УИ $w_0 I$, поскольку его нейтрализация невозможна – при этом образуется контур из норатора. В результате получаем



Выделяем УИ $p w_1 \underline{\Phi}_3$, затем УИ $w_1 I_H$ и $w_2 I_H$, зависящие от одного и того же тока, их совместная нейтрализация для первого слагаемого невозможна, так как образуется контур из норатора. В результате выражение числителя преобразуется к виду

$$\begin{aligned} N &= -w_0(p w_1(w_1 \\ &\quad \left| \begin{array}{c} \text{Diagram showing a vertical stack of three rectangular blocks labeled 1, 2, and 3. Block 1 has an arrow pointing down from top to bottom. Block 2 has an arrow pointing right from left to right. Block 3 has an arrow pointing up from bottom to top. To the right of the blocks is a circuit diagram. It shows a vertical loop with nodes 1, 2, and 3. Node 1 is at the top, node 2 is in the middle, and node 3 is at the bottom. A voltage source $p w_2 \underline{\Phi}_2$ is connected between node 2 and node 1. A current source $p w_2 \underline{\Phi}_2$ is connected between node 2 and node 1. Arrows indicate current flow through the components. The entire expression is enclosed in large vertical brackets.} \end{array} \right| + \\ &+ w_2 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram showing a vertical stack of three rectangular blocks labeled 1, 2, and 3. Block 1 has an arrow pointing down from top to bottom. Block 2 has an arrow pointing right from left to right. Block 3 has an arrow pointing up from bottom to top. To the right of the blocks is a circuit diagram. It shows a vertical loop with nodes 1, 2, and 3. Node 1 is at the top, node 2 is in the middle, and node 3 is at the bottom. A voltage source $p w_2 \underline{\Phi}_2$ is connected between node 2 and node 1. A current source $p w_2 \underline{\Phi}_2$ is connected between node 2 and node 1. Arrows indicate current flow through the components. The entire expression is enclosed in large vertical brackets.} \end{array} \right| + \\ &+ w_2 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram showing a vertical stack of three rectangular blocks labeled 1, 2, and 3. Block 1 has an arrow pointing down from top to bottom. Block 2 has an arrow pointing right from left to right. Block 3 has an arrow pointing up from bottom to top. To the right of the blocks is a circuit diagram. It shows a vertical loop with nodes 1, 2, and 3. Node 1 is at the top, node 2 is in the middle, and node 3 is at the bottom. A resistor R_{M3} is connected between node 1 and node 2. A voltage source $p w_2 \underline{\Phi}_2$ is connected between node 2 and node 1. A current source $p w_2 \underline{\Phi}_2$ is connected between node 2 and node 1. Arrows indicate current flow through the components. The entire expression is enclosed in large vertical brackets.} \end{array} \right| + \\ &+ w_2 \left| \begin{array}{c} \text{Diagram showing a vertical stack of three rectangular blocks labeled 1, 2, and 3. Block 1 has an arrow pointing down from top to bottom. Block 2 has an arrow pointing right from left to right. Block 3 has an arrow pointing up from bottom to top. To the right of the blocks is a circuit diagram. It shows a vertical loop with nodes 1, 2, and 3. Node 1 is at the top, node 2 is in the middle, and node 3 is at the bottom. A resistor R_{M3} is connected between node 1 and node 2. A voltage source $p w_2 \underline{\Phi}_2$ is connected between node 2 and node 1. A current source $p w_2 \underline{\Phi}_2$ is connected between node 2 and node 1. A load Z_H is connected between node 2 and node 3. Arrows indicate current flow through the components. The entire expression is enclosed in large vertical brackets.} \end{array} \right|). \end{aligned}$$

В первом, втором и пятом слагаемом УИ $p w_2 \underline{\Phi}_2$ нейтрализуем, так как иначе образуется или сечение из двух нораторов, или контур из норатора. Третье и четвертое слагаемые равны нулю, так как при выделении УИ $p w_2 \underline{\Phi}_2$ образуются сечения из двух нулаторов, а при нейтрализации УИ $p w_2 \underline{\Phi}_2$ – контур из нулатора. После выделения сопротивлений, образующих контуры с норатором и нуллатором, и упрощения параллельных и последовательных соединений нораторов и нуллаторов [3], выражение для числителя приобретает вид

$$N = -w_0(pw_1(w_1 + w_2) + R_{M3}z_H). \quad (9a)$$

Аналогично получается выражение для знаменателя

$$D = -pw_0^2(p(w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2) + z_H(R_{M2} + R_{M3})) + z_0(p(w_1^2(R_{M1} + R_{M2}) + 2w_1w_2R_{M1} + w_2^2(R_{M1} + R_{M3})) + z_H(R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M3}R_{M1})). \quad (9b)$$

Результаты расчета электромагнитной цепи методом объединенных контурных матриц (ОКМ) [1]. Расширенная матрица параметров системы уравнений по ОКМ из [1] в обозначениях схемы замещения на рис. 4 имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_{11} & I_{22} & \underline{\Phi}_{33} & \underline{\Phi}_{44} \\ z_0 & 0 & -pw_0 & 0 \\ 0 & z_H & -pw_1 & p(w_1 + w_2) \\ -w_0 & w_1 & R_{M1} + R_{M3} & -R_{M3} \\ 0 & -w_1 - w_2 & -R_{M3} & R_{M2} + R_{M3} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

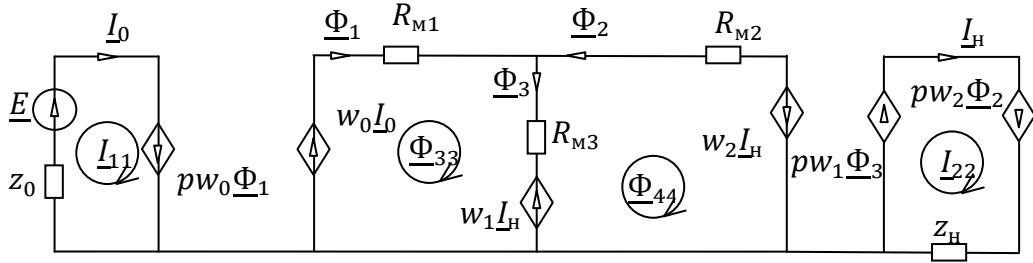


Рис. 4. Схема замещения цепи для ОКМ с указанием контурных токов \underline{I}_{11} , \underline{I}_{22} и контурных магнитных потоков $\underline{\Phi}_{33}$, $\underline{\Phi}_{44}$

Магнитный поток $\underline{\Phi}_2 = -\underline{\Phi}_{44}$ находим, используя правило Крамера

$$\underline{\Phi}_2 = -\frac{N}{D}; N = w_0(pw_1(w_1 + w_2) + z_H R_{M3}) \underline{E};$$

$$\begin{aligned} D = z_0 \{ & z_H [R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3} + R_{M3}^2 - R_{M3}^2] - p(w_1^2[R_{M3} + R_{M3} - R_{M1} - R_{M3} - R_{M2} - R_{M3}] + 2w_1w_2[R_{M3} - R_{M1} - R_{M3}] - w_2^2[R_{M1} + R_{M3}]) \} - pw_0^2 \{ p(w_1^2 + 2w_1w_2 + w_2^2) + z_H [R_{M2} + R_{M3}] \} = \\ & z_0 \{ z_H [R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M1}R_{M3}] + p(w_1^2[R_{M1} + R_{M2}] + 2w_1w_2R_{M1} + w_2^2[R_{M1} + R_{M3}]) \} - pw_0^2 \{ p(w_1 + w_2)^2 + z_H [R_{M2} + R_{M3}] \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Последовательная формула (11) тождественна формуле (9)–(9а)–(9б), Однако она в отличие от (9)–(9а)–(9б) содержит 4 пары взаимно уничтожающихся слагаемых, которые выделены в (11) жирным шрифтом.

Расчет электромагнитной цепи с использованием уравнений по законам Кирхгофа. Для сравнения проведем также анализ схемы на рис. 3 по законам Кирхгофа. Расширенная матрица параметров соответствующей системы уравнений имеет вид

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_0 & \underline{I}_H & \underline{\Phi}_1 & \underline{\Phi}_2 & \underline{\Phi}_3 & \underline{E} \\ z_0 & 0 & -pw_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_H & 0 & -pw_2 & -pw_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -w_0 & w_1 & R_{M1} & 0 & R_{M3} & 0 \\ 0 & -w_1-w_2 & 0 & -R_{M2} & -R_{M3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Найдем искомое выражение для потока по правилу Крамера

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}_2 = & \frac{w_0(-R_{M3}z_H - pw_1(w_1+w_2))\underline{E}}{z_0(z_H(R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M3}R_{M1}) - \mathbf{p}w_2(\mathbf{R}_{M3}(-\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2) + \\ & + R_{M1}(-w_1-w_2) + \mathbf{R}_{M3}\mathbf{w}_1) + pw_1(R_{M1}(w_1+w_2) + R_{M2}w_1) + pw_0^2(-R_{M3}z_H - \\ & - pw_2(w_1 + w_2) - pw_1(w_1 + w_2) - z_H R_{M2}))}. \end{aligned} \quad (13)$$

Формула (13), полученная решением матричных уравнений Кирхгофа, тождественна, как и (11), формуле (9)–(9а)–(9б) по обобщенному методу схемных определителей. Однако формула (11) в отличие от (9)–(9а)–(9б) содержит пару взаимоуничтожающихся слагаемых $\pm pw_1w_2R_{M3}$, составляющие сомножители которых выделены в (13) жирным шрифтом. Таким образом, метод объединенных контурных матриц образует большее число взаимно уничтожающихся слагаемых, чем метод законов Кирхгофа, что соответствует исследованиям электрических цепей [4].

Приведем также результат расчета искомого магнитного потока в цепи на рис. 2 методом узловых магнитных напряжений, предварительно преобразовав его к дробно-рациональному выражению

$$\begin{aligned} \underline{\Phi}_2 = & \frac{z_0^2 z_H^2 R_{M1} R_{M2} R_{M3}}{pw_0^2 \{z_H[R_{M2} + R_{M3}] + p(w_1^2 + w_1 w_2 + w_2^2)\} - \\ & - z_0 \{z_H[R_{M1}R_{M2} + R_{M2}R_{M3} + R_{M3}R_{M1}] + p(w_1^2[R_{M1} + R_{M3}] + 2w_1w_2R_{M1} + w_2^2[R_{M1} + R_{M3}])\} \cdot \\ & \cdot \frac{w_0 E}{z_0^2 z_H^2 R_{M1} R_{M2}^2 R_{M3}} \{z_H R_{M2} R_{M3} + p(-w_2^2 R_{M3} + w_1 w_2 R_{M2} + w_1^2 R_{M2} + w_2^2 R_{M3})\}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Формула (14) также, как и (11), и (13), тождественна формуле (9)–(9а)–(9б) по обобщенному методу схемных определителей. Однако формула (14) в отличие от (9)–(9а)–(9б) содержит 7 пар взаимоуничтожающихся слагаемых: 3 пары $R_{M2}R_{M3}$ и $-R_{M2}R_{M3}$, 2 пары $R_{M1}R_{M2}$ и $-R_{M1}R_{M2}$, 2 пары $R_{M1}R_{M3}$ и $-R_{M1}R_{M3}$ и 10 пар взаимосокращающихся множителей: 3 пары z_0 , 2 пары z_h , 2 пары R_{M1} , 2 пары R_{M2} , пару R_{M3} .

Вывод. Обобщенный метод схемных определителей для магнитных и электромагнитных цепей позволяет найти символные выражения переменных, не содержащие избыточных слагаемых, в отличие от известных методов анализа на основе объединенных матриц параметров, образующих избыточные слагаемые и сомножители.

Литература

1. Юдин В.В. Расчет линейных электромагнитных цепей методом объединенных матриц // Электричество, 1987. – № 7. – С. 63–67.
2. Курганов С.А., Филаретов В.В. Топологические правила и формулы для анализа электрических цепей без избыточности.– Ульяновск: УлГТУ, 2010.– 109 с.
3. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: Учебник. – 10-е изд. – М.: Гардарики, 2000. – 638 с.
4. Шакиров М.А. 2Т-образные схемы замещения трансформатора // Электричество, 2010. – № 5. – С. 19–36.

Анисимов Игорь Олегович – студент 2-курса Энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ); e-mail: one-t-all@rambler.ru

Курганов Сергей Александрович – д.т.н., профессор кафедры «Электроснабжение» УлГТУ; служебный тел. 77-81-05; e-mail: sak@ulstu.ru.

ФОРМУЛЫ ДЛЯ КОРРЕКЦИИ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ СХЕМНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ ПРИ ПОДКЛЮЧЕНИИ И ОТКЛЮЧЕНИИ ЭЛЕМЕНТА

А. В. Бондаренко, С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Предложены схемно-алгебраические формулы для коррекции дробно-рациональных схемных функций линейной электрической цепи при подключении и отключении элемента. Использование формул позволяет сократить вычислительные затраты.

Коррекция символьного или символьно-численного выражения схемной функции (СФ) при подключении и отключении элемента позволяет использовать результаты предыдущего расчета и тем самым сократить объем вычислительных затрат. В [1] для коррекции матрицы передаточных сопротивлений при подключении сопротивления используется операция Гауссова исключения переменной из системы уравнений, полученной на основе этой матрицы. Недостатком такой процедуры является наличие операции деления, которая не позволяет получить результат непосредственно в виде дробно-рациональной функции даже при рациональном выражении параметра подключаемого сопротивления. Для этого требуются алгебраические преобразования и, следовательно, дополнительные вычислительные затраты. Излишние затраты имеют место также из-за того, что для коррекции одной–двух (как правило, их достаточно) СФ требуется построить всю матрицу передаточных сопротивлений. Таким же недостатком обладает и метод коррекции на основе матричной формулы Шермана–Моррисона [2].

Целью статьи является вывод формул для коррекции произвольной дробно-рациональной схемной функции, не требующих построения матриц схемных функций.

Поставленную задачу можно решить на основе метода схемных определителей (МСО) и формул выделения параметров элементов [3]. МСО предполагает получение СФ в виде отношения определителей схем числителя и знаменателя. Формулы выделения параметров элементов позволяют при их рекуррентном использовании раскрыть схемные определители и получить алгебраическое выражение СФ в дробно-рациональном виде.

Корректирующие формулы для функции входного сопротивления при подключении сопротивления и проводимости. Для схемы на рис. 1,а известно входное сопротивление в виде отношения рациональных операторных функций

$$Z_{\text{вх}}(s) = N(s) / D(s). \quad (1)$$

Требуется получить на основе (1) формулу для входного сопротивления схемы на рис. 1,б, где к одной из ее сторон подключается сопротивление $Z(s)$.



Рис. 1. Исходная схема (а) и схема (б) с подключенным сопротивлением $Z(s)$

Используя МСО, запишем для исходной схемы на рис. 1,а функцию входного сопротивления в виде схемно-алгебраического выражения (содержащего как схемные образы, так и алгебраические операции) [4]

$$Z_{\text{BX}}(s) = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| / \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right|, \quad (2)$$

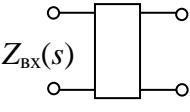
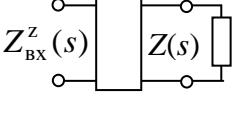
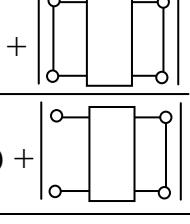
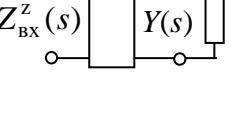
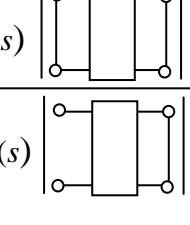
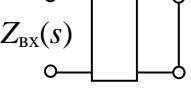
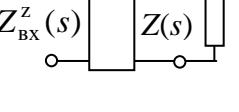
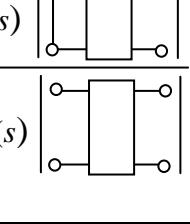
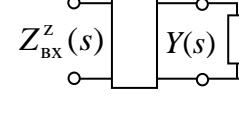
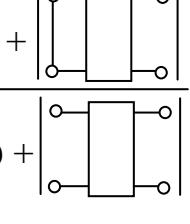
где парой вертикальных линий обозначены схемные определители.

Для схемы на рис. 1,б запишем аналогичную схемно-алгебраическую формулу. В числителе и знаменателе этой формулы выделим сопротивление $Z(s)$. В результате, формула приобретает вид

$$Z_{\text{BX}}^Z(s) = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ Z(s) \\ | \\ \text{---} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ Z(s) \\ | \\ \text{---} \end{array} \right|} = \frac{Z(s) \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right|}{Z(s) \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right|}. \quad (3)$$

Сравнивая формулы (1) и (2), можно сделать вывод, что их числители и знаменатели попарно равны с учетом возможного сокращения одинаковых сомножителей в (2). Оба этих выражения входят в формулу (3). Поэтому входное сопротивление цепи с подключенным сопротивлением можно записать через числитель и знаменатель СФ (1) исходной схемы. Полученная корректирующая формула приведена в строке 1 из табл. 1.

Таблица 1. Формулы для коррекции входного сопротивления $Z_{\text{bx}}(s) = N(s)/D(s)$ при подключении к схеме сопротивления $Z(s)$ или проводимости $Y(s)$

Исходная схема	Схема после подключения элемента	Корректирующая формула	
При подключении к стороне схемы:			
 $Z_{\text{bx}}(s)$	— сопротивления	$Z_{\text{bx}}^z(s) = \frac{Z(s)N(s) + Z(s) ^2}{Z(s)D(s) + Z(s) ^2}$  	
	— проводимости	$Z_{\text{bx}}^z(s) = \frac{N(s) + Y(s)}{D(s) + Y(s)}$  	
При подключении в разрыв проводника:			
 $Z_{\text{bx}}(s)$	— сопротивления	$Z_{\text{bx}}^z(s) = \frac{N(s) + Z(s)}{D(s) + Z(s)}$  	
	— проводимости	$Z_{\text{bx}}^z(s) = \frac{Y(s)N(s) + Y(s) ^2}{Y(s)D(s) + Y(s) ^2}$  	

Аналогично выводятся корректирующие формулы для входного сопротивления при подключении проводимости к стороне схемы (строка 2 из табл. 1) и при подключении сопротивления и проводимости в разрыв проводника (строки 3 и 4 из той же таблицы). Эти формулы отличаются состоянием сторон (замкнуты или разомкнуты) в схемах определителей и различным сочетанием сомножителей в линейной комбинации параметров подключаемых сопротивлений, проводимостей и выражений числителя и знаменателя входного сопротивления исходной схемы. Следует отметить, что состояние сторон в формулах для подключения сопротивления и проводимости к сторонах схемы (строки 1 и 2) и в разрыв проводников (строки 3 и 4) попарно совпадают.

Корректирующие формулы для входного сопротивления при подключении к схеме управляемых источников (УИ). Рассмотрим вывод корректирующей формулы при подключении к схеме источника тока, управляемого напряжением (ИТУН). Исходной схемой является многополюсник с тремя разомкнутыми сторонами (строка и столбец с номером 1 из табл. 2). ИТУН подключается к сторонам схемы так, как показано в той же табл. 2 (строке 1, столбец 2).

Для записи схемно-алгебраической формулы входного сопротивления исходной схемы и схемы с УИ используется формула, аналогичная (2). Так входное сопротивление схемы с подключенным ИТУН имеет вид

$$Z_{\text{вх}}^g(s) = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } U \rightarrow \text{top}, gU \rightarrow \text{bottom} \\ \text{Diagram 2: } U \rightarrow \text{top}, gU \rightarrow \text{middle} \end{array} \right| / \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } U \rightarrow \text{top}, gU \rightarrow \text{bottom} \\ \text{Diagram 2: } U \rightarrow \text{middle}, gU \rightarrow \text{bottom} \end{array} \right|. \quad (4)$$

Из схемных определителей числителя и знаменателя (4) выделим ИТУН по формуле [3], получим

$$Z_{\text{вх}}^g(s) = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } g \rightarrow \text{top}, \text{norator} \\ \text{Diagram 2: } g \rightarrow \text{middle}, \text{norator} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } g \rightarrow \text{top}, \text{nullator} \\ \text{Diagram 2: } g \rightarrow \text{middle}, \text{nullator} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } g \rightarrow \text{top}, \text{norator} \\ \text{Diagram 2: } g \rightarrow \text{bottom}, \text{norator} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: } g \rightarrow \text{top}, \text{nullator} \\ \text{Diagram 2: } g \rightarrow \text{bottom}, \text{nullator} \end{array} \right|}, \quad (5)$$

где укрупненной затемненной стрелкой обозначен направленный нуллатор, а двойной такой стрелкой – норатор.

Таблица 2. Формулы для коррекции входного сопротивления $Z_{\text{bx}}(s) = N(s)/D(s)$ при подключении к схеме управляемых источников (УИ)

Исходная схема	Схема после подключения элемента	Корректирующая формула	
При подключении: – источника тока, управляемого напряжением (ИТУН)			
$Z_{\text{bx}}(s)$	$Z_{\text{bx}}^g(s)$	$Z_{\text{bx}}^g(s) = \frac{N(s) + gN_1(s)}{D(s) + gD_1(s)}.$ $N_1(s) = \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right .$ $D_1(s) = \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right .$	
– источника напряжения, управляемого напряжением (ИНУН)			
$Z_{\text{bx}}(s)$	$Z_{\text{bx}}^k(s)$	$Z_{\text{bx}}^k(s) = \frac{N(s) + kN_1(s)}{D(s) + kD_1(s)}.$ $N_1(s) \text{ и } D_1(s) \text{ из строки 1.}$	
– источника тока, управляемого током (ИТУТ)			
$Z_{\text{bx}}(s)$	$Z_{\text{bx}}^\beta(s)$	$Z_{\text{bx}}^\beta(s) = \frac{N(s) + \beta N_1(s)}{D(s) + \beta D_1(s)}.$ $N_1(s) \text{ и } D_1(s) \text{ из строки 1.}$	
– источника напряжения, управляемого током (ИНУТ)			
$Z_{\text{bx}}(s)$	$Z_{\text{bx}}^r(s)$	$Z_{\text{bx}}^r(s) = \frac{N(s) + rN_1(s)}{D(s) + rD_1(s)}.$ $N_1(s) \text{ и } D_1(s) \text{ из строки 1.}$	

Вторые слагаемые в числителе и знаменателе (5) являются числителем $N(s)$ и знаменателем $D(s)$ входного сопротивления исходной схемы (строка и столбец с номером 1 в табл. 2), поэтому формула (5) может быть записана на их основе (строка 1 и столбец 3 в той же табл. 2). Корректирующие формулы для входного сопротивления при подключении других УИ находятся аналогично. Эти формулы для источника напряжения, управляемого напряжением – ИНУН, источника тока, управляемого током – ИТУТ и источника напряжения, управляемого током – ИТУН приведены во второй, третьей и четвертой строках табл. 2. Следует отметить, что в рассматриваемых корректирующих формулах управляющее напряжение и ток УИ подключается только к стороне и разрыв проводника, а генератор тока и напряжения УИ – к стороне и в разрыв проводника соответственно.

Корректирующие формулы для передаточных функций при подключении к схеме сопротивления, проводимости и УИ. Эти формулы выводятся аналогично формулам для коррекции входного сопротивления. При выводе используются схемно-алгебраические формулы (САФ) для передаточных функций, которые в отличие от САФ входного сопротивления (2) и (4) содержат в числителе нуллоры [4]. Так, САФ для коэффициента передачи исходной схемы при выводе корректирующей формулы при подключении сопротивления к стороне схемы (строка 1 из табл. 3) имеет вид

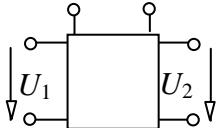
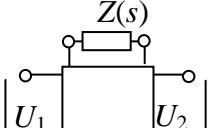
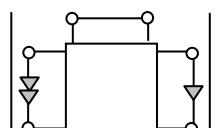
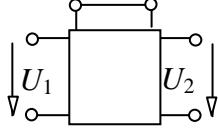
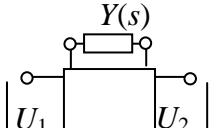
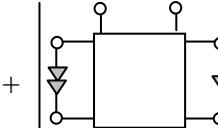
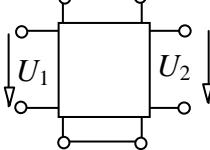
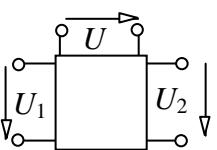
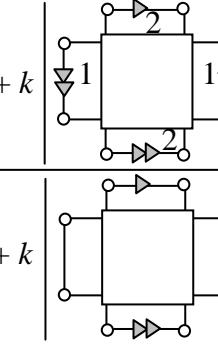
$$K(s) = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the original circuit with a resistor } R \\ \text{Diagram of the circuit with the resistor } R \text{ connected to the output side} \end{array} \right| / \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the original circuit with a resistor } R \\ \text{Diagram of the circuit with the resistor } R \text{ connected to the input side} \end{array} \right|. \quad (6)$$

Искомая формула для коррекции коэффициента передачи находится, как и для входных сопротивлений (табл. 1 и 2), с помощью сравнения САФ (6) и САФ для схемы после подключения сопротивления $Z(s)$ (ячейка на пересечении строки 1 и столбца 2 в табл. 3). Эта формула приведена в табл. 3 (ячейка на пересечении строки 1 и столбца 3).

В табл. 3 приведены для иллюстрации другие корректирующие формулы для коэффициента передачи напряжения при подключении проводимости в разрыв проводника (строка 2) и при подключении ИНУН (строка 3). Корректирующие формулы для других передаточных функций при подключении различных УИ аналогичны.

Для коррекции СФ при удалении элемента из схемы можно использовать предложенные в табл. 1–3 формулы, при этом параметр элемента следует принять со знаком, противоположным по отношению к параметру удаляемого элемента. При этом сопротивление и проводимость подключаются последовательно и параллельно соответствующему элементу. Генератор напряжения и тока УИ также последовательно и параллельно одноименному удаляемому элементу.

Таблица 3. Формулы для коррекции передаточных функций при подключении к схеме сопротивления, проводимости и управляемого источника

Исходная схема. Передаточная функция	Схема после подключения элемента	Формула для коррекции	№
Коэффициент передачи напряжения при подключении сопротивления $Z(s)$ к стороне схемы			
 $K(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N(s)}{D(s)}.$		$K^z(s) = \frac{Z(s)N(s) + \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline \end{array} }{Z(s)D(s) + \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline \end{array} }$ 	1
Коэффициент передачи напряжения при подключении проводимости $Y(s)$ в разрыв проводника			
 $K(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N(s)}{D(s)}.$		$K^y(s) = \frac{Y(s)N(s) + \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline \end{array} }{D(s) + Y(s) \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline \end{array} }$ 	2
Коэффициент передачи напряжения при подключении ИНУН с параметром k			
 $K(s) = U_2/U_1 = N(s)/D(s)$		$K^k(s) = \frac{N(s) + k \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline \end{array} }{D(s) + k \begin{array}{ c c } \hline & \\ \hline \end{array} }$ <p>Цифрами обозначены номера нораторов и нуллаторов.</p> 	3

Пример коррекции функции входного сопротивления активного фильтра при подключении сопротивления. Задана схема фильтра на рис. 2,а [1]. Усилитель моделируется источником напряжения, управляемым напряжением с параметром μ . Известна символьная функция входного сопротивления, полученная, например, методом схемных определителей [3]

$$Z_{\text{bx}}^z(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s[C_1 R_1(1-\mu) + C_2(R_1 + R_2)] + 1}{s^2 C_1 C_2 R_2 + s[C_1(1-\mu) + C_2]}. \quad (7)$$

Требуется путем коррекции (7) получить функцию входного сопротивления этого же усилителя с подключенным сопротивлением R_3 (рис. 2,б).

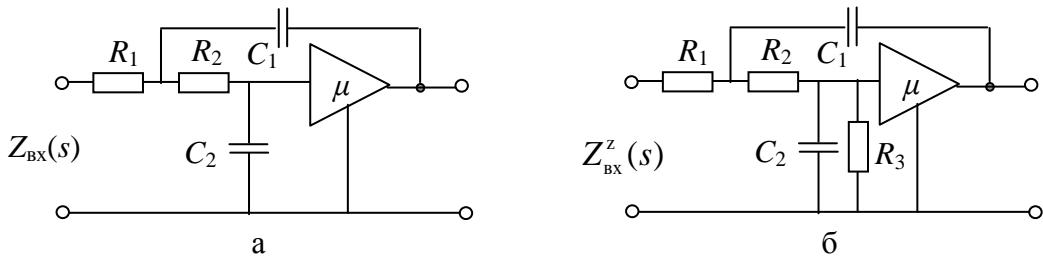


Рис. 2. Исходная схема фильтра (а) и схема фильтра (б) с подключенным сопротивлением R_3

Искомое выражение находится по схемно-алгебраической формуле из строки 1 в табл. 1

$$Z_{\text{bx}}^z(s) = \frac{R_3 N(s)}{R_3 D(s) + \left| \begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } R_3 N(s) \\ \text{Circuit diagram for } R_3 D(s) \end{array} \right|}. \quad (8)$$

The two circuit diagrams in the determinant are identical to those in Figure 2, but with the addition of a voltage-controlled voltage source μU at the output node. In the top diagram, the output voltage is U , and in the bottom diagram, it is μU .

После нейтрализации ИНУН в числителе и знаменателе, удаления замкнутой проводимости sC_2 и удаления разомкнутого сопротивления R_1 в знаменателе формула (8) приобретает следующий вид

$$Z_{\text{вх}}^z(s) = \frac{R_3 N(s)}{R_3 D(s) +} \quad .$$

Применим к числителю (9) формулы выделения проводимости и деления схемы по одному узлу, а также формулу для определителя контура из сопротивлений. В знаменателе необходимо использовать формулу для определителя контура из сопротивления и проводимости. В результате скорректированная формула имеет вид

$$Z_{\text{вх}}^z(s) = \frac{R_3 \{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s[C_1 R_1(1-\mu) + C_2(R_1 + R_2)] + 1\} + sC_1 R_1 R_2 + R_1 + R_2}{R_3 \{s^2 C_1 C_2 R_2 + s[C_1(1-\mu) + C_2]\} + sC_1 R_2 + 1}.$$

Последняя формула может быть получена прямым разложением определителей САФ для схемы с включенным сопротивлением R_3 . Однако использование корректирующей формулы сокращает в некоторых случаях число операций выделения, поскольку приходится находить только один из двух схемных миноров. Формулы могут использоваться при подключении и отключении нескольких элементов. Для этого корректирующие формулы применяются последовательно в рекуррентном режиме.

Выводы. Предлагаются корректирующие схемно-алгебраические формулы для формирования дробно-рациональных схемных функций (СФ) при подключении и отключении сопротивлений, проводимостей и управляемых источников.

Литература

- Бондаренко А.В., Бондаренко В.В., Можар В.И., Сончик Л.И. Современные методы анализа и синтеза электрических цепей: учеб. пособие. – СПб: СПб ГАСУ, 2008.– 216 с.
- Хачатрян В.С., Бадалян Н.П., Хачатрян К.В. Метод построения и коррекции узловых сопротивлений при учете комплексных коэффициентов трансформации // Электричество, 2009, № 8.– С. 27–32.
- Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.
- Braun J. Topological analysis of networks containing nullators and norators // Electronics letters.– 1966.– Vol. 2, No. 11.– P. 427–428.

Бондаренко Анатолий Васильевич – д.т.н, профессор, заведующий кафедрой автоматики и электротехники Санкт-Петербургского архитектурно-строительного университета.

СИМВОЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РЕЗИСТИВНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ДИОДАМИ

К.С. Горшков, А.М. Кузнецов, В.В. Филаретов

Введение. Задача символьного анализа электрических цепей успешно решается для класса линейных систем. Существует большое число разнообразных методов формирования символьной схемной функции (ССФ), краткая характеристика которых приведена в [1]. Одним из наиболее эффективных и универсальных из них является метод схемных определителей (МСО), основанный на схемном подходе В. Фойснера.

Однако электромагнитные процессы, протекающие в реальных электрических цепях, зависят от большого количества как внутренних, так и внешних факторов, и в общем случае имеют нелинейный характер. Существует множество электротехнических устройств, например, различных типов диодов, в основе действия которых лежат принципиально нелинейные явления [2].

Известные методы символьного анализа электрических цепей с диодами связаны с необходимостью составления и решения нелинейных систем уравнений [3, 4], и часто являются смешанными, то есть численно-символьными или графо-аналитическими [5]. В отличие от матричных методов МСО позволяет найти фактические знаки токов и напряжений, что используется в данной статье для символьного анализа цепей с нелинейными двухполюсниками, минуя использование промежуточных математических моделей.

Схемный подход к анализу электрических цепей с диодами. В общем случае диод можно рассматривать как резистивный элемент R_d , сопротивление которого зависит от полярности приложенного к нему напряжения. На рис. 1,а–б и рис. 1,в представлены типичные вольт-амперные характеристики идеализированных и реальных диодов соответственно [6]. Если направление электрического тока совпадает с направлением диода, то диод считается «открытым». Его сопротивление будет пренебрежимо мало для реальных диодов ($R_d < 0.1 \text{ Ом}$) и равно нулю для идеальных. Если направление тока оказывается встречным, то диод является «закрытым», а его сопротивление становится чрезвычайно велико: $R_d \rightarrow \infty$ для ВАХ на рис. 1,а–б, и $R_d > 1 \text{ МОм}$ для ВАХ на рис. 1,в. Следовательно, при известном направлении тока, протекающего через ветвь с диодом в момент времени t_1 , возможно представление диода линейной резистивной моделью, соответствующей данному состоянию элемента. В случае изменения направление тока в момент времени t_2 используется модель, соответствующая противоположному состоянию диода.

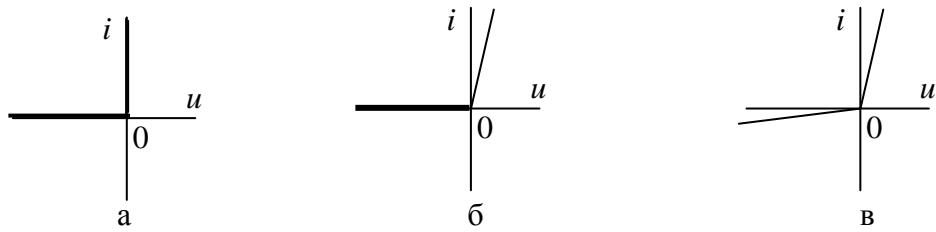


Рис. 1. Вольт-амперные характеристики идеализированных (а, б) и реальных диодов (в)

Основной проблемой анализа нелинейных электрических цепей является определение состояния элемента в произвольный момент времени. В случае с диодами обычно используются комбинаторные алгоритмы [6, 7], сопряженные со значительными вычислительными трудностями. В то же время, применение аппарата схемных определителей позволяет найти фактический знак тока или напряжения на участке цепи, что обеспечивает однозначное определение состояния диода.

В общем случае анализ электрических цепей с диодами на основе схемного подхода при периодическом воздействии будет заключаться в определении направления тока через диоды по линеаризованной модели цепи, получении ССФ искомого отклика и последующем ее расчете при положительном и отрицательном полупериодах внешнего воздействия.

Отклик цепи в символьном виде может быть представлен в дробно-рациональном виде как отношение N/D , где N – определитель схемы, в которой независимый источник и ветвь искомого отклика замещаются нуллом [1], а знаменатель D – определитель схемы с нейтрализованными входом и выходом. Формирование определителей проводится по формуле выделения параметров [1]:

$$\Delta = \chi \Delta(\chi \rightarrow \infty) + \Delta(\chi = 0), \quad (1)$$

где χ – произвольный линейный элемент; $\Delta(\chi \rightarrow \infty)$ – определитель первой производной схемы, полученной из исходной схемы в результате присвоения параметру χ значения, стремящегося к бесконечности; $\Delta(\chi=0)$ – определитель второй производной схемы, образованной в результате нейтрализации выделяемого элемента.

Параметры нелинейных элементов в ССФ было бы желательно обособить от линейных параметров вынесением за скобки. Например так, как это позволяет сделать метод символьного анализа Мидлброка обобщенный в работах [8, 9]:

$$S = S_0 \frac{1 + \chi_1 \frac{N_{\chi_2, \dots, n}^{\chi_1}}{N_{\chi_1, 2, \dots, n}} + \dots + \chi_n \frac{N_{\chi_1, 2, \dots, n-1}^{\chi_n}}{N_{\chi_1, 2, \dots, n}} + \chi_1 \chi_2 \frac{N_{\chi_3, \dots, n}^{\chi_{1,2}}}{N_{\chi_1, 2, \dots, n}} + \dots + \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n \frac{N_{\chi_{(1,2, \dots, n)}}^{\chi_{(1,2, \dots, n)}}}{N_{\chi_1, 2, \dots, n}}}{1 + \chi_1 \frac{D_{\chi_2, \dots, n}^{\chi_1}}{D_{\chi_1, 2, \dots, n}} + \dots + \chi_n \frac{D_{\chi_1, 2, \dots, n-1}^{\chi_n}}{D_{\chi_1, 2, \dots, n}} + \chi_1 \chi_2 \frac{D_{\chi_3, \dots, n}^{\chi_{1,2}}}{D_{\chi_1, 2, \dots, n}} + \dots + \chi_1 \chi_2 \dots \chi_n \frac{D_{\chi_{(1,2, \dots, n)}}^{\chi_{(1,2, \dots, n)}}}{D_{\chi_1, 2, \dots, n}}}, \quad (2)$$

где χ – параметр переменного сопротивления диода R_d , N^χ и D^χ – определители схем, в которых параметр переменного сопротивления устремляется к бесконечности ($\chi \rightarrow \infty$); N_χ и D_χ – определители схем, в которых $\chi \rightarrow 0$; $S_0 = N_{\chi_{1,2,\dots,n}} / D_{\chi_{1,2,\dots,n}}$ – функция цепи с нейтрализованными нелинейными элементами.

Рассмотрим пример анализа схемы диодного выпрямителя гармонического сигнала, представленного на рис. 2,а. Заменяем диод на эквивалентную модель сопротивления R_d (рис. 2,б) и применяем МСО для получения искомой ССФ:

$$U_i = \bar{E} \left(R_i / (R_{d1} + R_i) \right). \quad (3)$$

Если использовать обобщенный метод выделения параметров Мидлброка, то выражение отклика цепи (при $S_0 = R_h / R_h$, $N^{Rd_1} = 0$, $N_{Rd_1} = R_i$, $D^{Rd_1} = 1$, $D_{Rd_1} = R_i$) примет вид:

$$U_i = \bar{E} \left(S_0 \left(\left(1 + R_{d1} \frac{N^{Rd_1}}{N_{Rd_1}} \right) / \left(1 + R_{d1} \frac{D^{Rd_1}}{D_{Rd_1}} \right) \right) \right). \quad (4)$$

Поскольку внешнее воздействие изменяется по гармоническому закону, расчет любого из полученных выражений в случаях открытого и закрытого состояния диода позволит смоделировать реакцию цепи в положительном ($R_{d1} \rightarrow \infty$, $U_h = \bar{E}$) и отрицательном ($R_{d1} \approx 0$, $U_{h-} \approx 0$) полупериодах сигнала соответственно. Результат решения задачи анализа схемы диодного выпрямителя, в пределах одного периода, представлен в графическом виде на рис. 2,в. График построен с помощью системы MathCad 11.

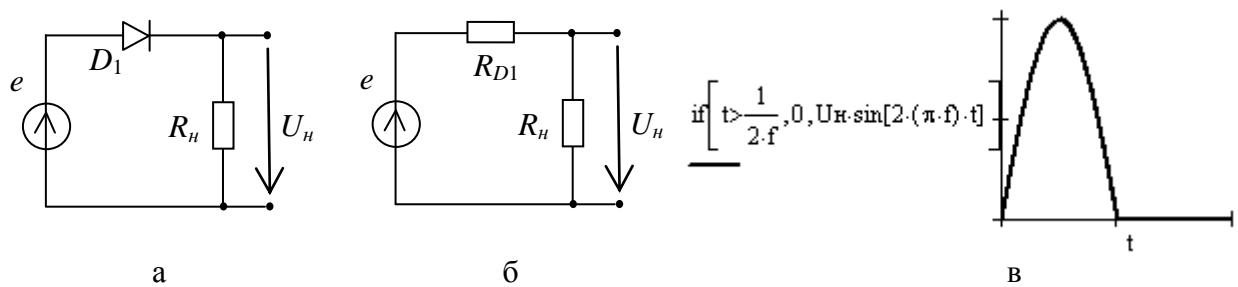


Рис. 2. Анализ схемы диодного выпрямителя напряжения

Символьный анализ диодного моста. Соединение диодов в мостовую структуру (рис. 3,а) широко используется в практической электротехнике [2]. При этом участку электрической цепи с диодным мостом нередко придается статус самостоятельного схемного элемента. Применим схемный подход для символьного анализа диодного моста. Заменяем диоды на резистивные модели как показано на рис. 3,б.

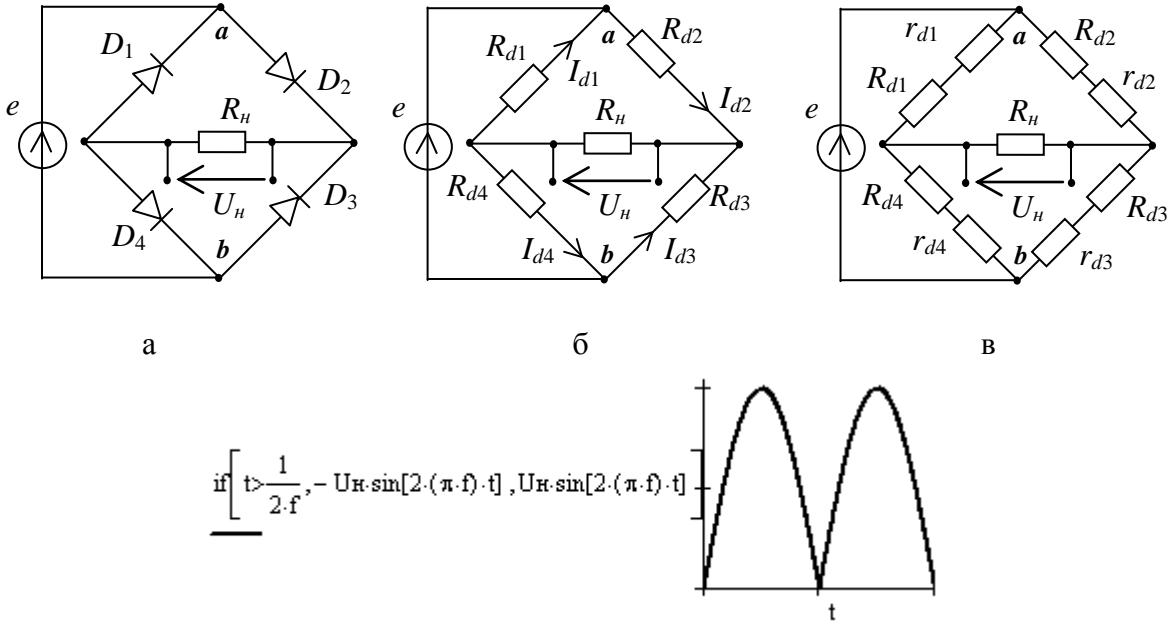


Рис. 3. Анализ схемы диодного моста

Для определения состояния каждого диода в начальный момент времени следует подключить идеальные амперметры, направления которых должны совпадать с ориентацией соответствующих диодов в исходной схеме (рис. 3,б). Используя метод схемных определителей находим четыре ССФ:

$$I_{d1} = \bar{E}(-R_{d3}R_{d2} - R_{d3}R_h - R_{d2}R_{d4} - R_{d2}R_h) / \Delta D; \quad (5)$$

$$I_{d2} = \bar{E}(R_{d4}R_{d1} + R_{d4}R_h + R_{d1}R_{d3} + R_{d1}R_h) / \Delta D; \quad (6)$$

$$I_{d3} = \bar{E}(-R_{d1}R_{d4} - R_{d1}R_h - R_{d4}R_{d2} - R_{d4}R_h) / \Delta D; \quad (7)$$

$$I_{d4} = \bar{E}(R_{d2}R_{d3} + R_{d2}R_h + R_{d3}R_{d1} + R_{d3}R_h) / \Delta D. \quad (8)$$

где $\Delta D = (R_{d1}R_{d2}R_h + R_{d1}R_{d3}R_h + R_{d1}R_{d4}R_{d2} + R_{d1}R_{d4}R_{d3} + R_{d1}R_{d2}R_{d3} + R_{d4}R_{d2}R_{d3} + R_{d4}R_{d2}R_h + R_{d4}R_{d3}R_h)$.

Анализ полученных формул (5)–(8) позволяет даже без подстановки численных значений определить, что диоды D_2 и D_4 в положительном полупериоде являются открытыми, а диоды D_1 и D_3 – закрытыми. В общем случае, при анализе сложных, а также активных электрических цепей, следует проводить численный расчет значений токов, принимая направления диодов за положительные, и присваивая их резистивным моделям значения от 0 до 0,1 Ом, в зависимости от типа ВАХ (рис. 1).

Достоверность сделанных выводов о распределении токов в цепи можно легко доказать на основе законов Кирхгоффа:

$$I_{ex} + I_{d1} - I_{d2} = 0; I_{d2} - I_{d3} - I_h = 0; I_h - I_{d1} - I_{d4} = 0;$$

$$I_{d1}R_{d1} + I_{d4}R_{d4} = \bar{E}; \quad I_{d1}R_{d1} + I_{d2}R_{d2} + I_hR_h = 0; \quad I_{d3}R_{d3} + I_{d4}R_{d4} + I_hR_h = 0;$$

где $I_{ex} = \bar{E}(R_{d1}R_{d3} + R_{d1}R_{d4} + R_{d1}R_h + R_{d2}R_{d3} + R_{d2}R_{d4} + R_{d2}R_h + R_{d3}R_h + R_{d4}R_h) / \Delta D$;

$$I_h = \bar{E}(R_{d1}R_{d3} - R_{d2}R_{d4}) / \Delta D.$$

Теперь получим дробно-рациональную формулу ССФ отклика по напряжению на нагрузке с помощью выражения (1):

$$U_h = \bar{E} (R_h R_{d1} R_{d3} - R_{d4} R_{d2}) / \Delta D \quad (9)$$

Для формирования символьного выражения коэффициента передачи схемы с помощью обобщенной методики Миддлброка линеаризованную модель, представленную на рис. 3,б, использовать нельзя. Действительно, как видно из выражения (2) при расчете ССФ должно выполняться условие $S_0 > 0$. В то же время при нейтрализации всех резистивных моделей диодов на схеме рис. 3,б, для расчета числителя функции S_0 , определятель схемы будет равен нулю. Данное ограничение можно преодолеть, если представить диод в виде двух последовательно соединенных сопротивлений R_d и r_d . При этом дополнительное сопротивление r_d будет, по сути, являться фиктивным, и поэтому на этапе численного расчета полученной формулы ему следует присвоить значение равное нулю.

Таким образом, чтобы провести расчет дробной функции диодного моста с помощью формулы (2) следует преобразовать схему замещения как показано на рис. 3,в. Теперь получаем:

$$\begin{aligned} U_i = \bar{E} \left(U_0 \left(1 + R_{d1} \frac{N_{R_{d2},d3,d4}^{Rd1}}{N_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd1}} + R_{d2} \frac{N_{R_{d1},d3,d4}^{Rd2}}{N_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd2}} + R_{d3} \frac{N_{R_{d1},d3,d4}^{Rd3}}{N_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd3}} + R_{d4} \frac{N_{R_{d1},d3,d4}^{Rd4}}{N_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd4}} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + R_{d1} R_{d3} \frac{N_{R_{d2},d4}^{Rd1,Rd3}}{N_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd1,Rd3}} + R_{d2} R_{d4} \frac{N_{R_{d2},d4}^{Rd2,Rd4}}{N_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd2,Rd4}} \right) \right) \Bigg/ \left(1 + R_{d1} \frac{D_{R_{d2},d3,d4}^{Rd1}}{D_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd1}} + \right. \\ \left. + R_{d2} \frac{D_{R_{d1},d3,d4}^{Rd2}}{D_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd2}} + R_{d3} \frac{D_{R_{d1},d3,d4}^{Rd3}}{D_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd3}} + R_{d4} \frac{D_{R_{d1},d3,d4}^{Rd4}}{D_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd4}} + R_{d1} R_{d2} \frac{D_{R_{d3},d4}^{Rd1,Rd2}}{D_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd1,Rd2}} + \right. \\ \left. + R_{d1} R_{d3} \frac{D_{R_{d2},d4}^{Rd1,Rd3}}{D_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd1,Rd3}} + R_{d1} R_{d4} \frac{D_{R_{d2},d3}^{Rd1,Rd4}}{D_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd1,Rd4}} + R_{d2} R_{d3} \frac{D_{R_{d1},d4}^{Rd2,Rd3}}{D_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd2,Rd3}} + \right. \\ \left. \left. \left. + R_{d2} R_{d4} \frac{D_{R_{d2},d4}^{Rd2,Rd4}}{D_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd2,Rd4}} + R_{d3} R_{d4} \frac{D_{R_{d2},d4}^{Rd3,Rd4}}{D_{r_{d1,d2,d3,d4}}^{Rd3,Rd4}} \right) \right) \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Найдем промежуточные выражения:

$$U_0 = N_{r_{d1,d2,d3,d4}} / D_{r_{d1,d2,d3,d4}}; \quad N_{r_{d1,d2,d3,d4}} = R_h r_{d1} r_{d3} - r_{d4} r_{d2};$$

$$D_{r_{d1,d2,d3,d4}} = (r_{d1}((r_{d4} + R_h)(r_{d2} + r_{d3}) + r_{d2} r_{d3}) + r_{d4}(r_{d2}(r_{d3} + R_h) + r_{d3} R_h));$$

$$N_{R_{d2},d3,d4}^{Rd1} = r_{d3} R_h; \quad N_{R_{d1},d3,d4}^{Rd2} = (-r_{d4} R_h); \quad N_{R_{d1},d2,d4}^{Rd3} = r_{d1} R_h; \quad N_{R_{d1},d2,d3}^{Rd4} = (-r_{d2} R_h);$$

$$N_{R_{d3},d4}^{Rd1,Rd2} = 0; \quad N_{R_{d2},d4}^{Rd1,Rd3} = R_h; \quad N_{R_{d2},d3}^{Rd1,Rd4} = 0; \quad N_{R_{d1},d4}^{Rd2,Rd3} = 0; \quad N_{R_{d1},d3}^{Rd2,Rd4} = -R_h; \quad N_{R_{d1},d2}^{Rd3,Rd4} = 0;$$

$$D_{R_{d2},d3,d4}^{Rd1} = r_{d2}(r_{d3} + R_h + r_{d4}) + r_{d3}(r_{d4} + R_h);$$

$$\begin{aligned}
D_{R_{d1,d3,d4}}^{Rd_2} &= r_{d1}(r_{d3}+R_h+r_{d4})+r_{d4}(r_{d3}+R_h); \\
D_{R_{d1,d2,d4}}^{Rd_3} &= r_{d1}(r_{d2}+r_{d4}+R_h)+r_{d4}(r_{d2}+R_h); \\
D_{R_{d1,d2,d3}}^{Rd_4} &= r_{d2}(r_{d1}+R_h+r_{d3})+r_{d3}(r_{d1}+R_h); \\
D_{R_{d3,d4}}^{Rd_1,Rd_2} &= (r_{d3}+r_{d4})+R_h; D_{R_{d2,d4}}^{Rd_1,Rd_3} = (r_{d2}+r_{d4})+R_h; D_{R_{d2,d3}}^{Rd_1,Rd_4} = r_{d2}+r_{d3}; \\
D_{R_{d1,d4}}^{Rd_2,Rd_3} &= r_{d1}+r_{d4}; D_{R_{d1,d3}}^{Rd_2,Rd_4} = (r_{d1}+r_{d3})+R_h; D_{R_{d1,d2}}^{Rd_3,Rd_4} = (r_{d1}+r_{d2})+R_h;
\end{aligned}$$

Если подставить полученные промежуточные результаты в формулу (10), раскрыть скобки, а затем приравнять к нулю параметры фиктивных элементов, то мы получим ССФ аналогичную выражению (9).

Как показывает приведенный расчет, необходимость введения в схему дополнительных элементов делают обобщенную методику Миддлбрука практически не пригодной для анализа сложных нелинейных электрических цепей. Имеет смысл преобразовать формулу (2) к дробно-рациональному виду, сократив числитель и знаменатель на $N_{\chi_{1,2,\dots,n}}$ и $D_{\chi_{1,2,\dots,n}}$ соответственно:

$$S = \frac{\chi_1(N_{\chi_{2,\dots,n}}^{\chi_1}) + \dots + \chi_n(N_{\chi_{1,2,\dots,n-1}}^{\chi_n}) + \chi_1\chi_2(N_{\chi_{3,\dots,n}}^{\chi_{1,2}}) + \dots + \chi_1\chi_2\dots\chi_n(N_{\chi_{(1,2,\dots,n)}}^{\chi_{(1,2,\dots,n)}})}{\chi_1(D_{\chi_{2,\dots,n}}^{\chi_1}) + \dots + \chi_n(D_{\chi_{1,2,\dots,n-1}}^{\chi_n}) + \chi_1\chi_2(D_{\chi_{2,\dots,n}}^{\chi_{1,2}}) + \dots + \chi_1\chi_2\dots\chi_n(D_{\chi_{(1,2,\dots,n)}}^{\chi_{(1,2,\dots,n)}})}. \quad (11)$$

Предложенная формула (11) обеспечивает получение ССФ, в которой параметры нелинейных элементов вынесены за скобки определителей линеаризованных схем замещения, и не требует введения дополнительных элементов. Так, для схемы на рис. 3,б выражение схемной функции по формуле (11), будет иметь вид:

$$U_i = \frac{\bar{E}(R_{d1}R_{d3}(N_{R_{d2,d4}}^{Rd_1,Rd_3}) + R_{d2}R_{d4}(N_{R_{d2,d4}}^{Rd_2,Rd_4}))}{R_{d1}R_{d2}(D_{R_{d3,d4}}^{Rd_1,Rd_2}) + R_{d1}R_{d3}(D_{R_{d2,d4}}^{Rd_1,Rd_3}) + R_{d2}R_{d4}(D_{R_{d2,d4}}^{Rd_2,Rd_4}) + R_{d3}R_{d4}(D_{R_{d2,d4}}^{Rd_3,Rd_4})}, \quad (12)$$

где $N_{R_{d2,d4}}^{Rd_1,Rd_3} = R_h$; $N_{R_{d1,d3}}^{Rd_2,Rd_4} = -R_h$; $D_{R_{d3,d4}}^{Rd_1,Rd_2} = R_h$; $D_{R_{d2,d4}}^{Rd_1,Rd_3} = R_h$; $D_{R_{d1,d3}}^{Rd_2,Rd_4} = R_h$; $D_{R_{d1,d2}}^{Rd_3,Rd_4} = R_h$.

Из выражений (5)–(8) следует, что в полученных схемных функциях (9)–(11) при расчете отклика в положительном полупериоде гармонического колебания внешнего воздействия U_{h+} значения R_{d3} и R_{d2} будут чрезвычайно велики, а значения R_{d1} и R_{d4} ничтожно малы. Очевидно, что в отрицательном полупериоде, при расчете U_{h-} , полярность токов I_{d1} , I_{d2} , I_{d3} и I_{d4} сменится на противоположную, что приведет к соответствующим изменениям значений сопротивлений диодов в ССФ.

Завершаем решение задачи построением графической зависимости отклика цепи от времени с помощью системы MathCad 11 (рис. 3,г).

Таким образом, напряжение на выходе диодного моста будет изменяться от 0 до U_{m+} , а распределение токов в схеме в положительный и отрицательный периоды будет соответствовать рис. 4,а и рис. 4,б. Это позволяет упростить анализ электрических цепей с диодными мостами, поскольку для определения режима работы диодов будет достаточно

определить в численной или символьной форме полярность приложенного ко входу моста напряжения (выводы «*a*» и «*b*» на рис. 3 и рис. 4, а–в) в начальный момент времени. Если напряжение положительное, то диоды D_2 и D_3 будут открытыми, а D_1 и D_4 будут закрытыми, если напряжение отрицательно, то наоборот. Очевидно, что этот подход будет справедливым для диодов с любой формой ВАХ.

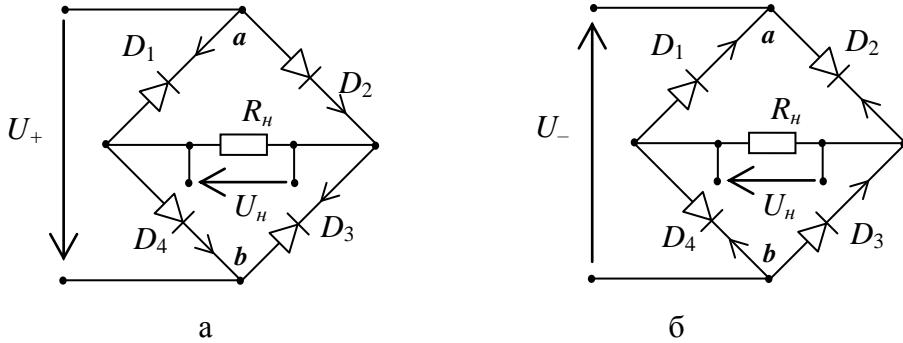


Рис.4. Распределение токов на плечах диодного моста при положительном (а) и отрицательном (б) напряжениях на входе

Алгоритм символьного анализа электрических цепей с диодами.

Для анализа электрических цепей с диодами на основе схемного подхода в общем случае можно использовать любую из рассмотренных выше формул (1), (2) или (11). Однако только последняя из них сочетает удобство расчета и наглядность представления ССФ. Поэтому в предлагаемом алгоритме символьного анализа нелинейных электрических цепей используется именно выражение (11):

- 1) составление схемы замещения, путем замены диодов D_n на линейные модели R_{dn} ;
- 2) применение формулы (11) для получения дробно-рациональной формулы отклика S_m цепи;
- 3) определение полярности токов диодов и напряжений на выходах диодных мостов, через нахождение знака схемных функций в символьном или численном виде при начальных условиях (в общем случае, в начале положительного полупериода);
- 4) расчет формулы отклика цепи для положительного S_{m+} и отрицательного S_{m-} полупериодов колебания внешнего воздействия, при подстановке значений сопротивлений R_d , соответствующих режимам работы диодов, определенных на предыдущем шаге;
- 5) построение графика временной зависимости.

Предложенный алгоритм не имеет ограничений на вид входного периодического воздействия, количество и тип используемых диодов в электрической цепи. Для автоматизации анализа нелинейных электрических цепей рекомендуется использовать систему схемотехнического проектирования SCADS (Symbolic Circuit Analysis, Diagnostics and Synthesis) [1].

Примеры. Рассмотрим пример применения приведенного выше алгоритма для анализа выпрямительной схемы с двумя последовательно соединенными диодными мостами, представленной на рис. 5,а. Вольт-амперная характеристика диодов соответствует рис. 1,б. Заменяем каждый диодный мост резистивной схемой как на рис. 3,б, и следуя второму шагу алгоритма, определяем, что разность потенциалов U_1 и U_2 на входах диодных мостов в произвольный момент времени будет полностью соответствовать значению источника. Затем выполняем расчет ССФ функции напряжения на выходе выпрямителя, согласно третьему шагу алгоритма. При синусоидальном характере внешнего воздействия получаем следующее выражение схемной функции U_{h+} , в соответствии с рис. 4, при $R_{d11} \rightarrow \infty$, $R_{d13} \rightarrow \infty$, $R_{d21} \rightarrow \infty$, $R_{d23} \rightarrow \infty$, $R_{d12} \approx 0.1$, $R_{d14} \approx 0.1$, $R_{d22} \approx 0.1$, $R_{d24} \approx 0.1$:

$$U_{h+} = \bar{E} (R_{d12}R_{d14}(R_h) + R_{d12}R_{d24}(R_h) + R_{d14}R_{d22}(R_h) + R_{d22}R_{d24}(R_h)) / \\ (R_{d12}R_{d14}(R_h) + R_{d12}R_{d24}(R_h) + R_{d22}R_{d14}(R_h) + R_{d22}R_{d24}(R_h) + \\ + R_{d12}R_{d22}R_{d14}(1) + R_{d12}R_{d22}R_{d24}(1) + R_{d12}R_{d14}R_{d24}(1) + R_{d22}R_{d14}R_{d24}(1)) \approx \bar{E};$$

В отрицательном полупериоде выражение U_{h-} при $R_{d12} \rightarrow \infty$, $R_{d14} \rightarrow \infty$, $R_{d22} \rightarrow \infty$, $R_{d24} \rightarrow \infty$, $R_{d11} \approx 0.1$, $R_{d13} \approx 0.1$, $R_{d21} \approx 0.1$, $R_{d23} \approx 0.1$, примет вид:

$$U_{h-} = \bar{E} (R_{d11}R_{d13}(R_h) + R_{d11}R_{d23}(R_h) + R_{d21}R_{d13}(R_h) + R_{d21}R_{d23}(R_h)) / \\ (R_{d11}R_{d13}(R_h) + R_{d11}R_{d23}(R_h) + R_{d21}R_{d13}(R_h) + R_{d21}R_{d23}(R_h) + R_{d11}R_{d21}R_{d13}(1) + \\ + R_{d11}R_{d21}R_{d23}(1) + R_{d11}R_{d13}R_{d23}(1) + R_{d21}R_{d13}R_{d23}(1)) \approx \bar{E};$$

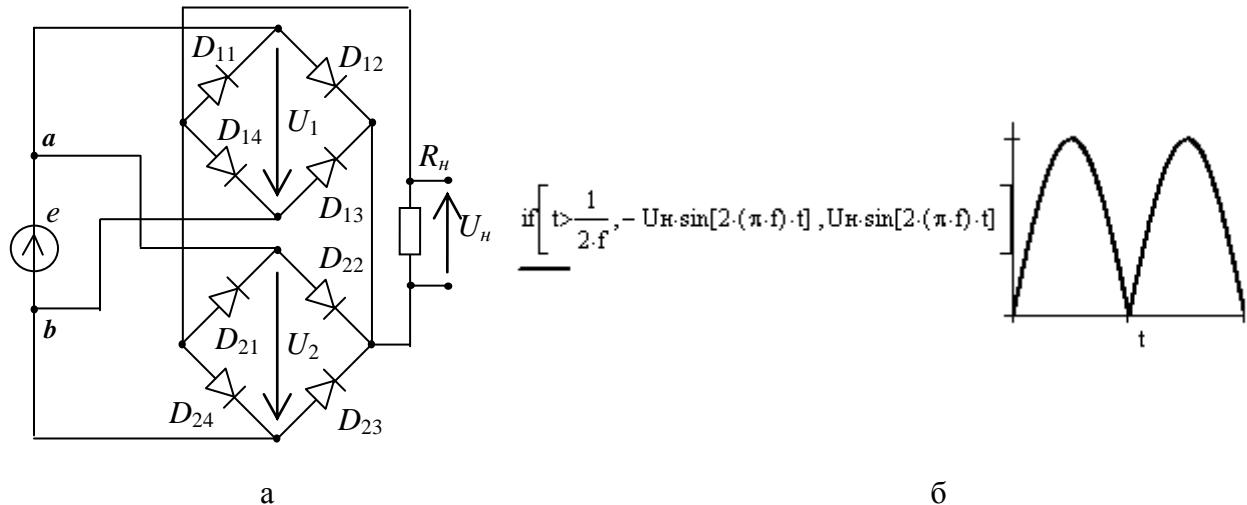


Рис. 5. Выпрямительная схема с двумя мостами (а), график функции напряжения на нагрузке (б)

Для доказательства справедливости предложенного решения проведем проверку по второму закону Кирхгоффа для нескольких контуров. Так, для контура из ветвей R_{d24} , R_{d23} , и R_h запишем: $U_{Rn}+U_{Rd23}+U_{Rd24}=0$. Независимо от полупериода единичного воздействия получаем значения напряжений: $U_{Rn}= 0.9999$, $U_{Rd23}= -0.99995$, $U_{Rd24}=0.000049$. Следовательно, сумма напряжений приблизительно равна нулю. Аналогично для контура U_{Rd11} , U_{Rd12} , U_{Rd13} , и U_{Rd14} получаем: $U_{Rd11}+U_{Rd12}+U_{Rd13}+U_{Rd14}=-0.66665+0.33334+0.66665-0.33334=0$.

Завершаем выполнение алгоритма построением графической зависимости напряжения на нагрузке выпрямителя от времени с помощью системы MathCad 11 (рис. 5,б).

Следующий пример – символный анализ электрической цепи с параллельно включенными диодными мостами (рис. 6,а). Пусть вольт-амперная характеристика каждого диода снова соответствует рис. 1,б.

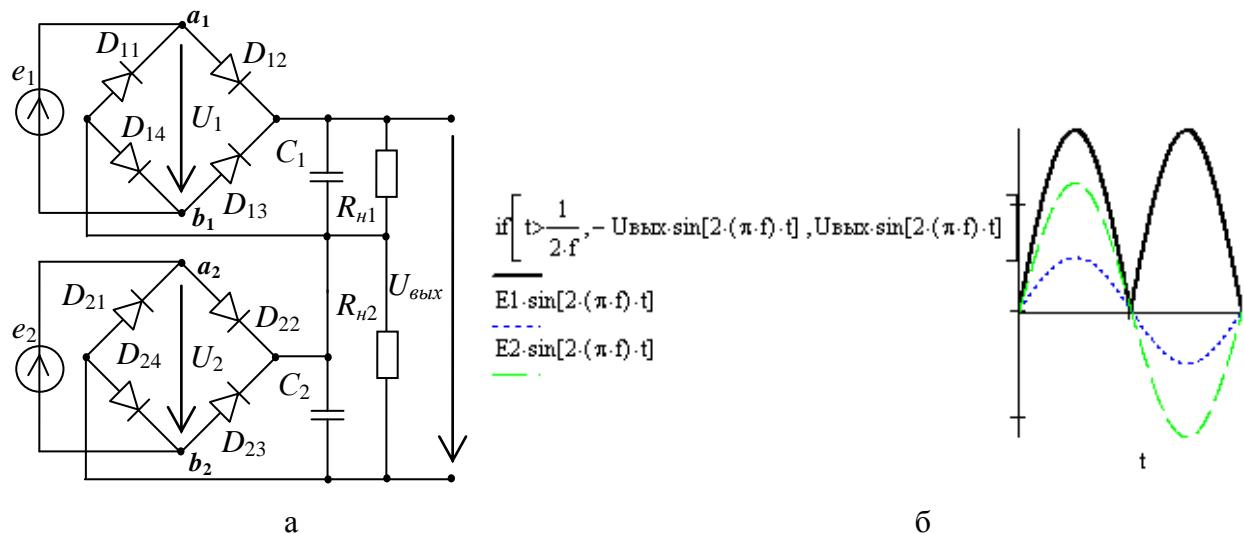


Рис. 6. Выпрямительная схема с двумя мостами (а), график функции напряжения на выходе цепи (б)

Согласно первому шагу алгоритма заменяем диодные мосты резистивными схемами как на рис. 3,б. Затем определяем полярность напряжений на входах диодных мостов в начальный момент времени. Из рис. 6,а видно, что значения U_1 и U_2 будут полностью определяться соответствующими источниками. Теперь выполняем расчет отклика электрической цепи на выходе с помощью формулы (11). В случае если переменный сигнал на входах изменяется по синусоидальному закону, то символьное выражение для получения U_{h+} будет следующим ($E_{m1}=1$ В,

$E_{m2}=0.5 \text{ } B$, $C_1=1 \text{ } \mu\Phi$, $C_2=1 \text{ } \mu\Phi$, $R_{d11}\rightarrow\infty$, $R_{d13}\rightarrow\infty$, $R_{d21}\rightarrow\infty$, $R_{d23}\rightarrow\infty$, $R_{d12}\approx0.1 \text{ } Om$, $R_{d14}\approx0.1 \text{ } Om$, $R_{d22}\approx0.1 \text{ } Om$, $R_{d24}\approx0.1 \text{ } Om$):

$$\begin{aligned} U_{\text{вых+}} = & R_{d12}(pC_1R_{h1}R_{h2}\bar{E}_2 + R_{h2}\bar{E}_2) + R_{d14}(pC_1R_{h1}R_{h2}\bar{E}_2 + R_{h2}\bar{E}_2) + \\ & R_{d22}(pC_2R_{h2}R_{h1}\bar{E}_1 + R_{h1}\bar{E}_1) + R_{d24}(pC_2R_{h2}R_{h1}\bar{E}_1 + R_{h1}\bar{E}_1) + R_{h2}R_{h1}\bar{E}_1 + R_{h2}R_{h1}\bar{E}_2 / \\ & (R_{d12}R_{d22}(p^2C_1R_{h1}C_2R_{h1} + pR_{h1}C_1) + R_{d12}R_{d24}(p^2C_1R_{h1}C_2R_{h1} + pR_{h1}C_1) + \\ & + R_{d14}R_{d22}(p^2C_1R_{h1}C_2R_{h1}) + R_{d14}R_{d24}(p^2C_1R_{h1}C_2R_{h1} + pR_{h1}C_1) + \\ & + R_{d12}(pC_1R_{h1}R_{h2}) + R_{d14}(pC_1R_{h1}R_{h2}) + R_{d22}(pC_2R_{h2}R_{h1}) + R_{d24}(pC_2R_{h1}R_{h2}) + \\ & R_{d12}R_{d22}(pC_1R_{h1} + pC_2R_{h2}) + R_{d12}R_{d24}(pC_1R_{h1} + pC_2R_{h2}) + R_{d14}R_{d22}(pC_1R_{h1} \\ & + pC_2R_{h2}) + R_{d14}R_{d24}(pC_1R_{h1} + pC_2R_{h2}) + R_{d12}(R_{h2}) + R_{d14}(R_{h2}) + R_{d22}(R_{h1}) + \\ & R_{d24}(R_{h1}) + R_{d12}R_{d22}(1) + R_{d12}R_{d24}(1) + R_{d14}R_{d22}(1) + R_{d14}R_{d24}(1) + (R_{h1}R_{h2})) \approx \bar{E}_1 + \bar{E}_2. \end{aligned}$$

В отрицательном полупериоде выражение U_{h-} при $E_{m1}=1 \text{ } B$, $E_{m2}=0.5 \text{ } B$, $C_1=1 \text{ } \mu\Phi$, $C_2=1 \text{ } \mu\Phi$, $R_{d12}\rightarrow\infty$, $R_{d14}\rightarrow\infty$, $R_{d22}\rightarrow\infty$, $R_{d24}\rightarrow\infty$, $R_{d11}\approx0.1 \text{ } Om$, $R_{d13}\approx0.1 \text{ } Om$, $R_{d21}\approx0.1 \text{ } Om$, $R_{d23}\approx0.1 \text{ } Om$, примет вид:

$$\begin{aligned} U_{\text{вых-}} = & R_{d11}(pC_1R_{h1}R_{h2}\bar{E}_2 + R_{h2}\bar{E}_2) + R_{d13}(pC_1R_{h1}R_{h2}\bar{E}_2 + R_{h2}\bar{E}_2) + R_{d21}(pC_2 \\ & R_{h1}R_{h2}\bar{E}_1 + R_{h1}\bar{A}_1) + R_{d23}(pC_2R_{h1}R_{h2}\bar{E}_1 + R_{h1}\bar{A}_1) + R_{h1}R_{h2}\bar{A}_1 + R_{h1}R_{h2}\bar{E}_2 / \\ & (R_{d11}R_{d21}(p^2C_1R_{h1}C_2R_{h1} + pR_{h1}C_1) + R_{d11}R_{d23}(p^2C_1R_{h1}C_2R_{h1} + pR_{h1}C_1) + \\ & + R_{d13}R_{d21}(p^2C_1R_{h1}C_2R_{h1}) + R_{d13}R_{d23}(p^2C_1R_{h1}C_2R_{h1} + pR_{h1}C_1) + R_{d11}(pC_1R_{h1}R_{h2}) + \\ & + R_{d13}(pC_1R_{h1}R_{h2}) + R_{d21}(pC_2R_{h2}R_{h1}) + R_{d23}(pC_2R_{h1}R_{h2}) + R_{d11}R_{d21}(pC_1R_{h1} + pC_2R_{h2}) + \\ & + R_{d11}R_{d23}(pC_1R_{h1} + pC_2R_{h2}) + R_{d13}R_{d21}(pC_1R_{h1} + pC_2R_{h2}) + \\ & R_{d13}R_{d23}(pC_1R_{h1} + pC_2R_{h2}) + R_{d13}(R_{h2}) + R_{d21}(R_{h1}) + R_{d23}(R_{h1}) + R_{d11}R_{d21}(1) + R_{d11}R_{d23}(1) + \\ & R_{d11}(R_{h2}) + R_{d13}R_{d21}(1) + R_{d13}R_{d23}(1) + (R_{h1}R_{h2})) \approx \bar{E}_1 + \bar{E}_2. \end{aligned}$$

Для проверки проведем численный расчет по второму закону Кирхгофа для контура из ветвей E_2 , R_{d22} , C_2 , и R_{d24} , запишем:

$$\bar{U}_{E2} + \bar{U}_{Rd22} + \bar{U}_{C2} + \bar{U}_{Rd24} = (-0,5 - 2,218E-22j) + (4,999E-5 + 3,14E-7j) + \\ (0,4999 - 6,28E-7j) + 4,999E-5 + 3,14E-7j = -2E-8 \approx 0.$$

График временной зависимости удвоенного напряжения на выходе выпрямителя построен с помощью системы MathCad 11 и представлен на рис. 6,б).

Выводы

1. Предложено использование аппарата схемных определителей для определения состояния диодов, минуя трудоемкие комбинаторные алгоритмы.

2. Получена формула выделения параметров нелинейных элементов, обеспечивающая удобство расчета и наглядность представления дробно-рациональных ССФ электрических цепей.

3. Разработан алгоритм символьного анализа резистивных электрических схем с диодами, не имеющий ограничений на вид входного периодического воздействия, количество и тип используемых диодов в электрической цепи.

Литература

1. Горшков К.С., Филаретов В.В. Схемный подход Вильгельма Фойснера и метод схемных определителей. – Ульяновск, УлГТУ, 2009. – 184 с.
2. Абрамович М.И., Бабайлов В.М., Либер В.Е. Диоды и тиристоры в преобразовательных установках. – М.: Энергоатомиздат, 1992. – 432 с.
3. Popp R., Oehmen J., Hedrich L., Barke E. Parameter controlled automatic symbolic analysis of nonlinear analog circuits // Proc. Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE–2002).– 2002.– P. 274 – 278.
4. Hospodka, J. Bicak, J. Symbolic analysis of nonlinear electronic circuits by PraCAn package in Maple program // Symbolic and Numerical Methods, Modeling and Applications to Circuit Design (SM2ACD–2010).– 2010.– P. 1–4.
5. Li Z., Manthe A., Mayaram K., Shi R. Symbolic Analysis of Nonlinear Analog Circuits // Proc. Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition (DATE–2003).– 2003. – P. 11108–11109.
6. Курганов С.А. Анализ активных и нелинейных электрических цепей: Методические указания.– Ульяновск: УлГТУ, 1992.– 28 с.
7. Лин Пен-Мин, Чуа Л. О. Машиинный анализ электронных схем (алгоритмы и вычислительные методы). – М.: Энергия.– 1980.– 638 с.
8. Горшков К.С., Филаретов В.В. Формирование дробных символьных выражений для схемных функций электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 136–149.
9. Filaretov V., Gorshkov K. The Generalization of the Extra Element Theorem for Symbolic Circuit Tolerance Analysis // Journal of Electrical and Computer Engineering.– Vol. 2011.– Article ID 652706.– 5 p.

Горшков Константин Сергеевич – к.т.н., доцент кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ); домашний адрес: г. Ульяновск, ул. Тельмана, д. 14, кв. 9; тел: (8908) 470-31-59; e-mail: K.Gorshkov@ulstu.ru.

Кузнецов Алексей Михайлович - студент 5-го курса факультета информационных систем и технологий УлГТУ. E-mail: alexei-90_kuz@mail.ru.

ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЕ ОБОСНОВАНИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОГО МЕТОДА, СОЗДАННОГО Г. КИРХГОФОМ

И. В. Ерохов

В работе [1] Г.Кирхгоф предложил метод расчета электрических цепей произвольной сложности, который по праву можно считать первым топологическим методом расчета электрических цепей. Определение значения тока в выбранной ветви электрической цепи начинается с удаления из графа ($\mu - 1$) связей, что упрощает его до одного контура, содержащего выбранную ветвь. Таких контуров, проходящих через одну и ту же ветвь, в произвольной цепи существует много, их число определяется количеством подмножеств связей по ($\mu - 1$) ветвей в каждом.

Далее найденные контура описываются по второму закону Кирхгофа, и в каждом случае находится приближенное выражение для тока ветви. Точное выражение для тока ветви находится поэтапно. Сначала уточняются формулы для приближенных значений, в каждую из которых возвращаются ветви-связи путем умножения числителя и знаменателя на их параметры. Затем из «исправленных» выражений для приближенных значений тока создается формула точного значения путем объединения (отдельно) слагаемых числителей и знаменателей контуров.

Реконструкция топологического метода проведена в работе [2] на примере простой электрической цепи. В процессе реконструкции выяснилось, что Г.Кирхгоф искал точное решение системы уравнений, составленных по методу контурных токов, до открытия которого Максвеллом нужно было еще ждать около 50-ти лет. Однако алгоритм метода, который сегодня получил бы название эволюционного, описан достаточно ясно и может использоваться так, как показано в статье [2].

При обсуждении реконструкции первого топологического метода расчета электрических цепей были высказаны определенные замечания, которые сводились к необходимости привести более обстоятельные доказательства предложенных процедур. Настоящей статьей автор надеется ответить на товарищескую критику и рассеять возможные опасения специалистов.

Вернемся к схеме, которая приведена в работе [2] – к простой электрической цепи, служившей модельным примером для многих работ по теории электрических цепей. В качестве искомого тока был выбран ток ветви 1. Система уравнений, которая описывает схему рис.1, составлена по методу контурных токов (1) и приводится ниже, $I_1 = I_{11}$.

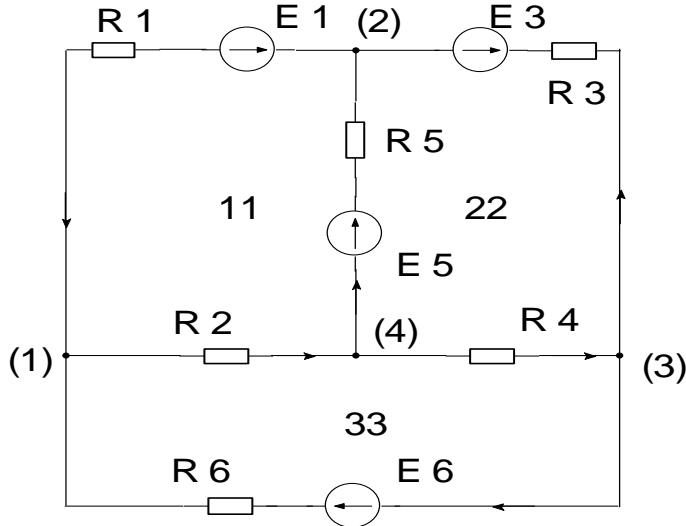


Рис.1. Простая электрическая цепь

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_5) & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & (R_3 + R_4 + R_5) & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & (R_2 + R_4 + R_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 + E_5 \\ -E_3 - E_5 \\ -E_6 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Значение первого контурного тока находим по методу Крамера:

$$I_{11} = I_1 = \frac{\Delta_1 \|R\|}{\Delta \|R\|}, \quad (2)$$

где $\Delta \|R\|$ – детерминант матрицы системы уравнений (1),

$\Delta_1 \|R\|$ – детерминант матрицы $\|R\|$, у которой на месте первого столбца размещен столбец правой части системы (1). Оба детерминанта приведены в работе [2].

Найдем слагаемые определителя системы уравнений (1) с помощью формального алгоритма [3], [4], в котором «сочетания» параметров ветвей представляются столбцами их номеров. Произведем декартово умножение контурных множеств [4], полученных из схемы, рис.1:

$$\Delta \{1, 2, 5\} \times$$

$$\times \{3, 4, 5\} \times$$

$$\times \{2, 4, 6\}.$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix} \quad (3)$$

Выражение (3) называют структурным числом [3], так как оно отражает как структуру детерминанта системы (1), так и структуру схемы рис. 1. Конечно, столбцы числа (3) можно считать слагаемыми структуры аналогично составляющим детерминанта, однако, надо отметить, что в зависимости от этапа расчета конкретный символ столбца можно трактовать по-разному: либо как сопротивление соответствующей ветви, либо как номинал источника ЭДС той же ветви.

При декартовом умножении контурных множеств соблюдаются алгебра, в которой справедливы следующие правила [4]:

$$a \otimes a = 0;$$

$$abc \oplus abc = 0.$$

В соответствие с этими равенствами при декартовом произведении контурных множеств (3) промежуточные произведения одинаковых символов не учитывались. Например,

$$2 \otimes 2 = 0;$$

$$3 \otimes 3 = 0;$$

$$4 \otimes 4 = 0;$$

$$5 \otimes 5 = 0.$$

Кроме того, сочетания номеров (245), которые образуются при умножении два раза, удалены из числа (3).

Метод Кирхгофа позволяет получить слагаемые детерминанта другим путем, что проиллюстрировано в работе [2]. Однако главным этапом этого метода является выделение из графа схемы системы контуров, содержащих выбранную ветвь под номером 1. Приведем эти контура, отметив ветви-связи пунктирными линиями. Номера ветвей-связей легко установить по рис.1.

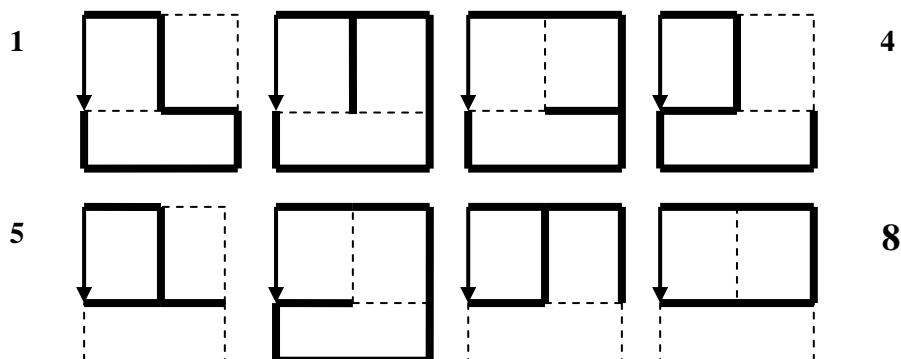


Рис. 2. Контура схемы рис.1, содержащие ветвь 1.

Каждый контур описывается по второму закону Кирхгофа и из этого уравнения находится приближенное выражение для тока ветви 1, которое совпадает с током единственного контура. Например, для первого контура рис. 2 имеем:

$$I'_1 = \frac{-E_1 + E_5 - E_6}{R_1 + R_4 + R_5 + R_6}. \quad (4)$$

Заметим, что контур был получен путем удаления из графа цепи ветвей-связей 2, 3. Запишем знаменатель выражения (4) как множество индексов ветвей $\{1, 4, 5, 6\}$ и наглядно покажем, как его можно получить из структурного числа (3).

Из выражения (3) выделяем столбцы, содержащие индекс ветви-связи 2,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$$

после чего, удаляем этот индекс из выбранных столбцов структурного числа. В результате этих структурных преобразований получаем выражение для алгебраической производной:

$$\frac{dA}{d2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Результат (5) продифференцируем еще раз по индексу 3 – второй ветви-связи:

$$\frac{dA}{d2/d3} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Мы получили множество индексов ветвей, которые содержатся в знаменателе выражения (4). Таким образом, найден структурный аналог графическому алгоритму, представленному на рис. 2.

Удаленные ветви-связи можно восстановить, умножая числитель и знаменатель выражения для первого контура на резисторы этих ветвей:

$$I''_1 = \frac{-E_1 R_2 R_3 + E_5 R_2 R_3 - E_6 R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + R_4 R_2 R_3 + R_5 R_2 R_3 + R_6 R_2 R_3}. \quad (7)$$

Конечно, мы получили определенное решение для тока первой ветви, которое не является точным. В работе [2] подобные «частичные» решения для каждого контура рис. 2 сведены в таблицу, которую имеет смысл привести в настоящей статье. После удаления из графа электрической цепи рис. 1 очередного множества ветвей-связей остается только один контур, в

котором содержится ветвь 1. В каждом случае структурного упрощения находится выражение, аналогичное (4), по которому получают «частичное» решение, похожее на выражение (7).

Таблица «частичных» решений:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\{1, 4, 5, 6\}}{\{2, 3\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5 - E_6}{R_1 + R_4 + R_5 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_3 + E_5 R_2 R_3 - E_6 R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + R_4 R_2 R_3 + R_5 R_2 R_3 + R_6 R_2 R_3}; \\
 & \frac{\{1, 3, 6\}}{\{2, 4\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_4 - E_3 R_2 R_4 - E_6 R_2 R_4}{R_1 R_2 R_4 + R_3 R_2 R_4 + R_6 R_2 R_4}; \\
 & \frac{\{1, 3, 6\}}{\{2, 5\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_5 - E_3 R_2 R_5 - E_6 R_2 R_5}{R_1 R_2 R_5 + R_3 R_2 R_5 + R_6 R_2 R_5}; \\
 & \frac{\{1, 2, 5\}}{\{3, 4\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 R_4 + E_5 R_3 R_4}{R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_5 R_3 R_4}; \\
 & \frac{\{1, 2, 5\}}{\{3, 6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 R_6 + E_5 R_3 R_6}{R_1 R_3 R_6 + R_2 R_3 R_6 + R_5 R_3 R_6}; \\
 & \frac{\{1, 3, 6\}}{\{4, 5\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 R_5 - E_3 R_4 R_5 - E_6 R_4 R_5}{R_1 R_4 R_5 + R_3 R_4 R_5 + R_6 R_4 R_5}; \\
 & \frac{\{1, 2, 5\}}{\{4, 6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 R_6 + E_5 R_4 R_6}{R_1 R_4 R_6 + R_2 R_4 R_6 + R_5 R_4 R_6}; \\
 & \frac{\{1, 2, 3, 4\}}{\{5, 6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \Rightarrow \frac{-E_1 R_5 R_6 - E_3 R_5 R_6}{R_1 R_5 R_6 + R_2 R_5 R_6 + R_3 R_5 R_6 + R_4 R_5 R_6}.
 \end{aligned}$$

Знаменатели «частичных» решений представим в виде частичных структурных чисел для каждого из восьми фрагментов графа схемы рис.1.

$$\begin{aligned}
 A^1 &= \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \right| \quad A^2 = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 6 \end{array} \right| \quad A^3 = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{array} \right| \quad A^4 = \\
 A^5 &= \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \end{array} \right| \quad A^6 = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{array} \right| \quad A^7 = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{array} \right| \quad A^8 = \\
 & \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{array} \right|. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Достаточно объединить частичные структурные числа (8), соблюдая правила для подобных операций, чтобы получить число (3)

$$A = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup A^4 \cup A^5 \cup A^6 \cup A^7 \cup A^8. \tag{9}$$

Объединение слагаемых знаменателей «частичных» решений, приведенных в таблице, дает нам знаменатель точного решения (2).

Числитель точного решения (2) также можно восстановить по числителям частичных решений. Ветвь 1, в которой мы ищем значение тока, обладает собственным источником. Выделим в структурном числе (3) блок содержащий номер 1 и вынесем его за скобки как сомножитель

$$\|1\| \otimes \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Структурное число, состоящее из восьми столбцов, выражение (10), является результатом алгебраического дифференцирования структурного числа (3):

$$\frac{dA}{d1} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Запишем выражение (10) с учетом равенства (11):

$$\|1\| \otimes \frac{dA}{d1}. \quad (12)$$

Если индекс 1 первого сомножителя в (12) интерпретировать как источник E_1 , а индексы производной как сопротивления резисторов, то можно представить структуру выражения:

$$-E_1(R_2R_3 + R_2R_4 + R_2R_5 + R_3R_4 + R_3R_6 + R_4R_5 + R_4R_6 + R_5R_6). \quad (13)$$

Произведение (13) является одним из слагаемых точного решения (2), которое можно получить из таблицы «частичных» решений с помощью операции объединения слагаемых, содержащих источник E_1 .

Остальные источники схемы рис. 1 взаимодействуют с собственным источником ветви 1, поэтому слагаемые, соответствующие каждому из них, находятся по выражениям, приведенным ниже:

$$\|3\| \otimes \left\| \frac{dA}{d1} \cap \frac{dA}{d3} \right\| = \|3\| \otimes \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow \quad (14)$$

$$-E_3(R_2R_4 + R_2R_5 + R_4R_5 + R_5R_6) \quad (15)$$

$$\|5\| \otimes \left\| \frac{dA}{d1} \cap \frac{dA}{d5} \right\| = \|5\| \otimes \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 6 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$+E_5(R_2R_3 + R_3R_4 + R_3R_6 + R_4R_6)$$

$$\left\| 6 \right\| \otimes \left\| \frac{dA}{d1} \cap \frac{dA}{d6} \right\| = \left\| 6 \right\| \otimes \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$-E_6(R_2R_3 + R_2R_4 + R_2R_5 + R_4R_5)$$
(16)

Функция, введенная в выражения (14), (15), (16),

$$Sim\left(\frac{dA}{di}, \frac{dA}{dj}\right)$$

называется функцией совпадений, которая выявляет общую часть двух структурных чисел, соответствующих каждой из алгебраических производных [3].

Итак, применение операции объединения по отношению к слагаемым числителя (знаменателя) обосновано, что доказано с использованием теории структурных чисел.

Литература

1. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Избранные труды Г.Кирхгоф. – М.: Наука, 1988. – С. 170 – 178.
2. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета, созданного Г.Кирхгофом // Тр. международной конференции «КЛИН – 2006». – Ульяновск: УлГТУ, 2006.– Т. 3.– С.76–83.
3. Bellert S., Woźniacki H. Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. – Warszawa: Wydawnictwo naukowo-techniczne, 1968.– 306 s.
4. Максимович Н.Г. Методы топологического анализа электрических цепей. – Львов: Изд. Львовского гос. ун-та, 1970. – 258 с.

Ерохов Игорь Васильевич – профессор Запорожского Классического Приватного Университета (Украина), кандидат технических наук.
E-mail: yerokhov@bigmir.net.

ФОРМИРОВАНИЕ СИМВОЛЬНЫХ СХЕМНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ПРЕДЕЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ЭЛЕМЕНТОВ

Д. С. Курганов, С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Схемно-алгебраические формулы (САФ) для построения предельных ССФ – символьных схемных функций с бесконечными параметрами элементов – обобщены на цепи, содержащие как бесконечные, так и нулевые параметры элементов. На основе САФ предложен алгоритм формирования предельных ССФ, не требующий трудоемкого построения ССФ общего вида и последующего нахождения ее математического предела.

Предельная символьная схемная функция. Символьная схемная функция (ССФ) с предельными параметрами – бесконечными и нулевыми сопротивлениями, проводимостями и коэффициентами управляемых источников (УИ) – называется *предельной ССФ*. С помощью предельных ССФ моделируются цепи с переменной структурой, и исследуются идеализированные и аварийные режимы.

Предельная ССФ может быть найдена алгебраическим способом, который состоит в нахождении математического предела ССФ общего вида [1]. Однако этот способ является очень трудоемким, поскольку требует построения дробно-рациональной ССФ общего вида и последующего нахождения ее предела путем раскрытия неопределенности $0/0$ или ∞/∞ , которое сводится к развертыванию символьных рациональных выражений и сортировке слагаемых.

Не требует формирования ССФ общего вида и последующего нахождения ее предела схемный способ, основанный на анализе *предельной схемы замещения*. При бесконечных параметрах такая схема формируется путем замены сопротивления, проводимости и УИ разрывом, идеальным проводником и нуллом [2] соответственно. При нулевых параметрах – путем замены сопротивления, проводимости и УИ идеальным проводником, разрывом и нейтрализованной схемой, в которой генераторы напряжения и тока УИ представляются идеальным проводником и разрывом, а ветви управляющего тока и напряжения УИ – идеальным проводником и разрывом.

Однако применить схемный способ при двух и более бесконечных и нулевых параметрах часто не представляется возможным, поскольку предельная схема замещения оказывается *вырожденной* – ее определитель равен нулю. Схемы являются вырожденными, если после подстановки предельных параметров они содержат короткозамкнутый контур, несвязные части, контур или сечение из нораторов или нуллаторов, либо разомкнутый норатор или нуллатор [3]. Так, на рис. 1,а представлен

источник тока в элементном базисе ИНУН (источника напряжения, управляемого напряжением) [1], предельная схема которого при бесконечных значениях параметров ИНУН вырождена – содержит сечение из нораторов (рис. 1,б).

Обойти проблему вырожденности предельной схемы для бесконечных параметров элементов позволяет *предельная САФ* – схемно-алгебраическая формула для выделения бесконечных параметров, которая представляет собой ненулевой коэффициент (в виде суммы *схемных миноров* – определителей подсхем) перед наибольшей степенью бесконечности из формулы разложения схемного определителя [4]. В то же время предельные ССФ требуется находить не только при бесконечных, но и при нулевых параметрах элементов, а также при наличии смешанного набора предельных параметров, включающего бесконечные и нулевые параметры элементов. При этом возникают те же проблемы, что и при бесконечных параметрах. Например, контур из нулевых сопротивлений и нораторов приводит к вырожденной предельной схеме. Целью настоящей статьи является обобщение предельных САФ на цепи, содержащие как бесконечные, так и нулевые параметры, и разработка на их основе алгоритма построения предельных ССФ.

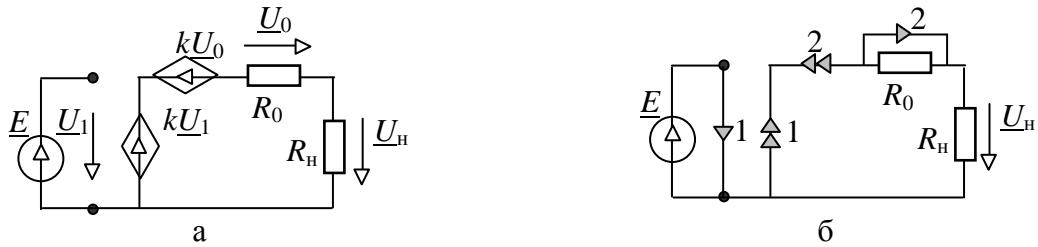


Рис. 1. Источник тока в базисе ИНУН (а) и его предельная схема, которая является вырожденной (б)

САФ для выделения элементов с бесконечными и нулевыми параметрами. Предельную САФ, подобно САФ многополюсника [5], можно сформировать с помощью первоочередного выделения из определителя исходной схемы всех m и n элементов с бесконечными и нулевыми параметрами. Элементы выделяются по общим формулам [3] с последующей подстановкой вместо выделенного параметра бесконечности в степени 1 или -1 , если параметр с бесконечным или нулевым параметром соответственно. В результате определитель, сгруппированный относительно степеней бесконечности, имеет вид

$$\Delta = a_m \infty^m + a_{m-1} \infty^{m-1} + \dots + a_1 \infty^1 + a_0 + a_{-1} \infty^{-1} + a_{-2} \infty^{-2} + \dots + b_{-n} \infty^{-n}, \quad (1)$$

где $a_m, a_{m-1}, \dots, a_1, a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots, a_{-n}$ – коэффициенты в виде сумм схемных миноров, некоторые из них могут быть равны нулю. Эта формула при необходимости может быть записана и для бесконечно малых величин.

Из формулы (1) в предельную САФ нужно включить только один из коэффициентов – ненулевой и принадлежащий наибольшей степени, которая считается *степенью предельной САФ*. Так, определитель автономной схемы, содержащей контур из нулевых резисторов (их предельное значение приведено на схеме в верхнем индексе параметра) и норатора, после выделения обоих резисторов имеет вид

$$\left| \begin{array}{c} R_1^0 \quad R_2^0 \\ \hline A \end{array} \right| = \infty^{-1} \left[\infty^{-1} \left| \begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \quad \rightarrow \\ \hline A \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \quad \rightarrow \\ \hline A \end{array} \right| \right] + \\ + \infty^{-1} \left| \begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \quad \rightarrow \\ \hline A \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \cdot \quad \cdot \quad \rightarrow \\ \hline A \end{array} \right|. \quad (2)$$

В формуле (2) схемный минор перед максимальной – нулевой – степенью бесконечности равен нулю, поскольку содержит контур из норатора. Поэтому в предельную САФ войдет коэффициент перед степенью (-1), который состоит из двух схемных миноров с порядковыми номерами 2 и 3. Полученная САФ помещена в строку 1 из табл. 1. В табл. 1 для иллюстрации предельных САФ при бесконечных и смешанных параметрах элементов приведены также формулы для схем, содержащих сечение из генераторов ИНУН с бесконечными параметрами (строка 2) и контур из сопротивлений, генераторов ИНУН с нулевыми параметрами и генераторов ИТУТ с бесконечными параметрами (строка 3).

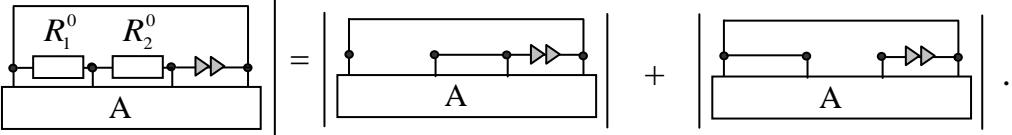
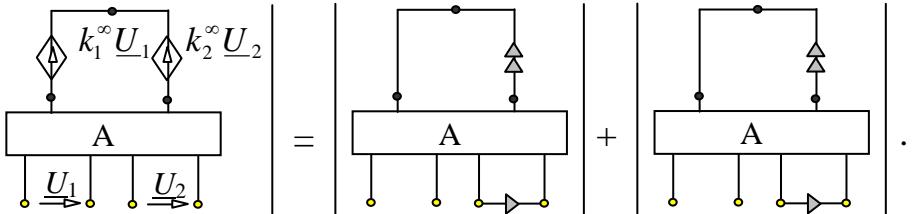
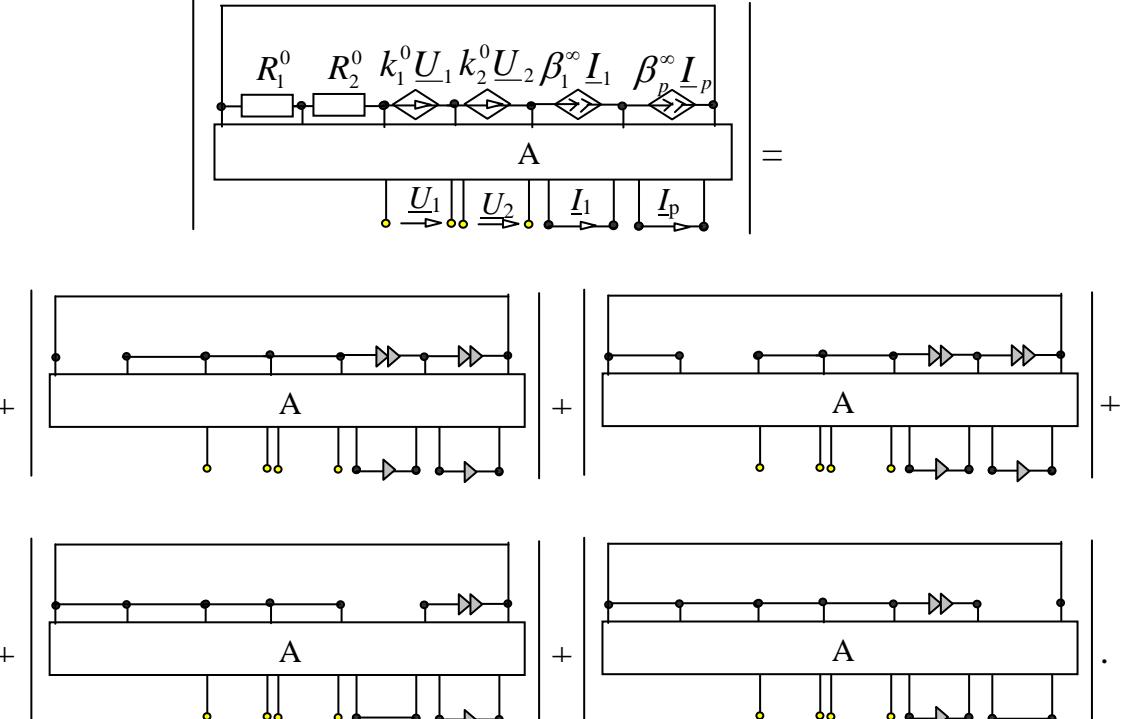
Для непосредственного – без промежуточного выражения вида (2) – формирования полиномиального выражения (1) целесообразно применять *специальные формулы выделения предельных параметров* – сопротивления Z , проводимости Y и произвольного управляемого источника (УИ) χ соответственно

$$\Delta[i] = \Delta^Z[i \pm 1] + \Delta_Z[i]; \quad \Delta[i] = \Delta_Y[i \pm 1] + \Delta^Y[i]; \quad (3)$$

$$\Delta[i] = \Delta_{\chi \rightarrow N}[i \pm 1] + \Delta_{\chi \rightarrow 0}[i], \quad (4)$$

где Δ – схемный определитель; символ Δ с верхним и нижним индексом обозначает схемный минор, полученный из определителя путем удаления и стягивания соответствующего элемента; $\Delta_{\chi \rightarrow N}$ и $\Delta_{\chi \rightarrow 0}$ – схемные миноры, полученные из исходного определителя Δ заменой УИ нуллом и нейтрализацией УИ; $[i]$, $[i \pm 1]$ – показатели степени бесконечности соответствующих схемных миноров, плюс и минус применяется в этих выражениях при бесконечном и нулевом выделяемом параметре соответственно.

Таблица 1. Примеры предельных САФ для выделения элементов с бесконечными и нулевыми параметрами, образующих вырожденные предельные схемы замещения

№	Наименование особого соединения элементов
	САФ выделения группы элементов
1	Контур из нулевых сопротивлений и норатора
	
2	Сечение из генераторов ИНУН с бесконечными параметрами
	
3	Контур из сопротивлений и генераторов ИНУН с нулевыми параметрами и генераторов ИТУТ с бесконечными параметрами
	

Предельную САФ из табл. 1 можно использовать для формирования предельной ССФ данной схемы, если хотя бы один схемный минор в ней не равен нулю. Иначе следует перейти к формуле вида (1) и проверить на вырожденность схемные миноры из коэффициента перед следующей,

меньшей на единицу, степенью бесконечности и так до первого ненулевого коэффициента, который и будет составлять предельную САФ.

Предельная ССФ находится как отношение символьных выражений предельных САФ числителя и знаменателя, если обе САФ относятся к одной и той же степени бесконечности. ССФ равна нулю или бесконечности, если показатель степени предельной САФ знаменателя больше или меньше показателя предельной САФ числителя.

Пример нахождения предельной ССФ для схемы источника тока на рис. 1,а. Для нахождения предельного выражения числителя передаточной функции по напряжению для схемы источника тока можно использовать предельную САФ из строки 2 в табл. 1, поскольку одно из двух слагаемых в ней не равно нулю. При этом схема числителя формируется, как и при нахождении ССФ общего вида, путем замены независимого источника и приемника отклика на норатор и нуллатор [3]. В результате, числитель принимает вид

$$N = \left| \begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } k \rightarrow \infty \\ \text{with dependent source } kU_1 \text{ and load } R_H \\ \text{and output } U_0 \end{array} \right|_{k \rightarrow \infty} = \left| \begin{array}{c} \text{Circuit diagram for } k \rightarrow \infty \\ \text{with dependent source } kU_1 \text{ removed} \\ \text{and output } U_0 \end{array} \right| = R_H.$$

Схема знаменателя предельной ССФ является невырожденной, поскольку содержит только один ИНУН – kU_1 , другой оказывается нейтрализованным вместе с независимым источником. Определитель полученной схемы находится по общим формулам выделения элементов, в результате знаменатель $D = R_0$. Найденные выражения числителя и знаменателя являются коэффициентами перед одной – первой степенью бесконечности, поэтому предельная ССФ имеет вид

$$K_{\text{пр}} = R_0/R_{\text{H}}. \quad (5)$$

Как видно, предельная ССФ (5) получена прямым формированием – без промежуточных операций построения ССФ общего вида и последующего нахождения ее математического предела, что сокращает значительно объем необходимых аналитических выкладок.

Алгоритм формирования предельной ССФ с помощью предельных САФ. Рассмотренный выше подход к построению предельной САФ обладает избыточностью, поскольку требует нахождения коэффициентов перед всеми степенями бесконечности. Более эффективным является алгоритм, использующий построение коэффициента для одной степени бесконечности k , представляющего

некоторую текущую САФ, и последующую проверку ее на вырожденность.

Начинается поиск с САФ для максимально возможной степени бесконечности и продолжается среди САФ со степенями, на единицу меньшими, до первого ненулевого выражения. Это выражение и составляет искомую предельную САФ. Если САФ для всех показателей степеней равны нулю, то равна нулю и искомая предельная САФ. Таким образом, алгоритм формирования предельной ССФ включает два основных этапа: 1) построение САФ для заданной степени бесконечности k ; 2) проверка найденной САФ на вырожденность. Искомая предельная ССФ находится как отношение символьных выражений предельных САФ схемы числителя и знаменателя.

Этап 2 осуществляется путем выделения параметров схемы по общим формулам [3]. САФ считается невырожденной, если после выделения всех элементов получается символьное выражение, отличное от нуля. Это выражение и составляет числитель или знаменатель предельной ССФ в зависимости от принадлежности формируемой САФ.

На этапе 1 используется алгоритм, подобный алгоритму формирования полиномиальных функций [6]. Однако здесь в первую очередь выделяются не реактивные элементы, а элементы с предельными параметрами по формулам (3)–(4). Схемные миноры, полученные после выделения очередного предельного параметра, проверяются на потенциальную возможность достижения ими требуемого показателя бесконечности.

Схемный минор может обеспечить требуемую степень, если она находится на числовом отрезке с границами, полученными прибавлением к текущему показателю и вычитанием из него числа бесконечных и нулевых параметров, содержащихся в схемном миноре. Если требуемый показатель находится на этом отрезке, то схемный минор оставляется для дальнейшего раскрытия. В противном случае минор удаляется из схемно-алгебраического выражения.

Выделение элементов продолжается до тех пор, пока не останутся только схемные миноры, обладающие заданным показателем k и не содержащие предельных параметров. Эти схемные миноры и составляют САФ с заданным показателем.

Последовательность операций алгоритма формирования предельной САФ со степенью k следующая.

А. Исходное схемно-алгебраическое выражение определителя схемы числителя или знаменателя представляется в виде

$$\Delta = \sum_{j=1}^v \Delta_j [S_j],$$

где Δ_j – схемный минор с номером j ; v – число схемных миноров; S_j – показатель степени бесконечности минора с номером j . Принять $v = 1$; $S_1 = 0$; Δ_1 – определитель исходной схемы. Положить номер рассматриваемого схемного минора $m = 1$.

Б. Номер выделяемого предельного элемента $i = 1$.

В. Выделить предельный элемент с номером i из m -го схемного минора по формуле (4). Определитель приобретает вид

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m-1} \Delta_j [S_j] + \Delta_m^i [S_m^i] + \Delta_{mi} [S_m] + \sum_{j=m+1}^v \Delta_j [S_j], \quad (6)$$

где Δ_m^i , Δ_{mi} – схемные миноры, полученные из минора с номером m путем выделения и нейтрализации элемента с номером i ; $S_m^i = S_m \pm 1$ и S_m – показатели степени схемных миноров Δ_m^i и Δ_{mi} .

Г. Найти потенциальные граничные значения для степени бесконечности вновь образованных миноров: $S_m^{i+} = S_m^{i+} + b_j^i$ и $S_m^{i-} = S_m^{i+} - n_j^i$ $S_m^{i+} = S_m^{i+} + b_j^i$, где Sj^{i+} , Sj_{i+} и Sj^{i-} , Sj_{i-} – верхние и нижние границы степеней схемных миноров Δj^i , Δj_i ; bj^i , bj_i и nj^i , nj_i – число элементов с бесконечными и нулевыми параметрами в схемных минорах Δj^i , Δj_i .

Д. Принять число миноров $v = v + 1$. Если $k < Sj^{i+}$ или $k > Sj^{i+}$, то минор Δj^i удалить из определителя Δ и $v = v - 1$. Если $k < Sj_{i-}$ или $k > Sj_{i+}$, то минор Δj_i удалить из определителя Δ и $v = v - 1$.

Е. Если $i \leq p_m$ – числа предельных элементов в миноре с номером m , то перейти к п. **В.**

Ж. Номер исследуемого минора $m = m + 1$. Если $m \leq v$, перейти к п. **Б.**

З. Полученное выражение Δ является искомой предельной САФ с заданной степенью k .

При наличии в исследуемой цепи нескольких независимых источников требуется получить предельное выражение отклика. Его выражение формируется также, как и предельная ССФ, путем последовательного нахождения выражений перед наибольшей степенью числителя и знаменателя, имеющих ненулевое значение. При этом в отличие от получения ССФ необходимо применять дополнительно формулы выделения независимых источников [7], что позволяет получить отклик в неявной компактной форме.

Пример нахождения предельной ССФ для фильтра нижних частот Чебышева седьмого порядка. Для фильтра на рис. 2 [8] требуется найти символьное выражение передаточной функции $K = \underline{U}_{out}/\underline{U}_{in}$ при нулевых сопротивлениях R_{42} , R_{52} , R_{44} , R_{54} , R_{46} и R_{56} . Операционные усилители (ОУ) $A_1 \dots A_6$ являются идеальными.

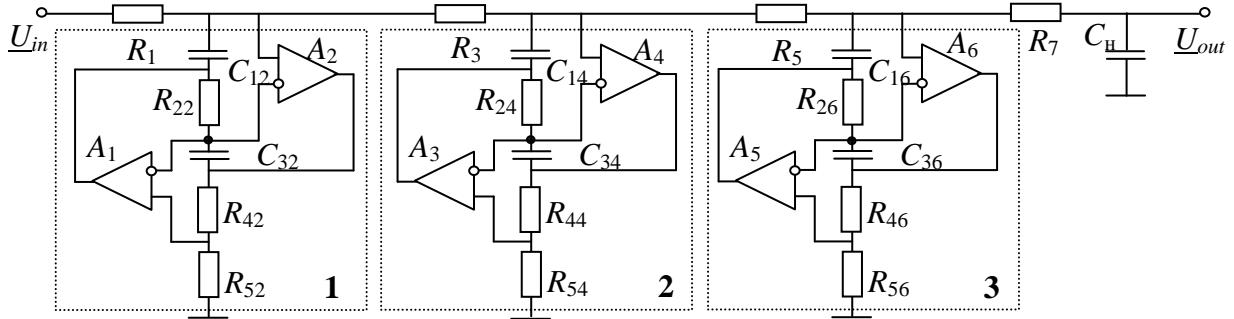


Рис. 2. Схема фильтра нижних частот: подсхемы показаны пунктирной линией и обозначены номерами 1...3

Передаточная функция находится в виде $K = N/D$. Знаменатель формируется как определитель схемы, полученной из исходной цепи путем объединения входа с базисным узлом цепи. Применяя к этому определителю формулу деления схемы по двум узлам и формулы выделения сопротивления и проводимости [3], получим следующее схемно-алгебраическое выражение знаменателя

$$D = \left[\left[R_1 \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right| \right] \left[R_3 \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \right| \right] + R_1 \left| \begin{array}{c|c} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{array} \right| \right] \\ \left[[(R_5 + R_7)pC_H + 1] \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{array} \right| + R_5(R_7pC_H + 1) \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{array} \right| + \left[\left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right| \right] \right. \\ \left. R_3 \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \right| + R_1 \left| \begin{array}{c|c} \textcircled{1} & \textcircled{2} \\ \textcircled{2} & \textcircled{3} \end{array} \right| \right] \left[\left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{array} \right| (R_7pC_H + 1) + \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \\ \textcircled{1} \end{array} \right| pC_H \right]. \quad (7)$$

Числитель искомой функции находится как определитель схемы числителя, полученной из исходной цепи путем включения на входе и выходе норатора и нуллатора соответственно. Применяя к этому определителю формулу деления на неравновесные части [9] и схемы преобразования соединений аномальных элементов, получим схемно-алгебраическое выражение числителя в виде произведения определителей подсхем с замкнутыми полюсами

$$N = \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \\ \textcircled{3} \end{array} \right|. \quad (8)$$

Для получения символьных выражений числителя и знаменателя необходимо раскрыть определители замкнутых и разомкнутых подсхем в (7) и (8). Поскольку структуры подсхем одинаковы, то достаточно найти символьные определители только для первой подсхемы.

Определитель разомкнутой подсхемы 1 с учетом замены ОУ на нуллоры и наличия нулевых сопротивлений R_{42} и R_{52} , является

вырожденным. Для исключения вырожденности можно использовать предельную САФ из строки 1 табл. 1. Однако для иллюстрации воспользуемся общим алгоритмом построения предельной ССФ.

Сначала формируется САФ для максимально возможной степени бесконечности $k = 0$. В соответствии с алгоритмом определитель схемы после выделения предельного параметра R_{42} преобразуется к виду

$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ R_{42} \\ R_{52} \end{array} \right| [0] = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ R_{52} \end{array} \right| [-1] + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ R_{52} \end{array} \right| [0], \quad (9)$$

где первый схемный минор отбрасывается, поскольку его степень не может быть равна 0.

После выделения предельного параметра R_{52} из второго схемного минора в (9) получается следующее выражение

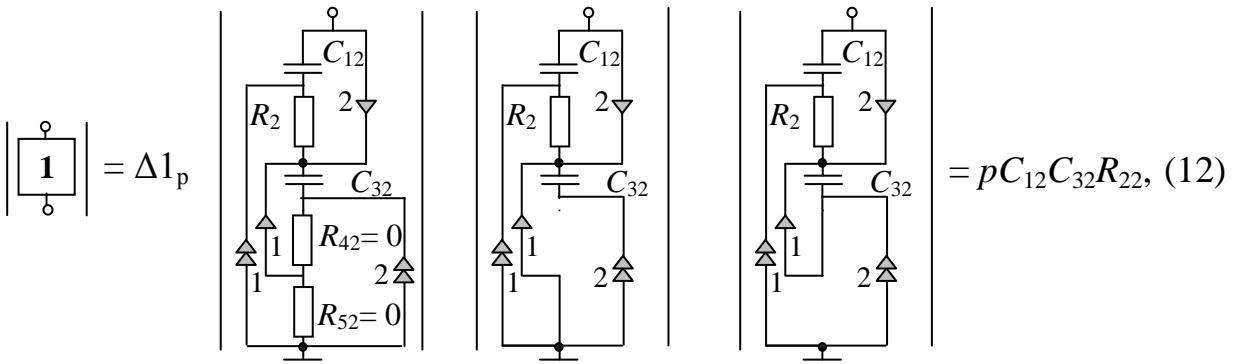
$$\left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ R_{52} \end{array} \right| [0] = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \circ \end{array} \right| [-1] + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \circ \end{array} \right| [0]. \quad (10)$$

В (10) первый минор отбрасывается, поскольку его степень не может быть равна нулю, а второй минор равен нулю, поскольку содержит контур из норатора. Поэтому и в целом САФ со степенью $k = 0$ равна нулю и требуется нахождение САФ для $k = -1$.

Последовательность операций в этом случае аналогична, причем результат операции выделения предельного сопротивления R_{42} совпадает с формулой (7). При последующем выделении R_{52} – одновременно в обоих слагаемых (7) для сокращения записи – схемно-алгебраическое выражение принимает вид

$$\Delta = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \circ \end{array} \right| [-2] + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \circ \end{array} \right| [-1] + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \circ \end{array} \right| [-1] + \left| \begin{array}{c} \text{Diagram} \\ \circ \end{array} \right| [0]. \quad (11)$$

В САФ с $k = -1$ из формулы (11) включается два слагаемых – второе и третье, остальные отбрасываются. Дальнейшее раскрытие показывает, что третье слагаемое равно нулю. Однако второе слагаемое отличается от нуля и, следовательно, оно является искомой предельной САФ. Оба эти слагаемые приведены в нижеследующем выражении



где p – комплексная частота.

Символьная формула (12) получена путем раскрытия ненулевого минора с помощью упомянутых ранее формул выделения двухполюсных элементов и правила преобразования соединений нораторов и нуллаторов. Аналогично находится символьный определитель первой подсхемы с замкнутыми полюсами $\Delta 1_3 = 1$.

Для других подсхем определители находятся путем формальной замены индексов в формулах для определителей первой подсхемы. В результате, определители разомкнутых и замкнутых второй и третьей подсхем имеют вид

$$\Delta 2_p = pC_{14}C_{34}R_{24}; \quad \Delta 3_p = pC_{16}C_{36}R_{26}; \quad \Delta 2_3 = \Delta 3_3 = 1. \quad (13)$$

Все схемные определители в формулах (7) и (8) найдены и, следовательно, получена искомая предельная функция. При необходимости формирования единого выражения коэффициента передачи достаточно подставить выражения (12) и (13) в формулы (7) и (8).

Сравнение с традиционным способом нахождения предельной ССФ путем нахождения предела функции общего вида. В этом случае необходимо найти выражение передаточной функции общего вида, где сопротивления $R_{42}, R_{52}, R_{44}, R_{54}, R_{46}$ и R_{56} представлены в символьном виде. Далее нужно получить предел этой функции при $R_{42}, R_{52}, R_{44}, R_{54}, R_{46}$ и $R_{56} \rightarrow 0$, то есть раскрыть неопределенность 0/0. Для этого необходимо получить развернутое символьное выражение из 34-х слагаемых, каждое из которых содержит в среднем 9 сомножителей, и провести их сортировку по признаку минимального числа нулевых переменных $R_{42}, R_{52}, R_{44}, R_{54}, R_{46}$ и R_{56} . При этом передаточная функция формируется в развернутом виде, чтобы преобразовать ее в компактную форму (7), (8), (12) и (13) необходимо применить дополнительные операции свертывания.

В предлагаемом методе искомая предельная функция получается непосредственно – без получения функции общего вида, которая значительно сложнее искомой функции, и без выполнения трудоемкой сортировки слагаемых.

Выводы. 1. Разработан метод формирования предельных ССФ (символьных схемных функций при бесконечных и нулевых параметрах элементов) на основе схемно-алгебраической формулы (САФ) – ненулевого коэффициента при наибольшей степени бесконечности. Метод значительно экономичнее алгебраического способа, поскольку не требует трудоемкого формирования избыточной ССФ общего вида и последующего нахождения ее предела.

2. Для получения САФ предложены формулы выделения предельных параметров элементов и разработан алгоритм нахождения предельной ССФ, использующий последовательное построение САФ по убывающим степеням бесконечности с последующей проверкой их на вырожденность с помощью формул выделения параметров общего вида.

Литература

1. Денисенко В.В. Компьютерное управление технологическим процессом, экспериментом, оборудованием. – М.: Горячая линия-Телеком.– 2009. – 608 с.
2. Сешу С., Рид М.Б. Линейные графы и электрические цепи.– М.: Высш. шк., 1971.– 448 с.
3. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.
4. Курганов С. А., Филаретов В. В. Топологические правила и формулы для анализа электрических цепей без избыточности.– Ульяновск: УлГТУ, 2010.– 109 с.
5. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных электронных цепей на основе схемно-алгебраических формул выделения параметров многополюсников // Электричество.– 2003.– № 6.– С. 52–65.
6. Курганов Д.С., Филаретов В.В. Алгоритм и программа формирования полиномиальных схемных функций электронных цепей // Международ. сб. научн. трудов / Под ред. В.В. Филаретова.– Ульяновск: УлГТУ, 2008.– Вып. 6.– С. 152–165.
7. Коротков А.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ дискретно-анalogовых цепей с переключаемыми конденсаторами // Электричество.– 2009, № 4.– С. 37–47.
8. Коротков А.С. Микроэлектронные аналоговые фильтры на преобразователях импеданса.– СПб: Наука.– 1999.– 416 с.
9. Курганов С.А., Филаретов В.В. Формирование передаточных функций электронных цепей по частям методом неравновесных двоичных векторов // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. межд. конф. КЛИН - 2005.– Ульяновск: УлГТУ, 2005.– Т.3.– С.106–116.

Курганов Дмитрий Сергеевич – аспирант кафедры «Электроснабжение» УлГТУ; e-mail:kurganov_ds@mail.ru.

ПОСТРОЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ МИНИМАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Предложен алгоритм построения гибридных уравнений нелинейных электрических цепей минимальной размерности – в базисе независимых управляющих переменных нелинейных и реактивных элементов. Зависимые управляющие переменные исключаются путем компенсации одного из элементов в каждом особом контуре или сечении независимым источником напряжения или тока и переноса его в линейную подсхему. Ее гибридные параметры находятся путем обобщения метода иерархической схемно-алгебраической редукции. Полученные компактные символические уравнения эффективны при многовариантном анализе нелинейных электрических цепей.

Ключевые слова: нелинейная электрическая цепь, символьная схемная функция, подсхема, nullор, схемно-алгебраическая редукция.

A formulas is proposed for obtaining of the symbolic compact expressions of the linear subnetwork hybrid parameters using hierarchical algebraic circuit reduce. The hybrid parameters are used for fall of the nonlinear equations system order to minimum size. The compact symbolic equations is intended to repeated analysis of nonlinear electric circuits.

Key words: nonlinear electric circuit, symbolic network function, subnetwork, nullor, algebraic circuit reduce.

Сокращение вычислительных затрат при многовариантном анализе нелинейных электрических цепей может быть обеспечено за счет использования символьных систем уравнений минимальной размерности. Такие системы уменьшают затраты при их решении и исключают операцию переформирования при варьировании параметров.

Минимальная размерность систем уравнений для нелинейных цепей равна числу независимых управляющих переменных нелинейных и реактивных элементов [1]. Задача построения таких систем уравнений в настоящее время не решена. В наиболее экономичном методе, основанном на гибридных параметрах линейной подсхемы, независимость управляющих переменных обеспечивается путем включения в цепь вспомогательных линейных резисторов [2], что ведет не только к увеличению размерности системы, но и к усложнению самой схемы. Метод многовариантного анализа нелинейных электронных схем [3], предназначенный для построения символьных уравнений на основе передаточных функций, формирует систему уравнений, число которых

превышает минимальную размерность на число независимых источников без одного.

Не являются совершенными и методы построения гибридных параметров, которые применяются для построения гибридных уравнений нелинейных цепей. Недостатком метода схемных миноров, который является к настоящему времени наиболее эффективным методом диакоптического построения символьных передаточных функций, является прогрессирующий рост числа миноров при увеличении количества полюсов у подсхем [4]. Поэтому с помощью МДВ нельзя получить символьные выражения для электрических цепей с подсхемами, имеющими большое число полюсов (7...10 и более). В то же время метод схемно-алгебраической редукции, существенно сокращающий число необходимых схемных миноров, разработан только для получения однородных параметров многополюсников [5].

Задачами настоящей статьи являются – разработка алгоритма формирования систем нелинейных гибридных уравнений минимальной размерности и обобщение метода схемной редукции на гибридные системы параметров, необходимые для построения нелинейных уравнений.

Построение символьных уравнений нелинейной цепи без линейной зависимости управляющих переменных. Разделим исходную нелинейную схему на две подсхемы (рис. 1,а). Пусть нелинейная подсхема характеризуется полюсными токами $i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1}, \dots, i_{n+k}$ и напряжениями $u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$, которые отсчитываются от нулевого полюса (рис. 1,б). При этом управляющими переменными являются токи i_1, i_2, \dots, i_n и напряжения $u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+k}$.

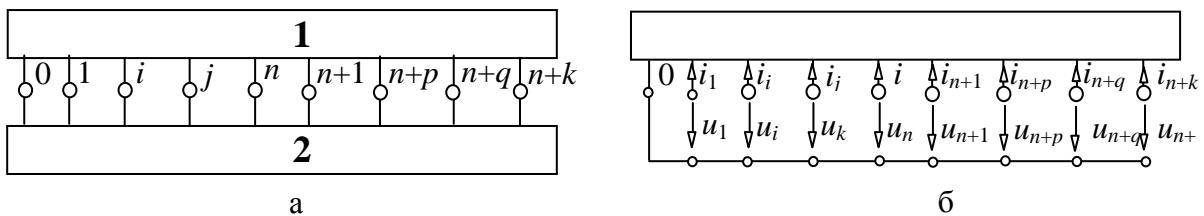


Рис. 1. Деление исходной нелинейной цепи на две подсхемы: нелинейную 1 и линейную 2 (а); нелинейный многополюсник с размеченными сторонами (б)

Уравнения нелинейного многополюсника представим в виде

$$U_a = F_a(I_a, U_b); \quad I_b = F_b(I_a, U_b), \quad (1)$$

где $I_a = [i_1, i_2, \dots, i_n]$ и $I_b = [i_{n+1}, i_{n+2}, \dots, i_{n+k}]$ – векторы мгновенных значений управляющих и управляемых токов соответственно;

$U_a = [u_1, u_2, \dots, u_n]$ и $U_b = [u_{n+1}, u_{n+2}, \dots, u_{n+k}]$ – векторы управляемых и управляемых напряжений соответственно; $F_a = [f_1, f_2, \dots, f_n]$ и $F_b = [f_{n+1}, f_{n+2}, \dots, f_{n+k}]$ – векторы нелинейных алгебраических операторов и дифференциальных операторов; n, k – число управляемых токов и напряжений (управляемых напряжений и токов) соответственно.

При построении нелинейных уравнений размерностью $(n + k)$ для схемы на рис. 1,а необходимо получить гибридные уравнения линейной подсхемы на рис. 2,а в виде

$$\begin{pmatrix} U_a \\ I_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & K \\ B & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ U_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_a \\ J_b \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где I_a, I_b, U_a, U_b – векторы токов и напряжений линейного многополюсника, соответствующие одноименным векторам нелинейного многополюсника в формуле (1), но имеющие противоположное направление (рис. 2,а); G, R, B, K – подматрицы передаточных проводимостей и сопротивлений, коэффициентов передачи тока и напряжения соответственно, составляющих гибридную матрицу параметров; $E_a = [e_1, e_2, \dots, e_n]$ и $J_b = [j_{n+1}, j_{n+2}, \dots, j_{n+k}]$ – векторы параметров эквивалентных источников эдс и тока.

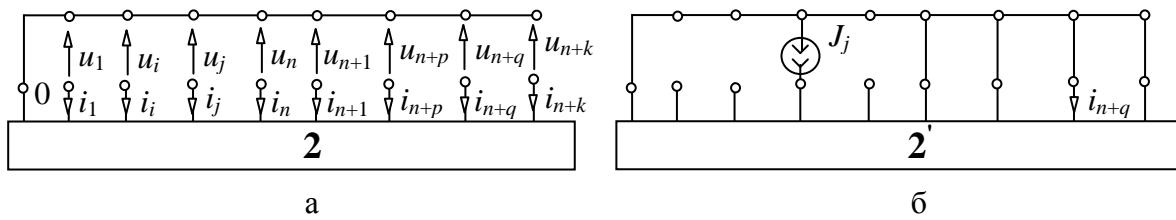


Рис. 2. Линейный многополюсник (а) и схема для определения коэффициента передачи тока $B_{n+q,j}$ (б)

Учитывая (1) и (2), запишем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} F_a(I_a, U_b) \\ F_b(I_a, U_b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R & K \\ B & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_a \\ U_b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_a \\ J_b \end{pmatrix} = 0, \quad (3)$$

где R, K, B, G, E_a, J_b – матрицы символьных выражений гибридных параметров линейного многополюсника на рис. 2,а.

Для решения системы (3) наиболее эффективен численный итерационный метод Ньютона-Рафсона [2].

Схемно-алгебраические формулы для получения символьных гибридных параметров линейного многополюсника. Символьные выражения для гибридных параметров предлагаются находить по схемно-алгебраическим формулам (САФ), аналогичным САФ для однородных параметров многополюсников [5, 6]. САФ для гибридных параметров отличаются наличием у исследуемого многополюсника сторон с различными управляющими переменными – как с напряжениями, так и с токами, что требует нахождения не только передаточных проводимостей и сопротивлений, но и безразмерных параметров – коэффициентов передачи напряжения и тока.

Коэффициент передачи тока от j -й к $(n + q)$ -й ветви (рис. 2,а) находится по схеме на рис. 2,б, где неавтономный многополюсник 2 получен из автономного многополюсника 2 путем нейтрализации (приравнивания к нулю параметров) всех независимых источников. Ток j -й ветви задается источником тока J_j , при этом все стороны с управляющими напряжениями (токами) замкнуты (разомкнуты). Тогда искомый коэффициент передачи тока находится по формуле

$$B_{n+q,j} = i_{n+q} / J_j, \quad (4)$$

при $i_s = 0; s=1, 2, \dots, n; s \neq j$ и $u_l = 0; l = n+1, n+2, \dots, n+k$.

Схемно-алгебраическая формула для коэффициента $B_{n+q,k}$ формируется по схеме на рис. 2,б в виде дроби также, как и произвольная схемная функция электрической цепи [7]. В числителе этой дроби находится определитель производной схемы, полученной из схемы на рис. 2,б заменой источника тока норатором противоположного направления, а приемника тока – нуллатором соответствующего направления. Знаменателем дроби является определитель другой производной схемы, полученной из той же схемы на рис. 2,б путем нейтрализации источника тока J_j и приемника тока i_{n+q} . Сформированная таким образом САФ для искомого коэффициента передачи тока имеет вид

$$B_{n+q,j} = \frac{\begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with } J_j \text{ source and } i_{n+q} \text{ sink} \\ \text{with all voltage-controlled sides closed (top row)} \end{array}}{\begin{array}{c} \text{Diagram of the circuit with } J_j \text{ source and } i_{n+q} \text{ sink} \\ \text{with all current-controlled sides open (bottom row)} \end{array}}, \quad (5)$$

где $|\cdot|$ – определитель соответствующей схемы.

Схемно-алгебраические формулы для передаточных сопротивлений, проводимостей и коэффициента передачи напряжения находятся аналогично и имеют вид соответственно

$$R_{i,j} = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of a two-pole network with } n+q \text{ vertical branches. The top branch } i \text{ has two arrows pointing up. The bottom branch } j \text{ has two arrows pointing down. The middle horizontal branch } 2 \text{ has one arrow pointing right.} \\ \hline \end{array} \right| D; \quad (6)$$

$$G_{n+p,n+q} = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of a two-pole network with } n+q \text{ vertical branches. The top branch } i \text{ has one arrow pointing down. The bottom branch } j \text{ has one arrow pointing up. The middle horizontal branch } 2 \text{ has one arrow pointing right.} \\ \hline \end{array} \right| D; \quad (7)$$

$$K_{i,n+q} = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of a two-pole network with } n+q \text{ vertical branches. The top branch } i \text{ has one arrow pointing up. The bottom branch } j \text{ has one arrow pointing up. The middle horizontal branch } 2 \text{ has one arrow pointing right.} \\ \hline \end{array} \right| D, \quad (8)$$

где D – знаменатель, который у всех параметров многополюсника одинаков, а его схемно-алгебраическая формула приведена в знаменателе (5). В формулах (6)–(7) стороны многополюсника, предназначенные для подачи воздействия и съема отклика, могут совпадать, тогда передаточная функция трансформируется во входное сопротивление или входную проводимость.

Символьные выражения для эквивалентных источников эдс и тока из формулы (2) находятся с помощью понятия *определителя автономного многополюсника* [5]. Схема такого определителя получается подключением нуллатора к стороне, для которой требуется найти параметр эквивалентного источника, и помещается в числитель схемно-алгебраического выражения искомого параметра источника эдс или тока.

В схеме числителя в этом случае отсутствует норатор. В знаменателе такого выражения находится тот же определитель D , что и в САФ (5)–(8) для остальных параметров многополюсника. Так, формулы для эквивалентного источника эдс стороны $i=0$ и параметра источника тока стороны $(n+q)=0$ имеют вид соответственно

$$e_j = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of a network with nodes } j \text{ and } n+q \\ \text{with a reference node 2 at the bottom.} \end{array} \right| / D, \quad (9)$$

$$j_{n+q} = \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of a network with nodes } j \text{ and } n+q \\ \text{with a reference node 2 at the bottom.} \end{array} \right| / D. \quad (10)$$

Достаточным условием существования гибридных параметров многополюсника является по аналогии с однородными параметрами [5] условие невырожденности (отличие от нуля) определителя схемы D . Топологические условия существования этих параметров состоят в том, что стороны многополюсника, управляемые напряжением, не должны входить в контура, содержащие только источники напряжения (как независимые, так и управляемые) и нораторы, или только приемники тока и нуллаторы. Сечения, соответствующие полюсам, не должны содержать только источники тока (управляемые и независимые) и нораторы или только приемники напряжения и нуллаторы. Это следует из того факта, что при наличии в схеме хотя бы одного вырожденного контура или сечения определитель становится равным нулю [7] и построить такие гибридные параметры, а, следовательно, и соответствующую систему уравнений невозможно.

Если же условия существования выполняются, то символьные выражения для искомых гибридных параметров находятся путем выделения в схемах числителей и знаменателей САФ (5)–(8) всех сопротивлений, проводимостей, управляемых источников, нуллов [7] и других многополюсных элементов [8]. Выражения для параметров эквивалентных источников эдс и тока находятся таким же образом по аналогичным САФ (9)–(10), отличие состоит в использовании формул выделения источников эдс и тока [5].

Нахождение параметров многополюсника позволяет исключить (редуцировать) в нем все внутренние узлы. Поскольку эта операция выполняется на основе схемно-алгебраических формул (5)–(10), то она получила название *схемно-алгебраической редукции* (САР) [5]. После выполнения САР многополюсник представляется известной эквивалентной схемой замещения, содержащей элементы с найденными параметрами. Метод САР работает с произвольными линейными, в том числе многополюсными элементами, и позволяет анализировать более сложные схемы, чем метод схемных миноров [4], поскольку число параметров многополюсника значительно меньше числа схемных миноров (табл. 1) [6].

Таблица 1. Число схемных миноров и первичных параметров для неавтономных подсхем

Число полюсов	3	4	5	6	7	8	9	10
Число миноров	6	20	70	252	924	3432	12870	48620
Число передаточных параметров	4	9	16	25	36	49	64	81

Алгоритм иерархической схемно-алгебраической редукции. Для сложной схемы линейного многополюсника, содержащего более 20–30-ти элементов, формулы САР (5)–(10) предлагается применять многократно для анализа многополюсника по частям путем их попарного объединения. Порядок (иерархия) объединения подсхем определяется по признаку наименьшего числа полюсов как у объединяемых, так и результирующих подсхем [9], что сокращает вычислительные затраты. При этом тип сторон (управляемых напряжением или током) исходного многополюсника выбирается, как отмечалось выше, исходя из вида функций нелинейных и реактивных элементов. Тип сторон подсхем, полученных делением искомого многополюсника, следует из условия существования соответствующих параметров, изложенных выше.

Метод многократной редукции получил название иерархической САР [5]. Метод формирует параметры многополюсника в виде последовательных выражений. Такие выражения очень экономичны и в отличие от единых символьных выражений [4] не содержат повторяющихся фрагментов.

Алгоритм метода состоит в следующем.

1. Разделить схему многополюсника на n частей, содержащих 15–20 элементов, которые можно проанализировать с помощью формул выделения элементов.

2. Найти символьные выражения гибридных параметров (2) для каждой подсхемы из п. 1 путем многократного (по числу параметров) применения формул (5)–(10), при этом норатор и нуллатор подключаются к различным сторонам многополюсника.

3. Присвоить номер объединенной подсхеме (паре объединяемых подсхем) $k = 1$.

4. Объединить эквивалентные схемы подсхем из пары с номером k и получить гибридные параметры объединенной подсхемы по формулам (5)–(10), аналогично п. 2.

5. Присвоить номер следующей объединенной подсхеме $k = k + 1$. Если $k < (n - 1)$, то перейти к п. 4, иначе параметры искомого многополюсника найдены.

Изложенный алгоритм реализован В.В. Филаретовым в программе REDSYM [6]. Программа позволяет получить символьные выражения для параметров подсхем, содержащих многие сотни элементов и узлов, в отличие от современных математических систем общего назначения, которые формируют выражения для электрических цепей сложностью не более 10–15 узлов [10].

Пример построения системы уравнений для нелинейной цепи без линейной зависимости управляющих переменных. Схема замещения дифференциального транзисторного усилителя [11] представлена на рис. 3,а, где нелинейные управляемые источники – $i_{\text{e}1} = f_{\text{e}1}(u_{\text{k}1}, u_{\text{e}1})$, $i_{\text{k}1} = f_{\text{k}1}(u_{\text{k}1}, u_{\text{e}1})$ и линейные резисторы R_{61} , $R_{\text{k}1}$, $R_{\text{e}1}$ моделируют первый биполярный транзистор, а элементы с аналогичными параметрами, содержащими в обозначении индекс 2 вместо 1 – второй транзистор.

Представим на рис. 3,б линейный 4x2-полюсник, напряжения и токи сторон которого равны соответствующим переменным нелинейных источников на рис. 3,а. Многополюсник характеризуется однородными параметрами проводимости, а его уравнение

$$I = GU + J, \quad (11)$$

является частным случаем формулы (2).

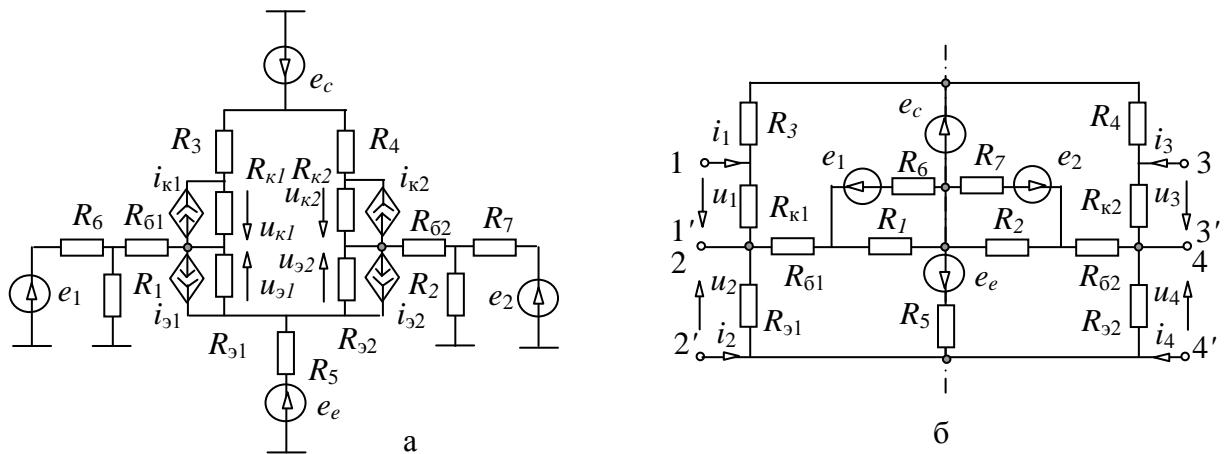


Рис. 3. Нелинейная схема замещения дифференциального усилителя (а) и схема соответствующего линейного 4x2-полюсника (б)

В уравнении (11): $G = \|g_{ik}\|$ – матрица передаточных проводимостей; $I = \|i_k\|$ и $U = \|u_k\|$ – векторы токов и напряжений сторон многополюсника соответственно; $J = \|j_k\|$ – вектор параметров эквивалентных источников тока; индексы i и $k = 1, 2, 3, 4$.

Найдем символьные выражения параметров многополюсника. Учтем, что знаменатель для всех параметров одинаков и находится по формуле (5)

$$D = \left| \begin{array}{c} R_3 \\ R_{\kappa 1} \\ R_{61} \\ R_{91} \\ R_6 \\ R_1 \\ R_5 \\ R_2 \\ R_7 \\ R_{\kappa 2} \\ R_{62} \\ R_{92} \\ R_4 \end{array} \right|. \quad (12)$$

В (12) выделим короткозамкнутые сопротивления и удалим их из схемы [6], получим

$$D = R_{\kappa 1} R_{91} R_{\kappa 2} R_{92} \left| \begin{array}{c} R_3 \\ R_6 \\ R_1 \\ R_{61} \\ R_5 \\ R_2 \\ R_{62} \\ a \\ \delta \end{array} \right|. \quad (13)$$

Применим к (13) формулу для определителя схемы, разделимой по двум узлам а и б [6], получим

$$\begin{aligned} D &= R_{\kappa 1} R_{91} R_{\kappa 2} R_{92} \left(\left| \begin{array}{c} R_3 \\ R_{61} \\ R_6 \\ R_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} R_7 \\ R_4 \\ R_2 \\ R_{62} \end{array} \right| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \begin{array}{c} R_3 \\ R_{61} \\ R_6 \\ R_1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} R_7 \\ R_4 \\ R_2 \\ R_{62} \end{array} \right| \right) = R_{\kappa 1} R_{91} R_{\kappa 2} R_{92} \{ [(R_3 + R_{61})(R_1 + R_6) + R_1 R_6] R_4 R_5 \cdot \\ &\quad \cdot [R_2(R_{62} + R_7) + R_{62} R_7] + R_3 [R_1(R_{61} + R_6) + R_6 R_{61}] R_5 [R_7(R_2 + R_{62}) + R_2 R_{62}] \}. \end{aligned} \quad (14)$$

Числитель символьного выражения входной проводимости g_{11} из матрицы G находится по схемно-алгебраической формуле (7), которая после удаления последовательного соединения норатора и нуллатора [4], преобразуется к виду

$$N_{11} = \left| \begin{array}{c} R_3 \\ R_{\kappa 1} \\ R_{61} \\ R_{91} \\ R_6 \\ R_1 \\ R_5 \\ R_2 \\ R_7 \\ R_{\kappa 2} \\ R_{62} \\ R_{92} \\ R_4 \end{array} \right|. \quad (15)$$

Выделим из (15) по аналогии с формулой (13) три короткозамкнутые сопротивления $R_{\vartheta 1}$, $R_{\vartheta 2}$ и $R_{\kappa 2}$, получим

$$N_{11} = R_{\vartheta 1} R_{\kappa 2} R_{\vartheta 2} \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of the network structure for } N_{11} \\ \text{with nodes labeled a and b.} \end{array} \right. . \quad (16)$$

Сравнивая схему в (16) со схемой в формуле (13), можно сделать вывод, что определитель схемы (16) может быть получен из (14) формальной заменой R_3 на $(R_3 + R_{\kappa 1})$. В результате числитель

$$N_{11} = R_{\vartheta 1} R_{\kappa 2} R_{\vartheta 2} \{ [(R_3 + R_{\delta 1} + R_{\kappa 1})(R_1 + R_6) + R_1 R_6] R_4 R_5 [R_2 (R_{\delta 2} + R_7) + R_{\delta 2} R_7] + (R_3 + R_{\kappa 1}) [R_1 (R_{\delta 1} + R_6) + R_6 R_{\delta 1}] R_5 [R_7 (R_2 + R_{\delta 2}) + R_2 R_{\delta 2}] \}. \quad (17)$$

Числители остальных передаточных и входных проводимостей находятся аналогично. С учетом пассивности схемы многополюсника потребуется найти только 10 числителей из 16-ти, поскольку матрица передаточных проводимостей симметрична относительно главной диагонали. А с учетом структурной симметрии схемы относительно вертикальной оси (рис. 3,б) достаточно найти только 6 числителей передаточных проводимостей, остальные записываются путем формальной замены переменных. Выполняя указанные операции, запишем все остальные числители:

$$\begin{aligned} N_{12} &= -R_{\kappa 1} R_{\vartheta 1} R_{\kappa 2} R_{\vartheta 2} \{ [R_{\delta 1} (R_1 + R_6) + R_1 R_6] R_4 [R_{\delta 2} (R_2 + R_7) + R_2 R_7] + \\ &\quad + R_5 [R_{\delta 1} (R_1 + R_6) + R_6 R_{\delta 1}] [(R_4 + R_{\delta 2})(R_5 + R_7) + R_5 R_7] \}; \\ N_{13} &= -R_{\kappa 1} R_{\vartheta 1} R_{\kappa 2} R_{\vartheta 2} R_5 [R_{\delta 1} (R_1 + R_6) + R_1 R_6] [R_{\delta 2} (R_2 + R_7) + R_2 R_7]; \\ N_{14} &= R_{\kappa 1} R_{\vartheta 1} R_{\kappa 2} R_{\vartheta 2} R_5 [R_{\delta 1} (R_1 + R_6) + R_1 R_6] [(R_4 + R_{\delta 2})(R_2 + R_7) + R_2 R_7]; \quad N_{21} = N_{12}; \\ N_{22} &= R_{\kappa 1} R_{\kappa 2} R_{\vartheta 2} [(R_3 + R_{\delta 1})(R_1 + R_6) + R_1 R_6] R_4 R_5 [R_{\delta 2} (R_2 + R_7) + R_2 R_7] + \{(R_3 + R_{\vartheta 1}) \cdot \\ &\quad \cdot [R_{\delta 1} (R_1 + R_6) + R_1 R_6] + R_3 R_{\vartheta 1} (R_1 + R_6)\} \{(R_1 + R_4)[R_{\delta 2} (R_2 + R_7) + R_2 R_7] + R_4 R_5 (R_2 + R_7)\}. \\ N_{23} &= R_{\kappa 1} R_{\vartheta 1} R_{\kappa 2} R_{\vartheta 2} R_3 [(R_3 + R_{\delta 1})(R_1 + R_6) + R_1 R_6] [R_{\delta 2} (R_2 + R_7) + R_2 R_7]; \\ N_{24} &= -R_{\kappa 1} R_{\vartheta 1} R_{\kappa 2} R_{\vartheta 2} R_3 [(R_3 + R_{\delta 1})(R_1 + R_6) + R_1 R_6] [(R_4 + R_{\delta 2})(R_2 + R_7) + R_2 R_7]; \\ N_{31} &= N_{13}; \quad N_{32} = N_{23}; \quad N_{33} = R_{\vartheta 1} R_{\kappa 1} R_{\vartheta 2} \{ [(R_4 + R_{\delta 2} + R_{\kappa 2})(R_2 + R_7) + R_2 R_7] R_3 R_5 \cdot \\ &\quad \cdot [R_1 (R_{\delta 1} + R_6) + R_{\delta 1} R_6] + (R_4 + R_{\kappa 2}) [R_2 (R_{\delta 2} + R_7) + R_7 R_{\delta 2}] R_5 [R_6 (R_1 + R_{\delta 1}) + R_1 R_{\delta 1}] \}. \end{aligned}$$

$$N_{34} = -R_{\kappa 1} R_{\kappa 1} R_{\kappa 2} R_{\kappa 2} \{ [R_{\delta 2}(R_2 + R_7) + R_2 R_7] R_3 [R_{\delta 1}(R_1 + R_6) + R_1 R_6] + R_5 \cdot \\ \cdot [R_{\delta 2}(R_2 + R_7) + R_2 R_7] [(R_3 + R_{\delta 1})(R_5 + R_6) + R_5 R_6] \}; N_{41} = N_{14}; N_{42} = N_{24}; N_{43} = N_{34};$$

$$N_{44} = R_{\kappa 1} R_{\kappa 2} R_{\kappa 1} [(R_4 + R_{\delta 2})(R_2 + R_7) + R_2 R_7] R_3 R_5 [R_{\delta 1}(R_1 + R_6) + R_1 R_6] + \{(R_4 + R_{\delta 2}) \cdot \\ \cdot [R_{\delta 2}(R_2 + R_7) + R_2 R_7] + R_4 R_{\delta 2}(R_2 + R_7)\} \{(R_3 + R_5)[R_{\delta 1}(R_1 + R_6) + R_1 R_6] + R_3 R_5(R_1 + R_6)\}. \quad (18)$$

Символьные выражения числителей для токов эквивалентных источников j_1 и j_2 находятся путем раскрытия САФ, полученных в соответствии с формулой (10). В результате имеем соответственно

$$N_{j1} = R_{\kappa 1} R_{\kappa 2} R_{\kappa 1} R_{\kappa 2} R_4 \{ -[(R_1 + R_6)R_5(R_{\delta 2}(R_2 + R_7) + R_2 R_7)] + [R_{\delta 1}(R_1 + R_6) + R_1 R_6] \cdot \\ \cdot ((R_{\delta 2} + R_5)(R_2 + R_7) + R_2 R_7)] e_c + R_1 R_5[R_{\delta 2}(R_2 + R_7) + R_2 R_7] e_1 + R_2 R_5[R_{\delta 1}(R_1 + R_6) + \\ + R_1 R_6] e_2 + [(R_{\delta 1}(R_1 + R_6) + R_1 R_6)][R_{\delta 2}(R_2 + R_7) + R_2 R_7] e_e \}; \quad (19)$$

$$N_{j2} = R_{\kappa 1} R_{\kappa 2} R_{\kappa 1} R_{\kappa 2} \{ [(R_1 + R_6)((R_2 + R_7)(R_2 + R_5)R_4 R_{\delta 1} - R_3 R_5 R_{\delta 2}) + R_2 R_7(R_{\delta 1} R_4 - \\ - R_3 R_5)) + R_1 R_4 R_6(R_5 + R_{\delta 2})(R_2 + R_7) + R_2 R_7)] e_c + R_1 R_3((R_4 + R_5)(R_{\delta 2}(R_2 + R_7) + R_2 R_7] + \\ + R_4 R_5(R_2 + R_7)] e_1 + R_2 R_4 R_5[(R_3 + R_{\delta 1})(R_1 + R_6) + R_1 R_6] e_2 + R_4[(R_3 + R_{\delta 1})(R_1 + R_6) + R_1 R_6] \cdot \\ \cdot [R_{\delta 2}(R_2 + R_7) + R_2 R_7] e_e \}. \quad (20)$$

Символьные выражения для числителей токов источников j_3 и j_4 находятся благодаря симметрии многополюсника (рис. 3,б) путем замены переменных в соответствующих выражениях для источников j_1 и j_2 . Эти операции можно записать в виде следующих формул

$$N_{j3} = N_{j1}(R_1 \rightarrow R_2, R_2 \rightarrow R_1, R_3 \rightarrow R_4, R_4 \rightarrow R_3, R_6 \rightarrow R_7, R_7 \rightarrow R_6, R_{\delta 1} \rightarrow R_{\delta 2}, R_{\delta 2} \rightarrow R_{\delta 1}); \\ N_{j4} = N_{j2}(R_1 \rightarrow R_2, R_2 \rightarrow R_1, R_3 \rightarrow R_4, R_4 \rightarrow R_3, R_6 \rightarrow R_7, R_7 \rightarrow R_6, R_{\delta 1} \rightarrow R_{\delta 2}, R_{\delta 2} \rightarrow R_{\delta 1}), \quad (21)$$

где указано, что переменная, записанная у начала стрелки, меняется (в функции N_{j1} или N_{j2}) на переменную у конца стрелки.

Найденные символьные выражения знаменателя (14) и числителей (17)–(22) для параметров линейного многополюсника, а также заданные функции нелинейных источников тока составляют исковую систему из 4-х нелинейных алгебраических уравнений (22).

Символьная система (22) имеет минимальную размерность и решается известным численным методом Ньютона-Рафсона [2]. Решение системы при варьировании параметров элементов (при многовариантном анализе цепи), не требует ее переформирования в отличие от численных моделей, что ускоряет получение результата.

$$D \cdot \begin{vmatrix} f_{\kappa 1}(u_{\kappa 1}, u_{\vartheta 1}) \\ f_{\vartheta 1}(u_{\kappa 1}, u_{\vartheta 1}) \\ f_{\kappa 2}(u_{\kappa 2}, u_{\vartheta 2}) \\ f_{\vartheta 2}(u_{\kappa 2}, u_{\vartheta 2}) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} \\ N_{41} & N_{42} & N_{43} & N_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{\kappa 1} \\ u_{\vartheta 1} \\ u_{\kappa 2} \\ u_{\vartheta 2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} N_{j1} \\ N_{j2} \\ N_{j3} \\ N_{j4} \end{vmatrix} = 0. \quad (22)$$

Построение нелинейных систем для цепей с линейной зависимостью управляющих переменных. Уравнения вида (3) получаются при условии, что управляющие переменные линейно независимы. При наличии хотя бы одной линейной зависимости переменных определитель гибридной системы параметров в (5) будет равен нулю, поскольку полюсы линейного многополюсника оказываются или соединенными в короткозамкнутый контур, или изолированными от многополюсника [4].

Чтобы построить уравнения цепи при наличии линейных зависимостей между управляющими напряжениями, необходимо разомкнуть все короткозамкнутые контура, образующиеся при построении схемы определителя. Разомкнуть следует путем переноса одного из элементов такого контура (лучше нелинейного резистора или УИ, а при их отсутствии – конденсатора) в линейный многополюсник 2 на рис. 1,б. Резистор и УИ обладают преимуществом, поскольку их перенос сокращает число уравнений в алгебраической подсистеме, трудоемкость решения которой выше, чем подсистемы дифференциальных уравнений. В любом случае число переменных и уравнений в системе сокращается на число вырожденных контуров.

Элемент, который переносится в линейный многополюсник, считается при формировании гибридных параметров независимым источником тока. После формирования его буквенный символ заменяется на соответствующую функциональную зависимость, при этом управляющее напряжение заменяется на линейную комбинацию независимых напряжений рассматриваемого контура. В результате дифференциальная подсистема окажется сформированной в неявном виде.

Построение уравнений цепи с линейной зависимостью между управляющими токами аналогично цепи с линейной зависимостью напряжений. Необходимо из каждого сечения вокруг полюсов многополюсника, содержащем только катушки индуктивности, нелинейные резисторы и УИ с управляющими токами, перенести один из этих элементов в линейный многополюсник и представить его независимым источником напряжения. Для такого многополюсника следует записать гибридные параметры, а затем заменить символ независимого источника соответствующей функцией с управляющим током в виде комбинации независимых токов рассматриваемого сечения.

В частном случае, когда в каждый вырожденный контур и вырожденное сечение входит хотя бы один нелинейный резистор или УИ с соответствующей управляющей переменной, система дифференциально-алгебраических уравнений (24)–(25) сводится к одной подсистеме дифференциальных уравнений в явной форме.

Алгоритм формирования системы уравнений минимальной размерности для электрической цепи с линейно зависимыми управляющими переменными состоит в следующем.

1. Из совокупности приемников напряжения нелинейных УИ, линейных и нелинейных конденсаторов, нелинейных резисторов, управляемых напряжениями, построить на базе полюсов линейного многополюсника дерево (ряд деревьев) путем включения в него элементов в порядке выше приведенного списка.

2. Найти все особые контуры путем последовательного добавления к дереву (ряду деревьев) элементов, оказавшихся дополнением к дереву.

3. Элементы-дополнения, образующие контуры, представить в виде независимых источников эдс и включить их в линейный многополюсник.

4. Выполнить среди элементов – приемников тока нелинейных УИ, нелинейных и линейных индуктивностей, нелинейных резисторов, управляемых токов операции, дуальные (для сечений) пунктам 1–3.

5. Построить с помощью САФ (5)–(10) гибридные параметры полученного многополюсника и использовать их для построения уравнений (3), при этом символы вновь введенных независимых источников заменить на соответствующие функции, в которых управляющие переменные заменить на линейные комбинации независимых переменных, входящих в контур или сечение.

Пример построения системы нелинейных уравнений для цепи с линейной зависимостью управляющих переменных. Рассмотрим фильтр нижних частот третьего порядка [12], в который на рис. 6,а включено уже нелинейное нагрузочное сопротивление $i = au^3$ [13]. Схема замещения фильтра дана на рис. 6,б. Параметры элементов $G_1 = 10^{-5} \text{ 1/Om}$; $G_2 = 0.3 \cdot 10^{-5} \text{ 1/Om}$; $C_2 = 20 \text{ пФ}$; $C_3 = 120 \text{ пФ}$; $C_5 = 10 \text{ пФ}$; $R_N = 1 \text{ кОм}$; $N = 0.999$; $a = 10^{-3} \text{ A/B}^3$. Требуется построить переходную характеристику коэффициента передачи фильтра.

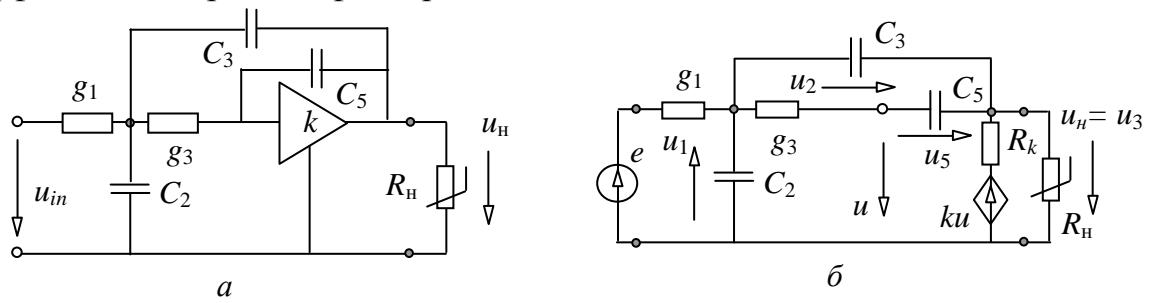


Рис. 6. Исходная схема (а) и схема замещения (б) ФНЧ третьего порядка с нелинейным нагрузочным сопротивлением

Конденсаторы C_2 , C_3 и нелинейный резистор, управляемый напряжением, образуют контур, поэтому резистор заменим независимым источником тока и включим его в линейный 3х2-полюсник. Для этого многополюсника сформируем гибридные параметры с помощью операций, использованных в формулах (13)–(17). В результате получаем

$$\begin{aligned} C_2 \frac{du_1}{dt} + \left(g_1 + \frac{1-N}{R_N}\right)u_1 + \frac{1-N}{R_N}u_2 + \frac{N}{R_N}u_3 + g_1e + a(u_1 + u_2)^3 &= 0; \\ C_3 \frac{du_2}{dt} - \frac{1-N}{R_N}u_1 + \left(g_4 + \frac{1-N}{R_N}\right)u_2 + \left(-g_4 + \frac{1-N}{R_N}\right)u_3 + a(u_1 + u_2)^3 &= 0; \\ C_5 \frac{du_3}{dt} + (-g_4)u_2 + (g_4)u_3 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Применим процедуру `dsolve` из системы Maple для решения системы явным методом Рунге–Кутта 4-го порядка [14]. Графики переходной функции приведем на рис. 7.

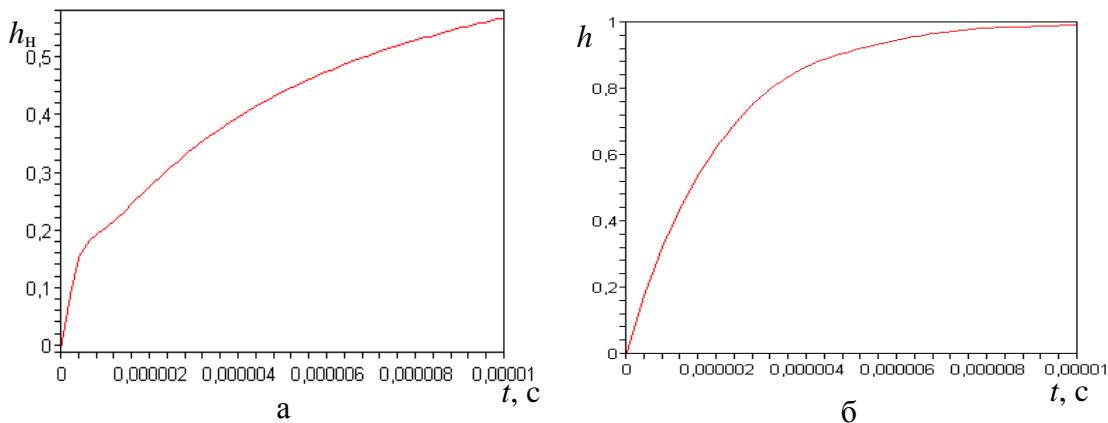


Рис. 7. Графики переходной функции фильтра с нагрузкой (а) и без нагрузки (б)

Вывод. Разработан метод построения гибридных нелинейных уравнений минимальной размерности, позволяющий исключить зависимые переменные без введения в схему вспомогательных элементов на основе диакоптического алгоритма иерархической схемно–алгебраической редукции.

Литература

1. Курганов Д.С., Курганов С.А., Филаретов В.В. Понижение порядка системы символьных уравнений нелинейных электрических цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. САД–2009. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – С. 105–112.
2. Чуа Л. О., Лин П. М. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы.– М.: Энергия, 1980.– 640 с.

3. Курганов С.А., Филаретов В.В. Метод многовариантного анализа нелинейных электронных схем // Электричество.– 1983.– № 5.– С. 42–43.
4. Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество.– 2001.– № 8.– С. 33–42.
5. Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно–алгебраический анализ, диакоптика и диагностика линейных электрических цепей: Учебное пособие.– Ульяновск: УлГТУ, 2005.– 320 с.
6. Вольнов В.Е., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ электронных цепей и электрических систем методом схемно–алгебраической редукции // Схемно–топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005 .– Ульяновск: УлГТУ, 2005.– Т. 3.– С. 34–41.
7. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.
8. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных электронных цепей на основе схемно–алгебраических формул выделения параметров многополюсников // Электричество.– 2003.– № 6.– С. 52–65.
9. Курганов С.А., Филаретов В.В. Эффективность анализа контурных сетей при диагональном способе деления их на части // Схемно–алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006 .– Ульяновск: УлГТУ, 2006.– Т. 3.– С. 135–137.
10. Королёв Ф.А., Курганов С.А., Филаретов В.В. Сравнение методов анализа электрических цепей по частям в символьном виде // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2007. – Ульяновск: УлГТУ, 2007. – Т. 3. – С. 91–104.
11. Витязь О.А., Бобро Л.Н. Понижение порядка математической модели электронной схемы с многополюсными компонентами // Электроника и связь. Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии».– Киев, 2009. Ч. 1.– С. 110–114.
12. Ланнэ А.А. и др. Оптимальная реализация линейных электронных RLC-схем.– Киев: Наук. думка, 1982.– 208 с.
13. Данилов Л.В., Матханов П.Н., Филиппов Е.С. Теория нелинейных электрических цепей.– Л.: Энергоатомиздат.– 1990.– 256 с.
14. Дьяконов В.П. Математическая система Maple V R3/R4/R5.– М.: Солон, 1998.– 399 с.

Филаретов Владимир Валентинович – д.т.н., профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: vfil@mail.ru

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МАТРИЧНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЧАСТОТЫ

С. Н. Сидоров, А. Е. Поляков

Представлена матрично-топологическая модель трёхфазного преобразователя частоты. Модель выполнена на основе метода контурных токов с представлением электрического вентиля в виде идеального ключа. Обеспечивает автоматическое переформирование топологических матриц, выбор и последующий расчёт линейно независимых уравнений токов и напряжений в силовой схеме преобразователя.

Оптимальное проектирование матричного преобразователя частоты (МПЧ) методом динамического программирования предполагает наличие математической модели, устанавливающей аналитическую зависимость целевой функции от отдельных параметров устройства. Ввиду большого числа параметров, получение данных зависимостей с помощью известных программ имитационного моделирования бывает затруднительно или даже невозможно. В качестве примера может служить программа *Matlab/Simulink*, в которой асинхронный двигатель в цепях МПЧ представлен весьма ограниченным числом переменных. Отсутствием ограничений на количество переменных и, соответственно на порядок исходных уравнений, с минимизацией этого порядка на этапе решений отличаются матрично-топологические модели [1].

Предметом моделирования послужил (3-3)-х фазный матричный преобразователь частоты (МПЧ) на 9-ти транзисторных ключах с полярным демпфирующим конденсатором в цепях защиты от коммутационных перенапряжений (рис.1). Нагрузкой МПЧ принят асинхронный короткозамкнутый двигатель, при этом расчётная схема замещения объекта составлена на основе общепринятых допущений об идеальных свойствах как преобразователя, так и двигателя.

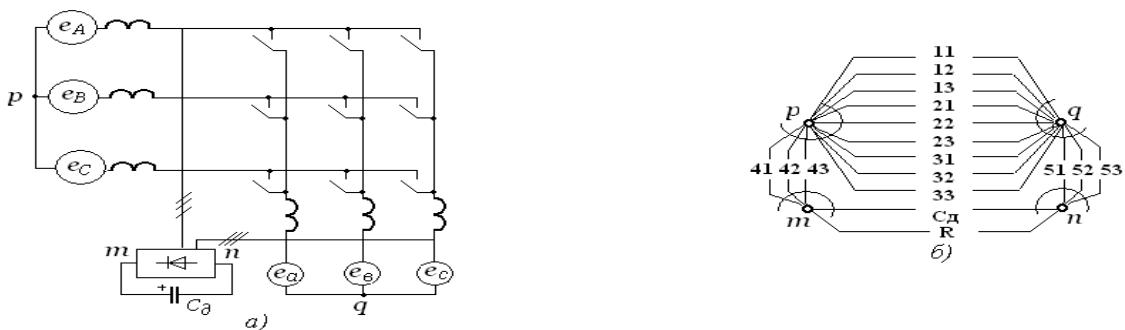


Рис.1. Принципиальная схема МПЧ (а) и её граф (б)

Подготовительный этап моделирования включал следующие операции:

- составление исходного графа, адекватно отражающего топологию схемы замещения;
- эквивалентное преобразование исходного графа, обеспечивающее его связность при любой комбинации токопроводящих вентилей;
- получение матричного уравнения для компонент преобразованного графа;
- составление уравнений контуров и получение на их основе линейно независимых уравнений для расчёта токов и напряжений вентилей, а затем зависимых токов и напряжений входных и выходных цепей преобразователя.

В основе программы расчёта, составленной на алгоритмическом языке С, лежат следующие процедуры:

- 1) имитация работы скалярной системы управления вентилями на основе отыскания точек встречи кривых управляющего и опорного сигналов;
- 2) переформирование основных топологических матриц и выделение с их помощью независимых уравнений для расчёта токов вентилей с последующим решением этих уравнений численным методом;
- 3) вычисление напряжения на обкладках демпфирующего конденсатора и сравнение этого напряжения с допустимым уровнем по условию пробоя изоляции и вентилей;
- 4) вычисление зависимых токов замкнутых контуров и напряжений на неработающих вентилях, а также напряжений нагрузки.

Согласно методу матрично-топологического моделирования вентильных цепей [1], выбор зависимых токов вентилей формализован и связан с выбором так называемого дерева графа. Предварительное преобразование графа должно удовлетворять условию связности, согласно которому число зависимых ветвей (ребер) u и узлов графа x находятся в соотношении $u=x+1$. Исходя из принципа действия МПЧ можно положить $x=4$, так как минимальное число токопроводящих вентилей равно $u=5$ (три вентиля в силовых цепях плюс два вентиля в цепях защиты от перенапряжений). Возможность получения заданного числа узлов вытекает из уравнений связи токов вентилей с токами сетевых фаз i_A, i_B, i_C и нагрузки i_a, i_b, i_c следующего вида

$$\begin{cases} i_A = \sum_{n=1}^3 i_{1n}; \\ i_B = \sum_{n=1}^3 i_{2n}; \\ i_C = \sum_{n=1}^3 i_{3n}; \end{cases} \quad \begin{cases} i_a = \sum_{j=1}^3 i_{1j}; \\ i_b = \sum_{j=1}^3 i_{2j}; \\ i_c = \sum_{j=1}^3 i_{3j}, \end{cases}$$

(1)

где $n=1,2,3$ – порядковый номер выходной фазы; $j=1,2,3$ – порядковый номер силового вентиля одной фазы нагрузки.

Для напряжений ветвей преобразованного графа составляется обобщённая система дифференциальных уравнений первого порядка в операторной форме записи

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_{1j} \\ \bar{u}_{2j} \\ \bar{u}_{3j} \\ \bar{u}_{4j} \\ \bar{u}_{5j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{v}_{1j} \\ \bar{v}_{2j} \\ \bar{v}_{3j} \\ \bar{v}_{4j} \\ \bar{v}_{5j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{r+xp} & & & & \\ & \overline{r+xp} & & & \\ & & \overline{r+xp} & & \\ & & & \overline{r+xp} & \\ & & & & \overline{r+xp} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{i}_{1j} \\ \bar{i}_{2j} \\ \bar{i}_{3j} \\ \bar{i}_{4j} \\ \bar{i}_{5j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_c/p & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_c/p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \bar{i}_{1j} \\ \bar{i}_{2j} \\ \bar{i}_{3j} \\ \bar{i}_{4j} \\ \bar{i}_{5j} \end{bmatrix} + \bar{K} \cdot \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\bar{u}_{1j}, \bar{u}_{2j}, \dots, \bar{u}_{5j}$ – векторы напряжений ветвей; $\bar{v}_{1j}, \bar{v}_{2j}, \dots, \bar{v}_{5j}$ – векторы напряжений на вентилях; $\bar{i}_{1j}, \bar{i}_{2j}, \dots, \bar{i}_{5j}$ – векторы контурных токов; $\overline{r+xp}$ – матрицы эквивалентных сопротивлений ветвей с учётом параметров линейной схемы замещения двигателя, питающей сети и анодных токоограничивающих реакторов; x_c/p – матрица ёмкостных сопротивлений в ветвях с демпфирующим конденсатором; e_a, e_b, e_c – фазные напряжения сети; p – символ дифференцирования; j – порядковый номер вентиля.

Переход от контурных токов к искомым токам вентиляй осуществлялся с помощью матрицы основных контуров по правилу [1]

$$\begin{bmatrix} \bar{i}_{1j*} \\ \bar{i}_{2j*} \\ \bar{i}_{3j*} \\ \bar{i}_{4j*} \\ \bar{i}_{5j*} \end{bmatrix} = \Gamma^t \times \begin{bmatrix} \bar{i}_{1j} \\ \bar{i}_{2j} \\ \bar{i}_{3j} \\ \bar{i}_{4j} \\ \bar{i}_{5j} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где $\bar{i}_{1j*}, \bar{i}_{2j*}, \dots, \bar{i}_{5j*}$ – векторы независимых токов вентиляй; Γ^t – транспонированная матрица основных контуров.

Путём перестановки строк матрицу Γ удобно представить в виде подматрицы замкнутых контуров Γ_b , содержащих токопроводящие ветви и подматрицы разомкнутых контуров Γ_u с выключеными вентилями. Каждая из подматриц обладает свойством оператора, с помощью которого возможно осуществить алгебраическое суммирование

напряжений ветвей, входящих в независимые контуры, поэтому согласно второму закону Кирхгофа имеем

$$\Gamma_i \times \begin{bmatrix} \bar{u}_{1j} \\ \bar{u}_{2j} \\ \bar{u}_{3j} \\ \bar{u}_{4j} \\ \bar{u}_{5j} \end{bmatrix} = 0; \quad \Gamma_u \times \begin{bmatrix} \bar{u}_{1j} \\ \bar{u}_{2j} \\ \bar{u}_{3j} \\ \bar{u}_{4j} \\ \bar{u}_{5j} \end{bmatrix} = 0. \quad (4)$$

Выражения для расчёта независимых токов вентиляй и напряжений на конденсаторе получаются подстановкой(2), (3) в уравнение замкнутых контуров (4)

$$\begin{bmatrix} p\bar{i}_{1j^*} \\ p\bar{i}_{2j^*} \\ p\bar{i}_{3j^*} \\ p\bar{i}_{4j^*} \\ p\bar{i}_{5j^*} \end{bmatrix} = \bar{X}_i^{-1} \cdot \bar{R}_i \times \begin{bmatrix} \bar{i}_{1j^*} \\ \bar{i}_{2j^*} \\ \bar{i}_{3j^*} \\ \bar{i}_{4j^*} \\ \bar{i}_{5j^*} \end{bmatrix} + \bar{X}_i^{-1} \cdot \bar{\Gamma}_i \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \bar{u}_c \\ \bar{u}_c \end{bmatrix} + \bar{X}_i^{-1} \cdot \bar{\Gamma}_i \cdot \bar{K} \times \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad (5)$$

$$\begin{bmatrix} p\bar{u}_c \\ p\bar{u}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{x}_c & 0 \\ 0 & \bar{x}_c \end{bmatrix} \times \Gamma'_i \times \begin{bmatrix} \bar{i}_{4j^*} \\ \bar{i}_{5j^*} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

$$\text{Здесь } \bar{X}_i = \Gamma_i \cdot \bar{X} \cdot \Gamma'_i; \quad \bar{R}_i = \Gamma_i \cdot \bar{R} \cdot \Gamma'_i.$$

Выражение для расчёта напряжений на выключенных вентилях получается из уравнения для разомкнутых контуров (4) после подстановки в него (2)-(6), после чего оно приобретает вид следующего алгебраического уравнения

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{1j} \\ \bar{v}_{2j} \\ \bar{v}_{3j} \\ \bar{v}_{4j} \\ \bar{v}_{5j} \end{bmatrix} = (-\bar{R}_u + \bar{X}_u \cdot \bar{X}_i^{-1} \cdot \bar{R}_i) \times \begin{bmatrix} \bar{i}_{1j^*} \\ \bar{i}_{2j^*} \\ \bar{i}_{3j^*} \\ \bar{i}_{4j^*} \\ \bar{i}_{5j^*} \end{bmatrix} + \bar{X}_u \cdot \bar{X}_i^{-1} \cdot \Gamma_i \times \begin{bmatrix} -\bar{u}_c \\ \bar{u}_c \end{bmatrix} + \Gamma_u \times \begin{bmatrix} \bar{u}_c \\ \bar{u}_c \end{bmatrix} + (\bar{\Gamma}_u \cdot \bar{K} + \bar{X}_u \cdot \bar{X}_i^{-1} \cdot \bar{\Gamma}_i \cdot \bar{K}) \times \begin{bmatrix} e_a \\ e_b \\ e_c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$\text{где } \bar{X}_u = \Gamma_u \cdot \bar{X} \cdot \Gamma'^i; \quad \bar{R}_u = \Gamma_u \cdot \bar{R} \cdot \Gamma'^i.$$

Программой предусматривается автоматическое переформирование топологических матриц отдельно для разомкнутых Γ_u и замкнутых Γ_i контуров. Это происходит при каждом переключении в схеме и осуществляется с учётом связи матрицы основных контуров Γ с матрицей основных сечений Π вида $\Gamma = [I | -\Pi_x]$, где I – матрица рёбер порядка 4x3; Π_x – матрица хорд порядка 4x14. Пример построения топологических матриц для случая, когда список токопроводящих ветвей образуют

ветви 11, 41, 52, C_д, R, из них 11, 41, 52 – рёбра, а C_д, R – хорды, приведён на рис.2. Оптимальное сочетание параметров схемы отыскивалось с помощью модели по критерию минимума технико-экономических показателей (массы и стоимости) с помощью так называемых критериальных моделей элементов силовой схемы (транзисторов и конденсаторов).

	12	13	21	22	23	31	32	33	42	43	51	53	C _д	R	11	41	52
P	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1					1	1	
Q	1	1	1	1	1	1	1								1		1
M								1	1				-1	-1		1	
N										1	1	-1	-1				1

	11	12	13	21	22	23	31	32	33	41	42	43	51	52	53	C _д	R
22	-1				1					-1				-1			
23	-1					1				-1				-1			
C _д															1	-1	
R										1			1		-1	1	
12	-1	1								-1				-1			
13	-1		1							-1				-1			
21	-1			1						-1				-1			
31	-1					1				-1				-1			
32	-1						1			-1				-1			
33	-1							1	-1					-1			
42	-1								-1	1							
43	-1								-1		1						
51	1											1	-1				
53	1											-1	1				

Рис.2. Основные топологические матрицы модели

Вывод. Матрично-топологическое моделирование электрических цепей с полупроводниковыми вентилями на основе направленных графов остаётся основным методом оптимального автоматизированного проектирования полупроводниковых преобразователей с разветвлённой многоконтурной структурой силовых цепей.

Литература

1. Демирчан К.С., Бутырин П.А. Моделирование и расчёт электрических цепей. – М.: Высшая школа. 1988.

Сидоров Сергей Николаевич – к.т.н., доцент кафедры "Электропривод и АПУ" Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ). 432027, Ульяновск, ул. Северный Венец, 32. УлГТУ, сл. тел. 77-81-04; e-mail: sidorov_ulstu@mail.ru.

Поляков Алексей Евгеньевич – аспирант кафедры "Электропривод и АПУ" Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ).

МЕТОДИКА НАХОЖДЕНИЯ КОМПАКТНЫХ СИМВОЛЬНЫХ ВЫРАЖЕНИЙ ДЛЯ ТОКОВ В СХЕМАХ С ИСТОЧНИКАМИ НАПРЯЖЕНИЯ

А. А. Шагаев

Предложена методика символьного анализа для получения относительно небольших и обозримых выражений искомых токов. Рассмотрен пример моделирования работы простейшего гальванического элемента в виде эквивалентной электрической схемы на постоянном токе. Показано, что расчетные токи представляют собой алгебраические суммы токов всех влияющих на них контуров схемы, а не только независимых контуров, используемых для решения системы линейных уравнений.

Символьное моделирование электрических схем является перспективным методом описания разнообразных природных и искусственных систем и процессов. Преимущество данного метода заключается в том, что исследователь получает интересующие его функциональные зависимости нужных параметров (например, токов, напряжений) от прочих параметров (сопротивлений, эдс) данной схемы (системы, процесса). Серьезными препятствиями на пути широкого использования символьного моделирования являются:

1. Большое количество параметров (элементов) схемы (системы, процесса), влияющих на интересующий нас параметр.

2. Громоздкий и порой не поддающийся визуальному просмотру и, следовательно, осмыслению вид полученных выражений. Это порождает проблемы, связанные с пониманием физического и математического смысла отдельных частей анализируемых результатов.

3. Не достаточно разработанный математический аппарат решения данных задач обуславливает сложность решения задачи диагностики, то есть расчета большого числа параметров элементов схемы на основании измеренных в эксперименте данных (токов, напряжений).

Решение всех вышеперечисленных проблем потребует заметного времени и усилий ученых разных направлений. В данной работе предлагается методика сворачивания полученных результатов до приемлемых, охватываемых взглядом и более понятных исследователю выражений.

Символьный расчет токов схемы. Рассмотрим электрическую схему, содержащую сопротивления и источники эдс. Символьный анализ такой схемы обычно выполняется методом контурных токов [1]

$$IR=E, \quad (1)$$

где: \mathbf{I} – вектор контурных токов, \mathbf{R} – матрица контурных сопротивлений, \mathbf{E} – вектор сумм эдс в выбранных контурах.

Для символьного решения системы уравнений (1) можно применить правило Крамера

$$I_{nn} = E_{11} \cdot \frac{\Delta_{k1}}{\det R} + E_{22} \cdot \frac{\Delta_{k2}}{\det R} + E_{33} \cdot \frac{\Delta_{k3}}{\det R} + \dots + E_{nn} \cdot \frac{\Delta_{kn}}{\det R} = \sum_{i=1}^{i=n} E_{ii} \cdot \frac{\Delta_{ki}}{\det R}. \quad (2)$$

где Δ_{km} – алгебраическое дополнение, полученное из определителя $\det R$ путем вычеркивания k -го столбца и m -й строки и умноженного на $(-1)^{k+m}$; E_{ii} – алгебраическая сумма эдс i -го независимого контура.

В случае сложных систем уравнений приходится обращаться к компьютерным программам, способным проводить символьные математические расчеты. К таким программам относятся, например, Maple и Mathematica. Миновать трудоемкое формирование системы уравнений можно, если использовать одну из специализированных электротехнических программ, предназначенных для символьного расчета электрических схем.

Однако результатом использования указанных программ обычно являются достаточно большие и не приемлемые для просмотра и понимания выражения искомых токов. В задачу статьи входит демонстрация методики сворачивания полученных выражений до приемлемого и понятного вида.

Обратим внимание на то, что при получении выражения (2) были использованы только независимые контуры схемы. Однако эти контуры образуют лишь небольшое подмножество контуров, создающих вклад в тот или иной ток. Предлагаемое нами выражение для тока имеет вид отличный от формулы (2):

$$I_{mm} = E_{11}' \cdot \frac{K_1}{\det R} + E_{22}' \cdot \frac{K_2}{\det R} + E_{33}' \cdot \frac{K_3}{\det R} + \dots + E_{mm}' \cdot \frac{K_m}{\det R} = \sum_{i=1}^{i=m} E_{ii}' \cdot \frac{K_i}{\det R} \quad (3)$$

где m – число всех контуров схемы, включающих ветвь с током и эдс; E_{ii}' – алгебраическая сумма указанных эдс i -го из m контуров с ветвью рассчитываемого тока I_{mm} .

Представление выражений для токов в компактном виде. Рассмотрим методику построения выражения (3) на основе выражения (2) или выражения, полученного с помощью специализированной электротехнической программы. Общий знаменатель выражений для токов не подлежит дальнейшей свертке (уменьшению сложности). Алгоритм свертки выражений числителей искомых токов приводится ниже:

1. Рассматриваем числитель i -го тока схемы. При большом размере его необходимо сохранить в отдельном текстовом файле.

2. Разбиваем (при необходимости) выбранный числитель на элементарные слагаемые, каждое из которых представляет собой произведение $k-1$ сопротивления и одной эдс. Здесь k – число независимых контуров схемы. Данная процедура проводится с помощью соответствующего оператора любой из упомянутых программ символьной математики. В программе Maple это можно сделать с помощью операторов `expand` (раскрытие скобок) или `simplify` (раскрытие скобок и упрощение). В зависимости от размера числителя получить все его слагаемые можно двумя способами:

2.1. Если числитель – небольшой, то операторы `expand` или `simplify` можно применить ко всему числителю сразу. На практике для этого в документе Maple записываем исполняемую команду `>simplify(текст числителя)` или `>expand(текст числителя)`.

2.2. Если схема сложная, то получать выражения для токов надо специализированной электротехнической программой, предназначенней для символьного расчета токов. Желательно, чтобы эта программа могла группировать слагаемые числителя по элементам эдс. Рассчитанный числитель i -го тока велик, и хранится в отдельном текстовом файле. В этом случае выражение числителя подвергается следующим дополнительным операциям:

2.2.1. Для упрощения анализа заменяем в числитеle все суммы сопротивлений в скобках на переменные. Например, сумму $(R_i+R_j+R_k)$ заменяем на $R_{i_j_k}$. Это уменьшает количество скобок в числитеle и упрощает его анализ. Сделать это можно, открыв файл числителя текстовым редактором и применив замену (по всему тексту файла) суммы $(R_i+R_j+R_k)$ на $R_{i_j_k}$. Однако лучше это сделать соответствующей компьютерной программой. Результат целесообразно сохранить в отдельном текстовом файле. Например, в файле `i-1.txt`. Здесь i – номер тока, 1 – номер процедуры упрощения числителя этого тока. Эта позволит уменьшить размер файла числителя и облегчить его обработку.

2.2.2. Числитель разбивается на сумму слагаемых $K_1*E_1+K_2*E_2+\dots+K_j*E_j$, где $K_j=K_{j1}+K_{j2}+\dots+K_{jm_j}$; m_j – количество слагаемых, каждое из которых состоит из $k-1$ сопротивлений. Проверка правильности разбиения основывается на том, что чтобы количество открывающих и закрывающих скобок внутри каждого множителя K_j каждого слагаемого было одинаковым. Каждое из слагаемых K_j*E_j записывается в отдельный текстовый файл `j-s-1.txt`, где j – ток, s – элемент эдс, 1 – номер процедуры упрощения. Такие файлы имеют меньший размер, что облегчает их анализ. В итоге из текстового файла числителя i -го тока будет получено столько текстовых файлов m_j , сколько разных элементов эдс в нем содержится.

2.2.3. В каждом из полученных файлов (*i-s-1.txt*) *i*-го тока заменяем элементы $R_{i,j,k}$ на $(R_i + R_j + R_k)$ и записываем результат в отдельный файл *i-s-2.txt* (где 2 – номер новой процедуры упрощения).

2.2.4. В программе символьной математики (Maple или Mathematica) в цикле последовательно открываем все m_i полученные по пункту 2.2.3. файлы *i-s-2.txt* и занеся их содержимое в соответствующие переменные применяем к ним операторы $>\text{expand}$ (текст файла *i-s-2.txt*) или $>\text{simplify}$ (текст файла *i-s-2.txt*). Каждый результат заносим в соответствующий текстовый файл *i-s-3.txt*. Это даст файлы, содержащие слагаемые числителя. Каждое из этих слагаемых представляет собой произведение $E_i \cdot \prod_{j=1}^{j=k-1} R_j$ одного элемента эдс (E_i) и произведения $k-1$ сопротивлений $\prod_{j=1}^{j=k-1} R_j$). В каждом из слагаемых величины R_j , входящие в состав $\prod_{j=1}^{j=k-1} R_j$ различные.

2.2.5. Файлы *i-s-3.txt*, полученные в пункте 2.2.4. для удобства лучше склеить в один текстовый файл, но можно и не делать это. Отсутствие склеивания файлов несколько изменит последовательность следующих пунктов анализа числителя. Результаты шагов 2.1. и 2.2. приводят к одному из двух вариантов последующего преобразователя числителя:

2.2.5.1. Будет получен один текстовый файл с набором слагаемых $(E_i \cdot \prod_{j=1}^{j=k-1} R_j)$. Это будет файл, полученный по пункту 2.1. или файл, полученный склеиванием файлов (*i-s-3.txt*) на шаге 2.2. В данном файле будут содержаться слагаемые со всеми элементами эдс.

2.2.5.2. Будет получено несколько файлов с наборами слагаемых. И это будут файлы, полученные без склеивания файлов (*i-s-3.txt*) по пункту 2.2. В каждом из этих файлов будут содержаться слагаемые только с одним конкретным *s*-ым элементом эдс $(E_s \cdot \prod_{j=1}^{j=k-1} R_j)$.

3. В случаях 2.2.5.1 и 2.2.5.2 полученный файл (или набор файлов) будет (будут) содержать набор слагаемых. Эти слагаемые будут различными. В каждом из этих слагаемых порядок расположения множителей (сопротивлений и эдс) будет случайным. В обоих случаях разбиваем текст полученного файла (файлов) так, чтобы в каждой строке файла находилось только одно слагаемое. Делаем это открыв каждый файл в программе Word и применив к нему макрос, глобально заменяющий (в тексте файла) символы «+» и «-» на комбинации «знак абзаца»«+» (^p+) и «знак абзаца»«-» (^p-). Время выполнения макроса для файлов больших размеров может быть достаточно большим. Еще один недостаток этого метода в том, что первая строка файла получается

пустой. Исправим это, удалив ее вручную или программно. Лучше и быстрее это делают программы собственной разработки. Результат применения этой процедуры желательно сохранить в отдельном текстовом файле.

4. В каждом из полученных слагаемых файла (файлов) порядок расположения сопротивлений и эдс будет случайным. Это не позволяет группировать слагаемые с одинаковыми множителями перед эдс. Поэтому группируем множители каждого слагаемого так, чтобы эдс была либо в начале, либо в конце слагаемого. А множители (элементы R_i), входящие в коэффициент при эдс так же группируем определенным образом – например по номерам. Таким образом, например, из слагаемого $R_2*R_1*R_4*E_2*R_6$ получится слагаемое $R_1*R_2*R_4*R_6*E_2$. Это даст одинаковый порядок расположения множителей в коэффициенте при эдс и позволит группировать слагаемые, имеющие одинаковые множители. Результат этого рекомендуется записать в отдельный файл (файлы). Делать это лучше с использованием собственной компьютерной программы – так, как это делали мы. В результате получим один файл (набор файлов), содержащий (содержащие) набор расположенных в отдельных строках слагаемых.

5. В строках данного файла (или каждого файла из набора файлов), полученных в пункте 4, находим одинаковые слагаемые и алгебраически складываем их, то есть, осуществляя приведение подобных. Это уменьшает или увеличивает количество некоторых слагаемых. Например, если в единственном файле числителя одновременно содержатся слагаемые равные: $(+2*R_1*R_2*R_3*E_2)$ и $(-1*R_1*R_2*R_3*E_2)$, то в результате в файле останется одно слагаемое $(+R_1*R_2*R_3*E_2)$. Результат записывает в текстовый файл;

6. Построчно считывая содержимое файла (всех файлов) числителя (полученных по пункту 5) находим слагаемые с одинаковыми множителями K_i при разных элементах эдс. Записываем эти слагаемые в один текстовый файл с именем K_i . Например, если K_i равно $R_1*R_2*R_3$, то это будет файл $R_1R_2R_3.txt$.

7. Анализируя все, полученные в пункте 6 файлы, группируем их слагаемые таким образом, чтобы в полученные алгебраические суммы эдс входило по одному элементу (с учетом числового коэффициента перед слагаемым) каждого из элементов эдс. Таким образом, чтобы полученная алгебраическая сумма эдс образовывала замкнутый контур в исследуемой схеме. Например, предположим, что в одном или нескольких файлах числителя были найдены слагаемые: $+2*R_1*R_2*E_1$ и $+1*R_1*R_2*E_2$ и $-1*R_1*R_2*E_3$. Их группировка даст 2 выражения: $+R_1*R_2*(E_1+E_2)$ и $+R_1*R_2*(E_1-E_3)$. При этом суммы эдс E_1+E_2 и E_1-E_3 должны соответствовать контурам схемы. Группировку–расположение эдс в скобках проводим в соответствии с заданным по умолчанию правилом,

например, по возрастанию номера элемента эдс слева направо. Результаты группировок слагаемых записываем в текстовые файлы с именами полученных алгебраических сумм эдс. Например, результат группировки слагаемых, приведший к алгебраической сумме эдс, равной $E_1+E_2+E_3$ можно так и записать в текстовый файл (E1+E2+E3).txt. В таких файлах, каждая их строка содержит по одному (для удобства обработки) слагаемому, представляющему собой произведение алгебраической суммы эдс на некий коэффициент (состоящий из произведения $k-1$ сопротивлений (k – число независимых контуров схемы)).

8. Удаляем из каждого слагаемого текстовых файлов, полученных на шаге 7, алгебраические суммы эдс и получаем в результате для каждой алгебраической суммы эдс текстовые файлы, содержащие в каждой своей строке слагаемые представляющие коэффициенты K_i . Каждое это слагаемое состоит из произведения $k-1$ сопротивлений. Сумма полученных коэффициентов K_i является константами для каждой алгебраической суммы эдс контура независимо от того на какой ток она влияет. Поэтому расчет таких коэффициентов проводится при сворачивании результатов только один раз. Один и тот же коэффициент (следовательно, и контур) имеет одно и то же значение для всех токов, на которые он (точнее, его ток) оказывает влияние. В окончательных выражениях для искомых токов мы предлагаем заменять полное представление этих коэффициентов на сокращенные обозначения. Такими как, например, K_1 или K_2 . Знаменатели токов заменяются понятными обозначениями $\det R$.

Каждый шаг вышеописанных преобразований завершается операцией проверки – сравнения исходных данных с их преобразованным видом. Эта процедура проводилась в программе Maple путем символьного вычитания переменной, содержащей исходные данные от переменной, содержащей результирующее представление данных. При получении нулевого результата операции вычитания преобразование выполнено правильно.

Использование методики при моделировании гальванического элемента. В упрощенной форме схема замещения гальванического элемента, предложенная в [2], имеет вид, показанный на рис. 1.

Символьный расчет данной схемы первоначально проводился методом контурных токов. В данной эквивалентной электрической схеме насчитывается 15 ветвей и 10 узлов, что определяет количество независимых контуров, равное $(15 - 10 + 1) = 6$.

Порядок выбора независимых контуров в принципе должен отвечать определенным требованиям и при их соблюдении может быть произвольным, однако наиболее интересными для электрохимиков являются следующие независимые контуры: $(E_1+E_2+E_3)$; $(E_7+E_8+E_9)$; $(E_1+E_4+E_6+E_5+E_3)$; $(E_7+E_{10}+E_{12}+E_{11}+E_9)$; $(E_1+E_4+E_{13}+E_{11}+E_9+E_7+E_{10}+E_{14}+E_5+E_3)$; $(E_7+E_{10}+E_{14}+E_5+E_3+E_{15})$.

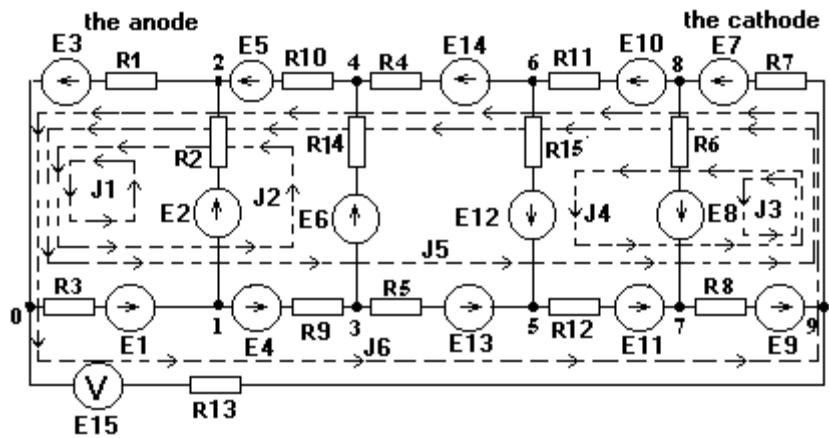


Рис.1. Упрощенная эквивалентная электрическая схема простейшего гальванического элемента

Построенная система уравнений была решена в символьном виде с помощью системы Maple. Далее была использован предложенный выше алгоритм преобразования символьных выражений искомых токов. В результате применения методики мы получили более информативное выражение для каждого тока.

Слагаемые тока представляют собой произведение алгебраической суммы эдс некоторого контура (всегда содержащего эдс главного процесса данного контура) на коэффициент K_i , рассчитанный нами на шаге 8. Знак, стоящий перед каждой эдс в алгебраической сумме положителен, если он совпадает с выбранным положительным направлением обхода этого контура с током. В противном случае знак вектора эдс отрицателен.

Полученные нами результаты, касающиеся множителей эдс, представлены в табл. 1–3. В целом эти результаты превышают по сложности исходные выражения, но преобразованные выражения являются структурированными относительно эдс, что приводит к отсутствию «хаоса», который имел место.

Полученные выражения показывают, что в скорость интересующего нас процесса (тока в соответствующей ветви) вносят вклад все без исключения процессы (все контуры схемы), включающие в себя основной (главный) подпроцесс, то есть ветвь, содержащую эдс главного подпроцесса, рассчитываемого тока.

Результаты проведенного моделирования схемы показывают, что токи с $I_1 \dots I_6$ являются суперпозициями токов, текущих в 47 контурах схемы. В табл. 1–3 жирным шрифтом выделены независимые контуры, которые были выбраны ранее при анализе схемы методом контурных токов.

Таблица 1. Списки контуров схемы, создающих токи I1 и I2

Ток	Глав-ная эдс тока	№ контура	Эдс, образующие контур	Чис-ло эдс
I1	E2	1	+(+E1+E2+E3)	3
		2	+(+E1+E2-E5-E7-E10-E14-E15)	7
		3	+(+E1+E2-E5-E6+E9+E11+E13-E15)	8
		4	+(+E1+E2-E5+E8+E9-E10-E14-E15)	8
		5	+(+E1+E2-E5+E9+E11+E12-E14-E15)	8
		6	+(+E1+E2-E5-E6-E7-E8+E11+E13-E15)	9
		7	+(+E1+E2-E5-E6-E7-E10-E12+E13-E15)	9
		8	+(+E1+E2-E5-E7-E8+E11+E12-E14-E15)	9
		9	+(+E1+E2-E5-E6+E8+E9-E10-E12+E13-E15)	10
		10	+(+E2-E4-E5-E6)	4
		11	+(+E2-E4-E5+E12-E13-E14)	6
		12	+(+E2+E3-E4-E9-E11-E13+E15)	7
		13	+(+E2+E3-E4-E6+E7+E10+E14+E15)	8
		14	+(+E2+E3-E4+E7+E8-E11-E13+E15)	8
		15	+(+E2+E3-E4+E7+E10+E12-E13+E15)	8
		16	+(+E2-E4-E5+E8-E10-E11-E13-E14)	8
		17	+(+E2+E3-E4-E6-E8-E9+E10+E14+E15)	9
		18	+(+E2+E3-E4-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	9
		19	+(+E2+E3-E4-E6-E9-E11-E12+E14+E15)	9
		20	+(+E2-E4-E5-E7-E9-E10-E11-E13-E14)	9
		21	+(+E2+E3-E4-E6+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	10
I2	E6	1	+(+E1+E3+E4+E5+E6)	5
		2	-(-E1-E4-E6+E7+E10+E14+E15)	7
		3	+(-E1-E2+E5+E6-E9-E11-E13+E15)	8
		4	-(-E1-E4-E6-E8-E9+E10+E14+E15)	8
		5	-(-E1-E4-E6-E9-E11-E12+E14+E15)	8
		6	+(-E1-E2+E5+E6+E7+E8-E11-E13+E15)	9
		7	+(-E1-E2+E5+E6+E7+E10+E12-E13+E15)	9
		8	-(-E1-E4-E6+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	9
		9	+(-E1-E2+E5+E6-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	10
		10	-(+E2-E4-E5-E6)	4
		11	-(+E2+E3-E4-E6+E7+E10+E14+E15)	8
		12	-(+E2+E3-E4-E6-E8-E9+E10+E14+E15)	9
		13	-(+E2+E3-E4-E6-E9-E11-E12+E14+E15)	9
		14	-(+E2+E3-E4-E6+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	10
		15	+(+E3+E5+E6-E9-E11-E13+E15)	7
		16	+(+E3+E5+E6+E7+E8-E11-E13+E15)	8
		17	+(+E3+E5+E6+E7+E10+E12-E13+E15)	8
		18	+(+E3+E5+E6-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	9
		19	-(-E6-E12+E13+E14)	4
		20	-(-E6-E8+E10+E11+E13+E14)	6
		21	-(-E6+E7+E9+E10+E11+E13+E14)	7

Таблица 2. Списки контуров схемы, создающих токи I3 и I4

Ток	Глав-ная эдс тока	№ кон- тура	Эдс, образующие контур	Чис- ло эдс
I3	E8	1	+(-E1-E4+E7+E8-E11-E13+E15)	7
		2	-(-E1-E2+E5-E8-E9+E10+E14+E15)	8
		3	-(-E1-E4-E6-E8-E9+E10+E14+E15)	8
		4	-(-E1-E4-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	8
		5	+(-E1-E2+E5+E6+E7+E8-E11-E13+E15)	9
		6	+(-E1-E2+E5+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	9
		7	-(+E1+E3+E4+E5-E8+E10+E11+E13+E14)	9
		8	+(-E1-E4-E6+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	9
		9	-(-E1-E2+E5+E6-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	10
		10	+(+E2+E3-E4+E7+E8-E11-E13+E15)	8
		11	-(-E2+E4+E5-E8+E10+E11+E13+E14)	9
		12	-(-E2+E3-E4-E6-E8-E9+E10+E14+E15)	9
		13	-(+E2+E3-E4-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	9
		14	+(+E2+E3-E4-E6+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	10
		15	-(+E3+E5-E8-E9+E10+E14+E15)	7
		16	+(+E3+E5+E6+E7+E8-E11-E13+E15)	8
		17	+(+E3+E5+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	8
		18	-(+E3+E5+E6-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	9
		19	-(-E6-E8+E10+E11+E13+E14)	6
		20	+(+E7+E8+E9)	3
		21	+(+E8-E10-E11-E12)	4
I4	E12	1	-(+E1+E3+E4+E5-E12+E13+E14)	7
		2	+(-E1-E4+E7+E10+E12-E13+E15)	7
		3	-(-E1-E2+E5-E9-E11-E12+E14+E15)	8
		4	-(-E1-E4-E6-E9-E11-E12+E14+E15)	8
		5	+(-E1-E4-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	8
		6	+(-E1-E2+E5+E6+E7+E10+E12-E13+E15)	9
		7	-(-E1-E2+E5+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	9
		8	-(-E1-E4-E6+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	9
		9	+(-E1-E2+E5+E6-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	10
		10	-(-E2+E4+E5-E12+E13+E14)	6
		11	+(+E2+E3-E4+E7+E10+E12-E13+E15)	8
		12	-(-E2+E3-E4-E6-E9-E11-E12+E14+E15)	9
		13	+(-E2+E3-E4-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	9
		14	-(-E2+E3-E4-E6+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	10
		15	-(-E3+E5-E9-E11-E12+E14+E15)	7
		16	+(-E3+E5+E6+E7+E10+E12-E13+E15)	8
		17	-(-E3+E5+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	8
		18	+(-E3+E5+E6-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	9
		19	-(-E6-E12+E13+E14)	4
		20	+(-E7+E9+E10+E11+E12)	5
		21	-(-E8-E10-E11-E12)	4

Таблица 3. Списки контуров схемы, создающих токи I5 и I6

Ток	Главная эдс тока	№ контура	Эдс, образующие контур	Число эдс
I5	E13	1	-(-E1-E4-E9-E11-E13+E15)	6
		2	+(+E1+E3+E4+E5-E12+E13+E14)	7
		3	-(-E1-E4+E7+E8-E11-E13+E15)	7
		4	-(-E1-E4+E7+E10+E12-E13+E15)	7
		5	-(-E1-E2+E5+E6-E9-E11-E13+E15)	8
		6	-(-E1-E4-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	8
		7	-(-E1-E2+E5+E6+E7+E8-E11-E13+E15)	9
		8	-(-E1-E2+E5+E6+E7+E10+E12-E13+E15)	9
		9	+(+E1+E3+E4+E5-E8+E10+E11+E13+E14)	9
		10	-(-E1-E2+E5+E6-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	10
		11	+(+E1+E3+E4+E5+E7+E9+E10+E11+E13+E14)	10
		12	+(-E2+E4+E5-E12+E13+E14)	6
		13	-(-E2+E3-E4-E9-E11-E13+E15)	7
		14	-(-E2+E3-E4+E7+E8-E11-E13+E15)	8
		15	-(-E2+E3-E4+E7+E10+E12-E13+E15)	8
		16	+(-E2+E4+E5-E8+E10+E11+E13+E14)	8
		17	-(-E2+E3-E4-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	9
		18	+(-E2+E4+E5+E7+E9+E10+E11+E13+E14)	9
		19	-(-E3+E5+E6-E9-E11-E13+E15)	7
		20	-(-E3+E5+E6+E7+E8-E11-E13+E15)	8
		21	-(-E3+E5+E6+E7+E10+E12-E13+E15)	8
		22	-(-E3+E5+E6-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	9
		23	+(-E6-E12+E13+E14)	4
		24	+(-E6-E8+E10+E11+E13+E14)	6
		25	+(-E6+E7+E9+E10+E11+E13+E14)	7
I6	E15	1	+(-E1-E4-E9-E11-E13+E15)	6
		2	+(-E1-E2+E5+E7+E10+E14+E15)	7
		3	+(-E1-E4-E6+E7+E10+E14+E15)	7
		4	+(-E1-E4+E7+E8-E11-E13+E15)	7
		5	+(-E1-E4+E7+E10+E12-E13+E15)	7
		6	+(-E1-E2+E5+E6-E9-E11-E13+E15)	8
		7	+(-E1-E2+E5-E8-E9+E10+E14+E15)	8
		8	+(-E1-E2+E5-E9-E11-E12+E14+E15)	8
		9	+(-E1-E4-E6-E8-E9+E10+E14+E15)	8
		10	+(-E1-E4-E6-E9-E11-E12+E14+E15)	8
		11	+(-E1-E4-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	8
		12	+(-E1-E2+E5+E6+E7+E8-E11-E13+E15)	9
		13	+(-E1-E2+E5+E6+E7+E10+E12-E13+E15)	9
		14	+(-E1-E2+E5+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	9
		15	+(-E1-E4-E6+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	9
		16	+(-E1-E2+E5+E6-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	10
		17	+(-E2+E3-E4-E9-E11-E13+E15)	7
		18	+(-E2+E3-E4-E6+E7+E10+E14+E15)	8
		19	+(-E2+E3-E4+E7+E8-E11-E13+E15)	8
		20	+(-E2+E3-E4+E7+E10+E12-E13+E15)	8
		21	+(-E2+E3-E4-E6-E8-E9+E10+E14+E15)	9
		22	+(-E2+E3-E4-E6-E9-E11-E12+E14+E15)	9
		23	+(-E2+E3-E4-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	9
		24	+(-E2+E3-E4-E6+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	10
		25	+(-E3+E5+E7+E10+E14+E15)	6
		26	+(-E3+E5+E6-E9-E11-E13+E15)	7
		27	+(-E3+E5-E8-E9+E10+E14+E15)	7
		28	+(-E3+E5-E9-E11-E12+E14+E15)	7
		29	+(-E3+E5+E6+E7+E8-E11-E13+E15)	8
		30	+(-E3+E5+E6+E7+E10+E12-E13+E15)	8
		31	+(-E3+E5+E7+E8-E11-E12+E14+E15)	8
		32	+(-E3+E5+E6-E8-E9+E10+E12-E13+E15)	9

Полный список контуров, проходящих через ветви с искомыми токами (хотя бы через одну из них) приведен в табл. 4.

Таблица 4. Контуры схемы гальванического элемента, обеспечивающие вклады в искомые токи

№	Контур	№	Контур
Контуры, не содержащие эдс E15			
1	(+E1+E2+E3)	9	(-E6+E13+E14-E12)
2	(+E7+E8+E9)	10	(+E1+E3+E4+E5+E13+E14+E10+E11+E7+E9)
3	(+E2-E4-E5-E6)	11	(-E2+E4+E5+E13+E14+E10+E11-E8)
4	(+E8-E10-E11-E12)	12	(-E2+E4+E5+E13+E14+E10+E11+E7+E9)
5	(-E6+E13+E14+E10+E11-E8)	13	(+E1+E3+E4+E5+E13+E14+E10+E11-E8)
6	(-E2+E4+E5+E13+E14-E12)	14	(+E1+E3+E4+E5+E6)
7	(-E6+E13+E14+E10+E11+E7+E9)	15	(+E12+E10+E11+E7+E9)
8	(+E1+E3+E4+E5+E13+E14-E12)		
Контуры, содержащие эдс E15			
1	(-E1-E4-E13-E11-E9+E15)	17	(-E1-E2+E5+E14-E12-E11-E9+E15)
2	(+E3+E5+E14+E10+E7+E15)	18	(-E1-E2+E5+E14-E12-E11+E8+E7+E15)
3	(-E1-E2+E5+E14+E10+E7+E15)	19	(-E1-E2+E5+E6-E13+E12+E10+E7+E15)
4	(+E3+E2-E4-E13-E11-E9+E15)	20	(-E1-E2+E5+E6-E13-E11+E8+E7+E15)
5	(+E3+E5+E14+E10-E8-E9+E15)	21	(-E1-E4-E6+E14-E12-E11-E9+E15)
6	(-E1-E4-E13-E11+E8+E7+E15)	22	(-E1-E4-E6+E14-E12-E11+E8+E7+E15)
7	(-E1-E4-E6+E14+E10+E7+E15)	23	(-E1-E4-E6+E14+E10-E8-E9+E15)
8	(+E3+E5+E6-E13-E11-E9+E15)	24	(+E3+E2-E4-E13+E12+E10+E7+E15)
9	(+E3+E5+E14-E12-E11-E9+E15)	25	(+E3+E2-E4-E6+E14-E12-E11-E9+E15)
10	(-E1-E4-E13+E12+E10+E7+E15)	26	(+E3+E2-E4-E13+E12+E10-E8-E9+E15)
11	(-E1-E2+E5+E6-E13-E11-E9+E15)	27	(+E3+E2-E4-E6+E14+E10-E8-E9+E15)
12	(+E3+E2-E4-E6+E14+E10+E7+E15)	28	(+E3+E5+E6-E13+E12+E10+E7+E15)
13	(-E1-E2+E5+E14+E10-E8-E9+E15)	29	(+E3+E5+E6-E13-E11+E8+E7+E15)
14	(+E3+E2-E4-E13-E11+E8+E7+E15)	30	(+E3+E5+E6-E13+E12+E10-E8-E9+E15)
15	(-E1-E4-E13+E12+E10-E8-E9+E15)	31	(-E1-E2+E5+E6-E13+E12+E10-E8-E9+E15)
16	(+E3+E5+E14-E12-E11+E8+E7+E15)	32	(+E3+E2-E4-E6+E14-E12-E11+E8+E7+E15)

Особенности решения методом контурных токов. Независимые контуры, используемые для анализа схемы методом контурных токов, находятся в числе других контуров схемы, и также оказывают влияние на каждый из искомых токов.

Для того чтобы искомые токи вошли в число контурных токов, необходимо выбрать любое дерево, не содержащее интересующих ветвей. Ветви, не вошедшие в дерево, будут являться хордами – контурными ветвями.

К сожалению, метод контурных токов обычно преподается как метод ячеек, а не как метод с выбором дерева схемы. Это является не только ограничением – применимостью только к планарным схемам – но также затрудняет формализацию и реализацию на компьютере этого метода.

Полученные нами положительные результаты проверок на предмет отсутствия ошибок (в ходе проведения преобразований) и четкий физический смысл полученного нами выражения (3) позволяют утверждать, что уравнение (3) эквивалентно уравнению (2). Оно присутствует в выражении (2) в неявном, скрытом виде.

Уравнение (3) имеет больший размер (число слагаемых) по сравнению с классическим уравнением (2). Однако оно несет в себе больше информации для специалистов в области физической химии, биоэлектрохимии, колloidной химии, геоэлектрохимии, электрохимии атмосферы и многих других областей знаний.

Это уравнение показывает влияние на интересующий нас процесс большего числа других электрохимических и химических процессов, протекающих в системе. И это несомненное преимущество данного метода моделирования и предложенного варианта сворачивания результатов символьного моделирования.

Полученные результаты поднимают вопрос о некоторой незавершенности, недостаточной доработке математического аппарата решения подобного рода задач, как со стороны математиков, так и со стороны специалистов в области теоретической электротехники. Возникают закономерные вопросы о физическом и математическом смысле коэффициентов K_i , фигурирующих в чисителях, рассчитанных токов, а также о методах их точных, аналитических расчетов при символьном моделировании.

Если математический аппарат решения данных задач будет доработан, то мы получим механизмы прямого расчета коэффициентов K_i . Тогда их можно будет заменить в формулах токов обозначениями соответствующих математических операций.

Пока что мы предлагаем заменять полное представление коэффициентов K_i их сокращенными обозначениями. Знаменатели токов предлагается не повторять, а заменять на $\det R$. Это позволяет получать понятные исследователю результаты. Оперировать с большими коэффициентами K_i и Δ_{ij} человек будет вряд ли. Скорее всего, это удел компьютеров.

Варианты символьного представления искомых токов. Сообразно степени исследования результатов моделирования возможно использование трех вариантов символьного отображения расчетных токов:

1. Выражение (3), учитывающее все влияющие контуры схемы.

2. Более детальный вариант отображения расчетных токов и содержащий в себе полное представление всех алгебраических сумм эдс, входящих в контуры и влияющих на рассчитываемый ток. Но без приведения полного описания коэффициентов Δ_{ij} или K_i . Это описание займет больше страниц, но позволит увидеть отображение всех влияющих на ток контуров (их алгебраические суммы эдс).

3. Самое детальное отображение расчетных токов подразумевает одновременный показ полных описаний всех влияющих на ток контуров (их алгебраические суммы эдс) и показ полных представлений всех коэффициентов Δ_{ij} или K_i . Такое представление результатов возможно лишь для небольших электрических схем.

Именно в этом заключается суть наших предложений по представлению результатов символьного расчета токов.

Сравнение методик нахождения компактных выражений для откликов. При получении символьных выражений в форме (3), минуя трудоемкое преобразование исходного выражения для тока, можно использовать усовершенствованную контурную методику Кирхгофа [3].

Для нахождения числителя методика предусматривает однократное (в отличие от Кирхгофа!) перечисление всех контуров, проходящих через ветвь с искомым током. В методике Кирхгофа и усовершенствованной методике [3], находится непосредственно нужный ток, минуя получение вспомогательных (почти абстрактных) контурных токов.

Независимые контуры нужны для того, чтобы составить систему линейных уравнений по методу контурных токов, но, как показал еще Кирхгоф, этих контуров не достаточно для получения решения топологическим методом, то есть без составления системы уравнений. Очевидно, что оба метода решения приводят к одинаковым результатам

Под весом контура понимается сумма участвующих в нем эдс. Вес контура умножается на определитель производной схемы, которая получена из исходной схемы в результате удаления всех ветвей контура и объединения его узлов. Так находится K_i в формуле (3).

Результирующее выражение числителя представляет собой сумму слагаемых, составленных из двучленных произведений в виде произведения веса очередного контура на соответствующий ему коэффициент K_i . Эту методику несложно реализовать в программе, поскольку не требуется получать исходное выражение отклика каким-либо другим способом, например, программой CIRSYM или методом контурных токов в сочетании с системой Maple.

В работе [3] также приводится дуальная методика (для схем, составленных из проводимостей и источников тока), которая предусматривает перечисление всех сечений, содержащих ветвь с искомым током.

Выводы

1. Предложена методика преобразования путем повторной свертки результатов символьного расчета токов. Методика базируется на использовании результатов расчета, которые могут быть проведены с помощью специализированных электротехнических программ или программ символьной математики.

2. Получаемые результаты отличаются от традиционных выражений тем, что учитывают в явном виде вклад, вносимый в расчетный ток не только токами выбранных независимых контуров, но и токами большего числа контуров электрической схемы, которые включают в себя ветвь, содержащую главную эдс рассчитываемого тока.

3. Формируемые выражения превышают по сложности результаты, получаемые на основе метода контурных токов и последующей свертки, но отличаются четким физическим смыслом и приемлемым размером, несут в себе больше полезной информации для специалистов разных направлений. Эти выражения могут быть получены как с помощью предложенной методики, так и с помощью усовершенствованных правил Кирхгофа [3].

4. Исследования показали, что математический аппарат решения задач данного класса недостаточно разработан – отсутствуют компьютерные программы прямого расчета коэффициентов K_i , минуя трудоемкое преобразование исходных выражений для искомых токов.

Литература

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи.– М.: Высшая школа, 1978.– С. 17.
2. Shagaev A.A. The modelling of a galvanic cell series-connected with an external pure resistance and the source of an arbitrary external polarization // The Journal of Corrosion Science and Engineering.– 2001.– Vol. 3. (<http://www.jcse.org/volume3/paper22/v3p22.php>).
3. Филаретов В.В. Наложение воздействий активных контуров и сечений в электрических цепях // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. / Под ред. В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – Вып. 8. – С. 64–78.

Шагаев Александр Аркадьевич – независимый исследователь, домашний адрес: 660037, г. Красноярск, ул. Коломенская, д. 17а, кв. 6; тел.(8923) 320-99-67; e-mail: alexander-shagaev@yandex.ru

ДИАКОПТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ СХЕМНЫХ МИНОРОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО ЧАСТИЯМ

Е. Р. Бодряков, С. А. Курганов

В методе схемных миноров предложено использовать тождества по теореме Якоби, связывающие миноры определителя между собой, что многократно уменьшает число раскрываемых схемных миноров и повышает быстродействие метода.

Метод схемных миноров позволяет анализировать сложные электрические цепи по частям, при этом в отличие от матричных методов не образуются избыточные взаимно уничтожающиеся слагаемые [1]. Недостатком метода является многократный рост числа схемных миноров, необходимых для получения результата, при увеличении числа полюсов подсхемы. Так, к примеру, для трех-, пяти- и десятиполюсной подсхемы требуется найти 6, 70 и 48620 схемных миноров соответственно [1]. В настоящей статье предлагается способ сокращения числа искомых схемных миноров за счет использования тождеств по теореме Якоби [2], связывающих между собой миноры определителя системы линейных уравнений.

Схемно-минорные тождества по теореме Якоби. По теореме Якоби «минор s -го порядка присоединенной матрицы \tilde{A} равен произведению ($s-1$)-й степени определителя Δ на s -кратное алгебраическое дополнение $\Delta_{i_1 j_1, \dots, i_s j_s}$ данной матрицы A » [2, с. 170]. Порядок матрицы равен n . Индексы i_1, \dots, i_s и j_1, \dots, j_s – любые перестановки из различных целых чисел $1 \dots n$. Присоединенная матрица получается из исходной матрицы заменой элементов a_{ij} алгебраическими дополнениями элементов a_{ji} .

В связи с взаимным соответствием схемы и матрицы ее параметров, построенной непосредственно по законам Кирхгофа или по другим методам на их основе [1], теорема Якоби справедлива и для схемного определителя. При этом входящие в ее текст понятия приобретают следующие особенности. Присоединенная матрица составляется из схемных миноров, соответствующих одноименным матричным алгебраическим дополнениям. S -кратное алгебраическое дополнение – схемный минор (СМ) s -го порядка получается путем подключения к соответствующим полюсам s пар нораторов и нуллаторов. Матричным

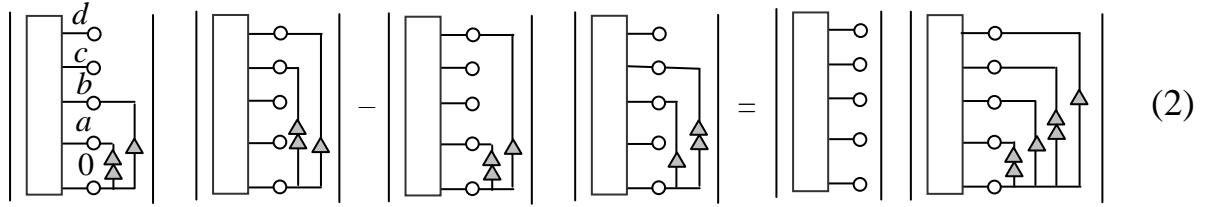
определителем Δ является определитель соответствующей схемы. С учетом этих особенностей и формируются схемно-минорные тождества.

Например, для миноров второго порядка присоединенной матрицы произвольной системы уравнений имеет место следующее тождество Якоби [2]

$$\Delta_{ab}\Delta_{cd} - \Delta_{ad}\Delta_{cb} = \Delta\Delta_{ab,cd}, \quad (1)$$

где a, c и b, d – рассматриваемые номера строк и столбцов матрицы соответственно; Δ – определитель матрицы; Δ_{ij} – алгебраическое дополнение, элемент присоединенной матрицы ($i = a, c; j = b, d$); $\Delta_{ab,cd}$ – двухкратное алгебраическое дополнение исходной матрицы.

Схемно-минорная формула, соответствующая (1), получается путем замены определителя и алгебраических дополнений на схемный определитель и схемные миноры соответственно. При этом схемный минор Δ_{ab} формируется из исходной схемы путем подключения к полюсам a и b относительно базисного полюса норатора и нуллатора соответственно. Для получения схемного минора, соответствующего дополнению $\Delta_{ab,cd}$, необходимо подключить к полюсам a и c нораторы, а к b и d – нуллаторы. Причем элементы, подключенные к полюсам a и b , как и к полюсам c и d , имеют одинаковые номера. Окончательно схемно-минорная формула имеет вид



Общее число схемно-минорных тождеств определяется числом различных схемных миноров порядка от 2 до $n-1$, поскольку для схемных миноров порядка 0, 1 и n в левой и правой частях тождества содержатся совпадающие выражения. В результате число тождеств определяется по формуле:

$$\psi_{n+1} = \sum_{l=2}^{n-1} (C_n^l)^2, \quad (3)$$

где l – индекс суммирования – порядок схемного минора; C_n^l – число сочетаний из n элементов по l ; n – число полюсов подсхемы, не считая базисного узла.

Формула (3) получена из формулы для общего числа схемных миноров $(n+1)$ -полюсника [1] путем выбора схемных миноров 2, 3, ..., $(n-1)$ -го порядка, являющихся зависимыми в силу теоремы Якоби. Так, 9 тождеств для четырехполюсной подсхемы по формуле (3) имеют вид:

Независимые схемные миноры. Число независимых схемных миноров определяется как разность общего числа схемных миноров и числа тождеств (3) или числом СМ нулевого, первого и n -порядка

$$\psi_{n+1}^{\text{H}} = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^n)^2 = n^2 + 2. \quad (5)$$

Это число можно найти также через число СМ ψ_n^{H} для n -полюсника с помощью следующего рекуррентного выражения:

$$\psi_{n+1}^{\text{H}} = \psi_n^{\text{H}} + 2n - 1. \quad (6)$$

Результаты подсчета числа независимых миноров сведены в строку 2 в табл. 1. Как видно, число независимых схемных миноров многократно (в десятки и сотни раз) меньше общего числа схемных миноров (строка 3 в табл. 1). Следовательно, при их использовании затраты на формирование определителя сокращаются многократно.

Таблица 1. Число независимых схемных миноров (СМ) и общее число СМ $(n+1)$ -полюсника

Число полюсов $n+1$	3	4	5	6	7	8	9	10
Число независимых СМ ψ_{n+1}^{H}	5	11	18	27	38	51	66	83
Общее число СМ ψ_{n+1}	6	20	70	252	924	3432	12870	48620

При использовании независимых СМ для формирования символьных схемных функций (ССФ) путем бисекции или объединения подсхем изменяется по сравнению с методом двоичных векторов [1] только алгоритм нахождения символьных выражений СМ. Независимые СМ раскрываются как обычно методом схемных определителей [1], а для остальных требуемых СМ записываются схемно-алгебраические тождества вида (4). Их раскрывать не нужно, и в этом состоит экономия вычислительных затрат.

При анализе электрических схем методом объединения подсхем следует использовать наиболее экономичный способ, основанный на неравновесных СМ и в связи с этим не требующий комбинаторного перебора СМ для определения их совместности [3]. При нахождении для анализируемой схемы одной из ССФ число используемых СМ для отдельных подсхем может быть меньше числа независимых СМ. Это связано с подключением к внешним зажимам схемы нораторов и

нуллаторов, что уменьшает набор СМ. Поэтому для этих подсхем целесообразно получить все искомые СМ путем их прямого раскрытия – без использования тождеств Якоби. Для остальных подсхем необходимо использовать тождества Якоби.

Анализ каскадного соединения подсхем путем их объединения на основе независимых СМ. Требуется получить последовательное символьное выражение передаточной функции по напряжению для каскадного соединения многополюсников (рис.1) на основе независимых СМ и сравнить его характеристики с показателями аналогичного выражения на основе полного набора схемных миноров [1,3].

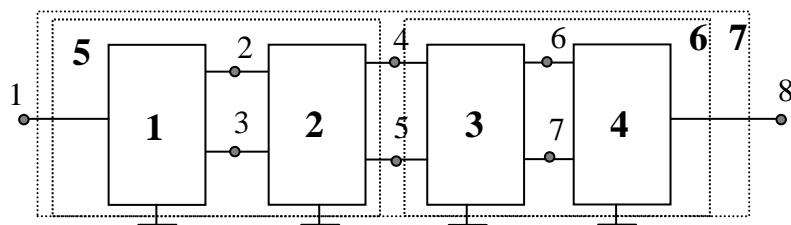


Рис. 1. Схема каскадного соединения многополюсников

Объединение выполняется в следующем порядке (рис. 1 и строки 1 и 2 в табл. 2): подсхемы 1 и 2 образуют подсхему 5, подсхемы 3 и 4 – подсхему 6, а подсхемы 5 и 6 – подсхему 7, которая является исходной схемой. Формулы для СМ объединенных подсхем находятся на основе упомянутых выше неравновесных СМ [3]. Из всех СМ, входящих в эти формулы, раскрываются только независимые СМ. Все остальные требуемые СМ находятся по тождествам Якоби.

Полученная последовательная формула для коэффициента передачи приведена в Приложении. Число раскрываемых СМ в этой формуле приведено в строке 4 из табл. 2. Они являются независимыми СМ и их число взято из строки 2 табл. 1. Число необходимых зависимых СМ, определяемых по тождествам Якоби, находится по формулам объединения. Так, при объединении подсхем 1 и 2 число применяемых формул Якоби равно 9 и 34 соответственно, что следует из формул объединения для подсхемы 5, приведенных в Приложении.

Для сравнения в строке 5 табл. 1 дано число раскрываемых СМ в соответствующей формуле по МДВ [1,3], не использующей тождества Якоби. Число раскрываемых СМ здесь меньше общего числа СМ, указанного в табл. 1, с учетом отмеченного выше сокращенного числа СМ, требуемого при формировании одной ССФ – коэффициента передачи напряжения.

Комбинированный подход, когда используется раскрытие независимых СМ, если их меньше числа требуемых СМ, и применяется прямое раскрытие всех требуемых СМ в противном случае, позволяет также сократить число раскрываемых СМ. Здесь для четырехполюсных подсхем используется прямое раскрытие всех 10-ти требуемых СМ, а для пятиполюсных подсхем – раскрытие 18-ти независимых СМ с последующей записью тождеств Якоби. В результате число раскрываемых СМ удается сократить до 56.

Таблица 2. Сравнительная таблица числа раскрываемых СМ при объединении подсхем с помощью тождеств Якоби и без их использования

№ объединенной подсхемы	5		6		Всего раскрываемых СМ для схемы на рис. 1
№№ объединяемых подсхем	1	2	3	4	
Число полюсов	4	5	5	4	
Число раскрываемых СМ при использовании тождеств Якоби (независимые СМ)	11	18	18	11	58
Число раскрываемых СМ по МДВ [1,3]	10	52	52	10	124

Сравнение вычислительных характеристик символьных откликов для контурной сети, полученных на основе независимых СМ и МДВ [3]. Откликом является ток I в контурной сети на рис. 2 [4]. Искомое выражение представляется в виде отношения определителей схем числителя и знаменателя. Построение схемы знаменателя выполняется на основе исходной схемы путем нейтрализации источника и приемника отклика. Схема числителя находится также из исходной схемы путем замены независимого источника норатором, а приемника отклика – нуллатором [1].

Для нахождения определителя схемы числителя (знаменателя) схема делится по четырем узлам (рис. 2), и используется формула четырехузловой бисекции [1]

$$\begin{aligned} \Delta = & \Delta_1(000000)\Delta_2(111111) + \Delta_1(001001)\Delta_2(110110) - \Delta_1(001010)\Delta_2(110101) \\ & + \Delta_1(001100)\Delta_2(110011) - \Delta_1(010001)\Delta_2(101110) + \Delta_1(010010)\Delta_2(101101) - \\ & - \Delta_1(010100)\Delta_2(101011) + \Delta_1(011011)\Delta_2(100100) - \Delta_1(011101)\Delta_2(100010) + \\ & + \Delta_1(011110)\Delta_2(100001) + \Delta_1(100001)\Delta_2(011110) - \Delta_1(100010)\Delta_2(011101) + \\ & + \Delta_1(100100)\Delta_2(011011) - \Delta_1(101011)\Delta_2(010100) + \Delta_1(101101)\Delta_2(010010) - \end{aligned}$$

$$-\Delta_1(101110)\Delta_2(010001)+\Delta_1\Delta_1(110011)\Delta_2(001100)-\Delta_1(110101)\Delta_2(001010)+\Delta_1(110110)\Delta_2(001001)+\Delta_1(111111)\Delta_2(000000), \quad (7)$$

где Δ_1 и Δ_2 – схемные миноры первой и второй подсхем. Тип минора подсхемы определяется двоичным вектором (ДВ), который приводится в скобках и состоит из двух половин: левой и правой – нораторной и нуллаторной. Нумерация позиций в каждой из двух половин – слева направо цифрами 1, 2 и 3 в соответствии с нумерацией полюсов на рис. 2. Единица в одной из позиций первой (второй) половины ДВ означает, что к полюсу с номером данной позиции подключен норатор (нуллатор) относительно общего нулевого полюса подсхемы. Ноль свидетельствует о том, что соответствующий полюс разомкнут.

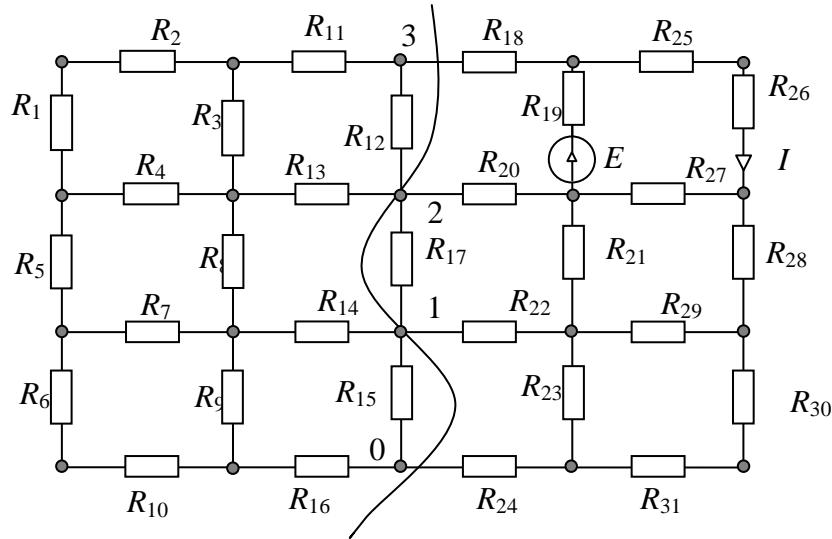


Рис. 2. Контурная сеть для сравнения характеристик символьных выражений тока I

Из 20-ти схемных миноров для каждой подсхемы в бисекционной формуле (7) достаточно найти только 11 независимых миноров (строка 3 в табл. 3): определитель схемы (при разомкнутых полюсах), минор третьего порядка и 9 миноров первого порядка. К примеру, символьное выражение СМ первой подсхемы $\Delta_1(000000)$ для знаменателя находится путем половинной бисекции подсхемы по двум узлам и последующего применения формул выделения сопротивлений, а также повторного применения той же формулы деления по двум узлам [1]. Символьные выражения СМ здесь не приводятся из-за большого объема.

Девять зависимых миноров второго порядка первой подсхемы находятся через независимые схемные миноры с помощью схемно-минорных тождеств (4), для записи которых используются ДВ:

$$\Delta_1(110110)=\frac{\Delta_1(100100)\Delta_1(010010)-\Delta_1(100010)\Delta_1(010100)}{\Delta_1(000000)};$$

$$\begin{aligned}\Delta_1(011110) &= \frac{\Delta_1(010100)\Delta_1(001010) - \Delta_1(010010)\Delta_1(001100)}{\Delta_1(000000)}; \\ \Delta_1(110011) &= \frac{\Delta_1(100010)\Delta_1(010001) - \Delta_1(100001)\Delta_1(010010)}{\Delta_1(000000)}; \\ \Delta_1(011011) &= \frac{\Delta_1(010010)\Delta_1(001001) - \Delta_1(010001)\Delta_1(001010)}{\Delta_1(000000)}; \\ \Delta_1(101110) &= \frac{\Delta_1(100100)\Delta_1(001010) - \Delta_1(100010)\Delta_1(001100)}{\Delta_1(000000)}; \\ \Delta_1(101011) &= \frac{\Delta_1(100010)\Delta_1(001001) - \Delta_1(100001)\Delta_1(001010)}{\Delta_1(000000)}; \\ \Delta_1(110101) &= \frac{\Delta_1(100100)\Delta_1(010001) - \Delta_1(100001)\Delta_1(010100)}{\Delta_1(000000)}; \\ \Delta_1(011101) &= \frac{\Delta_1(010100)\Delta_1(001001) - \Delta_1(010001)\Delta_1(001100)}{\Delta_1(000000)}; \\ \Delta_1(101101) &= \frac{\Delta_1(100100)\Delta_1(001001) - \Delta_1(100001)\Delta_1(001100)}{\Delta_1(000000)}. \end{aligned} \tag{8}$$

Выражения для зависимых СМ второй подсхемы аналогичны (8) и получаются заменой индекса 1 у всех СМ на индекс 2. Сведения о числе арифметических операций в формулах для искомого тока I на основе независимых СМ приведены в строке 1 из табл. 3. Для сравнения в строке 2 даны сведения о числе операций в аналогичной последовательности формул при раскрытии всех 20-ти миноров для каждой подсхемы.

Таблица 3. Число арифметических операций
в формулах для тока I из схемы на рис. 2

Тип формулы	Тип операций	
	аддитивные	мультипликативные
Бисекционная с подформулами на основе независимых СМ	2176	1180
Бисекционная с подформулами по МДВ [1]	3983	2282
Единая формула по программе <i>CIRSYMD</i>	19662	10586

Последовательные формулы на основе независимых СМ и полного набора СМ тождественны. Однако число мультипликативных и

аддитивных операций в формуле на основе независимых СМ в 1,8 и 1,9 раз соответственно меньше, чем в формуле, полученной раскрытием всех СМ.

Следует отметить, что искомое символьное решение для тока не было получено с помощью известной математической системы Maple 11 [5] из-за очень больших затрат времени. Более 1,5 часов работы компьютера с процессором частотой 2 ГГц не хватило, чтобы решить символьную систему 12-ти контурных уравнений для анализируемой схемы как методом исключения Гаусса, так и методом Крамера. В то же время решение получено в виде единого выражения в программе *CIRSYMD* [6], использующей формулы бисекции вида (7) с раскрытием всех схемных миноров. Характеристики этого выражения приведены в строке 3 табл. 3 и, естественно, уступают характеристикам формул, содержащим подформулы (строки 1 и 2).

Приложение. Последовательная формула для коэффициента передачи напряжения на основе независимых СМ. Искомая формула имеет вид:

$$K_{EU} = \frac{U}{E} = \frac{\Delta_{7(1818)}(1001)}{\Delta_{7(1010)}},$$

где цифры в квадратных скобках при СМ – его двоичный вектор (ДВ); цифры в индексе СМ – номера позиций в ДВ, соответствующие номерам полюсов подсхемы, указываются при первом упоминании СМ.

$$\begin{aligned} \Delta_{7(1818)}(1001) &= -\Delta_{6(845845)}(001100)\Delta_{5(145145)}(110011) + \Delta_6(010100)\Delta_5(101011) + \\ &\quad + \Delta_6(011101)\Delta_5(100010) - \Delta_6(011110)\Delta_5(100001); \\ \Delta_{7(1818)}(1010) &= \Delta_{5(145145)}(100100)\Delta_{6(845845)}(011011) + \Delta_5(101101)\Delta_6(010010) - \\ &\quad - \Delta_5(101110)\Delta_6(010001) - \Delta_5(110101)\Delta_6(001010) + \Delta_5(110110)\Delta_6(001001) \\ &\quad + \Delta_5(111111)\Delta_6(000000); \\ \Delta_{5(145145)}(000000) &= \Delta_{1(123123)}(000000)\Delta_{2(54235423)}(00110011) + \\ &\quad + \Delta_1(001001)\Delta_2(00100010) - \Delta_1(001010)\Delta_2(00100001) - \\ &\quad - \Delta_1(010001)\Delta_2(00010010) + \Delta_1(010010)\Delta_2(00010001) + \\ &\quad + \Delta_1(011011)\Delta_2(00000000); \\ \Delta_5(001001) &= \Delta_1(000000)\Delta_2(10111011) + \Delta_1(001001)\Delta_2(101110010) - \\ &\quad - \Delta_1(001010)\Delta_2(10101001) - \Delta_1(010001)\Delta_2(10011010) + \\ &\quad + \Delta_1(010010)\Delta_2(10010101) + \Delta_1(011011)\Delta_2(10001000); \\ \Delta_5(001010) &= \Delta_1(000000)\Delta_2(10110111) + \Delta_1(001001)\Delta_2(10100110) - \\ &\quad - \Delta_1(001010)\Delta_2(10100101) - \Delta_1(010001)\Delta_2(10010110) + \\ &\quad + \Delta_1(010010)\Delta_2(10010101) + \Delta_1(011011)\Delta_2(10000100); \\ \Delta_5(001100) &= -\Delta_1(001100)\Delta_2(10100011) + \Delta_1(010100)\Delta_2(10010011) + \\ &\quad + \Delta_1(011101)\Delta_2(10000010) - \Delta_1(011110)\Delta_2(10000001); \\ \Delta_5(010001) &= \Delta_1(000000)\Delta_2(01111011) + \Delta_1(001001)\Delta_2(01101010) - \\ &\quad - \Delta_1(001010)\Delta_2(01101001) - \Delta_1(010001)\Delta_2(01011010) + \\ &\quad + \Delta_1(010010)\Delta_2(01011001) + \Delta_1(011011)\Delta_2(01001000); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_5(010010) &= \Delta_1(000000)\Delta_2(01110111) + \Delta_1(001001)\Delta_2(01100110) - \\
&- \Delta_1(001010)\Delta_2(01100101) - \Delta_1(010001)\Delta_2(01010110) + \\
&+ \Delta_1(010010)\Delta_2(01010101) + \Delta_1(011011)\Delta_2(01000100); \\
\Delta_5(010100) &= -\Delta_1(001100)\Delta_2(01100011) + \Delta_1(010100)\Delta_2(01010011) + \\
&+ \Delta_1(011101)\Delta_2(01000010) - \Delta_1(011110)\Delta_2(01000001); \\
\Delta_5(100010) &= -\Delta_1(110011)\Delta_2(00100100) + \Delta_1(101011)\Delta_2(00010100) + \\
&+ \Delta_1(100010)\Delta_2(00110110) - \Delta_1(10001)\Delta_2(00110101); \\
\Delta_5(100001) &= -\Delta_1(110011)\Delta_2(00101000) + \Delta_1(101011)\Delta_2(00011000) + \\
&+ \Delta_1(100010)\Delta_2(00111010) - \Delta_1(10001)\Delta_2(00111001); \\
\Delta_5(100100) &= \Delta_1(100100)\Delta_2(00110011) + \Delta_1(101101)\Delta_2(00100010) - \\
&- \Delta_1(101110)\Delta_2(00100001) - \Delta_1(110101)\Delta_2(00010010) + \\
&+ \Delta_1(110110)\Delta_2(00010001) + \Delta_1(111111)\Delta_2(00000000); \\
\Delta_5(111111) &= \Delta_1(100100)\Delta_2(11111111) + \Delta_1(101101)\Delta_2(11101110) - \\
&- \Delta_1(101110)\Delta_2(11101101) - \Delta_1(110101)\Delta_2(11011110) + \\
&+ \Delta_1(110110)\Delta_2(11011101) + \Delta_1(111111)\Delta_2(11001100);
\end{aligned}$$

$$\Delta_{5(145145)}(110110) = \frac{\Delta_5(100100)\Delta_5(010010) - \Delta_5(100010)\Delta_5(010100)}{\Delta_5(000000)};$$

$$\Delta_5(110011) = \frac{\Delta_5(100010)\Delta_5(010001) - \Delta_5(100001)\Delta_5(010010)}{\Delta_5(000000)};$$

$$\Delta_5(101110) = \frac{\Delta_5(100100)\Delta_5(001010) - \Delta_5(100010)\Delta_5(001100)}{\Delta_5(000000)};$$

$$\Delta_5(101011) = \frac{\Delta_5(100010)\Delta_5(001001) - \Delta_5(100001)\Delta_5(001010)}{\Delta_5(000000)};$$

$$\Delta_5(110101) = \frac{\Delta_5(100100)\Delta_5(010001) - \Delta_5(100001)\Delta_5(010100)}{\Delta_5(000000)};$$

$$\Delta_5(101101) = \frac{\Delta_5(100100)\Delta_5(001001) - \Delta_5(100001)\Delta_5(001100)}{\Delta_5(000000)}.$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{6(845845)}(000000) &= \Delta_{4(867867)}(000000)\Delta_{3(54675467)}(00110011) + \\
&+ \Delta_4(001001)\Delta_3(00100010) - \Delta_4(001010)\Delta_3(00100001) - \\
&- \Delta_4(010001)\Delta_3(00010010) + \Delta_4(010010)\Delta_3(00010001) + \\
&+ \Delta_4(011011)\Delta_3(00000000); \\
\Delta_6(001001) &= \Delta_4(000000)\Delta_3(10111011) + \Delta_4(001001)\Delta_3(101110010) - \\
&- \Delta_4(001010)\Delta_3(10101001) - \Delta_4(010001)\Delta_3(10011010) + \Delta_4(010010)\Delta_3(100101) + \\
&+ \Delta_4(011011)\Delta_3(10001000); \\
\Delta_6(001010) &= \Delta_4(000000)\Delta_3(10110111) + \Delta_4(001001)\Delta_3(10100110) - \\
&- \Delta_4(001010)\Delta_3(10100101) - \Delta_4(010001)\Delta_3(10010110) + \\
&+ \Delta_4(010010)\Delta_3(10010101) + \Delta_4(011011)\Delta_3(10000100); \\
\Delta_6(001100) &= -\Delta_4(001100)\Delta_3(10100011) + \Delta_4(010100)\Delta_3(10010011) + \\
&+ \Delta_4(011101)\Delta_3(10000010) - \Delta_4(011110)\Delta_3(10000001); \\
\Delta_6(010001) &= \Delta_4(000000)\Delta_3(01111011) + \Delta_4(001001)\Delta_3(01101010) - \\
&- \Delta_4(001010)\Delta_3(01101001) - \Delta_4(010001)\Delta_3(01011010) + \\
&+ \Delta_4(010010)\Delta_3(01011001) + \Delta_4(011011)\Delta_3(01001000);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_6(010010) &= \Delta_4(000000)\Delta_3(01110111) + \Delta_4(001001)\Delta_3(01100110) - \\ &- \Delta_4(001010)\Delta_3(01100101) - \Delta_4(010001)\Delta_3(01010110) + \\ &+ \Delta_4(010010)\Delta_3(01010101) + \Delta_4(011011)\Delta_3(01000100); \\ \Delta_6(010100) &= -\Delta_4(001100)\Delta_3(01100011) + \Delta_4(010100)\Delta_3(01010011) + \\ &+ \Delta_4(011101)\Delta_3(01000010) - \Delta_4(011110)\Delta_3(01000001);\end{aligned}$$

$$\Delta_6(845845)(011101) = \frac{\Delta_6(010100)\Delta_6(001001) - \Delta_6(010001)\Delta_6(001100)}{\Delta_6(000000)};$$

$$\Delta_6(011011) = \frac{\Delta_6(010010)\Delta_6(001001) - \Delta_6(010001)\Delta_6(001010)}{\Delta_6(000000)};$$

$$\Delta_6(011110) = \frac{\Delta_6(010100)\Delta_6(001010) - \Delta_6(010010)\Delta_6(001100)}{\Delta_6(000000)}.$$

Вывод. Применение независимых схемных миноров и схемно-алгебраических формул на основе теоремы Якоби позволяет в десятки и сотни раз сократить число искомых схемных миноров и значительно уменьшить вычислительные затраты при анализе электрических цепей по частям.

Литература

1. Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям//Электричество.–2001.–№8.–С.33–42.
2. Сигорский В.П. Анализ электронных схем.– Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР.– 1963.– 176 с.
3. Курганов С.А., Филаретов В.В. Применение неравновесных схемных миноров для построения формул объединения подсхем // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Междунар. сб. научн. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2009.– Вып.7.– С.156–162.
4. Крон Г. Тензорный анализ сетей.– М.: Сов. радио.– 1978.– 720с.
5. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании.– М.: СОЛООН-Пресс, 2006.–720 с.
6. Вольнов В.Е., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ сложных электрических цепей и сетей с помощью программы *CIRSYM* // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. межд. конф. КЛИН-2004.– Ульяновск: УлГТУ, 2004.– Т.4.– С.75–80.

Бодряков Егор Романович – студент 2-курса Энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ); e-mail: egor.bodryakov@yandex.ru

Курганов Сергей Александрович – д.т.н., профессор кафедры «Электроснабжение» УлГТУ; служебный тел. 77-81-05; e-mail: sak@ulstu.ru.

ДУАЛЬНАЯ СХЕМНО-МИНОРНАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО ЧАСТЯМ

Е. Р. Бодряков, С. А. Курганов

Схемно-минорная формула для определителя схемы, разделенной на две подсхемы по узлам $n, n-1, \dots, 0$, имеет вид [1]

$$\Delta = \sum_{l=0}^v (-1)^{\sigma_l} \Delta_1(b_l) \Delta_2(\bar{b}_l), \quad (1)$$

где σ_l – показатель знака l -го слагаемого – сумма ненулевых позиций двоичного вектора (ДВ) b_l размерностью $2n$; $\Delta_1(b_l)$ – минор первой подсхемы, соответствующий вектору b_l ; $\Delta_2(\bar{b}_l)$ – минор второй подсхемы, соответствующий ДВ \bar{b}_l – дополнению ДВ b_l .

ДВ b_l состоит из двух подвекторов, позиции каждого из которых нумеруются от 1 до n . Единицы в позициях первого и второго подвекторов означают, что к соответствующим полюсам подключаются нораторы и нуллаторы. Нули означают, что рассматриваемые полюса являются разомкнутыми. Формирование ДВ состоит в выборе $2n$ -разрядных двоичных чисел с одинаковым количеством единиц в подвекторах.

Число двоичных векторов подсхемы находится по формуле

$$v = \sum_{l=0}^n \{nl\}^2, \quad (2)$$

где $\{nl\}$ – число сочетаний из n элементов по l .

Графическое изображение всех 6-ти схемных миноров трехполюсной подсхемы дано на рис. 1[1].

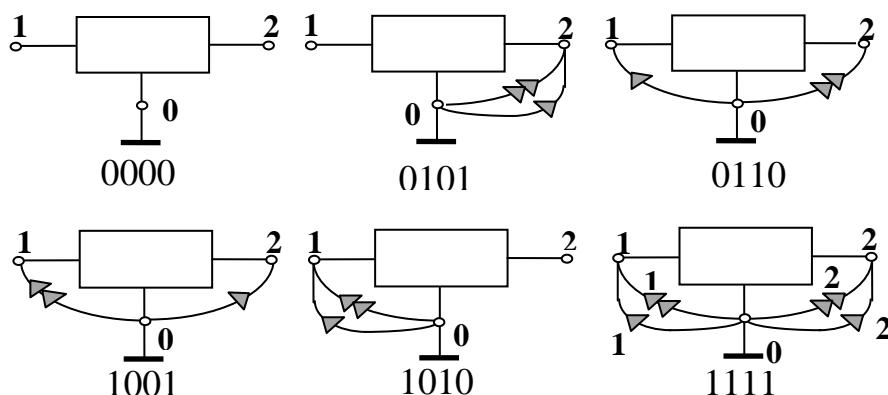


Рис.1. Схемные миноры трехузловой подсхемы для формулы (1)
с соответствующими ДВ

В настоящей работе предлагается *дуальная по отношению к (1) схемно-минорная формула*. Для ее формирования все полюсы подсхем замыкаются идеальными проводниками на базисный узел, а нораторы и нуллаторы подсоединяются в разрыв этих проводников.

Для отображения схемного минора вводится минорный вектор (МВ), имеющий размерность $2n$, где n – число внешних узлов подсхемы, не считая базисного узла. Этот вектор аналогичен ДВ и показывает, какие элементы подключены к полюсам подсхемы. При этом идеальный проводник обозначается нулем, а норатор и нуллатор – единицей в первой и второй половине МВ соответственно. Минорные векторы получаются так же, как и ДВ.

Предлагаемая схемно-минорная формула имеет вид:

$$\Delta = \sum_{l=0}^v (-1)^{\sigma_l} \Delta_1(d_l) \Delta_2(\bar{d}_l) \quad (3)$$

где σ_l – показатель знака l -го слагаемого – сумма ненулевых позиций МВ d_l ; $\Delta_1(d_l)$ – минор первой подсхемы, соответствующий МВ d_l ; $\Delta_2(\bar{d}_l)$ – минор второй подсхемы, соответствующий МВ \bar{d}_l – дополнению МВ d_l ; v – число МВ подсхемы, находится, как и для ДВ, из выражения (2).

Для трехполюсной подсхемы все шесть миноров изображены на рис.2.

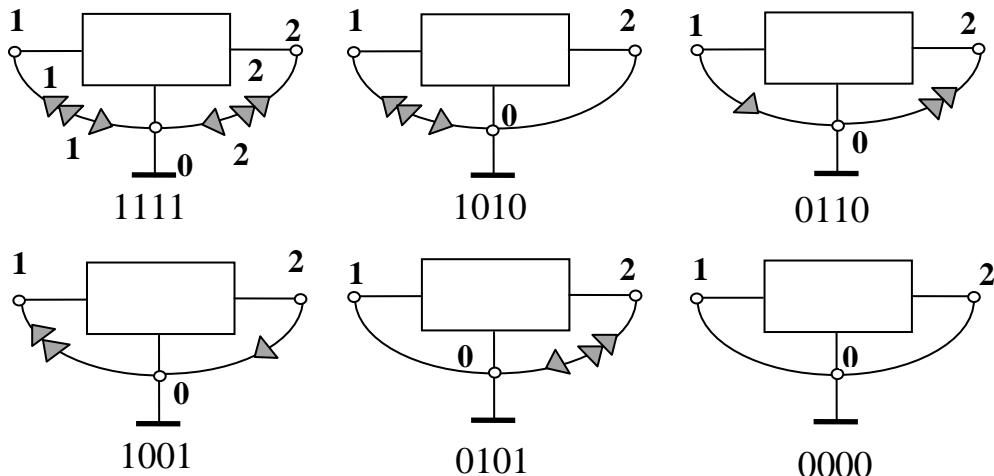


Рис. 2. Все миноры трехузловой подсхемы для дуальной схемно-минорной формулы с соответствующим МВ

Как видно, в симметричных минорах коды МВ противоположны кодам ДВ – преобразуются путем взаимной замены нулей и единиц. Несимметричные миноры имеют одинаковые МВ и ДВ – 0110 и 1001, но противоположны по знаку. Знаки соответствующих слагаемых в формуле (3) – отрицательные. Таким образом, определитель схемы, записанный с помощью МВ, имеет вид

$$\Delta = \Delta_1(0000)\Delta_2(1111) + \Delta_1(0101)\Delta_2(1010) - \Delta_1(0110)\Delta_2(1001) - \Delta_1(1001)\Delta_2(0110) + \Delta_1(1010)\Delta_2(0101) + \Delta_1(1111)\Delta_2(0000). \quad (4)$$

Формула (4) тождественна формуле, использующей схемные миноры на основе ДВ (рис. 1) [1].

Таким образом, при генерации схемно-алгебраических выражений на основе МВ сначала ко всем полюсам подсхем подсоединяются относительно базисного узла идеальные проводники. Единица в i -й

позиции первого и второго подвектора МВ соответствует подключению норатора и нуллатора в разрыв соответствующего проводника, причем направление норатора всегда выбирается к узлу, а направление нуллатора – от узла. Если в разрыв одной и той же перемычки включены норатор и нуллатор, то такое соединение, как известно, соответствует разомкнутому полюсу. Положительный (отрицательный) знак слагаемых в (3) выбирается в случае четной (нечетной) суммы порядковых номеров ненулевых позиций в соответствующем МВ.

Построение схемных миноров для четырехполюсной подсхемы. Применим выражение (3) для получения формулы биссекции по четырем узлам. Минорные векторы такой подсхемы и знаки соответствующих слагаемых приведены в табл. 1.

Таблица 1. Минорные векторы для четырехполюсной подсхемы:
первые три узла (сверху-вниз) соответствуют нораторам, а вторые – нуллаторам

№	№ минорного вектора (МВ)																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
3	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1
2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1
3	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1
Знак	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+	-	+	-	+	-	+	-	+	+

Схемно-алгебраическая формула, построенная на основе (3) по минорным векторам в табл. 1, также тождественна соответствующей формуле, полученной из (1) [1]. Для подсхемы с произвольным числом полюсов миноры получаются аналогично.

Вывод. Предложена дуальная схемно-минорная формула, использующая для построения схемных миноров, в отличие от метода двоичных векторов, идеальные проводники, замыкающие все полюса подсхемы с базисным узлом. При этом нораторы и нуллаторы включаются в разрыв этих проводников. Формула представляет теоретический интерес.

Литература

- Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электрических цепей по частям // Электричество. – 2001. – № 8. – С. 33–42.

ФОРМИРОВАНИЕ СИМВОЛЬНЫХ СХЕМНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОСНОВЕ НАРАЩИВАНИЯ ВЫРАЖЕНИЙ

С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Предложены формулы для наращивания полиномиальных коэффициентов схемных функций при добавлении к схеме новых элементов. Применение формул позволяет сэкономить вычислительные затраты.

Формирование полиномиальных символьных схемных функций представляет собой сложную задачу, поскольку объем полиномиальных выражений многократно превышает объем соответствующих символьных выражений, в которых отсутствует группировка слагаемых по степеням полинома. Это обусловлено тем, что полиномиальные коэффициенты не являются определителями той или иной схемы, что не позволяет использовать правила оптимальной свертки выражения за исключением правила максимального участия символа. Применять даже это правило к абстрактному выражению, которым является выражение полиномиального коэффициента, затруднительно, потому что для выбора символа с максимальным участием приходится рассматривать все используемые символы и нельзя ограничиться нахождением элемента, инцидентного узлу с минимальной степенью.

В то же время полиномиальные схемные функции эффективны для исследования общих свойств электрических цепей, а символьно-численные функции произвольной свертки, в которых аргументом является частота, экономичны при частотном анализе. «Как показывает практика вычислений, применение резольвенты в 3–5 раз эффективнее по сравнению с обычными методами частотного анализа (решение систем уравнений)» [1, с.132]. Поэтому задача построения символьных функций является актуальной.

Известен метод независимого формирования каждого полиномиального коэффициента, предусматривающий образование коэффициента заданной степени в процессе разложения схемного определителя по формулам выделения параметров [2]. При этом обеспечивается довольно компактная свертка коэффициента, минуя рассмотрение развернутого выражения. Однако такая процедура напоминает работу скульптора, который из гранитной глыбы (схемного определителя) вырубает ту или иную скульптуру (полиномиальный коэффициент).

В данной статье рассматривается модификация этого метода, предусматривающая формирование полиномиальных коэффициентов по частям по мере последовательного дополнения некоторой начальной

схемы другими элементами. Такая возможность вытекает из используемых при разложении определителя формул выделения, в которых первое слагаемое содержит выделяемый параметр в качестве сомножителя, а во втором слагаемом этот параметр отсутствует. Отличие предлагаемой модификации заключается в том, что указанные слагаемые меняются местами, то есть осуществляется «наращивание» схемы новыми элементами. Аналогичный подход используется для коррекции символьных схемных функций ССФ в статье [3] из настоящего сборника.

Управляемые источники и формулы выделения их параметров. В практических схемах обычно используются четыре типа управляемых источников (УИ): 1) источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН); 2) источник тока, управляемый током (ИТУТ); 3) источник напряжения, управляемый током (ИНУТ); 4) источник тока, управляемый напряжением (ИТУН). Последние два типа источников обобщают обычные сопротивление и проводимость при последовательном и параллельном соединении элементов, образующих ИНУТ и ИТУН, соответственно.

В 1977 году Хашемян [4] предложил формулу выделения параметра произвольного УИ на основе направленного нумерованного нуллора. В соответствии с этой формулой определитель схемы

$$\Delta = \chi \Delta(\text{УИ} \Rightarrow \text{нуллор}) + \Delta(\chi=0), \quad (1)$$

где χ – параметр УИ; $\Delta(\text{УИ} \Rightarrow \text{нуллор})$ – определитель исходной схемы, в которой УИ заменен на нуллор, причем управляемая ветвь – на норатор, а управляющая ветвь – на нуллатор; $\Delta(\chi=0)$ – определитель исходной схемы, в которой нейтрализован УИ.

Хашемян использовал формулу (1) для одновременного разложения схемного определителя по параметрам всех n УИ, что требует перебора 2^n слагаемых и не обеспечивает формирование оптимальных по вычислительной сложности выражений. Формула Хашемяна не была востребована специалистами. Только через 20 лет [5] было предложено рекурсивное использование формулы (1). Это позволило ей стать пятой формулой метода схемных определителей [6].

При использовании формулы (1) для различных типов УИ применяются условия вырождения схемы и нейтрализации элементов, рассмотренные в табл. 1. Генератором напряжения (тока) называется управляемая ветвь ИНУН или ИНУТ (ИТУН или ИТУТ) соответственно. Приемником напряжения (тока) называется разомкнутая (короткозамкнутая) ветвь, являющаяся управляющей ветвью ИНУН или ИТУН (ИНУТ или ИНУТ) соответственно.

Как видно из второго и третьего столбцов табл. 1, генератор и приемник любого типа обладают противоположными свойствами при объединении соответствующих узлов (превращению в петлю) и размыкании. В одном случае это приводит к вырождению элемента, а

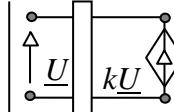
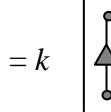
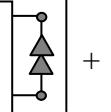
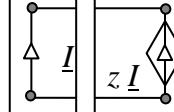
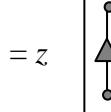
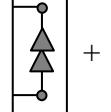
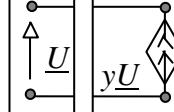
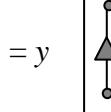
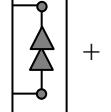
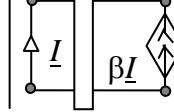
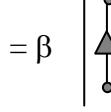
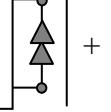
следовательно, и схемы, в которой он находится. В другом случае элемент перестает оказывать влияние на схему, то есть оказывается нейтрализованным. Нейтрализация равносильна присвоению параметру элемента значения, равного нулю, и исключению элемента из схемы в соответствии с его физическими свойствами либо путем стягивания (замены идеальным проводником), либо путем удаления. В отличие от удаления стягивание элемента выполняется двумя операциями: 1) удалением элемента из схемы; 2) объединением соответствующих узлов.

Таблица 1. Условия вырождения схемы и нейтрализации элементов

Элемент схемы	Замыкание	Размыкание
у-ветвь	Нейтрализация	Выделение u
z -ветвь	Выделение z	Нейтрализация
Генератор E	Вырождение	Нейтрализация
Приемник I	Вырождение	Нейтрализация
Генератор J	Нейтрализация	Вырождение
Приемник U	Нейтрализация	Вырождение
Норатор или генератор НУИ	Вырождение	Вырождение
Нуллатор или приемник НУИ	Вырождение	Вырождение

Схемно-алгебраические выражения, иллюстрирующие формулу (1) для различных типов УИ, приводятся в табл. 2.

Таблица 2. Формулы выделения параметров управляемых источников

№ п/п	Тип управляемого источника	Схемно-алгебраическое выражение
1	ИНУН	 = k  + 
2	ИНУТ	 = z  + 
3	ИТУН	 = y  + 
4	ИТУТ	 = β  + 

Неудаляемый управляемый источник. В соответствии с формулой (1) нуллор формально имеет параметр, равный единице. В [7] предложен другой аномальный элемент – неудаляемый управляемый источник (НУИ) – параметр которого может быть равным параметру любого элемента, который для исключения из схемы нужно либо замкнуть, либо разомкнуть. Генератор и приемник, образующие НУИ, аналогично норатору и нуллатору, нельзя ни замыкать, ни размыкать. Именно поэтому аномальный управляемый источник получил название неудаляемого УИ.

Неявная формула выделения на основе НУИ отличается от формулы (1) первым слагаемым и имеет вид

$$\Delta = \Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ}) + \Delta(\chi = 0), \quad (2)$$

где $\Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ})$ – определитель исходной схемы, в которой УИ заменен на НУИ, причем генератор УИ – на генератор НУИ, а приемник УИ – на приемник НУИ.

Определители простейших схем с нуллором и НУИ записаны на рис. 1. Далее будем рассматривать нуллор как частный случай НУИ при $\chi=1$ и использовать это обобщающее название.



Рис. 1. Простейшие схемы с нуллором и НУИ

В результате стягивания и удаления ветвей могут образоваться вырожденные схемы, определитель которых тождественно равен нулю, что упрощает разложение определителей. Обобщенный критерий вырождения формулируется следующим образом.

Теорема о вырождении. Произвольная линейная электрическая схема является вырожденной при выполнении хотя бы одного из трех топологических условий: 1) схема несвязна; 2) в схеме имеется хотя бы один контур, образованный исключительно генераторами напряжения и ГНУИ или исключительно приемниками тока и ПНУИ; 3) схема содержит сечение, включающее только генераторы тока и ГНУИ или только приемники напряжения и ПНУИ. В частности, к вырожденным схемам относятся схемы как с разомкнутым, так и замкнутым генератором или приемником НУИ.

Отличия формул (1) и (2) заключаются в том, что формула (2) предназначена для формирования более компактного выражения определителя на основе рекурсии и удобна для компьютерной реализации. Как правило, при разложении схемных определителей не следует выносить за скобки параметр УИ, поскольку это приводит к появлению в конце подвыражения избыточного умножения на 1 или -1 . Для уменьшения вычислительной сложности формируемых выражений целесообразно завершать подвыражения умножением на χ или $-\chi$. Первые версии программы генерации оптимальных выражений схемных определителей CIRSYM (Circuit Symbol) появились вслед за опубликованием формулы (2) [7]. Преимущества формулы (2) этим не исчерпываются.

Формулы добавления параметров. В формуле (2) можно поменять местами слагаемые и тогда формула выделения примет вид формулы добавления

$$\Delta = \Delta(\chi = 0) + \Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ}) \quad (3)$$

С помощью формулы (3) может быть реализована процедура дополнения коэффициентов полиномиального определителя слагаемыми, содержащими параметр χ . Схемно-алгебраические выражения формулы (3) сведены в табл. 3.

Таблица 3. Формулы добавления параметров управляемых источников

№	Тип управляемого источника	Схемно-алгебраическое выражение
1	ИНУН	= + k
2	ИНУТ	= + z
3	ИТУН	= + y
4	ИТУТ	= + β

В качестве параметра χ может выступать параметр не только УИ, но и произвольного линейного элемента (табл. 4). Например, индуктивное сопротивление pL может быть задано встречным соединением генератора и приемника НУИ с параметром pL . Емкостная проводимость pC отображается на схеме, соответствующей второму слагаемому выражения (2), параллельным и одинаково направленным соединением генератора и приемника НУИ с параметром pC .

Таблица 4. Формулы добавления параметров двухполюсников

№	Тип элемента	Исходная схема	Схемно-алгебраическая формула для добавления параметра
1	Проводимость		
2	Сопротивление		

Формула (3) может быть использована при структурном синтезе электрических цепей [8], что позволит не формировать схемный определитель заново после смены положения элемента, а добавлять новые слагаемые к единожды сформированному полиномиальному выражению, в котором не учтен добавляемый элемент. При этом параметр добавляемого элемента будет сохраняться на самой схеме, а при компьютерной реализации – в том же формате, что и остальные элементы схемы. Это обеспечит желаемый порядок разложения схемного определителя во втором слагаемом формулы (2), минимизировав количество скобок и множителей вида 1 и -1 .

В случае рекурсивного применения формулы (3) второй сомножитель первого слагаемого автоматически заключается в скобки, хотя в этом сомножителе могут быть другие, кроме χ , общие множители. Эти общие множители могут быть записаны перед единственной парой скобок и легко распознаются на схеме, поскольку соответствуют последовательным и параллельным соединениям генераторов и приемников НУИ (рис. 2).



Рис. 2. Образование короткозамкнутых и разомкнутых ветвей с выделением параметров

Для образования короткозамкнутых и разомкнутых ветвей в соответствии с рис. 2 могут потребоваться следующие правила: 1) изменение ориентации у генератора НУИ или у приемника НУИ влечет изменение знака определителя этой схемы; 2) взаимная замена параметров у двух генераторов НУИ или у двух приемников НУИ также вызывает изменение знака определителя.

Начальная схема для наращивания. Применять формулу (3) можно, начиная с пустой схемы, то есть схемы без элементов. По мере добавления элементов наращиваемая схема становится невырожденной – в схемном определителе появляется хотя бы один полиномиальный коэффициент. Чтобы предыдущая схема являлась некоторым приближением последующей, целесообразно начинать наращивание со схемы, представляющей собой дерево с максимальным количеством емкостей. Таким образом, исходное приближение будет задавать максимальную степень полинома, а последующие полиномиальные определители будут уточнять предыдущие.

Осуществляя первоочередное добавление параметров с наибольшим значением, можно «выращивать» промежуточные схемы, полиномиальные определители которых с достаточной точностью моделируют исходную схему, то есть являются хорошим приближением. Аппроксимированные (приближенные) символьные выражения схемных определителей могут быть использованы для оценочных расчетов и многовариантных вычислений в некотором диапазоне изменений параметров и воздействий. Например, при степенных воздействиях некоторые полиномиальные коэффициенты не будут оказывать влияния на отклик, соответственно, элементы, порождающие эти коэффициенты, могут не учитываться в схеме.

Пример формирования ССФ путем последовательного добавления элементов. Требуется оценить влияние входного и выходного сопротивлений усилителя напряжения на полиномиальную функцию $K(s)=U_{\text{вых}}(s)/U_{\text{вх}}(s)$ ARC-фильтра низких частот (рис. 3,а) [9]. Схема замещения фильтра дана на рис. 3,б, где входное и выходное сопротивления усилителя напряжения обозначены как R_3 и R_4 .

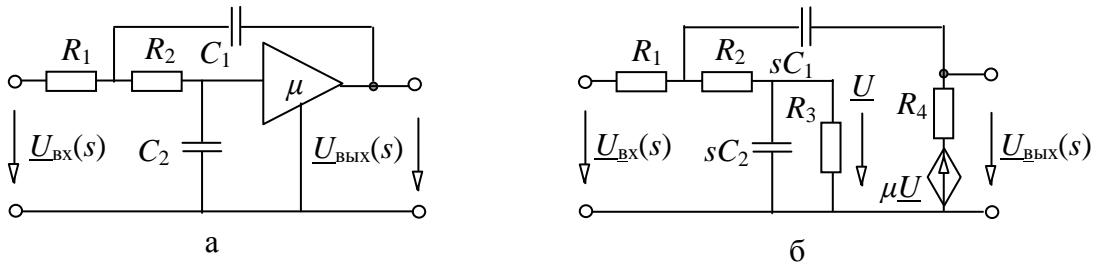


Рис. 3. ARC-фильтр: принципиальная схема (а); операторная схема замещения (б)

По условию задачи требуется построить 4 функции передачи напряжения K' , K'' , K''' и K , содержащие следующие элементы из схемы замещения усилителя: 1) ИНУН с параметром μ ; 2) μ и сопротивление R_3 ; 3) μ и сопротивление R_4 , и 4) μ , R_3 и R_4 . Задачу решается соответственно в четыре этапа.

На первом этапе получим операторную функцию K' для схемы с усилителем, содержащим только ИНУН. Для этого сопротивление R_3 на рис. 3,б удаляется, а сопротивление R_4 заменяется идеальным проводником. Коэффициент передачи напряжения находится в виде отношения определителей схем числителя и знаменателя. Выражение знаменателя найдено в [3]. Выражение числителя формируется следующим образом:

$$N' = \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \text{---} \\ R_2 \\ \text{---} \\ sC_1 \\ \text{---} \\ sC_2 \\ \text{---} \\ \mu U \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \text{---} \\ R_2 \\ \text{---} \\ sC_1 \\ \text{---} \\ sC_2 \\ \text{---} \\ \mu \\ \text{---} \\ 1 \end{array} \right| = \mu. \quad (4)$$

Для раскрытия определителя (4) использовалась неявная формула (2) выделения параметра ИНУН и упомянутый выше алгоритм нахождения k -го полиномиального коэффициента путем первоочередного рекурсивного выделения реактивных элементов [2]. При этом ненулевым полиномиальным коэффициентом оказался только один коэффициент – перед нулевой степенью оператора s . При нахождении которого применялись следующие формулы: нейтрализации сопротивлений, последовательных норатору (нуллатору); нейтрализации проводимости, параллельной приемнику НУИ; определителя контура из проводимости, а также правила переименования аномальных элементов и преобразования параллельного соединения норатора и нуллатора.

С учетом упомянутого выражения знаменателя и числителя (4) полиномиальная функция передачи напряжения имеет вид

$$K'(s) = \frac{N'(s)}{D'(s)} = \frac{\mu}{s^2 C_1 C_2 R_1 R_2 + s[C_1 R_1(1-\mu) + C_2(R_1 + R_2)] + 1} = \\ = \frac{a'_0}{b'_2 s^2 + b'_1 s + b'_0}. \quad (5)$$

На втором этапе находится функция K'' с использованием выражения (5) и добавлением сопротивления R_3 по САФ из строки 1 в табл. 3 из упомянутой выше статьи в настоящем сборнике [3]. Получающееся при этом схемно-алгебраическое выражение раскрывается аналогично (4).

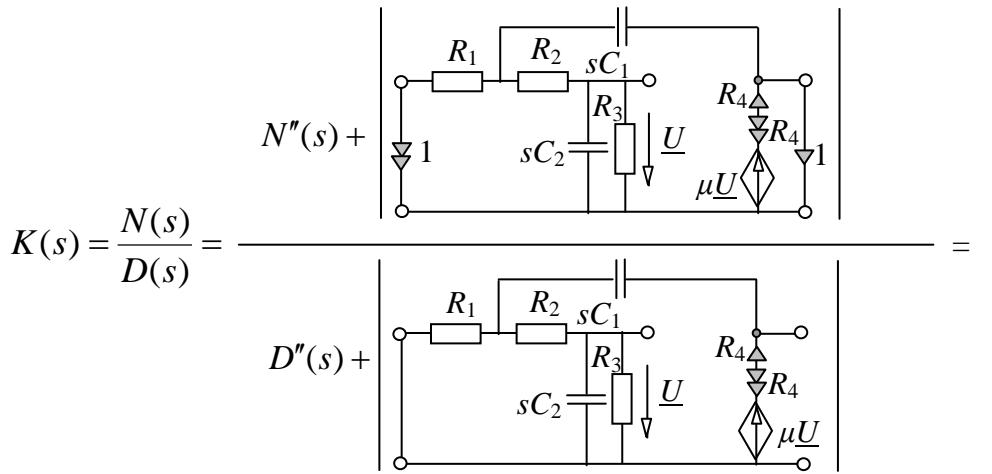
$$R_3 N'(s) + \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \parallel \\ R_2 \\ \parallel \\ sC_1 \\ \parallel \\ sC_2 \\ \parallel \\ U \\ \downarrow \\ \mu U \end{array} \right| = \\ K''(s) = \frac{N''(s)}{D''(s)} = \frac{R_3 D'(s) + \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \parallel \\ R_2 \\ \parallel \\ sC_1 \\ \parallel \\ sC_2 \\ \parallel \\ U \\ \downarrow \\ \mu U \end{array} \right|}{R_3 N'(s) + \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \parallel \\ R_2 \\ \parallel \\ sC_1 \\ \parallel \\ sC_2 \\ \parallel \\ U \\ \downarrow \\ \mu U \end{array} \right|} = \\ = \frac{R_3 a'_0}{R_3 b'_2 s^2 + R_3 b'_1 s + R_3 b'_0 + sC_1 R_1 R_2 + R_1 + R_2} = \frac{a''_0}{b''_2 s^2 + b''_1 s + b''_0}. \quad (6)$$

На третьем шаге находится коэффициент K''' путем добавления к (5) сопротивления R_4 , которое представляется последовательным соединением генератора и приемника НУИ из строки 2 в табл. 4.

$$N'(s) + \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \parallel \\ R_2 \\ \parallel \\ sC_1 \\ \parallel \\ sC_2 \\ \parallel \\ U \\ \downarrow \\ \mu U \\ \downarrow \\ R_4 \\ \parallel \\ R_4 \\ \parallel \\ 1 \end{array} \right| = \\ K'''(s) = \frac{N'''(s)}{D'''(s)} = \frac{D'(s) + \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \parallel \\ R_2 \\ \parallel \\ sC_1 \\ \parallel \\ sC_2 \\ \parallel \\ U \\ \downarrow \\ \mu U \\ \downarrow \\ R_4 \\ \parallel \\ R_4 \\ \parallel \\ 1 \end{array} \right|}{N'(s) + \left| \begin{array}{c} R_1 \\ \parallel \\ R_2 \\ \parallel \\ sC_1 \\ \parallel \\ sC_2 \\ \parallel \\ U \\ \downarrow \\ \mu U \end{array} \right|} =$$

$$= \frac{a'_0 + s^2 C_1 C_2 R_2 R_4 + s R_4 C_1}{b'_2 s^2 + b'_1 s + b' + s^2 C_1 C_2 (R_1 + R_2) R_4 + s C_1 R_4} = \frac{a''_2 s^2 + a''_1 s + a''_0}{b'''_2 s^2 + b'''_1 s + b'''_0}. \quad (7)$$

И, наконец, на четвертом этапе находим коэффициент K путем добавления сопротивления R_4 в формулу (6) с помощью того же последовательного соединения генератора и приемника НУИ из строки 2 в табл. 4.



$$K(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N''(s) + D''(s)}{D''(s)} = \frac{a''_0 + s^2 C_1 C_2 R_2 R_3 R_4 + s C_1 R_4 (R_2 + R_3)}{b''_2 s^2 + b''_1 s + b'' + s^2 C_1 C_2 R_3 R_4 (R_1 + R_2) + s C_1 R_4 (R_1 + R_2 + R_3)}. \quad (8)$$

Как видно из формул (5)–(8), влияние сопротивлений R_3 и R_4 на полиномиальную функцию фильтра различно. Если параметр R_3 только изменяет выражения коэффициентов полиномов числителя и знаменателя, то сопротивление R_4 приводит к появлению в числителе новых полиномиальных коэффициентов.

Следует отметить, что полиномиальные выражения передаточных функций K' , K'' , K''' и K могут быть получены отдельно независимо друг от друга. При этом получаются потенциально более компактные выражения полиномиальных коэффициентов. В то же время предлагаемый здесь подход на основе наращивания символьных выражений позволяет сократить затраты на формирование полиномиальных коэффициентов, поскольку использует символьные выражения, полученные ранее для других цепей.

Выводы

- Предложен подход к формированию полиномиальных функций на основе наращивания символьных выражений при добавлении в электрическую цепь новых элементов. При этом ранее сформированное полиномиальное выражение не заменяется, а обновляется.

2. Применение подхода особенно эффективно при структурном анализе и синтезе, когда осуществляется поиск цепей с заданной передаточной функцией путем подключения и отключения различных элементов.

Литература

1. Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Шустерман Л.Б. Численно-аналитическое моделирование радиоэлектронных схем.– М.: Наука, 2008. – 339 с.
2. Курганов Д.С., Филаретов В.В. Алгоритм и программа формирования полиномиальных схемных функций электронных цепей // Международ. сб. научн. трудов.– Ульяновск: УлГТУ, 2008.– Вып. 6.– С. 152–165.
3. Бондаренко А.В., Курганов С.А., Филаретов В.В. Формулы для коррекции дробно-рациональных схемных функций линейной электрической цепи при подключении и отключении элемента // Настоящий сборник.
4. Hashemian R. Symbolic representation of network transfer functions using norator-nullator pairs // Electronic circuits and systems.– 1977.– Vol. 1, No. 6 (November).– P. 193–197.
5. Филаретов В.В. Схемный подход к символьному анализу активных электрических цепей // Электроника и связь: Науч.-техн. сб.– Киев, 1997.– Вып. 2.– Ч. 1.–С. 97–101.
6. Миланцей Т., Славский Г.Н., Филаретов В.В. Пять формул метода схемных определителей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: Тр. международ. конф. КЛИН–2004.– Ульяновск: УлГТУ, 2004.– Т. 4.– С. 102–113.
7. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество. – 1998. – № 5.– С. 43–52.
8. Горшков К.С., Токарев Ю.В., Филаретов В.В. Анализ и синтез линейных электрических цепей методом схемных определителей: Учебное пособие.– Ульяновск: УлГТУ, 2008.– 240 с.
9. Бондаренко А.В., Бондаренко В.В., Можар В.И., Сончик Л.И. Современные методы анализа и синтеза электрических цепей: учеб. пособие. – СПб ГАСУ, 2008.– 216 с.

Филаретов Владимир Валентинович – д.т.н., профессор кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета. E-mail: vvfil@mail.ru

МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ

О ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ МАТРИЦЫ ГИЛЬБЕРТА

Р. В. Дмитришин

Исследован процесс вычисления определителя матрицы Гильберта методом редукции Гаусса. Проведено сравнение с вычислением определителя по точной (перестановочной) формуле Лейбница. Целью численных экспериментов является вычисление точности конечного результата в виде добротности числа (количество достоверных знаков мантиссы) в зависимости от порядка матрицы. Использован статистический подход на основе случайного изменения элементов матрицы Гильберта по нормальному закону.

Введение. Современные вычисления тесно связаны с мощностями компьютеров. Если на сегодня практически решена проблема памяти и времени вычислений, то этого нельзя сказать об их точности. Правда, специальные программы позволяют теоретически неограниченно увеличивать точность вычислений, однако ценой увеличения времени

вычислений в десятки и сотни раз. Главная причина состоит в игнорировании сопроцессора и необходимости эмуляции вычислений а плавающей запятой на целочисленной арифметике.

Объектом исследований в настоящей работе является точность вычисления определителя матрицы. Трудно представить, как бы выглядел классический анализ линейных (и не только) цепей без использования понятия определителя и основанных на нём миноре и адьюнкте. В предыдущей работе [1] показано, как можно увеличить точность анализа на примере простейшего транзисторного каскада. Теперь попробуем показать эффективность метода оценки точности вычислений на универсальном примере матрицы Гильберта с использованием статистического подхода. Ясно, что



David
Hilbert
1862-1943

подобные исследования не были возможны во времена Гильберта.

Особенности матрицы Гильберта

Каждый элемент h_{ij} матрицы Гильберта H_n определяется по формуле $h_{ij} = 1/(i+j-1)$, где $i(j)$ – номер строки (колонки) квадратной матрицы, n – ранг матрицы. Например, для $n=3$

	1	2	3
1	1	1/2	1/3
2	1/2	1/3	1/4
3	1/3	1/4	1/5

Достоинство матрицы Гильберта состоит в возможности тестирования вычисления определителя. В подобной степени это относится и к решению систем линейных уравнений, в которых матрица коэффициентов суть матрица Гильберта. По этой причине матрица Гильберта является классическим примером плохо обусловленной матрицы. Рассмотрим два метода раскрытия определителя: аналитический метод Лейбница и численный метод редукции Гаусса.

Метод Лейбница. Определитель матрицы Гильберта ранга n , как и каждого определителя можно записать в виде непрерывной (без вложений) формулы Лейбница, не содержащей операции деления



Gottfried Wilhelm
Leibniz
1646-1716

$$\det H = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n \in \{1 \dots n\}} (-1)^I \cdot h_{1,k_1} \cdot h_{2,k_2} \cdots h_{n,k_n}$$

где I – инверсия перестановки чисел-колонок k_1, k_2, \dots, k_n .

Определитель матрица Гильберта запишем в виде

$$\det H = \frac{N_1 - N_2}{D}$$

где $N_1(N_2)$ – сумма положительных (отрицательных) слагаемых числителя, D – общий знаменатель слагаемых $\det H$.

Например, для матрицы Гильберта H_3 :

$$N_1 = 11197440, N_2 = 11162880, D = 74649600.$$

$$\begin{aligned} \det H_3 &= 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \\ &= \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} - \frac{1}{27} - \frac{1}{16} - \frac{1}{20} = \frac{4976640 + 3110400 + 3110400 - 2764800 - 4665600 - 3732480}{74649600} = \\ &= \frac{11197440 - 11162880}{74649600} = 0.000462962963.... \end{aligned}$$

Особенность определителя матрицы Гильберта состоит в том, что числитель и знаменатель имеют одинаковые сомножители. В нашем примере это число есть 34560. Феноменально, что в числителе после сокращения подобных всегда остается единица.

$$\frac{11\ 197\ 440 - 11\ 162\ 880}{74\ 649\ 600} = \frac{(324 - 323) \cdot 34560}{2160 \cdot 34560} = \frac{324 - 323}{2160} = \frac{1}{2160} = \frac{1}{M}$$

Обозначим $A = 324$, $B = 323$. Для точного вычисления общего знаменателя определителя ($M = 2160$) матрицы Гильберта необходимо перемножить некоторые простые числа. Покажем эти числа на данном примере жирным шрифтом

$$15=3\cdot 5, 24=2^3\cdot 3, 27=3^3, 16=2^4, 20=2^2\cdot 5. \quad M = 2^4\cdot 3^3\cdot 5 = 2160.$$

Алгоритм определения M выглядит относительно просто. Вначале в матрице необходимо записать все знаменатели дробей в виде произведения простых чисел. В нашем примере так можно записать только число $4 = 2\cdot 2$

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	2·2
3	3	2·2	5

Далее следует выбрать максимальное количество простых чисел по всем колонкам и строкам согласно перестановкам. В H_3 максимальное количество двоек есть в колонках 2 и 3 (4 раза). Максимальное количество троек – 3. Число 5 можно выбрать один раз и т.д. В табл. 1 приведены показатели степеней простых чисел $a, b, c, d, e, f, g, h, j$ для разных матриц.

Таблица 1. Значения знаменателя определителя матрицы Гильберта для $n=2..12$

<i>n</i>	a	b	c	d	e	f	g	h	j	$M = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d \cdot 11^e \cdot 13^f \cdot 17^g \cdot 19^h \cdot 23^j$
2	2	1								12
3	4	3	1							2160
4	8	3	3	1						6048000
5	10	5	5	3						266716800000
6	14	9	5	5	1					186313420339200000
7	18	11	5	7	3	1				2067909047925770649600000
8	24	14	6	7	5	3				365356847125734485878112256000000
9	26	18	8	7	7	5	1			1028781784378569697887052962909388800000000
10	30	18	10	7	9	7	3	1		46206893947914691316295628839036278726983680000000000
11	34	19	10	8	11	9	5	3		33122504897063413755362143627040727106080127672469422080000000000
12	40	21	10	10	11	11	7	5	1	37910657943630451715188547903479639188018868786411846410432430473216000000000

закодируем в виде 100100, ибо $10 = 2 \cdot 5$ и т.д. Покажем пример кодирования таблицы матрицы Гильберта H_6 на языке Pascal.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \cdot 2 & 5 & 2 \cdot 3 \\ 2 & 3 & 2 \cdot 2 & 5 & 2 \cdot 3 & 7 \\ 3 & 2 \cdot 2 & 5 & 2 \cdot 3 & 7 & 2^3 \\ 2 \cdot 2 & 5 & 2 \cdot 3 & 7 & 2^3 & 3 \cdot 3 \\ 5 & 2 \cdot 3 & 7 & 2^3 & 3 \cdot 3 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 & 7 & 2^3 & 3 \cdot 3 & 2 \cdot 5 & 11 \end{bmatrix} \leftarrow \text{знаменатели } H_6, \text{ разложенные на простые числа}$$

Const

```
H6: array[1..6,1..6,1..5] of byte = {2, 3, 5, 7, 11}
((0,0,0,0),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(2,0,0,0),(0,0,1,0,0),(1,1,0,0,0)),
((1,0,0,0),(0,1,0,0,0),(2,0,0,0,0),(0,0,1,0,0),(1,1,0,0,0),(0,0,0,1,0)),
((0,1,0,0,0),(2,0,0,0,0),(0,0,1,0,0),(1,1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(3,0,0,0,0)),
((2,0,0,0,0),(0,0,1,0,0),(1,1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(3,0,0,0,0),(0,2,0,0,0)),
((0,0,1,0,0),(1,1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(3,0,0,0,0),(0,2,0,0,0),(1,0,1,0,0)),
((1,1,0,0,0),(0,0,0,1,0),(3,0,0,0,0),(0,2,0,0,0),(1,0,1,0,0),(0,0,0,0,1));
```

Далее генерируются все перестановки (произведение элементов, выбранных по одному из каждой строки и столбца) согласно алгоритму Лейбница.

При первом проходе определяются максимальные значения участия всех простых чисел. Для $n=6$ получаются значения a, b, c, d, e (см. таб. 1)

14	9	5	5	1
----	---	---	---	---

При втором проходе вычисляются значения А и В. Повторно генерируются все перестановки. Каждый набор простых чисел $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)$ вычитается из полученных ранее чисел a, b, c, d, e . Полученная разность образует число согласно формуле $2^{a-a_i} \times 3^{b-b_i} \times 5^{c-c_i} \times 7^{d-d_i} \times 11^{e-e_i}$. Если инверсия текущей пермутации есть число парное, то произведение простых чисел складывается в ячейку A , иначе – в ячейку B . Для вычислений пришлось запрограммировать специальную арифметику для умножения и сложения чисел с увеличенным количеством разрядов.

Сравнение чисел A и B подтверждает их «микроскопическую» разность. Кроме этого виден прогрессивный рост этих чисел в зависимости от ранга матрицы. Вывод очевиден: для точного вычисления знаменателя дроби определителя матрицы Гильберта необходимо использовать арифметику с большим числом разрядов мантиссы. Если для $n=4$ достаточно $m_{10} = 6$ десятичных знаков, то для $n=10$ необходимо не менее 50-60 разрядов мантиссы (см. колонку m_{10} в таб.3). Дополнительной информацией о сложности вычисления определителя матрицы Гильберта

служит стремительно растущая мера обусловленности этих матриц (табл. 3)

Таблица 3. Сравнение положительных (A) и отрицательных (B) слагаемых в числителе формулы определителя матрицы Гильберта для $n=2..10$

n	+A -B	m_{10}
2	+4 -3	1
3	+324 -323	3
4	+439385 -439384	6
5	+9101740001 -9101740000	10
6	+2925429515944300 -2925429515944299	16
7	+14726757584587031304244 -14726757584587031304243	24
8	+1167702267246978627609543608625 -1167702267246978627609543608624	31
9	+1463725624168681556500790426125377442656 -1463725624168681556500790426125377442655	40
10	+29079315144795566067168907958561201117902957638404 -29079315144795566067168907958561201117902957638403	50

Огромные числа в предыдущих таблицах ставят вопрос о разрядности арифметики при вычислении определителя матрицы Гильберта. Исследование этой проблемы является частичной целью данной работы. Рассмотрим «конкурирующий» по отношению к методу перестановок метод редукции Гаусса.



Carl Friedrich
Gauss
1777 - 1855

Метод Гаусса. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений и определителей матриц является типичным представителем численных методов в алгебре. Запишем общий вид квадратной матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ \hline \end{array}$$

Метод редукции Гаусса служит для приведения матрицы к верхней треугольной форме и основан на известной формуле [2]

$$a_{c,k}^{(p)} = a_{c,k}^{(p-1)} - \frac{a_{c,p}^{(p-1)} \cdot a_{c,p}^{(p-1)}}{a_{p-1,p-1}^{(p-1)}} \quad (1)$$

Алгоритм вычисления определителя проще всего записать в виде фрагмента программы на языке Pascal, где запись $a[c,k]$ равносильна a_{ck}

```

for p:=1 to n-1 do      {p-номер шага редукции }
  for c:=p+1 to n do    {c-номер строки матрицы}
    for k:=p+1 to n do  {k-номер колонки матрицы}
      a[c,k]:=a[c,k]-a[c,p]*a[p,k]/a[p,p];
detA:=a[1,1]*a[2,2]*...*a[n,n];

```

Пошаговая распечатка процесса редукции к верхней треугольной матрице на примере H_6 показана в Табл. 4.

Таблица 4. Пошаговый контроль элементов матрицы H_6 в процессе редукции Гаусса
колонки матрицы - k

c p	1	2	3	4	5	6	комментарии
1	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	< начальные значения
	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	<
2 1	0	0.083	0.083	0.075	0.067	0.06	← после редукции a11
	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	<
3 1	0	0.083	0.089	0.083	0.076	0.069	← после редукции a11
2	0	0	5.56e-3	8.33e-3	9.52e-3	9.92e-3	← после редукции a221
	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	<
4 1	0	0.075	0.083	0.08	0.075	0.069	← после редукции a11
2	0	0	8.33e-3	0.013	0.015	0.016	← после редукции a221
3	0	0	0	3.57e-4	7.14e-4	9.92e-4	← после редукции a332
	1/5	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	<
1	0	0.067	0.076	0.075	0.071	0.067	← после редукции a11
5 2	0	0	9.52e-3	0.015	0.018	0.019	← после редукции a221
3	0	0	0	7.14e-4	1.45e-3	2.04e-3	← после редукции a332
4	0	0	0	0	2.27e-5	5.67e-5	← после редукции a443
	1/6	1/7	1/8	1/9	1/10	1/11	<
1	0	0.06	0.069	0.069	0.067	0.063	← после редукции a11
6 2	0	0	9.92e-3	0.016	0.019	0.021	← после редукции a221
3	0	0	0	9.92e-4	2.04e-3	2.9e-3	← после редукции a332
4	0	0	0	0	5.67e-5	1.43e-6	← после редукции a443
5	0	0	0	0	0	1.43e-6	← после редукции a554

Название колонок p , c , k обозначают то же самое, что и в выше приведённой программе. Запись a_{ckp} обозначает элемент матрицы в клетке $[c, k]$, вычисленный на p -м шаге редукции. Для наглядности числа, отображающие элементы матрицы с плавающей запятой, распечатаны без младших разрядов.

В табл. 5 для наглядности приведены только конечные значения элементов верхне-треугольной матрицы. Все вычисления проводились с максимальной точностью сопроцессора ($extended \approx 21_{10}$ знаков мантиссы). После перемножения диагональных элементов получим значение определителя матрицы Гильберта в плавающей запятой.

$$\det H_6 = 5.36729988735868\ldots \cdot 10^{-18}.$$

Таблица 5. Матрица H_6 после редукции Гаусса

	1	2	3	4	5	6
1	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
2	0	0.083	0.083	0.075	0.067	0.06
3	0	0	5.56e-3	8.33e-3	9.52e-3	9.92e-3
4	0	0	0	3.57e-4	7.14e-4	9.92e-4
5	0	0	0	0	2.27e-5	5.67e-5
6	0	0	0	0	0	1.43e-6

Важно исследовать явление накопления ошибок в процессе редукции. Для этого используем понятие добротности чисел (см. приложение П1). Результаты анализа поместим в табл. 6, которая имеет структуру, подобную табл. 4.

Таблица 6. Динамика изменения добротности чисел в процессе редукции

КОЛОНКИ МАТРИЦЫ - k							КОММЕНТАРИИ	
s	p	1	2	3	4	5	6	
1		16	16	16	16	16	16	< начальные значения добротности чисел
2	1	16	16	16	16	16	16	<
2	1	-	15.183	15.339	15.406	15.443	15.467	← после редукции a11
3	1	16	16	16	16	16	16	<
3	1	-	15.339	15.505	15.577	15.618	15.644	← после редукции a11
3	2	-	-	13.833	14.073	14.191	14.263	← после редукции a221
4	1	16	16	16	16	16	16	<
4	1	-	15.406	15.577	15.652	15.693	15.719	← после редукции a11
4	2	-	-	14.073	14.326	14.452	14.531	← после редукции a221
4	3	-	-	-	12.165	12.431	12.567	← после редукции a332
5	1	16	16	16	16	16	16	<
5	1	-	15.443	15.618	15.693	15.735	15.761	← после редукции a11
5	2	-	-	14.191	14.452	14.585	14.669	← после редукции a221
5	3	-	-	-	12.431	12.705	12.846	← после редукции a332
5	4	-	-	-	-	10.254	10.533	← после редукции a443
6	1	16	16	16	16	16	16	<
6	1	-	15.467	15.644	15.719	15.761	15.778	← после редукции a11
6	2	-	-	14.263	14.531	14.669	14.757	← после редукции a221
6	3	-	-	-	12.567	12.846	12.99	← после редукции a332
6	4	-	-	-	-	10.533	10.817	← после редукции a443
6	5	-	-	-	-	-	8.159	← после редукции a554

Значения добротности чисел в табл. 6 изменяются пропорционально их начальному значению. Это обозначает, что при увеличении стартовых значений добротности элементов матрицы, например, на четыре разряда ($Q_0 = 20$) добротность всех промежуточных чисел будет также на четыре знака большей, т.е. $Q_{66} = 12.159$. Отсюда следует, что данный определитель требует для правильного вычисления не менее девяти достоверных разрядов ($Q_0 > 9$). Под правильным вычислением будем понимать наличие добротности последнего диагонального элемента > 1 . В нашем примере для $Q_0 = 9$ $Q_{66} = 1.159$.

Все значения добротностей из табл. 6 входят и для матриц большего порядка. При увеличении ранга матрицы просто дополнительно вычисляются новые добротности. На основе имеющейся точности сопроцессора (*extended*) вычисляется определитель матрицы Гильберта 12 порядка. Дальнейшее увеличение ранга матрицы Гильберта приводит к вычислению при этой точности неправильного значения её определителя.

Представление элементов матрицы. Оценка точности вычислений определителя, естественно, требует привязки к точности исходных элементов матрицы. В матрице Гильберта все коэффициенты суть дроби с единичными числителями. Например, если имеется дробь $1/3$, то точными есть только числа 1 и 3. Их отношение можно трактовать как точное число при использовании арифметики целых чисел в алгоритмах типа Лапласа или целочисленного варианта метода Гаусса, гарантирующего деление дробей без остатка. В табл. 2 приведены точные старшие разряды чисел, полученные в арифметике целых чисел без использования вычислений в плавающей запятой (за исключением операции $1/M$, выполненной в программе MathCAD).

Совершенно другая оценка точности вычислений имеет место при использовании значений исходных элементов в виде чисел с плавающей запятой, т.е. когда вместо дроби $1/3$ принимается близкое число 0.3333333333.. В этом случае как «точный» алгоритм Лейбница, так и численный алгоритм Гаусса приводят к ответу, приближенному к данным в табл. 2.

Получается, что целочисленные алгоритмы используют одни исходные значения, а алгоритмы на основе плавающей запятой – другие. Этalonом для сравнения точности последних следует принимать не результат деления 1 на M , а число, получаемое после дополнительного вычисления определителя матрицы Гильберта в плавающей запятой с удвоенной точностью.

Поставим вопрос о том, какой из двух алгоритмов (Лапласа или Гаусса) «лучший», т.е. требует для вычисления определителя матрицы Гильберта в плавающей запятой меньшего числа разрядов мантиссы. Для этого достаточно в формате *extended* последовательно вычислять определители матрицы Гильберта в плавающей запятой, увеличивая ранг

матрицы. Оказалось, что методом Лапласа удалось правильно вычислить определитель матрицы Гильберта максимально шестого порядка. В то же время аналогичный эксперимент с методом Гаусса показал возможность вычисления определителя до 12-го порядка.

На первый взгляд выходит парадоксальная ситуация: алгоритм Лапласа, использующий только операции сложения и умножения при отдельном вычислении положительных и отрицательных слагаемых без накопления ошибок, уступил по точности алгоритму Гаусса, использующему все четыре арифметические операции и накопление ошибок от операции к операции !?

Прояснение непонятной ситуации с вычислением определителя по «точной» формуле Лейбница возможно после сравнения окончательных значений положительной и отрицательной величин. Достаточно посмотреть пример вычисления чисел A и B определителя матрицы Гильберта для $n=5, 6$ и 7 (табл. 7). Оказывается, эти величины почти одинаковы и отличаются лишь в младших разрядах. В табл. 7 совпадающие разряды (\pm) выделены жирным шрифтом. Чем больше порядок матрицы, тем больше совпадение старших разрядов. Таким образом, одно единственное вычитание «портит» все предыдущие вычисления, выполненные с большой точностью, поскольку, как отмечалось выше, числа с плавающей запятой только умножались и складывались. После вычитания чисел значение детерминанта существенно отличается от точных данных в табл. 2. В третьей строке табл. 7 жирным шрифтом показаны верные знаки мантиссы. Для $n = 7$ после вычитания даже получаем ноль.

При увеличении длины мантиссы точность вычислений определителя по методу Лапласа, естественно, увеличивается без ограничений. Проблема, разумеется, чисто техническая – в увеличении длины мантиссы.

Таблица 7. Положительные и отрицательные составляющие определителя матрицы Гильберта для $n=5, 6$ и 7

	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
+	3.41251094831671646e-02	1.57016575114036218e-02	7.1215692969469809e-03
-	3.41251094794178694e-02	1.5701657511403616e-02	7.1215692969469809e-03
det	3.74929511807835236e-12	5.3752710832757899e-18	0

В программе, реализующей метод Гаусса нет возможности контролировать финал вычислений на основе сравнения положительных и отрицательных чисел, поэтому в табл. 8 сравним точные значения из табл. 2 (целые числа) и результаты расчёта по программе на точности *extended* (Gauss). Как и в табл. 7, совпадающие цифры выделены. Как видим,

результаты вычислений определителя по алгоритму Гаусса существенно точнее по сравнению с вычислениями методом Лейбница.

Таблица 8. Сравнение значений определителей матрицы Гильберта для $n=5, 6$ и 7 , для целых чисел и с плавающей запятой

	$n = 5$	$n = 6$	$n = 7$
Цел.числа	3.749295132515087e-12	5.367299887358688e-18	4.835802623926117e-25
Gauss	3.749295132515086e-12	5.367299887358365e-18	4.835802623926110e-25

Хорошую точность алгоритма Гаусса по сравнению с алгоритмом Лейбница при вычислениях в плавающей запятой можно объяснить явлением автонормирования в процессе редукции. Интересно, что при увеличении количества разрядов мантиссы при вычислении определителя точность по программе «Gauss» существенно не увеличивается, что отличает её от программы на основе алгоритма Лейбница.

Статистические исследования. После сравнения точности вычисления определителя матрицы Гильберта двумя методами перейдём к более детальному анализу точности вычислений по методу Гаусса.

Первое, на что следует обратить внимание – это достоверность метода оценки погрешности вычислений на основе предложенной автором методики анализа добротности. Дело в том, что новая методика носит характер гипотезы и только в первом приближении показывает характер потери точности в процессе вычислений.

Для объективной оценки эффективности новой методики используем проверенный на практике метод статистических испытаний. Ведь как проверяется на практике обусловленность любой матрицы? Вычисляется её определитель при номинальных значениях элементов. Затем элементы матрицы «слегка» изменяются. Так как заранее неизвестно точно, как задать малые изменения, то используют популярный метод Монте-Карло. Для большей убедительности выполняют не пару вычислений, а «достаточно» много. Если определитель существенно изменяется – значит его матрица «плохая», т.е. плохо обусловлена. Научный подход основан на вычислении нормы матриц (исходной и обратной) и выражается в виде меры обусловленности матрицы [2]

$$v(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Известно, что чем больше мера обусловленности матрицы (см. табл. 2), тем определитель этой матрицы труднее вычисляется. Важная особенность меры обусловленности матрицы состоит в возможности оценки минимального количества разрядов мантиссы, необходимой для «удовлетворительного» вычисления определителя. Опустив вывод, напишем эту формулу

$$m = -0.4342945 \cdot \ln(\nu(A) \cdot 2^{2-b}) \quad (1)$$

где b – количество битов мантиссы, m – количество достоверных десятичных разрядов в вычисляемом значении определителя при использовании b битов мантиссы ($b > m$).

На сегодняшний день, пожалуй, это единственная возможность оценки длины мантиссы (в битах), необходимой для получения заданной точности вычисления определителя (m). Главная сложность состоит в вычислении обратной матрицы. Ведь здесь также требуется определённая точность, которая заранее неизвестна. Вычисление нормы – дело второстепенное, хотя и здесь есть проблема «удачного» выбора варианта нормы.

Наш подход определения m проще, поскольку не требует вычисления обратной матрицы. Выполним теперь проверку его достоверности путём сравнения с результатом статистических испытаний. Изменения исходных элементов принимаем в нормальном распределении. Причина выбора ясна: как известно из метрологии, в процессе выполнения редукции распределение плотности вероятности чисел приближается к нормальному закону даже если исходные элементы матрицы изменяются по равномерному закону. Поэтому для исключения проблемы перехода сразу принимаем закон распределения нормальным.

Следующее допущение основано на предположении независимого изменения элементов, при которой взаимная кореляция элементов равна нулю. Это предположение легко реализуется путём генерации случайных чисел. Тогда можно использовать известную формулу для вычисления ошибки функции многих переменных и далее вывести [1] рабочую формулу процесса редукции Гаусса по формуле (1), используя формулы (П3) и (П4). Для упрощения записи заменим «многоэтажные» символы на обычные буквы

$$a_{c,k}^{(p)} = a_{c,k}^{(p-1)} - \frac{a_{c,p}^{(p-1)} \cdot a_{c,p}^{(p-1)}}{a_{p-1,p-1}^{(p-1)}} = a - \frac{b \cdot c}{d} = G$$

Добротность числа G вычисляем по формуле

$$Q_G = \lg \left(\frac{|G|}{\sqrt{a^2 \cdot 10^{-2Q_a} + (b \cdot c / d)^2 \cdot (10^{-2Q_b} + 10^{-2Q_c} + 10^{-2Q_d})}} \right)$$

Диапазон изменения каждого исходного элемента матрицы фиксирован и экспериментально подобран равномерно в 21 точках. Получается ряд значений, на которые умножается каждый элемент матрицы :

$$(1-10^{-15}), (1-0.9 \cdot 10^{-15}), \dots, (1-0.1 \cdot 10^{-15}), \dots, 1, (1+0.1 \cdot 10^{-15}), \dots, (1+0.9 \cdot 10^{-15}), (1+10^{-15}).$$

При таких множителях исходная добротность всех элементов равна 15 десятичных знаков. Для уменьшения ошибок округления все вычисления проводятся с максимальной для имеющегося процессора точностью (*extended-21знак*). Процедура генерации случайных значений элементов по нормальному закону выполнена следующим образом. Перед главными вычислениями генерируются таблица из 750 значений (T750), выбранных из выше приведенного ряда 21 чисел (табл. 8)

Таблица 8. Содержание ячеек таблицы T750

кол. ячеек	1	2	...	86	90	86	...	2	1
множитель	$1-10^{-15}$	$1-0.9 \cdot 10^{-15}$		$1-0.1 \cdot 10^{-15}$	1	$1+0.1 \cdot 10^{-15}$		$1+0.9 \cdot 10^{-15}$	$1+10^{-15}$

График, построенный на основе Т750 является обратной дистрибуантой [3], содержащий 21 ступеньку. Благодаря Т750 удалось реализовать специальный генератор нормальных чисел на основе генератора равномерных чисел (RANDOM), входящего в состав компилятора языка Pascal. Запрограммированный генератор нормальных чисел позволил не только существенно уменьшить время проведения многовариантных вычислений, но и улучшить характеристики гистограм.

Все случайные значения элементов матрицы ограничены диапазоном $\pm 3\sigma$ по кривой Гаусса (см. рис. П2,*c*). Количество испытаний (вычислений определителей) для одной матрицы Гильберта экспериментально выбрано 1 млн. после оценки проб: 10 тыс, 100 тыс, 1 млн, 10 млн, 100 млн. Критерием выбора был компромисс между качеством гистограммы и временем её получения. Оценка качества гистограмм проводилось по известным формулам [3].

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

среднее значение

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

стандартное отклонение

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

асимметрия

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^4}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right]^2} - 3$$

экспесс

Вычисление гистограммы проводилось в двух частях программы. В первой части определяется значение определителя при номинальных значениях элементов. Далее в процессе анализа миллиона определителей матриц Гильберта со случайными значениями элементов вычисляются минимальные и максимальные значения определителей. По ним вычисляются ширина 21 интервалов.

В другой части повторно генерируются эти же миллион матриц. Но теперь каждый определитель анализируется на попадание в один из интервалов. Попадание фиксируется увеличением содержимого этого интервального счётчика на единицу. На рис. 1 распечатано эти счётчики для матрицы 4-го и 10-го порядков.

Справа от численных значений счётчиков (плотности распределения) построены гистограммы, а ниже в табличке приведены значения достоверных разрядов мантиссы (S) на основе утроенного стандартного отклонения. Видим, что определитель 4-го порядка вычисляется с 11.69 достоверными десятичными знаками, а 10-го порядка – с 3.17 знаками. Видим также, что номинальное значение определителей в плавающей запятой (D_{nom}) и среднее ($Det S = (D_{max} - D_{min})/2$, почти не отличаются на матрице 4-го порядка, зато ощутимо отличаются на матрице 10-го порядка. Совпадающие разряды показаны утолщённым шрифтом. Хорошее качество гистограммы подтверждают коэффициенты асимметрии. Исследования проводились для матриц Гильберта от второго до 12-го порядка включительно.

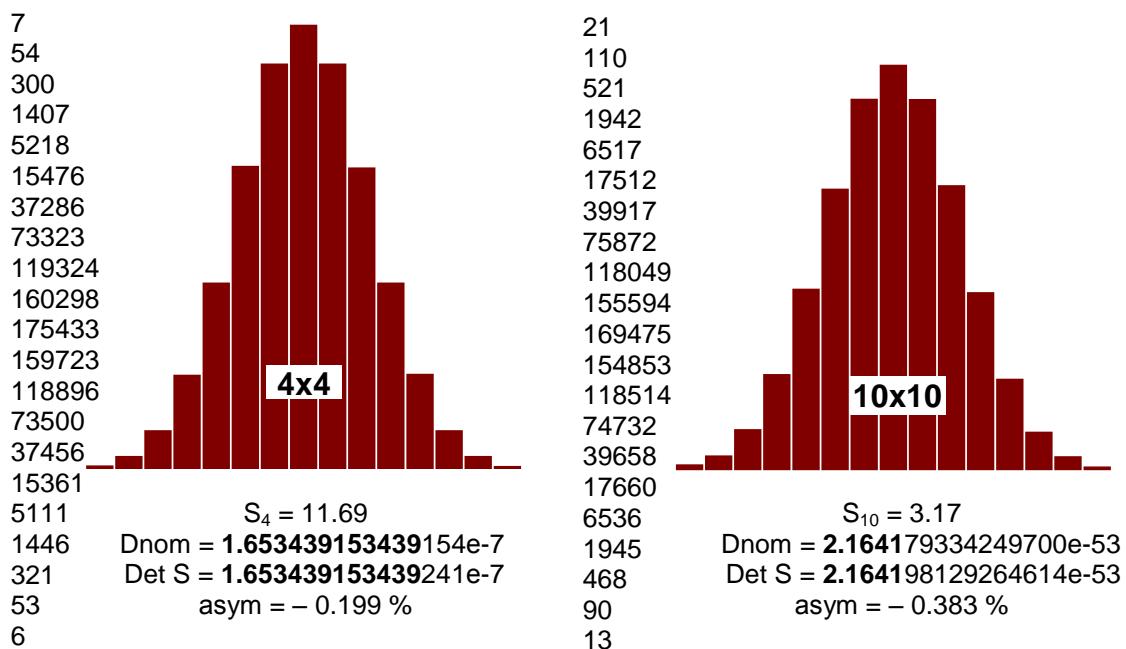


Рис. 1. Гистограммы на основе 1 млн вычислений определителей матрицы Гильберта

На рис. 2 показано взаимное расположение семи кривых функции плотности вероятности. Вдоль оси абсцисс откладываем соответствующие значения определителей матриц Гильберта. Представление кривых в логарифмическом масштабе на единых осях на двух осях не позволяет сохранить симметрию изображений кривых Гаусса, что негативно влияет на их восприятие. Каждая ось абсцисс имеет собственный масштаб. В соответствии с особенностью интеграла функции Гаусса кривые ограничивают одинаковую единичную площадь. Для этого экстремальные значения функции $p4...p10$ имеют соответствующее расположение. Из рис. 2 видим, что наибольшую точность обеспечивает вычисление определителя матрицы Гильберта четвёртого порядка, а наименее точно вычисляется определитель матрицы 10-го порядка.

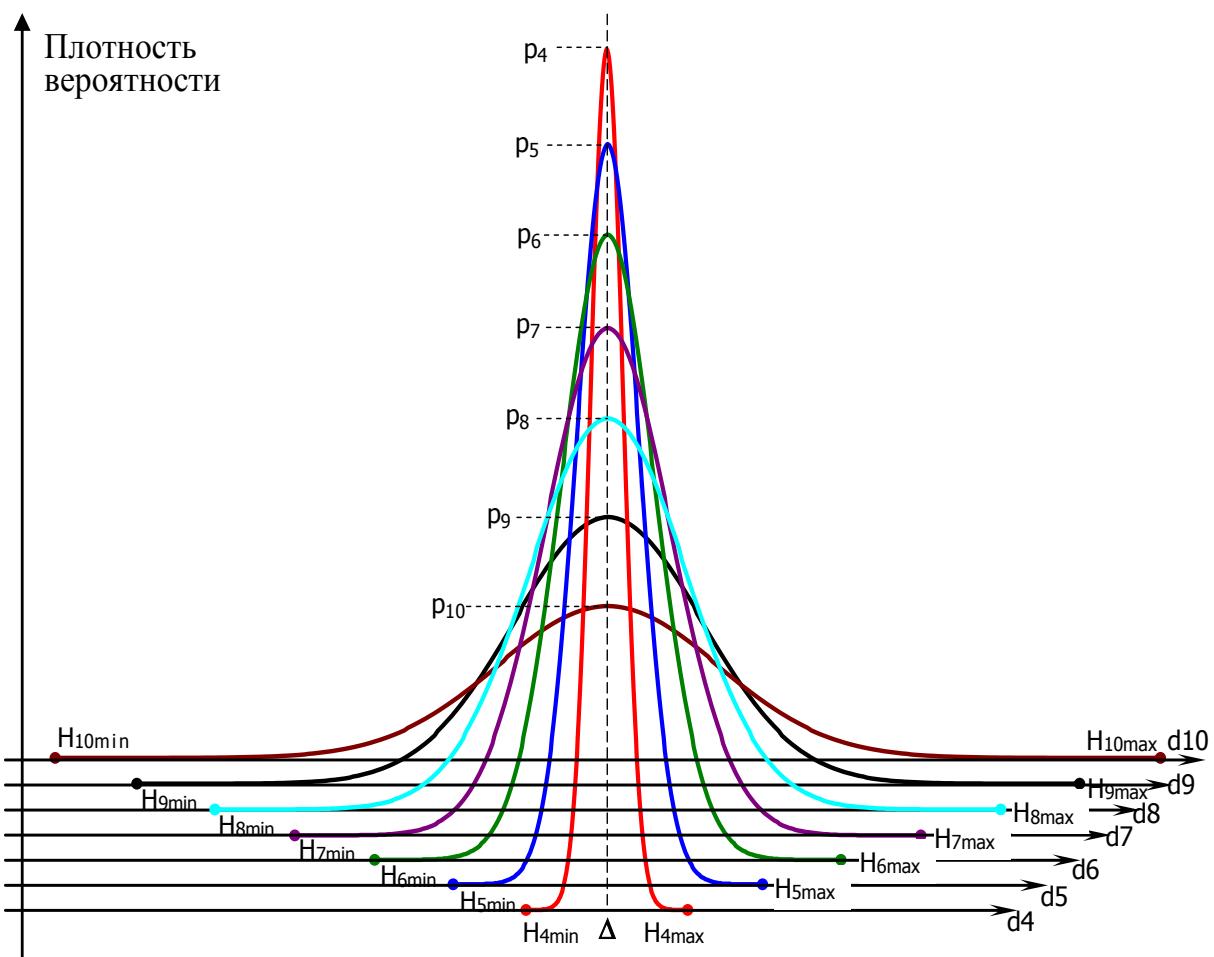


Рис. 2. Сопоставления гистограмм при многовариантных вычислениях определителей матриц Гильберта ($n = 4..9$)

В табл. 9 приведены результаты обработки статистических испытаний. В колонке **S** показаны значения добротности определителей. В колонках $\text{Det}0-\Delta$ ($\text{Det}0+\Delta$) приведено минимальное (максимальное) значение определителя с отклонением 3σ от центральных значений,

приведенных в табл. 2 . Жирным шрифтом показаны совпадающие с Det0 разряды. В последней колонке показано качество гистограммы в виде оценки асимметрии.

Таблица 9. Достоверность значений определителя матрицы Гильберта на основе статистических испытаний

n	S	Det0-Δ	Det0+Δ	asym, %
3	12.99	4.629629629629156·e-04	4.629629629630103 e-04	+0.08831
4	11.69	1.653439153435778 e-07	1.653439153442530 e-07	-0.19909
5	10.33	3.749295132339719 e-12	3.749295132690455 e-12	+0.05362
6	8.93	5.367299881052659 e-18	5.367299893664715 e-18	-0.59826
7	7.51	4.835802474485529·e-25	4.835802773366705 e-25	-0.40726
8	6.08	2.737050208311778 e-33	2.737052390370637 e-33	+0.22759
9	4.63	9.720006447391343 e-43	9.720462176458655 e-43	-0.00122
10	3.17	2.162716061700805 e-53	2.165642391162180 e-53	-0.38266
11	1.71	2.960227667109046 e-65	3.077963001789661 e-65	+0.34208
12	0.23	1.241320201845192·e-78	4.796870467053514 e-78	-0.14319

Отдельно были вычислены верные знаки мантисс определителей на основе формул добротности числа, приведенных в Приложении. Сравнения полученных достоверностей с данными в табл. 9 показали их заниженные значения (например, для $n=7$ $Q=4.89$ вместо $S=7.51$). Пояснение занижения в настоящее время отсутствует и является предметом дальнейшего изучения. Для компенсации занижения достаточно было ввести поправочный коэффициент k , зависящий линейно от n .

$$k = -209.86 + 86.04 \cdot n.$$

Третья возможность оценки точности вычисления определителя – использование меры обусловленности матрицы из формулы (1). Полезно сравнить три способа оценки точности вычисления определителя матрицы Гильберта, из которых достоверным является метод статистических испытаний. На рис. 3 показаны соответствующие характеристики. Видно, что количество достоверных разрядов на основе меры обусловленности матрицы по формуле (1) указывает заниженные значения гарантированной точности, что не противоречит логике, поскольку оценка точности при этом сохраняется. Натуральная оценка на основе статистического подхода и эмуляция точности вычислений на базе предложенной методики достоверности чисел практически совпадают и показывают большее количество точных разрядов. С помощью экстраполяции можно оценить количество необходимых разрядов мантиссы для вычисления, например определителя сотого порядка (около 230_{10}). В настоящее время вычисление миллиона определителей матрицы Гильберта сотого порядка не под силу даже современным компьютерам.

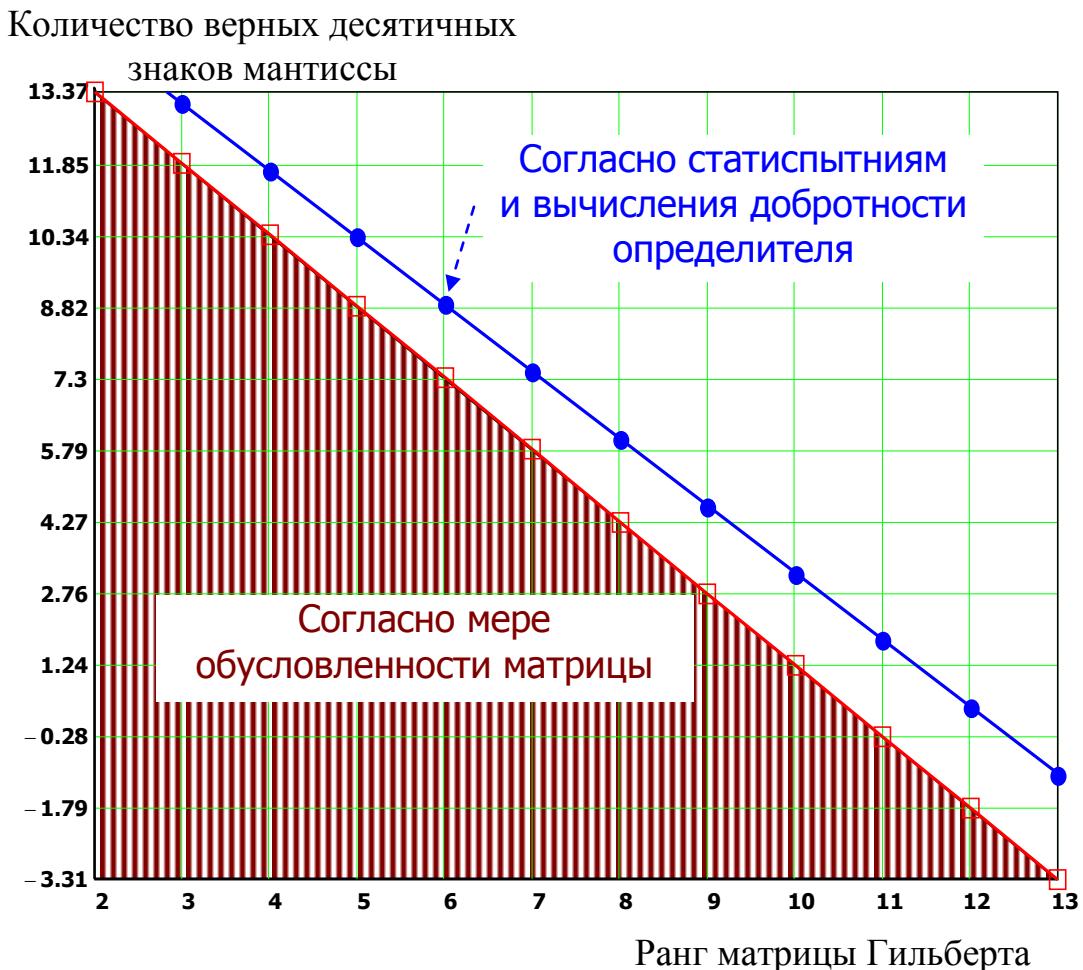


Рис. 3. Сравнение оценок точности вычисления определителя матрицы Гильберта

Выводы

- Проведенные исследования позволяют установить следующие особенности вычисления определителей матрицы Гильберта:
- Точное решение возможно лишь с помощью арифметики целых чисел и представления ответа в виде дроби с единичным числителем.
- При вычислении определителя в плавающей запятой преимущество имеет численный метод Гаусса по сравнению с аналитическим алгоритмом Лейбница, основанном на генерации перестановок. Метод Гаусса имеет почти линейную зависимость необходимого количества разрядов при изменении ранга матрицы, метод Лейбница – почти квадратичную.
- Предложенный метод добротности чисел позволяет удовлетворительно оценить требуемое количество разрядов без вычисления обратной матрицы, что требуется при использовании меры обусловленности матрицы.

5. Проведенные исследования согласуются с исследованиями вычислений определителя с помощью компактно свернутых единых и последовательных выражений [4]. Вскрыта здесь сущность плохой обусловленности матриц Гильберта проявляется и в случаях оптимальной свертки символьных выражений.

Приложение. Представление числа и его точности

В математике [2] и метрологии [3] различают точную и переменную (случайную) составляющие числа (Рис П1,а). Классическая запись числа имеет вид: $A = a + \Delta$ и $\delta = |\Delta|/a$, где A – определённое приближение числа (действительная величина) к его истинному значению в виде a , a – точное значение, Δ – ошибка (случайная или переменная) величина, δ - относительная погрешность. Эти популярные дефиниции не нуждаются в комментариях. По виду числа различают верные разряды (обычно десятичные) слева и приближённые (ошибочные, случайные) - справа. В части случайных разрядов цифры могут принимать значения (0..9).

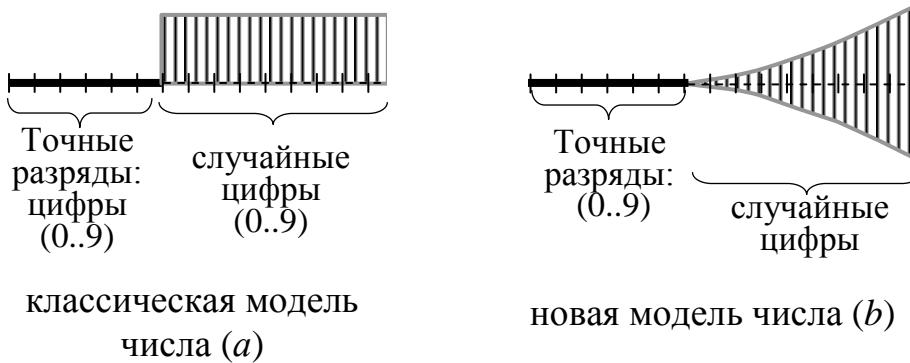
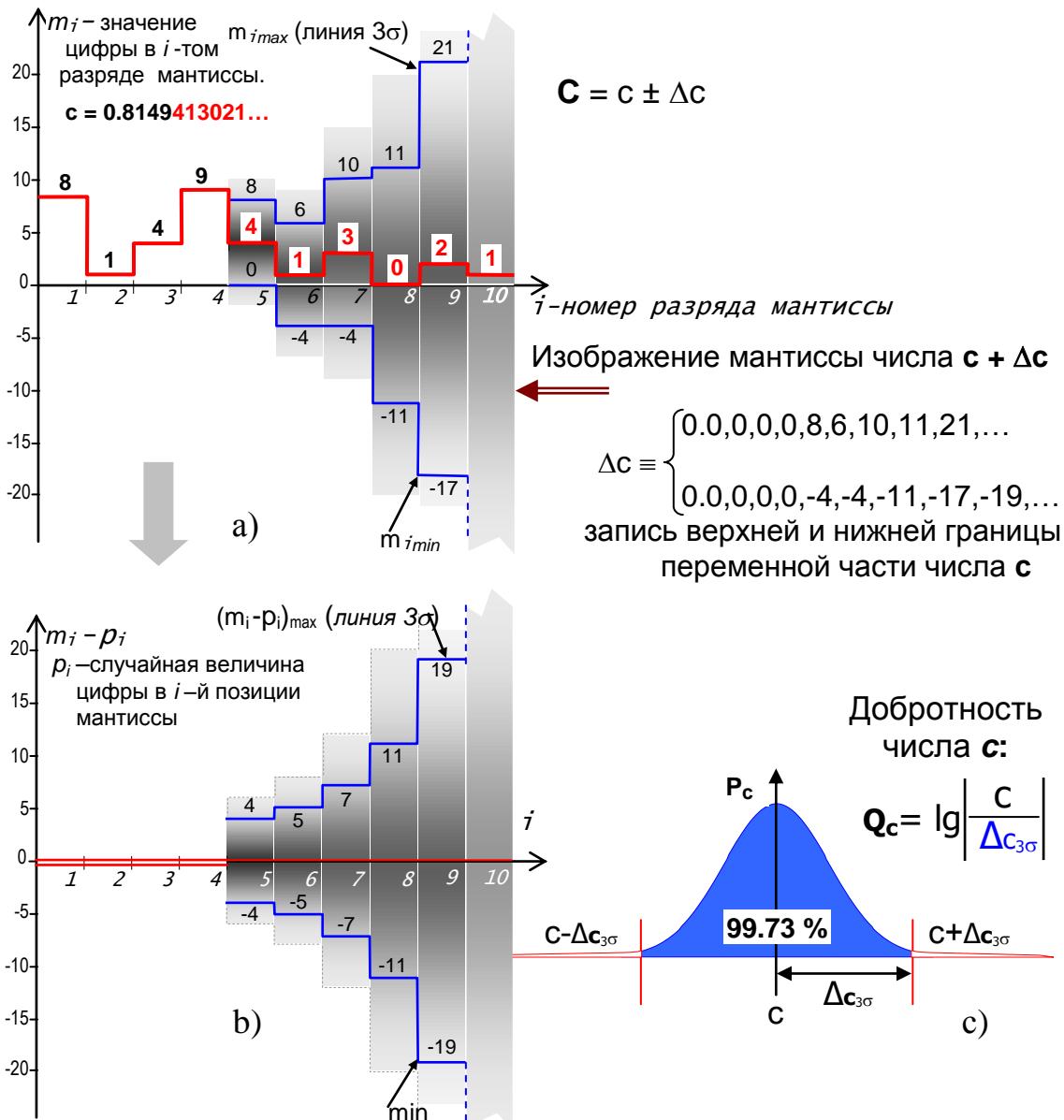


Рис. П1. Две модели представления числа

Рассмотрим альтернативную модель, в которой разряды переменной составляющей плавно продолжают точные разряды, как показано на рис. П1,б. Причём эти разряды не обязательно принимают положительные значения в пределах (0..9). На рис. П2 показан пример альтернативного представления числа $c = 0.8149413021... \pm 0.000045829$. Постоянная составляющая наведена жирным шрифтом. Часть ...413021 не существенна. В правой части числа возможные изменения разрядов ограничены определёнными значениями. Ось ординат может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Действительная величина числа определяется по формуле, где c_m – значение цифры в m -позиции

$$A = \sum c_{m_i} \cdot 10^{m_i} \quad (\text{П1})$$

На рис. П2,*a*,*b* для удобства вычислений линия мантиссы числа *c* «выпрямлена». Покажем пример вычисления максимального значения переменной части числа *c*, используя формулу (П1)



Нет проблем в записи этого же числа с традиционными разрядами (0..9)

$$= 4 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-6} + 7 \cdot 10^{-7} + 12 \cdot 10^{-8} + 9 \cdot 10^{-9} = 4 \cdot 10^{-5} + 5 \cdot 10^{-6} + 8 \cdot 10^{-7} + 2 \cdot 10^{-8} + 9 \cdot 10^{-9}.$$

Рис. П2. Представление числа и его добротности в виде диапазона изменений разрядов мантиссы

Принимаем, что абсолютная ошибка симметрична, поэтому число *c* запишем в традиционном виде

$$c = 0.8149413021 \pm 0.000045829.$$

Важно, что все случайные значения числа c в переменной части не могут содержать значения цифр, выходящих за пределы минимальных и максимальных линий (должны находиться в заштрихованном коридоре)

$$c_{\min} = 0.8149871311, c_{\max} = 0.8148954731.$$

Теперь перейдём к статистическим выкладкам. Минимальные и максимальные значения числа c не являются строгими. Могут встречаться и числа, меньшие или большие от c_{\min}, c_{\max} , однако, их количество ничтожно мало (менее 0.17%), поэтому ими будем пренебрегать. Принято, что основные случайные числа сосредоточены в интервале $\pm 3\sigma$, где σ - его стандартное отклонение. Число c на графике имеет вид кривой Гаусса в виде нормального распределения (рис. П2,с). Классическая относительная погрешность $\delta_c = |\Delta_{3\sigma}|/c$. В нашем примере $\delta_c = 4.5829 \cdot 10^{-5}/0.8149 = 5.6236 \cdot 10^{-5}$. Для упрощения выкладок условимся использовать *десятичный логарифм обратной относительной погрешности*, который для краткости назовём *добротностью* числа и обозначим буквой Q .

$$Q = \lg \left| \frac{1}{\delta} \right| = \lg \left| \frac{c}{\Delta_{3\sigma}} \right| \quad (\text{П2})$$

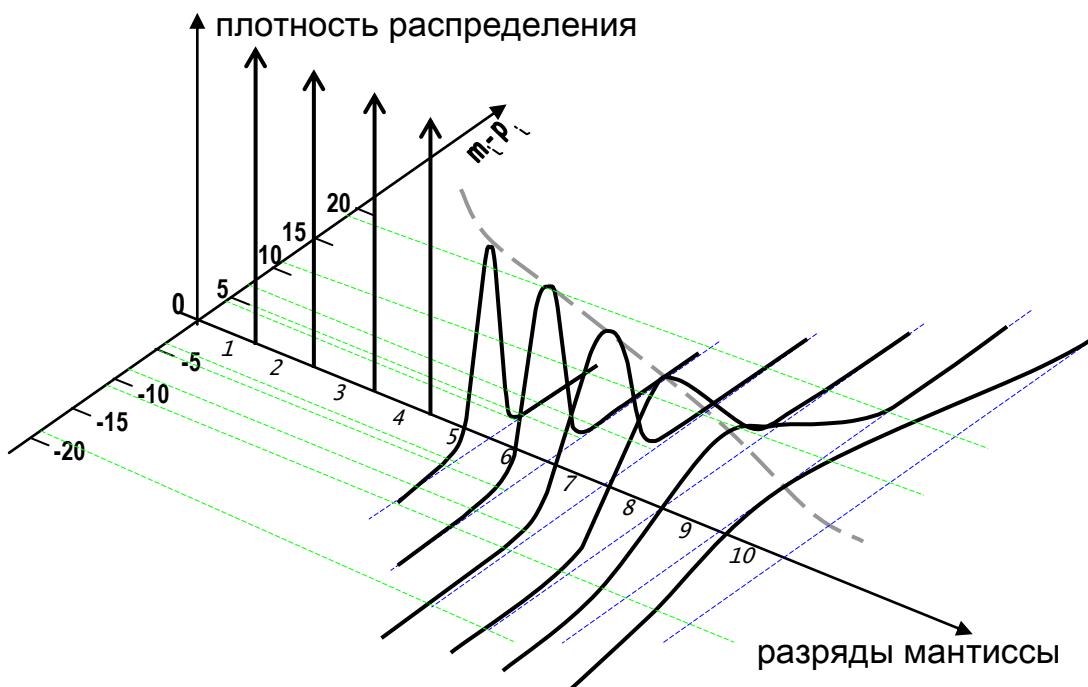


Рис. П3. Предлагаемое трёхмерное изображение числа с точными и переменными разрядами

В нашем примере $Q_c = 4.25$ (округление до 3-х знаков). Удобство восприятия величины добротности числа состоит в том, что наглядно видно количество верных цифр в мантиссе. Для выяснения смысла выражения «4.25 верных цифр» и переменной части числа нарисуем

трёхмерное изображение некоторого числа с постоянной и переменной составляющими (рис. П3).

Принято априори, что переменные разряды изменяются по нормальному закону, хотя возможен и равномерный закон изменения. Достоинством предложенной модели числа является прозрачное доказательство увеличения, например, относительной точности при сложении случайных чисел.

В рамках данной работы мы ограничим использование принятой модели числа для оценки качества вычисления определителя матрицы Гильберта. Используя известную формулу вычисления погрешности функции многих независимых друг от друга переменных, легко доказать, что добротность суммирования (вычитания) чисел a_1 с добротностью Q_1 , a_2 с Q_2, \dots , и a_n с Q_n вычисляется по формуле

$$Q_{a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_n} = \lg \frac{|a_1 \pm a_2 \dots \pm a_n|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 \cdot 10^{-2Q_{a_i}}}} \quad (\text{П3})$$

Для этих же чисел добротность их произведения (деления) вычисляется по формуле

$$Q = -\lg \sqrt{\sum_{i=1}^n 10^{-2Q_{a_i}}} \quad (\text{П4})$$

Как видим, из последней формулы величина произведения (деления) чисел a_1, a_2, \dots, a_n не принимает участия в определении добротности их произведения (деления).

Литература

1. Дмитришин Р., Точность редукции Гаусса // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В. Филаретова.– Ульяновск: УлГТУ, 2009.– Вып. 7.– С. 178–188.
2. Бахвалов Н., Численные методы.– М.: Наука, 1975.– 632 с.
3. Дорожовец М., Обработка результатов измерений: учебное пособие.– Львов: Изд. Национального ун-та «Львовская политехника», 2007.– 621 с. (на укр. языке).
4. Королёв Ф., Филаретов В., Сравнение единых и последовательных выражений матричных определителей по точности вычислений / Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов / под ред. В.В. Филаретова.–Ульяновск: УлГТУ, 2008.– С.79–95.

Дмитришин Роман Васильевич (Roman Dmytryshyn) – Prof., dr. hab., Rzeszow University of Technology, Department of Electrical and Computer Engineering, 2 W.Pola str., 35-959 Rzeszow, Poland, rdmytr@prz.rzeszow.pl, tel.+48 17 8544120, .+48 505 387 111.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБЪЕДИНЕННЫХ МАТРИЦ ДЛЯ АНАЛИЗА ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ УСТРОЙСТВ НА БАЗЕ МАГНИТО-ВЕНТИЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

А. В. Манин, В. В. Юдин, О. А. Москалев

Предложен способ анализа электромагнитных устройств методом объединенных матриц на примере статического компенсатора реактивной мощности на базе магнито-вентильных элементов. Разработан алгоритм построения матричных уравнений.

Применение компенсирующих устройств реактивной мощности для обеспечения энергоэффективности электрических сетей предприятий не вызывает сомнений. Неравномерные и резкопеременные графики потребления реактивной мощности при использовании современных электротехнологий требуют разработки специальных компенсаторов реактивной мощности (СКРМ), быстро реагирующих на скачки реактивной мощности в сети предприятия. Как правило, структура подобных компенсаторов состоит из реактивных элементов со сложными электромагнитными связями и нелинейными ключевыми элементами, анализ которой представляет ряд известных затруднений.

Одним из вариантов компенсатора, имеющего высокие удельные показатели и высокие динамические свойства, является статический компенсатор реактивной мощности, выполненный на базе магнито-вентильных элементов (МВЭ), однофазное исполнение которого представлено на рис. 1 [2].

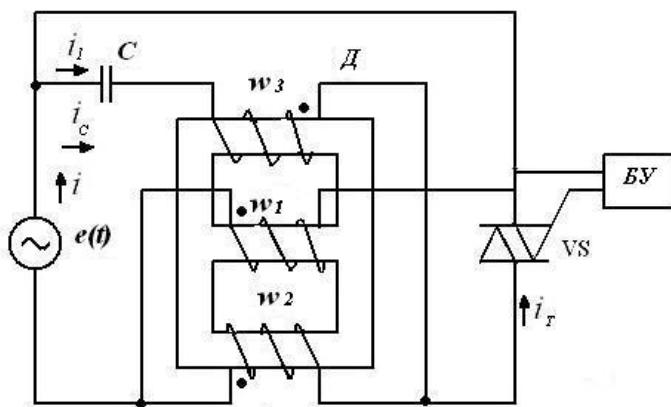


Рис. 1. Вариант реализации СКРМ на базе магнито-вентильных элементов в однофазном исполнении

Особенностью предлагаемого схемного варианта СКРМ является осуществление регулирования реактивной мощностью статического компенсатора по принципу переменной структуры в зависимости от

состояния тиристорного фазоуправляемого ключа VS. За время полупериода питающего сетевого напряжения компенсатор работает в общем случае в двух режимах. Первый режим соответствует закрытому состоянию симметричного тиристора VS, при этом устройство генерирует максимальную реактивную мощность в электрическую сеть. Второй – открытому состоянию тиристора VS, при котором обмотки среднего w_1 и крайнего w_2 стержней, при соответствующей между ними взаимоиндуктивной связи, оказываются включенными встречно, в результате, снижается их эквивалентное индуктивное сопротивление, вызывая протекание значительного индуктивного тока.

Конденсаторная батарея C оказывается связанный с сетью посредством только индуктивной связи через обмотку крайнего стержня w_3 . В зависимости от соотношения параметров обмоток и магнитопровода во втором режиме реактивная мощность СКРМ может быть равна нулю. Изменяя угол открытия тиристоров действующее значение реактивной мощности емкостного характера СКРМ можно изменять от максимально до нулевого значений. Управление симметричным тиристором осуществляется фазоимпульсным методом при естественной коммутации. Как показал предварительный анализ электрических параметров, предлагаемый вариант компенсатора обладает достаточно высокими удельными массогабаритными и энергетическими параметрами, а также и низкими стоимостными показателями.

Изложенному представлению физики процессов в компенсаторе может соответствовать электрическая схема замещения силовой части, представленная на рис. 2. Здесь $R_1, R_2, R_3, L_1, L_2, L_3, L_{S1}, L_{S2}, L_{S3}$ – активные сопротивления, собственные индуктивности и индуктивности рассеяния обмоток дросселя, ТК – идеализированный ключ, положения которого 1 и 2 соответствуют нечетным и четным временными интервалам, включение и выключение которого происходит мгновенно.

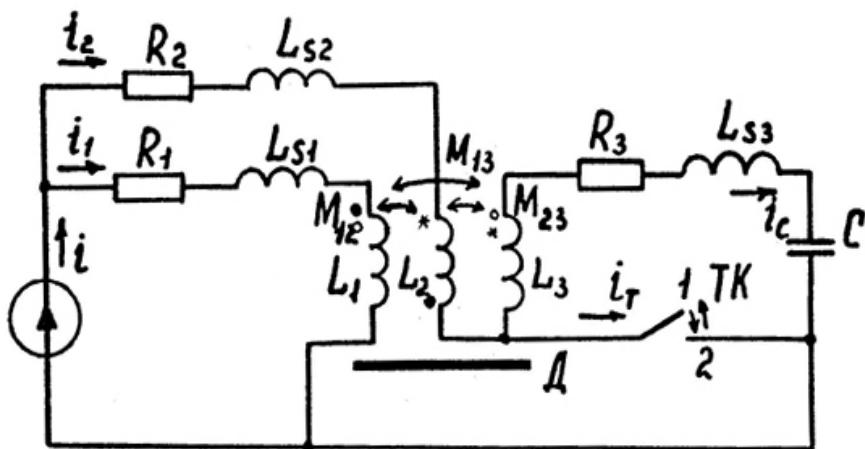


Рис. 2. Эквивалентная схема силовой цепи СКРМ на базе МВЭ

Система уравнений для схемы замещения на основании применения известных законов для электрической и магнитной цепей имеет вид:

– для нечетных временных интервалов:

$$\begin{aligned}
 e(t) &= R_1 i_1 + L_{S1} \frac{di_1}{dt} + w_1 S \frac{dB_1}{dt}; \\
 e(t) &= (R_2 + R_3) i_2 + (L_{S2} + L_{S3}) \frac{di_2}{dt} - w_2 S \frac{dB_2}{dt} - w_3 S \frac{dB_3}{dt} + u_C; \\
 u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i_2 dt + u_C(0); \\
 i &= i_1 + i_2; \\
 i_T &= 0; \\
 B_1 + B_2 + B_3 &= 0; \\
 i_1 w_1 - i_2 w_2 &= H_1 l - H_2 l_{kp}; \\
 i_1 w_1 - i_2 w_3 &= H_1 l - H_3 l_{kp}; \\
 H &= H(B);
 \end{aligned} \tag{1}$$

– для четных временных интервалов:

$$\begin{aligned}
 e(t) &= R_1 i_1 + L_{S1} \frac{di_1}{dt} + w_1 S \frac{dB_1}{dt}; \\
 e(t) &= R_2 i_2 + L_{S2} \frac{di_2}{dt} + w_2 S \frac{dB_2}{dt}; \\
 0 &= R_3 i_C + L_{S3} \frac{di_C}{dt} + w_3 S \frac{dB_3}{dt} + u_C; \\
 u_C(t) &= \frac{1}{C} \int i_C dt + u_C(0); \\
 i &= i_1 + i_2; \\
 i_2 &= i_T + i_C; \\
 B_1 + B_2 &= B_3; \\
 i_1 w_1 - i_2 w_2 &= H_1 l - H_2 l_{kp}; \\
 i_1 w_1 + i_C w_3 &= H_1 l + H_3 l_{kp}; \\
 i_2 w_2 + i_C w_3 &= H_2 l_{kp} + H_3 l_{kp}; \\
 H &= H(B).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $w_i S \frac{dB_i}{dt}$ – падение напряжения на i -й обмотке дросселя, B_i , H_i

– мгновенные значения магнитной индукции и напряженности магнитного поля в i -ом стержне дросселя, $H = H(B)$ – зависимость между магнитной индукцией и напряженностью магнитного поля, l_{kp} , l – средняя длина магнитных линий крайнего и среднего стержней сердечника дросселя соответственно, S – площадь сечения стали стержня трехфазного исполнения системы магнитопровода дросселя.

Система дифференциальных уравнений (1) и (2) в полной мере описывает реальные процессы в СКРМ. После приведения данных уравнений к нормированному виду и включения в них математической модели $H = H(B)$ сердечника дросселя может быть построен традиционный алгоритм расчета численными методами с помощью компьютера. Он предусматривает вначале решение системы (1) при нулевых начальных условиях, затем при $\alpha \leq \omega t \leq \beta$, где α , β – углы отпирания и выключения тиристора соответственно, переход на решение системы уравнений (2) с $i_T(0) = 0$ и начальными значениями переменных, равными их значениям в конце первого интервала. В конце второго интервала, при $i_T(\omega t_2) = 0$, осуществляется переход на решение системы уравнений (1) также с соответствующими начальными условиями и так далее. Однако такой подход не удобен для анализа работы компенсаторов в составе цифровых регуляторов мощности.

Более эффективно применение метода объединенных матриц. Суть метода состоит в замене исходной электромагнитной цепи (ЭМЦ) одной электрической цепью (ЭЦ) с дополнительными сопротивлениями, зависящими от параметров исходных ЭЦ и магнитной цепи (МЦ), топологических характеристик и характеристик связи [3]. Метод отличается высокой степенью формализации и возможностью масштабирования математической модели при применении блочных матриц.

Согласно метода объединенных матриц для произвольной ЭМЦ, в состав которой входит ЭЦ, содержащая n_v ветвей и n_k контуров, и МЦ, содержащая m_v ветвей и m_k контуров. Топологические свойства ЭЦ и МЦ описываются контурно-ветвевыми матрицами Γ_{EE} и Γ_{MM} , строкам которых соответствуют элементы множества контуров, а столбцам – элементы множества ветвей соответствующих цепей. При составлении матриц Γ_{EE} пользуются следующим правилом: если j -й контур включает в себя k -ю ветвь и направление его обхода совпадает с принятым положительным направлением ветви, то при пересечении j -й строки и k -го столбца матрицы записывают +1. Если j -й контур включает в себя k -ю ветвь, но направление его обхода отрицательное, то записывают -1. Если же j -й контур вообще не включает в себя k -ю ветвь, то пересечением строки и столбца является 0. Матрица Γ_{MM} составлена аналогичным способом.

Для установления связи между ЭЦ и МЦ вводятся матрица электромагнитной связи W_{EM} . На пересечении k -ой строки и l -го столбца матрицы W_{EM} записывают число витков w_{kl} обмотки, включенной в k -ю ветвь ЭЦ и размещенной на l -м стержне МЦ, взятое со знаком, соответствующим направлению её намотки. Если k -я строка ЭЦ не связана с l -м стержнем МЦ, на пересечении строки и столбца записывают 0.

Электрические и магнитные свойства ЭМЦ задаются матрицей сопротивлений ветвей ЭЦ – Z_B^E и матрицей сопротивлений ветвей МЦ – Z_K^M . Воздействие на ЭЦ задается матрицей комплексных ЭДС ветвей E_B .

В соответствии с методом объединенных матриц для ЭМЦ справедлива следующая система матричных уравнений

$$\begin{aligned} E_K &= Z_K^E I_K + Z_K^{EM} \Phi_K, \\ 0 &= Z_K^{ME} I_K + Z_K^M \Phi_K, \end{aligned} \quad (3)$$

в которых отражена связь контурных величин (э.д.с. E_K , токов I_K и потоков Φ_K) с контурными параметрами ЭМЦ (сопротивлениями ЭЦ Z_K^E , сопротивлениями МЦ Z_K^M , сопротивлениями электромагнитной и магнитоэлектрической связи Z_K^{EM} и Z_K^{ME}). При этом имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} Z_K^E &= \Gamma_{EE} Z_B^E \Gamma_{EE}^T, \quad Z_K^{EM} = p \Gamma_{EE} W_{EM} \Gamma_{MM}^T, \\ Z_K^{ME} &= -\Gamma_{MM} W_{ME} \Gamma_{EE}^T, \quad Z_K^M = \Gamma_{MM} Z_B^M \Gamma_{MM}^T, \\ E_K &= \Gamma_{EE} E_B, \quad I_B = \Gamma_{EE}^T I_K, \\ \Phi_B &= \Gamma_{EE}^T \Phi_K, \end{aligned} \quad (4)$$

где p – оператор дифференцирования.

Из (3) и (4) следует

$$I_K = \left[Z_K^E - Z_K^{EM} (Z_K^M)^{-1} Z_K^{ME} \right]^{-1} E_K. \quad (5)$$

Поскольку СКРМ функционирует при гармоническом или полигармоническом воздействии основные соотношения метода могут быть упрощены.

Для гармонического воздействия матрица сопротивлений контурной электромагнитной связи примет вид

$$Z_K^{EM} = j\omega \Gamma_{EE} W_{EM} \Gamma_{MM}^T.$$

В соответствии с этим для контурных токов из (5) и (4) получим

$$I_K = \left[\Gamma_{EE} Z_B^E \Gamma_{EE}^T - j\omega \Gamma_{EE} W_{EM} \Gamma_{MM}^T (Z_B^M)^{-1} \Gamma_{MM} W_{EM}^T \Gamma_{EE}^T \right]^{-1} E_K \quad (6)$$

Для учета взаимных индуктивностей определим матрицы ветвевых M_B и контурных M_K взаимных индуктивностей

$$M_B = \Gamma_{MM}^T (Z_B^M)^{-1} \Gamma_{MM} \text{ и } M_K = \Gamma_{EE} M_B \Gamma_{EE}^T.$$

С учетом их из (6) получим

$$I_K = \left[\Gamma_{EE} Z_B^E \Gamma_{EE}^T - j\omega \Gamma_{EE} M_B \Gamma_{EE}^T \right]^{-1} E_K. \quad (7)$$

Для удобства анализа выделим в матрице ветвевых сопротивлений активную, индуктивную и емкостную составляющие

$$Z_B^E = R_B + j\omega L_B - \frac{1}{j\omega} C_B^{-1} \quad (8)$$

где R_B , L_B и C_B – диагональные матрицы, содержащие активных сопротивления, индуктивности и емкости ветвей электрической цепи.

Соотношение (7) с учетом выражения (8) примет вид

$$I_K = \left[\Gamma_{EE} \left(R_B + j\omega(L_B - M_B) - \frac{C_B^{-1}}{j\omega} \right) \Gamma_{EE}^T \right]^{-1} \Gamma_{EE} E_B. \quad (9)$$

При воздействии на СКРМ э.д.с. с частотой ω и амплитудой A матрица ветвевых э.д.с. E_B будет содержать одно значение в комплексной форме

$$e = A e^{j\omega t}.$$

В случае полигармонического воздействия на СКРМ совокупности эдс с частотами кратной основной частоте ω при учете N гармоник в спектре воздействия, вектор эдс ветвей E_B будет содержать значение в виде

$$e = \sum_{k=-N}^N A_k e^{jk\omega t}.$$

Для вектора контурных токов при этом получим

$$I_B = \sum_{k=-N}^N \left[\Gamma_{EE} \left(R_B + jk\omega(L_B - M_B) - \frac{C_B^{-1}}{jk\omega} \right) \Gamma_{EE}^T \right]^{-1} \Gamma_{EE} E_B. \quad (10)$$

Состав остальных матриц зависит от режима работы. Первому режиму (открытое состояние ключа) соответствует топологическая модель на рис. 3. Данная модель содержит два электрических контура (обозначены римскими цифрами и стрелкой с пунктирной линией) и три ветви электрической цепи (обозначены арабскими цифрами). Магнитная цепь представлена двумя магнитными контурами (обозначены римскими цифрами и утолщенными стрелками) и тремя магнитными ветвями (обозначены арабскими цифрами и выделены жирностью). Составим соответствующие этой цепи матрицы:

$$\begin{aligned} \Gamma_{EE} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{MM} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_{EM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & 0 \\ w_2 & 0 & -w_3 \end{pmatrix}, \\ R_B^E &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 + R_3 \end{pmatrix}, \quad C_B^{E^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C^{-1} \end{pmatrix}, \quad E_B = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ Z_B^M &= \begin{pmatrix} 1_{kp}/\mu\mu_0 S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\mu\mu_0 S_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1_{kp}/\mu\mu_0 S_3 \end{pmatrix}, \quad L_B^E = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

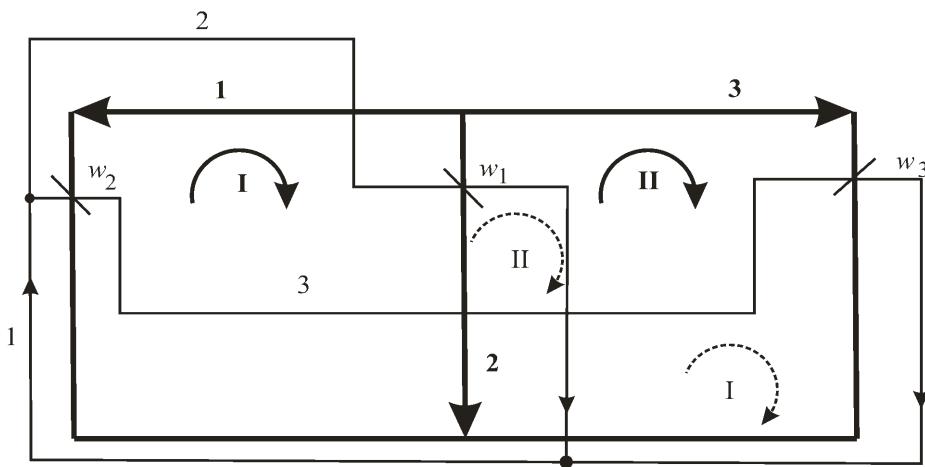


Рис. 3. Топологическая модель цепи СКРМ в первом режиме работы

Аналогичные топологическую модель (рис. 4) и соответствующие ей матрицы составим для второго режима (замкнутое состояние ключа).

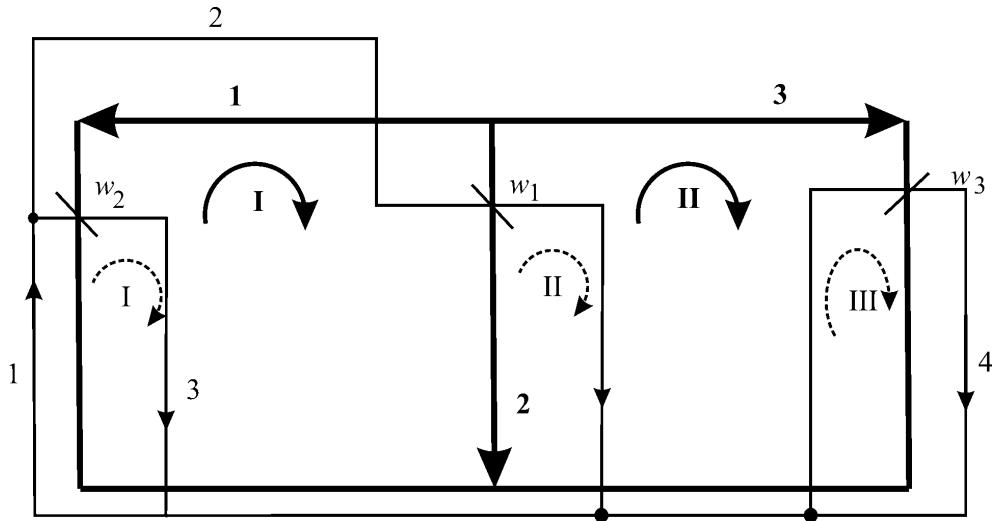


Рис. 4. Топологическая модель цепи СКРМ во втором режиме работы

Данная модель содержит три электрических контура (обозначены римскими цифрами и стрелкой с пунктирной линией) и четыре ветви электрической цепи (обозначены арабскими цифрами). Магнитная цепь изменений не претерпела. Составим соответствующие этой цепи матрицы:

$$\Gamma_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_{EM} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & w_1 & 0 \\ w_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -w_3 \end{pmatrix}, \quad R_B^E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_3 \end{pmatrix},$$

$$C_B^{E^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C^{-1} \end{pmatrix}, \quad E_B = \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Z_B^M = \begin{pmatrix} l_{kp} / \mu\mu_0 S_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 / \mu\mu_0 S_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_{kp} / \mu\mu_0 S_3 \end{pmatrix},$$

$$L_B^E = 0. \quad (12)$$

Значения элементов матриц ветвей могут быть найдены исходя из параметров трансформатора, на базе которого конструируется СКРМ. Например, для сердечника трёхфазного трансформатора стержневого типа при расчётной мощности 16,5 кВА, характеризуемого следующими геометрическими размерами: толщина стержня магнитопровода $a = 57,1$ мм, ширина магнитопровода $b = 114,2$ мм, зазор $c = 85,65$ мм, высота магнитопровода $h = 171,3$ мм, определяются средние длины магнитных линий стержней l_{kp} , l и площади поперечного сечения $S = S_1 = S_2 = S_3$. Относительная магнитная проницаемость стали используемой в сердечнике (Э330А) составляет около 550. Числа витков на

соответствующих стержнях магнитопровода принимаем равными: $w_1 = 73$, $w_2 = 68$ и $w_3 = 68$. Для данного класса трансформаторов характерна плотность тока $2,5 \text{ А/мм}^2$ и материала проводника из меди (удельное сопротивление меди $0,0172 \text{ Ом}\cdot\text{м}$). По геометрическим параметрам обмоток и известным соотношениям определяем сопротивления обмоток: $R_1 = 0,1075 \text{ Ом}$, $R_2 = 0,0412 \text{ Ом}$, $R_3 = 0,1075 \text{ Ом}$. Типовое значение емкости конденсаторной батареи, которое является варьируем в процессе оптимизации структуры компенсатора, составляет 108 мкФ . Все перечисленные параметры являются элементами матриц (11), (12), после вычисления которых и подстановки в (9), определяем значение тока $I_K = 52,5 \text{ А}$, при этом внешние параметры цепи R_B и L_B не учитываем. Для электрической сети низкого напряжения $E = 0,4 \text{ кВ}$ реактивная мощность компенсатора (однофазное исполнение) составит 21 кВАр .

Вывод. Рассмотренный способ анализа электромагнитных устройств методом объединенных матриц позволяет проводить анализ режимов работы СКРМ в составе цифровых регуляторов мощности, что позволяет проектировать электромагнитные устройства со сложной изменяющейся структурой, обладающие оптимальными характеристиками с точки зрения качества регулирования реактивной мощности в узле электрической сети.

Литература

1. Шидловский А. К., Кузнецов В. Г. Повышение качества энергии в электрических сетях. – Киев: Наук. думка, 1985. – 268с.
2. А.с. 1062826 SU: МПК⁴ 4 Н 02 Я 3/18. Источник реактивной мощности / Горшечников В. А., Манин А. В., Савиновский Ю. А.; заявитель Рыбинский авиационный технологический институт; заявлено 01. 11. 82; опубл. 23. 12. 83, бюл. № 47. – 3 с.
3. Юдин В. В. Расчет линейных электромагнитных цепей методом объединенных матриц // Электричество, 1987, №7.– С. 67–75.

Юдин Виктор Васильевич – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой электротехники и промышленной электроники ФГБОУ ВПО «Рыбинская государственная авиационная технологическая академия имени П. А. Соловьева» (РГАТА). E-mail: yudinvv47@mail.ru

Манин Алексей Васильевич – кандидат технических наук, доцент кафедры электротехники и промышленной электроники ФГБОУ ВПО РГАТА. E-mail: manin-rgata@mail.ru

Москалева Ольга Александровна – аспирант ФГБОУ ВПО РГАТА. E-mail: dynkino@mail.ru

Статья подготовлена в рамках Госконтракта по ФЦП «Наука и научно-педагогические кадры инновации России 2009-2013г.г.»

ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ОЦЕНОК ПОКАЗАТЕЛЕЙ СТРУКТУРНОЙ НАДЕЖНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. А. Гришкевич, А. Е. Бурмутаев

Численные данные, особенно о показателях надежности, весьма условны. Разумно считать, что показатели надежности элементов известны с некоторой неопределенностью, которую будем предполагать интервальной. Соответственно, неопределенность должна быть присуща и результирующим показателям структурной надежности, полученным расчетными методами на основе таких данных. В этой связи представляется важным развитие методов получения интервальных оценок результирующих показателей надежности при принятых допущениях на неопределенность исходных данных [1].

Интервальные оценки для формул частного вида при расчетах надежности рассматривались в [2,3]. В настоящей статье оценивается трудоемкость проведения статистического моделирования и устанавливаются границы применимости методов статистического моделирования при получении интервальных оценок результирующих показателей структурной надежности электрических систем методом пространства состояний.

Интервальные оценки показателей структурной надежности. Критерий отказа электрической системы L позволяет однозначно разделить пространство состояний электрической системы $\Omega = \Omega(L) = \{\omega\}$ на два подмножества – работы Ω_W и отказа Ω_F , причем $\Omega_W \cup \Omega_F = \Omega$, $\Omega_W \cap \Omega_F = \emptyset$.

Задача оценки надежности электрической системы методом пространства состояний (марковских процессов) [4,5] заключается в определении асимптотических значений показателей надежности, к которым относятся следующие показатели. *Вероятность состояния отказа* системы P_F , равная вероятности пребывания системы в совокупном состоянии Ω_F

$$P_F = \sum_{\omega \in \Omega_F} P(\omega),$$

где $P(\omega)$ – вероятность пребывания системы в состоянии ω . Средний параметр потока отказов системы f_F , равный частоте возникновения совокупного состояния Ω_F

$$f_F = \sum_{\omega \in \Omega_F} f(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega_F} P(\omega) \left(\sum_{v \in \Omega_W} f_{\omega v} \right),$$

где $f_{\omega v}$ – интенсивность переходов системы из состояния ω в состояние v . Средняя продолжительность состояния отказа системы

$$T_F = P_F / f_F,$$

равная средней продолжительности пребывания системы в совокупном состоянии Ω_F . Среднее время безотказной работы системы

$$T_W = P_W / f_W = (1 - P_F) / f_F,$$

равное средней продолжительности пребывания системы в совокупном состоянии Ω_W . Здесь P_W – вероятность состояния успешной работы системы, f_W – частота возникновения совокупного состояния Ω_W (равная частоте f_F возникновения совокупного состояния Ω_F).

Пусть каждый элемент $I \in L$ электрической системы (применительно к электроэнергетике это трансформатор, выключатель и т.д.) может находиться в одном из четырех состояний. Будем считать I_N состоянием нормальной работы, I_S – состоянием между отказом и завершением оперативных переключений, I_R – состоянием аварийного ремонта, I_M – состоянием предупредительного ремонта (преднамеренного отключения) элемента I . Состояние системы

$$\omega = \{I_\alpha : I \in L, \alpha \in \{M, N, R, S\}\} \in \Omega$$

определяется состоянием каждого элемента системы. При практических расчетах надежности удобным оказывается рассмотрение только подмножества [6,7] множества состояний отказа

$$\begin{aligned} \Omega_F^* = & \{I_S, I_R, I_M, I_R K_R, I_R K_M, I_R K_S, I_S K_M, I_S K_S, \\ & I_R K_R O_R, I_R K_M O_R, I_R K_S O_S, I_R K_M O_S, I_R K_S O_S, \\ & I_S K_M O_S, I_S K_S O_S : I, K, O \in L\} \subseteq \Omega_F. \end{aligned}$$

Установившиеся вероятности состояний при известных ограничениях удовлетворяют системе уравнений [4]

$$\begin{cases} P_{1 \times n} A_{n \times n}^T = O_{1 \times n} (A_{n \times n} P_{n \times 1} = O_{n \times 1}), \\ P_{1 \times n} I_{n \times 1} = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где n – число рассматриваемых состояний; $P = (p_i)$ – вектор, i -м членом которого является p_i , т.е. стационарная вероятность нахождения в i -м состоянии; O – нулевой вектор; $A_{n \times n}^T$ – матрица интенсивностей переходов; $A_{n \times n} = (a_{ij})$ – транспонированная матрица интенсивностей переходов, элементы которой

$$\begin{cases} a_{ij} = \lambda_{ij} \text{ при } i \neq j, \\ a_{ii} = -\sum_{j \neq i} \lambda_{ij}, \end{cases} \quad (2)$$

выражаются через λ_{ij} – интенсивности переходов из состояния i в состояние j . Исходные данные о интенсивностях переходов λ_{ij} зададим в виде интервальных чисел [8]

$$[\lambda_{ij}] = [\underline{\lambda}_{ij}, \bar{\lambda}_{ij}] = [\lambda_{ij}^c(1-\varepsilon), \lambda_{ij}^c(1+\varepsilon)],$$

где $\lambda_{ij}^c = (\underline{\lambda}_{ij} + \bar{\lambda}_{ij})/2$. Такое представление соответствует неопределенности в исходных данных $\underline{\lambda}_{ij} \leq \lambda_{ij} \leq \bar{\lambda}_{ij}$.

Система (1) превращается в систему интервальных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} P_{1 \times n} [A_{n \times n}^T] = O_{1 \times n} & ([A_{n \times n}]P_{n \times 1} = O_{n \times 1}), \\ P_{1 \times n} I_{n \times 1} = 1, \end{cases} \quad (3)$$

где $[A] = ([a_{ij}])$ – интервальная матрица.

Множеством решений системы (3) называется множество

$$\Xi([A]) = \{X : \exists A \in [A] \Rightarrow XA^T = O, XI = 1\}, \quad (4)$$

образованное всевозможными решениями $P = (p_i)$ систем (1), когда матрица A пробегает множество значений $[A]$ [9].

Элементы интервальной матрицы $[A]$ зависят вследствие соотношений (2). Соответственно система (3) представляет интервальную систему линейных алгебраических уравнений со связанными параметрами [9]. Точное описание множества решений интервальной системы уравнений слишком трудоемко и практически нужно не часто, так что ограничиваются нахождением тех или иных его оценок. При этом наибольшую ценность имеет интервальная оценка множества решений $[P] = ([p_i])$.

Одной из наиболее популярных задач оценивания множества решений $\Xi([A])$ является задача отыскания интервального вектора $[P] = ([p_i])$, гарантированного содержащего $\Xi([A])$ [10]. Указанное требование описывается условием

$$\forall X \in \Xi([A]) \Rightarrow X \in [P]. \quad (5)$$

Для отыскания указанной интервальной оценки решений систем линейных уравнений в настоящее время разработаны интервальные версии методов исключения Гаусса, Гаусса-Зейделя, Кравчука [8], программные реализации которых доступны в интернете [11,12]. Однако применение указанных методов при оценке надежности в большинстве случаев дает неудовлетворительные результаты из-за чрезмерных длин получаемых результатов. Причина заключается в прослеживании на каждой элементарной операции всевозможных, в том числе наихудших, сочетаний погрешностей. В действительности при обычном ходе вычислений ошибки

могут усредняться, компенсироваться и накапливаться далеко не худшим образом.

В методах Монте-Карло неопределенности и неоднозначности в исходных данных заменяются некоторыми вероятностными распределениями (как правило равномерными) которые далее моделируются на ЭВМ путем статистических испытаний. На основе этих данных строится подмножество множества решений уравнения $\Xi([A])$. Минимальные и максимальные оценки, полученные по результатам испытаний, определяют интервальный вектор $[P] = ([p_i])$. В этом случае сокращение длин оцениваемых интервалов может происходить за счет ослабления условия (5), которое должно выполняться с достаточно большой вероятностью (приемлемой достоверностью). Эта вероятность определяется количеством проведенных испытаний. Статистические подходы к моделированию погрешностей дают в целом неплохое качественное представление о поведении ошибки, но не влекут гарантированных оценок для конкретных приближенных решений [10]. Однако ответ, вероятность правильности которого превосходит, скажем $1-10^{-8}$, можно считать уже практически достоверным [13].

Пример. Марковская модель функционирования элемента I с соответствующими интенсивностями перехода между состояниями представлена на рис.1. Соответственно, для представленной модели

$$\begin{aligned} P &= (p_1, p_2, p_3, p_4) = (P(I_M), P(I_N), P(I_R), P(I_S)), \\ a_{11} &= a_{MM} = -\mu_{MN}(I), \quad a_{12} = a_{MN} = \lambda_{NM}(I), \\ a_{21} &= a_{NM} = \mu_{MN}(I), \quad a_{22} = a_{NN} = -\lambda_{NS}(I) - \lambda_{NM}(I), \quad a_{23} = a_{NR} = \mu_{RN}(I), \\ a_{33} &= a_{RR} = -\mu_{RN}(I), \quad a_{34} = a_{RS} = \mu_{SR}(I), \\ a_{42} &= a_{SN} = \lambda_{NS}(I), \quad a_{44} = a_{SS} = -\mu_{SR}(I). \end{aligned}$$

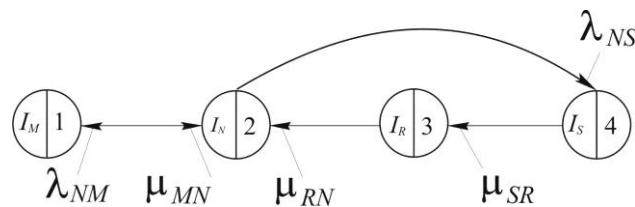


Рис.1. Марковская модель для одного элемента

Численные тестовые данные показателей надежности элемента взяты согласно [6] $\lambda_{NS}^c(I) = 0.01$ 1/год, $\lambda_{NM}^c(I) = 2.2$ 1/год,

$$\begin{aligned} T_{SR}^c(I) &= 1 / \mu_{SR}^c(I) = 2 \text{ ч/ремонт}, \quad T_{RN}^c(I) = 1 / \mu_{RN}^c(I) = 11.39 \text{ ч/ремонт}, \\ T_{MN}^c(I) &= 1 / \mu_{MN}^c(I) = 7.96 \text{ ч/ремонт}. \end{aligned}$$

Неопределенность показателей надежности в 10% зададим параметром $\varepsilon = 0.1$. Результаты статистического моделирования интервалов вероятностей состояний для модели, описывающей функционирование одного элемента, приводятся в табл.1.

Таблица 1
Интервальные оценки решений системы (3) для одноэлементной модели

Число испытаний	Интервальные оценки вероятностей состояний <i>час в год</i>
10	$PIm^*8760=[16.524620410094194, 20.415822855761075]$ $PIn^*8760=[8739.4431058569044, 8743.3396819732443]$ $PIr^*8760=[0.097632502427922541,$ $0.12347986116822296]$ $PIs^*8760=[0.016740264255697093,$ $0.021730223104508513]$
100	$PIm^*8760=[14.560615687850154, 21.003964313273119]$ $PIn^*8760=[8738.8722557430174, 8745.3105086588457]$ $PIr^*8760=[0.092318501430467534,$ $0.13657983391351811]$ $PIs^*8760=[0.016667811808245406,$ $0.023741129408423132]$
1 000	$PIm^*8760=[14.341808360314586, 21.060738291010711]$ $PIn^*8760=[8738.8080968919821, 8745.5257286452343]$ $PIr^*8760=[0.092269095935692297,$ $0.13670613978845697]$ $PIs^*8760=[0.016284886766824509,$ $0.023958953763406832]$
10 000	$PIm^*8760=[14.202650569576514, 21.091541720469916]$ $PIn^*8760=[8738.7887771700007, 8745.6697963496426]$ $PIr^*8760=[0.092269095935692297,$ $0.13697434461901542]$ $PIs^*8760=[0.016274718074709513,$ $0.024051247873105145]$
100 000	$PIm^*8760=[14.176834691798561, 21.131524320610453]$ $PIn^*8760=[8738.7391079794361, 8745.6971060959368]$ $PIr^*8760=[0.092128980431027935,$ $0.13754001734580554]$ $PIs^*8760=[0.016175970647252763,$ $0.024137322080812717]$
1 000 000	$PIm^*8760=[14.165119162612115, 21.133167549297642]$ $PIn^*8760=[8738.7218439782428, 8745.7071840407025]$ $PIr^*8760=[0.092102255203632938,$ $0.13754001734580554]$ $PIs^*8760=[0.016170263813093076,$ $0.024156737097363327]$
10 000 000	$PIm^*8760=[14.162318298444626, 21.136544805178584]$ $PIn^*8760=[8738.7146173013407, 8745.7152987166537]$ $PIr^*8760=[0.09207080075229955,$ $0.13754001734580554]$ $PIs^*8760=[0.016167041795345803,$ $0.024156737097363327]$
100 000 000	$PIm^*8760=[14.162318298444626, 21.137828119856263]$ $PIn^*8760=[8738.708941875293, 8745.7242791186727]$ $PIr^*8760=[0.092050712253924735,$ $0.13756008883125534]$ $PIs^*8760=[0.016164465050288051,$ $0.024157855574829811]$
32 (перебор комбинаций крайних точек)	$PIm^*8760=[14.161526880138039, 21.138127375235499]$ $PIn^*8760=[8738.7003764956553, 8745.7301043530588]$ $PIr^*8760=[0.092035199193331599,$ $0.13759372421951946]$ $PIs^*8760=[0.016160671123254759,$ $0.024160500116954853]$

Программа моделирования была реализована на языке C++. Генерации равномерно распределенных чисел внутри интервала производилась функцией `rand()` библиотеки `<stdlib.h>`.

Можно показать, что система (описывающая функционирование одного элемента) из рассмотренного примера, удовлетворяет теореме Бека-Никеля [9, стр. 241, теорема 5.3.4], в общем случае не справедливой для систем линейных алгебраических уравнений со связанными параметрами. Соответственно точные минимальные и максимальные покоординатные оценки точек из множества решений (4) достигаются на решениях систем уравнений (1) с матрицей A , образованной концами интервальных элементов $[\lambda_{NS}], [\lambda_{NM}], [T_{SR}], [T_{RN}], [T_{MN}]$. Это позволяет перебором 32 случаев получить точные интервальные оценки вероятностей. Анализ полученных результатов показывает, что увеличение числа испытаний больше 10 000 \div 100 000 преимущественно сказывается на достоверности процедуры статистического моделирования, а не на точности получаемой интервальной оценки.

Статистическое моделирование осуществлялось на персональном компьютере с процессором Intel® Core™ 2 Quard CPU Q6600 @ 2.40 GHz. Система линейных уравнений численно решалась процедурой `rmatrixsolve` библиотеки ALGLIB [14]. Аналитические решения системы линейных уравнений 4 порядка для модели одного элемента и системы линейных уравнений 15 порядка для модели двух элементов [15] были получены на основе символьного матричного процессора MATSYM [16]. Оценки времени моделирования приводятся в табл.2.

Таблица 2

Время моделирования интервальных оценок вероятностей состояний методом Монте-Карло (процессор Intel® Core™ 2 Quard CPU Q6600 @ 2.40 GHz)

Число испытаний	Система уравнений $A_{n \times n}$, решение							
	$A_{4 \times 4}$				$A_{15 \times 15}$			
	численное	аналитическое	численное	аналитическое	численное	аналитическое	численное	аналитическое
	<i>c</i>	<i>ч:м:с</i>	<i>c</i>	<i>ч:м:с</i>	<i>c</i>	<i>ч:м:с</i>	<i>c</i>	<i>ч:м:с</i>
	10 000	2	2	2	2	4	4	2
	100	2	25	24	24	4	47	2
000	5				7		6	
1 000	2	4 : 3	269	4 : 2	4	8 : 1	2	4 :
000	77	7		9	98	8	90	50
10 000	3	50 :	2	46 :	5	1 : 2	3	55
000	050	50	777	17	133	5 : 33	301	: 01
100 000	3	9 : 0	30	8 : 2	5	15 :	3	9 :
0 000	2 808	6 : 48	293	4 : 53	4 707	11 : 47	4 887	41 : 27

При этом лучшие значения оценок для используемой двухэлементной модели были достигнуты при 1024 испытаниях на крайних точках интервалов исходных данных. Это свидетельствует о возможности

использования граничных оценок теоремы Бека-Никеля для получения интервальных оценок решений (4) на некоторых областях изменения исходных данных.

Использование нескольких компьютеров (многопроцессорных систем и/или суперкомпьютеров) позволяет проводить интервальные расчеты результирующих показателей структурной надежности методом статистического моделирования с учетом десятков/сотен комбинаций 20 моделируемых состояний (например, одиночных/двойных отказов элементов) с весьма высокой степенью достоверности ($1-10^{-8}$ и выше). На существующих персональных компьютерах могут производиться оценочные расчеты с приемлемой степенью достоверности (до $1-10^{-6}$).

Вывод. Быстродействие современной компьютерной техники позволяет использовать методы статистического моделирования в инженерных расчетах надежности сложных электрических систем для получения интервальных оценок асимптотических показателей структурной надежности таких систем.

Литература

1. Ge H., Asgarpoor S. Reliability evaluation of equipment and substations with fuzzy Markov processes // IEEE Transactions on Power Systems. – Vol. 25. – No. 3. –2010. – P.1319-1328.
2. Filipiak S.: Methods of reliability estimations of high/medium voltage electrical substations // Numerical Methods and Computer Systems in Automatic Control and Electrical Engineering. – Częstochowa: Częstochowa University of Technology, 2005. – S. 97-102.
3. Grishkevich A.A., Piątek Ł., Burmutaew A. Метод интервальной оценки показателей структурной надежности схем систем электроснабжения // Proceedings of the Fifth International Scientific Symposium ELEKTROENERGETIKA 2009. – Stará Lesná, Slovakia: Technical University of Kosice, 2009. – P. 302-304.
4. Эндрени Дж. Моделирование при расчетах надежности в электроэнергетических системах. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 336 с.
5. Диллон Б., Сингх Ч. Инженерные методы обеспечения надежности систем. – М.: Мир, 1984. – 318 с.
<http://www.ece.tamu.edu/People/bios/singh/enggreliability/>
6. Гришкевич А.А. Комбинаторные методы исследования экстремальных структур математических моделей электрических цепей и систем. – Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 2004. – 258 с.
7. Grishkevich A.A., Hudym V.I., Kruczinin A.M., Sawicki A. Zagadnienia energetyczne wybranych współczesnych urządzeń i systemów elektrostalowniczych / Pod redakcją A.Sawickiego. Seria Monografie. Nr. 195. – Częstochowa: Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, 2010. – 272 s.

8. Жолен Л., Кифер М., Дири О., Вальтер Э. Прикладной интервальный анализ. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. – 467с.
<http://www.nsc.ru/interval/Library/AppBooks/ApIntAnal.pdf>
9. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ.
<http://www.nsc.ru/interval/Library/InteBooks/SharyBook.pdf>
10. Шарый С.П. Интервальный анализ или методы Монте-Карло? // Вычислительные Технологии. – Т. 12. – № 1. – 2007. – С. 103-115.
<http://www.nsc.ru/interval/Library/Thematic/ILSystems/MonteCarlo.pdf>
11. Knüppel O. Programmer's Runtime Optimized Fast Interval Library / Basic Interval Arithmetic Subroutines (PROFIL/BIAS)
http://www.ti3.tu-harburg.de/knueppel/profil/index_e.html
<http://www.ma.is.saga-u.ac.jp/minamoto/profil/PROFILEnglish.html>
12. A Scilab Interface for Interval Analysis (Int4Sci).
<http://www-sop.inria.fr/coprin/logiciels/Int4Sci/>
13. Блехман И.И., Мышикис А.Д., Пановко Я.Г. Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука, – 1990.
14. Многоязыковая коллекция алгоритмов численного анализа и обработки данных (ALGLIB). <http://alglib.sources.ru/>
15. Гришкевич А.А., Бурмутаев А.Е. Аналитические формулы для вычисления вклада сечений в результирующие показатели надежности // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 113–117.
16. Филаретов В.В. Символьный схемно-матричный процессор и интерпретатор (MATSYM). <http://astrometric.sai.msu.ru/~symbol/>

Гришкевич Андрей Александрович – д.т.н., чл.-корр. АЭН, профессор Ченстоховского политехнического института; Polska, 42-200, Czestochowa, Al. Armii Krajowej, 17, Politechnika Czestochowska (Czestochowa university of technology)); e-mail: a.grischkevich@el.pcz.czest.pl; grishkev_ramb@rambler.ru

Бурмутаев Андрей Евгеньевич – аспирант Тольяттинского государственного университета; Россия, 445667, Тольятти, Самарская обл., ул. Белорусская, 14; e-mail: a.burmataev@mail.ru

ЦИФРОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА

КОМПЕНСАТОР НЕЛИНЕЙНЫХ ИСКАЖЕНИЙ В УСИЛИТЕЛЕ МОЩНОСТИ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ВОЛЬТЕРРЫ С ДЕВИАЦИЕЙ ДИНАМИКИ

Е. Б. Соловьева, К. И. Дорофеев

В широкополосных системах передачи данных используются усилители мощности (УМ) с высокими энергетическими характеристиками (высоким КПД), которые порождают нелинейные искажения двух типов [1]: амплитудную конверсию АМ/АМ, вызванную безынерционной амплитудной нелинейностью; амплитудно-фазовую конверсию АМ/ФМ, заключающуюся в фазовой модуляции компонент выходного сигнала при изменении огибающей воздействия со многими несущими.

Одним из способов борьбы с нелинейными искажениями является линеаризация УМ путем предварительного искажения входного сигнала, которое, преобразуясь в УМ, компенсирует искажения усилителя. Для реализации данного подхода синтезируется цифровой предкомпенсатор (ПК), включаемый в систему передачи цифровых данных на стороне передатчика.

При построении ПК требуется найти компромисс между точностью линеаризации УМ, аппаратными затратами на синтез ПК, быстродействием алгоритма расчета и скоростью адаптации модели предкомпенсатора.

Среди моделей ПК наиболее распространеными являются следующие модификации отрезка Вольтерры:

- полином с памятью (memory polynomial, MP) [1];
- усеченный ряд Вольтерры с многомерной динамикой (dynamic deviation reduction-based Volterra series, DDRBVS) [2], [3];
- радиально ограниченная модель Вольтерры (radially pruned Volterra model, RPVM) и упрощенная радиально ограниченная модель Вольтерры (simplified radially pruned Volterra model, SRPVM) [4].

Указанные полиномиальные модели обладают известным недостатком: желаемая точность линеаризации УМ достигается при высокой степени и длине памяти модели ПК. Построенная модель ПК весьма сложна и плохо реализуема на практике.

В статье предлагается модель Вольтерры с многомерной девиацией динамики (dynamic deviation Volterra model, DDVM), на основе которой частично удается снять проблему высокой размерности полиномиальной

аппроксимации оператора ПК; рассматривается компенсация нелинейных искажений сигналов в УМ, описываемом моделью Винера-Гаммерштейна.

Модель Вольтерры с многомерной девиацией динамики (DDVM). Структура DDVM 4-й степени при вещественном входном сигнале $x(n)$ изображена на рис. 1. На рис. 1, а показано формирование сигнала $y_{01}(n)$ – реакции части модели с нулевой и одномерной девиациями динамики, на рис. 1, б – получение выходного сигнала $y(n)$ DDVM.

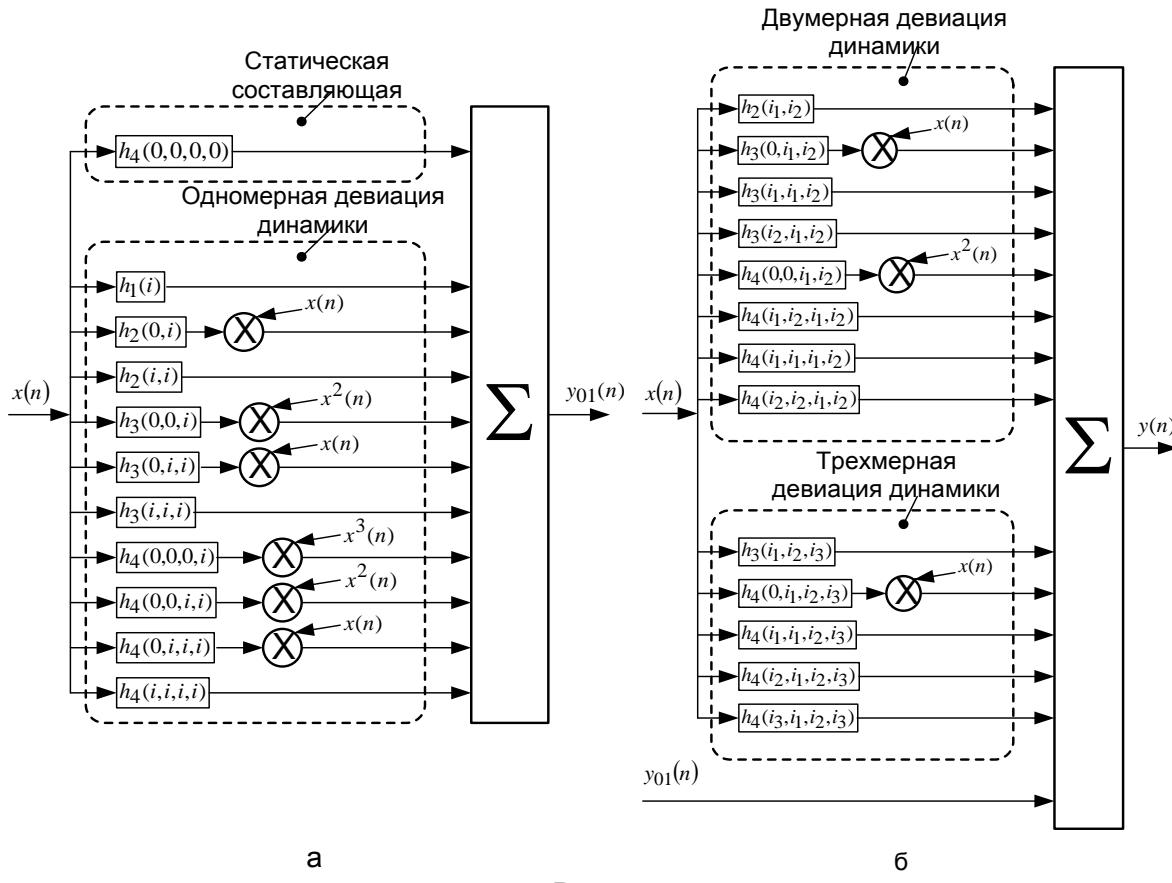


Рис. 1

Составляющие DDVM строятся на сечениях многомерного временного пространства при варьировании количества переменных i_1, i_2, \dots, i_k , описываемых динамику модели.

Модель Вольтерры с одномерной девиацией динамики (one-dimensional dynamic deviation Volterra model, 1-D_DDVM). 1-D_DDVM с нулевой и одномерной девиациями динамики для комплексных огибающих сигналов с амплитудно-фазовой модуляцией имеет вид

$$\begin{aligned}
y(n) = & \sum_{k=0}^{(P-1)/2} \sum_{i=0}^M h_{2k+1}^{(1)} |x(n-i)|^{2k} x(n-i) + \\
& + \sum_{k=0}^{(P-(1+2R))/2} \sum_{i=1}^M |x(n-i)|^{2k} x(n-i) \sum_{m=1}^R h_{2k+1,2m}^{(2)} |x(n)|^{2m} + \\
& + \sum_{k=0}^{(P-3)/2} \sum_{i=1}^M h_{2k+3}^{(3)} |x(n-i)|^{2k} x^*(n-i) x^2(n) + \\
& + \sum_{k=0}^{(P-(3+2R))/2} \sum_{i=1}^M |x(n-i)|^{2k} x^*(n-i) x^2(n) \sum_{m=1}^R h_{2k+3,2m}^{(4)} |x(n)|^{2m}, \quad (1)
\end{aligned}$$

где * – знак комплексного сопряжения; P , M – степень и длина памяти 1-D_DDVM соответственно.

Частным случаем 1-D_DDVM (1) является полином

$$\begin{aligned}
y(n) = & \sum_{i=0}^M x(n-i) \sum_{k=0}^{(P-1)/2} a_{2k+1}^{(1)} |x(n-i)|^{2k} + \\
& + \left[\sum_{i=1}^M x(n-i) \sum_{k=1}^{(P-1)/2} a_{2k+1}^{(2)} |x(n)|^{2k} + \right. \\
& + \sum_{i=1}^M x(n-i) \sum_{k=1}^{(P-1)/4} a_{4k+1}^{(3)} (|x(n-i)| |x(n)|)^{2k} \Big] + \\
& + \sum_{i=0}^M x^*(n-i) x^2(n) \sum_{k=0}^{(P-3)/2} a_{2k+3}^{(4)} |x(n-i)|^{2k} + \\
& + \left[\sum_{i=1}^M x^*(n-i) x^2(n) \sum_{k=1}^{(P-3)/2} a_{2k+3}^{(5)} |x(n)|^{2k} + \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^M x^*(n-i) x^2(n) \sum_{k=1}^{(P-3)/4} a_{4k+3}^{(6)} (|x(n-i)| |x(n)|)^{2k} \right]. \quad (2)
\end{aligned}$$

Выражение (2) – упрощенная модель Вольтерры с одномерной девиацией динамики (one-dimensional simplified dynamic deviation Volterra model, 1-D_SDDVM). Цель упрощения – сократить число слагаемых в модели ПК, следовательно, уменьшить количество операций умножения, существенно влияющих на аппаратные затраты при синтезе ПК.

Рассмотрим линеаризацию модели Винера-Гаммерштейна УМ [5].

Синтез адаптивного ПК для линеаризации модели Винера-Гаммерштейна усилителя мощности. Изображенная на рис. 2 блок-схема низкочастотной модели УМ [5] представляет собой каскадное соединение следующих блоков:

- линейной динамической части с передаточной функцией

$$H_1(z) = 0,666 \frac{1+0,25z^{-2}}{1-0,4z^{-1}};$$

- безынерционной нелинейности (БН)

$$\begin{aligned} w(n) = & (8,00335 - 4,61157i) \arctan(2,26895|v(n)|) + \\ & + (-3,77167 + 12,03758i) \arctan(0,8234|v(n)|) e^{i\angle v(n)}; \end{aligned}$$

- линейной динамической части с передаточной функцией

$$H_2(z) = 1,923 \frac{1-0,1z^{-2}}{1+0,2z^{-1}}.$$

Воздействие $u(n)$ низкочастотной модели УМ – комплексная огибающая GSM-сигнала с четырьмя несущими в частотной полосе 36 МГц, расположенной относительно центральной частоты 1,845 ГГц. Частота дискретизации огибающей GSM-сигнала $f_{д} = 245,76$ МГц.



Рис. 2

Нелинейные искажения сигналов в УМ подавлялись адаптивным ПК, синтезированным с применением обратной структуры обучения, изображенной на рис. 3. Входной сигнал $u(n)$ имел длительность $N = 143360$ отсчетов.

При линеаризации УМ оценивалась нормированная среднеквадратичная погрешность (normalized mean-square error, NMSE, дБ):

$$NMSE = 10 \log_{10} \left(\frac{\sum_{n=0}^{N-1} |u(n) - x(n)|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |u(n)|^2} \right),$$

где $x(n) = r(n)/G$, G – коэффициент усиления УМ.

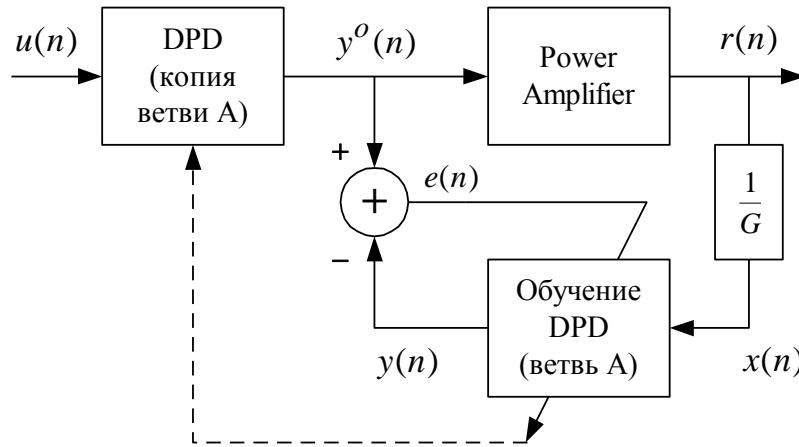


Рис. 3

В таблице представлены: погрешности NMSE на 4-й итерации линеаризации УМ (на последующих итерациях расчета погрешности менялись незначительно), полученные при ПК со степенью $P = 9$ и длиной памяти $M = 4$, а также число параметров Q в рассмотренных моделях ПК.

Таблица. Погрешность линеаризации УМ, число параметров в моделях ПК

NMSE, Q	MP	DDR BVS	RPV M	SRPV M	1- D_SDDVM
NMSE, дБ	– 74,9	–63,4	–78,7	–77,7	–78,7
Q	21	37	145	85	89

Как показывает анализ таблицы, меньшую погрешность линеаризации УМ обеспечивают RPVM и 1-D_SDDVM. На практике целесообразно использовать 1-D_SDDVM, так как данная модель проще RPVM.

Выводы

1. Для линеаризации УМ предложено использовать модель Вольтерры с многомерной девиацией динамики и ее упрощенный вариант – 1-D_SDDVM. Предложенная модель обладает гибкостью за счет разделения управления ее степенью нелинейности и порядком динамики.

2. Из сравнительного анализа полиномиальных моделей ПК, применяемых для компенсации нелинейных искажений сигналов в модели Винера-Гаммерштейна УМ, следует, что модель 1-D_SDDVM, обеспечивая высокую точность компенсации, является более простой по сравнению с RPVM.

Литература

1. RF power amplifier behavioral modeling / D. Schreurs, M. O'Droma, A. A. Goacher, M. Gadringer.– N. Y.: Cambridge university press, 2009.
2. Dynamic deviation reduction-based Volterra behavioral modeling of RF power amplifiers / A. Zhu, J. C. Pedro, T. J. Brazil // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2006.– Vol. 54, № 12.– P. 4323–4332.
3. Open-loop digital predistorter for RF power amplifiers using dynamic deviation reduction-based Volterra series / A. Zhu, P. J. Draxler, J. J. Yan, T. J. Brazil, D. F. Kimball, P. M. Asbeck // IEEE Trans. MTT.– 2008.– Vol. 56, № 7.– P. 1524–1534.
4. A new approach to pruning Volterra models for power amplifiers / C. Crespo-Cadenas, J. Reina-Tosina, M. J. Madero-Ayora, J. Munoz-Cruzado // IEEE Trans SP.– 2010.– Vol. 58, № 4.– P. 2113–2120.
5. A robust digital baseband predistorter constructed using memory polynomials / L. Ding, G. T. Zhou, D. R. Morgan, Z. Ma, J. S. Kenney, J. Kim, C. R. Giardina // IEEE Trans. COM.– 2004.– Vol. 52, № 1.– P. 159–165.

Соловьева Елена Борисовна, д.т.н., профессор, зав. кафедрой ТОЭ,
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
Адрес: 197376, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5, СПбГЭТУ,
кафедра ТОЭ. Тел.: (812) 346-17- 96, selenab@hotbox.ru

Дорофеев Кирилл Иванович, аспирант кафедры ТОЭ,
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет
Тел.: (812) 346-17- 96, dorofeyev.k@gmail.com

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

ГРАДИЕНТНАЯ ПОНДЕРОМОТОРНАЯ СИЛА ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЯ

Е. Н. Меньшов

Пространственные колебания поля. В результате интегрирования волновых уравнений, в [1] получены выражения электродинамических потенциалов, напряженностей и вектора *Пойтинга* ЭМП для случая нерелятивистских скоростей. Новые уравнения дали новые составляющие электромагнитного поля, имеющие структуру стоячих пространственных осцилляций с фиксированной длиной волны, равной минимальной длине волны $\lambda_{\min} = 2\pi c\tau$, которая выводится в результате перехода к пределу коэффициента распространения ЭМП в вакууме (формула 6 [2]). Здесь: τ – постоянная времени, характеризующая явление локального запаздывания возбуждения поля произвольным источником возбуждения (полем или динамическим зарядом), c – скорость света в вакууме.

Например, выражение напряженности колебательной составляющей электрического поля для точечного заряда в вакууме имеет вид [3]

$$E_k \cong -\frac{qe_R \sin\left(\frac{R(t)}{\tau c}\right)}{4\pi^2 \epsilon_0 R^2}, \quad (1)$$

где q – величина заряда, R – расстояние от заряда до точки наблюдения поля. Следует заметить – формула (1) выведена методом приближенного интегрирования многомерной свертки. Поэтому она правомерна для моментов времени

$$t \gg R(0)/c + 1.6\sqrt{t\tau},$$

отсчитываемых от начала движения. Это условие определяет время установления пространственных осцилляций, которое связано со временем запаздывания ($t-R/c$) и с инерционным процессом возбуждения поля, характеризуемым τ .

Таким образом, движущийся заряд окружен не только кулоновским полем, но также электрическим колебательным в пространстве полем (1). Его интенсивность не зависит от характера ускорения заряда, и оно не излучает энергии, так как это поле затухает по закону R^{-2} .

Математическая модель пондеромоторного потенциала. Робный заряд q_0 , попадая в результирующее электрическое поле, будет совершать под действием кулоновской составляющей силы f_0 движение вдоль некоторой плавной траектории с одновременными осцилляциями вдоль этой же траектории под действием силы $f_k = q_0 E_k$, (1). Уравнение движения будет

$$m \frac{d^2 R}{dt^2} = f_0 + f_k, \quad (2)$$

где сила Кулона $f_0 = -dU/dR$, U – электрический потенциал. В [4] выявлены особенности движения частицы в неоднородном, но быстро осциллирующем во времени поле с медленно изменяющейся амплитудой, например, электрической напряженности $E_m(r, t)$ на интервале периода осцилляций. В этой работе было показано, что среднее движение частицы за время периода осцилляций обусловлено градиентом кинетической энергии колебательного движения

$$\langle W \rangle = \frac{q^2 E_m^2}{4m\omega^2}, \quad (3)$$

которая названа пондеромоторным потенциалом. Здесь: q – заряд частицы; m – масса частицы, ω – частота осцилляций.

Для пространственно осциллирующих сил традиционная формула пондеромоторного потенциала (3) не подходит, так как она выведена для изменяющихся во времени осциллирующих сил. В настоящем сообщении, используя методику [4], выведем формулу пондеромоторного потенциала и градиентной пондеромоторной силы для пространственных колебаний поля.

На расстояниях $R \gg \pi c$ результирующее движение можно представить в виде суммы двух движений: $R = R_0 + r$, где R_0 – движение обусловленное кулоновской силой, r – движение обусловленное колебательной силой, причем $r \leq \pi c$. Подставляя в уравнение (2), имеем

$$m \frac{d^2 R_0}{dt^2} + m \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dU(R_0 + r)}{dR_0} + f_k(R_0 + r). \quad (4)$$

Разлагая правую часть (4) в ряд Тейлора и ограничиваясь членами первого порядка малости, имеем:

$$U(R_0 + r) \approx U(R_0) + \frac{dU}{dR_0} r, \quad (5)$$

аналогично, но для точек $R_0 = \pi\tau c N$ (где N – натуральные числа $>>1$)

$$f_k(R_0 + r) = (-1)^{N+1} f_{km}(R_0 + r) \sin\left(\frac{r(R_0 + r, t)}{\tau c}\right) \cong f_k(R_0) + \frac{\partial f_k}{\partial R_0} r, \quad (6)$$

$$\text{где } f_k(R_0) = (-1)^{N+1} f_{km} \sin\left(\frac{r(R_0, t)}{\tau c}\right), \quad f_{km} = \frac{q_0 q}{4\pi^2 \epsilon_0 R_0^2}. \quad (7)$$

Так как осциллирующая сила одного порядка с кулоновской силой, то правомерно неравенство

$$\frac{d^2 U_0(R_0)}{dR_0^2} r \ll f_k(R_0 + r),$$

тогда из (4) выделяем осциллирующие члены

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = f_k(R_0) = \frac{(-1)^{N+1} q_0 q \sin\left(\frac{r(R_0, t)}{\tau c}\right)}{4\pi^2 \epsilon_0 R_0^2} = (-1)^{N+1} f_{km} \sin\left(\frac{r(R_0, t)}{\tau c}\right). \quad (8)$$

При $q_0 q > 0$ для точек $R_0 = 2\pi\tau c N$ и при $q_0 q < 0$ для точек $R_0 = \pi\tau c(2N+1)$ уравнение (8) приводится к известному нелинейному уравнению математического маятника [5]

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\omega_{0k}^2 \sin(\xi), \quad (9)$$

$$\text{где } \omega_{0k} = \sqrt{\frac{|q_0 q|}{4\pi^2 \tau c \epsilon_0 R_0^2 m}}, \quad (10)$$

$$\xi = \frac{r}{\tau c}. \quad (11)$$

Решение уравнения (6) с начальными условиями $\xi_m = r_m / \tau c$, $\frac{d\xi(r_m, t)}{dt} = 0$

известно:

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega_{0k} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \frac{\xi}{2}}, \quad (12)$$

$$t = \frac{1}{\omega_{0k}} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \frac{F(\varphi, k)}{2\omega_{0k}}, \quad k = \sin \frac{\xi_m}{2}, \quad \varphi = \xi/2, \quad (13)$$

где $F(\varphi, k)$ – эллиптический интеграл первого рода [6].

Период нелинейных колебаний можно определить по первой формуле (13) при $\varphi=\pi/2$

$$T_k = \frac{4K(k)}{\omega_{0k}}, \quad (14)$$

где $K(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода.

Усредняя за период колебаний T_k члены системы уравнений (4)–(7), получаем уравнение, описывающее движение по плавной траектории

$$m \frac{d^2 R_0}{dt^2} = -\frac{dU(R_0)}{dR_0} + \left\langle r \frac{\partial f_k(R_0)}{\partial R_0} \right\rangle. \quad (15)$$

В [4] показано, что второе слагаемое правой части уравнения (15) есть градиент от пондеромоторного потенциала U_p , т.е. пондеромоторной градиентной силой

$$-\frac{dU_p}{dR_0} = \left\langle r \frac{\partial f_k(R_0)}{\partial R_0} \right\rangle = f_p. \quad (16)$$

Используя формулу (7), запишем

$$r = (-1)^{N+1} \pi \arcsin \left(\frac{f_k(R_0)}{f_{kn}} \right). \quad (17)$$

Представляя

$$r = \frac{\partial G}{\partial f_k(R_0)}, \quad (18)$$

где G – некоторая функция от R_0 , и подставляя в (16), имеем

$$-\frac{dU_p}{dR_0} = f_p = \left\langle \frac{dG}{dR_0} \right\rangle = \frac{d\langle G \rangle}{dR_0}. \quad (19)$$

В последнем случае в (19) производную по R_0 вынесли за пределы интеграла усреднения по времени. Из (19) следует $U_p = -\langle G \rangle$, поэтому вычисляем пондеромоторный потенциал из формулы (18) с учетом (17)

$$U_p = -(-1)^{N+1} \pi c \left\langle \int \arcsin \left(\frac{f_k(R_0)}{f_{kn}} \right) df_k(R_0) \right\rangle + C. \quad (20)$$

Постоянную интегрирования C , определяющую начало отсчета потенциала, выбираем равной нулю. Интеграл (20) есть табличный интеграл [7], равен

$$U_p = -(-1)^{N+1} \pi c \left\langle f_k(R_0) \arcsin \left(\frac{f_k(R_0)}{f_{kn}} \right) \pm \sqrt{f_{kn}^2 - f_k^2(R_0)} \right\rangle = \\ -(-1)^{N+1} \pi c \left[\left\langle f_k(R_0) \arcsin \left(\frac{f_k(R_0)}{f_{kn}} \right) \right\rangle \pm \left\langle f_{kn} \cos \frac{r}{\pi c} \right\rangle \right]. \quad (21)$$

Используя уравнение (12) и (17), имеем:

$$\left\langle f_k(R_0) \arcsin \left(\frac{f_k(R_0)}{f_{kn}} \right) \right\rangle = \frac{f_{kn}}{T_k} \int_0^{T_k} \xi \sin \xi \frac{dt}{d\xi} d\xi = \frac{4f_{kn}}{\sqrt{2}T_k \omega_{0k}} \int_0^{\xi_m} \frac{\xi \sin \xi}{\sqrt{\cos \xi - \cos \xi_m}} d\xi = \\ = \frac{8f_{kn}}{\sqrt{2}T_k \omega_{0k}} \int_0^{\xi_m} \sqrt{\cos \xi - \cos \xi_m} d\xi = \frac{16f_{kn} \sin^2 \frac{\xi_m}{2} \frac{\pi}{2}}{K(k)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \\ = \frac{4f_{kn} \sin^2 \frac{\xi_m}{2}}{K(k)} \left[\frac{E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)}{k^2} - \frac{(1 - k^2)}{k^2} K(k) \right], \quad (22)$$

где $E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ – полный эллиптический интеграл второго рода;

$$\left\langle f_{kn} \cos \frac{r}{\pi c} \right\rangle = \frac{f_{kn}}{T_k} \int_0^{T_k} \cos \xi \frac{dt}{d\xi} d\xi = \frac{4f_{kn}}{\sqrt{2}T_k \omega_{0k}} \int_0^{\xi_m} \frac{\left(1 - 2 \sin^2 \frac{\xi}{2}\right)}{\sqrt{\cos \xi - \cos \xi_m}} d\xi = \\ = \frac{4f_{kn}}{T_k \omega_{0k}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(1 - 2 \sin^2 \frac{\xi_m}{2} \sin^2 \varphi\right)}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{f_{kn}}{K(k)} \left[K(k) - 2E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \sin^2 \frac{\xi_m}{2} \right]. \quad (23)$$

Подставляя (22) и (23) в (21), получаем

$$U_p = -(-1)^{N+1} \pi c \left\{ \frac{4f_{kn} \sin^2 \frac{\xi_m}{2}}{K(k)} \left[\frac{E\left(\frac{\pi}{2}, k\right)}{k^2} - \frac{(1 - k^2)}{k^2} K(k) \right] \right\} - \\ - (-1)^{N+1} \pi c \left\{ \frac{f_{kn}}{K(k)} \left[K(k) - 2E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \sin^2 \frac{\xi_m}{2} \right] \right\}. \quad (24)$$

Градиентная пондеромоторная сила вычисляется подстановкой (24) в (19).

Выводы. 1. Быстрые пространственные осцилляции электрических сил приводят к нелинейным колебаниям заряженной частицы во времени с периодом (14).

2. Пондеромоторный потенциал пространственных колебаний U_p (24) пропорционален малому значению τc , поэтому U_p намного меньше кулоновского потенциала U . Аналогично, из формулы (16) следует, что градиентная пондеромоторная сила пространственных колебаний пропорциональна $r \leq \pi \tau c$, поэтому она, намного меньше кулоновской силы.

Литература

1. Меньшов Е.Н. Фундаментальные свойства новых уравнений Максвелла. // Вестник УлГТУ.– 2004.– №4.– С.54-57.
2. Меньшов Е.Н., Бочкарев П.В. Волновой анализ уравнений поля// Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Межд. сб. научн. Трудов / Под ред В.В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2010.– Вып. 8. – С. 148–150.
3. Меньшов Е.Н. Идентификация модифицированных уравнений классической электродинамики: Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. межд. конф. «КЛИН-2005» (г.Ульяновск, 17-19 мая 2005 г.)/ Под общей ред Л.И. Волгина. –Ульяновск: УлГТУ, 2005. – Том.3. – С.137–140.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика. Теоретическая физика. – Т.1. – М.: Наука, 1965.– 203 с.
4. Блакьер О. Анализ нелинейных систем: Пер. с анг. под ред. Р.В. Хохлова. – М.: Мир, 1969. – 400 с.
5. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. – М.: Наука, 1977. – 342 с.
6. Интегралы и ряды. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. – М.: Наука, 1981. – 800 с.

Меньшов Евгений Николаевич – к.т.н., доцент УлГТУ, г. Ульяновск, e-mail: men@ulstu.ru.

ИЗ ОПЫТА РАБОТЫ

СРАВНЕНИЕ СИМВОЛЬНЫХ СПОСОБОВ ФОРМИРОВАНИЯ ЦЕПНЫХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОПОЛЮСНИКА

З. Э. Амерханов, С. А. Курганов

Параметры называются цепными, если напряжение и ток, по крайней мере, одной из сторон неавтономного многополюсника отнесены к задающим переменным (откликам). Цепные параметры проходных четырехполюсников (двухсторонних подсхем) получаются путем проведения опыта короткого замыкания (КЗ) или холостого хода (ХХ) и последующего нахождения отношения двух переменных [1]. Однако для трех- и n -сторонних многополюсников определить цепные параметры методом короткого замыкания и холостого хода невозможно из-за неопределенности – для одной стороны многополюсника требуется обеспечить одновременно оба эти режима, что, естественно, невозможно.

Поэтому применяются другие способы. Первый из них состоит в опосредованном определении цепных параметров с использованием двух опытов КЗ и ХХ и последующего решения системы уравнений [1]. Второй – в составлении для исследуемой цепи системы уравнений с последующим исключением внутренних для многополюсника переменных [1]. Третий – в использовании нуллора для получения требуемого режима. Подключение нуллатора к стороне многополюсника обеспечивает для нее одновременно нулевые напряжение и ток – режим, объединяющий характеристики опытов ХХ и КЗ [2]. Настоящая статья посвящена *сравнению этих способов нахождения параметров многополюсника*.

Рассмотрим систему цепных параметров для трехстороннего шестиполюсника (рис. 1,а) [1]

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{21} & \underline{Z}_{21} & \underline{K}_{23} & \underline{Z}_{22} \\ \underline{Y}_{31} & \underline{B}_{31} & \underline{Y}_{33} & \underline{B}_{32} \\ \underline{K}_{41} & \underline{Z}_{41} & \underline{K}_{43} & \underline{Z}_{42} \\ \underline{Y}_{41} & \underline{B}_{41} & \underline{Y}_{43} & \underline{B}_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Пусть требуется рассчитать цепные параметры, например, элементы четвертого столбца матрицы (1).

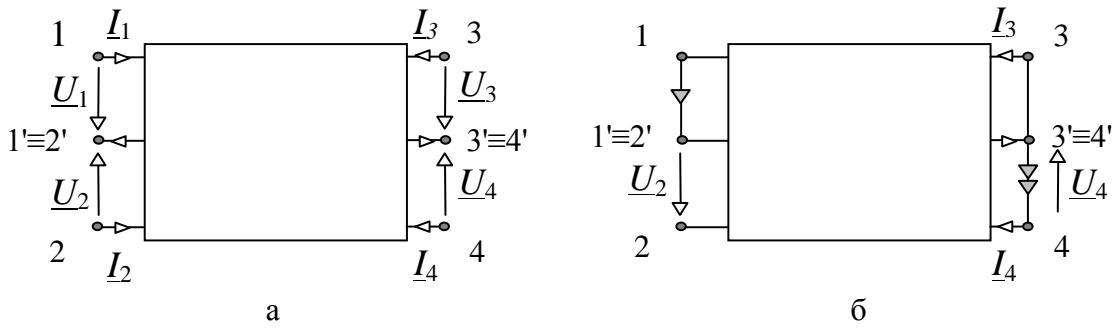


Рис.1. Схема шестиполюсника (а) и его схема с нуллором (б) для определения цепных параметров в четвертом столбце (1)

Способ 1. Получение цепных параметров с помощью двух опытов холостого хода и короткого замыкания [1]. Матрицу параметров в уравнении (1) обозначим как Π , а элемент матрицы как Π_{ij} . Так как постановка опытов с условиями $\underline{U}_1 = \underline{I}_1 = 0$ невозможна, то рекомендуется проведение опыта с условиями, при которых уравнения многополюсника будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{m1}\underline{U}_1 + \Pi_{m4}\underline{I}_2 &= 0 \\ \text{или} \quad (m &= 1, 2, 3, 4), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Pi_{m2}\underline{I}_1 + \Pi_{m4}\underline{I}_2 = 0$$

для параметров 4 столбца и

$$\begin{aligned} \Pi_{m1}\underline{U}_1 + \Pi_{m3}\underline{U}_3 &= 0 \\ \text{или} \quad (m &= 1, 2, 3, 4), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Pi_{m2}\underline{I}_1 + \Pi_{m3}\underline{U}_3 = 0$$

для параметров 3 столбца, где Π_{m1} и Π_{m2} находятся при втором опыте.

Например, для нахождения Z_{22} сначала выполняется первый опыт при $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_3 = 0$. При этом первое уравнение многополюсника из (1) будет иметь вид

$$Z_{21}\underline{I}_1 + Z_{22}\underline{I}_2 = 0 \quad . \quad (4)$$

Уравнение (4) можно записать относительно искомого параметра

$$Z_{22} = -Z_{21} \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}, \quad (5)$$

где отношение $\underline{I}_1/\underline{I}_2$ находится из этого опыта, а коэффициент $Z_{21} = \underline{U}_2 / \underline{I}_1$ – из второго опыта при $\underline{U}_1 = \underline{U}_3 = \underline{I}_2 = 0$.

Способ 2. Построение системы уравнений с последующим исключением внутренних переменных [1]. Составляется система уравнений для схемы на рис.1,а с учетом внутренней структуры и элементного состава многополюсника, например, относительно токов ветвей или контуров.

$$\begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \dots & \Pi_{1n} & \Pi_{1,n+1} & \dots & \Pi_{1,n+4} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \dots & \Pi_{2n} & \Pi_{2,n+1} & \dots & \Pi_{2,n+4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Pi_{k1} & \Pi_{k2} & \dots & \Pi_{kn} & \Pi_{k,n+1} & \dots & \Pi_{k,n+4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_n \\ \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \dots \\ \underline{U}_2 \\ \dots \\ \underline{U}_3 \\ \dots \\ \underline{U}_4 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

где $\underline{I}'_1, \dots, \underline{I}'_n$ – внутренние токи многополюсника. В уравнении (6), например, методом Гаусса исключаются внутренние токи. Система уравнений приобретает вид

$$\begin{bmatrix} \Pi'_{11} & \dots & \Pi'_{14} \\ \dots & \dots & \dots \\ \Pi'_{14} & \dots & \Pi'_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{U}_4 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Уравнение (7) приводится к виду:

$$\begin{bmatrix} 0 & \Pi'_{13} & 0 & \Pi'_{14} \\ 1 & \Pi'_{23} & 0 & \Pi'_{24} \\ 0 & \Pi'_{33} & 0 & \Pi'_{34} \\ 0 & \Pi'_{43} & 1 & \Pi'_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Pi'_{11} & 0 & \Pi'_{12} \\ 0 & \Pi'_{21} & 0 & \Pi'_{22} \\ 0 & \Pi'_{31} & 1 & \Pi'_{32} \\ 0 & \Pi'_{41} & 0 & \Pi'_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Из системы (8) получаем уравнение, содержащее матрицу искомых параметров (как произведение двух матриц с известными параметрами):

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_3 \\ \underline{U}_4 \\ \underline{I}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Pi'_{13} & 0 & \Pi'_{14} \\ 1 & \Pi'_{23} & 0 & \Pi'_{24} \\ 0 & \Pi'_{33} & 0 & \Pi'_{34} \\ 0 & \Pi'_{43} & 1 & \Pi'_{44} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \Pi'_{11} & 0 & \Pi'_{12} \\ 0 & \Pi'_{21} & 0 & \Pi'_{22} \\ 0 & \Pi'_{31} & 1 & \Pi'_{32} \\ 0 & \Pi'_{41} & 0 & \Pi'_{42} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \\ \underline{U}_3 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Способ 3. Подключение нуллпора и нахождение искомого параметра в виде отношения схемных определителей [3]. Для нахождения указанных параметров традиционным методом холостого хода и короткого замыкания напряжение первой стороны \underline{U}_1 и ток \underline{I}_1 должны быть равны нулю одновременно. Для осуществления такого режима к

первой стороне многополюсника подключим нуллатор 1, а к четвертой – норатор 1, чтобы компенсировать подключение нуллатора. Третья сторона должна быть закорочена. После этого искомые параметры находятся, как обычно, с помощью передаточных функций. Например,

$$Z_{22} = \frac{U_2}{I_2} = \frac{\left| \begin{array}{c} 1 \\ \nabla \\ 2 \\ \Delta \\ 2 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ \nabla \\ 1 \\ \Delta \\ \nabla \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \nabla \\ 1 \\ \Delta \\ \nabla \end{array} \right|} . \quad (10)$$

Преобразуем (10), используя замену параллельного соединения одноименных норатора и нуллатора проводником. Результат занесем в ячейку 1–4 матрицы в формуле (11). Остальные цепные параметры в третьем и четвертом столбцах находятся аналогично. Формулы для параметров первого и второго столбцов находятся с использованием традиционных опытов короткого замыкания и холостого хода. Таким образом, схемно-алгебраическая формула для определения параметров (1) имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{\left| \begin{array}{c} \nabla \\ 1 \\ \Delta \\ \nabla \end{array} \right|} . \quad (11)$$

Схемно-алгебраические формулы из (11) могут быть доказаны с помощью способа 1 – двух опытов ХХ и КЗ. Подставим в формулу (5) схемно-алгебраические выражения сопротивления Z_{21} и отношения токов $\underline{I}_1/\underline{I}_2$, получим

$$Z_{22} = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{[Diagram 1]} \\ \text{[Diagram 2]} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \text{[Diagram 3]} \\ \text{[Diagram 4]} \end{array} \right|}. \quad (12)$$

После сокращения одного и того же схемного минора в числителе и знаменателе формулы (12) получим схемно-алгебраическую формулу для Z_{22} из (11). Значение этого схемного минора должно отличаться от нуля.

Пример. Дано: схема четырехстороннего шестиполюсника на рис. 2. Определить цепной параметр Z_{22} из уравнения (1) в символьном виде.

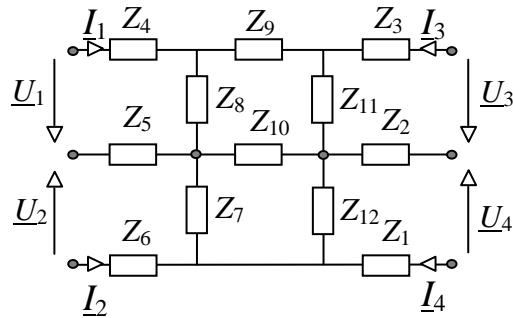


Рис. 2. Схема шестиполюсника с разметкой полюсов

Решение с помощью двух опытов ХХ и КЗ. Воспользуемся формулой (5), в которой коэффициент $Z_{21} = \underline{U}_2 / \underline{I}_1$ найдем из первого опыта при $\underline{U}_1 = \underline{U}_3 = \underline{I}_2 = 0$, схема которого дана на рис. 3, а.

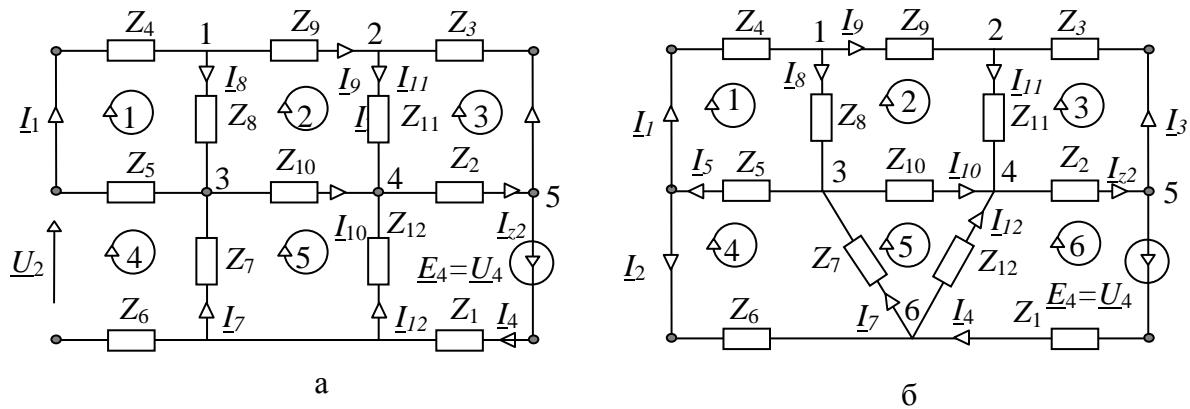


Рис. 3. Схемы опытов: первого – (а) и второго – (б)

После составления системы уравнений, например, по законам Кирхгофа и решения ее по правилу Крамера получаем

$$Z_{21} = \frac{(Z_{10}(Z_{11}(Z_{12} + Z_2) + Z_{12}(Z_2 + Z_3))((Z_4 + Z_5)Z_7 + (Z_5 + Z_7) + Z_{12}(Z_2 + Z_3) \cdot (Z_7((Z_4 + Z_5)Z_8 + (Z_4 + Z_5 + Z_8)Z_9) + Z_{11}(Z_2Z_5Z_7Z_8 + Z_{12}(Z_2(Z_4 + Z_5)Z_7 + Z_2 \cdot (Z_5 + Z_7)Z_8 + Z_7((Z_4 + Z_5)Z_8 + Z_3(Z_4 + Z_5 + Z_8) + (Z_4 + Z_5 + Z_8)Z_9))))}{(Z_{10}(Z_{11}(Z_{12} + Z_2) + Z_{12}(Z_2(Z_2 + Z_3)) + Z_{11}Z_2(Z_{12} + Z_3))Z_8}.$$

$$\cdot (Z_5 + Z_7)Z_8 + Z_7((Z_4 + Z_5)Z_8 + Z_3(Z_4 + Z_5 + Z_8) + (Z_4 + Z_5 + Z_8)Z_9))). \quad (13)$$

Для нахождения отношения $\underline{I}_1 / \underline{I}_2$ из формулы (5) проводим второй опыт по схеме на рис. 3,б при условии $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_3 = 0$.

Искомое отношение получается аналогично (13):

$$\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = - \frac{(Z_{10}(Z_{11}(Z_{12} + Z_2) + Z_{12}(Z_2(Z_2 + Z_3)))(Z_5Z_7 + (Z_5 + Z_6 + Z_7)Z_8 + Z_{12}(Z_2 + Z_3)(Z_5Z_7((Z_8 + Z_9) + Z_{11}(Z_2(Z_5 + Z_6)Z_7Z_8 + Z_{12}(Z_2Z_5Z_7 + Z_2(Z_5 + Z_6 + Z_7)Z_8 + Z_3Z_7((Z_4 + Z_5)Z_8 + (Z_4 + Z_5 + Z_8)Z_9) + Z_{11}(Z_2Z_5Z_7Z_8 + Z_{12}(Z_2(Z_4 + Z_5)Z_7 + (Z_5 + Z_7)Z_8 + Z_5Z_7(Z_3 + Z_8 + Z_9)))) + Z_2(Z_5 + Z_7)Z_8 + Z_7(Z_4 + Z_5)Z_8 + Z_3(Z_4 + Z_5 + Z_8) + (Z_4 + Z_5 + Z_8)Z_9))) + Z_2(Z_5 + Z_7)Z_8 + Z_7(Z_4 + Z_5)Z_8 + Z_3(Z_4 + Z_5 + Z_8) + (Z_4 + Z_5 + Z_8)Z_9)))}{(Z_{10}(Z_{11}(Z_{12} + Z_2) + Z_{12}(Z_2 + Z_3))((Z_4 + Z_5)Z_7 + (Z_5 + Z_7)Z_8 + Z_{12}(Z_2 + Z_3)(Z_5Z_7((Z_8 + Z_9) + Z_{11}(Z_2(Z_5 + Z_6)Z_7Z_8 + Z_{12}(Z_2Z_5Z_7 + Z_2(Z_5 + Z_6 + Z_7)Z_8 + Z_5Z_7(Z_3 + Z_8 + Z_9)))) + Z_2(Z_5 + Z_7)Z_8 + Z_7(Z_4 + Z_5)Z_8 + Z_3(Z_4 + Z_5 + Z_8) + (Z_4 + Z_5 + Z_8)Z_9)))}. \quad (14)$$

При этом определитель Δ системы уравнений, не входящий в (14), должен отличаться от нуля. Он находится при помощи пакета Wolfram Mathematica 5 с помощью оператора $Simplify[Det[A]]$ [5], где A – матрица системы при условии $\underline{U}_1 = \underline{U}_2 = \underline{U}_3 = 0$. Определитель Δ содержит 294 операций сложения (вычитания) и 249 операций умножения (деления).

Решение задачи способом исключения уравнений. Составляется система уравнений по методу контурных токов для схемы на рис. 5.

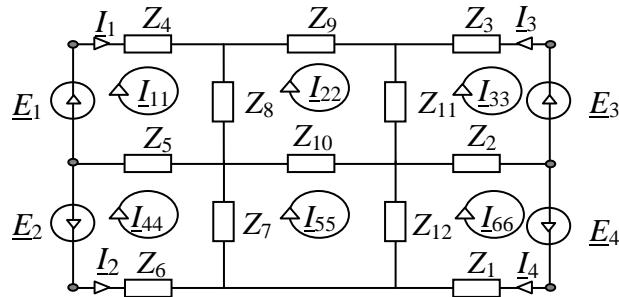


Рис. 5. Схема цепи для составления системы уравнений по МКТ

После преобразования уравнений в соответствии с выражениями (7)–(9) получаем искомый параметр

$$\begin{aligned}
Z_{22} = & \frac{\left(\frac{Z_{1,1}Z_{1,3}Z_{4,2}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} + Z_{4,3} \right) \left(\frac{Z_{1,2}Z_{2,5}Z_{5,4}Z_{6,1}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} + \frac{Z_{1,2}Z_{1,4}Z_{2,1}Z_{2,2}Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} - \right.}{- \frac{Z_{1,2}^2Z_{2,1}Z_{2,3}Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} + \frac{Z_{1,1}Z_{1,2}Z_{2,2}Z_{2,3}Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} - \frac{Z_{1,2}Z_{2,5}Z_{5,1}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} + } \\
& \left. \left. - \frac{Z_{1,1}Z_{1,4}Z_{2,2}^2Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} \right) \right) + \frac{Z_{1,1}Z_{2,5}Z_{4,2}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})} \cdot \\
& + \frac{Z_{1,2}Z_{2,1}Z_{5,5}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} - \frac{Z_{1,1}Z_{2,2}Z_{5,5}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} \\
& \cdot \left(- \frac{Z_{1,2}Z_{2,3}Z_{5,4}Z_{6,1}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} + \frac{Z_{1,2}Z_{1,4}Z_{2,1}Z_{2,2}Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} + Z_{5,4}Z_{6,3} \right) \cdot \\
& \cdot \left(- \frac{Z_{1,2}^2Z_{2,1}Z_{2,3}Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} + \frac{Z_{1,1}Z_{1,2}Z_{2,2}Z_{2,3}Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} - \frac{Z_{1,2}Z_{2,5}Z_{5,1}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} + \right. \\
& \left. \left. Z_{1,4}Z_{2,1}Z_{4,2} \left(\frac{Z_{1,2}^2Z_{2,1}Z_{2,3}Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} - \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{Z_{1,2}Z_{2,1}Z_{5,5}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} - \frac{Z_{1,1}Z_{2,2}Z_{5,5}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} \right) \right) - \frac{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}) \cdot}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})} \\
& - \frac{Z_{1,1}Z_{1,2}Z_{2,2}Z_{2,3}Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} + \frac{Z_{1,2}Z_{2,5}Z_{5,1}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} - \frac{Z_{1,2}Z_{2,1}Z_{5,5}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} + \frac{Z_{1,2}Z_{2,2}Z_{5,5}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} \Bigg) \\
& \cdot \left(- \frac{Z_{1,2}^2Z_{2,1}Z_{2,3}Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} + \frac{Z_{1,1}Z_{1,2}Z_{2,2}Z_{2,3}Z_{5,5}Z_{6,1}}{(Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2})^2} - \frac{Z_{1,2}Z_{2,5}Z_{5,1}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{Z_{1,2}Z_{2,1}Z_{5,5}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} - \frac{Z_{1,1}Z_{2,2}Z_{5,5}Z_{6,3}}{Z_{1,2}Z_{2,1}-Z_{1,1}Z_{2,2}} \right), \tag{15}
\end{aligned}$$

где $Z_{1,1} = Z_7 + Z_{10} + Z_{12}$; $Z_{1,2} = Z_{2,1} = -Z_{10}$; $Z_{1,4} = -Z_7$; $Z_{1,6} = -Z_{12}$; $Z_{2,1} = -Z_{10}$;
 $Z_{2,2} = Z_8 + Z_9 + Z_{10} + Z_{11}$; $Z_{2,3} = -Z_{11}$; $Z_{2,5} = -Z_8$; $Z_{3,2} = -Z_8$; $Z_{3,4} = -Z_5$;
 $Z_{3,5} = Z_4 + Z_5 + Z_8$; $Z_{4,2} = Z_{11}$; $Z_{4,3} = -(Z_2 + Z_3 + Z_{11})$; $Z_{4,6} = Z_2$; $Z_{5,1} = Z_7$;
 $Z_{5,4} = -(Z_7 + Z_{10} + Z_{12})$; $Z_{5,5} = Z_5$; $Z_{6,1} = -Z_{12}$; $Z_{6,3} = -Z_2$; $Z_{6,6} = -(Z_1 + Z_2 + Z_{12})$.

Решение задачи способом подключения нуллора. Найдем искомый параметр с помощью схемно-алгебраической формулы из соответствующей ячейки матрицы (11). Числитель и знаменатель этой формулы раскрываются с помощью формул выделения сопротивлений и операций с нуллорами [3]. В результате,

$$\begin{aligned} Z_{22} = & \frac{Z_{10}(Z_{12}((Z_{11}+Z_2)(Z_5(Z_7+Z_8)+Z_8(Z_6+Z_7))+Z_3(Z_5(Z_7+Z_8)+Z_8(Z_6+ \\ & Z_8(Z_{10}(Z_{11}(Z_{12}+Z_2)+Z_{12}(Z_2+Z_3))+Z_{11}Z_2(Z_{12}+Z_7)) \\ & +Z_7)))+Z_2Z_{11}(Z_5(Z_7+Z_8)+Z_8(Z_6+Z_7))+Z_{12}(Z_{11}(Z_2(Z_5(Z_7+Z_8)+Z_8(Z_6+ \\ & +Z_7))+Z_7Z_5(Z_3+Z_9+Z_8))+Z_2(Z_7Z_5(Z_8+Z_9))+Z_3Z_7Z_5(Z_8+Z_9))+Z_7Z_2Z_{11} \cdot \\ & \cdot Z_8(Z_5+Z_6)). \end{aligned} \quad (16)$$

При этом определитель схемы – знаменатель (11) после раскрытия с помощью формул выделения сопротивлений и операций с нуллорами [3] имеет вид

$$\begin{aligned} D = & (Z_{10}(Z_{11}((Z_{12}+Z_2)\cdot(Z_5(Z_7+Z_8)+Z_7(Z_4+Z_8)))+Z_8((Z_5+Z_7)Z_{12}(Z_2+ \\ & +Z_3))+Z_2(Z_{12}Z_7(Z_4+Z_5))+Z_3Z_{12}Z_7(Z_4+Z_5))+Z_{11}(Z_8(Z_2(Z_{12}(Z_5+Z_7)+ \\ & +Z_5Z_7)+Z_{12}Z_7(Z_3+Z_9+Z_4+Z_5))+(Z_3+Z_9)(Z_{12}Z_7(Z_4+Z_5))+Z_2Z_{12}Z_7(Z_4+ \\ & +Z_5))+Z_8((Z_4+Z_9)(Z_{12}Z_7(Z_2+Z_3))+Z_5Z_{12}Z_7(Z_2+Z_3))+Z_9(Z_2(Z_{12}Z_7(Z_4+ \\ & +Z_5))+Z_3Z_{12}Z_7(Z_4+Z_5))). \end{aligned} \quad (17)$$

Три полученных формулы – последовательная формула (5), (13)–(14) (с учетом определителя) по способу двух опытов ХХ и КЗ; формула по способу Гауссова исключения (15) и формула по способу подключения нуллора (16) (с учетом выражения определителя (17)) – тождественны. Однако первая из них содержит 348 операций сложения (вычитания) и 316 операций умножения (деления), вторая — 54 и 178, а третья — 72 и 68 соответствующих операций. Как видно, символное выражение,

полученное способом подключения нуллора, содержит существенно меньшее число арифметических операций.

Вывод. Способ подключения нуллора является наиболее экономичным способом нахождения цепных параметров многополюсников. Он требует раскрытия всего двух схемных определителей по сравнению со способом двух опытов КЗ и ХХ, который требует решения двух систем уравнений, и по сравнению со способом исключения переменных, который, кроме собственно операции исключения переменных, содержит операции обращения матрицы и произведения двух матриц. Поэтому способ подключения нуллора позволяет получить символьные выражения цепных параметров, содержащие существенно меньшее число арифметических операций.

Литература

1. Адонц Г.Т. Многополюсник.– Ереван: АН Арм. ССР.– 1965.– 467 с.
2. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных электрических цепей по частям методом схемно-алгебраической редукции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. трудов.– Ульяновск: УлГТУ, 2010.– Вып. 8.– С. 103–116.
3. Курганов С.А., Филаретов В.В. Схемно-алгебраический анализ и диагностика линейных алгебраических цепей / С.А. Курганов, В.В. Филаретов : учебное пособие. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – С. 146–149.
4. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.
5. Дьяконов В.П. Mathematica 4.1/4.2/5.0 в математических и научно-технических расчетах.– М.: Солон-Пресс, 2004.– 696 с.

Амерханов Зуфар Эмирович – студент 2-курса Энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ); тел: (8906) 145-82-00; e-mail: parenparenparen@rambler.ru.

ОФИСНАЯ СОЛНЕЧНАЯ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЯ

Н. П. Кузьмин, А. А. Маркелов

Рассмотрена структура солнечной электростанции, предназначенной для работы в городском офисе. Приведены показатели работы и характеристики станции в трехлетний период эксплуатации. Обсуждены перспективы солнечной энергетики.

Проблемы выработки электроэнергии. В настоящее время в обществе растет интерес к альтернативным энергетическим ресурсам. Этот интерес обусловлен, прежде всего, растущими ценами на традиционные энергоносители (нефть, газ), а также загрязнением окружающей среды при сжигании нефти, газа, угля и при использовании атомной энергии.

К альтернативной энергетике можно отнести ветряные установки для выработки механической и электроэнергии, солнечные тепловые и фотоэлектрические преобразователи, генераторы топлива и газа из биологических отходов и растений, электростанции, работающие от приливов, геотермальные станции, использующие тепло Земли. Из этого ряда наиболее распространенными (по доступности энергоресурса) и приемлемыми по стоимости оборудования являются ветряные установки и солнечные фотоэлектрические преобразователи или солнечные электрические батареи.

Достоинства солнечных батарей, такие как отсутствие подвижных частей и шума при работе, стабильные характеристики и большой срок службы, малая масса и простота в обслуживании должны обеспечить широкое использование солнечных батарей для генерации электроэнергии для небольших предприятий, офисов, частных домов и квартир, как в городских условиях, так и в сельской местности. Однако в средней полосе России, в Поволжье их увидеть практически невозможно.

Среднегодовой поток солнечной энергии по данным [1] для России составляет – от 800 до 1100 кВт час / кв. м. Для сравнения в Германии, Чехии, Польше – от 950 до 1050 кВт час / кв. м., в Болгарии – 2000 кВт час / кв. м. Потенциальные ресурсы по солнечной энергии Германии сопоставимы с Россией, однако в Германии в 2010 году по данным [1] 2% от производства всей электроэнергии приходится на долю солнечных батарей, в России же в сентябре 2010 года построена лишь первая солнечная электростанция в Белгородской области мощностью 100 кВт.

Почему же не распространены в России солнечные батареи, сколько стоит минимальная солнечная электростанция, сколько стоит произведенный ей один киловатт час электроэнергии, сколько электроэнергии произведет солнечная электростанция в климатических условиях Среднего Поволжья? Чтобы получить ответы на эти вопросы,

было приобретено оборудование и собрана «солнечная» электростанция в офисе предприятия в центре города Ульяновска.

Структура солнечной электростанции. Электростанция состоит из следующих элементов:

1. Фотоэлектрическая панель (солнечная панель) IS-130-12 размером 1490x670x39 мм, 6 рядов по 12 элементов, максимальная мощность 130 Вт, выходное напряжение 17 В. Производство России, Зеленоград. Розничная цена 18850 рублей.

2. Гелевая аккумуляторная батарея LEOCHDJM 12200, 12 вольт, емкостью 200 ампер часов. Производство Китай. Розничная цена 14500 рублей.

3. Контроллер заряда батареи MorningstarProStar на ток заряда 15 ампер. Производство США, MorningstarCorp. Розничная цена 6600 рублей.

4. Инвертор синусный 12 вольт/220 вольт Powersine 1600-12 (номинальная мощность 1300 ватт/ максимальная мощность 1600 ватт не более 10 минут). Производство TBS-Elektronics (Голландия). Розничная цена 31000 рублей.

5. Электросчетчик активной энергии переменного тока ЛЕЙНЕ ЭЛЕКТРО-01 1МШ1. Производство Россия, Саранск. Розничная цена 370 рублей.

Окончательная стоимость с учетом доставки оборудования, скидки, цены на кабели и монтажные материалы составила 70000 рублей. Электрическая схема «солнечной» электростанции показана на рис.1.

Солнечная панель была смонтирована на южной стене здания таким образом, что нормаль к плоскости панели по азимуту направлена на юг, а угол места нормали (возвышение над горизонтом) равен углу осеннего (весеннего) солнцестояния в полдень. Для широты Ульяновска этот угол примерно 35 градусов.

На наш взгляд это компромисс, позволяющий выровнять среднегодовую освещенность панели и получить максимальную освещенность (и выработку электроэнергии) два раза в год весной и осенью. Большую среднегодовую освещенность солнечной батареи можно получить, только производя сезонную коррекцию угла места и суточную коррекцию азимута нормали. Другими словами поворачивать батарею всегда за солнцем. Но это потребует дополнительных затрат, снизит надежность за счет добавления подвижных элементов привода и вдобавок нереализуемо при установке панели на вертикальных стенах.

Функционирование солнечной электростанции. Работа электростанции совершается следующим образом. При полной зарядке аккумулятора (напряжение на клеммах аккумулятора 14,1 вольт), утром вручную включался инвертор с подключеной нагрузкой (два компьютера, ноутбук, лазерный принтер), суммарной мощностью около 350-400 ватт.

Отключение производилось вечером, в конце рабочего дня вручную, либо автоматически инвертором при разряде аккумулятора до 11,5 вольт.

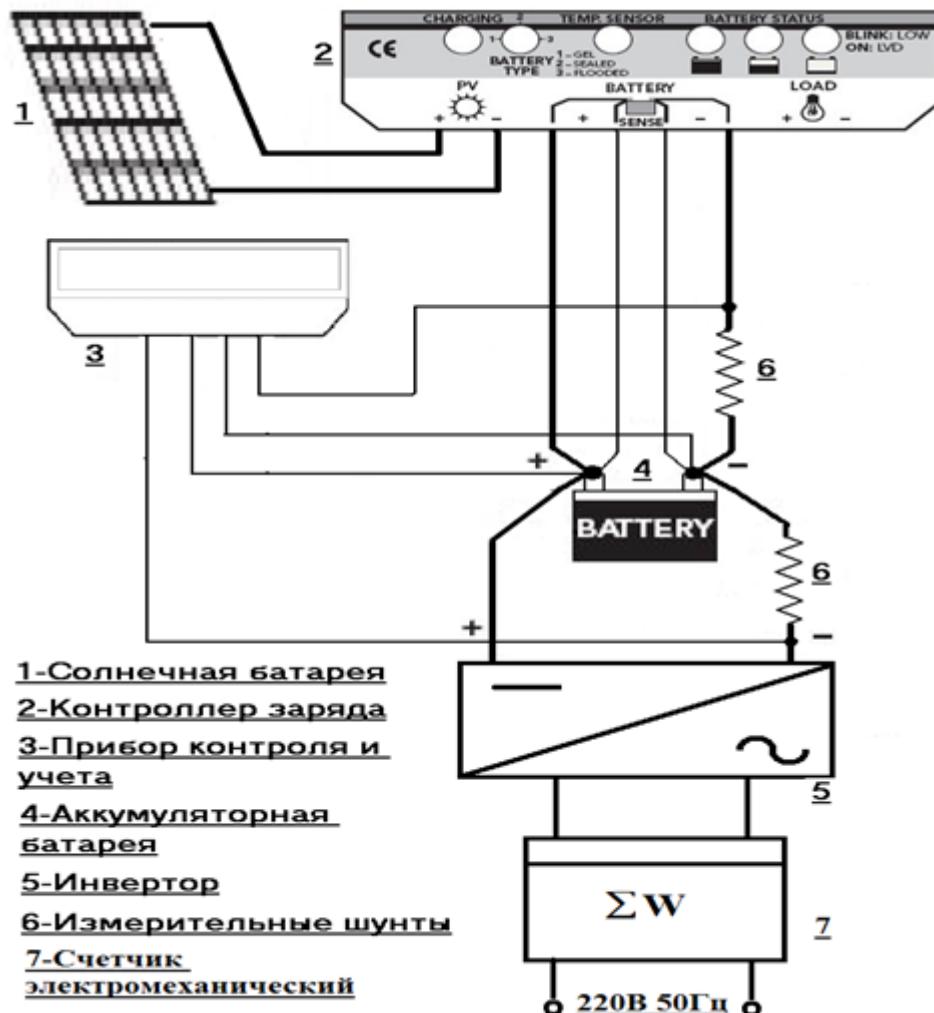


Рис.1 Электрическая схема «солнечной» электростанции

В безоблачную погоду такое включение производилось каждый четвертый день, иначе чтобы восстановить израсходованную из аккумулятора в течение одного дня электроэнергию, одной солнечной панели мощностью 130 ватт необходимо три дня.

«Солнечная» электростанция смонтирована в июле 2009 года и продолжает работать по настоящее время. Наработка электроэнергии (по электросчетчику) по месяцам за этот период представлена в табл.1. Электроэнергия, отданная потребителям, фиксировалась электромеханическим счетчиком.

В состав электростанции входит также прибор контроля и учета, который измеряет ток солнечной батареи (ток заряда аккумулятора), ток

нагрузки (ток разряда аккумулятора), напряжение аккумулятора. Измерения этих величин производятся каждые 10 секунд, круглосуточно. Массив данных переносится на персональный компьютер в формате Excel.

Таблица 2. Наработка электроэнергии по месяцам в киловатт-часах

Месяцы	Годы		
	2009	2010	2011
Январь		2,7	3,3
Февраль		4,0	7,0
Март		Не работала	7,9
Апрель		Не работала	4,8
Май		Не работала	6,3
Июнь		Не работала	4,4
Июль		6,1	8,9
Август	5,1	8,0	7,3
Сентябрь	6,6	3,5	4,4
Октябрь	6,1	2,8	
Ноябрь	0,9	1,6	
Декабрь	2,4	1,4	

Выборочно приведем графики характерных режимов работы «солнечной» электростанции. На рис.2 показан заряд аккумулятора от солнечной батареи в безоблачную погоду. На горизонтальной оси графиков откладывается время. Оно соответствует трем суткам. График нагляден и в пояснении не нуждается.

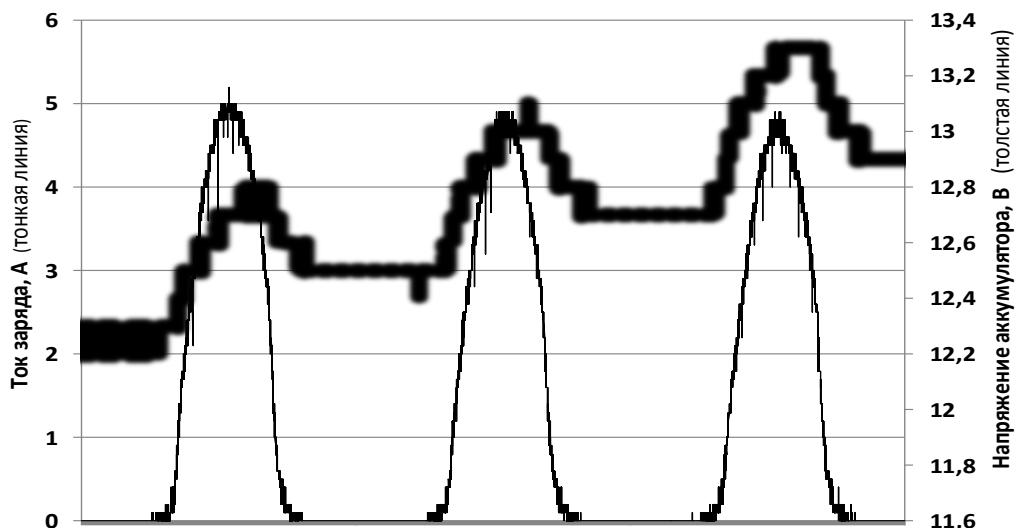


Рис. 2. График заряда аккумулятора 23,24,25 июля 2011 года

На рис.3 изображен график работы электростанции на нагрузку, то есть инвертор. На графике видно, что при достижении напряжения на аккумуляторе 14,1 Вольт, контроллер заряда, чтобы не допустить перезарядки, ограничил ток от солнечной батареи. Напряжение на аккумуляторе не растет, заряда нет. Утром, в 11-00 20 июля был включен инвертор. Мощность, потребляемая офисными компьютерами, соответствует току инвертора 18 – 19 Ампер. Короткие пики тока до 50 – 75 Ампер соответствуют работе лазерного принтера. В конце рабочего дня офиса остается включенным только ноутбук. Этой нагрузке соответствует ток инвертора около 4 Ампер. За неполный день 20 июля напряжение на аккумуляторе «сработалось» с 14,1 до 12,7 Вольт, в нагрузку отдалось 0,6 киловатт часов электроэнергии (по электросчетчику).

В 9-00 21 июля вновь был включен инвертор. Напряжение на аккумуляторе уменьшилось с 12,7 до 11,9 Вольт, в нагрузку передалось 1,5 киловатт часов электроэнергии. Из за низкого напряжения на аккумуляторе, 22 июля, инвертор не включался. За счет дневной подзарядки в этот день напряжение увеличилось до 12,3 Вольт. Продолжение заряда аккумулятора 23,24,25 июля показано на рис. 2.

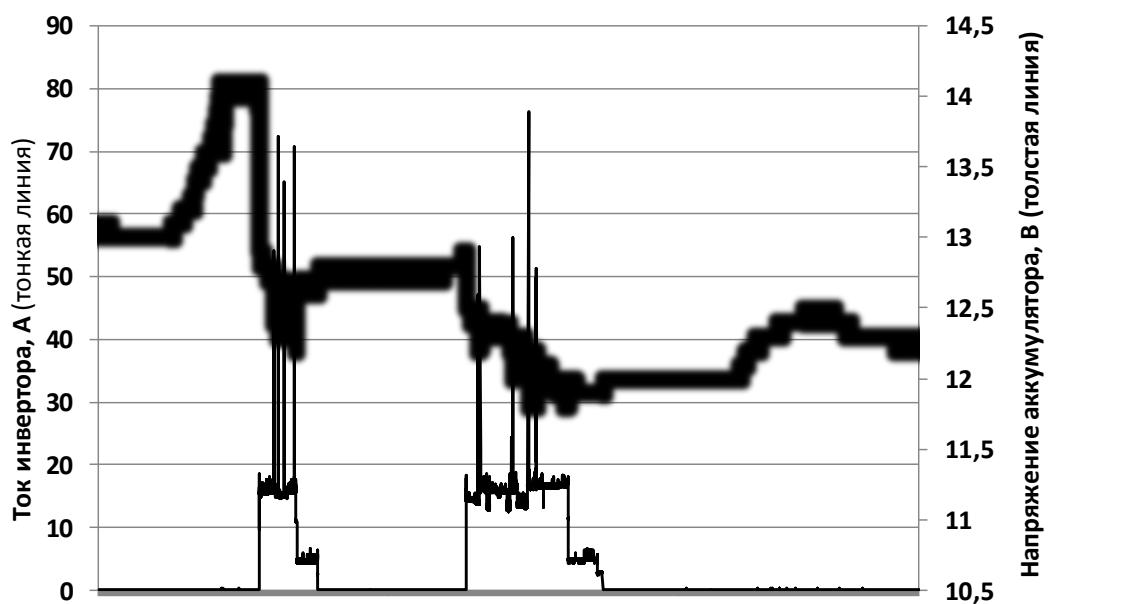


Рис. 3. График разряда аккумулятора на инвертор 20,21,22 июля 2011г.

На рис. 4 приведен график тока солнечной батареи в безоблачный день 2 июля, в день 3 июля с переменной облачностью, в середине дня – дождь и в полностью дождливый день – 4 июля. Сравнивая безоблачный день 2 июля и облачный день 3 июля, а также данные по другим подобным дням, можно сделать вывод, что выработка электроэнергии солнечной батареей при рассеянном освещении не превышает 20 % от выработки при прямом освещении в ясную погоду.

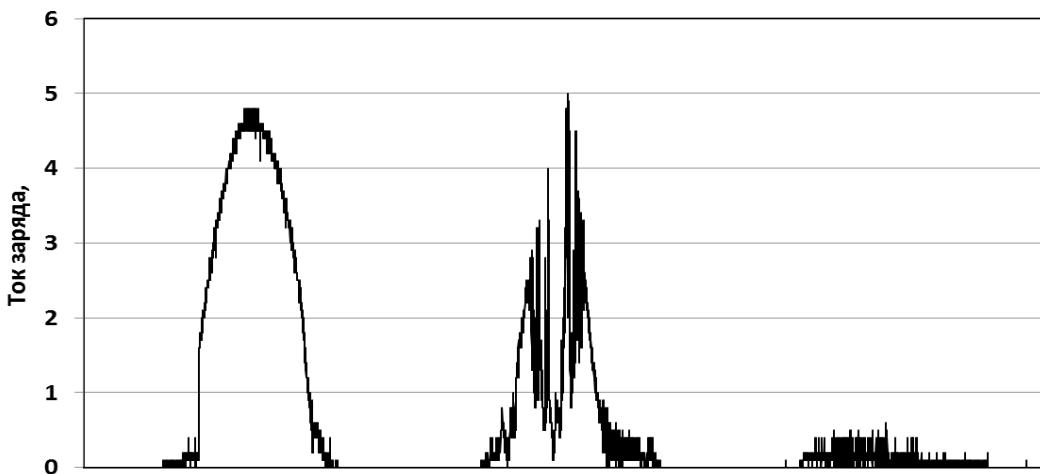


Рис. 4. Ток солнечной батареи 2, 3, 4 июля 2011г.

За время работы с августа 2009 года по сентябрь 2011 года, кроме периода март-июнь в 2010 году, когда менялся аккумулятор, «солнечная» электростанция на базе одной 130 ваттной панели выдала потребителям 105,5 киловатт часов электроэнергии. Средняя месячная наработка за 12 месяцев с октября 2010г. по сентябрь 2011г. составила 5,01 киловатт час. Стоимость одного ватта мощности такой электростанции равна $70000/130=538,5$ рублей.

Таким образом, использование солнечных батарей не рентабельно при рыночной стоимости киловатт часа 1,5 – 4,0 рубля. Так же, на наш взгляд, не окупятся капитальные вложения в «солнечную» электростанцию за срок службы аккумулятора (5 – 10 лет) и электронного оборудования (10 – 15 лет).

Перспективы солнечной энергетики. Увеличение рентабельности (и снижение стоимости киловатт часа) может произойти при увеличении числа солнечных батарей и как следствие увеличение мощности генерации. Этот принцип снижения стоимости энергии при увеличении мощности действует во всех отраслях электроэнергетики. Однако здесь имеется сложность в сбыте (продаже) излишков электроэнергии. Например, для небольшого офиса, если мощность солнечных батарей равна средней

суммарной мощности потребителей, может быть ситуация когда появится избыточная энергия. Иными словами солнечные батареи будут работать частично вхолостую.

В Германии имеются законодательные акты [2], которые гарантируют покупку электрическими сетями излишков произведенной электроэнергии. Этот факт, а также стоимость электроэнергии от 0,2 до 0,35 евро центов (от 8,4 до 14,28 рублей) за киловатт час при сопоставимых ценах на солнечные батареи позволяют владельцу «солнечной» электростанции в Германии уже через год эксплуатации окупить все расходы и получать прибыль со второго года.

Непопулярность солнечных батарей в России обусловлена на наш взгляд в меньшей степени техническими, а в большей степени организационно-экономическими сложностями. Использование солнечных батарея в условиях города несколько затруднительно. Батареи должны располагаться на стенах, обращенных на юго-восток, юг, и юго-запад. Рядом расположенные здания и деревья не должны отбрасывать тень на батареи. Поэтому на практике подобрать оптимальное место для монтажа не всегда удается.

Главное, как упоминалось выше, одна солнечная батарея площадью 1 кв. м. в среднем вырабатывает за месяц в условиях г. Ульяновска около 5 кВт часов электроэнергии. Чтобы получить полную автономию по электроснабжению, например квартиры, потребляющей в месяц 200 кВт часов, необходимо установить 40 солнечных батарей. Для такого количества может просто не хватить места для установки на стенах, да и стоимость только батарей будет сопоставима со стоимостью самой квартиры.

Однако в некоторых случаях использование солнечной электроэнергии, будет иметь экономическую выгоду уже в настоящих условиях российской действительности. В одном случае, когда электроснабжение полностью отсутствует и для подключения к централизованной сети необходимо выполнить проектные работы, оплатить строительство линии электропередачи и трансформатора. Сюда можно отнести объекты связи (ретрансляторы, базовые станции сотовой связи), автозаправочные станции, удаленные объекты в сельском хозяйстве и др. Построить «солнечную» электростанцию мощностью 3–5 кВт на таких объектах будет значительно дешевле.

В другом случае, когда на каком либо объекте имеется дефицит мощности, а действующая электросеть без дорогостоящей реконструкции не способна покрыть этот дефицит, «солнечная» электростанция может быть не плохим, а главное относительно недорогим решением проблемы.

Ещё одно преимущество «солнечной» электростанции заключается в её автономности и независимости от крупных поставщиков электроэнергии. Солнечные батареи при массовом их использовании [3]

должны составить основу децентрализованной системы выработки электроэнергии.

Принадлежащие широкому кругу лиц, устанавливаемые на крышах и стенах домов, они будут олицетворять собой «демократические принципы» новой энергетики в сравнении с «диктатурой» энергетических гигантов, имеющей место в настоящее время.

Такая распределенная сеть максимально приближает источник солнечной электроэнергии к потребителю, не только сводя к нулю потери при передаче по линиям, но и повышая надежность электроснабжения.

Многочисленные аварии зимой 2010/2011 г. в результате обледенения проводов ЛЭП приводят к необходимости построения распределенной сети электрогенераторов. И «солнечные» электростанции, в силу их преимуществ должны занять значительную долю в такой сети.

Литература

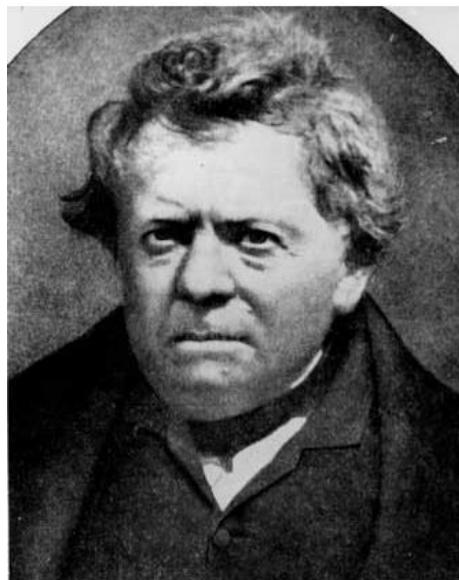
1. Харченко Н.В. Индивидуальные солнечные установки. – М.: Энергоатомиздат, 1991. – 208с.
2. http://ru.wikipedia.org/wiki/Солнечная_энергетика.
3. Алфёров Ж.И., Андреев В.М., Румянцев В.Д. Тенденции и перспективы развития солнечной фотоэнергетики // Физика и техника полупроводников, 2004.– Т.38.–Вып.8.– С.937–948.

Кузьмин Николай Павлович – директор Общества с ограниченной ответственностью ООО "Спецмонтажсервис". Домашний адрес: 432010, г. Ульяновск, проезд Сиреневый д.14, кв.11; тел: (8927)270-13-62; e-mail: niko_rus@mail.ru.

Маркелов Александр Александрович – зам. директора Общества с ограниченной ответственностью ООО "Спецмонтажсервис"; Домашний адрес 432035, г. Ульяновск, ул. Варейкиса д.8, кв.36; тел: (905)0360176.

КЛАССИКИ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

ГЕОРГ СИМОН ОМ (1787-1854)



Так начиналась теоретическая электротехника. 185 лет назад в «Журнале физики и химии» была опубликована первая работа в области теоретической электротехники «Определение закона, согласно которому металлы проводят контактное электричество, наряду с наброском теории аппаратов Вольта и гальванометров Швейгера» [1]. Ее автор, выдающийся немецкий ученый, Георг Симон Ом, ныне известен не только как основатель нового научного направления, но также и как признанный специалист по акустике и кристаллооптике. Важно отметить, что многие достижения Георга Ома по-прежнему сохраняют свое значение.

Сегодня каждый школьник слышал о знаменитом законе, который устанавливает зависимость между силой тока, разностью потенциалов и сопротивлением материала, но мало кто знает о том, какое драматическое влияние его открытие оказalo на жизнь самого ученого. Презрев догматы своего времени, Георг Ом оказался жертвой инерции общественного сознания, с которым боролся на протяжении многих лет, и смог преодолеть лишь благодаря упорному труду и готовности идти на жертвы ради достижения Истины.

Начало жизненного пути. Георг Ом родился 16 марта 1787 в баварском городке Эрланген в простой рабочей семье. Отец Георга Симона, Иоганн Вольфганг Ом, был потомственным слесарем, однако его интересы простирались намного шире, чем того требовало его ремесло. Он самостоятельно по учебникам занимался математикой, историей, географией, философией, а также посещал в Берлине школу технического рисования. Свою любовь к познанию Иоганн Ом стремился привить своим

детям, и надо отметить, что небезуспешно – оба его сына стали профессорами: Георг – физиком, а Мартин – математиком.

Стоит отметить, что стремление к самообразованию для детей Ома отчасти было обусловлено неудовлетворительным качеством обучения в школе и городской гимназии. Еще более важными для них стали занятия с преподавателями Эрлангенского университета, с которыми их любознательный отец старался поддерживать дружеские отношения. При такой подготовке у Георга Ома не было проблем ни с поступлением в университет, ни с обучением. Может быть, по этой причине он с азартом окунулся в спорт, увлекся танцами, что привело в конечном итоге к семейному конфликту, разрешением которого стал отъезд Георга, проучившегося в университете всего полтора года, в Швейцарию, где ему предложили занять место преподавателя математики в частной школе [2].

Однако начало преподавательской карьеры будущего ученого складывалось не слишком успешно, что не могло удовлетворить не лишенного амбиций Георга. В этот период ему особенно пригодилась способность к самостоятельному изучению научных трудов, которую он перенял от отца. И эти занятия оказались весьма плодотворными. Когда Ом в 1811 все же вернулся в Эрланген, то в течение года сумел окончить университет, защитить диссертацию, получить ученую степень доктора философии и должность приват-доцента кафедры математики.

К сожалению, уже совсем скоро Георг Ом вынужден был по материальным соображениям искать другое место работы. В январе 1813 он получил работу учителя математики и физики школы в Бамберге. Однако, методика преподавания в этой школе (как и во многих других европейских школах того времени) была такова, что Ом счел своим долгом направить в Генеральный комиссариат по преподаванию свои критические соображения. За этим последовало то, что в 1816 году школа в Бамберге была закрыта, а Ома перевели в местную подготовительную школу.

На основе этого печального опыта Ом подготовил и в 1817 году опубликовал свой первый печатный труд, в котором представил свою методику преподавания математики [3]. Работа была встреченадержанно, если не сказать враждебно. Ом старался энергично отстаивать свои идеи, посыпал письма с экземплярами статьи не только в университеты и школы, но и в министерства и даже королям (Вюртенберга и Пруссии). И постепенно у него стали появляться сторонники. Так, в 1824 году он получает приглашение занять место учителя физики и математики в иезуитской коллегии Кельна, где Ом и трудился последние 9 лет.

Математик стал физиком. Именно в иезуитской коллегии Кельна Ом «превратился» из математика в физика. Его увлекли исследования малоизученных на тот момент электрических явлений. Известно, что Ома вдохновляли идеи теории теплопроводности французского математика и физика Ж.Б.Ж.Фурье, по которым электрический ток представлялся как

течение некоего флюида, вызываемое перепадами «электроскопических сил» [2]. Ом руководствовался также и аналогией между токами в проводниках и течением жидкостей по трубам.

Путь, по которому пошел Георг Ом, определялся ясным пониманием того, что первым делом следует количественно исследовать физическое явление. Для измерения тока уже раньше пытались использовать тот факт, что ток вызывает нагревание проводника. Однако Ом избрал для измерения тока не тепловое, а именно его магнитное действие, открытое Эрстедом. Ток, протекавший по проводнику, вызывал поворот магнитной стрелки, подвешенной на золотой проволочке. Экспериментатор, поворачивая микрометрический винт, к которому крепился верхний конец проволочки, добивался компенсации поворота, вызванного магнитным воздействием, и угол поворота этого винта и являлся мерилом тока.

Первоначально Ом использовал гальванические источники тока, но вскоре обнаружил, что они создают ток, быстро убывающий со временем. К сожалению, полученные некорректные результаты уже легли в основу статьи «Предварительное сообщение о законе, по которому металлы проводят контактное электричество», которую он поспешил опубликовать в 1825 г в «Журнале физики и химии», издаваемом Дж. Швейгером [4], что серьезно подорвало репутацию Ома в научной среде [2].

Главным источником погрешностей была гальваническая батарея. Он нашел выход из этого положения, воспользовавшись советом И.Х. Поггендорфа [2], издателя «Annalen der Physik und Chemie», применить эффект, открытый Т. И. Зеебеком, – возникновение тока в цепи из двух различных проводов, если спай между ними имеют различные температуры. Ом в качестве источника тока использовал элемент из висмута и из меди, один спай которых находился в кипящей воде, а другой – в тающем снеге.

Результаты новых исследований были отражены в классической статье [1], и в последовавшей за ней фундаментальной работой «Теоретическое исследование электрических цепей» [5]. В них Ом вводит понятия и точные определения электродвижущей силы, или «электроскопической силы» (по выражению самого ученого), электропроводности и силы тока. Выразив выведенный им закон в дифференциальной форме, приводимой современными авторами, Ом записывает его и в конечных величинах для частных случаев конкретных электрических цепей, из которых особенно важна термоэлектрическая цепь. Исходя из этого, он формулирует известные законы изменения электрического напряжения вдоль цепи. Кроме того, Ом излагает основы первого метода анализа электрических цепей – метода преобразования последовательно и параллельно соединенных ветвей.

Начала теории электрических измерений. Однако научная общественность вновь встретила публикации Ома весьма прохладно.

Возможно, причиной этого были господствовавшие в то время философские взгляды [2]. Многие ученые натурфилософы (в числе которых были и высокопоставленные) придерживались того мнения, что истина должна постигаться умозрительным путем, что опыт не может (и даже не должен) занимать в науке лидирующего положения. Противники Ома не только отрицали его заслуги, но и активно мешали ему работать.

Все хлопоты о месте работы, где можно было бы плодотворно заниматься наукой, оставались тщетными. Даже выступать в печати со своими доводами Ому было затруднительно. Вместо того чтобы продолжать исследования, Ом вынужден тратить время и энергию на научную и оклоненаучную полемику, поскольку от признания полученных результатов зависело его назначение на хорошую должность и материальное благополучие.

Несмотря ни на что, талант пробивает себе дорогу и уже в 1829 году в «Журнале физики и химии» появляется новая статья «Экспериментальный вклад в полное познание электромагнитного гальванометра» [6]. В этой статье были заложены основы теории электроизмерительных приборов. Здесь же Ом впервые предложил единицу сопротивления, в качестве которой он выбрал сопротивление медной проволоки длиной 1 фут (304,8 мм) и поперечным сечением в 1 квадратную линию ($6,452 \text{ mm}^2$). В следующем, 1830 году, выходит в свет новая работа Ома «Попытка создания приближенной теории однополярной проводимости» [7]. Эта публикация вызвала интерес у ряда ученых, в том числе у знаменитого Майкла Фарадея, однако до всеобщего признания было еще далеко.

Реакционное давление со стороны научного сообщества в конце концов привело к тому, что, начиная 1833 года, Ом практически отошел от исследовательской деятельности, сосредоточившись на преподавании и административной работе в политехнической школе Нюрнберга. К серьезной науке он вернулся только к 1839 году, но на этот раз уже в области акустики, в которой он также добился впечатляющих результатов, открыв в 1843 году так называемый акустический закон Ома [2].

По иронии судьбы, как раз в то время, когда сам Георг Ом уже потерял интерес к электрическим явлениям, его работы привлекли к себе пристальное внимание за рубежом. В 1841 труды Ома были переведены на английский язык, в 1847 — на итальянский, в 1860 — на французский [2]. Отметим, что хотя перевода публикаций Ома на русский язык не было, но именно Э. Х. Ленц и Б. С. Якоби, работавшие в те годы в России, первыми привлекли внимание широкой научной общественности к трудам Ома. В 1842 году Георг Ом стал вторым немецким ученым, которого Лондонское Королевское общество наградило золотой медалью и избрало своим членом.

Наконец, через 20 лет ожидания, Георг Ом получил признание и на родине. В 1845 его избрали в Баварскую АН, а через четыре года

пригласили в Мюнхен на должность экстраординарного профессора. Тогда же он назначается хранителем государственного собрания физико-математических приборов и референтом по телеграфному ведомству при физико-техническом отделе Министерства государственной торговли. Одновременно он продолжает читать лекции по физике и по математике, занимается научными исследованиями, конструированием и изготовлением приборов. Много внимания уделяет методике преподавания. В последние годы жизни он начал работать над учебником физики, но успел закончить лишь первый том «Вклад в молекулярную физику» [8].

В 1852 году Георг Ом получил наконец-то должность ординарного профессора, о которой мечтал всю жизнь. В 1853 году он одним из первых награждается только что учрежденным орденом Максимилиана «За выдающиеся достижения в области науки». Но признание пришло слишком поздно. Силы уже были на исходе. 6 июля 1854 года Георг Ом скончался и был похоронен на старом южном кладбище города Мюнхена (рис. 1).



Рис. 1. Могила Георга Ома на старом южном кладбище города Мюнхена

Научный путь Георга Ома в очередной раз подтверждает известный тезис о том, что самые передовые идеи в науке часто оказываются маргинальными по отношению к господствующим на момент их появления представлениям. В области электротехники так было и с законами Густава Кирхгофа [9], и со схемным подходом Вильгельма Фойснера [10, 11]. Должны были пройти годы, как в случае с работами Ома или Кирхгофа, или даже полвека, как с публикациями Фойснера, прежде чем такие идеи оказываются оцененными по достоинству [12].

Литература

1. Ohm G. S. Bestimmung des Gesetzes, nach welchem Metalle die Contaktelektricität leiten, nebst einem Entwurfe zu einer Theorie des Voltaischen Apparates und des Schweiggerschen Multiplicators // Journal für Chemie und Physik – Halle: Verein zur Verbreitung von Naturkenntniss. – №16.– 1826. – S. 137–166.
2. Самин Д. К. Сто великих научных открытий.– М.:Вече,2002.–479с.
3. Ohm G. S. Grundlinien zu einer zweckmäßigen Behandlung der Geometrie als höheren Bildungsmittels an vorbereitenden Lehranstalten. – Erlangen: Palm und Enke, 1817.– 224 s
4. Ohm G. S. Vorläufige Anzeige des Gesetzes, nach welchem Metalle die Contaktelektricität leiten // Journal für Chemie und Physik. – Halle: Verein zur Verbreitung von Naturkenntniss.– №14.– 1825. – S. 110–118.
5. Ohm G. S. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. – Berlin: Riemann, 1827. – 245 s.
6. Ohm G. S. Experimentale Beiträge zu einer vollständigen Kenntnis des elektromagnetischen Multiplicators // Journal für Chemie und Physik – Halle: Anton. – №25.– 1829. – S. 1–64.
7. Ohm G. S. Versuche zu einer näheren Bestimmung der Natur unipolarer Leiter. Teil 1 // Journal für Chemie und Physik. – Halle : Anton und Gelcke. – №29.– 1830. – S. 385–435.
8. Ohm G. S. Grundzüge der Physik als Compendium zu seinen Vorlesungen. – Nürnberg: Schrag, 1854. – 563 s.
9. Kirchhoff G. R. Ueber der Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige // Annalen der Physik.– 1845.– Bd. 64.– S. 497–514.
10. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzförmigen Leitern // Annalen der Physik. – 1902. – Bd 9, N 13. – S. 1304–1329.
11. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstärke in netzförmigen Leitern // Annalen der Physik. – 1904. – Bd 15, N 12. – S. 385–394.
12. Горшков К.С., Филаретов В.В. Схемный подход Вильгельма Фойснера и метод схемных определителей / Под ред. В.В.Филаретова.– Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2009.– 189 с.

К. С. Горшков

ДИСКУССИИ

***Статья С.П. Халютина и А.А. Титова
в журнале «Электричество»***

ЭКОНОМИЯ СЛОВ – ТРАДИЦИЯ НАУЧНЫХ СТАТЕЙ

И. В. Ерохов

Приятно, что научная общественность обращается к пионерским работам Г.Кирхгофа (надо думать к [1]), мало того, вводит в учебный процесс комплекс идей первых работ по теории электрических цепей. Топологические представления очень важны для становления специалиста в области электротехники, электроники.

Пусть эти методы имеют мало шансов стать «технологичными» (по крайней мере, в ближайшем будущем), составить конкуренцию методам, основанным на уравнениях состояния и численном интегрировании, но без них нельзя сформировать у студентов убеждения, что «изображение цепи есть функция, данная в схемном изображении» [2].

Однако, на мой взгляд, статья [3] перегружена новыми формальными понятиями и математическими выражениями, что отрицательно сказывается на понимании текста.

Постараюсь пояснить на примере. Откройте книгу «Основы теории цепей» (Ваша ссылка [9]) и вы встретитесь с текстами, которые отличаются ясностью, последовательностью в изложении доказательств, стремлением высказать смысл минимальным количеством слов.

Эта традиция идет от Г.Кирхгофа, который в работе [1] поставил задачу максимальной сложности, но не скрылся за «забором математических выражений», сохранил ясность рассуждения специалиста по теории электрических цепей.

В работе [4] произведена реконструкция первого топологического метода на модельном примере, граф которого приведен и в работе [1]. Стоит объяснить данное положение на примере электрической цепи рис.1. Это исторически первая электрическая схема Кирхгофа, которая свыше полутора веков является «пробным камнем» для многочисленных методов анализа электрических цепей.

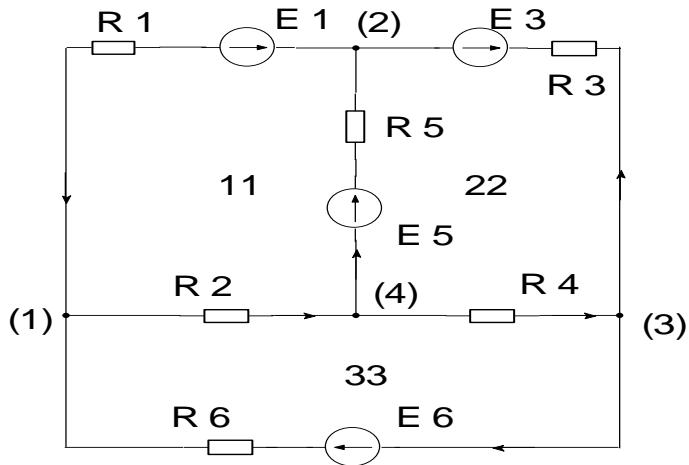


Рис.1. Простая электрическая цепь.

Г.Кирхгоф понимал, что решение большой алгебраической системы уравнений можно найти только по Крамеру (в нашем примере $I_1 = I_{11}$):

$$I_{11} = I_1 = \frac{\Delta_1 \|R\|}{\Delta \|R\|}. \quad (1)$$

Однако он осознает всю сложность задачи и переходит к упрощению графа схемы до одного контура, содержащего интересующую нас ветвь. Для нашего примера получаем систему контуров, содержащих ветвь 1:

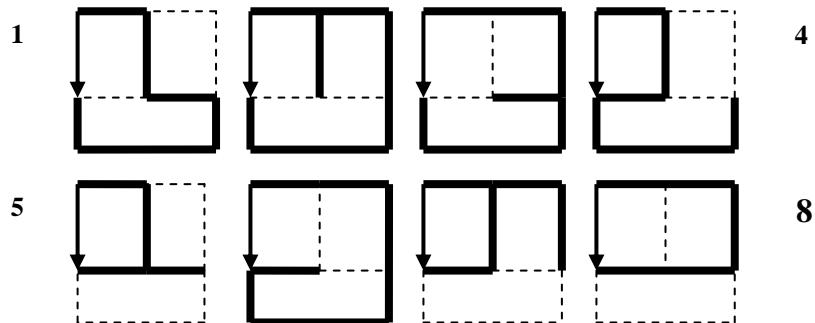


Рис. 2. Контуры схемы рис.1, содержащие ветвь 1

В каждом контуре, совершая обход, (условное направление тока указано на рис.2) мы физически осмыслиенно записываем уравнение по второму закону Кирхгофа и находим приближенное значение тока. Результаты этой работы приведены ниже [4]:

$$\begin{aligned}
& \frac{\{1, 4, 5, 6\}}{\{2, 3\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5 - E_6}{R_1 + R_4 + R_5 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_3 + E_5 R_2 R_3 - E_6 R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + R_4 R_2 R_3 + R_5 R_2 R_3 + R_6 R_2 R_3}; \\
& \frac{\{1, 3, 6\}}{\{2, 4\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_4 - E_3 R_2 R_4 - E_6 R_2 R_4}{R_1 R_2 R_4 + R_3 R_2 R_4 + R_6 R_2 R_4}; \\
& \frac{\{1, 3, 6\}}{\{2, 5\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_2 R_5 - E_3 R_2 R_5 - E_6 R_2 R_5}{R_1 R_2 R_5 + R_3 R_2 R_5 + R_6 R_2 R_5}; \\
& \frac{\{1, 2, 5\}}{\{3, 4\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 R_4 + E_5 R_3 R_4}{R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_5 R_3 R_4}; \\
& \frac{\{1, 2, 5\}}{\{3, 6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_3 R_6 + E_5 R_3 R_6}{R_1 R_3 R_6 + R_2 R_3 R_6 + R_5 R_3 R_6}; \\
& \frac{\{1, 3, 6\}}{\{4, 5\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{R_1 + R_3 + R_6} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 R_5 - E_3 R_4 R_5 - E_6 R_4 R_5}{R_1 R_4 R_5 + R_3 R_4 R_5 + R_6 R_4 R_5}; \\
& \frac{\{1, 2, 5\}}{\{4, 6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 + E_5}{R_1 + R_2 + R_5} \Rightarrow \frac{-E_1 R_4 R_6 + E_5 R_4 R_6}{R_1 R_4 R_6 + R_2 R_4 R_6 + R_5 R_4 R_6}; \\
& \frac{\{1, 2, 3, 4\}}{\{5, 6\}}; \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \Rightarrow \frac{-E_1 R_5 R_6 - E_3 R_5 R_6}{R_1 R_5 R_6 + R_2 R_5 R_6 + R_3 R_5 R_6 + R_4 R_5 R_6}. \tag{2}
\end{aligned}$$

В последней колонке выражения для приближенного значения тока ветви 1 уточняются за счет параметров ветвей-связей – числитель и знаменатель выражения умножаются на параметры этих ветвей. Из «уточненных» выражений создается формула точного решения вида (1): объединяются слагаемые числителей и знаменателей. Каждый, кто знаком с множественной операцией объединения множеств \cup , может это сделать и убедиться, что решение получено правильное. Конечно, надо иметь в виду, что оно следует из системы уравнений, составленной методом контурных токов. О возможности такого описания электрической цепи Г.Кирхгоф не подозревал. Метод контурных токов был обоснован Максвеллом почти через 50 лет:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_5) & -R_5 & -R_2 \\ -R_5 & (R_3 + R_4 + R_5) & -R_4 \\ -R_2 & -R_4 & (R_2 + R_4 + R_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_1 + E_5 \\ -E_3 - E_5 \\ -E_6 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

В тексте рассматриваемой статьи вводятся новые термины, лишние исправления и ясность исчезает за забором формул.

Рассмотрим Ваш *пример 1*. Зачем нужно было вводить понятие нулевого слагаемого? Современная теория электрических цепей владеет алгоритмами нахождения определителя, где в понятии нулевого

слагаемого нет необходимости. Покажем на вашем (рис.1) примере. Перемножим контурные множества [5] схемы с учетом следующих правил [6]:

$$\begin{aligned} a \otimes a &= 0; \\ abc \oplus abc &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Выполним процедуру умножения

$$\{1,3,4\} \otimes \{2,3,5\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 4 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Для случая узловых множеств получаем

$$\{1,4\} \otimes \{3,4,5\} \otimes \{2,5\} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 5 & 4 & 5 & 5 \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Структурные числа (5), (6) можно отобразить на множество сопротивлений (проводимостей) схемы Вашего примера и мы получим соответствующие детерминанты. Теория структурных чисел разрабатывалась не только за рубежом, но и в пределах СССР, например [7, 8].

Поймите меня правильно, я сознаю, что никто не в силах запретить создание новых терминов, но Вас должны понять специалисты, большинство из которых уважают традиции своей науки. Только жизнь решает вопрос жизни/смерти нового термина. Например, когда-то было введено понятие дерева схемы. Потом выяснилось, что в Китае есть деревья, ветви которого образуют замкнутые фигуры, но термин прижился. А возьмем совершенно «непонятный» термин – передача дерева. Какой поток может передаваться по графу, в котором нет ни одного контура? Но термин все-таки прижился.

Мой учитель, Элизар Вульфович Зелях, составлял методические пособия таким образом, что нельзя было выбросить ни одного слова. Но, если действовать, осознавая каждое слово, то читатель понимал смысл текста почти алгоритмически. Мало того, «экономия слов» - это одна из отличительных черт русской жизни, традиция научных статей, о чем писал еще Н.Чернышевский. Неужели мы уходим от истоков?

Литература

1. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Избранные труды Г.Кирхгоф. – М.: Наука, 1988. – С. 170–178.
2. Сосунов А.Я. Расчет электрических цепей с помощью функций, представленных в схемном изображении//Сб. Научные труды НИИ городской и сельской телефонной связи /НИИТС/. – Л., 1958.– Вып.2.– С. 50–89.

3. Халютин С.П., Титов А.А. Обобщенная симметричная формула метода эквивалентного генератора на основе разложения переменной (напряжения, тока) по слагаемым определителя. – Электричество.– 2011.– №6. – С. 62–70.
4. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета, созданного Г.Кирхгофом// Труды международной конференции КЛИН– 2006», том 3. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – С. 76–83.
5. Максимович Н.Г. Методы топологического анализа электрических цепей. – Львов: Изд. ЛвГУ, 1970. – 258 с.
6. Bellert S., Woźniacki H. Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. – Warszawa: Wydawnictwo naukowo-techniczne, 1968. – 306 S.
7. Трохименко Я.К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. – М.: Сов. радио, 1972. – 212 с.
8. Ерохов И.В. Теоретико-множественное обоснование топологического метода, созданного Г. Кирхгофом (настоящий сборник).

Ерохов Игорь Васильевич – профессор Запорожского Классического Приватного Университета (Украина), кандидат технических наук.
E-mail: yerokhov@bigmir.net.

ТРЕТЬЕ ТОПОЛОГИЧЕСКОЕ ПРАВИЛО КИРХГОФА И ОБОБЩЕННАЯ СИММЕТРИЧНАЯ ФОРМУЛА

В последние годы возобновился интерес исследователей к наследию Г.Р.Кирхгофа с целью развития исторически первого символьно-топологического метода анализа электрических цепей [1, 2]. В числе посвященных этому методу работ следует отметить статьи, опубликованные в журнале «Электричество» [3, 4]. Первая из статей [3] уже получила обсуждение в печати [5–10]. В настоящей заметке содержится критическое рассмотрение материалов второй статьи [4] и сопутствующих ей работ [11–15].

Топологический метод Кирхгофа. Топологические правила [1, 2] стали реакцией Кирхгофа на несовершенство математических методов при решении уравнений электрических цепей и неприспособленность этих методов для получения решения в аналитическом (символьном) виде. Три топологических правила в статье [1] приведены после формулировки теорем, которые были опубликованы Кирхгофом двумя годами раньше (в 1845 году) и получили впоследствии название «законов Кирхгофа».

Характерно, что Кирхгоф первой привел теорему о равновесии напряжений в контуре, а не теорему о непрерывности токов в узле (сечении). Это сделано им не случайно, поскольку приведенные следом три топологических правила опираются на понятие «замкнутой фигуры» – контура. На авторское нарушение принятого сейчас порядка следования законов было указано И.В.Ероховым [16].

По существу в статье [1] приводится пять правил: два правила-закона, третье правило для нахождения знаменателя отклика, четвертое и пятое правила предназначены для нахождения числителя отклика двумя различными способами. Последние три правила называются топологическими, поскольку образуют топологический метод анализа и позволяют получить решение – искомый отклик – непосредственно по виду (структуре, топологии) схемы, минуя составление системы уравнений. В работе [15] топологические правила Кирхгофа объединены под названием «третья теорема Кирхгофа».

В одной из первых публикаций, посвященных популяризации статьи [1], была предложена порядковая нумерация результатов Кирхгофа, в соответствие с которой топологические правила были названы «третьим и четвертым правилами Кирхгофа» [17]. Однако при этом последнее – пятое правило – даже не было упомянуто. В настоящей работе топологические правила Кирхгофа нумеруются отдельно от законов римскими цифрами I, II и III в соответствии с порядком их следования в тексте [1].

Интерес неискушенных исследователей продолжает питать эстетическая притягательность и кажущаяся простота топологического анализа, которая скрывается за емкой краткостью формулировок классика. Воспроизвести ход мыслей Кирхгофа позволила реконструкция первого топологического метода, выполненная И.В.Ероховым [18]. По его утверждению «материал статьи [1] изложен очень плохо». Далее: «Именно этим, на наш взгляд, объясняется длительное пребывание работы [1] в запасниках научных достижений. Только Дж.К.Максвелл, имеющий опыт расшифровки работ М.Фарадея, сумел почти через 50 лет понять суть работы» [19, с. 33].

«Встав на плечи Кирхгофа», Максвелл существенно более просто и кратко (на 1,5 страницах) изложил дуальный результат, попутно введя понятие схемной функции [20, с. 329–331]. Но переворот в символном анализе электрических цепей совершил все-таки Фойнер [21, 22]… Хочется надеяться, что настоящее обсуждение будет способствовать тому, что квалифицированные специалисты перестанут затрачивать годы жизни на повторение результатов Кирхгофа.

Представляется, что причиной бесплодных попыток улучшить правила Кирхгофа является невнимательное прочтение работы [1]. Непросто сказать лучше классика (даже в форме не слишком удачного перевода [2]). Поэтому Кирхгоф, как правило, достоин цитирования

больше, чем его последователи, которые часто не замечают лаконичности и глубины формулировок, а предлагают свои положения, обремененные избыточными терминами.

В статье [1] Кирхгоф рассматривает схему из n проводников с сопротивлениями: $w_1, w_2, \dots, w_k, \dots, w_n$. Последовательно с каждым k -м проводником соединяется эдс E_k . В схеме с μ независимыми контурами находится ток I в проводнике γ (I_λ). Приводимые ниже правила отличаются от оригинала заменой слов «замкнутая фигура» на термин «контур».

Правило I (для знаменателя). «Общий знаменатель всех величин I равен сумме сочетаний из w_1, w_2, \dots, w_n по μ элементов $w_{k1}, w_{k2}, \dots, w_{kn}$, обладающих тем свойством, что после размыкания проводников k_1, k_2, \dots, k_μ в сочетаниях не остается ни одного контура» [2, с. 177].

Разве можно, не используя понятия дерева (его открыл сам Кирхгоф [23]), сказать проще? Свойство «не остается ни одного контура» (правило I) эквивалентно свойству «исключаются ... изолированные узлы или изолированные подсхемы» [4, с. 65]. Зачем далее уточнять: «(при коротком замыкании остальных сопротивлений схемы появляются короткозамкнутые контуры)? Это лишняя проверка. Для чего замыкать «остальные» сопротивления, если контур из сопротивлений, как и изолированная подсхема, легко распознается на схеме? Это лишняя операция.

Под «размеченными узлами» в [4, с. 65] понимаются узлы схемы, полученной из исходной схемы в результате замыкания источников напряжения и приемников тока, а также размыкания источников тока и приемников напряжения. Определитель преобразованной схемы (часто называемой схемой знаменателя) является знаменателем схемной функции или отклика. Называть узлы этой схемы «размеченными» представляется надуманным и запутывающим читателя.

Таким образом, попытка совершенствования правила I [4, с. 65] является неудачной. Комбинаторный алгоритм перечисления деревьев считается самым трудоемким. Наиболее простым и эффективным признан алгоритм [24], исключающий генерацию-проверку сочетаний и основанный на выделении ветвей по формулам Фойснера [21, 22].

Для иллюстрации правила I рассмотрим схему, изображенную на рис.1,а, которая воспроизведена из работы [4, с.67].

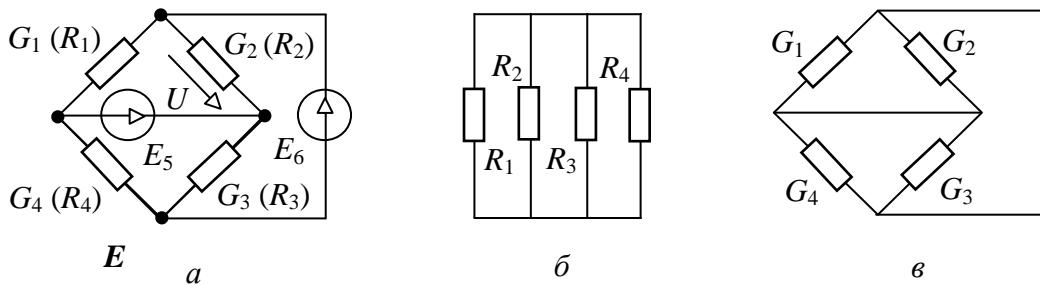


Рис. 1

Схемы знаменателя ($\mu=3$) для сопротивлений ($R_k=1/G_k$, при $k=1,2,3,4$) и проводимостей представлены на рис.1,б и рис.1,в соответственно. По правилу I перебираем сочетания из 4 элементов по 3: $R_1R_2R_3$, $R_1R_2R_4$, $R_1R_3R_4$, $R_2R_3R_4$. Все эти сочетания войдут в контурный определитель, поскольку после размыкания элементов каждого сочетания на схеме рис.1,б не остается контуров. Отсюда

$$\Delta = R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4.$$

О третьем топологическом правиле Кирхгофа. Так случилось, что пятое по порядку правило Кирхгофа (правило III по принятой здесь нумерации), и впоследствии, как в работе [17], не было замечено специалистами – не вошло в многочисленные обзорные статьи, монографии и учебники, например [25–27], что приводило и до сих пор приводит [3, 4, 11–15] к повторным опубликованиям результатов Кирхгофа в завуалированной форме «новых» интерпретаций.

В какой-то мере это объясняется тем, что правило III сформулировано в конце статьи [2, с. 177], обособлено от первых двух топологических правил, которые помещены на с. 171. Это правило интересно тем, что предусматривает нахождение числителя отклика по его знаменателю, а невнимательные исследователи систематически оспаривают приоритет у Кирхгофа [5–8, 10]. Ниже приведены оба правила для нахождения числителя.

Правило II (для числителя). «Числитель величины I_λ равен сумме сочетаний из w_1, w_2, \dots, w_n по $\mu-1$ элементов $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{\mu-1}$, обладающих тем свойством, что после исключения проводников $k_1, k_2, \dots, k_{\mu-1}$ остается один контур; каждое сочетание умножается на сумму электродвижущих сил, которые приложены к проводникам, образующим соответствующий контур. При этом электродвижущие силы считаются положительными в том же направлении, что и I_λ ».

Правило III (для числителя). «Если упорядочить члены числителя величины I_λ по величинам E_1, E_2, \dots, E_n , то коэффициент при E_k окажется суммой взятых частью со знаком “плюс”, частью со знаком “минус” сочетаний из w_1, w_2, \dots, w_n по $\mu-1$ тех элементов, которые входят в знаменатель величин I , умноженные как на w_λ , так и на w_k . Именно эти сочетания $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{k_{\mu-1}}$ обладают тем свойством, что после размыкания проводников $k_1, k_2, \dots, k_{\mu-1}$ остается один контур, и что в этот контур входят и проводник λ , и проводник k . Сочетание $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots, w_{k_{\mu-1}}$ следует брать со знаком «плюс», если положительное направление I_λ в контуре совпадает с направлением электродвижущей силы E_k , и со знаком «минус» в противном случае».

Для иллюстрации правила III найдем числитель отклика напряжения в схеме на рис.1,а, используя ранее найденный контурный определитель. Вначале получим слагаемое числителя для источника E_5 ($\lambda=2, k=5$). Подмножество слагаемых Δ , включающих множитель R_2 , имеет вид:

$$\Delta(R_2) = R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_2R_3R_4.$$

По правилу III для каждого слагаемого Δ_2 проводится проверка, а именно, на схеме рис.1,а размыкаются элементы, входящие в слагаемое (кроме элемента R_2). Если в оставшейся схеме остается контур, проходящий через R_2 и E_5 , то это слагаемое учитывается сомножителем при E_5 с соответствующим знаком.

При размыкании R_1R_3 и R_3R_4 образуются контуры $E_5R_4E_6R_2$ и $E_5R_1R_2$ соответственно с встречными направлениями источника и приемника, а при размыкании R_1R_4 контура, проходящего через E_5 и R_2 , не образуется. Таким образом, числитель отклика от источника E_5 равен: $(-R_1R_3 - R_3R_4)E_5$.

Теперь найдем слагаемое числителя для источника E_6 ($\lambda=2, k=6$). По аналогии с предыдущими выкладками проводится проверка для каждого слагаемого $\Delta(R_2)$. Если в оставшейся схеме остается контур, проходящий через R_2 и E_6 , то это слагаемое учитывается в сомножителе при E_6 с соответствующим знаком.

При размыкании R_1R_3 и R_1R_4 образуются контуры $E_5R_4E_6R_2$ и $E_6R_3R_2$ соответственно с согласными направлениями источника и приемника, а при размыкании R_3R_4 контура, проходящего через E_6 и R_2 , не образуется. Таким образом, числитель отклика от источника E_6 равен: $(R_1R_3 + R_1R_4)E_6$.

Суммируя отклики от обоих источников с учетом множителя R_2 , получаем выражение при явном представлении числителя:

$$U = R_2[-(R_1R_3 + R_3R_4)E_5 + (R_1R_3 + R_1R_4)E_6] / (R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4).$$

В правиле II числитель группируется по выбранным произведениям сопротивлений (неявно [28]), а в правиле III – по параметрам эдс (явно). Иначе говоря, можно свернуть выражение так, чтобы каждое слагаемое знаменателя встречалось в числитеle (без w_λ или w_k) один раз, а параметры независимых источников – многократно, или наоборот. Произведения сопротивлений выбираются из схемного определителя – знаменателя отклика – по правилу III, перед которым Кирхгоф написал: «Да позволено мне будет сделать несколько замечаний по поводу доказанной теоремы» [2, с. 177].

Очевидно, что Кирхгофа «озарило»: в правиле II можно не перебирать все возможные сочетания из w_1, w_2, \dots, w_n по $\mu-1$ элементов, а выбрать значительно меньшее число сочетаний для выявления единственного

контура из ранее найденного знаменателя по наличию сомножителя w_λ или w_k !

При нахождении напряжения U_λ удалять сомножитель w_λ из выбранных слагаемых не потребуется – они войдут в числитель в том виде, в каком встретятся в знаменателе. Это является следствием известного положения, что числители передаточных схемных функций по напряжению и току входят в знаменатель [26, 27].

Следовательно, «заготовку» для выражения числителя (то есть «копию» выражения знаменателя) можно записать заранее. Однако в общем случае избыточное выражение будет состоять преимущественно из нулевых слагаемых. Это является слишком большой ценой за получение числителя, который можно раскрыть в компактном виде как определитель схемы числителя, минуя сортировку и проверку отдельных слагаемых [8, 10].

Как видно, педантичный Кирхгоф стремился рассмотреть различные возможности для упрощения записи отклика. Правило III позволяет не только исключить перебор сочетаний из числа элементов или уменьшить количество рассматриваемых сочетаний, выбрав их по наличию сомножителя w_λ или w_k . Сказав в правиле III «умноженные как на w_λ , так и на w_k », основоположник теории цепей предусмотрел использование операции пересечения подмножеств слагаемых знаменателя, вообще избавляющей от необходимости выявлять контура.

Действительно, множество слагаемых знаменателя включает два подмножества: 1) слагаемые с параметром w_λ в качестве сомножителя; 2) слагаемые, содержащие сомножитель w_k . Слагаемые-сомножители (коэффициенты) для числителя находятся как пересечение этих подмножеств. При размыкании ветвей-сомножителей каждого слагаемого в схеме образуется контур, включающий обе ветви λ и k . Из этого контура на основе второго закона Кирхгофа выражается искомое напряжение U_λ через эдс источников, вошедших в контур. Это напряжение в соответствии с правилами II или III умножается на соответствующий коэффициент и образует слагаемое, учитываемое в числите отклика.

Совместное применение правил II и III рассмотрим на том же самом примере. Найдем числитель отклика напряжения в схеме на рис.1,а, используя предыдущее решение по правилу III. Множество $\Delta(R_2)$ представляет собой «заготовку» для записи числителя. При размыкании R_1R_3 в схеме на рис.1,а образуется контур $E_5R_4E_6R_2$, из которого по второму закону Кирхгофа выражается слагаемое для отклика: $R_1R_3(E_6-E_5)$. При размыкании R_1R_4 и R_3R_4 образуются контуры $E_6R_3R_2$ и $E_5R_1R_2$, которые порождают слагаемые для отклика: $R_1R_4E_6$ и $-R_3R_4E_5$ соответственно. Суммируя указанные слагаемые, получаем выражение с неявным представлением числителя:

$$U = R_2[R_1R_3(E_6 - E_5) + R_1R_4E_6 - R_3R_4E_5]/(R_1R_2R_3 + R_1R_2R_4 + R_1R_3R_4 + R_2R_3R_4),$$

которое согласуется с выражением для U [4, с. 67], записанным в базисе проводимостей.

Правила I, II и III могут быть использованы при нахождении тока в схеме с источниками тока. В этом случае после размыкания ветвей, параметры которых вошли в слагаемое знаменателя, в схеме должно образоваться сечение, содержащее источники тока и ветвь с искомым током. Этот коэффициент слагаемого числителя, умножается на ток, выраженный по первому закону Кирхгофа через токи источников, вошедших в рассматриваемое сечение. Как видно, в основе, казалось бы, абстрактных топологических правил лежат физические законы, а числитель отклика учитывает *активные контуры или сечения*, которые обеспечивают вклад источников в отклик по второму или первому законам Кирхгофа [29].

Сопротивления (проводимости), не вошедшие в учитываемый контур или сечение, не влияют на работу рассматриваемой подсхемы и могут быть заменены идеальными проводниками (разомкнутыми ветвями), как предлагается в [4]. « E - и J -соединение» – «предельное состояние» – является ничем иным как контуром или сечением, содержащим ветвь с искомым напряжением или током, а также источники напряжения или тока.

Полезность введения понятий « E - и J -соединений» в топологический метод Кирхгофа вызывает сомнение. Оставшиеся в подсхеме элементы также, как идеальные проводники или разомкнутые ветви, не мешают визуально находить единственный контур или сечение и записывать вес контура или сечения сомножителем при коэффициенте. Использование словосочетания «метод предельных состояний» (тем более что метод с таким названием широко известен в строительной механике) для именования по существу метода Кирхгофа воспринимается как недостаток научной этики.

Итак, развития результатов Кирхгофа в работе [4] не получилось. После обоснования принципа дуальности [30] дуальные правила во многом «обесценились», поскольку производятся формальной заменой понятий. В методике [4] сохраняется комбинаторный перебор элементов и получение развернутых выражений, что возможно только для схем до 5–10 узлов. Анализ схем в сотни узлов и элементов обеспечивается формированием компактных выражений, имеющих многократно меньшую вычислительную сложность (с оптимальным вынесением за скобки общих множителей) [31, 32]. Для этого нужно использовать не правило I, а формулы выделения Фойснера [21, 22].

Методика [4], подобно прототипу – оригинальному методу Кирхгофа, не позволяет анализировать схемы, содержащие как сопротивления, так и

проводимости, как источники напряжения, так и источники тока, требуя приведения элементов к одному типу, что не только трудоемко, но и не всегда возможно. Например, для нахождения схемных функций и откликов в полиномиальном виде требуется задание конденсаторов проводимостями, а катушек индуктивности сопротивлениями. Современный метод схемных определителей [33–35] лишен перечисленных ограничений и применим для анализа сложных схем со всеми типами линейных элементов.

Практическую несостоятельность результатов статьи [4] подчеркивает то обстоятельство, что авторы некорректно сравнивают свою методику, (относящуюся к классу символьно-топологических методов) с матрично-численным методом узловых напряжений. Из известного неудачного опыта обобщения топологических правил Кирхгофа для анализа активных электрических цепей [3] очевидно, что и методика [4] не имеет ресурса развития [8, 10].

«Обобщенная симметричная формула» (ОСФ) как иллюзия. Интерпретация топологических правил Кирхгофа, хотя и представлена в статье [4] без обоснования, в целом не вызывает возражений, чего нельзя сказать о представлении отклика в виде ОСФ [4, 11–15]. В этой формуле знаменатель отклика компактно записан на основе разложения Фойснера [21, 22].

Однако в числителе ОСФ используется та же формула Фойснера, причем каждое ее слагаемое умножается на некое гипотетическое напряжение или ток. Например, ОСФ для нахождения напряжения по узловому определителю имеет вид

$$U = (G_i \Delta_i U_i + \Delta^i U^i) / (G_i \Delta_i + \Delta^i). \quad (1)$$

где нижние и верхние индексы при символе Δ указывают на замыкание и размыкание ветви i соответственно; U_i и U^i – частичные отклики, которые находятся в схемах, образованных замыканием ветвей, используемых в слагаемых узлового определителя.

Числитель ОСФ иначе как вульгарно понятым правилом III назвать нельзя. Некорректность формулы (1) проявляется в том, что определители Δ_i или Δ^i умножаются на единственное напряжение, хотя могут содержать более одного слагаемого. Это противоречит правилу III, которое при нахождении частичного отклика требует раздельного использования каждого слагаемого знаменателя. Частичные отклики, записываемые в виде алгебраической суммы параметров независимых источников, при различных слагаемых знаменателя могут совпадать только при одинаковом контуре или сечении [29]. ОСФ можно опровергнуть на примере 2 самой обсуждаемой статьи [4, с. 66–67].

Авторы не искушают судьбу: они не только не записывают ОСФ перед решением примера 2 (с. 66–67), но и вовсе не применяют ее. Сделаем это за них, выделяя проводимость G_2 , параллельную искомому отклику U .

Формула (1) применительно к данному случаю получает вид

$$U = (G_2\Delta_2 U_2 + \Delta^2 U^2) / (G_2\Delta_2 + \Delta^2). \quad (2a)$$

Определители относятся к схеме знаменателя, представленной на рис.1,в. При замыкании G_2 замыкается приемник напряжения U , поэтому $U_2=0$, и в числителе не будет первого слагаемого.

$$U = (\Delta^2 U^2) / (G_2\Delta_2 + \Delta^2). \quad (2b)$$

На рис.1,в видно, что $\Delta^2 = G_1 + G_3 + G_4$. Эти три слагаемых знаменателя используются при нахождении числителя (с. 67):

$$U = [G_1(-E_5) + G_3 E_6 + G_4(E_6 - E_5)] / (G_1 + G_2 + G_3 + G_4). \quad (2b)$$

Однако правильное выражение (2в) противоречит выражению (2а), то есть ОСФ, поскольку все напряжения при трех слагаемых Δ^2 различные, а не равны одному гипотетическому напряжению U^2 ! Следовательно, ОСФ нельзя применять даже при выделении одного элемента.

Следует подчеркнуть, что отсутствуют неформальные признаки, подтверждающие общность ОСФ и метода эквивалентного генератора. Попытка доказательства ОСФ с помощью этого метода [4, с. 63] несостоятельна потому, что в последовательной (параллельной) схеме с источником напряжения (тока) имеется единственный контур (сечение). В этом тривиальном случае ОСФ оказывается справедливой, но это не добавляет весомости интеллектуальной продукции [4].

Поиск «новой формы третьей теоремы Кирхгофа» [15] не привел к результату, поскольку для представления числителя схемной функции в виде разложения Фойснера необходимо использовать не *схему знаменателя*, а специальную *схему числителя*, полученную из исходной схемы в результате замещения независимого источника и отклика идеальным усилителем – нуллором [33, 34].

Классический топологический метод Кирхгофа утратил практическое значение, поскольку с середины 70-х годов не используется при синтезе сложных схем [36] и разработке САПР схемотехнического проектирования [37]. В начале прошлого века Фойснер превзошел своего учителя Кирхгофа, отказавшись от рассмотрения отдельных слагаемых искомого отклика и поднявшись на уровень производных схем и подсхем [38]. Проблема разложения числителя отклика как определителя соответствующей схемы была решена после открытия нуллора Бернардом Теллегеном [39].

Однако если ОСФ не может быть применена в сочетании с топологическим методом Кирхгофа, то это еще не значит, что эта формула в принципе неверна. На это обратил внимание *С.А.Курганов*.

«Обобщенная симметричная формула» как наложение частичных откликов. Такие отклики получаются при размыкании и замыкании элементов схемы. Рассмотрим формулу, дуальную формуле (1) [4]:

$$\underline{U} = [Z\underline{U}^Z \Delta^Z + \underline{U}_Z \Delta_Z] / (Z\Delta^Z + \Delta_Z), \quad (3)$$

где верхний и нижний индексы у переменной \underline{U} и определителя Δ означает, что они находятся по схеме при удаленным (разомкнутым) и стянутом (замкнутым) сопротивлении Z соответственно.

Формула (3) – частный случай ОСФ – названа в [4] «обобщенной формулой метода эквивалентного генератора». В то же время эта формула отражает наложение частичных откликов, получающихся при размыкании и замыкании сопротивления Z .

Убедимся в том, что напряжение \underline{U} в схеме на рис.2,а можно выразить через два напряжения: \underline{U}^Z и \underline{U}_Z , которые определяются в схемах на рис.2,б и рис.2,в соответственно.

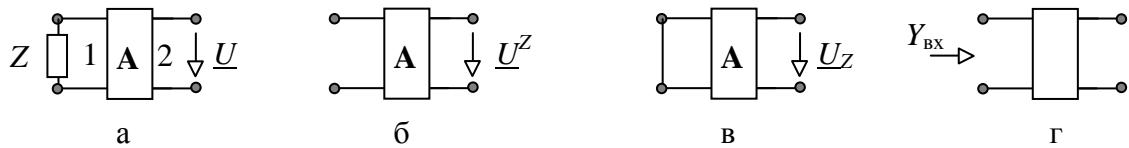


Рис. 1. Схема с сопротивлением Z : исходная автономная схема (а); схемы (б), (в) и (г) для измерения напряжений \underline{U}^Z , \underline{U}_Z и входной проводимости $Y_{\text{вх}}$

Запишем искомое напряжение в схемно-алгебраическом виде

$$\underline{U} = \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right| \bigg/ \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} \right|, \quad (4)$$

где определители схем числителя и знаменателя обозначены парой вертикальных линий. Схема числителя получается из исходной автономной схемы на рис.2,а при замене независимых источников (не показаны на рис.2,а) и приемника напряжения одним многомерным источником, управляемым направленным нуллатором [38]. Схема знаменателя является неавтономной схемой, полученной также из исходной автономной схемы путем нейтрализации независимых источников, то есть приравнивания их параметров к нулю.

В результате выделения сопротивления Z в числителе и знаменателе (4) по формуле Фойснера [21] получаем

$$\underline{U} = \frac{Z \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{A} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{A} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right|}{Z \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{A} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{A} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right|}. \quad (5)$$

Разделим и умножим каждое слагаемое числителя (5) на соответствующий схемный минор из знаменателя, при этом поставим условие, что оба схемных минора отличны от нуля. В результате получим

$$\underline{U} = \frac{Z \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{A} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{A} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right|}{Z \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{A} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{A} \\ | \quad | \\ \text{---} \end{array} \right|}. \quad (6)$$

Схемно-алгебраическое выражение (6) эквивалентно алгебраическому выражению (3).

Выводы

1. «Метод предельных состояний» является учебной методикой для случая однородных воздействий и откликов, непосредственно вытекает из топологических правил Кирхгофа и не расширяет области их применения. Знаменатель и числитель отклика получаются с помощью правил, сопоставимым по трудоемкости с правилами Кирхгофа.
2. «Обобщенная симметричная формула» на основе разложения отклика по слагаемым схемного определителя, заявленная в названии статьи [4] и приводимая в ее теоретической части (с. 62–65), несправедлива уже в простейших случаях, поскольку для использования разложения Фойснера требуется нуллорное представление числителя.
3. «Обобщенная симметричная формула», не имеющая отношения к топологическому методу Кирхгофа, на самом деле является наложением частичных откликов, которые получаются при размыкании и замыкании элементов схемы.

Литература

1. Kirchhoff G. R. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird // Annalen der Physik.– 1847.– Bd. 72.– S. 498–508.
2. Кирхгоф Г.Р. Избранные труды.– М.: Наука, 1988.– 428 с.
3. Белов Г.А., Захаров В.Г. Применение символьных схемных функций для расчета электрических цепей // Электричество.– 2003.– № 8.– С. 34–41.
4. Халютин С.П., Титов А.А. Обобщенная симметричная формула метода эквивалентного генератора на основе разложения переменной (напряжения, тока) по слагаемым определителя // Электричество.– 2011.– № 6.– С. 62–70.
5. Королев Ф.А., Филаретов В.В. О символьно-топологическом анализе схем (по поводу статьи Г. А. Белова и В. Г. Захарова в журнале «Электричество») // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика : Тр. международ. конф. КЛИН–2005. – Ульяновск : УлГТУ, 2005. – Т. 3. – С. 76 – 80.
6. Белов Г.А., Захаров В.Г. Ответ на критику статьи «Применение символьных схемных функций для расчета электрических цепей» // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 214–216.
7. Миланцей Т., Филаретов В.В. Правило Кирхгофа для нахождения числителя и знаменателя схемной функции по ее знаменателю (по поводу статьи Г.А. Белова и В.Г. Захарова в журнале «Электричество») // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 217–220.
8. Королев Ф.А., Филаретов В.В. О методе замещения управляемых источников независимыми источниками (по поводу статьи Г. А. Белова и В. Г. Захарова в журнале «Электричество») // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 220–230.
9. Курганов С.А. О тестировании результатов символьной диагностики электрических цепей (ответ на замечание Г. А. Белова и В. Г. Захарова) // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск : УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 230–236.
10. Королев Ф.А., Филаретов В.В. Сравнение методов получения схемных функций для электрических цепей с управляемыми источниками // Электричество.– 2008.– №5.– С. 42–53.

11. Халютин С.П., Титов А.А. Метод предельных состояний для нахождения напряжения и тока в линейной электрической цепи // Тр. Военно-воздушной инженерной академии (ВВИА) им. Н.Е.Жуковского.– 2008.– Т. 80.– № 3.
12. Халютин С.П., Титов А.А. Метод предельных состояний для нахождения напряжения и тока в линейной электрической цепи // Информационно-измерительные и управляющие системы.– 2008.– №11.
13. Халютин С.П., Титов А.А. Метод предельных состояний: Символьный анализ электрических цепей: Учебное пособие под ред. С.П.Халютина.– М.: Военно-воздушная инженерная академии (ВВИА) им. Н.Е.Жуковского.– 2009.
14. Халютин С.П., Титов А.А. О некоторых разделах теоретической электротехники: Монография.– Изд. ВУНС BBC «BVA им. проф. Н.Е.Жуковского и Ю.А.Гагарина».– 2010.
15. Халютин С.П., Титов А.А. Третья теорема Кирхгофа и ее новая форма // Инновации на основе информационных и коммуникационных технологий: Материалы международ. науч.-практической конф.– М.: Моск. гос. ин-т электроники и математики, 2010.– С. 278–280.
16. Ерохов И.В. Библиография: «Кирхгоф Г. Избранные труды.– М.: Наука, 1988» // Электричество.– 1990.– № 7.– С. 91–92.
17. Weinberg L. Kirchhoff's «Third and fourth laws» // IRE Trans. on circuit theory. 1958.– Vol. CT–5, N1.– P. 8–30.
18. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета электрических цепей, созданного Г.Кирхгофом // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2006. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 76–83.
19. Ерохов И.В. Исследование начал теории электрических цепей.– Запорожье: Классический приватный ун-т, 2009.– 100 с.
20. Максвелл Д.К. Трактат об электричестве и магнетизме. В 2-х т. Т. 1.– М.: Наука, 1989.– 416 с.
21. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzförmigen Leitern // Annalen der Physik. – 1902. – Bd 9, N 13. – S. 1304–1329.
22. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstärke in netzförmigen Leitern // Annalen der Physik. – 1904. – Bd 15, N 12. – S. 385–394.
23. Реньи А. О математической теории деревьев // Трилогия о математике.– М.: Мир, 1980.– С. 353–375.
24. Minty G.J. A simple algorithm for listing all the trees of a graph // IEEE Trans. on circuit theory.– 1965.– Vol. CT–12, N 1.– P. 120.
25. Блажкевич Б.И. Топологические методы анализа электрических цепей и перспективы их развития // Отбор и передача информации.– Киев, 1970.– Вып. 26.– С. 20–34.

26. Теоретические основы электротехники. Т. 1 / П. А. Ионкин, А.И. Даревский, Е.С. Кухаркин, В.Г. Миронов, Н.А.Мельников. – М.: Высшая школа, 1976.– 544 с.
27. Lin P.M. Symbolic network analysis.– Amsterdam–Oxford–New York–Tokyo: Elsevier, 1991.– 319 р.
28. Курганов С.А., Филаретов В.В. Неявный принцип наложения воздействий в линейных электрических цепях // Электричество.– 2005.– № 1.– С. 32–43.
29. Филаретов В.В. Наложение воздействий активных контуров и сечений в электрических цепях // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – Вып. 8. – С. 64–78.
30. Зелях Э. В. Основы общей теории линейных электрических схем. – М.: Изд-во АН СССР, 1951. – 336 с.
31. Филаретов В.В. Оптимизация формул схемных функций электрических цепей // Электричество.– 1993.– № 9.– С. 64–68.
32. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // Электричество. – 1995. – № 4. – С. 36–43.
33. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество. – 1998. – № 5.– С. 43–52.
34. Филаретов В.В. Формирование символьных функций для активных электрических цепей методом стягивания и удаления ветвей // Электричество. – 2001. – № 4. – С. 43–51.
35. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество. – 2001. – № 8. – С. 33–42.
36. Оптимальная реализация линейных электронных RLC–схем / А.А. Ланнэ, Е.Д. Михайлова, Б.С. Саркисян, Я.Н. Матвийчук. – Киев: Наукова думка, 1981. – 208 с.
37. Машинная оптимизация электронных узлов РЭА / А.Г.Ларин, Д.И.Томашевский, Ю.М.Шумков, В.М.Эйдельнант.– М. Сов. Радио, 1978.– 192 с.
38. Горшков К.С., Филаретов В.В. Схемный подход Вильгельма Фойснера и метод схемных определителей / Под ред. В.В.Филаретова.– Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2009.– 189 с.
39. Tellegen B.D.H. La recherche pour una série complète d'éléments de circuit idéaux non-linéaires // Rendiconti del seminario matematico e fisico di Milano: Sotto gli auspice dell'università e del politecnico.– Milano, 1955. Vol. 25 (1953–1954).– Р. 134–144.

В. В. Филаретов

Статья Г.Ф.Прищепова (в настоящем сборнике)

РЕЦЕНЗИЯ **на статью Г.Ф. Прищепова «Трубка Уитстона как приглашение к синтезу электронных кристаллов»**

Статья посвящена разработке пространственных мостовых структур для передачи электрических сигналов. В качестве базы используется мост Уитстона, который трансформируется в объемную структуру на основе параллельных RC -цепочек. Полученное устройство в виде трубы квадратного сечения (трубки Уитстона) позволяет передавать два сигнала независимо друг от друга – без использования фильтров. Сигналы подаются между диагональными парами углов входного сечения трубы и снимаются с соответствующих пар углов выходного сечения.

Независимость передачи сигналов обеспечивается в силу симметрии схемы и благодаря сопротивлениям источников сигнала, близких к нулю во всем частотном диапазоне передаваемых сигналов. Реализовать трубку Уитстона предлагается путем напыления резистивного и емкостного материалов на каркас соответствующей формы.

По статье можно высказать следующие замечания.

1. Нет ответа на вопрос, который является ключевым при реализации условий независимой передачи сигналов. Как получить источники передаваемых сигналов с сопротивлением, близким к нулю в широком диапазоне частот? По крайней мере, до 1 ГГц, на что указывает автор.

2. Утверждается, что «в среде из R -элементов можно создать управляемые пути распространения энергии без проводов и изоляции». Передавать электрическую энергию по резистивной линии нельзя из-за больших потерь. Резистивная линия – это тоже провода, но плохие. «Управляемые пути распространения энергии» в настоящее время создаются с помощью коммутаций в сетях. Они экономичнее, чем предложение автора направлять энергию путем регулирования сопротивлений в мостовых цепях.

Учитывая актуальность тематики, рекомендую опубликовать статью, с последующим обсуждением, в международном сборнике научных трудов «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей».

Рецензент, член редколлегии сборника «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей», д.т.н.

С. А. Курганов

ЧЕТЫРЕ ПРОВОДА ПОЗВОЛЯЮТ СДЕЛАТЬ ТРУБКУ УИТСТОНА (Ответ автора статьи)

Всё правильно с точки зрения электротехника и процессов передачи энергии (МегаВатт) по ЛЭП. Кстати, при передаче "звездой" можно(?) передать напряжение 50 Гц и...100 кГц для каких-то энергетических целей. 4 провода как раз позволяют сделать «трубку Уитстона». Таким образом, замечание С.А. Курганова интересно и полезно.

Но основная задача радиоэлектроники – следить за формой сигнала. При этом мощность обычно не составляет более Ватта.

Конечно, есть схемы высокочастотных генераторов со специальными обратными связями и с выходным сопротивлением около 1 Ом. Но это отдельная тема.

Доцент Г. Ф. Прищепов, ТТИ ЮФУ, г.Таганрог.

ТРУБКА УИТСТОНА И ТРЕХФАЗНАЯ СИСТЕМА

Знак вопроса в ответе автора статьи можно понять как приглашение к дальнейшему обсуждению, в частности, взаимосвязи трубы Уитстона и трехфазной системы.

Трехфазная система передачи энергии звезда–звезда с нулевым проводом (четырехпроводная система) обеспечивает независимую передачу энергии источников каждой из трех фаз в одноименную нагрузку, что является подобным независимой передаче сигнала со входа на выход трубы Уитстона. Но на этом аналогия трехфазных систем и трубы Уитстона заканчивается.

Различие их состоит в следующем. **1.** В трехфазной системе – три источника одной частоты, а к трубке Уитстона подключаются два источника, причем с разными частотами. **2.** В трехфазной цепи независимость передачи энергии объясняется наличием у каждого из источников своего линейного провода, изолированного от других проводов диэлектриком, например, воздухом. В то же время в трубке Уитстона независимость двух каналов обеспечивается за счет баланса мостовой схемы и нулевого сопротивления источников.

Таким образом, трубка Уитстона и трехфазная система имеют различные структуры и принципы построения, и поэтому трехфазную систему нельзя рассматривать как один из вариантов реализации трубы Уитстона.

С. А. Курганов

ПИСЬМА В РЕДКОЛЛЕГИЮ

«ЭЛЕКТРОТЕХНИКУ» – ХИМИКАМ

Я электрохимик более 25 лет, занимающийся символным математическим моделированием химических и электрохимических процессов (коррозия металлов и неметаллов, работа гальванических элементов, катализ и т.д.) с помощью постоянно-токовых эквивалентных электрических схем.

Некоторые мои работы можно найти по адресам:

1. <http://www.jcse.org/Volume3/Paper14/v3p14.html> – эта работа, излагающая принципы моделирования электрохимических процессов с помощью постоянно-токовых электрических схем на примере коррозии металла.
2. <http://www.jcse.org/Volume3/Paper22/v3p22.html> – эта работа, демонстрирующая принципы моделирования электрохимических процессов с помощью постоянно-токовых электрических схем на примере моделирования работы гальванического элемента.

К огромному сожалению, положение с преподаванием электротехники и электроники для химиков удручающее. Считаю, что будущие физико-химики должны изучать курсы электротехники и электроники в объеме ничуть не меньше, чем электротехники.

Я учился в 2-х вузах. Начинал в технологическом институте по специальности «пороха и ракетное топливо». В этом вузе нам преподавали курс электротехники, но не долго – 1 семестр. После 4-го курса перевелся на биолого-химический факультет Красноярского госуниверситета и закончил его в 1986 году. Там курсов электротехники не застал, хотя, возможно, ее и преподавали в качестве общеобразовательного курса.

В 1989 году окончил очную аспирантуру при кафедре аналитической химии Сибирского технологического института по специальности «Физическая химия» (подраздел – «Электрохимия»). Занимался исследованием коррозии металлического лития в неводных растворителях.

Повидал многих физико-химиков. К сожалению, уровень их знания электротехники невысокий. Конечно, и я не могу похвастаться большими знаниями в этой области. Мне бы не помешало еще поучиться – получить второе высшее образование по электротехнике и программированию.

Все что знаю, изучал и продолжаю изучать самостоятельно в свободное время. Помогли в этом и семинары в нашей лаборатории, где мы обсуждали проблемы описания электрохимических систем с помощью эквивалентных электрических схем. Именно тогда у меня и родилась моя первая эквивалентная схема, описывающая процессы коррозии.

Потом «зарубили» финансирование моей работы над диссертацией. Я ушел из лаборатории. Последующие годы работал, где придется. В свободное время осмысливал и дорабатывал свой метод моделирования. Перспективы этого метода моделирования – огромнейшие. Я имел возможность в этом неоднократно убедиться, участвуя в конференции по химии.

Коллеги порой обсуждают то, что уже сделано мной, или не имеет никакого смысла делать. Они бывают сильно удивлены, услышав о таком методе моделирования. Смешно сказать, но одно из самых модных направлений в электрохимии сейчас – импедансометрия полностью (повторяю, полностью) игнорирует природу веществ и химические/электрохимические процессы в моделируемых ими процессах и системах.

Предлагаемый мною подход позволяет учитывать природу веществ и протекающие реакции. Две моих статьи опубликованы в электронном журнале одного из крупнейших центров по коррозии и защите металлов в Великобритании. Они получили хорошую оценку редактора. Хороший отзыв получен из Оксфорда. Неплохие отзывы есть и от коллег здесь – в Красноярских вузах, где я выступал с докладами. Но работу мне никто не предлагает.

Ознакомиться с моими взглядами на нынешнее положение вещей в науке можно на сайте нашего проекта, посвященного реформированию системы публикаций и оценки качества труда ученых: <http://sciencereform.narod.ru/>.

Возвращаясь к теме разговора, скажу, что использование моего подхода в обучении физико-химиков привело бы к появлению нового поколения ученых-химиков, обладающих серьезными познаниями как в химии, так и в электротехнике, программировании, символьной математике. Это будет прорыв в физической химии и в смежных с нею дисциплинах: биоэлектрохимии (моделировании процессов в клетках и в организме), геоэлектрохимии и электрохимии океана и атмосферы (моделировании глобальных процессов в земной коре, атмосфере и в океане).

Вся Земля – огромная электрохимическая система – и ее моделирование может помочь в решении многих проблем, включая глобальное изменение климата. Откроются просто поражающие воображение перспективы.

А. А. Шагаев

Шагаев Александр Аркадьевич – независимый исследователь, домашний адрес: 660037, г. Красноярск, ул. Коломенская, д. 17а, кв. 6; тел.(8923) 320-99-67; e-mail: alexander-shagaev@yandex.ru

НОВЫЕ ИЗДАНИЯ

Zagadnienia energetyczne wybranych urzadzen elektrycznych systemow stalowniczych / A.A.Grishkevich, V.I.Hudym, A.M.Kruchinin, A.Sawicki; pod redakcja A. Sawickiego.— Czestochowa: Politechnika Czestochowska, 2010.— Seria monografie nr 195.— 272 s.

Гришкевич А.А., Гудым В.И., Кручинин А.М., Савицки А.
Энергетические проблемы некоторых электроустановок сталеплавильных систем.

Монография содержит результаты научных исследований коллектива сотрудников Ченстоховского политехнического института в области электроэнергетики агрегатов и электросталеплавильных систем. Обобщены и дополнены математические модели дуг постоянного и переменного тока в важнейших стадиях процесса производства стали с учетом современных технических и технологических достижений в постройке и эксплуатации дуговых печей и агрегатов для непрерывной плавки шихты.

Рассчитаны функции теплоотдачи дуги, расширены семейства рабочих характеристик и выполнен выбор рациональных значений рабочих токов электрических дуг на основе теории и методики «двуухслойной дуги» при использовании доступных экспериментальных данных. Описаны свойства электрических режимов дуговых печей в аспектах как вредного влияния на системы электроснабжения, так и применяемых методов и средств улучшения качества электроэнергии.

Представлены упрощенные математические модели элементов систем электропитания печей. Проведено моделирование коммутационных и установившихся режимов печных агрегатов, оборудованных возбуждающими трансформаторами, компенсаторами реактивной мощности, неуправляемыми и управляемыми фильтрами гармоник.

Разработан комбинаторный метод расчета показателей структурной надёжности схем систем электроснабжения. Показано использование разработанного метода для определения показателей структурной надёжности и выбора предпочтительного варианта схемы электрической сети системы электроснабжения электросталеплавильного цеха.

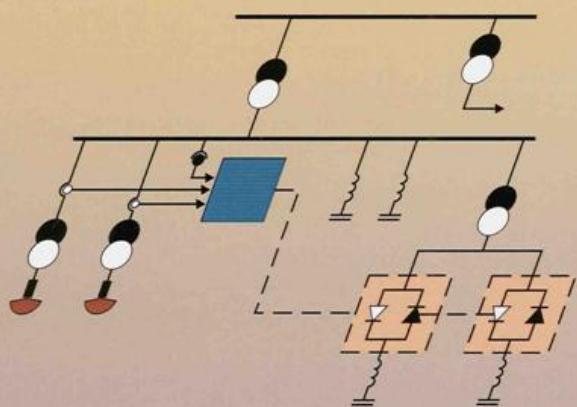
Energy issues of chosen electrical devices of steelmaking systems

Politechnika Częstochowska

Zagadnienia energetyczne wybranych urządzeń elektrycznych systemów stalowniczych

pod redakcją
Antoniego Sawickiego

Seria
Monografie
nr 195



Częstochowa 2010

In the monograph was presented results of the research conducted by the team of employees of the Częstochowa technical university in the electrical power of aggregates and systems electrosteelmaking.

Taking into consideration the technological progress of under construction modern arc furnaces and technological progress in the exploitation of aggregates for constant drowning the batch, mathematical models of arcs of the direct current and the alternating current were generalized in the most important stages of processes of producing steel. Using accessible experimental data, on the basis of theory and methodology „of two-tier arc”, functions of adopting the heat of the arc were calculated, families of

working characterizations were enlarged and they selected rational values of electricities of working arcs. Properties of states of electric arc furnaces were described in aspects of both the harmful influence on systems of the power supply, and also applied methods and centres of improving the quality of the electric energy. Simplified mathematical models of elements of arrangements of powering stoves who next were exploited were displayed for simulating commutation states and of established stove aggregates equipped with additional inducing transformers, compensators of passive power, free-fall and controlled filters higher harmonic. Using combinatory methodology, rates of the structural reliability of systems of the electric supply were determined. Algorithm drawn up combinatory a reliability of supplying electrosteelmaking and a more beneficial appointment were used for calculating rates of variant of the structure of the power network.

Горшков К.С., Филаретов В.В. Синтез электрических цепей на основе схемного подхода. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2011. – 242 с.

Проблеме синтеза линейных электрических цепей посвящено большое число публикаций, однако создание схемы до сих пор относят к изобретательскому уровню и выдают патенты на устройства или способы, а общей теории структурного синтеза схем до сих пор не создано. Причиной тому, по мнению авторов, является недооценка возможностей символьных методов исследования линейных электрических цепей. В работе представлено исследование, посвященное развитию возможностей схемного подхода немецкого ученого Вильгельма Фойснера к анализу и синтезу линейных электрических цепей. Излагаются основы метода схемных определителей, базирующегося на формулах выделения параметров В.Фойснера. Используется непосредственно схема замещения цепи с произвольными линейными элементами, минуя составление уравнений равновесия.

Монография включает в себя шесть глав. В первой главе обсуждаются классические топологические правила и формулы Фойснера, их происхождение из топологического метода Кирхгофа и развитие в рамках метода схемных определителей. Во второй и третьей главах решается задача разработки методик структурного синтеза электрических цепей по их схемным функциям. Исследованию вопросов реализации структурных схем электрических цепей, посвящена третья глава. В четвертой главе обсуждаются вопросы порождения новых схемных решений на основе эквивалентных топологических преобразований электрических цепей. Пятая глава посвящена преобразованиям, эквивалентным по символьным схемным функциям и сохраняющим число элементов. В шестой главе схемный подход применяется для синтеза допусков на параметры произвольных линейных элементов с учетом погрешностей преобразования электрических цепей.

Книга предназначена для специалистов в области схемотехники, студентов и аспирантов соответствующих направлений.



Константин Горшков
Владимир Филаретов

**Синтез электрических
цепей на основе
схемного подхода**

Основы, концепции, методы

LAP LAMBERT
Academic Publishing



КОНФЕРЕНЦИИ

МЕЖДУНАРОДНЫЙ СЕМИНАР “РАЗРАБОТКА ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ КОМПОНЕНТОВ И ЭЛЕКТРОНИКИ: ИССЛЕДОВАНИЯ И РАЗРАБОТКИ В РАМКАХ РОССИЙСКО-ЕВРОПЕЙСКОГО СОТРУДНИЧЕСТВА” (Ульяновск, 19–20 мая 2011)



С 1 января 2007 года действует Седьмая Рамочная Программа (7РП) Европейского Союза по научно-технологическому развитию на 2007–2013 гг. 7РП – одна из крупнейших в мире программ поддержки научных исследований с общим бюджетом 53,2 млрд. €. Целью 7РП является создание и развитие европейского научного пространства (European Research Area), повышение конкурентоспособности европейской науки и построение в Европе экономики и общества, основанных на знаниях, развитие равноправного и взаимовыгодного научно-технологического сотрудничества научных коллективов ЕС с учеными других стран. Для научной общественности России 7РП представляет особый интерес, поскольку она открыта для стран, не входящих в ЕС.

19–20 мая на базе Ульяновского Государственного Технического Университета в рамках проекта 7РП «Стимулирование российско-европейского сотрудничества в области разработки полупроводников» («Stimulating Semiconductor Design Cooperation between Europe and Russia» – SEMIDEC – <http://www.semidec-ru.eu>) при содействии Ульяновского Центра Трансфера Технологий (<http://ctt.ulstu.ru>) состоялся международный семинар «Разработка полупроводниковых компонентов и электроники». Целью семинара являлось расширение научно-технического сотрудничества между Евросоюзом и Россией в сфере технологий создания полупроводниковых компонентов и электроники, которая является одной из ключевых тем сотрудничества, определенных в 7РП.

В семинаре принимали участие делегаты от стран членов Евросоюза (Великобритании, Германии, Эстонии), а также представители ведущих российских компаний и научных организаций Москвы, Самары, Саратова, Воронежа, Санкт-Петербурга, Томска, Новосибирска, Ульяновска и г. Шахты.

Программа семинара включала два основных компонента:

1) ознакомление с возможностями по сотрудничеству в области разработки полупроводниковых компонентов и электроники по 7-й Рамочной Программе Евросоюза, обсуждение приоритетных задач и перспектив европейско-российского партнерства в данной сфере;

2) «брокерская» встреча между российскими и европейскими организациями и коллегами, представление проектов по организации сотрудничества в рамках научных исследований и разработок.

Отдельное внимание и высокий приоритет уделялись тематикам, связанным с промышленным сектором европейско-российского сотрудничества: производство интегральных схем, микроэлектроника, физика полупроводников и нанотехнологии, телекоммуникации.

В рамках семинара был организован специальный тренинг под руководством ведущих российских и европейских консультантов для координации совместной работы в 7-й Рамочной Программе Евросоюза.

Таким образом, участники семинара получили возможность: 1) встретиться с представителями ведущих европейских и российских компаний в области разработки полупроводниковых компонентов и электроники; 2) получить сведения о последних достижениях в области разработки полупроводниковых компонентов и электроники по материалам презентаций исследователей и разработчиков; 3) проконсультироваться по техническим и административным вопросам, относящимся к 7-й Рамочной Программе Евросоюза, по подготовке совместных проектов в области разработки полупроводниковых компонентов и электроники; 4) наладить контакты с научно-исследовательскими и промышленными компаниями.

Примечательно, что в семинаре «Разработка полупроводниковых компонентов и электроники» приняли участие авторы тематических сборников САД (КЛИН) – *Д.И. Стенюшкин* и *К.С. Горшков*. Их доклады объединяла общая тематика – автоматизированное проектирование. Презентация аспиранта УлГТУ *Д.И. Стенюшкина* была посвящена результатам исследований, проводившихся в нашем университете, в области автоматизации разработки программируемых логических устройств. *К.С. Горшков* в своем докладе представил вниманию коллег проект по созданию системы SCADS – первой российской САПР, объединяющей все этапы схемотехнического проектирования электрических цепей в единой системе и позволяющей проводить автоматизированный структурный и параметрический синтез электрических цепей, синтез допусков на параметры элементов и определение погрешностей преобразования электрических сигналов.

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Синтез электронных цепей</i>		
Меньшов Е.Н., Егорушкин А.С.	Метод структурного синтеза неуравновешенного пассивного четырехполюсника	3
Сухов С.А.	Оптимизация морфологического графа решений	12
Прищепов Г.Ф.	Трубка Уитстона как приглашение к синтезу электронных кристаллов	17
<i>Анализ и оптимизация электронных цепей</i>		
Анисимов И.О., Курганов С.А.	Безызбыточный символьный анализ линейных электромагнитных цепей	27
Бондаренко А.В., Курганов С.А., Филаретов В.В.	Формулы для коррекции дробно-рациональных схемных функций линейной электрической цепи при подключении и отключении элемента	36
Горшков К.С., Кузнецов А.М., Филаретов В.В.	Символьный анализ резистивных электрических цепей с диодами	45
Ерохов И. В.	Теоретико-множественное обоснование тополо- гического метода, созданного Г. Кирхгофом	56
Курганов Д. С., Курганов С. А., Филаретов В. В.	Формирование символьных схемных функций линейных электрических цепей с предельными параметрами элементов	63
Курганов С.А., Филаретов В.В.	Построение символьных систем уравнений для нелинейных электрических цепей минимальной размерности	74
Сидоров С.Н., Поляков А.Е.	Топологическая модель матричного преобразователя частоты	89
Шагаев А.А.	Методика нахождения компактных символьных выражений для токов в схемах с источниками напряжения	94
<i>Диакоптика электронных цепей</i>		
Бодяков Е.Р., Курганов С.А.	Применение независимых схемных миноров для анализа линейных электрических цепей по частям	108
Бодяков Е.Р., Курганов С.А.	Дуальная схемно-минорная формула для анализа электрических цепей по частям	119
Курганов С. А., Филаретов В. В.	Формирование символьных схемных функций на основе наращивания выражений	122
<i>Матричный анализ</i>		
Дмитришин Р.В.	О точности вычисления определителя матрицы Гильберта	133
Манин А.В., Юдин В.В., Москалев О. А.	Применение метода объединенных матриц для анализа электромагнитных устройств на базе магнито- вентильных элементов	154

Диагностика электронных цепей и электрических сетей		
Гришкевич А.А., Бурмутаев А.Е.	Статистическое моделирование интервальных оценок показателей структурной надежности электрических систем	163
Цифровая электроника		
Соловьева Е. Б., Дорофеев К. И.	Компенсатор нелинейных искажений в усилителе мощности на основе модели Вольтерры с девиацией динамики	171
Теория электромагнитного поля		
Меньшов Е.Н.	Градиентная пондеромоторная сила пространственных колебаний поля	177
Из опыта работы		
Амерханов З.Э., Курганов С.А.	Сравнение символьных способов формирования цепных параметров многополюсника	183
Кузьмин Н.П., Маркелов А.А.	Офисная солнечная электростанция	192
Классики теории цепей		
Горшков К.С.	Георг Симон Ом	200
Дискуссии		
<i>Статья С.П. Халютина и А.А. Титова в журнале «Электричество»</i>		
Ерохов И.В.	Экономия слов – традиция научных статей	204
Филаретов В.В.	Третье топологическое правило Кирхгофа и обобщенная симметричная формула	210
<i>Статья Г.Ф. Прищепова в настоящем сборнике</i>		
Курганов С.А.	Рецензия на статью Г.Ф. Прищепова	224
Прищепов Г.Ф.	Ответ автора на рецензию	225
Письма в редакколлегию		
Шагаев А.А.	«Электротехнику» – химикам	226
Новые издания		
Гришкевич А.А., Гудым В.И.		
Кручинин А.М., Савицки А.	Энергетические проблемы некоторых электроустановок сталеплавильных систем	228
Горшков К.С., Филаретов В.В.	Синтез электрических цепей на основе схемного подхода	230
Конференции		
Горшков К.С.	Международный семинар «Разработка полупроводниковых компонентов и электроники: Исследования и разработки в рамках Российско-Европейского сотрудничества»	231

TABLE OF CONTENTS

<i>Circuit synthesis</i>		
Menshov E.N., Yegorushkin A. S.	The method of unbalanced two-port network synthesis	3
Suhov S.A.	Optimization of the morphological graph of decisions	12
Prischepov G.F.	The Wheatstones tube as invitation to electronic chips synthesis	17
<i>Circuit analysis and optimization</i>		
Anisimov I.O., Kurganov S.A.	The irredundant symbolic analysis of linear electromagnetic networks	27
Bondarenko A.V., Filaretov V.V., Kurganov S.A.	The formulae for correction of the fractional rational circuit functions during the connection and disconnection of the element	36
Filaretov V.V., Gorshkov K.S., Kusnezov A.M.	Symbolic analysis of resistive networks with diodes	45
Yerokhov I.V.	The set-theoretical substantiation of Kirchhoff's topological method	56
Filaretov V. V., Kurganov D. S., Kurganov S.A.	Symbolic circuit functions formation for linear electric networks with limited parameters	63
Filaretov V.V., Kurganov S.A.	Symbolic equation systems formation for nonlinear electric networks of minimal dimension	74
Polyakov A.E., Sidorov S.N.	Topological model of matrix frequency converter	89
Shagaev A.A.	The compact symbolic expressions formation of currents for network with voltage sources	94
<i>Diacoptic of electronic networks</i>		
Bodryakov Y. R., Kurganov S.A.	The usage of independent circuit minors for network analysis by parts	108
Bodryakov Y. R., Kurganov S.A.	The dual circuit-minors formula for network analysis by parts	119
Filaretov V.V., Kurganov S.A.	Symbolic circuit functions formation on the base of expressions addition	122
<i>Matrix analysis</i>		
Dmytryshyn R.V.	On the computation accuracy of Gilbert matrix determinant	133
Manin A.V., Moskaleva O.A., Yudin V.V.	The usage of conjoint matrixes method for analysis of electromagnetic devices on the base of magnetic gated elements	154

Diagnostics of electronic networks and electric system		
Burmutaev A.E., Grishkevich A.A	The interval estimates statistic modeling of electric systems structural reliability indexes	163
Digital electronics		
Dorofeev K.I., Solovieva E.B.	The nonlinear distortions canceller of power amplifier on the base of Volterra model with deviation of dynamic	171
Electromagnetic field theory		
Menshov E.N.	The gradient ponderomotive force of space oscillations of field	177
Research experience		
Amerhanov Z., E., Kurganov S.A.	The comparison of symbolic methods of multiterminal network parameters formation	183
Kuzmin N. P., Markelov A.A.	The office solar power station	192
Classics of the circuit theory		
Gorshkov K.S.	Georg Simon Ohm	200
Polemics		
<i>The paper of S.P. Halyutin and A.A. Titov</i>		
Yerokhov I.V.	Words economy is a tradition of science publications	204
Filaretov V.V.	Kirchhoff's «Third topological law» and general symmetrical formula	210
<i>The paper of G.F. Prischepov (included)</i>		
Kurganov S.A.	Review of article «The Wheatstones tube as invitation to electronic chips synthesis»	224
Prischepov G.F.	Answer to reviewer of the paper «The Wheatstones tube as invitation to electronic chips synthesis»	225
Letters		
Shagaev A.A.	«Electrical engineering» to chemists	226
New publications		
Grishkevich A.A., Hudym V.I., Kruchinin A.M., Sawicki A.	Energy problems of some steelmaking system powerplants	228
Gorshkov K.S., Filaretov V.V.	Network synthesis on the base of circuit approach	230
Conferences		
Gorshkov K.S.	International workshop «Design of semiconductor components and electronic based miniaturised systems: European and Russian R&D cooperation»	231