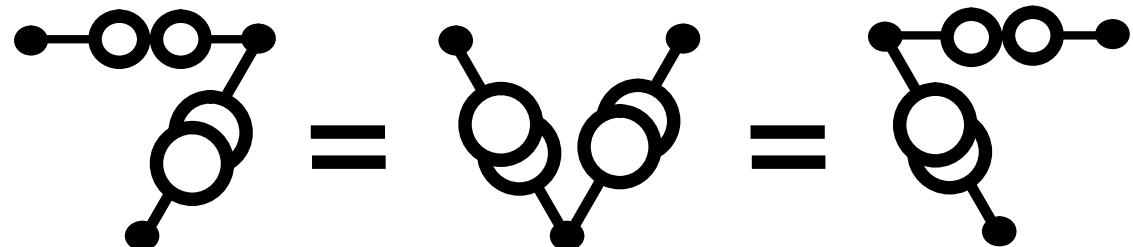
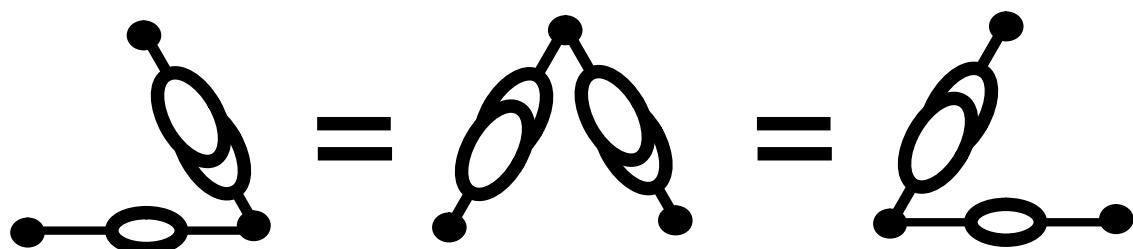


# СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ

САД-2013



Ульяновск 2013

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE  
OF THE RUSSIAN FEDERATION

ULYANOVSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY

**SYNTHESIS, ANALYSIS  
AND DIAGNOSIS  
OF ELECTRONIC NETWORKS**

**SAD-2013**

Ulyanovsk 2013

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

# **СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

Международный сборник научных трудов

Вып. 11

Ульяновск  
УлГТУ  
2013

УДК 516.7.24/25+519.873

ББК 32.85

С38

УДК 516.7.24/25+519.873

**Синтез, анализ и диагностика электронных цепей :** Международный сборник научных трудов.– Вып. 11 / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск : УлГТУ, 2013. – 312 с.

Сборник продолжает серию специализированных сборников, изданных в Ульяновском государственном техническом университете (УлГТУ) в рамках международных конференций: «Континуальные логико-алгебраические исчисления и нейроматематика», «Конференция по логике, информатике, науковедению» и «Волгинские чтения».

В данном выпуске рассматриваются теоретические вопросы и практические приложения современной теории электрических и электронных цепей, в том числе: структурный синтез, синтез аналоговых и цифровых фильтров, топологический анализ, диакоптика и преобразования электронных цепей, представленных нуллорными и зеркальными аномальными элементами. Обсуждается анализ электроэнергетических и мехатронных систем с позиций матричного анализа, теории графов и нечеткой логики. В данном выпуске открыт новый раздел – «Биомедицинская электроника».

Рекомендуется для специалистов в области схемотехники аналоговых и аналого-дискретных электронных цепей, магистрантов и аспирантов соответствующих направлений и специальностей.

Редакционная коллегия:

Горшков К.С., канд. техн. наук (ответственный секретарь)

Grishkevich A., д-р техн. наук, Czestochowa university of technology (Polska);

Курганов С. А., д-р техн. наук (зам. ответственного редактора),

Mayko G., канд. техн. наук, Broadcom Corporation (USA)

Соловьева Е. Б., д-р техн. наук, СПбГЭУ – ЛЭТИ им. В.И.Ленина,

Филаретов В. В., д-р техн. наук (ответственный редактор).

Ягуп В.Г., д-р техн. наук, Харьковская национальная академия городского хозяйства

ISBN 978-5-9795-0000-0

© Авторы, 2013  
© Оформление. УлГТУ, 2013

ВЫПУСК посвящается  
**Льву Владимировичу Данилову**

## **СИНТЕЗ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

### **ПЕРЕСТРАИВАЕМЫЙ АКТИВНЫЙ РЕЖЕКТОРНЫЙ RC-ФИЛЬТР**

Ю. М. Иншаков, А. В. Белов

*Проведен анализ и реализация активного режекторного RC-фильтра схемы с независимой перестройкой в широких пределах частоты режекции и добротности с помощью дополнительного преобразования полосового фильтра-прототипа. Частота режекции перестраивается в девять раз с помощью одного потенциометра при сохранении стабильности добротности и коэффициента передачи.*

*Implementation and analysis of active notch RC-filter with the independent tuning of resonance frequency and Q-factor is presented in the paper. Filter was build using "ground-to-input" transformation of the band-pass filter prototype. Resonance frequency can be changed in nine times by means of one potentiometer with limited variations of filter Q-factor and gain.*

В настоящее время для расширения технических возможностей радиоэлектронной и биомедицинской аппаратуры возникает необходимость применения перестраиваемых активных режекторных фильтров. Такие фильтры используются для подавления сетевых помех

исследуемых сигналов в информационно-измерительных системах, в микроэлектронных селективных узлах радиоэлектронных устройств, в биомедицинской аппаратуре для диагностики и физиологических исследований, системах автоматического управления, информационно-измерительных комплексах, акустической и гидроакустической аппаратуре. Перестраиваемые режекторные (полосовые заграждающие) активные фильтры выполняют функции ослабления шумов при выделении полезных сигналов, анализа частотного спектра шумов и гармоник сигналов, а также коррекции амплитудно-частотных характеристик усилителей.

Публикации [1–5], посвященные проектированию перестраиваемых активных режекторных RC-фильтров, свидетельствуют о значительном интересе разработчиков к активным схемам с управляемыми характеристиками и широких возможностях таких схем. В работах [1, 2] рассматриваются схемы с использованием одного или нескольких операционных усилителей. Перестройка по частоте схем фильтров второго порядка [3, 4] возможна только при одновременном изменении двух элементов, так как основные параметры фильтров (полюсная добротность, значение затухания на частоте режекции и коэффициент передачи) зависят от значений всех элементов схемы. Реализация активных режекторных RC-фильтров второго порядка на нескольких операционных усилителях позволяет обеспечивать лучшие характеристики и более низкую чувствительность [2]. Перестройка таких фильтров по частоте для сохранения значения добротности и обеспечения линейной зависимости частоты от параметров перестраиваемых элементов обычно выполняется с помощью двух сдвоенных прецизионных проволочных переменных резисторов. При этом наличие рассогласования сопротивлений резисторов приводит к изменению значения полюсной добротности и снижению подавлению сигналов в области частоты режекции.

Перестройка схем режекторных фильтров [5] по частоте возможна также с помощью одного элемента, но при этом частота режекции

изменяется пропорционально квадрату сопротивления регулируемого резистора и наблюдается нелинейная зависимость частоты от параметра перестраиваемого элемента.

В работах [6–8] показана возможность построения активных режекторных фильтров второго порядка на основе дополнительного топологического преобразования схем активных полосовых фильтров. Это преобразование схемы трехполюсника (3П) (рис. 1) осуществляется путём переноса общего провода (земли сигнала) по источнику входного напряжения  $U_1(s)$  при сохранении выходного вывода 3 схемы относительно общего провода.

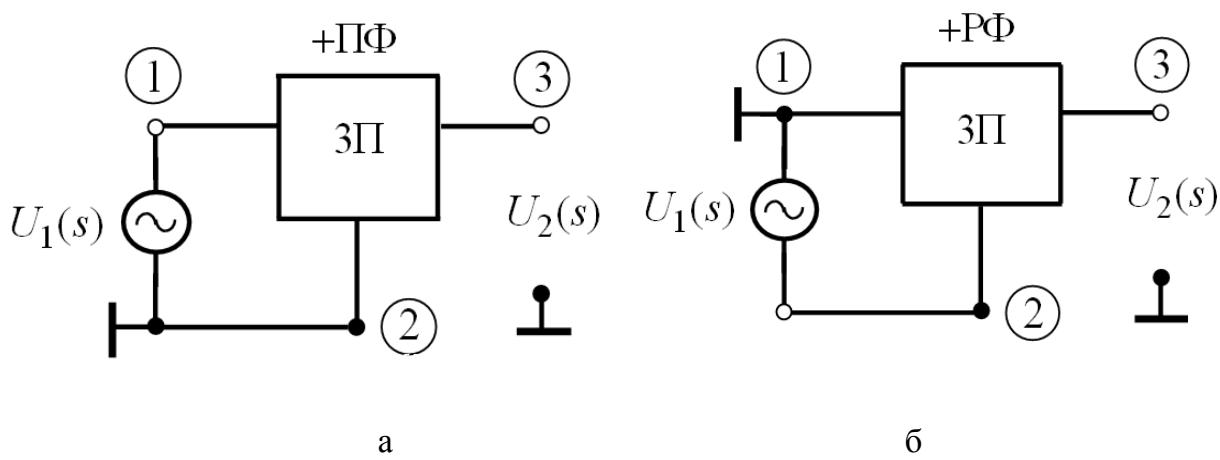


Рис. 1

Следует отметить, что дополнительное преобразование передаточной функции схемы (рис. 1, *a*) активного полосового фильтра (+ПФ) выполняется при следующих четырех условиях: фильтр должен быть неинвертирующим, его коэффициент передачи на резонансной частоте равен единице, используются идеальные дифференциальные операционные усилители с несимметричным выходом, их общий выходной узел должен быть «спрятан» внутри ОУ.

Известно [7, 8], что при проведении дополнительного преобразования исходной схемы (+ПФ) с передаточной функцией  $H_1(s)$  (рис. 1, *a*) для получения преобразованной схемы (+РФ) с передаточной функцией  $H_2(s)$  (рис. 1, *б*) обеспечивается выполнение следующего соотношения:

$$H_1(s) + H_2(s) = 1, \quad (1)$$

где исходная схема должна удовлетворять вышеперечисленным четырем условиям.

Тогда передаточная функция реализуемого режекторного фильтра

$$H_2(s) = 1 - H_1(s). \quad (2)$$

Представим в общем виде передаточную функцию схемы реконструируемого полосового фильтра-протипа (+ПФ) (рис. 1, *a*)

$$H_1(s) = \frac{sh_m\omega_0/Q}{s^2 + s\omega_0/Q + \omega_0^2}, \quad (3)$$

где  $h_m$  – коэффициент передачи фильтра на резонансной частоте  $\omega_0$ ;  $Q$  – полюсная добротность фильтра.

Подставляя выражение (3) в (2) при значении параметра  $h_m = 1$ , получим передаточную функцию  $H_2(s)$  режекторного фильтра (+РФ) (рис. 1, *б*)

$$H_2(s) = 1 - \frac{sh_m\omega_0/Q}{s^2 + s\omega_0/Q + \omega_0^2} = \frac{s^2 + s(1-h_m)\omega_0/Q + \omega_0^2}{s^2 + s\omega_0/Q + \omega_0^2} \Big|_{h_m=1} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + s\omega_0/Q + \omega_0^2}. \quad (4)$$

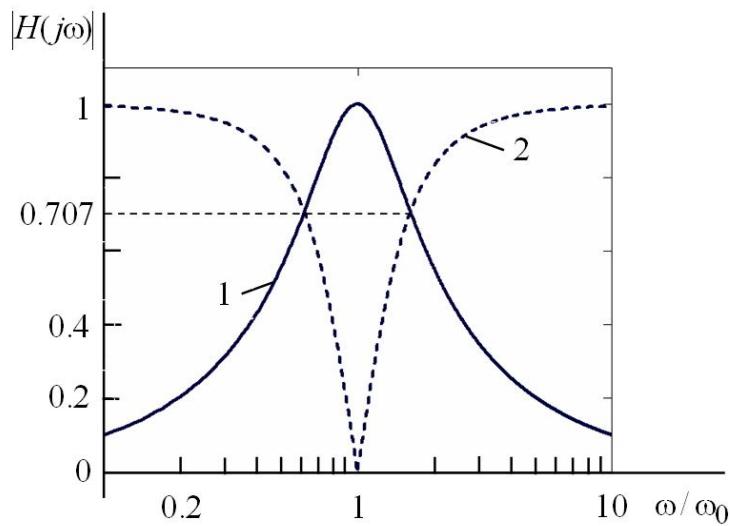


Рис. 2

На рис. 2 приведены графики амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) полосового фильтра (кривая 1) и режекторного фильтра (кривая 2),

при значении полюсной добротности  $Q=1$ , причем полоса пропускания полосового и полоса задерживания режекторного фильтров одинаковы.

Схемы перестраиваемых полосовых активных RC-фильтров на операционных усилителях [9, 10] могут быть использованы для получения режекторных фильтров с помощью дополнительного топологического преобразования исходных схем. В патенте [9] перестраиваемый ARC-фильтр содержит четыре операционных усилителя, восемь резисторов и два конденсатора. Для перестройки резонансной частоты фильтра используются цифроуправляемые резистивные блоки, представляющие набор резисторов и электронных ключей, управляемые цифровым кодом. Недостатком этого полосового фильтра является сложность схемы и необходимость сопряжения значений сопротивлений переключаемых резисторов. Это ограничивает широкое применение фильтра. В патенте [10] описан активный полосовой RC-фильтр с перестраиваемой резонансной частотой и регулируемой полюсной добротностью.

Настоящая работа посвящена проектированию перестраиваемого режекторного активного RC-фильтра с независимой перестройкой в широких пределах частоты режекции и полюсной добротности при постоянстве коэффициента передачи. Перестройка частоты режекции фильтра в широком диапазоне осуществляется при незначительном изменении полюсной добротности с помощью одного потенциометра. Фильтр реализован на основе дополнительного топологического преобразования схемы-прототипа (рис. 3) перестраиваемого активного полосового RC-фильтра [10].

Проведем анализ схемы (рис. 3) для оценки диапазона перестройки резонансной частоты полосового фильтра. В схеме используются дифференциальный операционный усилитель  $U_1$  и два инвертирующих интегратора, реализованных на ОУ  $U_2$  и  $U_3$ . Схема содержит замкнутый контур, состоящий из резисторов  $R_5$ ,  $R_7$  и конденсаторов  $C_1$ ,  $C_2$ , а также

потенциометра  $R_3$ , включенного в цепь отрицательной обратной связи дифференциального усилителя  $Y_1$ .

Потенциометр  $R_3$  используется для независимой перестройки резонансной частоты фильтра. Переменные резисторы  $R_4$  и  $R_1$  применяются, для изменения значения полюсной добротности фильтра и обеспечения стабильности добротности при перестройке частоты, соответственно.

Найдем передаточную функцию по напряжению схемы полосового фильтра (рис. 3) с учетом использования идеальных операционных усилителей. Для удобства анализа представим ее в виде блочной структурной схемы, как показано на рис. 4, а.

Первый и второй интеграторы изображены в виде двух блоков с передаточными функциями  $(-1/sT_1)$  и  $(-1/sT_2)$ , где обозначены  $T_1 = R_5C_1$ ;  $T_2 = R_7C_2$ . Потенциометр  $R_3$  заменен делителем напряжения на двух резисторах  $R_{31}$  и  $R_{32}$ .

Примем значения сопротивлений этих резисторов:

$$R_{31} = (1 - \beta)R_3; \quad R_{32} = \beta R_3, \quad (5)$$

где параметр  $\beta$  является коэффициентом перестройки резонансной частоты  $\omega_0$  фильтра. Коэффициент полюсной добротности  $K_Q$  определим как коэффициент передачи делителя напряжения из двух параллельных резисторов  $R_2$ ,  $R_4$  и резистора  $R_6$  (рис. 3):

$$K_Q = G_6 / (G_2 + G_4 + G_6). \quad (6)$$

Примем сопротивления резисторов  $R_5$ ,  $R_7$  и емкости конденсаторов  $C_1$ ,  $C_2$  равными между собой, т. е.  $R_5 = R_7 = R$  и  $C_1 = C_2 = C$ , тогда  $T_1 = T_2 = T = RC$ . Значение сопротивления резистора  $R_1$ , зададим в виде соотношения:

$$R_1 = R_3 / \lambda, \quad (7)$$

где параметр  $\lambda$  определяет режим работы фильтра с минимальным изменением добротности при регулировании резонансной частоты  $\omega_0$ .

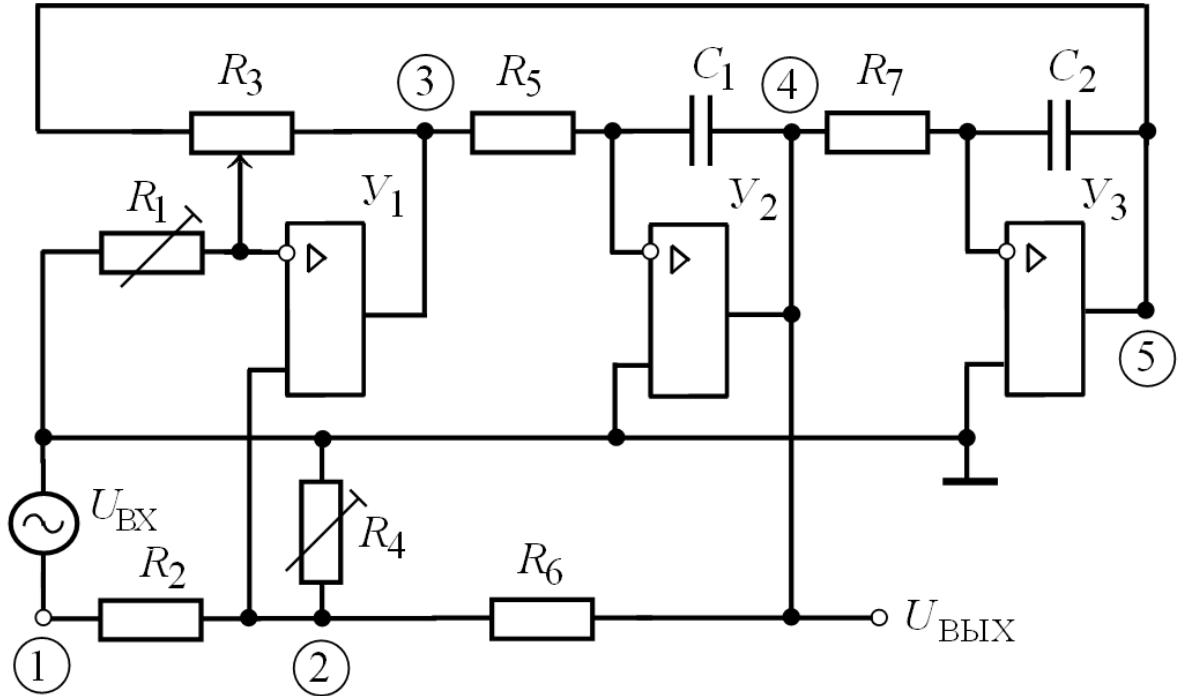


Рис. 3

Для схемы (рис. 4, а) приведен сигнальный направленный Y-граф (рис. 4, б), где узлам графа соответствуют их напряжения. Для каждой ветви направленного сигнального графа укажем коэффициент передачи – множитель, определяющий величину, на которую умножается напряжение, передаваемое по ветви от одного узла к другому в направлении стрелки.

С учетом выражений (5)–(7), запишем коэффициенты передачи для всех шести ветвей сигнального графа (рис. 4, б):

$$\begin{aligned}
 H_{12} &= G_2 / (G_2 + G_4 + G_6) = \gamma; \quad H_{34} = H_{45} = -1/sT; \quad H_{42} = K_Q; \\
 H_{23} &= 1 + (G_{31} + G_1) / G_{32} = 1 + \{1/[R_3(1-\beta)] + \lambda/R_3\} / [1/(R_3\beta)] = [1 + \lambda\beta(1-\beta)] / (1-\beta); \\
 H_{53} &= -R_{32} / R_{31} = -\beta R_3 / [(1-\beta)R_3] = -\beta / (1-\beta). \tag{8}
 \end{aligned}$$

Передаточная функция сигнального графа (рис. 4, б) имеет вид

$$H_1(s) = \frac{U_{\text{Вых}}}{U_{\text{Вх}}} = \frac{H_{14}}{1 - L_1 - L_2}, \tag{9}$$

где  $H_{14} = H_{12}H_{23}H_{34}$  – прямой путь графа;  $L_1$ ,  $L_2$  – петли графа.

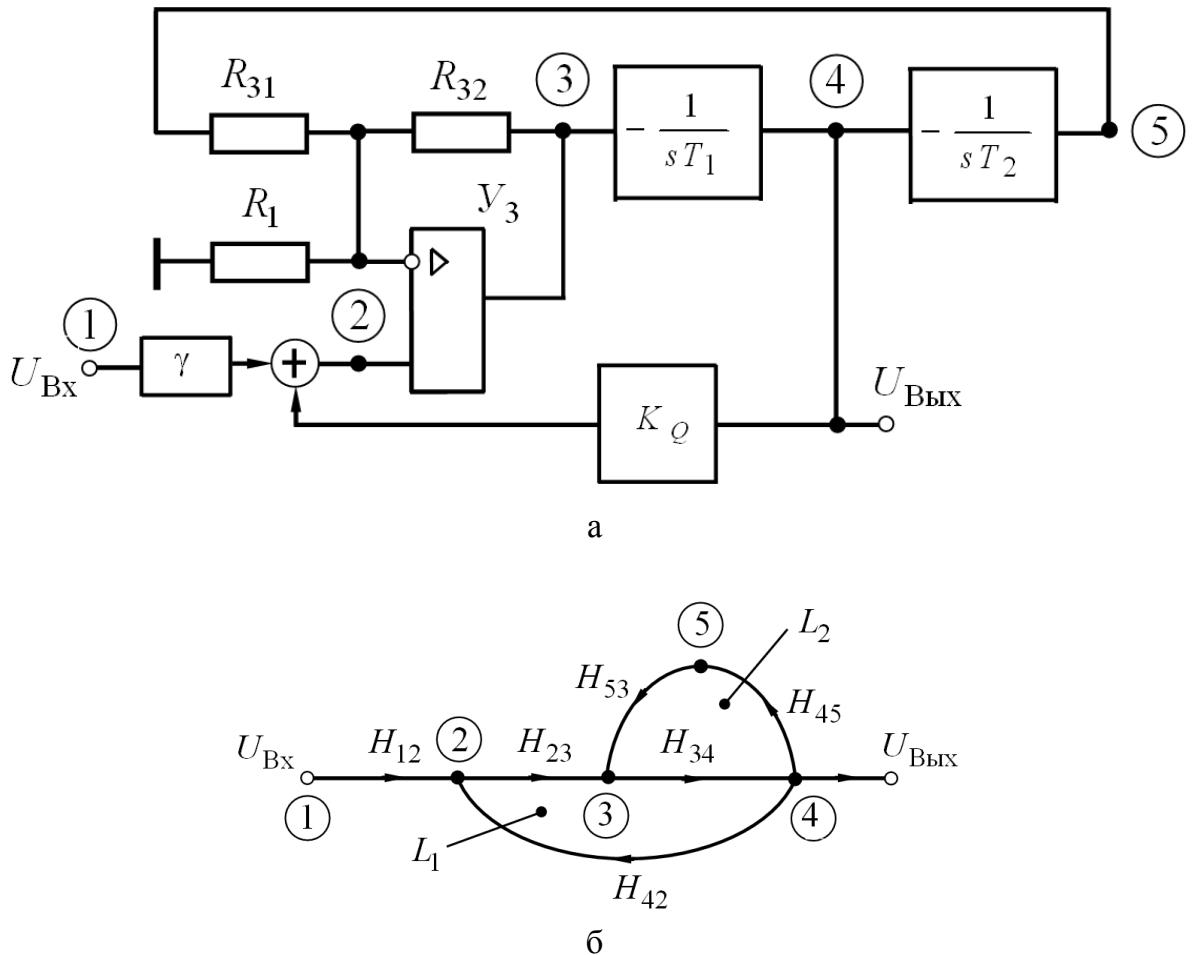


Рис. 4

Для контуров графа коэффициенты передач представляют собой произведения соответствующих коэффициентов передачи ветвей:

$$L_1 = H_{23} H_{34} H_{42}; \quad L_2 = H_{34} H_{45} H_{53}. \quad (10)$$

Подставив выражение (10) в передаточную функцию (9), и учитывая (8), получим

$$H_1(s) = \frac{\left[ G_2 / (G_2 + G_4 + G_6) \right] \{ [1 + \lambda\beta(1-\beta)] / (1-\beta) \} \left[ -1 / (sT) \right]}{1 - K_Q \{ [1 + \lambda\beta(1-\beta)] / (1-\beta) \} \left[ -1 / (sT) \right] - \left[ -1 / (sT) \right] \left[ -1 / (sT) \right] \left[ -\beta / (1-\beta) \right]}.$$

Проведя необходимые преобразования, найдем

$$H_1(s) = \frac{-s \left[ G_2 / (G_2 + G_4 + G_6) \right] \{ [1 + \lambda\beta(1-\beta)] / [T(1-\beta)] \}}{s^2 + sK_Q \{ [1 + \lambda\beta(1-\beta)] / [T(1-\beta)] \} + \beta / [T^2(1-\beta)]} = \frac{-sh_m\omega_0 / Q}{s^2 + s\omega_0 / Q + \omega_0^2},$$

$$\text{где } h_m = G_2 / [K_Q (G_2 + G_4 + G_6)] = G_2 / G_6 = R_6 / R_2 \quad (11)$$

– коэффициент передачи фильтра на резонансной частоте;

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = [1/(RC)] \sqrt{\beta/(1-\beta)}, \quad (12)$$

– резонансная круговая частота фильтра;

$$Q = \sqrt{\beta(1-\beta)} / \{K_Q [1 + \lambda\beta(1-\beta)]\} \quad (13)$$

– добротность фильтра.

Из выражений для параметров  $h_m$ ,  $\omega_0$  и  $Q$  следует, что они могут быть регулируемыми за счет выбора соотношений сопротивлений резисторов  $R_2$  и  $R_6$ , а также параметров  $\beta$  и  $\lambda$ .

Перестройка резонансной частоты  $\omega_0$  (12) фильтра осуществляется с помощью потенциометра  $R_3$ . При перемещении его движка к выходу усилителя  $Y_1$  резонансная частота  $\omega_0$  уменьшается, а при перемещении движка к выходу усилителя  $Y_3$  резонансная частота  $\omega_0$  увеличивается из-за изменения петлевого усиления в частотно-задающем контуре.

Проанализируем возможность перестройки резонансной частоты полосового фильтра  $\omega_0$  при условии незначительного изменения его полюсной добротности  $Q$ . На рис. 5, *a* показан график зависимости нормированной резонансной частоты  $\omega_0 T$  параметра перестройки  $\beta$ .

Из представленного графика видно, что при изменении параметра  $\beta$  в пределах (0,1...0,9) резонансная частота фильтра изменяется в девять раз и кроме высокочастотного участка перестройки наблюдается ее практически линейная зависимость от параметра  $\beta$  (рис. 5, *a*). На рис. 5, *b* приведен график зависимости добротности  $Q$  от коэффициента  $K_Q$ , согласно формуле (13) при следующих параметрах:  $\beta = 0.5$  и  $\lambda = 6$ .

Очевидно, что в схеме возможно регулирование в широких пределах полюсной добротности при перестройке параметра  $K_Q$ , изменяемого с помощью переменного резистора  $R_4$ , который в составе резистивного делителя обеспечивает общую глубину обратной связи. При уменьшении сопротивления резистора  $R_4$  уменьшается общая отрицательная обратная связь, т. е. уменьшается коэффициент полюсной

добротности  $K_Q$  (6) и при этом увеличивается значение полюсной добротности  $Q$  фильтра.

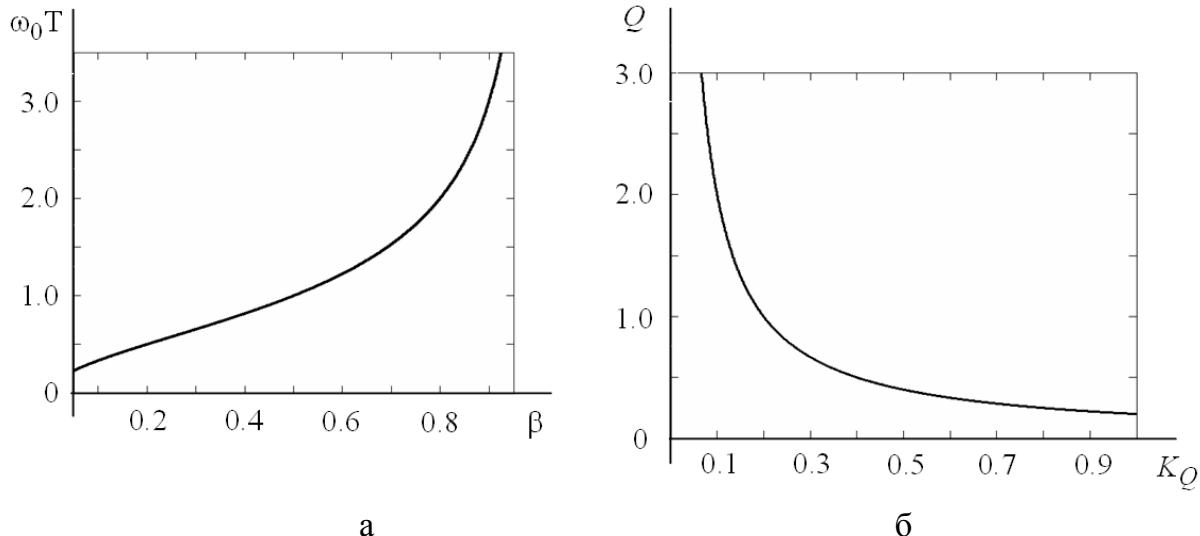


Рис. 5

На рис. 6, а показаны графики изменения нормированной добротности  $QK_Q$  от параметра  $\beta$  при различных значениях  $\lambda$ . Из графиков следует, что при перестройке резонансной частоты  $\omega_0$  добротность изменяется незначительно при значении параметра  $\lambda \approx 6$ .

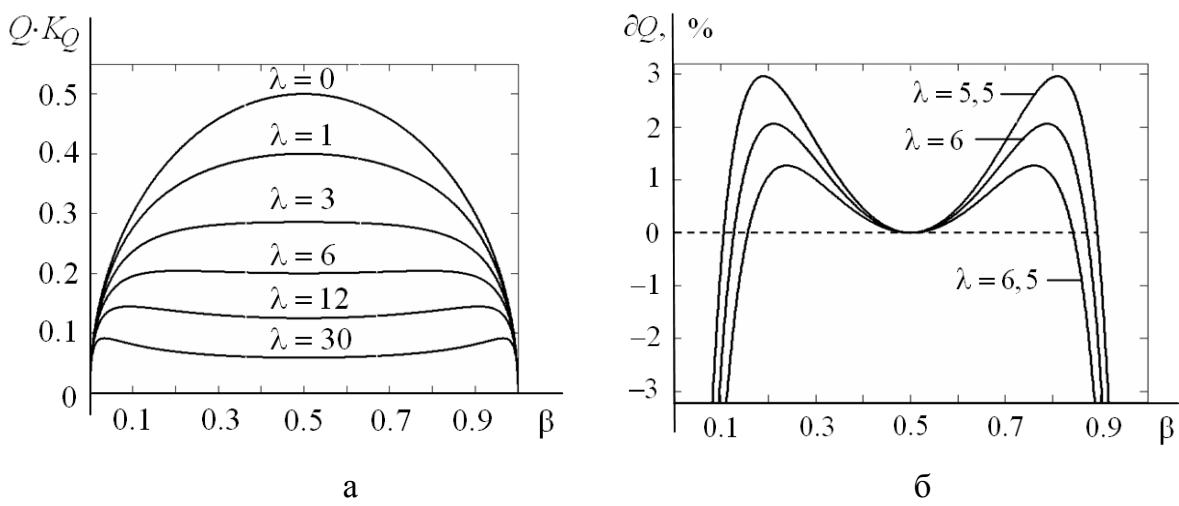


Рис. 6

Для нахождения оптимального значения  $\lambda$  рассмотрим на рис. 6, б зависимость отклонения добротности  $\delta Q$  от параметра  $\beta$  при нескольких значениях  $\lambda$ , близких к значению 6. Из графиков на рис. 6, б следует, что

$\lambda = 6$  является оптимальным и обеспечивает в диапазоне перестройки фильтра по частоте в 9 раз отклонение его добротности на  $\pm 2\%$ . Указанная зависимость получена за счет общего снижения добротности в 2,5 раза по сравнению с максимальной достижимой полюсной добротностью при  $\lambda = 0$  (см. рис. 6, а).

На основе рассмотренной схемы перестраиваемого инвертирующего полосового RC-фильтра-прототипа (рис. 3) и проведения дополнительного топологического преобразования (рис. 1) создадим схему перестраиваемого активного режекторного RC-фильтра (рис. 7). Для этого обеспечим инвертирование входного сигнала  $U_{\text{вх}}$ , подключив ко входу полосового RC-фильтра (рис. 3) единичный инвертор (рис. 7), состоящий из операционного усилителя  $Y_4$  и двух одинаковых резисторов  $R_8, R_9$ .

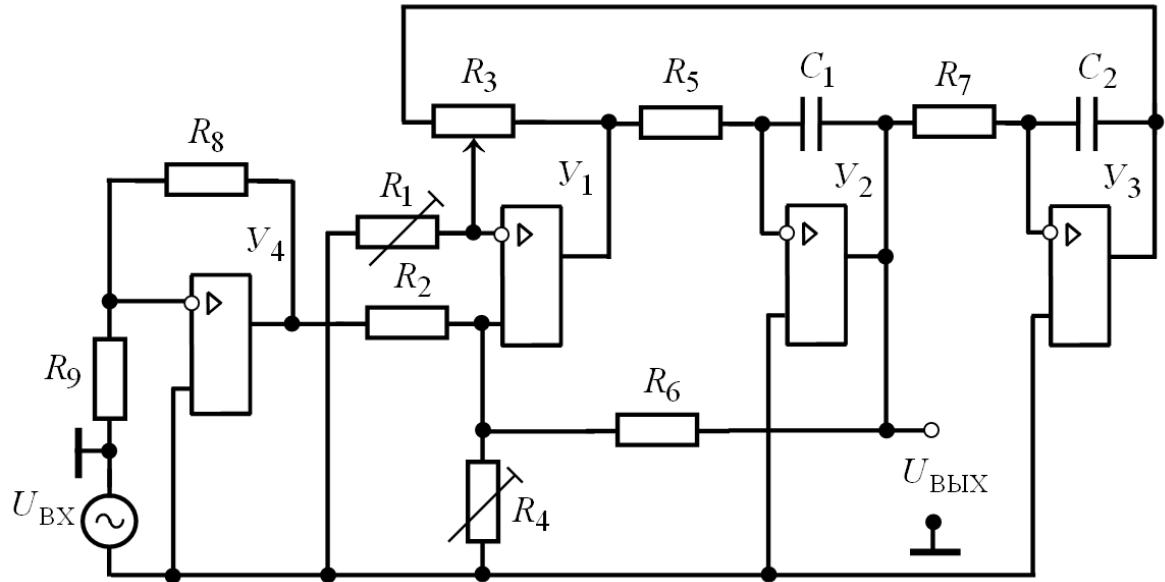


Рис. 7

Далее выполним дополнительное топологическое преобразование полученной схемы неинвертирующего полосового RC-фильтра. Перенесем общий провод (земля сигнала) по источнику входного напряжения  $U_{\text{вх}}$ , сохранив при этом выходной вывод  $U_{\text{вых}}$  схемы относительно общего провода (рис. 7).

Следует отметить, что для реализованной схемы перестраиваемого активного режекторного RC-фильтра (рис. 7) справедливы все результаты анализа, которые были получены для схемы перестраиваемого активного полосового RC-фильтра-прототипа (рис. 3). Частота режекции фильтра изменяется с помощью потенциометра  $R_3$  в девять раз при практически неизменной полюсной добротности, а величина полюсной добротности регулируется переменным резистором  $R_4$ . Выберем сопротивление резистора  $R_1$  равное  $R_1 = R_3 / \lambda$  при параметре  $\lambda=6$ , что обеспечивает стабильность добротности при регулировании частоты режекции.

На рис. 8 показаны АЧХ режекторного RC-фильтра при различных значениях  $\beta$  – коэффициента перестройки частоты режекции и следующих параметров элементов схемы (рис. 7):  $R_1 = 16$  кОм;  $R_2 = R_6 = 20$  кОм;  $R_3 = 100$  кОм;  $R_4 = 5$  кОм;  $R_5 = R_7 = 10$  кОм;  $C_1 = C_2 = 16$  нФ.

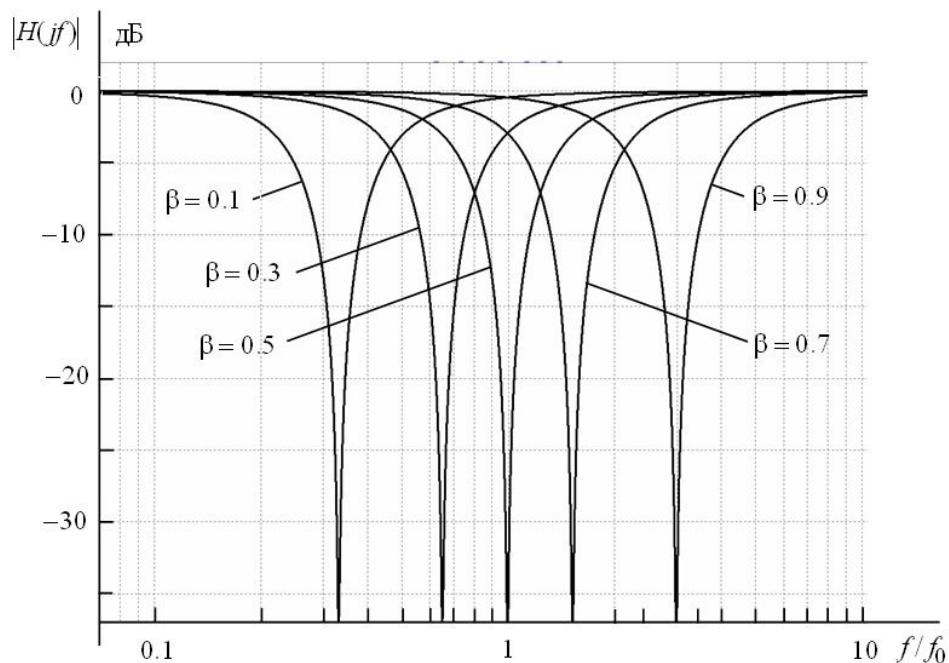


Рис. 8

Вид АЧХ подтверждает девятикратное изменение частоты режекции фильтра (от  $f_1 = 0,333$  кГц до  $f_2 = 3$  кГц) при вариации параметра  $\beta$  в пределах (0,1...0,9). При этом величина полюсной добротности  $Q = 1$  во

всем диапазоне перестройки частоты режекции фильтра сохранялась практически неизменной и изменялась на краях диапазона перестройки приблизительно на  $\pm 2\%$ . На частоте режекции  $f_0 = 1$  кГц в схеме фильтра были выбраны следующие параметры:  $\beta = 0,5$  и  $\lambda = 6$ .

Для ограничения диапазона перестройки фильтра по частоте в 9 раз при практической реализации схемы следует включить последовательно с обеих сторон потенциометра  $R_3$  два одинаковых ограничительных резистора со значениями сопротивлений  $R_{\text{огр}} = R_3 / 8$ .

Преимуществом рассмотренной схемы активного режекторного RC-фильтра является возможность независимой перестройки частоты режекции в широких пределах с помощью одного непроволочного потенциометра при незначительном изменении добротности, а также регулировании добротности с помощью одного переменного резистора.

Частоту режекции можно перестраивать в 9 раз с линейной зависимостью в достаточно широком диапазоне частот с помощью одного потенциометра при постоянстве коэффициента передачи и незначительном изменении полюсной добротности ( $\pm 2\%$ ).

**Вывод.** Разработанный перестраиваемый режекторный RC-фильтр может быть использован для подавления сетевых помех исследуемых сигналов в информационно-измерительных и акустических системах, а также в биомедицинской аппаратуре.

### Список литературы

1. Хьюлсман Л.П., Ален Ф.Е. Введение в теорию и расчет активных фильтров. Пер. с англ. – М.: Радио и связь. 1984. – 384 с.
2. Синтез активных *RC*-цепей. Современное состояние и проблемы. / Под ред. А.А. Ланнэ. – М.: Связь, 1975. – 296 с.
3. Белов А.В., Пуликов Д.Г., Сергеев Т.В. Регулируемый активный режекторный фильтр. / Патент на полезную модель РФ № 59911, кл. H03H7/12 от 27.07.2006.

4. Белов А.В., Пуликов Д.Г., Сергеев Т.В. Активный RC режекторный фильтр с перестраиваемой величиной добротности // Изв. высш. учеб. заведений России. Радиоэлектроника.– СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2009.– №1.– С. 37–42.
5. Дубина А.Г., Орлова С.С., Шубина И.Ю. MS Exlel в электротехнике и электронике.– СПб.: БХВ-Петербург, 2001. – 304 с.
6. Hilberman D. Input and ground as complements in active filters // IEEE Trans. on circuit theory.– 1973.– Vol. CT-20, no. 2.– P. 540.
7. Ризкин А.А. Избирательные RC-цепи // Радиотехника.– 1955.– Т. 10, № 5.– С. 31–38.
8. Белов А.В. Методы преобразования электрических цепей на основе нулловоров // Изв. высш. учеб. заведений России. Радиоэлектроника. – СПб.: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2012.– №2.– С. 30–36.
9. Гришин С.В., Иванов Ю.И., Крутчинский С.Г. Перестраиваемый активный RC-фильтр / Патент РФ № 2110140, кл. H03H11/04 от 27 04 1998.
10. Белов А.В., Гисин М.Я. Полосовой активный RC-фильтр // Авторское свидетельство РФ № 807482, кл. H03H11/12 от 23 02 1981.

**Иншаков Юрий Михайлович** – к.т.н., профессор кафедры ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет.

Адрес: 197376, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5, СПбГЭТУ, кафедра ТОЭ. Тел.: (812) 346-17- 96, Inshakov40@mail.ru

**Белов Александр Викторович** – к.т.н., ведущий научный сотрудник НИИ экспериментальной медицины РАМ. Тел.: +7(952) 204-96-94, avbelov1@ya.ru

# ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕРЕВЬЕВ С НУЛЛОРНЫМИ И ЗЕРКАЛЬНЫМИ АНОМАЛЬНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Г. В. Майко, В. В. Филаретов

Предложен метод синтеза эквивалентных цепей, использующий преобразование деревьев с зеркальными и/или нуллорными аномальными элементами. По сравнению с хорошо известными преобразованиями нуллорных деревьев деревья с зеркальными элементами не всегда эквивалентны одно другому. Для достижения эквивалентности необходимо изменить тип аномальных элементов (с зеркального аномального элемента на нуллор или наоборот). Также представлен алгоритм перечисления эквивалентных деревьев с этими аномальными элементами. В нем используются пометки вершин, учитывающие тип аномальных элементов, включенных между этими узлами, и сохраняющие свои значения в процессе преобразования деревьев. Рассмотрен практический пример получения эквивалентных схем с токовыми конвейерами, который иллюстрирует изменение типа конвейера в новой эквивалентной схеме.

*Method of equivalent circuit synthesis using transformation of the trees with mirror and/or nullor pathological elements is presented in the article. In contrary with the well-known equivalent transformations of the nullors trees, trees with mirror elements are not always equivalent to each other. It is necessary to change the type of the pathological elements (from mirror pathological element to nullor or vice versa) in order to achieve such equivalence. Algorithm of generating equivalent trees with those pathological elements is also suggested in the article. It is based on tagging (marking) the tree's vertices (nodes) based on the type of the pathological element between those vertices and preserving those tags during tree transformations.*

**О порождении эквивалентных схем.** Одним из эффективных методов синтеза электрических цепей является их эквивалентные преобразования, то есть получение модификаций схем, заведомо эквивалентных некоторой исходной (порождающей) схеме [1–6]. Порождающая схема является результатом изобретения или применения других методов синтеза цепей. В результате применения эквивалентных преобразований очень часто улучшаются характеристики и параметры новых схем по сравнению с порождающей схемой. Поэтому эквивалентные преобразования электрических цепей широко применяются на заключительных этапах проектирования и оптимизации аналоговых активных схем, таких как фильтры, генераторы, усилители, различные преобразователи и т.п. [2].

Эквивалентность схем обусловлена тем, что системы уравнений Кирхгофа, описывающие такие схемы, являются идентичными. Для структурного синтеза обычно представляют ценность эквивалентные преобразования, которые сохраняют или уменьшают число элементов. При таких преобразованиях обычно изменяется топология схемы – взаимное соединение элементов. Получение новых и конкурентоспособных схемных решений требует, чтобы при порождении (перечислении) схем во избежание потери интересного решения, обеспечивалась полнота перебора [3].

В классе схем, составленных из пассивных двухполюсников, получение схем, эквивалентных некоторой порождающей схеме, ограничено, поскольку в общем случае не существует двух неизоморфных схем, имеющих одинаковые символические схемные функции [9]. В то же время взаимное изменение положения активных элементов может привести к порождению большого числа схем, что важно для структурного синтеза и оптимизации структуры [3, 4]

**Эквивалентные преобразования схем с нуллорами.** Наиболее просто выполняются эквивалентные преобразования схем с идеальными активными элементами в виде нуллоров, то есть пары аномальных элементов – нуллатора и норатора [1–6]. Роль этих аномальных элементов

трудно переоценить, чему свидетельство – обширная библиография по этой теме [10].

Нуллатор – это двухполюсник, ток через который равен 0 и напряжение на выводах которого равно 0:

$$\begin{cases} U = 0 \\ I = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Норатор – это двухполюсник, ток и напряжения которого произвольны и не зависят друг от друга.

Аномальные элементы позволяют не только довольно легко восстановить все новые структуры (топологии) цепей из некоторой порождающей структуры [1–6], но и просто учитываются в соответствующих системах уравнений [2, 11]. В схемах с аномальными элементами способы подключения моделируемых активных элементов не видны, поэтому аномальные элементы можно объединять в пары разными способами. При этом изменяется подключение активных элементов, соответствующих таким парам [1, 5]. Весьма важно, что схемы с нуллорными элементами легко преобразовать в другие эквивалентные схемы, например, используя преобразования деревьев из нуллаторов и нораторов [3, 4], показанные на рис. 1,а и рис.1,б соответственно.

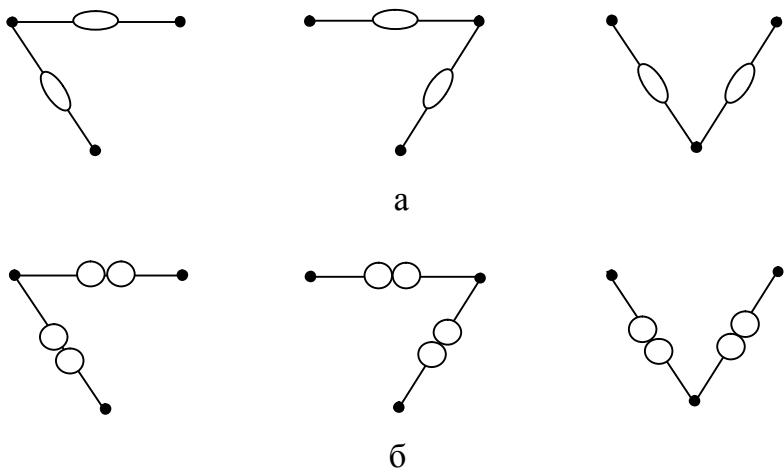


Рис. 1. Преобразования нуллаторных (а) и нораторных (б) деревьев

Для порождения эквивалентных схем с различной структурой и одинаковым числом элементов используются преобразования нуллорных

деревьев, показанные на рис. 1. Для этого можно использовать следующий алгоритм.

1. Активные элементы в структурной или принципиальной схеме устройства заменяются на соответствующие группы (обычно пары) аномальных элементов, и строится соответствующая схема с аномальными элементами.

2. В полученной нуллорной схеме аномальные элементы можно объединить в группы, соответствующие активным элементам, разными способами, используя комбинаторные методы. Это приводит к переключению выводов активных элементов в исходной схеме, то есть порождению новых схем.

3. В каждой из полученных схем могут выделены подсхемы из аномальных элементов одного вида, имеющих общие узлы (и образующие дерево). Такие подсхемы можно преобразовать в другие деревья, и затем провести объединение аномальных элементов, аналогичное п.2.

При восстановлении активных элементов из групп аномальных элементов необходимо учитывать особенности моделей этих активных элементов. Например, если в модели активного элемента идеальные элементы соединены между собой определенным образом, то при новом объединении необходимо обеспечивать такое же соединение.

В последнее десятилетие при анализе и синтезе электронных схем весьма успешно используются модели идеальных активных элементов на основе аномальных элементов нового типа – зеркального элемента напряжения (ЗЭН) и зеркального элемента тока (ЗЭТ) [12]. Зеркальные аномальные элементы ЗЭН и ЗЭТ, в отличие от соответствующих им нуллорных элементов (нуллатора и норатора), являются трехполюсниками и всегда заземлены, однако ими удобно оперировать как двухполюсниками [6, 13].

Ток через незаземленные выводы ЗЭН равен 0, а напряжения на незаземленных выводах ЗЭН равны по величине и противоположны по знаку:

$$\begin{cases} U_1 = -U_2 \\ I = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Токи через незаземленные выводы ЗЭТ равны по величине, но противоположны по знаку (направлению), а напряжение на ЗЭТ может быть любым и не зависит от тока через него:

$$\begin{cases} I_1 = -I_2 \\ U_1 - U_2 = \text{любое} \end{cases} \quad (3)$$

Широкое использование нуллорных и зеркальных элементов при проектировании электронных цепей обусловлено, прежде всего, тем, что пары аномальных элементов лежат в основе моделей распространенных на практике типов активных элементов, как простейших (транзисторов различных типов), так и более сложных – операционных усилителей, токовых конверторов и зеркал и т.п. [2, 5, 7, 8, 12–14]. Это позволяет легко получать схемы замещения для широкого класса схем на основе аномальных элементов.

Однако эквивалентные преобразования схем, содержащих как нуллорные, так и зеркальные аномальные элементы, разработаны недостаточно полно. Так, в статье [6] приводятся преобразования зеркально-нуллорных деревьев, показанные на рис. 2.

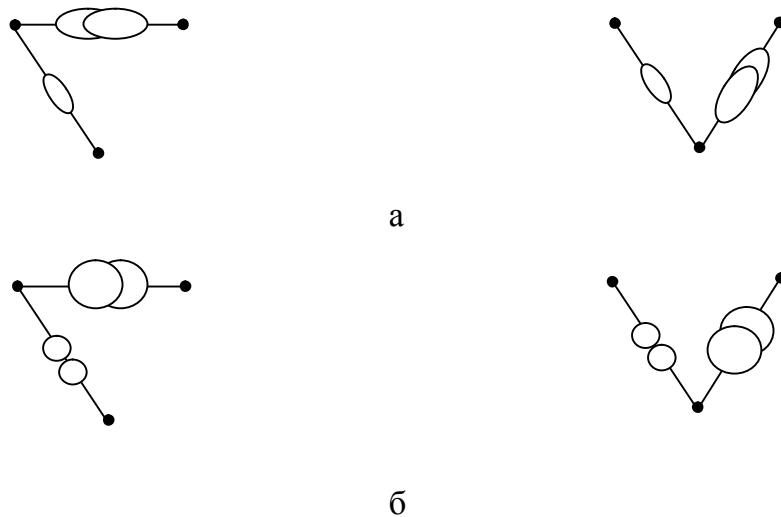


Рис. 2. Преобразования смешанных зеркально-нуллорных деревьев:  
ЗЭН+нуллатор (а) и ЗЭТ+норатор (б)

Как видно, на рис. 2, а и рис.2 , б представлены эквивалентные деревья, содержащие зеркальный и нуллорный элемент, соответствующие первому и третьему деревьям в нуллорных триадах, показанных на рис.1,а и рис. 1, б. Однако второе по порядку дерево на рис. 2, а и рис. 2, б, в отличие от рис. 1, пропущено.

Очевидная неполнота зеркально-нуллорных триад на рис.2,а и рис.2,б, а также возможность изменения типа аномальных элементов при построении эквивалентных деревьев, до сих пор не исследованы, чему и посвящена настоящая статья. В ней предлагается алгоритм перечисления всех возможных эквивалентных деревьев, обеспечивающий получение полного класса схем, эквивалентных некоторой порождающей схеме.

**Соединения подобных аномальных элементов.** Выделим две группы подобных аномальных элементов – первую группу образуют ЗЭН и нуллаторы; вторую группу – ЗЭТ и нораторы. Будем рассматривать схемы, в которых аномальные элементы одной группы соединены между собой и образуют дерево, то есть не имеют контуров. Именно такие схемы представляют интерес, поскольку известно, что контуры и сечения, содержащие только нуллаторы или только нораторы, вырождают схему (приводят к нулю ее определитель) [15].

Для первой группы ветвями дерева являются ЗЭН и, возможно, нуллаторы; для второй группы – ЗЭТ и, возможно, нораторы. Схема может иметь несколько несвязанных между собой деревьев из подобных аномальных элементов. Следует отметить, что деревья из элементов различных групп могут иметь общие узлы. Первоначально будем полагать, что все узлы каждого дерева не связаны с общим выводом схемы (базисным узлом).

Подобные аномальные элементы, образующие дерево, поддерживают определённые соотношения между напряжениями его узлов (элементы первой группы) или токов ветвей дерева (элементы второй группы). Например, для дерева, состоящего только из нуллаторов, напряжения всех узлов одинаковы. Напряжения узлов для деревьев с ЗЭН

и, возможно, нуллаторов, будут неодинаковыми, так как согласно (2) ЗЭН инвертирует напряжения на своих выводах.

На рис. 3 показано подключение двух ЗЭН, образующих дерево на узлах 1, 2 и 3, к некоторому заземленному многополюснику.

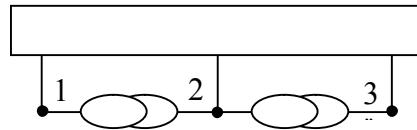


Рис. 3

Задаваясь напряжением первого узла  $U_1$ , согласно свойствам ЗЭН для схемы на рис.3 получаем следующие уравнения:

$$+U_1 = -U_2 \quad (4)$$

$$+U_2 = -U_3 \quad (5)$$

Объединяя (4) и (5), получим:

$$+U_1 = -U_2 = +U_3 \quad (6)$$

**Соединения ЗЭН и нуллаторов.** Как уже отмечалось, если бы вместо ЗЭН использовались нуллаторы, то все напряжения  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$  имели бы один и тот же знак и были бы равны друг другу. Любое другое дерево из нуллаторов, построенное на этих же узлах, обеспечивало бы такое же соотношение между напряжениями. Именно это является основой хорошо известных эквивалентных преобразований нуллорных деревьев [3,5].

Рассмотрим, что происходит с соотношениями напряжений при использовании в схеме других деревьев на этих же узлах. Например, переключив ЗЭН к узлам 1 и 3 (рис. 4), и, опять-таки задаваясь напряжением узла  $U_1$ , получим следующие соотношения между узлами:

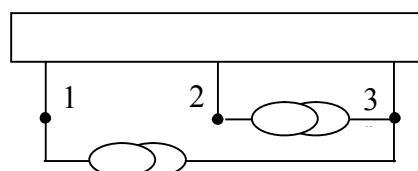


Рис. 4

$$+U_1 = -U_3 \quad (7)$$

$$+U_2 = -U_3 \quad (8)$$

Объединяя (4) и (5), получим:

$$+U_1 = -U_3 = +U_2$$

или

$$+U_1 = +U_2 = -U_3 \quad (9)$$

При сравнении (6) и (9), видно, что различные деревья с ЗЭН на одних и тех же узлах, в отличие от деревьев с нуллаторами, не приводят к эквивалентным схемам. Чтобы сохранить эквивалентность схем рис. 3 и рис. 4, необходимо заменить нижний ЗЭН на рис. 4 нуллатором, как показано на рис. 5.

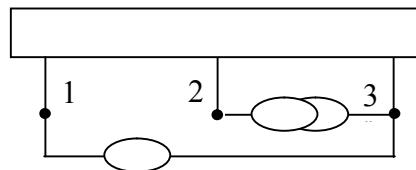


Рис. 5

Очевидно, для обеспечения эквивалентности вид ветви между некоторыми узлами должен зависеть от пометок соответствующих вершин. В связи с этим возникает вопрос, как следует выбирать вид ветви некоторого дерева, чтобы обеспечивать такое же соотношение напряжений, что и в оригинальной схеме?

Вид ветви можно определять исходя из соотношений знаков в инцидентных вершинах, а именно – если знаки вершин совпадают, то рассматриваемая неопределенная ветвь заменяется на нуллатор; если знаки вершин противоположны, то эта ветвь заменяется ЗЭН. Для удобства применения предложенное правило представлено в первых четырех строках табл. 1.

Таблица 1. Обобщенные соотношения между знаками вершин, инцидентных ветви, и ее видом для аномальных элементов первой группы

Знаки/обозначения вершин, инцидентных ветви		Вид ветви
+	-	ЗЭН
+	+	Нуллатор
-	-	Нуллатор
-	+	ЗЭН
0	0	ЗЭН или нуллатор

Проиллюстрируем этот процесс на примере схемы на рис. 3. Известно [16], для трех вершин можно построить 3 неизоморфных дерева, представленных на рис.6.

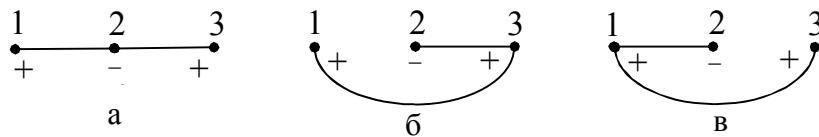


Рис. 6

Дерево на рис. 6, а соответствует исходной схеме на рис.1. На нем при узлах показаны знаки напряжений, полученные из соотношения (6). Узлы других деревьев (рис. 6, б и рис. 6, в) помечены теми же самыми знаками для обеспечения эквивалентности.

Определим виды ветвей в деревьях на рис. 6, б и рис. 6, в, учитывая правила в табл. 1. Например, на рис. 6, б ветвь, соединяющая узлы 1 и 3, должна быть нуллатором, а ветвь, соединяющая вершины 2 и 3 – ЗЭН. Соответствующая схема была ранее получена и представлена на рис. 5. Эквивалентная схема, соответствующая дереву на рис. 6, в, показана на рис. 7.

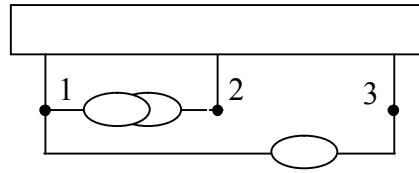


Рис. 7.

Интересно отметить, что эквивалентные схемы на рис. 5 и рис. 7. были также представлены в [6], без указания, что обе эти схемы эквивалентны соединению двух ЗЭН (рис. 3). Иными словами, в [6] не допускалась возможность изменения типа аномального элемента с нуллорного на зеркальный. После необходимого дополнения рис.2 принимает вид рис. 8.

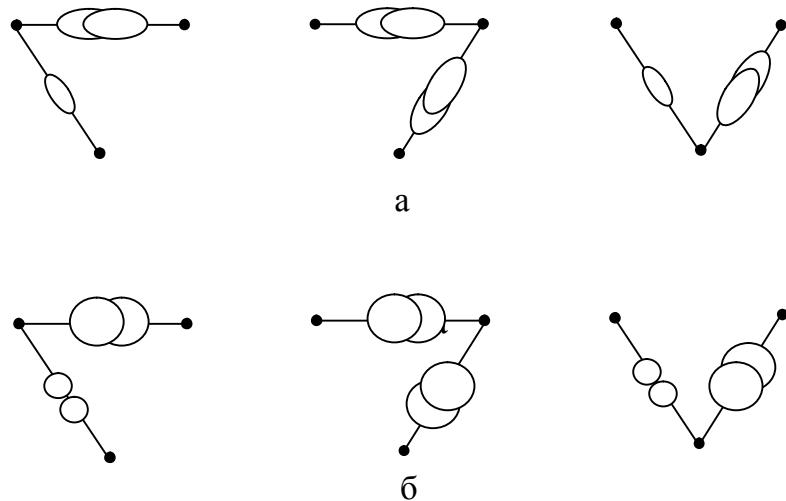


Рис. 8. Преобразования смешанных зеркально-нуллорных деревьев:  
ЗЭН+нуллатор и ЗЭН+ЗЭН (а); ЗЭТ+норатор и ЗЭТ+ЗЭТ (б)

Из рис. 8 следует взаимное изменение видов элементов в эквивалентных деревьях – с нуллатора на ЗЭН, с норатора на ЗЭТ и наоборот.

**Соединения ЗЭТ и нораторов.** Рассмотрим теперь схему с двумя ЗЭТ (элементами второй группы), имеющими общий узел и образующих дерево на узлах 1, 2 и 3 (рис. 9).

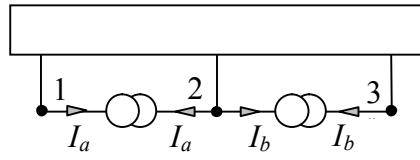


Рис. 9.

Рассмотрим уравнения первого закона Кирхгофа для токов узлов 1, 2 и 3 этой схемы, с учетом токов ЗЭТ:

$$\begin{cases} \sum I_1 = +I_a \\ \sum I_2 = +I_a + I_b \\ \sum I_3 = +I_b \end{cases} \quad (10)$$

В левой части уравнений (10) представлена сумма всех токов соответствующих узлов, в правой части – токи аномальных элементов.

Для того, чтобы исключить токи  $I_a$  и  $I_b$ , неопределенные величины которых не влияют на решение системы уравнений, воспользуемся предложенным в [11] способом преобразования уравнений. Сначала вычтем уравнение для узла 1 из уравнения для узла 2:

$$\begin{cases} \sum I_2 - \sum I_1 = +I_b \\ \sum I_3 = +I_b \end{cases} \quad (11)$$

Такую операцию вычитания можно показать противоположными знаками для вершин 1 и 2 в дереве. Затем вычтем из первого уравнения в (11) второе. Опять же, эту операцию вычитания можно показать противоположными знаками для узлов. Однако, так как одному из узлов (номер 2) уже присвоен знак, то целесообразно использовать именно его и присвоить другому узлу (номер 3) знак противоположный. Таким образом, дерево их двух ЗЭТ можно представить в виде рис. 6, а. Деревья эквивалентных схем (также как в случае соединения двух ЗЭН) будут представлены на рис. 6, б и рис. 6, в.

Деревья, используемые для порождения схем, эквивалентных схемам на рис. 3 и рис. 9, идентичны. Однако на деревьях, содержащих ЗЭТ, знаки показывают не напряжения узлов, а ту операцию, которую

необходимо проделать с уравнениями для узлов с токами инцидентных ветвей, то есть сложение или вычитание уравнений, соответствующих первому закону Кирхгофа для данных узлов.

Если сохранить нумерацию и знаки вершин и построить другие деревья на этих же вершинах (рис. 6, б и рис. 6, в), то теперь новое положение ветвей и знаки вершин будут указывать, какие операции необходимо проделать с уравнениями системы (10) для исключения неопределённых токов аномальных элементов  $I_a$  и  $I_b$ . Например, согласно рис. 4, б, необходимо уравнения для узлов 1 и 3 сложить (так как узлы имеют одинаковые знаки):

$$\begin{cases} \sum I_1 + \sum I_3 = +I_a + I_b \\ \sum I_2 = +I_a + I_b \end{cases} \quad (12)$$

Затем необходимо из первого уравнения вычесть второе (так как узлы 2 и 3 имеют противоположные знаки).

Известно [11], что операция сложения уравнений для некоторых узлов соответствует подключению норатора к этим узлам. Поэтому для дерева с аномальными элементами второй группы на рис. 4, б получим следующую схему (рис. 10). Аналогично, рис. 4, в соответствует другому подключению ЗЭТ и норатора (рис. 11).

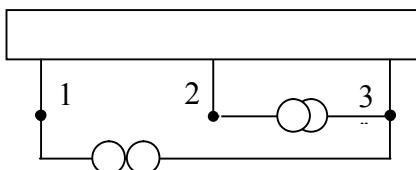


Рис. 10

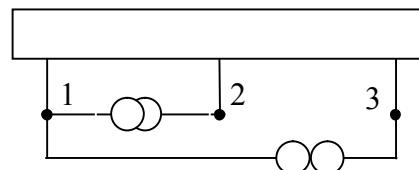


Рис.11

Таким образом, вид ветви можно определять исходя из соотношений знаков в инцидентных вершинах, а именно – если знаки вершин совпадают, то рассматриваемая неопределённая ветвь заменяется на норатор; если знаки вершин противоположны, то эта ветвь заменяется ЗЭТ. Правила выбора вида ветви для аномальных элементов второй группы показаны первых четырех строках табл. 2.

Таблица 2. Обобщённые соотношения между знаками вершин, инцидентных ветви, и ее видом для аномальных элементов второй группы

Знаки/обозначения вершин, инцидентных ветви		Вид ветви
+	-	ЗЭТ
+	+	Норатор
-	-	Норатор
-	+	ЗЭТ
0	0	ЗЭТ или норатор

Для присвоения знаков всем вершинам дерева в исходной схеме можно произвольно задаться знаком любого узла дерева и далее распространять знаки на другие узлы выбранного дерева согласно табл. 1 или 2, учитывая вид ветвей, инцидентных выбранному узлу. Два возможных варианта распределения знаков узлов будут инверсными по отношению друг к другу. Тем не менее, выбор вида аномальных элементов для этих двух деревьев будет совпадать из-за симметрии в правилах выбора вида ветвей (табл. 1 и 2).

Такая процедура присвоения знаков не приводит к неоднозначности при определении знаков узлов. Неоднозначность может возникать только тогда, когда есть несколько путей от одного узла дерева к другому, но дерево, по определению, не имеет контуров, что доказывает корректность процедуры пометки узлов.

**Заземленные соединения ЗЭН и нуллаторов.** Рассмотрим частный случай дерева из ЗЭН и нуллаторов, в котором один из узлов соединён с базисным узлом схемы. По определению, потенциал этого узла известен и равен 0. Это означает, что, учитывая свойства ЗЭН и нуллаторов (выражения (2) и (1) соответственно), напряжения и всех остальных узлов будет равны нулю. Это так же будет верно, во-первых, для любых деревьев на этих узлах и, во-вторых, для любого распределения видов подобных аномальных элементов этой группы по ветвям дерева.

Например, рассмотрим схему с заземлённым выводом ЗЭН на рис.12. Этой схеме соответствует дерево из двух ЗЭН.

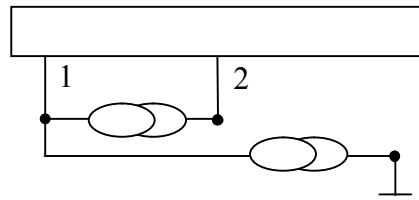


Рис. 12.

Так как напряжения всех узлов равны 0, то обозначим это на графике схемы (рис. 13, а).

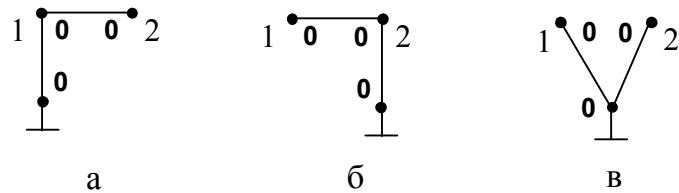


Рис. 13.

Любую ветвь в каждом из графов на рис. 13 можно выбрать или в виде ЗЭН, или в виде нуллатора. Например, для графа на рис. 13, а можно, в дополнение к дереву на рис. 12, получить и три других дерева из аномальных элементов первой группы (рис. 14):

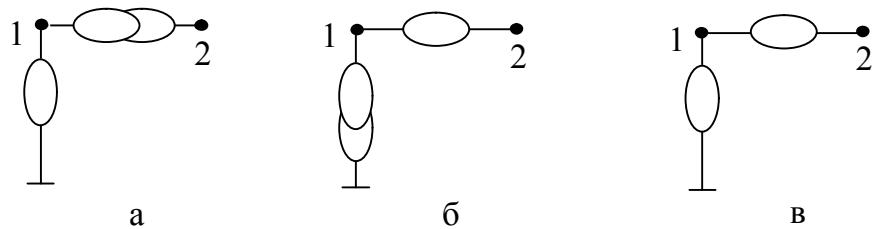


Рис. 14.

Все деревья на рис. 14 и рис. 12 будут эквивалентны между собой. Стока, соответствующая нулевым пометкам узлов, которые инцидентны некоторому ЗЭН или нуллатору, помещена последней в табл.1.

**Заземленные соединения ЗЭТ и нораторов.** Прежде чем рассматривать схемы с заземленными деревьями из аномальных элементов второй группы, проанализируем две схемы с одним заземленным элементом – ЗЭТ или норатором, показанные на рис. 15, а и рис. 15, б соответственно.

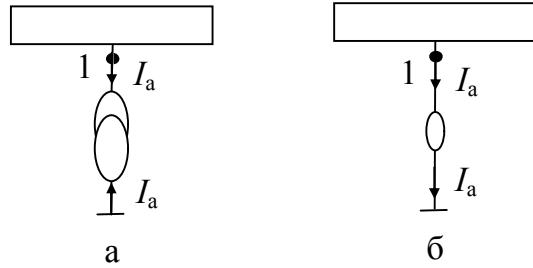


Рис. 15.

Укажем направление токов через аномальные элементы, задаваясь одним и тем же положительным направлением тока, вытекающего из узла. Уравнения по первому закону Кирхгофа для узла 1 для обеих схем будет одинаковым:

$$\sum I_1 = +I_a, \quad (13)$$

где  $I_a$  – ток аномального элемента.

Из этого уравнения получается, что заземлённый ЗЭТ ведет себя точно таким же образом, что и заземлённый норатор. Поэтому он может быть учтен по известному правилу учёта заземлённого норатора, а именно – исключению уравнения для узла подключения норатора из системы уравнений, описывающей схему [11].

Добавим к заземленному аномальному элементу другие так, чтобы образовалось заземлённое дерево. Будем по прежнему считать, что к узлу 1 схемы подключен заземлённый элемент, и положительные направления тока соответствуют его вытеканию из узла. Тогда уравнение, описывающее первый закон Кирхгофа для узла 1, будет следующим:

$$\sum I_1 = +I_a + \left( \sum_i^{N_n} I_i + \sum_j^{N_{ЗЭТ}} I_j \right), \quad (14)$$

где  $I_i$  – токи всех  $N_n$  нораторов, а  $I_j$  – токи всех  $N_{ЗЭТ}$  зеркальных элементов тока, подключенных к узлу 1. Так как в дереве из аномальных элементов нет контуров, то все токи  $I_i$  и  $I_j$  войдут также в другие ( $N_n + N_{ЗЭТ}$ ) уравнения для других узлов. Исключим заземлённый аномальный элемент путём исключения уравнения для узла 1. Понятно, что при этом в системе уравнений, описывающих эту схему, останется по одному току  $I_i$  и  $I_j$ , соответствующим аномальным элементам, соединённым с узлом 1.

Рекурсивно применяя вышеописанное правило исключения аномальных элементов (аналогично удалению уравнения (13)), окончательно получим систему уравнений, в которой исключены все уравнения, соответствующие вершинам дерева из аномальных элементов второй группы. Следует подчеркнуть, что аналогично заземлённым деревьям с аномальными элементами первой группы, совершенно не важна структура дерева на этих узлах и распределение видов подобных аномальных элементов по ветвям дерева.

Очевидно, для получения эквивалентных деревьев с заземлёнными аномальными элементами следует: 1) всем узлам заземленного дерева присвоить пометки «0»; 2) перечислить все возможные деревья на этих узлах; 3) перенести обозначения узлов на новые деревья; 4) выбрать виды аномальных элементов. Эквивалентные схемы с аномальными элементами второй группы, образующими заземленные деревья, получаются аналогично правилу работы с заземленными деревьями из аномальных элементов первой группы. В этом случае для любой ветви можно использовать как ЗЭТ, так и норатор. Стока, соответствующая нулевым пометкам узлов, которые инцидентны некоторому ЗЭТ или норатору, помещена последней в табл. 2.

Таким образом, в случае заземлённого дерева число эквивалентных схем равно числу деревьев, умноженному на 2 в степени числа ветвей дерева. Для незаземленного дерева, образованного только из нуллорных

элементов или зеркальных элементов, число эквивалентных схем (включая исходную схему) уменьшается и равно числу деревьев, построенных на соответствующих узлах.

**Алгоритм порождения эквивалентных деревьев для нуллорных и зеркальных аномальных элементов.** Предлагаемый алгоритм используется в п. 3 описанного выше алгоритма порождения эквивалентных схем с помощью эквивалентных преобразований аномальных элементов, который приведен во введении. Теперь в эквивалентных схемах допускается использование всех четырёх видов аномальных элементов.

1. В исходной схеме выделяются все деревья, образованные подобными аномальными элементами одной группы.

2. Для каждого такого дерева определяется, не является ли один из его узлов заземлённым.

2.1. Если в дереве есть один заземлённый узел, то составляются все деревья на этих же узлах.

2.1.1. Каждая ветвь в таких деревьях может быть как нуллорным, так и зеркальным элементом, поэтому составляются все комбинации видов ветвей для каждого дерева.

2.2. Если дерево не имеет заземлённых узлов, то определяется, состоит ли оно только из нуллаторов (нораторов), или в его состав входят также зеркальные аномальные элементы.

2.2.1. Если в состав дерева входят только нуллаторы (нораторы), то составляются все деревья на этих же узлах и все ветви этого дерева выбираются соответственно как нуллаторы (нораторы).

2.2.2. Если в состав дерева входит хотя бы один зеркальный элемент, то произвольному узлу дерева присваивается пометка «+».

2.2.2.1. Для всех ветвей дерева, инцидентных выбранному узлу, находится второй непомеченный узел и ему присваивается пометка, в зависимости от вида ветви (табл. 1 и 2).

2.2.2.2. Предыдущий пункт выполняется до тех пор, пока все узлы дерева не получат пометки.

2.2.3. Составляются все деревья на этих же узлах, причём узлы сохраняют свои пометки, а ветви дерева считаются неопределёнными.

2.2.4. Для каждого из новых деревьев определяется вид ветви с учетом табл. 1 и 2.

3. Продолжать выполнение п. 2, пока не будут рассмотрены все деревья схемы.

4. Для всех полученных вариантов всех деревьев производится объединение аномальных элементов для получения новых подключений идеальных элементов.

**Пример, иллюстрирующий преобразование ЗЭН-дерева и спаривание аномальных элементов.** В качестве примера рассмотрим схему универсального фильтра на основе трёх  $\text{ICCI}^+$ , предложенную в [8, fig. 2, b], которая является модификацией фильтра, описанного в [7]. Модель такого фильтра на основе зеркальных элементов представлена на рис. 16.

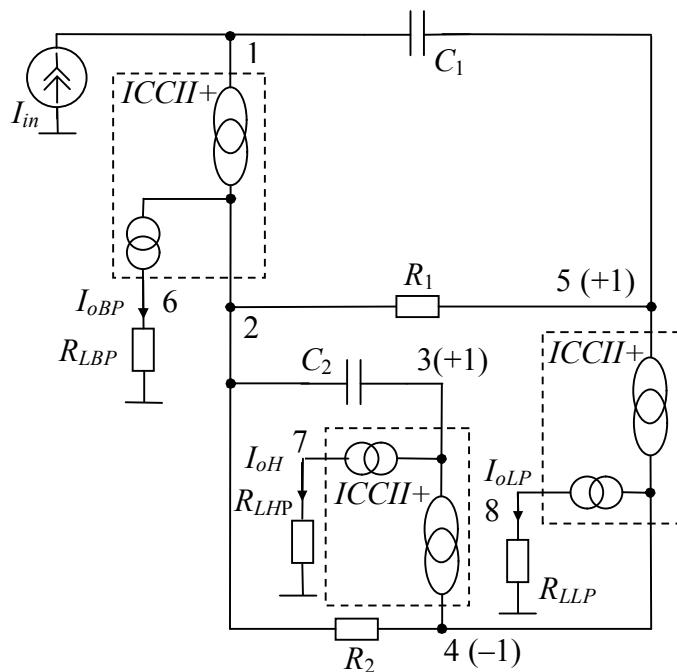


Рис. 16.

Из схемы на рис. 16 видно, что 2 ЗЭН образуют дерево на узлах 3, 4 и 5. Применяя к этому дереву правила пометки узлов, присвоим узлам 3 и 5 пометки (+1), а узлу 4 – пометку (-1). Это дерево эквивалентно дереву, представленному на рис. 6. а, при соответствующей замене номеров вершин. Построив 2 других дерева, соответствующих рис.6 (при сохранении номеров узлов и их пометок), можно получить две новые эквивалентные схемы, в которых один из ЗЭТ заменен нуллатором.

В обеих схемах этот нуллатор будет включён между узлами 3 и 5, имеющими пометку «+1» (рис. 17 и 18). При объединении (спаривании) нуллатора с одним из ЗЭТ мы получим эквивалентные схемы на основе двух ICCII+ и одного CCII+.

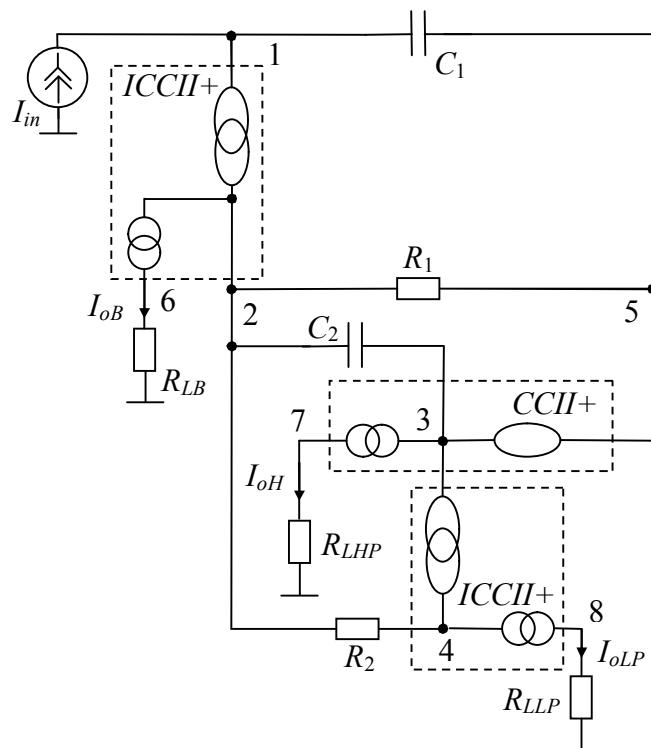


Рис. 17.

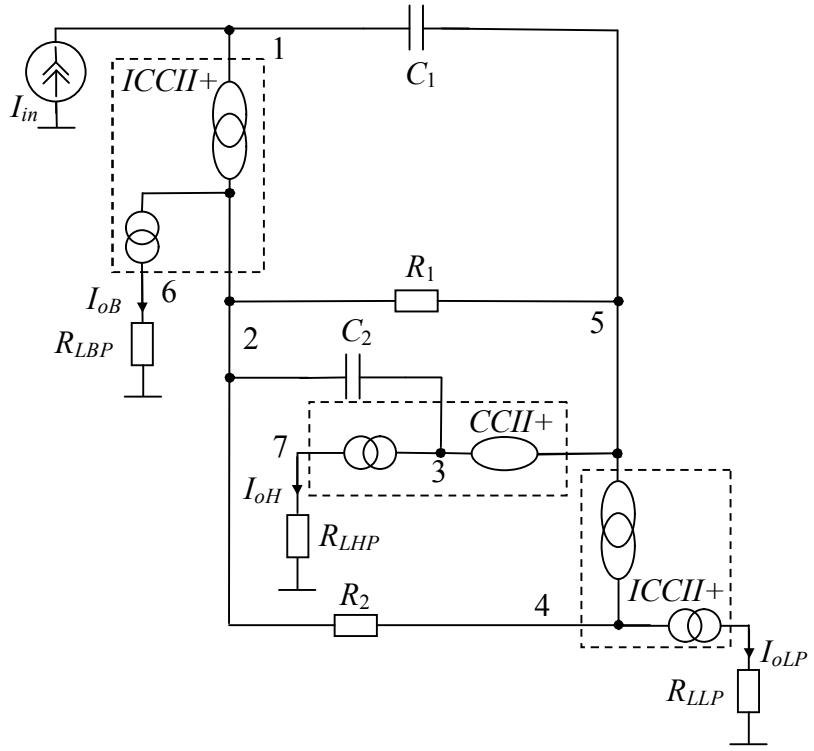


Рис. 18.

Интересно отметить, что схема на рис.18 иллюстрирует также способ спаривания (перенумерации) аномальных элементов для получения схем конверторов тока, отличающихся от исходной схемы.

### Выводы

1. Установлено, что различные незаземленные деревья с подобными зеркальными и нуллорными элементами, в отличие от деревьев с подобными нуллорными элементами не всегда эквивалентны друг другу. Для достижения эквивалентности схем требуется изменение вида аномальных элементов (с зеркального элемента на нуллорный и наоборот). При этом классической нуллорной триаде преобразований нуллорных деревьев соответствует новая зеркально-нуллорная триада преобразований зеркально-нуллорных деревьев.

2. Предложен алгоритм порождения эквивалентных зеркально-нуллорных схем на основе пометок узлов исходного подключения

аномальных элементов, предусматривающий построение всех деревьев на всех узлах порождающего дерева с последующим выбором вида аномальных элементов с учетом пометок соответствующих узлов.

### **Список литературы**

1. Antoniou A. New gyrator circuits obtained by using nullors // Electron. Letters, 1968.– Vol. 4 (Mar).– P. 87–88.
2. Bruton L.T. RC active circuits: theory and design / Englewood Cliffs.– NJ: Prentice-Hall, 1980.
3. Wierzba G.M. Op-Amp Relocation: A Topological Active Network Synthesis. // IEEE Trans. on circuits and systems.– 1986.– Vol. CAS–33, no. 5.– P. 469–475.
4. Haigh D.G. Analytic approach to nullor transformations for FET circuit synthesis: Part I – nullator-norator tree transformations // IEEE Proceedings of the international symposium on circuits and systems (ISCAS).– 2006.– P. 5231–5234.
5. Haigh D.G. Analytic approach to nullor transformations for FET circuit synthesis: Part II – nullator-norator re-pairing and cloning // IEEE Proceedings of the international symposium on circuits and systems (ISCAS). – 2006.– P. 5235–5238.
6. Wang H.Y., Chang S.H., Jeang Y.L., Huang C.Y. Rearrangement of mirror elements // Analog Integr. Circuits signal process.– 2006.– Vol. 49.– P. 87–90.
7. Ozoguz S., A. Toker A., Cigekoglu O. First-order allpass sections-based current mode universal filter using ICCLls // Electronic Letters. – 2000. – Vol.36, no. 17. – P.1443–1444.
8. Wang H.Y., Lee C.T., Huang C.Y. Characteristic Investigation of New Pathological Elements. // Analog integrated circuits and signal processing. – 2005. – Vol. 44, no. 1 (July). – P. 95–102.
9. Filaretov V., Gorshkov K., Mikheenko A. A circuit synthesis technique based on network determinant expansion // Proc. of International Conference on

Synthesis, Modeling, Analysis and Simulation Methods and Applications to Circuit Design (SMACD).— Seville, Spain.— 2012 (Sept.).— P. 293–296.

10. Kumar P., Senani R. Bibliography on nullors and their applications in circuit analysis, synthesis and design // Analog integrated circuits and signal processing. – 2002. – Vol. 33, no. 1 (Oct). – P. 65–76.
11. Davies A.C. Matrix Analysis of Networks Containing Nullators and Norators // Electronic Letters. – 1965. – Vol. 2, no. 2. – P.48–49.
12. Soliman A.M., Saad R.A. The voltage mirror-current mirror pair as a universal element // Int. J. circuit theory Appl.– 2010.– Vol. 38, no. 8 (Oct).– P. 787–795.
13. Sanchez-Lopez C., Fernandez F.V., Tlelo-Cuautle E., Tan S.X.-D. Pathological element-based active device models and their application to symbolic analysis // IEEE Trans. on circuits and systems—I: regular papers.– 2011.– Vol. 58, no. 6.– P. 1382–1395.
14. Sanchez-Lopez C. Pathological equivalents of fully-differential active devices for symbolic nodal analysis // IEEE Trans. on circuits and systems—I: regular papers.– 2013.– Vol. 60, no. 6.– P. 603–614.
15. Ozawa T. Topological conditions for the solvability of linear active networks // Circuit Theory and Applications.– 1976.– Vol. 4.– P. 125–136.
16. Christofides N. Graph Theory: An Algorithmic Approach // Academic Press, 1975.

**Gennadiy Mayko (Майко Геннадий Владимирович)** – канд. техн. наук, Sr. Principal Engineer, Broadcom Corporation, USA. E-mail: gmayko@gmail.com

# ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ НУЛЛАТОРНЫХ И НОРАТОРНЫХ ДЕРЕВЬЕВ ОДНОГО ЗНАКА ДЛЯ ПОРОЖДЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СХЕМ

Г. В. Майко, В. В. Филаретов

*Предложен алгоритм обеспечивающий перечисление ориентированных деревьев только одного знака на основе всех ненаправленных деревьев полного графа, имеющего такое же число узлов как нуллаторное или нораторное дерево в исходной (порождающей) схеме. При этом во всех порождаемых схемах (как и в порождающей схеме) каждому независимому узлу соответствует один и тот же нуллатор или норатор, ориентированный к этому узлу единственным образом. На основе компьютерного моделирования показано, что все порождаемые эквивалентные схемы обеспечивают устойчивость по переходному процессу, и подавляющая часть этих схем имеет частотные характеристики, близкие к характеристикам порождающей схемы.*

*An algorithm providing the enumeration of the oriented trees with the same sign from all undirected trees of the complete graph is proposed. This graph has the same number of nodes as nullator or norator tree in the original circuit. For all generated circuits every node is incident to the same oriented nullator or norator, either entering this node or coming out of this node. Results of computer simulation shows that those new equivalent circuits are stable and mainly have frequency responses close to the characteristics of the original circuit.*

## Эквивалентные преобразования в проектировании.

Эквивалентные преобразования структур позволяют формальным образом получить новые схемы, которые могут иметь (или не иметь) лучшие параметры, чем исходная (порождающая) схема. Сравнив все такие схемы, используя адекватные модели активных и пассивных элементов

(например, используя PSPICE-модели), можно выбрать из них оптимальную.

Кроме того, эквивалентные структуры позволяют легко обойти патентные ограничения. Например, если используется некоторая аналоговая схема, защищённая патентом или авторским свидетельством, то можно получить эквивалентную схему с другим соединением элементов, которая по-прежнему имеет примерно те же, а возможно, и лучшие характеристики и параметры, что и оригинальная.

Так как в основе формулы изобретения является описание соединений элементов, то новая схема с точки зрения патентного законодательства любой страны отличается от оригинальной схемы. Поэтому новую схему можно использовать вместо оригинальной схемы без каких-то ограничений. Более того, новую схему легко запатентовать. Поэтому при патентовании аналоговых схем целесообразно получать все эквивалентные схемы и патентовать их все.

В списке литературы статьи [1] приводятся источники, иллюстрирующие практические преимущества схем, полученных с помощью эквивалентных преобразований. Аналогичные примеры рассмотрены, например, в [2]. С помощью эквивалентных нуллорных преобразований получена схема преобразователя напряжения в частоту, на которую выдано авторское свидетельство СССР [3].

Если нужно работать с оцифрованными аналоговыми сигналами, то без аналоговых фильтров, усилителей, корректоров и т.п. перед АЦП и после ЦАП просто невозможно обойтись, по крайней мере на низких частотах. Однако, рассматриваемые методы синтеза эквивалентных структур вполне можно применять и для аналоговых линейных схем, работающих на высоких частотах. Например, используя эквивалентные нуллорные преобразования, можно получить новую эквивалентную схему фильтра, приведенную в [2].

Для расчетов характеристик и параметров схем, особенно на больших частотах, не всегда оправдано использовать нуллорные модели. Нуллорные эквивалентные преобразования используются, прежде всего,

для формального синтеза новых структур, а вот уже их расчёт и/или моделирование следует проводить с учётом адекватных моделей активных и пассивных схем.

Если используются нуллорные модели, то все параметры эквивалентных схем просто идентичны друг другу, и проводить расчёт в этом случае просто не нужно. В случае использования более сложных моделей активных элементов, как правило, найдётся «эквивалентная» схема, которая будет иметь лучшие характеристики или параметры по сравнению с порождающей схемой.

Учет ориентации нуллоров оказывается важным при переходе от синтезированных схем к практическим реализациям [3]. Поэтому в данной статье предлагается алгоритм порождения схем, эквивалентных не только по модулю, но и по знаку схемного определителя.

### **Порождение эквивалентных нуллаторных деревьев.**

Предположим, что у нас есть известная схема со следующим деревом из нуллаторов (рис. 1).



Рис. 1

Получение эквивалентного нуллаторного дерева, например, со структурой рис. 2 заключается в выборе направлений и нумерации (окраски) нуллаторов во втором дереве.



Рис. 2

Дуги-нуллаторы исходного ориентированного дерева на рис. 1 задаются парами узлов:  $S_1 = \{1-2, 2-3, 3-4\}$ . Ребра заготовки эквивалентного дерева (рис. 2) также кодируются парами узлов в произвольной

последовательности. Причем обозначения номеров указываются в произвольном порядке, например,  $S_2=\{4-3,4-2,1-2\}$ , так как ориентация ребер еще не известна.

Вследствие связности дерева (по определению) в списке ребер второго дерева будут встречаться только: 1) пары, совпадающие с соответствующими парами первого дерева; 2) пары, отличающиеся только одним элементом.

Искомый список ребер формируется при просмотре обоих списков  $S_1$  и  $S_2$  из  $n$  элементов (ребер). Первый список просматривается один раз, а второй –  $n$  раз.

1. Взять элемент  $\{1-2\}$  из  $S_1$ . Аналогичная ему пара дана в конце  $S_2$ . Упорядочения узлов не требуется.  $\{1-2\}$  переносим из  $S_2$  в новый (упорядоченный) список  $S_3$ . Получаем  $S_3=\{1-2\}$ .

2. Взять элемент  $\{2-3\}$  из  $S_1$ . Аналогичной пары нет, но есть пары, содержащие элемент 2 или 3. Возьмем первую попавшую пару. Это  $\{4-3\}$ . В эталонной паре узел 3 стоит на втором месте, поэтому пара  $\{4-3\}$  не требует упорядочения. Отсюда  $S_3=\{1-2,4-3\}$ .

3. Взять элемент  $\{3-4\}$  из  $S_1$ . В  $S_2$  осталась только одна пара  $\{4-2\}$ . Она содержит общий элемент 4 на первом месте, поэтому эту пару следует упорядочить. Получаем  $S_3=\{1-2,4-3,2-4\}$ .

Как видно, результирующий список  $S_3$  отличается от промежуточного списка  $S_2=\{4-3,4-2,1-2\}$  как порядком следования соответствующих ребер, так и положением узлов в соответствующих парах. Это же можно сказать при сравнении списка  $S_3$  со списком  $S_1$ , но эти упорядоченные списки удовлетворяют первому условию эквивалентности деревьев – эквивалентной ориентации дуг. После ориентации дуг на втором дереве (рис.2) имеем ориентированное дерево на рис. 3, где дуги соответствуют ориентированным нуллаторам.

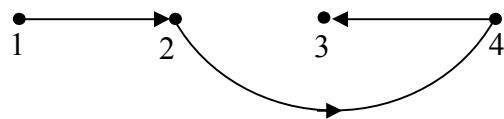


Рис. 3

Для выполнения второго (и достаточного) условия эквивалентности исходного и порожденного дерева, необходимо учесть нумерацию или спаривание нуллаторов (дуг) на обоих деревьях, что удобно выделять цветом. Если дуги исходного дерева окрасить, как показано на рис.4, то в соответствии с порядком элементов в списках  $S_1=\{1-2,2-3,3-4\}$  и  $S_3=\{1-2,4-3,2-4\}$  дуги порожденного дерева примут цвет, показанный на рис.5.



Рис. 4



Рис. 5

Спаривание (раскрашивание) ребер в списках заменяет упорядочение ребер в этих списках, требуемое для выполнения второго условия эквивалентности. Само по себе упорядочение списков в отличие от упорядочения узлов в парах невозможно, поскольку эквивалентные деревья имеют различную структуру, и могут иметь только некоторые (не все!) общие ребра.

Можно рассмотреть другой список ребер второго дерева  $S_2=\{1-2,2-4,3-4\}$ , который не потребует упорядочения узлов в парах. Чтобы убедиться в том, что  $S_2=S_3$ , то есть  $S_2$  будет эквивалентен списку  $S_1$  после упорядочения в соответствии с предложенным выше алгоритмом  $S_2 \Rightarrow S_3$ . Отсюда  $S_3=\{1-2,2-4,3-4\}$ , что соответствует ориентированному дереву, показанному на рис.6, которое соответствует списку  $S_1=\{1-2,2-3,3-4\}$  и раскрашено в соответствии с деревом на рис. 4.

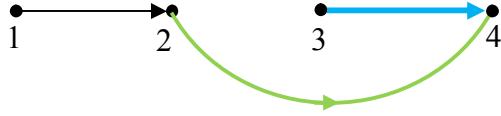


Рис. 6

Списки  $S_3=\{1-2,4-3,2-4\}$  и  $S_3=\{1-2,2-4,3-4\}$  эквивалентны вследствие четного числа изменений: 1) 4-3 на 3-4 (различная ориентация); 2) 4-3 и 3-4 занимают разные места в списке (требуется взаимная перестановка). В дуальном случае, если считать рассматриваемые списки нораторными, а не нуллаторными, эквивалентность обоих упорядоченных списков нораторов исходному списку подтверждается на программе CIRSYM для полной 8-узловой схемы. Нораторы используются в составе  $Q$ -элементов (норатор+зеркальный элемент напряжения). Ниже приведены фрагменты соответствующих cir-файлов:

Список {1-2,2-3,3-4} Q1 1 2 1 0 Q2 2 3 4 3 Q3 3 4 4 5... .end

Список {1-2,4-3,2-4} Q1 1 2 1 0 Q2 4 3 4 3 Q3 2 4 4 5 ... .end

Список {1-2,2-4,3-4} Q1 1 2 1 0 Q2 2 4 4 3 Q3 3 4 4 5... .end

При задании значений проводимостей полной 8-узловой схемы (28 ветвей) порядковыми номерами (от 1 до 28) определители всех трех схем имеют одно и то же значение  $-1.1782144e+07$ .

Теперь рассмотрим случай неэквивалентности деревьев. Для этого исследуем на предмет эквивалентности списку  $S_1$  список  $S_3=\{1-2,4-2,3-4\}$ . Этому списку соответствует ориентированное дерево, показанное на рис. 7.



Рис. 7.

Пара ориентированных деревьев на рис. 4 и рис. 7 неэквивалентна, так как зеленые дуги по-разному ориентированы относительно их общего узла 2. Неэквивалентность пары на рис. 6 и рис. 7 следует из обстоятельства, что дуги между узлами 2 и 4 в обоих деревьях ориентированы противоположно. Таким образом, при выборе того или иного списка ребер, мы задаем нумерацию нуллаторов, которая так же, как и их ориентация, влияет на знак. Теперь наглядно видно, что одноцветные нуллаторы (нуллаторы с одинаковыми номерами) в эквивалентных деревьях должны быть одинаково сориентированы по отношению к общим узлам в различных деревьях. Это является условием эквивалентности ориентированных нуллаторных или нораторных деревьев.

Соответствующее списку  $S_3=\{1-2,4-2,3-4\}$  дерево нораторов в анализированной выше полной 8-узловой схеме (Список {1-2,4-2,3-4} Q1 1 2 1 0 Q2 4 2 4 3 Q3 3 4 4 5 ... .end) приводит к значению определителя, равному  $1.1782144e+07$ , то есть имеющему противоположный знак по сравнению с ранее исследуемыми списками.

При переключении нуллатора через нуллатор не изменяется положение ребра в списке, поэтому ориентация переключаемого нуллатора сохраняется. Операцией переключения можно порождать эквивалентные деревья, но их полный перебор (уже при четырех узлах в дереве!) затруднителен и практически не формализуем. В этом случае второй список ребер не создается, а модифицируется список дуг исходного дерева. При переключении номера узлов в паре не переставляются, а изменяется только один из номеров.

По предложенной методике во втором списке (с упорядочиваемыми парами узлов) ребра перечисляются в произвольном порядке, но именно в этом порядке они получают номера (окрашиваются). Поэтому одинаковые номера (цвета) имеют ребра, идущие в списке под одинаковыми номерами. Очевидно, что компенсировать изменение цветов по влиянию на знак определителя, можно упорядочиванием номеров узлов в парах.

Еще раз рассмотрим два дерева со списками  $S_3=\{1-2,4-3,2-4\}$  и  $S_3=\{1-2,4-2,3-4\}$ . Чтобы перейти от первого дерева ко второму, нужно поменять местами второй и третий элементы списка. Затем необходимо упорядочить номера узлов во втором и третьем элементах списка. Всего требуется три изменения, то есть знак равен  $(-1)^3$ . Следовательно, второе ориентированное дерево неэквивалентно первому и исходному для обсуждаемого примера деревьям.

Это не значит, что список  $S_3=\{1-2,4-2,3-4\}$  не пригоден для построения эквивалентного дерева. Этот, как и два предыдущих, может быть корректно использован для получения эквивалентного ордерева. Для этого воспользуемся все той же предложенной методикой.

Итак, дуги исходного дерева задаются парами узлов:  $S_1=\{1-2,2-3,3-4\}$ . Список ребер, которые необходимо сориентировать, имеет вид:  $S_2=\{1-2,4-2,3-4\}$ . Это еще не список  $S_3$  (с дугами), а выбранная произвольно последовательность ребер! Просматриваем оба списка и упорядочиваем при необходимости пары второго списка.

1. Взять элемент  $\{1-2\}$  из  $S_1$ . Аналогичная ему пара идет первой в списке 2. Упорядочения не требуется.  $\{1-2\}$  переносим из списка 2 в новый (упорядоченный по порядку следования узлов в парах) список. Получаем  $S_3=\{1-2\}$ .

2. Взять элемент  $\{2-3\}$  из  $S_1$ . Аналогичной пары во втором списке нет, но есть пары, содержащие элемент 2 или 3. Возьмем первую попавшую пару. Это  $\{4-2\}$ . В эталонной паре узел 2 стоит на первом месте, поэтому пара  $\{4-2\}$  требует упорядочения. Отсюда  $S_3=\{1-2,2-4\}$ .

3. Взять элемент  $\{3-4\}$  из  $S_1$ . В списке 2 осталась только одна, причем такая же, пара  $\{3-4\}$ . Поэтому эту пару без упорядочения заносим в искомый список  $S_3=\{1-2,2-4,3-4\}$ . Таким образом, сформирован список, соответствующий дереву на рис. 6.

**Перечисление эквивалентных деревьев.** Важно, что дерево, подлежащее эквивалентной ориентации, может быть задано произвольным списком ребер. В примере рассмотрены три таких списка. В результате их упорядочивания по предложенной методике относительно

исходного (эталонного) ордерева, заданного списком дуг  $S_1$ , получаются два списка, содержащие дуги ориентированных деревьев, эквивалентных исходному дереву.

Пусть первым в генераторе деревьев идет исходное дерево. Номера узлов в парах ребер считаются упорядоченными, то есть задают фактическую ориентацию, выбранную на схеме. Все последующие деревья ориентируются по первому дереву с помощью предложенной методики. Таким образом, генератор деревьев становится генератором эквивалентных по знаку ордеревьев, обеспечивающих эквивалентность порождаемых схем.

Такой подход можно использовать в системе синтеза электронных цепей, даже тогда, когда не известна начальная ориентация ребер. Для этого после произвольного выбора некоторого дерева (обычно выбирается «звездное дерево» или «дерево-куст», в которых всё рёбра соединены с одним узлом), определяется ориентация аномальных элементов в этом дереве (например, экспериментальным методом или с помощью программы численного моделирования). Затем по предложенному алгоритму синтезируется эквивалентное дерево с корректной ориентацией элементов в нём, то есть в окончательном виде решается задача реализации практической электронной схемы.

При численном моделировании схем обычно составляется схема на операционных усилителях (ОУ) для программы, например, PSPICE и проверяется работа этой схемы. С помощью предложенного алгоритма могут быть выбраны различные полярности входов ОУ, соответствующие эквивалентным ориентированным деревьям. На экспериментах с Pspice было подтверждено, что большинство таких модификаций структуры обеспечивают работоспособность схемы, но несколько отличающиеся ее свойства.

Подобным исследованиям [1, 3] до сих пор препятствовало отсутствие преобразований ориентированных деревьев. Всегда требовалось проведение неформального анализа. Например, нельзя было изменить ориентацию в производном нуллаторном дереве так, чтобы

заведомо (!) определитель схемы не изменил знака. Даже Браун [4], который первым сориентировал нуллор, рисовал нораторную и нуллаторную триады с обычными ненаправленными нуллорами. По этой причине при анализе с помощью метода схемных определителей (МСО) [5] было нельзя выполнять упрощающие схему (и уменьшающие объем выкладок) преобразования нораторных или нуллаторных деревьев.

**Доказательство алгоритма порождения эквивалентных ордеревьев.** Может быть основано на топологической методике Коутса для нахождения знака определителя полного дерева [6, 7]. Наиболее простая формализация этой методики осуществлена в следующем алгоритме [5].

Нумеруются узлы полного дерева от 0 до  $q-1$ , узел с номером 0 считается базисным узлом. Генератор и приемник (норатор и нуллатор), относящиеся к одному неудаляемому управляемому источнику (нуллору), должны иметь одинаковые порядковые номера. Алгоритм нахождения знака в предлагаемой здесь интерпретации содержит следующие шаги:

1)  $\sigma = 0$ ; 2) для каждого независимого узла  $i = 1, 2, \dots, q-1$  выполнить три операции: а) найти путь от узла  $i$  к узлу 0 в дереве, образованном генераторами; если первый по порядку генератор пути (главный генератор) направлен от базисного узла, то  $\sigma = \sigma + 1$ ; б) найти путь от узла  $i$  к узлу 0 в дереве, образованном приемниками; если первый по порядку приемник пути – главный приемник – направлен от базисного узла, то  $\sigma = \sigma + 1$ ; в) из номеров главных генератора и приемника составить  $i$ -й столбец подстановки  $p$ ; 3) получить число инверсий 1 в подстановке  $p$ ; 4) найти знак определителя полного дерева по формуле  $(-1)^{\sigma+1}$ .

В нашем случае рассматривается только нораторное (из генераторов) или нуллаторное (из приемников) дерево полного дерева, поскольку одно из деревьев (нораторное или нуллаторное) не претерпевает изменений. Поэтому представленное выше правило упрощается. Сформулируем его для нуллаторного дерева.

1)  $\sigma = 0$ ; 2) для каждого независимого узла  $i = 1, 2, \dots, q-1$  найти путь от узла  $i$  к узлу 0 в дереве, образованном нуллаторами; если первый по порядку нуллатор пути (главный нуллатор) направлен от базисного узла, то  $\sigma = \sigma + 1$ ; 3) найти знак определителя нуллаторного дерева по формуле  $(-1)^{\sigma+1}$ .

Однако и этот сокращенный алгоритм избыточен для формирования эквивалентных деревьев, поскольку знак нуллаторного или нораторного дерева находить не нужно – достаточно установить их эквивалентность. Предложенный здесь алгоритм доказывается применением операции стягивания нуллатора [5]. Однаковая ориентация нуллатора в первом дереве и нуллатора во втором дереве по отношению к одному и тому же узлу обеспечивает выделение каждого нуллатора с одним и тем же знаком. Стянув все нуллаторы в обоих деревьях относительно общих узлов, получаем один и тот же знак для каждого нуллаторного дерева. Алгоритм Коутса намного сложнее, поскольку требует прослеживать пути из каждой вершины в корневую вершину.

**Пример 1. Порождение эквивалентных по знаку деревьев из трех нуллаторов.** Эти деревья являются деревьями полного графа с четырьмя узлами, который показан на рис. 8 ,а. Для перечисления деревьев простых графов можно пронумеровать ребра по порядку, начиная с ребер, инцидентным вершинам с меньшим номером, как показано на рис. 8, а. Затем составить список ребер, например, 123456, и по этому списку упорядоченно перечислить все возможные сочетания из числа ребер по  $q-1$  ( $q$  – число узлов): 123, 124, 125, 126, 134, 135, 136, 145, 146, 156, 234, 235, 236, 245, 246, 256, 345, 346, 356, 456. Свойствам дерева удовлетворяют 16 сочетаний из приведенного выше списка, которые изображены на рис. 8, б.

Ребра каждого из 16 деревьев этого ненаправленного графа могут быть ориентированы так, чтобы образовалось 16 эквивалентных ориентированных деревьев. На рис. 8, б ребра деревьев ориентированы единообразно, причем первым следует исходное дерево, порождающее все

последующие ориентированные деревья по предложенному выше алгоритму.

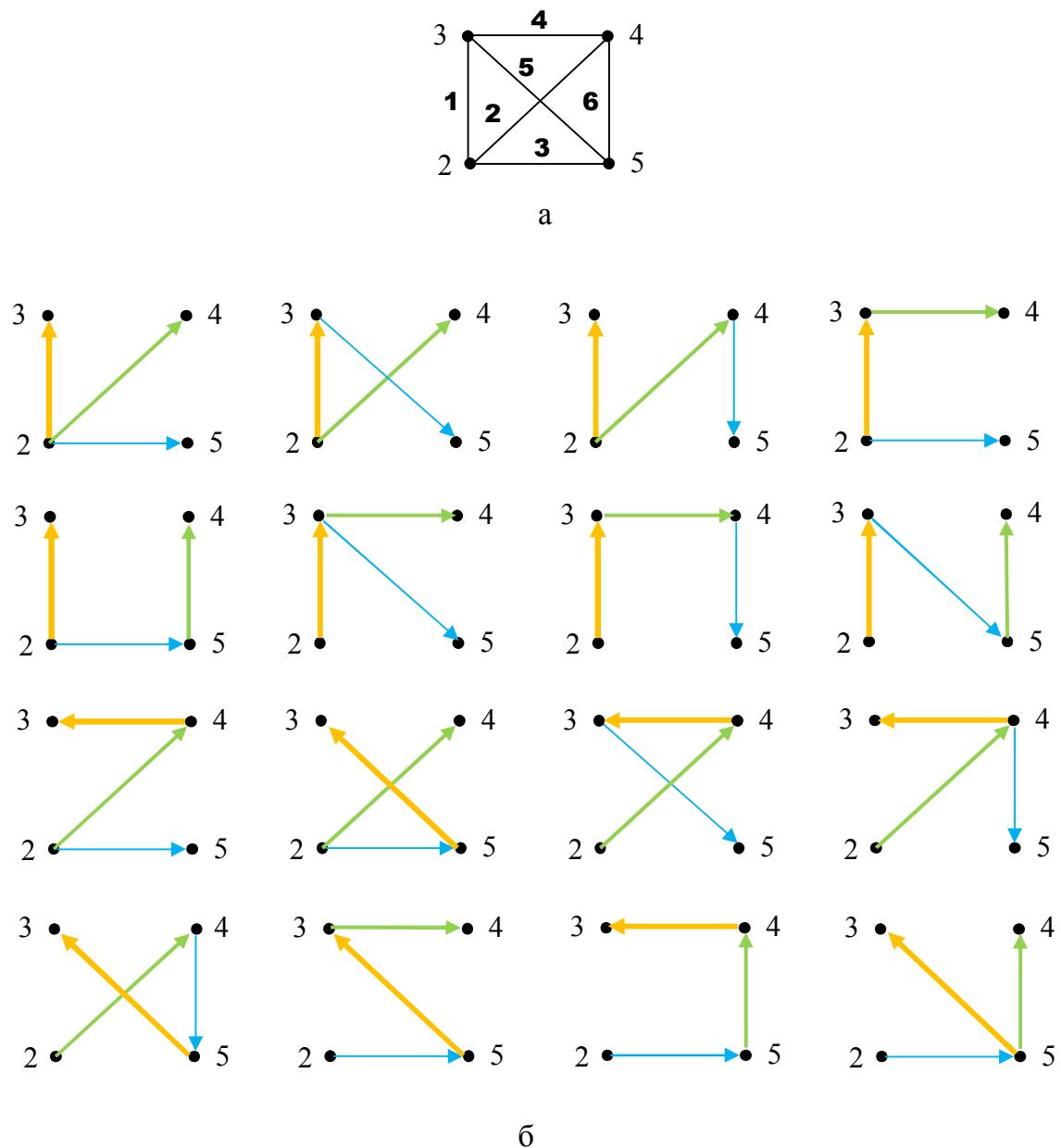


Рис. 8. Полный граф с четырьмя вершинами (а);  
эквивалентные по знаку деревья (б)

**Пример 2. Порождение эквивалентных по знаку деревьев из четырех нуллаторов.** Эти деревья являются деревьями полного графа с пятью узлами, который показан на рис. 9. Ребра каждого из 125 деревьев

этого ненаправленного графа могут быть направлены так, чтобы образовалось 125 эквивалентных ориентированных деревьев.

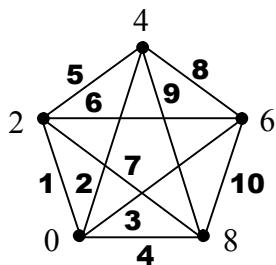


Рис. 9. Полный граф с пятью вершинами и упорядоченной нумерацией ребер

На рис. 10–16 представлены 125 эквивалентных деревьев, причем первым следует исходное дерево, порождающее все последующие ориентированные деревья по предложенному выше алгоритму.

В примерах 1 и 2 порядковая нумерация деревьев соответствует последовательности их перечисления в соответствии с перебором сочетаний ребер из 6 по 3 или из 10 по 4. Первые 8 или 50 деревьев содержат ребро с номером 1, что соответствует показателям участия этих ребер в определителях соответствующих графов (в сумме произведений ребер деревьев).

Ориентированные деревья графов на рис. 8, б и 9 обладают двумя свойствами: 1) во всех деревьях за каждой из небазисных вершин (3, 4, 5 на графике рис. 8, а и 2, 4, 6, 8 на графике рис. 9) закреплен определенный цвет ребер; 2) «закрепленные» ребра во всех деревьях ориентируются одинаково по отношению к соответствующим вершинам.

Например, на рис. 10 дерево 2 отличается от дерева 1 перемещением одной дуги: дуга 80 занимает положение 82. При этом ориентация дуги по отношению к вершине 8 остается неизменной. Дерево 8 отличается от дерева 1 перемещением двух дуг: дуга 80 занимает положение 82 и дуга 06 занимает положение 26. Ориентация всех этих дуг по отношению к вершинам 6 и 8 сохраняется. Базисная вершина 0 занимает особое положение – ориентация ребер по отношению к ней не имеет значения.

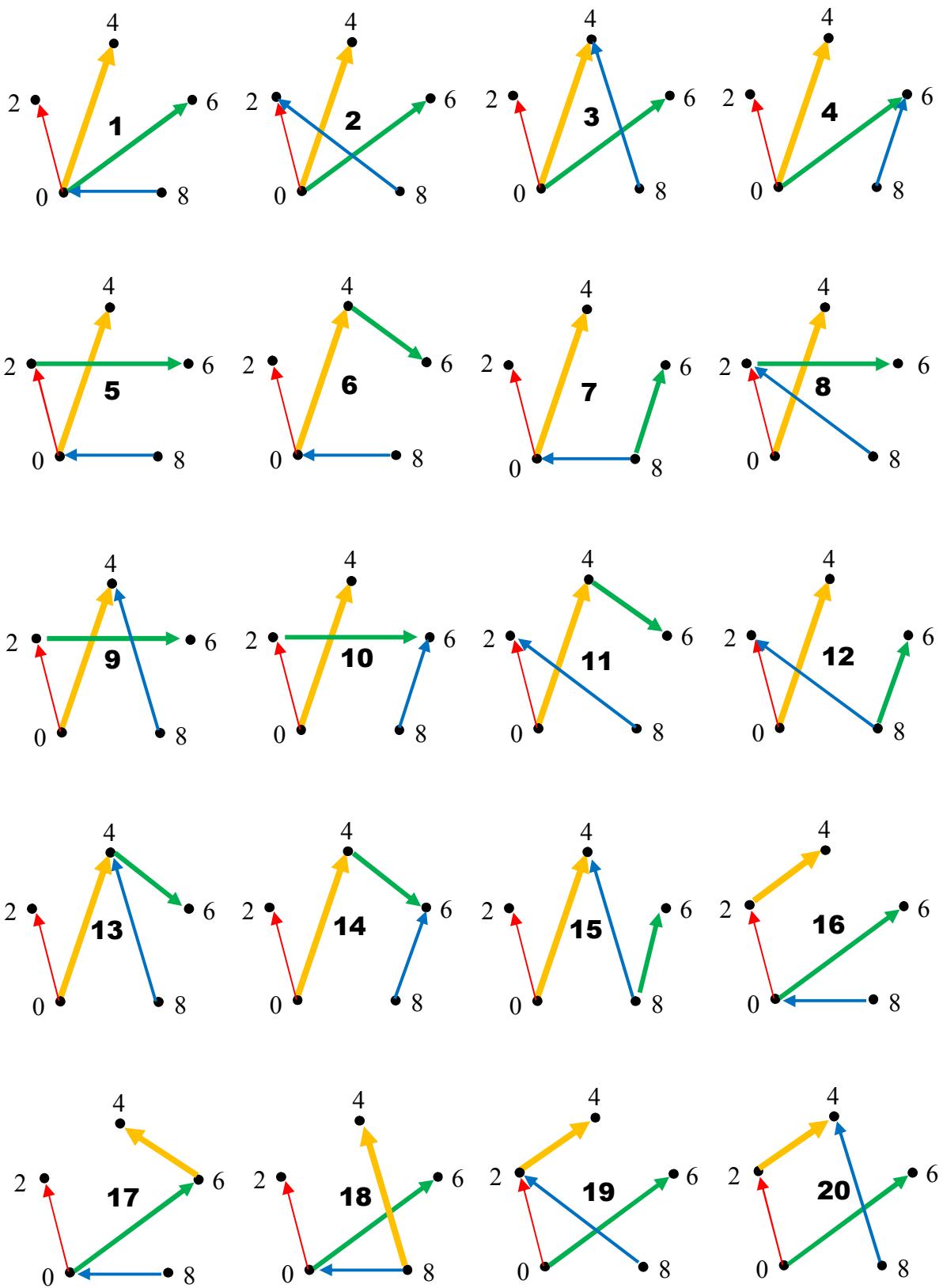


Рис. 10. Эквивалентные деревья 1–20

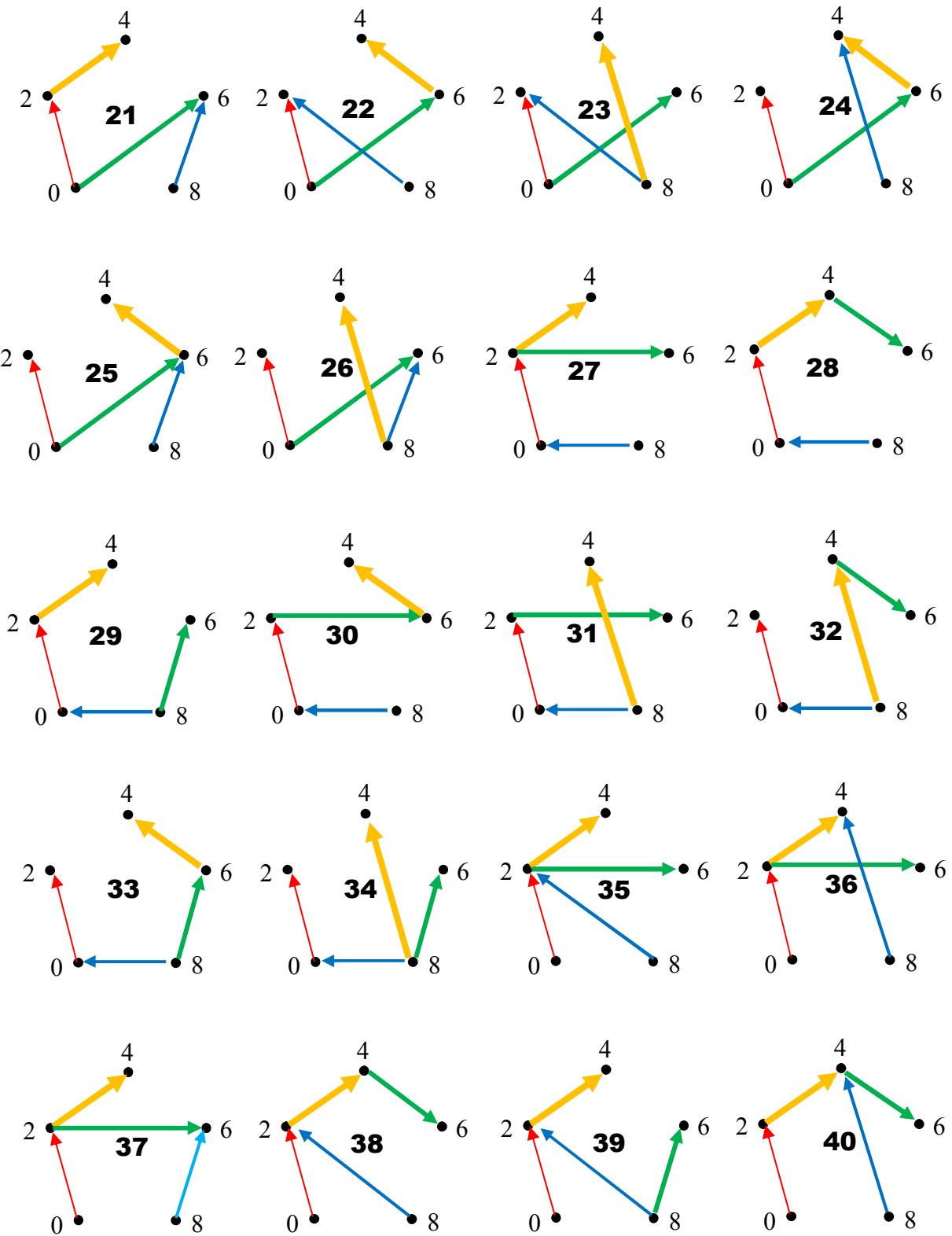


Рис. 11. Эквивалентные деревья 21–40

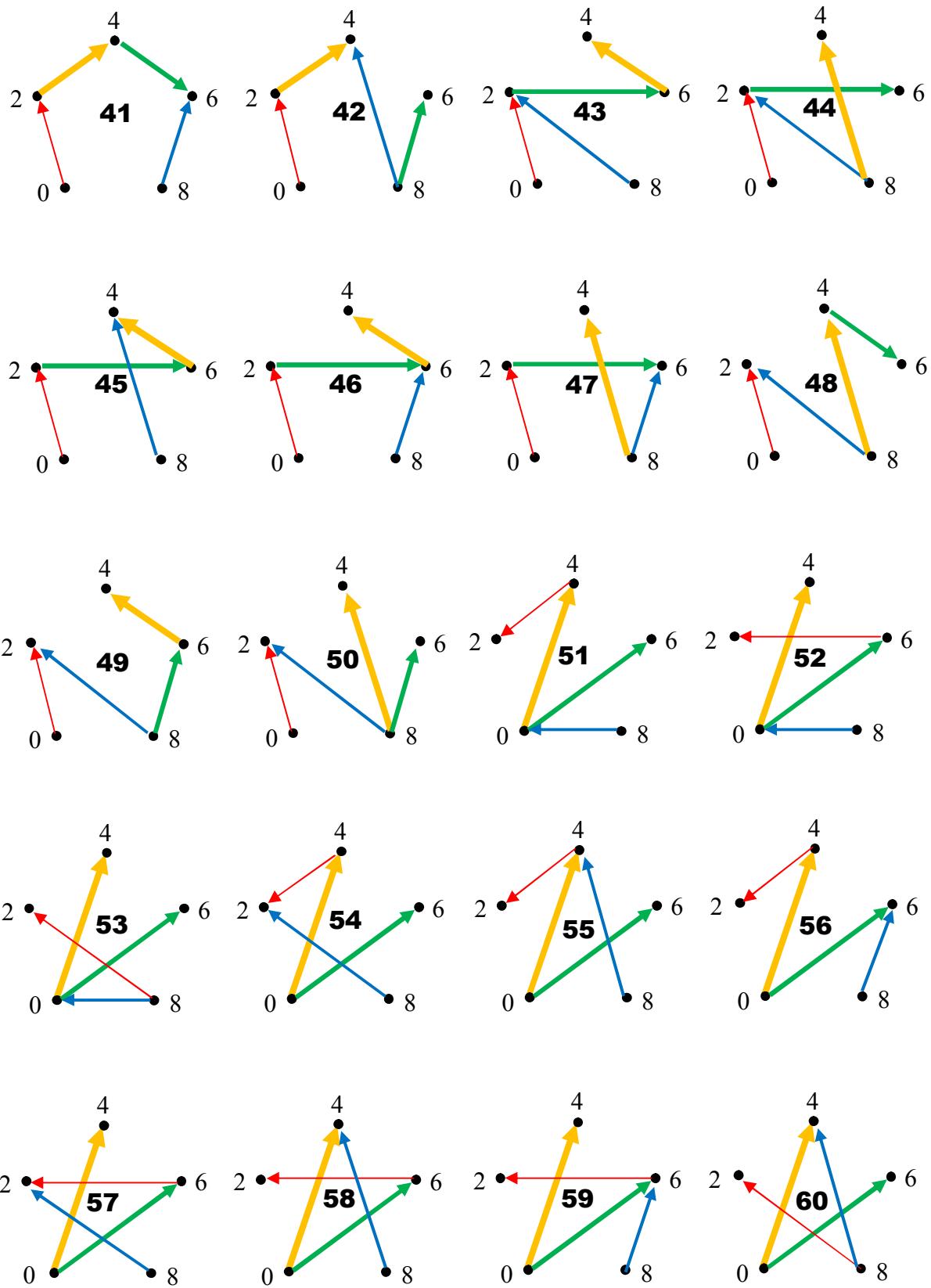


Рис. 12. Эквивалентные деревья 41–60

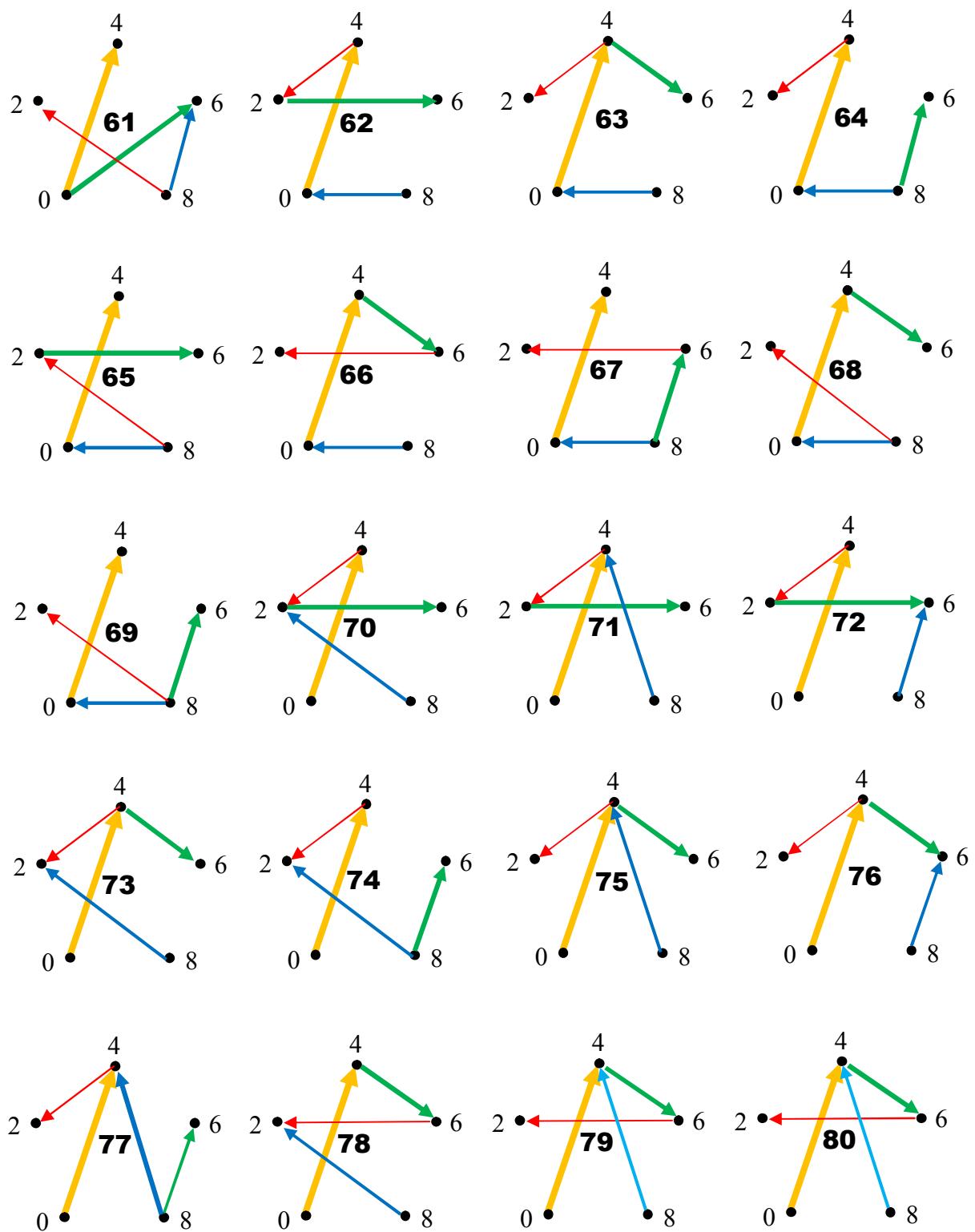


Рис. 13. Эквивалентные деревья 61–80

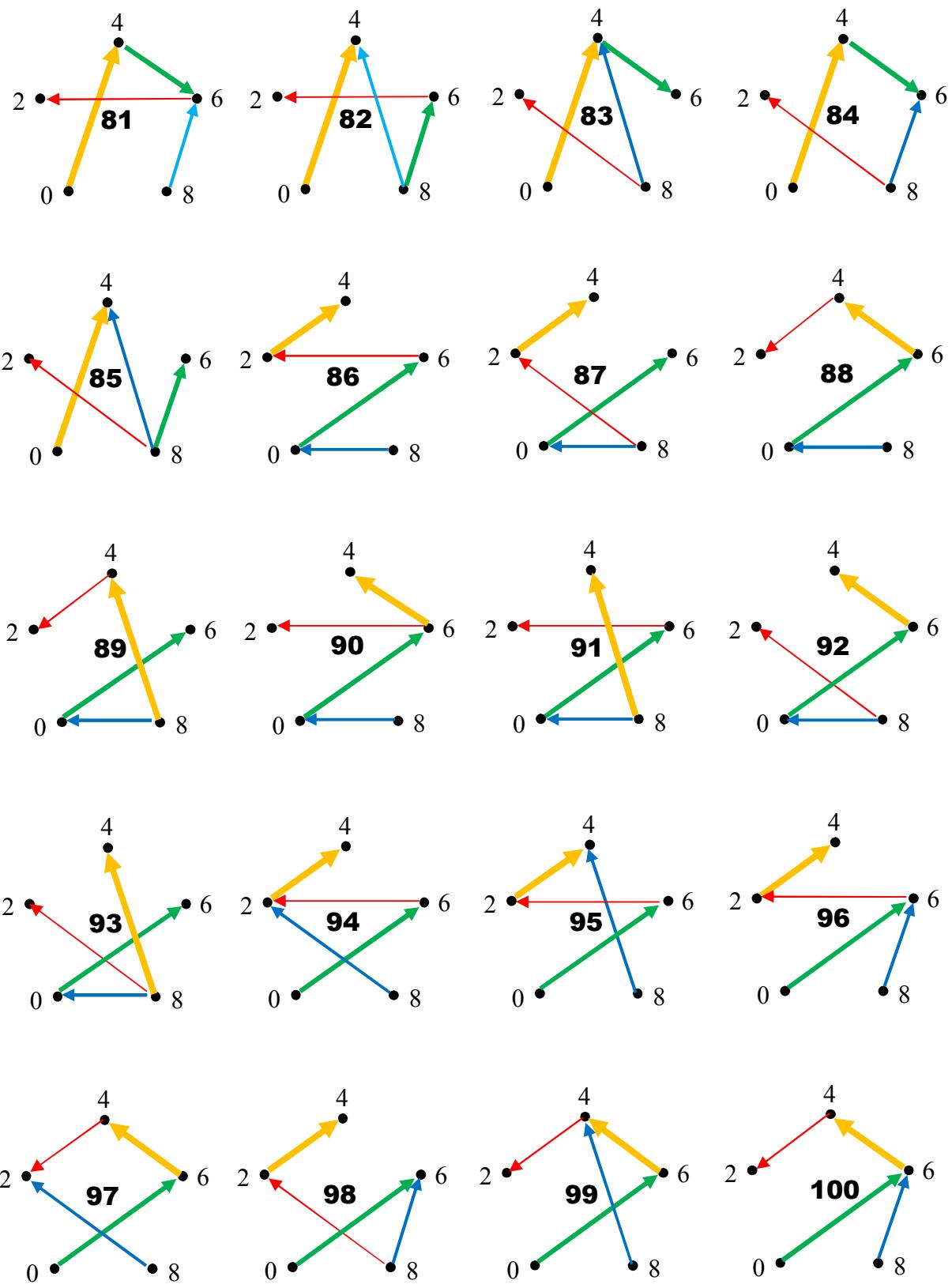


Рис. 14. Эквивалентные деревья 81–100

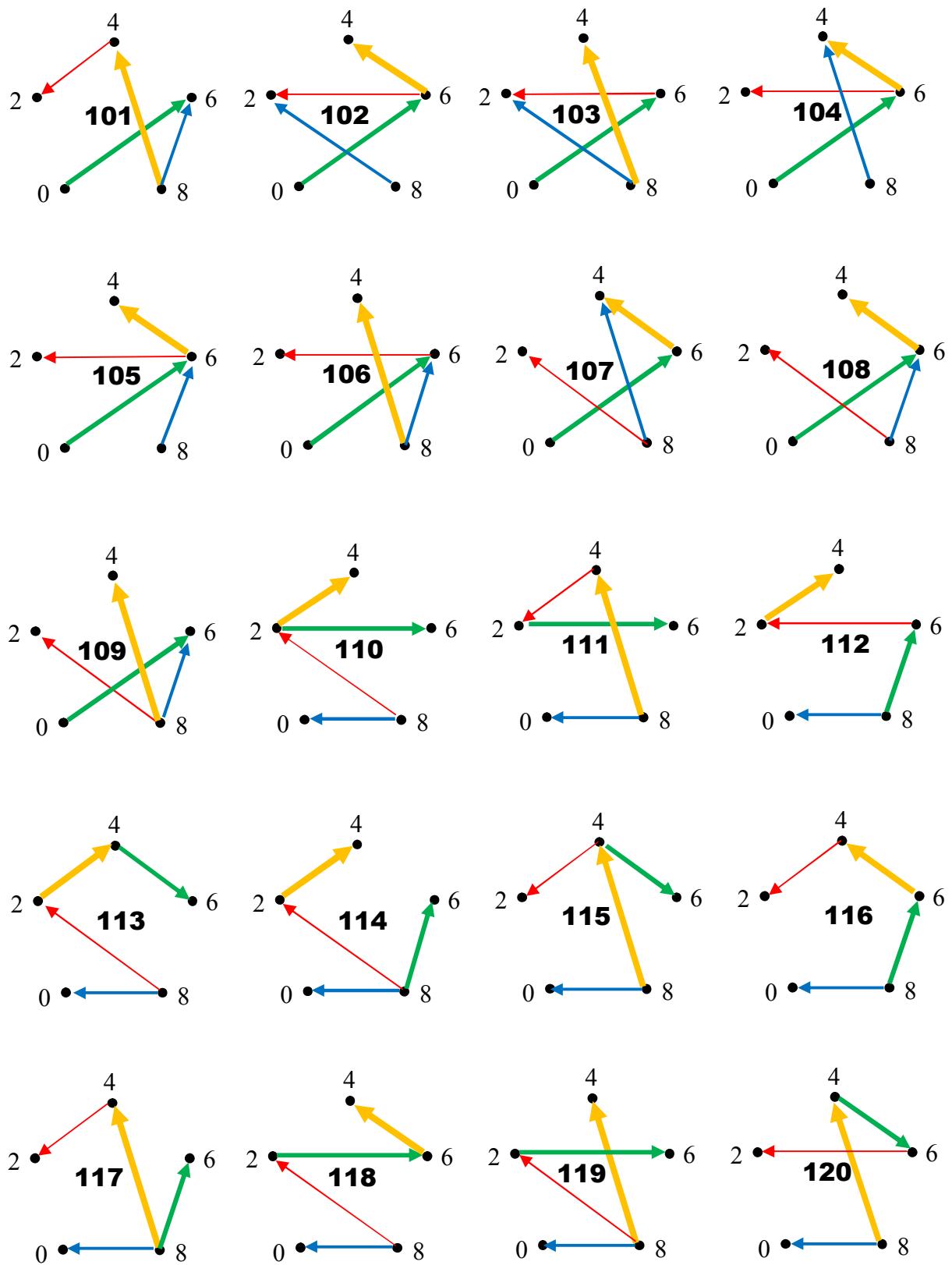


Рис. 15. Эквивалентные деревья 101–120

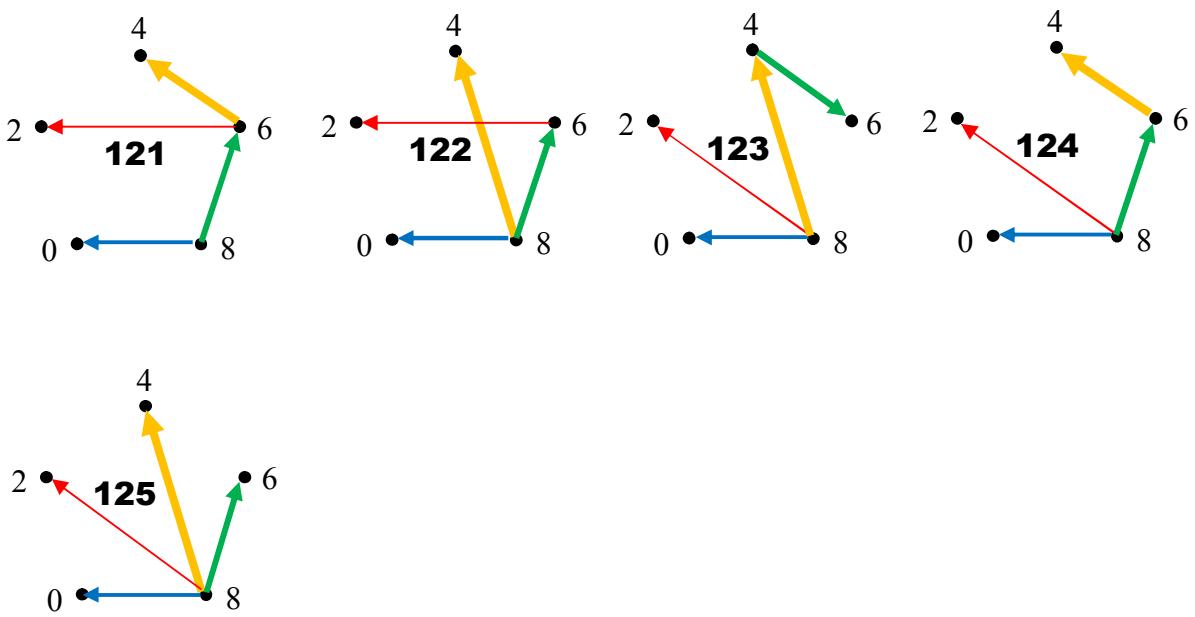


Рис. 16. Эквивалентные деревья 121–125

**Пример 3. Исследование вариантов включения четырех дифференциальных усилителей в схеме фильтра нижних частот.** На рис. 17 изображена схема фильтра, набранная в редакторе программы LTspice IV (Linear Technology, <http://www.linear.com/designtools/software/>). Для экспериментов с различными вариантами включения входов операционных усилителей (ОУ) будет использована эта же программа [8].

Схема на рис. 17 устойчивая, что подтверждает проверка по напряжениям на выходах всех ОУ и по реакции на скачок напряжения на входе. Амплитудно-частотная характеристики (АЧХ) и фазо-частотная характеристика (ФЧХ) этой схемы для указанных на схеме значений параметров представлены на рис. 18. Для используемых ОУ такие типичные характеристики: коэффициент передачи по напряжению  $K=2500000$ , входное сопротивление  $R_{in} = 10^{12}$  Ом, входная емкость  $C_{in} = 3,5^{-12}$  Ф, выходное сопротивление  $R_{out} \sim 0,1$  Ом. ФЧХ изображена на рис. 10 штриховой линией.

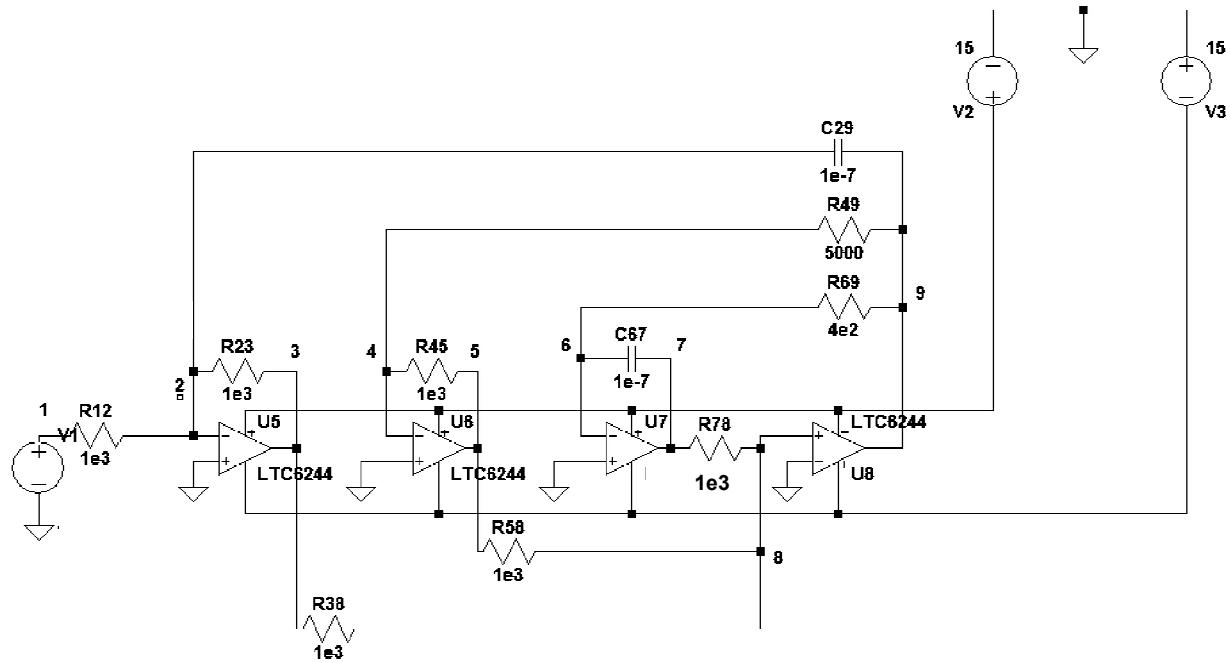


Рис. 17. Схема фильтра нижних частот на четырех дифференциальных усилителях: схема 1 (исходное включение входов ОУ)

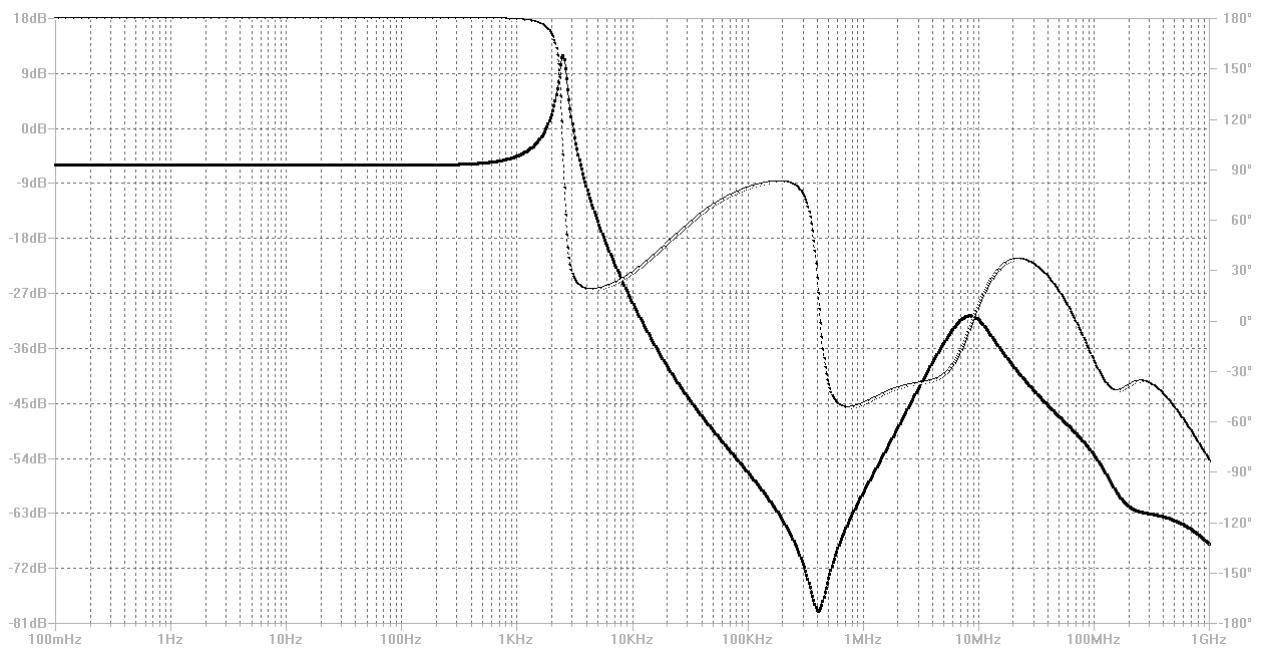


Рис. 18. ФЧХ и АЧХ схемы на рис. 17 (схемы 1)

Как видно, входы ОУ (это нуллаторы) и выходы (это норатор) подключены так: 1) ОУ1: неинвертирующий вход – узел 2, инвертирующий вход – узел 3, выход – 6 и 0; 2) ОУ2: неинвертирующий вход – узел 2, инвертирующий вход – узел 4, выход – 7 и 0; 3) ОУ3: неинвертирующий вход – узел 2, инвертирующий вход – узел 5, выход – 8 и 0. Выход фильтра для АЧХ и ФЧХ – это выход первого ОУ.

Принимается, что в схеме замещения входов ОУ нуллатор направлен от неинвертирующего входа к инвертирующему. Возможность для нахождения эквивалентных вариантов включения ОУ обусловлена тем, что входы образуют дерево из нуллаторов (узлы 0, 2, 3, 4, 5). Есть также дерево из нораторов, но здесь его не рассматриваем.

Итак, исходное дерево из нуллаторов является одним из деревьев полного графа с пятью вершинами, который показан на рис. 9. Ребра каждого из 125 деревьев этого ненаправленного графа могут быть сориентированы так, чтобы образовалось соответствующих 125 ориентированных деревьев, эквивалентных по знаку определителя. Эти деревья перечислены в примере 2 по предложенному алгоритму (рис. 10–16). На рис. 10 под номером 1 показано исходное дерево, соответствующее первоначальной полярности включения ОУ (рис. 17).

**Экспериментальная проверка рекомендуемых вариантов включения.** Каждое из 125 ориентированных деревьев на рис.10–рис.16 представляет собой потенциально правильный вариант включения входов ОУ. Для проверки этого утверждения были получены АЧХ и ФЧХ для первых 51 схем из ряда 1,2,...,125 с помощью программы LTspice IV.

Все исследованные схемы прошли проверку на отсутствие насыщения выходов ОУ и показали устойчивую переходную характеристику при реакции на скачок напряжения. Во всем частотном диапазоне (0–1 ГГц) все схемы имеют идентичные АЧХ. 48 схем (из 51) имеют во всем диапазоне практически одинаковые ФЧХ. Только 3 схемы (2, 11 и 22) имеют аномальный бросок фазы на частоте около 1 МГц.

На рис. 19, рис. 20 и рис. 21 приведены частотные характеристики схем 2, 11 и 22 соответственно, которые, как видно, практически не отличаются по АЧХ и ФЧХ.

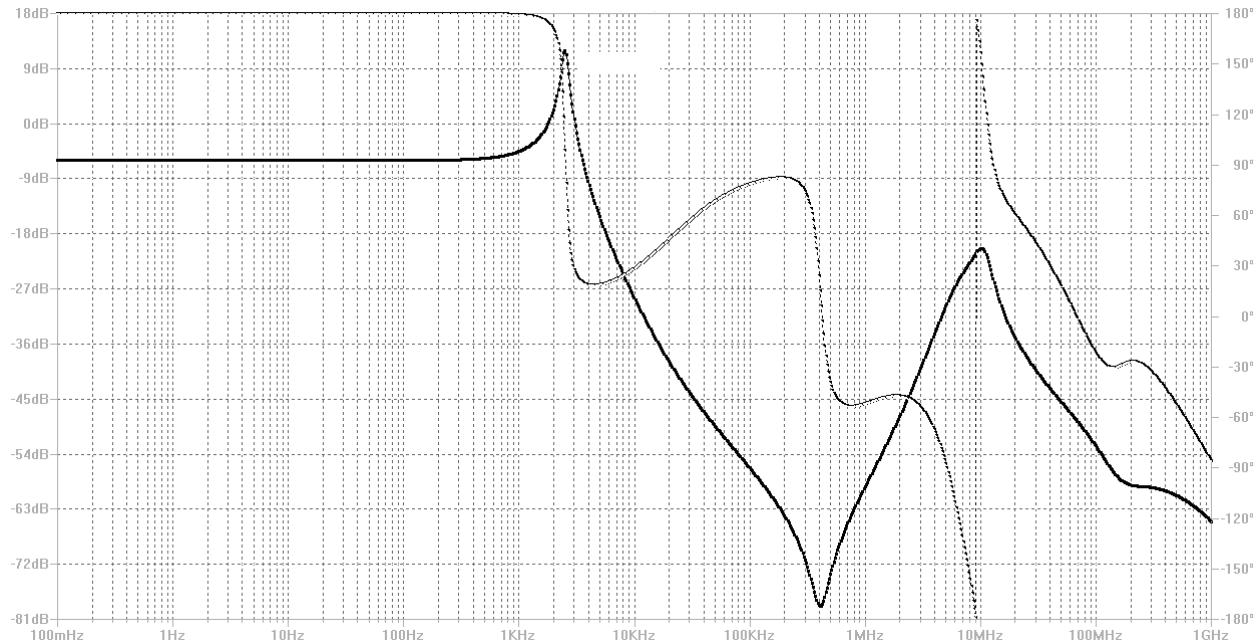


Рис. 19. АЧХ и ФЧХ схемы 2 (с аномальным броском фазы)

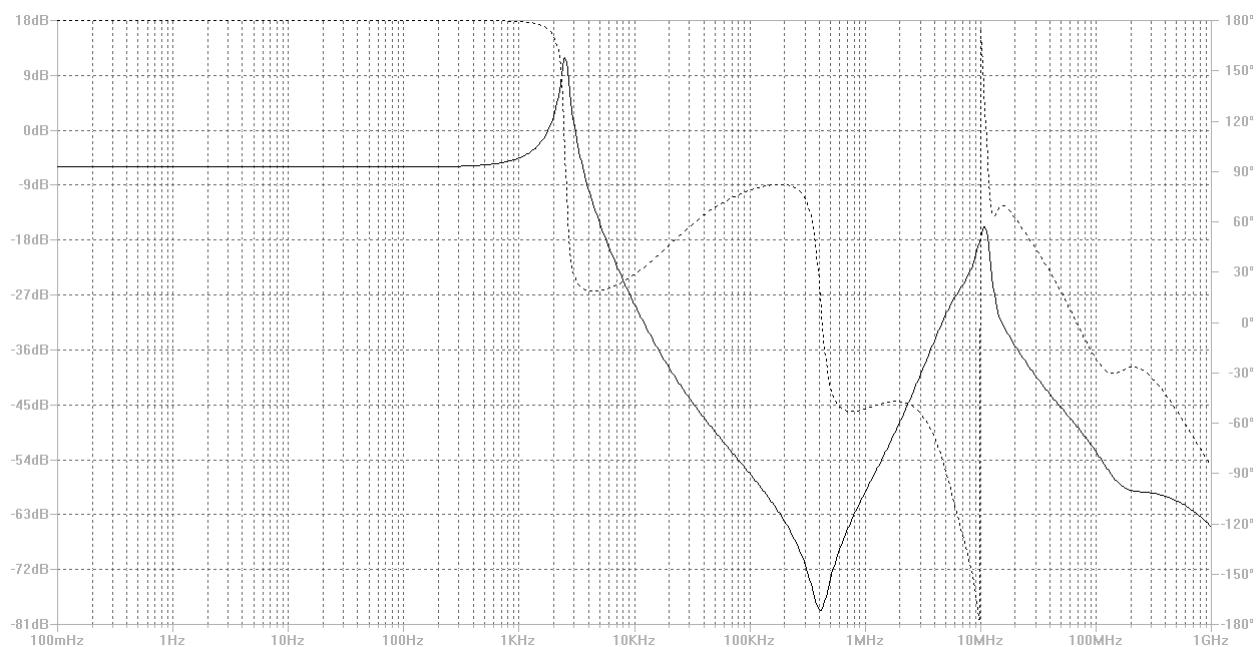


Рис. 20. АЧХ и ФЧХ схемы 11 (с аномальным броском фазы)

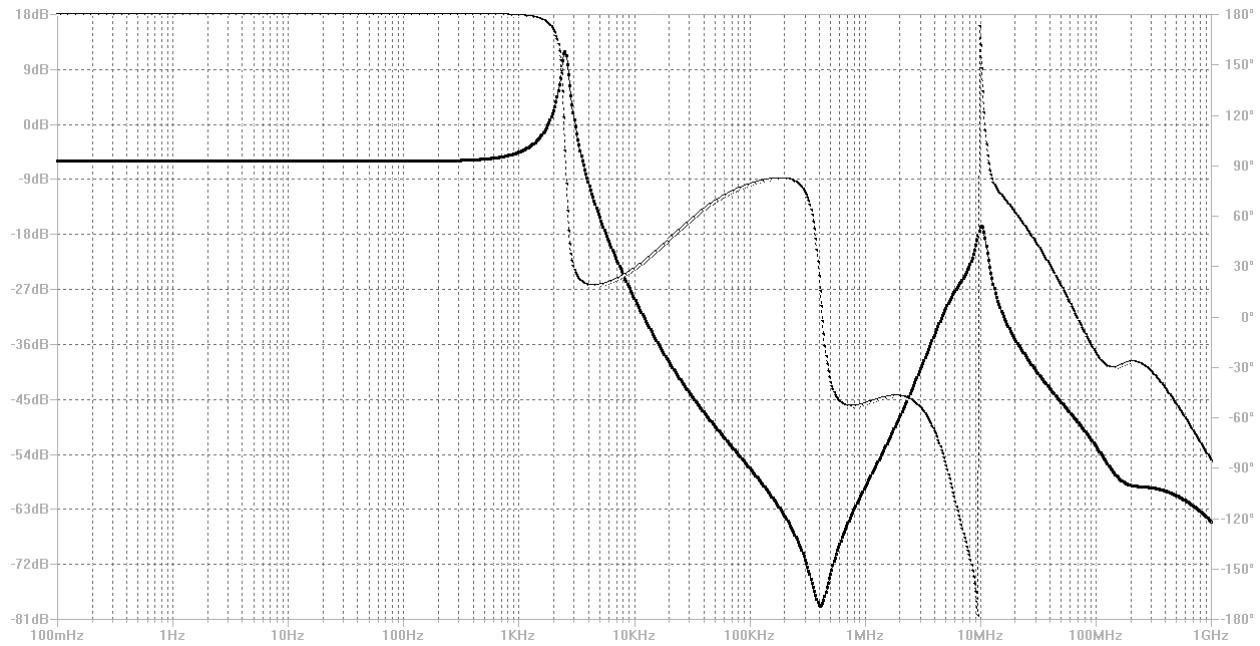


Рис. 21. АЧХ и ФЧХ схемы 22 (с аномальным броском фазы)

**Экспериментальная проверка «неправильных» вариантов включения.** Также выполнялась с помощью программы LTspice IV. В известной мере об устойчивости схемы можно судить по АЧХ и ФЧХ. Для всех схем частоте, на которой АЧХ переходит через единичный коэффициент передачи (0 дБ), соответствует фазовый сдвиг, меньший  $180^0$ . Это значит, что схема устойчивая. Другими словами, все схемы, которые мы рассматриваем, практически полезные. За исключением, конечно, неустойчивых схем, входящих в насыщение. Эта практическая полезность может быть далее уточнена анализом по другим частотным критериям, например, по «open loop gain»-критерию [9], а также по расположению полюсов, чувствительности, запасу по устойчивости и т.п.

Было проведено сравнение рекомендуемых включений ОУ с другими вариантами, предусматривающими как четную, так и нечетную инверсию «правильной» ориентации входов (нуллаторов) согласно рис.10–16. Для этого была взята схема 31 на рис. 17 с вариантом включения входов ОУ, соответствующим ориентированному дереву 31 на рис. 11.

Схема 31 представлена на рис. 22, а ее частотные характеристики показаны на рис. 23. Как видно, характеристики на рис. 18 и рис. 23 достаточно близки, чтобы считать схемы 1 и 31 практически эквивалентными. Теперь рассмотрим все 16 возможных вариантов изменения полярности входов для каждого ОУ в схеме 31.

Каждый вариант схемы 31 показывает изменение полярности подключения входов ОУ (изменение ориентации нуллаторов). Это «битовая» маска ориентации соответствующего входа. Например, вариант 0000 – это исходная схема, в которой все входы ориентированы «правильно». Вариант 0001 – входы первых трёх входов ОУ ориентированы «правильно» (то есть так, как и в исходной схеме), вход четвёртого ОУ ориентирован «неправильно» (то есть противоположно исходной схеме). Вариант 0011 – входы первых двух входов ОУ ориентированы «правильно» (то есть так, как и в исходной схеме), входы третьего и четвёртого ОУ ориентированы «неправильно» (то есть противоположно исходной схеме) и т.д. Результаты экспериментов по изменению полярности входов сведены в табл. 1.

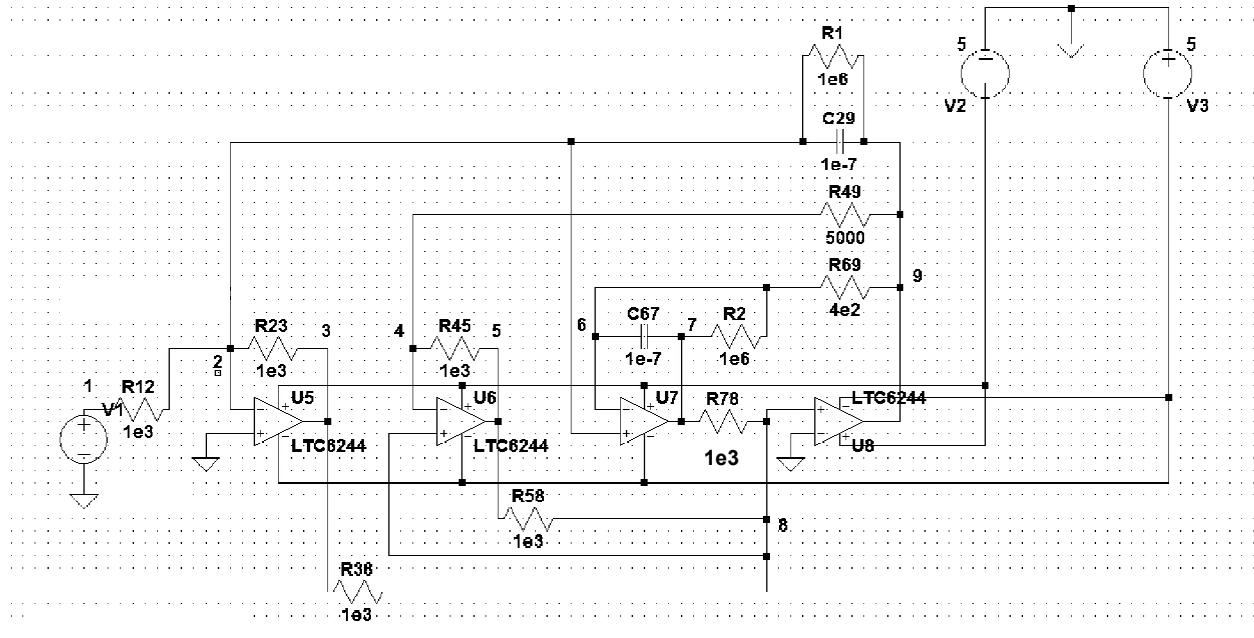


Рис. 22. Схема фильтра нижних частот на четырех дифференциальных усилителях:  
схема 31 (эквивалентное включение входов ОУ)

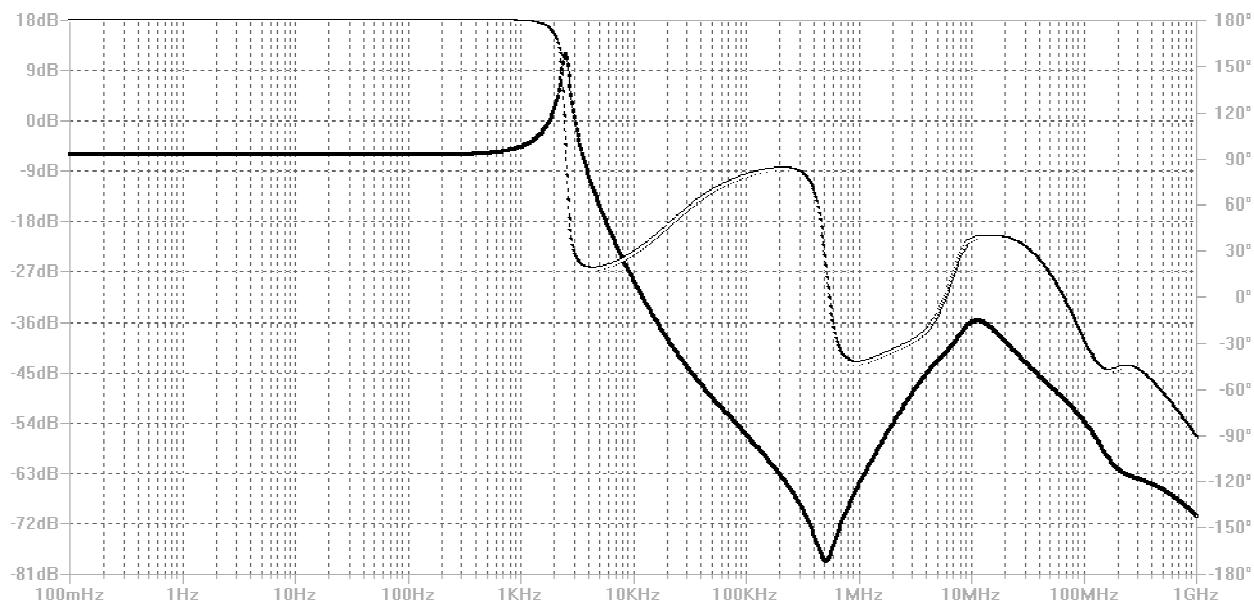


Рис. 23. АЧХ и ФЧХ схемы 31

Таблица 1. Варианты изменения полярности входов ОУ для схемы 31

Вариант включения входов ОУ	Свойства ФЧХ
0000	Исходная эквивалентная схема
0001	Два броска фазы в области 10 МГц, значительное превышение фазы на отрезке 100 кГц–10 МГц
0010	Соответствует ФЧХ исходной схемы
0011	Значительное превышение фазы на отрезке 100 кГц–10 МГц
0100	Соответствует ФЧХ исходной схемы, но неустойчива по «open loop gain»-критерию
0101	Значительное превышение фазы при 100 кГц–10 МГц
0110	Соответствует ФЧХ исходной схемы
0111	Значительное превышение фазы при 100 кГц–10 МГц
1000	Бросок фазы на частоте 100 МГц
1001	Два броска фазы на частотах 10 МГц и 100 МГц, значительное превышение фазы на отрезке 100 кГц–10 МГц
1010	Неустойчивая схема, входит в насыщение
1011	Неустойчивая схема, входит в насыщение
1100	Бросок фазы на частоте 100 МГц
1101	Неустойчивая схема, входит в насыщение
1110	Бросок фазы на частоте 100 МГц
1111	Два броска фазы на частотах 10 МГц и 100 МГц,

**Обсуждение результатов экспериментов.** Устойчивы по переходному процессу и ФЧХ не только подавляющее количество

«правильных» схем, построенных на основе перечисления и ориентации деревьев по предложенному алгоритму. Имеется некоторое количество устойчивых «неправильных» схем, хотя их, как показывает табл.1, немного (2 схемы из 15). Поэтому для оптимального синтеза, при котором необходимо рассматривать все варианты схем, придется исследовать все схемы, правильные и неправильные.

Безусловную правильность схем, порожденных по предложенному здесь алгоритму, опровергают схемы 2, 11 и 22 (рис. 19 – рис. 21). Однако и эти три схемы проходят формальную проверку устойчивости по критерию частоты 0 дБ и меньше  $180^0$  градусов на этой частоте. Проблемы у этих схем могут начаться тогда, когда по каким-то причинам на фазах, больших или равных  $180^0$  (частоты, превышающие  $\sim 10$  MHz), коэффициент усиления вдруг станет большим 1 (0 дБ).

Имеющийся у схемы максимальный коэффициент усиления в этой полосе частот (превышающих  $\sim 10$  MHz):  $-20$  дБ, то есть достаточно большая величина для практики. Это, конечно, существенно больше усиления для идеальных АЧХ (например, для схемы с ИТУН это  $-95$  дБ) и значительно хуже, чем у других правильных схем (у которых фаза вообще не достигает  $180^0$ ). Сложно представить, по какой причине коэффициент усиления может измениться на порядок, да ещё в сторону увеличения. (если, конечно, не используются очень нестабильные и некачественные элементы). Потенциально такие схемы могут привести к проблемам. Тот факт, что 2, 11 и 22 – это правильные схемы, снижает практическую полезность предлагаемого метода порождения эквивалентных схем.

Следует иметь в виду, что эквивалентность по четной инверсии полярностей справедлива только для нуллов. Программа LTspice IV не предусматривает работу с аномальными элементами. Однако изменение полярности входов при работе с неидеальными ОУ ( $K=2500000$ ) некорректно, поскольку соответствует замене всех или некоторых входов приемниками напряжения (на которые четная инверсия не распространяется). Очевидно, этим объясняется парадоксальный факт, что

одна из годных схем в табл. 1 – 0010 имеет нечетную инверсию, а другая – 0110 – четную.

Таким образом, перечислив по предложенному алгоритму правильные схемы, следовало бы включить в список потенциально хороших схем-кандидатов и неправильные схемы с четным и нечетным числом перестановок, прошедшие предварительную проверку.

Передаточная функция схемы, полученная при использовании недостаточно точных математических моделей элементов схемы, не дает полного представления об устойчивости схемы. Однако частично избавиться от этого недостатка нуллорного моделирования активных элементов можно, учитывая структурные признаки неустойчивости [10–12]. Например, если в схеме имеется хотя бы один ОУ, не охваченный отрицательной обратной связью по постоянному току, то схема неустойчива и, следовательно, неработоспособна. Выявление неустойчивых схем сводится к нахождению цепочек обратной связи для каждого ОУ, которые включают в себя нечетное число ОУ [10, 13].

Почему все без исключения правильные схемы устойчивы по переходному процессу? Очевидно, потому, что сохраняется полярность по отношению к узлам 2, 4, 6 и 8 во всех 125 деревьях: у первых трех ОУ это минус, а у последнего ОУ – плюс. Это свойство порождаемых схем следует рассматривать в качестве структурного признака устойчивости. Не исключено, что обнаруженный здесь этот признак устойчивости связан с охватом каждого ОУ отрицательной обратной связью, если в качестве порождающей схемы используется заведомо устойчивая схема.

Важность перечисления нуллаторных и нораторных деревьев, эквивалентных по знаку схемного определителя, обусловлена и тем, что матричный аппарат не в полной мере учитывает специфику электронных цепей. Так, по знаку определителя матрицы узловых проводимостей или контурных сопротивлений нельзя судить об устойчивости частотно-независимых цепей [14, 15], хотя знак схемного определителя [5] отражает эту фундаментальную характеристику активной электрической цепи [15].

## **Выводы**

Самое простое решение для порождения нуллаторных (нораторных) деревьев, обеспечивающих эквивалентность схемы по знаку определителя следующее. 1. Рассматриваются два дерева: ориентированное и неориентированное. 2. Нумеруются попарно **имеющие один или два общих узла** нуллаторы (нораторы) в обоих деревьях. 3. Нуллаторы (нораторы) в неориентированном дереве ориентируются по отношению к общим узлам согласно ориентации соответствующих нуллаторов (нораторов) в ориентированном дереве.

Известные алгоритмы позволяют перечислять ориентированные деревья, и только затем можно определить их знак. Предложенный алгоритм обеспечивает перечисление ориентированных деревьев только одного знака на основе всех ненаправленных деревьев полного графа, имеющего такое же число узлов как исходное нуллаторное или нораторное дерево.

Во всех порождаемых схемах каждому независимому узлу (кроме базисного узла) соответствует один и тот же нуллатор или норатор, ориентированный к этому узлу единственным образом. Компьютерное моделирование показало, что все эквивалентные схемы, порождаемые по выявленному структурному признаку, обеспечивают устойчивость переходного процесса, и подавляющая часть этих схем имеют частотные характеристики, близкие к характеристикам порождающей схемы.

## **Список литературы**

1. Wierzba G.M. Op-Amp Relocation: A Topological Active Network Synthesis. // IEEE Trans. on circuits and systems.– 1986.– Vol. CAS–33, no. 5.– P. 469–475.
2. Ng G., Lai B., Liu P., Voinigescu S.P. 1 GHz Opamp-Based Bandpass Filter // Si Monolithic Integrated Circuits in RF Systems: Technical Digest.– 2006 (Jan).– P. 369–372.
3. Кельбас Д.Н. Оптимальное проектирование активных фильтров для систем управления и контроля: Дис. канд. техн. наук (05.13.05).– Одесса, 1994.

4. Braun J. Topological analysis of networks containing nullators and norators // Electronics letters.– 1966.– Vol. 2, No. 11.– P. 427–428.
5. Филаретов В.В. Топологический анализ электрических цепей на основе схемного подхода: Дис. ... докт. техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Московский энергетический институт (техн. ун-т).– М., 2002.– 264 с.
6. Coates C.L. General topological formulas for linear network functions // Circuit theory.– 1958.– Vol. CT–5, N 3.– P. 42–54.
7. Сешу С., Рид М.Б. Линейные графы и электрические цепи.- М.: Высш. шк., 1971.– 448 с.
8. Svoboda J.A., Wierzba G.M. Using PSPICE to determine the relative stability of RC active filters // Proc. of the 35th Midwest Symposium on Circuits and Systems (9–12 Aug 1992).– 1992.– Vol. 2.– P. 1102–1105.
9. Middlebrook R.D. Measurement of loop gain in feedback systems // Int. J. Electronics.– 1975.– Vol. 38, no. 4.– P. 485–512.
10. Хорошевский А. Н. Автоматизация синтеза линейных активных *RC*-схем с операционными усилителями: Дис. ... канд. техн. наук. Харьков, 1984.– 197 с.
11. Мигулин Н.Н., Чаповский М.Э. Интегральные схемы в радиоэлектронных устройствах. К.: Техника, 1978.– 232 с.
12. Подольский Л.Э. Об одном методе коррекции высокодобротных фильтров, основанном на эквивалентных преобразованиях //Радиотехника и электроника.– 1977.– Т. 22, № 8.– С. 1742–1744.
13. Свищева Э.А., Хорошевский А.Н. К автоматизации структурного синтеза *RC*-схем с операционными усилителями / Харьковский ин-т радиоэлектроники.– К., 1984. 33 с.– Деп. в УкрНИИНТИ 06.08.84, № 183 УК-84.
14. Хайнлейн В.Е., Холмс В.Х. Активные фильтры для интегральных схем.– М.: Связь, 1980.– 656 с.
15. Hoang S. About the stability of frequency-independent networks // CAS.– 1985.– Vol. CAS–32, N 9.– P. 970–973.

# **АНАЛИЗ И ОПТИМИЗАЦИЯ ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

## **О СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ КИРХГОФА ДЛЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ЦЕПИ**

И. В. Ерохов

*Рассмотрена оригинальная система уравнений Кирхгофа для анализа электрических цепей. Показаны некоторые преимущества этой системы: ясный физический смысл и разреженность математической модели; удобство проверки баланса мощностей, облегчение учета всех типов управляемых источников и простота применения более общей теоремы Теллегена.*

*Discusses the original equation system by Kirchhoff for the analysis of electric networks. Shows some advantages of this system: a clear physical sense and sparseness of the mathematical model; convenience check the balance of power, facilitating of the accounting for all types of controlled sources; ease of use of the more general theorem by Tellegen.*

В статье [1] Г. Кирхгоф предложил математическую модель электрической цепи, которую он рекомендовал для схем любого размера. Сложность математической задачи вынуждала автора записывать уравнения в строго упорядоченной форме:

«Поскольку теоремы 1 и 2 должны дать необходимое число уравнений для определения величин  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , эти уравнения, как было доказано выше, должны иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
\alpha_1^1 w_1 I_1 + \alpha_2^1 w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^1 w_n I_n &= \alpha_1^1 E_1 + \alpha_2^1 E_2 + \dots + \alpha_n^1 E_n \\
\alpha_1^2 w_1 I_1 + \alpha_2^2 w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^2 w_n I_n &= \alpha_1^2 E_1 + \alpha_2^2 E_2 + \dots + \alpha_n^2 E_n \\
&\dots \\
\alpha_1^\mu w_1 I_1 + \alpha_2^\mu w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^\mu w_n I_n &= \alpha_1^\mu E_1 + \alpha_2^\mu E_2 + \dots + \alpha_n^\mu E_n \\
\alpha_1^{\mu+1} I_1 + \alpha_2^{\mu+1} I_2 + \dots + \alpha_n^{\mu+1} I_n &= 0 \\
\alpha_1^{\mu+2} I_1 + \alpha_2^{\mu+2} I_2 + \dots + \alpha_n^{\mu+2} I_n &= 0 \\
&\dots \\
\alpha_1^n I_1 + \alpha_2^n I_2 + \dots + \alpha_n^n I_n &= 0
\end{aligned} \tag{1}$$

где часть коэффициентов  $\alpha$  равна +1, часть –1 и 0...».

Уравнения (1) составлены только для независимых узлов и контуров. Число тех и других связано формулой Эйлера:

$$\mu = n - m + 1, \tag{2}$$

где  $\mu$  – число независимых контуров графа,  $n$  и  $m$  – число его ветвей и узлов соответственно. Как видно из (1), каждое уравнение Кирхгофа рассматривает как самостоятельное, их не объединяет скобка. В действительности, здесь имеются две подсистемы уравнений.

Как правило, в учебниках избегают приводить эту систему уравнений в том виде, который предлагал учёный. В первоисточнике [1] система уравнений Кирхгофа записана в общем виде, а размер цепи не установлен специально, чтобы сохранить выбранный уровень общности рассуждений. По этой причине преимущества его математической модели не были замечены большинством читателей, и многие специалисты даже не ставили задачи исследовать предложенную математическую модель.

То, что плохо видно за символами громоздкой математической записи, можно сделать очевидным при рассмотрении простого примера.

Ниже приводятся уравнения Кирхгофа для схемы рис. 1, составленные в соответствие с принципами, изложенными в работе [1]. Вектор неизвестных (вынесен из системы уравнений) содержит токи соответствующих ветвей.

$$\begin{bmatrix} R_1 & 0 & -R_3 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 & 0 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & R_6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^b \\ I_2^b \\ I_3^b \\ I_4^b \\ I_5^b \\ I_6^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Матрица уравнения (3) квадратная и состоит из двух блоков:

- 1) верхний блок представляет собой систему уравнений схемы рис. 1, составленных по второму закону Кирхгофа; 2) нижний блок является матрицей узловых инциденций схемы рис.1.

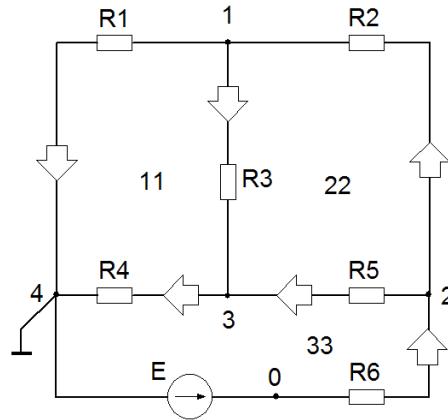


Рис. 1. Схема моста Уинстона.

Двойственная форма системы уравнений (3) записана ниже:

$$\begin{bmatrix} g_1 & -g_2 & g_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 & 0 & g_5 & -g_6 \\ 0 & 0 & -g_3 & g_4 & -g_5 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^b \\ U_2^b \\ U_3^b \\ U_4^b \\ U_5^b \\ U_6^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Матрица уравнения (4) квадратная и состоит из двух блоков: 1) верхний блок представляет собой систему уравнений схемы рис. 1, составленных по первому закону Кирхгофа; 2) нижний блок является матрицей контурных инциденций схемы рис. 1.

Вектор неизвестных (вынесен из системы уравнений) содержит напряжения соответствующих ветвей.

Зададим параметры резисторов и источника схемы рис.1:  $R_1 = 10 \text{ Ом}$ ;  $R_2 = 15 \text{ Ом}$ ;  $R_3 = 20 \text{ Ом}$ ;  $R_4 = 25 \text{ Ом}$ ;  $R_5 = 30 \text{ Ом}$ ;  $R_6 = 35$ .  $E = 20 \text{ В}$ .

Подставим эти данные в систему уравнений (3):

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & -20 & -25 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 20 & 0 & -30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 30 & 35 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Применяя метод Крамера, получаем решение:

$$I_1 = \frac{44500}{165625} = 0,268679 \text{ А}; \quad I_2 = \frac{43000}{165625} = 0,259623 \text{ А};$$

$$I_3 = \frac{-1500}{165625} = -0,00906 \text{ А};$$

$$I_4 = \frac{19000}{165625} = 0,114717 \text{ А}; \quad I_5 = \frac{20500}{165625} = 0,123774 \text{ А};$$

$$I_6 = \frac{63500}{165625} = 0,383396 [\text{А}].$$

Обычно, матрицу сопротивлений, которую на практике используют для нахождения токов ветвей, получают при составлении уравнений методом контурных токов. Эта систему уравнений в численном виде:

$$\begin{bmatrix} 55 & -20 & -25 \\ -20 & 65 & -30 \\ -25 & -30 & 90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Интересно, что определитель матрицы уравнения (6) численно равен определителю матрицы из уравнения (5):

$$\det \begin{bmatrix} 55 & -20 & -25 \\ -20 & 65 & -30 \\ -25 & -30 & 90 \end{bmatrix} = 165625.$$

Сравнивая матрицы из уравнений (5) и (6), можно убедиться в том, что они совершенно не похожи друг на друга, однако обе матрицы описывают схемуодной и той же структуры, а числа в их ячейках имеют одну и ту же размерность  $[Om]$ . Вероятно, именно по этой причине значения детерминант этих матриц равны.

Предположим, что параметры всех элементов, входящих в матрицу (3), равны единице. Реализация этого изменения превращает верхний блок матрицы в матрицу контурных инциденций, однако структурных изменений в матрице (3) не происходит. Таким образом, мы можем утверждать, что число слагаемых определителя системы остается прежним, но слагаемые определителя также равны единице. В таком случае, значение определителя системы дает нам число слагаемых определителя. Такое же значение мы получаем из преобразованной матрицы (6):

$$\det \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 16.$$

Матрица уравнения (4) и вектор правой части (в численном виде) представлены ниже:

$$\left[ \begin{array}{cccccc} 0,1 & -0,066666 & 0,05 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,066666 & 0 & 0 & 0,033333 & -0,028571 \\ 0 & 0 & -0,05 & 0,04 & -0,033333 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] ; \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0,571428 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right] \quad (7)$$

Определитель матрицы (7) равен  $\Delta = -0,002103143$ , а напряжение первой ветви по методу Крамера равно 2,686797 В. Так как узел 4 этой ветви заземлен, то найденное значение равно потенциалу узла 1.

Обычно, матрицу проводимостей, которую на практике используют для нахождения напряжений ветвей, получают при составлении уравнений методом узловых потенциалов. Приведем эту систему уравнений в численном виде:

$$\left[ \begin{array}{ccc} 0,216666 & -0,066666 & -0,05 \\ -0,066666 & 0,128570 & -0,033333 \\ -0,05 & -0,033333 & 0,123333 \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0,571428 \\ 0 \end{array} \right] \quad (8)$$

Определитель матрицы из уравнения (8) равен 0,002103143, а потенциал первогоузла, определенный по методу Крамера, равен – 2,686798 В. Сравним значение потенциала узла 1 с величиной напряжения первой ветви, полученное из уравнения (7).

Итак, запишем уравнения (3), (4) в общем виде:

$$[K_r][\bar{I}^b] = [\bar{E}], \quad (9)$$

$$[K_g][\bar{U}^b] = [\bar{J}], \quad (10)$$

где  $[K_r]$  – матрица сопротивлений Кирхгофа;  $[\bar{I}^b]$  – вектор токов ветвей;  $[\bar{E}]$  – вектор источников ЭДС;  $[K_g]$  – матрица проводимостей Кирхгофа;  $[\bar{U}^b]$  – вектор напряжений ветвей;  $[\bar{J}]$  – вектор источников токов.

Уравнения (9), (10) справедливы также при использовании матриц инциденций, составленных с использованием только одного условно положительного направления – направления тока ветви. Такие матрицы принято называть фундаментальными.

Существуют обратные матрицы любой из матриц Кирхгофа, поэтому значения переменных уравнений (9), (10) могут быть найдены с помощью выражений:

$$[\bar{I}^b] = [K_r]^{-1} [\bar{E}], \quad (11)$$

$$[\bar{U}^b] = [K_g]^{-1} [\bar{J}]. \quad (12)$$

Уравнения (11), (12) в численной форме (кроме источников) приводятся ниже:

$$\begin{bmatrix} 0,029887 & 0,015396 & 0,013434 & 0,701132075 & 0,470189 & 0,411321 \\ 0,015396 & 0,026113 & 0,012981 & -0,15396226 & 0,45434 & 0,060377 \\ -0,01449 & 0,010717 & -0,00045 & 0,14490566 & -0,01585 & -0,35094 \\ -0,01645 & -0,00242 & 0,005736 & 0,164528302 & 0,200755 & 0,445283 \\ -0,00196 & -0,01313 & 0,006189 & 0,019622642 & 0,216604 & -0,20377 \\ 0,013434 & 0,012981 & 0,01917 & -0,13433962 & -0,32906 & -0,1434 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,268679 \\ 0,259623 \\ -0,00906 \\ 0,114717 \\ 0,123774 \\ 0,383396 \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} 7,011334 & 4,701901 & 4,113215 & 0,298867 & 0,153961 & 0,134338 \\ -2,30943 & 6,815182 & 0,905669 & 0,230943 & 0,391698 & 0,194717 \\ 2,898119 & -0,31698 & -7,01888 & -0,28981 & 0,214338 & -0,00906 \\ 4,113215 & 5,018884 & 11,1321 & -0,41132 & -0,06038 & 0,143395 \\ 0,588686 & 6,498199 & -6,11322 & -0,05887 & -0,39396 & 0,18566 \\ -4,7019 & -11,5171 & -5,01888 & 0,47019 & 0,454341 & 0,670945 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ J \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,68679776 \\ 3,894385954 \\ -0,18113284 \\ 2,867930601 \\ 3,713253114 \\ -6,58118371 \end{bmatrix}.$$

Число фундаментальных матриц инциденций равно числу деревьев в графе схемы. В случае графа схемы рис.1 количество деревьев равно 16-ти. Приведем фундаментальные матрицы графа схемы рис.1 для дерева с ветвями 1, 4, 6:

1) Узловая фундаментальная матрица инциденций  $[A_f]$

	1	4	6	2	5	3
1	1	0	0	-1	0	1
3	0	1	0	0	-1	-1
2	0	0	1	-1	-1	0

Заметим, что нумерация столбцов матрицы определяется выбранным деревом графа. Номера первых столбцов соответствуют ветвям дерева, а остальные три столбца – ветвям-связям. Строки обозначаются номерами узлов, а порядок их присвоения – алгоритмом построения фундаментальной матрицы.

2) Контурная фундаментальная матрица инциденций  $[B_f]$

	1	4	6	2	5	3
(1,2,6)	1	0	1	1	0	0
(4,5,6)	0	1	1	0	1	0
(1,3,4)	-1	1	0	0	0	1

Строку матрицы обычно обозначают номером контура схемы. В нашем случае, не все контура, включенные в матрицу, пронумерованы на рис.1. Поэтому вместо номера контура индексом служит множество ветвей соответствующего контура.

В качестве примера приведем уравнение (3), в которое входят фундаментальные матрицы инциденций:

$$[K_r] = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & R_6 & R_2 & 0 & 0 \\ 0 & R_4 & R_6 & 0 & R_5 & 0 \\ -R_1 & R_4 & 0 & 0 & 0 & R_3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1^b \\ I_2^b \\ I_3^b \\ I_4^b \\ I_5^b \\ I_6^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E \\ E \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

или в численном виде

$$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 35 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 35 & 0 & 30 & 0 \\ -10 & 25 & 0 & 0 & 0 & 20 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \Delta = -165625, \Delta_1 = -44500, I_1 = 0,268679.$$

Обобщим результаты рассмотрения математической модели электрической цепи, полученные при анализе описания простого примера. Отмечалось, что матрицы Кирхгофа состоят из двух блоков, составленных по законам Кирхгофа. Запишем уравнения (3), (4) в компактном виде:

$$\begin{bmatrix} B_f^r \\ A_f^r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{I}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{E} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} A_f^g \\ B_f^g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{J} \\ \bar{0} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где  $\begin{bmatrix} B_f^r \\ A_f^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_f \\ A_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{R} \end{bmatrix}$  – верхний блок матрицы уравнения (14);

$\begin{bmatrix} A_f^g \\ B_f^g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_f \\ B_f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{g} \end{bmatrix}$  – верхний блок матрицы уравнения (15).

Для составления уравнений (14), (15) на схеме выбирается фундаментальное дерево, отвечающее известным требованиям [2]. По этому дереву находятся фундаментальные матрицы инциденций. Вектор источников ЭДС (тока) записывается по схеме.

Проверим баланс мощностей:

$$\begin{bmatrix} \bar{I}^b \end{bmatrix}^t = [0,268679 \quad 0,259623 \quad -0,00906 \quad 0,114717 \quad 0,123774 \quad 0,383396];$$

$$\begin{bmatrix} \bar{U}^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,68679776 \\ 3,894385954 \\ -0,18113284 \\ 2,867930601 \\ 3,713253114 \\ -6,58118371 \end{bmatrix}; \quad \sum_1^6 P_i^b = 4,43778E-06;$$

## **Выводы**

1. Системы уравнений Кирхгофа составляются по основным законам теории электрических цепей, поэтому физический смысл математической модели цепи предельно ясен.
2. Матрицы систем уравнений обладают большим количеством нулевых ячеек, что позволяет применять эффективные алгоритмы преобразования матриц на компьютере [3].
3. С помощью переменных уравнений Кирхгофа  $\{I_i^b\}$ ,  $\{U_i^b\}$  легко убедиться, что баланс мощностей в электрической цепи выполняется:

$$\sum_1^6 P_i^b = [\bar{I}^b]^t [\bar{U}^b] = 0.$$

4. Относительно переменных уравнений Кирхгофа сформулирована известная теорема Зеляха-Теллегена [4], [5].

## **Список литературы**

1. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов // Избранные труды Г.Кирхгоф. – М.: Наука, 1988. – С. 170–178.
2. Stern T.E. On the equation of Nonlinear Networks // IEEE Transaction on Circuit Theory. – 1966. – Vol. CT-13, №1.– P. 74–81.
3. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. – М.: Мир, 1977. – 189 с.
4. Зелях Э.В. Основы общей теории линейных электрических схем. – М.: Изд. АН СССР, 1951. – 334 с.
5. Tellegen B.D.H. A general network theorem, with applications // Philips Res. Rept., 1952.– Vol.7 (august). – P. 259–269.

**Ерохов Игорь Васильевич** – профессор Запорожского Классического Приватного Университета (Украина), кандидат технических наук.  
E-mail: [yerokhov@bigmir.net](mailto:yerokhov@bigmir.net).

# ФОРМУЛЫ ДЛЯ АНАЛИЗА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ СХЕМНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

А. В. Бондаренко, С. А. Курганов, В. В. Филаретов

Предлагаются схемно-минорные формулы для нахождения полиномиальных функций относительной чувствительности в виде отношения степенных полиномов по комплексной частоте. Такие функции формируются непосредственно по исходной схеме и требуют наименьшего количества операций. Ключевые слова: относительная чувствительность, схемная функция, определитель схемы, дробно-рациональная функция, степенной полином.

*Offers compact circuit-minor formulae for finding polynomial functions of relative sensitivity in the form of the relation of power polynomials on the complex frequency. Such functions are formed directly on the original circuit and require the least amount of operations. Keywords: relative sensitivity, circuit function, the determinant of the circuit, fractional-rational function, the power polynomial.*

**Методы анализа чувствительности.** Функции чувствительности схемных функций широко используются при моделировании и оптимизации электро- и радиоаппаратуры [1]. Классическая – относительная – чувствительность комплексной схемной функции  $F$  по параметру  $a$  определяется формулой [2]

$$S_a^F = \frac{\partial F}{\partial a} \frac{a}{F}. \quad (1)$$

Аналитическая операция дифференцирования в (1) приводит к появлению громоздких выражений с взаимно сокращающимися сомножителями и слагаемыми. Численное дифференцирование обладает

низкой точностью, поскольку основано на вычитании чисел, отличающихся в последних разрядах.

Обойтись без дифференцирования позволяют косвенные методы нахождения функций чувствительности – на основе билинейной теоремы, по передаточным функциям и уравнениям для переменных состояния, с помощью матрицы рассеяния и направленных графов [3], резольвенты матрицы узловых проводимостей (матрицы узловых сопротивлений) [1]. Классические методы [3] требуют в общем случае построения трех передаточных функций, например, от входа к рассматриваемому элементу, от элемента к выходу и от входа к выходу. Для нахождения чувствительности, например, коэффициента передачи напряжения по формуле на основе резольвенты [1] необходимо раскрыть определитель и 8 миноров матрицы узловых проводимостей.

Численное нахождение определителей и миноров для каждой частоты и параметра является трудоемкой задачей. Поэтому наибольшее распространение получил метод присоединенной схемы, который позволяет найти численные значения частных производных исследуемой функции по всем параметрам элементов для одной фиксированной частоты путем анализа двух схем – исходной и присоединенной [4].

В случае многих значений частоты более эффективным, чем метод присоединенной схемы, оказывается символьный метод [4, с. 532], который позволяет найти чувствительность в видедробно-рациональной полиномиальной функции. Численные коэффициенты при степенях полинома могут иметь любую, наперед заданную точность, что исключает погрешность расчета, обусловленную высокой чувствительностью определителей и миноров к изменению полиномиальных коэффициентов [1]. Число алгебраических операций и точность вычислений уменьшаются далее за счет скобочного представления полиномов при их компактной свертке [5, с. 41]. Полиномиальная функция эффективна не только для численных расчетов, но и для символьных (численно-символьных) исследований, поскольку имеются соответствующие аналитические методы [14].

Однако «схема упорядочения» [4] основана на выполнении трудоемких операций развертывания вспомогательного выражения, содержащего числитель и знаменатель исследуемой схемной функции и сортировки слагаемых. Использование минорных формул, содержащих определитель и три алгебраических дополнения (минора) матрицы контурных сопротивлений или узловых проводимостей [2] приводит к громоздким выражениям с многочисленными взаимно уничтожающимися слагаемыми.

Применение топологического метода контуров передачи [6], избавляет от избыточности, но этот метод весьма трудоемок и не формализован для анализа схем с управляемыми источниками. Эти недостатки преодолены в методе схемных определителей, позволяющим находить чувствительность через определители исходной схемы и производных от нее схем [7].

Недостатком формул чувствительностей [6,7] является наличие произведений определителей (миноров) в числителе и в знаменателе. Это препятствует получению функции чувствительности в виде степенных полиномов по комплексной частоте. В данной статье предлагается использование метода схемных определителей для вывода полиномиальных функций чувствительности в компактном виде без дополнительных трудоемких операций обработки символьных выражений.

**Схемно-минорные формулы для чувствительности, содержащие отношение двух схемных определителей.** Минорная формула для относительной чувствительности функции передачи напряжения  $K$  по проводимости  $u$  имеет вид [6]

$$S_Y^K = -\frac{YN_{13}N_{32}}{ND}, \quad (2)$$

где  $N_{13}$  и  $N_{32}$  – числители передаточных функций от стороны 1 многополюсника на рис. 1,а к стороне 3 и от стороны 3 к стороне 2 соответственно;  $N, D$  – числитель и знаменатель функции  $K = \underline{U}/\underline{E}$ .

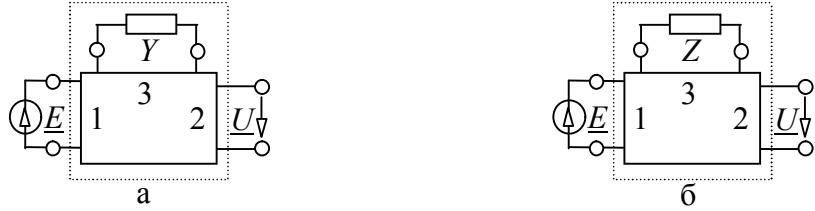


Рис. 1. Схемы с проводимостью (а) и сопротивлением (б)

В минорной формуле (2) алгебраические дополнения  $N_{13}$ ,  $N_{32}$ ,  $N$  и определитель  $D$  могут быть заменены по методу схемных определителей на соответствующие схемные определители (миноры) [7]. Схемы для алгебраических дополнений  $N_{13}$ ,  $N_{32}$ ,  $N$ , которые являются числителями передаточных функций, получаются из исходной схемы путем замены источника и ветви отклика норатором и нуллатором соответственно. Схема определителя  $D$  формируется из исходной схемы с учетом нулевого параметра независимого источника. В результате получается следующая схемно-минорная формула чувствительности [8]

$$S_y^K = -Y \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \left/ \left( \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \right) \right), \quad (3)$$

где парами вертикальных линий показаны определители соответствующих схем – миноры исходной схемы; сплошными и пунктирными линиями обозначены многополюсники из рис. 1, а.

Формула (3) позволяет путем рекурсивного выделения элементов по методу схемных определителей (МСО) получить символьное выражение чувствительности без взаимно сокращающихся слагаемых, имеющих место при матричном разложении определителей. Недостатком формул вида (2) и (3) является, как уже отмечалось, наличие произведений определителей (миноров) как в числителе, так и в знаменателе. Это предопределяет получение числителя и знаменателя в форме произведения двух выражений, и не позволяет сформировать функции непосредственно в виде степенных полиномов по комплексной частоте.

Чтобы получить такую возможность, нужно представить схемно-минорную формулу для чувствительности (3) в виде отношения двух схемных определителей (миноров) – по аналогии со схемно-минорными формулами схемных функций, для которых имеется возможность формирования символьных выражений как в свернутом [7], так и полиномиальном виде [9].

Известно, что определитель схемы, разделенной на две подсхемы по одному узлу, равен произведению определителей этих подсхем [7]. На основании этого положения произведение двух схемных определителей как в числителе, так и в знаменателе (3) можно преобразовать в один определитель, схема которого состоит из двух частей, объединенных в одном произвольном узле. Объединение двух схем в одну необходимо, поскольку определитель несвязной схемы равен нулю [7]. После объединения схем в числителе и знаменателе (3) получается следующая схемно-минорная формула для чувствительности

$$S_y^K = -Y \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of two parallel branches with dependent sources} \\ \text{Diagram of two parallel branches with dependent sources} \end{array} \right| \left/ \right| \left| \begin{array}{c} \text{Diagram of one branch with dependent source} \\ \text{Diagram of one branch with dependent source} \\ \text{Diagram of one branch with dependent source} \end{array} \right| , \quad (4)$$

которая имеет вид отношения двух схемных определителей, поэтому как в числителе, так и в знаменателе можно обеспечить единый процесс выделения элементов для получения полиномиальных коэффициентов [9].

Минорная формула для чувствительности коэффициента передачи напряжения схемы на рис. 1,б по сопротивлению  $Z$  аналогична (3) и имеет вид [6]

$$S_Z^F = Z \frac{N_{13} N_{32}}{ND}, \quad (5)$$

поэтому соответствующая схемно-минорная формула получается из (4) путем замены  $(-Y)$  на  $Z$ :

$$S_Z^K = Z \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 1: Two parallel branches with voltage sources and resistors.} \\ \text{Diagram 2: Three parallel branches with voltage sources and resistors.} \end{array} \right| / \left| \begin{array}{c} \text{Diagram 3: Three parallel branches with voltage sources and resistors.} \\ \text{Diagram 4: Three parallel branches with voltage sources and resistors.} \end{array} \right| , \quad (6)$$

где многополюсники взяты из схемы на рис. 1, б.

Минорная формула для чувствительности коэффициента передачи напряжения по параметру управляемого источника (УИ)  $\chi$  имеет вид [6]

$$S_\chi^K = \frac{\chi N_{13} N_{42}}{ND}. \quad (7)$$

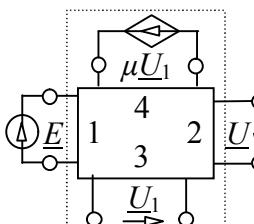
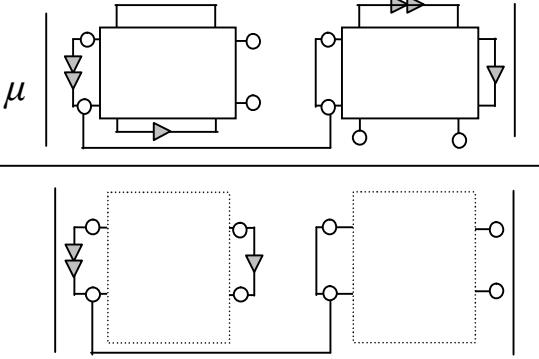
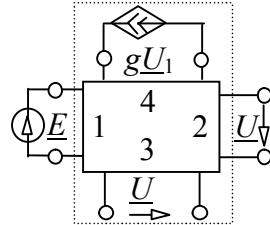
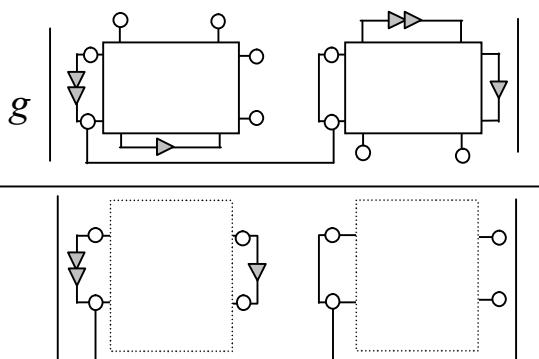
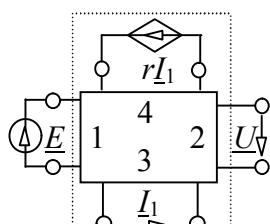
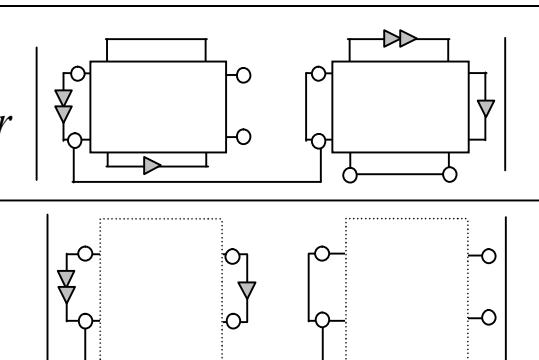
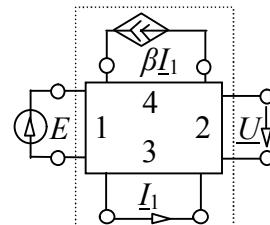
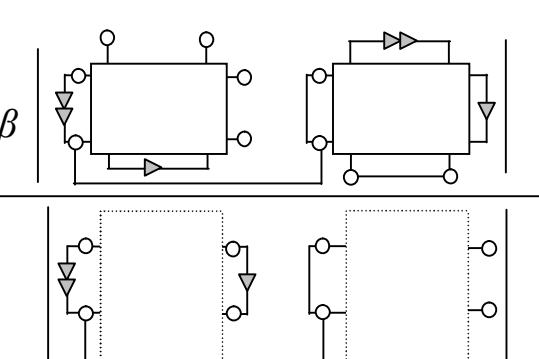
Параметр  $\chi$  в (7) является: коэффициентом передачи напряжения  $\mu$  для источника напряжения, управляемого напряжением – ИНУН; передаточной проводимостью  $g$  для источника тока, управляемого напряжением – ИТУН; передаточным сопротивлением  $r$  для источника напряжения, управляемого током – ИНУТ и коэффициентом передачи тока  $\beta$  для источника тока, управляемого током – ИТУТ.

Схемы с перечисленными УИ приведены в столбце 2 (строках 1–4) табл. 1. Сомножитель  $N_{13}$  – числитель передаточной функции от стороны 1 (независимого источника) к стороне 3 (управляющей ветви УИ);  $N_{42}$  – числитель передаточной функции от стороны 4 (управляемой ветви УИ) к стороне 2 (ветви отклика).

Схемно-минорные выражения для чувствительности коэффициента передачи напряжения по параметрам различных УИ, соответствующие формуле (7), найдены аналогично (4) и (6), и сведены в столбец 3 табл. 1.

Формулы чувствительности для коэффициента передачи тока получаются из этих же формул в столбце 3 табл. 1 путем взаимной замены идеального проводника и разрыва на сторонах 1 и 2 многополюсной подсхемы. Для получения формулы чувствительности передаточной проводимости необходимо заменить разрыв на стороне 2 идеальным проводником, а для чувствительности передаточного сопротивления – разомкнуть сторону 1.

Таблица 1. Схемно-минорные формулы для относительной чувствительности коэффициента передачи напряжения по параметрам УИ

№	Параметр УИ. Исходная схема.	Схемно-минорная формула для чувствительности
1	2	3
1	Параметр ИНУН $\mu$ 	$S_{\mu}^K = \frac{\mu}{\mu}$ 
2	Параметр ИТУН $g$ 	$S_g^K = \frac{g}{g}$ 
3	Параметр ИНУТ $r$ 	$S_r^K = \frac{r}{r}$ 
4	Параметр ИТУТ $\beta$ 	$S_{\beta}^K = \frac{\beta}{\beta}$ 

**Формирование функций чувствительности в виде отношения степенных полиномов по комплексной частоте.** Полиномиальная функция чувствительности схемной функции  $F$  по параметру  $\alpha$  представляется в каноническом и групповом виде соответственно:

$$S_{\alpha}^F(p) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0} = \frac{(\dots(a_n p + a_{n-1}) p + a_{n-2}) p + \dots + a_1) p + a_0}{(\dots(b_m p + b_{m-1}) p + b_{m-2}) p + \dots + b_1) p + b_0}, \quad (8)$$

где  $p$  – комплексная частота;  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, b_m, b_{m-1}, \dots, b_0$  – полиномиальные коэффициенты – рациональные выражения, содержащие параметры элементов цепи;  $n, m$  – степени полиномов числителя и знаменателя. Выражение в групповом виде – вторая формула в (8), как уже отмечалось, обладает минимальным количеством арифметических операций.

Значения степеней  $n$  и  $m$  в функции (8) равны порядку сложности схем в числителе и знаменателе схемно-минорных формул чувствительности в (4), (6) и в табл. 1. Максимальное значение чисел  $n$  и  $m$  – это удвоенная степень определителя исходной схемы. Конкретные значения  $n$  и  $m$  зависят от схемы, исследуемой схемной функции и варьируемого параметра, и совпадают с порядком сложности схем числителя и знаменателя соответственно в формулах (4), (6) и в табл. 1. Правила определения порядка произвольной линейной схемы с управляемыми источниками изложены в [10].

Алгоритмы формирования символьных функций чувствительности полиномиального вида (8) на основе схемно-минорных формул в (4), (6) и в столбце 3 из табл. 1 аналогичны алгоритмам построения полиномиальных схемных функций на основе соответствующих схемно-минорных формул [9]. При этом катушки индуктивности и конденсаторы задаются операторными сопротивлениями и проводимостями соответственно. Полиномы числителя и знаменателя формируются отдельно.

Для цепи, содержащей управляемые источники с действительными параметрами, резисторы и  $n$  двухполюсных реактивных элементов – конденсаторов и катушек индуктивности, канонический степенной полином числителя или знаменателя функции чувствительности имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta = & p^n X_1 X_2 \dots X_n \Delta_{X_1, X_2, \dots, X_n} + p^{n-1} (X_1 X_2 \dots X_{n-1} \Delta_{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}}^{X_n} + X_1 X_2 \dots X_{n-2} X_n \cdot \\ & \cdot \Delta_{X_1, X_2, \dots, X_{n-2}, X_n}^{X_{n-1}} + \dots + X_2 X_3 \dots X_n \Delta_{X_2, X_3, \dots, X_n}^{X_1}) + \dots + p (X_1 \Delta_{X_1}^{X_2, X_3, \dots, X_n} + \\ & + X_2 \Delta_{X_2}^{X_1, X_3, X_4, \dots, X_n} + \dots + X_n \Delta_{X_n}^{X_1, X_2, \dots, X_{n-1}}) + \Delta^{X_1, X_2, \dots, X_n}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $X_1, X_2, \dots, X_n$  – параметры реактивных элементов – емкости или индуктивности;  $\Delta$  с индексами – это определитель безреактивной схемы – схемный минор исходной схемы, полученный из нее путем нейтрализации и/или выделения реактивных элементов. В верхнем индексе  $\Delta$  приводятся реактивные параметры, которые нейтрализуются – приравниваются к нулю, а в нижнем индексе – параметры, которые выделяются в виде множителя. Исходной схемой здесь является схема числителя или знаменателя из формул в (4), (6) и в столбце 3 из табл. 1. Нейтрализация индуктивности и емкости выполняется заменой ее на идеальный проводник и удалением из схемы соответственно. Выделение индуктивности и емкости сопровождается удалением ее из схемы и заменой проводником соответственно.

Формула (9) предложена в [11] применительно к методу двунаправленного (унисторного) графа, который приводит к появлению избыточных взаимно уничтожающихся слагаемых, поскольку унисторная схема замещения включает параметр ИТУН 4 раза. Избыточные слагаемые отсутствуют при раскрытии определителей из формулы (9) с помощью МСО. В то же время формула (9) обладает существенными недостатками. Во-первых, является излишне трудоемкой, поскольку требует раскрытия большого числа схемных миноров, равного  $2^n$ . Во-вторых, не позволяет сформировать полиномиальные коэффициенты в

свернутом виде по параметрам реактивных элементов, поскольку они выделяются без учета правил формирования оптимальных выражений, например, правила кратности, в соответствии с которым в первую очередь выделяется та мультиветвь, которая содержит наибольшее количество ветвей [12].

Эти недостатки отсутствуют в алгоритме построения полиномиальных коэффициентов путем набора степени оператора  $p$  рекурсивным выделением реактивных элементов из определителя исходной схемы [9]. При этом исключается разбиение полиномиального коэффициента на многочисленные схемные миноры и тем самым обеспечивается выделение элементов в соответствии с указанными правилами формирования оптимальных выражений. Алгоритм [9], как и формула (9), разработан применительно к нахождению схемных функций.

При использовании алгоритма для формирования функций чувствительности необходимо в качестве исходных схем числителя и знаменателя применять соответствующие схемы из минорных формул в (4), (6) или в табл. 1. В этих схемах необходимо провести перенумерацию элементов, поскольку каждый из них содержит соответствующий элемент с тем же номером.

Порядок выделения элементов из указанных схем должен выполняться с учетом правил оптимального построения компактных выражений [12]. В первую очередь учитываются элементы, подлежащие нейтрализации или выделению по частным формулам – содержащим одно из двух слагаемых [7]. При этом полиномиальный коэффициент формируется в свернутом виде.

Степень оператора  $p$  у каждого слагаемого свернутого выражения записывается неявным образом – путем присваивания ее паре скобок, которая появляется после выделения любого элемента. При выделении конденсаторов и катушек индуктивности вновь образующейся паре скобок присваивается показатель на единицу больший, чем у ближайшей внешней пары скобок. При выделении резистивных элементов и

управляемых источников показатель у новой пары скобок остается таким же, как у ближайшей внешней пары скобок.

После выделения каждого элемента осуществляется контроль показателя степени новой пары скобок. Если показатель превышает степень искомого полиномиального коэффициента, то эта пара скобок вместе с соответствующим схемно-алгебраическим фрагментом стирается из памяти. Удаляются также скобки со своим содержимым, если их показатели меньше степени искомого коэффициента и их схемно-алгебраические выражения не содержат реактивных элементов. Оставшиеся безреактивные схемные определители в скобках с искомым показателем степени преобразуются к символьным выражениям с применением диакоптического метода схемных миноров [13].

Алгоритм реализован в компьютерной программе CIRSYM [9] для формирования произвольных схемных функций и откликов. Текстовый файл – задание для CIRSYM – может содержать произвольное количество cir-файлов для отдельных схем. При этом в папке с этой программой может содержаться произвольное число таких заданий.

Как внешним, так и внутренним форматом для программы CIRSYM является список элементов схемы. При рекурсивном выделении элементов образуются списки, соответствующие производным схемам, до получения простейших схем в виде узла или ветви. Каждый полиномиальный коэффициент как бы «вырезается» из определителя всей схемы, при этом обеспечивается компактная группировка (свертка) слагаемых. Многократно уменьшить сложность выражения позволяет бисекция по 1, 2, ..., 5 узлам производных схем, не содержащих реактивных элементов.

Для получения функции чувствительности в программу вводится задание на построение определителей двух схем – числителя и знаменателя из схемно-минорных формул (4), (6) или из табл. 1. Отношение полученных символьных полиномиальных выражений, умноженное на указанный в этих формулах параметр, является искомой функцией относительной чувствительности. Нахождение двух схемных определителей (вместо четырех, как в [6,8]) упрощает применение

программы CIRSYM, делая его подобным нахождению символьных схемных функций.

Возможности программы CIRSYM можно оценить на примере анализа лестничных  $LC$ -фильтров и схем замещения трехпроводных линий [9]. Для компьютера с частотой процессора 3 ГГц и с оперативной памятью 1 Гбайт максимальный порядок сложности схемы при формировании полиномиальной схемной функции и функции чувствительности составляет 30 и 15 соответственно.

Порядок сложности схемы при анализе чувствительности в два раза меньше, чем при построении схемных функций, поскольку схемы числителя и знаменателя формул чувствительности в (4), (6) и в табл. 1 содержат в два раза больше элементов, чем при формировании схемных функций. Эффективные символьные блоки компьютерных систем общего назначения таких, как Maple [14], использующие для построения полиномиальных функций алгоритмы развертывания выражений и сортировки слагаемых, позволяют сформировать схемные функции и функции чувствительности со значительно меньшим порядком сложности – 8 [9] и 4 соответственно. Это ограничение объясняется очень большим объемом символьного выражения, который получается при его развертывании на элементарные слагаемые.

**Пример построения полиномиальной функции относительной чувствительности.** Рассмотрим схему фильтра нижних частот на рис. 2,а [15]. Численные значения параметров элементов:  $C_1=18,7571$  нФ;  $C_2=9,37857$  нФ;  $G_1=G_2=1$  мСм;  $\mu=1$  и  $R_0=100$  Ом. Требуется сформировать полиномиальную функцию чувствительности  $S_\mu^K$  комплексного коэффициента передачи напряжения  $K=\underline{U}_2/\underline{U}_1$  по параметру ИНУН  $\mu$ .

Найти максимальное значение модуля функции чувствительности  $S_\mu^K$  в широком диапазоне частот и построить графики частотных зависимостей модуля  $S_\mu^K(f)$  и аргумента  $\varphi_s(f)$  функции чувствительности.

Искомая функция чувствительности формируется по схемно-минорной формуле из ячейки 1–3 в табл. 1. На рис. 2, б представлена схема числителя этой формулы применительно к схеме фильтра на рис. 2, а. Для преобразования определителя этой схемы в символьную функцию используются формулы выделения элементов и правила МСО [7].

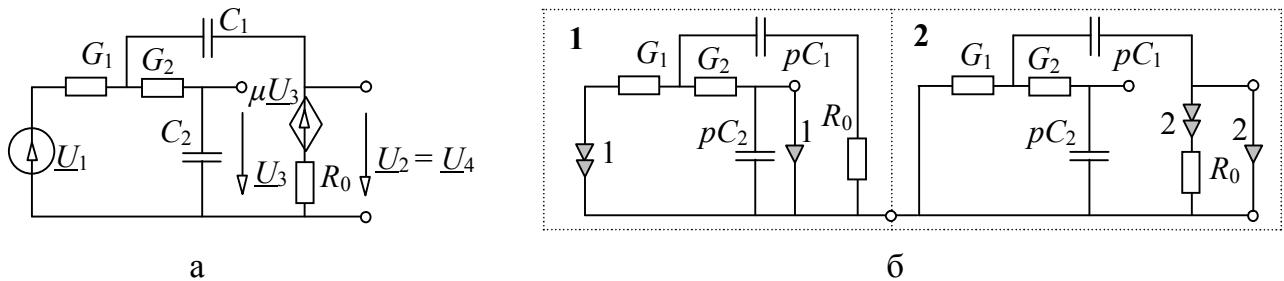


Рис. 2. Схема фильтра нижних частот (а) и схема числителя схемно-минорной формулы для чувствительности передаточной функции фильтра по параметру  $\mu$  (б)

Применим сначала частные формулы, содержащие по одному слагаемому и не приводящие к выделению оператора  $p$  за знак определителя. В первой подсхеме удалим проводимость  $pC_2$ , параллельная нуллатору 1. В первой и второй подсхеме выделим проводимости  $G_1$  и  $G_2$ , соединенные последовательно с норатором 1 и нуллатором 1 соответственно. Заменим проводником сопротивление  $R_0$  из второй подсхемы, соединенное последовательно с норатором 2. Заменим также в первой и второй подсхеме параллельное согласное соединение одноименных норатора и нуллатора идеальным проводником. Получим определитель числителя в виде

$$N^S = G_1 G_2 \left| \begin{array}{c} \parallel pC_1 \\ R_0 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} G_1 \\ \parallel pC_1 \\ G_2 \\ \parallel pC_2 \end{array} \right| = G_1 G_2 N^S', \quad (10)$$

где множитель  $G_1 G_2$  является общим для всех полиномиальных коэффициентов числителя в формуле (8);  $N^{S'}$  – частичный определитель числителя.

Схема в (10) имеет порядок сложности  $n=3$ . Найдем коэффициент  $a_3$  из полиномиальной функции (8) с помощью предлагаемого алгоритма. Для этого выделим из первой подсхемы в частичном определителе формулы (10) конденсатор  $C_1$ , получим

$$N^{S'} = C_1 \left\{ \left| \begin{array}{c} R_0 \\ \boxed{\phantom{R_0}} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} R_0 \\ \boxed{\phantom{R_0}} \end{array} \right| \right\}. \quad (11)$$

В (11) и последующих формулах цифра над скобками является показателем степени соответствующей пары скобок.

Второе слагаемое в (11) удаляем, поскольку оно имеет порядок сложности меньше трех. Сопротивление  $R_0$ , образующее в первом слагаемом контур, выделяется по частной формуле, в результате определитель принимает вид

$$N^{S'} = C_1 \left\{ R_0 \left| \begin{array}{c} G_1 \\ G_2 \\ \hline pC_1 \end{array} \right| \right\}. \quad (12)$$

Выделим в формуле (12) емкость  $C_1$ , получим

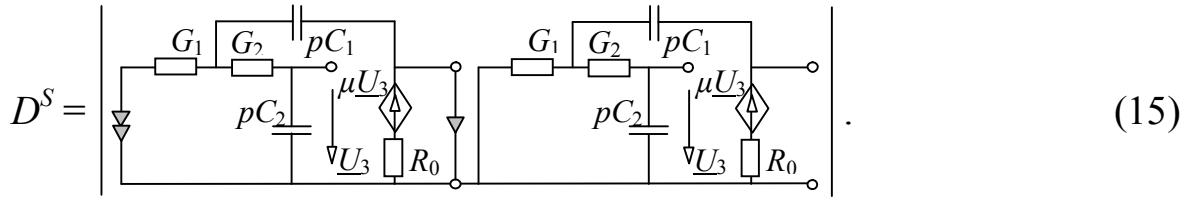
$$N^{S'} = C_1 \left\{ R_0 \left( C_1 \left| \begin{array}{c} G_1 \\ G_2 \\ \hline pC_2 \end{array} \right| \right) + \left| \begin{array}{c} G_1 \\ G_2 \\ \hline pC_2 \end{array} \right| \right\}. \quad (13)$$

Второе слагаемое в (13) удаляем, поскольку его показатель степени меньше трех. В первом слагаемом из (13) удаляем проводимость  $G_1$ , образующую контур и выделяем емкость  $C_2$ , при этом оставляем только слагаемое с сомножителем  $C_2$ , второе слагаемое, соответствующее

нейтрализации проводимости конденсатора, удаляем, поскольку его показатель степени меньше трех. Определитель оставшегося контура из проводимости  $G_2$  равен 1. С учетом формулы (10) получаем выражение искомого полиномиального коэффициента

$$a_3 = G_1 G_2 C_1 \left[ R_0 \left[ C_1 \left[ C_2 \left[ \begin{matrix} 3 & 3 \\ 1 & \end{matrix} \right] \right] \right] = G_1 G_2 C_1^2 C_2 R_0 . \quad (14)$$

Остальные полиномиальные коэффициенты числителя  $a_2$ ,  $a_1$  и  $a_0$  находятся аналогично. Коэффициенты знаменателя находятся подобно коэффициентам числителя исходя из схемно-минорной формулы знаменателя в той же ячейке 1–3 табл. 1:



После подстановки коэффициентов числителя и знаменателя в формулу (8) и сокращения дроби на общий множитель  $G_1$  получаем символьную полиномиальную функцию чувствительности:

$$\underline{S}_\mu^K = \frac{\mu G_2 [p^3 C_1^2 C_2^2 R_0 + p^2 (C_1^2 R_0 G_2 + C_1 C_2 R_0 (G_1 + G_2) + C_1 C_2) + p (C_1 R_0 G_1 G_2 + C_1 G_2 + C_2 (G_1 + G_2)) + G_1 G_2]}{p^4 C_1^2 C_2^2 [(G_1 + G_2) R_0 + 1] R_0 + p^3 \{C_1^2 C_2 [R_0 G_2 (G_1 R_0 + 1 - \mu) + G_2 R_0 ((G_1 + G_2) R_0 + 1)] + C_1 C_2^2 [R_0 (G_1 + G_2)]\} + p^2 \{C_1 G_2 R_0 [C_1 G_2 (1 - \mu + G_1 R_0) + C_2 (G_1 + G_2)] + C_1 C_2 R_0 G_1 G_2 + C_1 C_2 G_2 \mu ((G_1 + G_2) R_0 + 1)\} + p \{C_1 G_2 R_0 G_1 G_2 + G_2 \mu [C_1 G_2 (1 - \mu + G_1 R_0) + C_2 (G_1 + G_2)]\} + \mu G_1 G_2^2} . \quad (16)$$

После подстановки численных значений в формулу (16) численно-символьная функция чувствительности имеет следующий вид

$$\underline{S}_\mu^K = \frac{0.329937 \cdot 10^{-24} p^3 + 0.246267 \cdot 10^{-18} p^2 + 0.393888 \cdot 10^{-13} p + 0.1 \cdot 10^{-8}}{0.371310 \cdot 10^{-29} p^4 + 0.758856 \cdot 10^{-24} p^3 + 0.267375 \cdot 10^{-18} p^2 + 0.225079 \cdot 10^{-13} p + 0.1 \cdot 10^{-8}} . \quad (17)$$

Модуль функции чувствительности (17) имеет 2 максимума:  $S_{\mu \max 1}^K = 2.000313$  при  $f_{\max 1} = 12443.76$  Гц и  $S_{\mu \max 2}^K = 2.68238$  при  $f_{\max 2} = 35445.7$  Гц. Чувствительность  $S_{\mu \max 2}^K$  является максимальным значением функции. Графики частотных зависимостей модуля и аргумента комплексной чувствительности (17) построены на рис. 3,а и 3,б соответственно. На этих же рисунках приведены для сравнения графики соответствующих зависимостей чувствительности  $\underline{S}_{\mu}^K$  при нулевом сопротивлении генератора ИНУН.

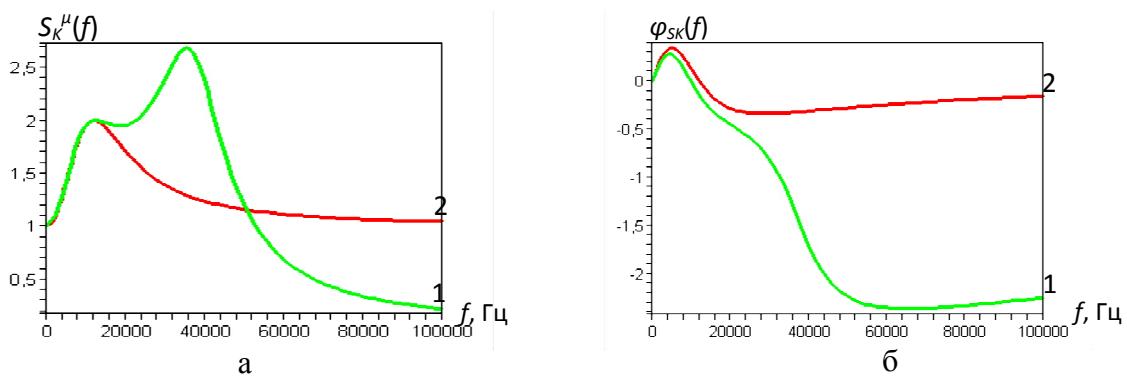


Рис. 3. Графики частотной зависимости модуля (а) и аргумента (б) относительной чувствительности  $\underline{S}_{\mu}^K$  при  $R_0=100$  и  $0$  Ом – кривые 1 и 2 соответственно

Как видно из функций и графиков, влияние сопротивления  $R_0$  генератора ИНУН на функцию чувствительности является значительным, поскольку оно приводит к повышению порядка сложности схемы и увеличению максимального значения чувствительности. При нулевом сопротивлении  $R_0$  порядок числителя и знаменателя функции чувствительности равен двум, при ненулевом сопротивлении – трем и четырем соответственно.

### Выводы

- Получены схемно-минорные формулы в виде отношения двух схемных определителей, позволяющие сформировать функции классической чувствительности в виде отношения степенных полиномов путем рекурсивного выделения элементов. При этом, в отличие от

матричных методов, не образуются избыточные взаимно сокращающиеся слагаемые, и не требуются трудоемкие операции перемножения, развертывания символьных выражений и сортировки слагаемых.

2. Формируемые символьные полиномиальные функции чувствительности эффективны при численно-аналитическом расчете, поскольку близки к оптимальным выражениям по сложности и удобны для проведения аналитических исследований. Выражения чувствительностей в отличие от выражений схемных функций могут содержать слагаемые с квадратами параметров, то есть билинейная теорема не распространяется на функции чувствительности.

3. Предлагаемые схемно-минорные формулы позволяют сформировать полиномиальные функции чувствительности с помощью компьютерной программы CIRSYM в режиме получения полиномиальных символьных схемных функций. Программа обеспечивает получение функций чувствительности для схем с порядком сложности, более чем в 3 раза превышающим порядок сложности схем при анализе символьным блоком системы аналитических вычислений Maple.

### Список литературы

1. Гридин В.Н., Михайлов В.Б., Шустерман Л.Б. Численно-аналитическое моделирование радиоэлектронных схем. – М.: Наука, 2008. – 339 с.
2. Боде Г. Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью: Пер. с англ.– М.: ГИИЛ, 1948.– 641 с.
3. Гехер К. Теория чувствительности и допусков электронных цепей: Пер. с англ. // М.: Сов. радио, 1973.– 200 с.
4. Чуа Л. О., Лин П. М. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы.– М.: Энергия, 1980.– 640 с.
5. Фидлер Д.К., Найтингейл К. Машинное проектирование электронных схем.– М.: Высш.шк., 1985.– 216 с.
6. Hoang S. The direct topological method in network sensitivity analysis // Rozprawy elektrotechniczne.– 1975.– Т. 21, z. 4.– S. 767–784.

7. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.
8. Курганов С.А. Схемно-алгебраический анализ чувствительности линейных электрических цепей // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. межд. конф. КЛИН-2006.– Ульяновск: УлГТУ, 2006.– Т. 3.– С. 129–135.
9. Курганов Д. С., Филаретов В. В. Алгоритм и программа формирования полиномиальных схемных функций электронных цепей // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр.– Ульяновск : УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 140–151.
10. Курганов С. А., Филаретов В. В. Формирование уравнений состояния линейных электрических цепей с обобщенными индуктивными сечениями и емкостными контурами // Электричество. – 2013. – № 9. – С. 49–55.
11. Тимкин Ю.В. Анализ электронных схем методом двунаправленных графов.– М.: Энергоатомиздат.– 1985.– 256 с.
12. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // Электричество.– 1995.– № 4.– С. 36–43.
13. Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество. – 2001. – № 8. – С. 33–42.
14. Дьяконов В.П. Maple 9.5/10 в математике, физике и образовании.– М.: Солон Пресс, 2006, 720 с.
15. Бондаренко А.В., Бондаренко В.В., Можар В.И., Сончик Л.И. Современные методы анализа и синтеза электрических цепей: учеб. пособие. – СПб.: СПб ГАСУ, 2008.– 216 с.

**Бондаренко Анатолий Васильевич** – д.т.н, профессор, действительный член Академии Электротехнических Наук РФ, профессор кафедры электроэнергетики и электротехники Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: avb38@mail.ru

# БЕЗЫЗЫТОЧНЫЙ СИМВОЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ НА ОСНОВЕ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ДИАГРАММ ДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ

С. Ласота, В. Филаретов

*Представлены два метода формирования символьных схемных функций: метод схемных определителей и метод диаграмм выделения параметров. Методы предназначены для анализа схем произвольной сложности, что достигается многоуровневым разделением схемы на подсхемы и последующим их объединением. Вычисления на каждом уровне выполняются только раз, и частичные результаты могут быть использованы многократно. На высшем уровне декомпозиции не требуется лишней информации о низшем уровне. Формируемые выражения свободны от избыточных (взаимно уничтожающихся) слагаемых. Реализовано на компьютере получение как предельно сжатых (оптимальных), так и полиномиальных выражений. Диаграммы деления параметров могут содержать информацию обо всех схемных функциях с учетом общих подвыражений. Методы удобны для реализации на многопроцессорных или распределенных системах.*

*The article describes two methods of symbolic network functions generation: using circuit determinants and using parameter division diagrams. These methods are intended for the analysis of circuits of arbitrary complexity, which is achieved by the multi-level division of the circuit into the subcircuits and their subsequent reunion. Calculations on each level are performed only once, and partial results can be reused many times. Higher decomposition levels do not require extra information about the lower levels. Generated expressions have only cancellation-free terms. Program implementation of the methods leads to extremely short (optimal) and polynomial expressions of the symbolic network functions. The parameter division diagram can contain*

*information about all network functions taking into consideration common subexpressions. These methods are suitable for implementation on multiprocessor or distributed systems.*

**О проблемах символьного анализа.** Символьный анализ заключается в получении аналитических характеристик, отражающих реакцию схемы как функцию ее параметров. Результаты символьного моделирования более наглядны и информативны для проектировщика, чем результаты в численном виде. Однако число символьных слагаемых схемных функций возрастает экспоненциально с увеличением количества узлов и ветвей схемы [1]. Это приводит к проблемам с ресурсами компьютера и интерпретацией огромных формул. Поэтому многие традиционные инструменты пригодны только для схем обозримого размера [2].

Во избежание трудностей используются аппроксимационные методы [3] или иерархический матричный метод [4]. Этим методам присущи другие недостатки. Аппроксимационные методы вызывают подавление некоторых значимых слагаемых или появление в схемных формулах некоторых паразитных нулей и полюсов [5]. С другой стороны, иерархические методы, например [4] приводят к точным результатам, но в форме некоторой последовательности выражений (SoE), которая неудобна для проектировщика. Благодаря учету повторяющихся частей формулы, результат становится во много раз более компактным.

К сожалению, подход, основанный на исключении Гаусса, приводит к тому, что результаты становятся удобными для дальнейших численных вычислений, но неудобны для аналитической обработки и интерпретации. Другая группа иерархических методов основывается на некоторых электрических параметрах, например, [6]. Они более удобны в интерпретации, но влияние нескольких параметров может быть сложным. Такие методы обычно разрабатываются для специальных задач проектирования.

Определенным прорывом в символьном анализе стало применение двоичной диаграммы разделения (Binary Decision Diagrams – BDD [7]), представляющей собой структуру для символьного анализа, а также разработка диаграммы разделения определителя (Determinant Decision Diagram – DDD [8]).

Диаграммы деления позволяют сжать (свернуть) точные схемные функции, но значения, соответствующие вершинам, являются элементами модифицированной матрицы узловых проводимостей вместо непосредственно параметров схемы. Это влечет появление избыточности и порождает в функциях некоторые псевдозависимости. Также затрудняется модификация формулы после добавления в схему нового компонента. Поэтому DDD-диаграммы не удобны для использования в процедурах синтеза.

**Безизбыточные методы выделения параметров.** Известны методы, свободные от отмеченных выше недостатков. Это метод схемных определителей (MCO) – circuit determinants method (CDM) [9–12] and parameter decision diagrams method – PDDM) [13, 14], который использует многократные суммарные алгебраические дополнения (МСАД) [15,16] и матричное выделение параметров [17]. На основе этих методов анализируются, например, малосигнальные модели полупроводниковых устройств. Для сложных эквивалентных схем применяются соответствующие иерархические подходы.

В [18] предложена диаграмма деления для редукции графа (Graph Reduction Decision Diagrams – GRDD), которая относится к PDD-диаграммам, но, к сожалению, основана на классической DDD-диаграмме [19]. Поэтому в общем случае трудно избежать избыточности в иерархическом методе, если выбирать множество внешних параметров произвольно, не учитывая фактическую структуру схемы. В то же время, применение, как CDM-, так и PDDM-методов, использующих непосредственно структуру схемы, представляется естественным и удобным даже при анализе схем без компьютера. В статье на ряде

примеров сравниваются оба метода, как наиболее эффективные также в компьютерной реализации, и рассматривается их взаимосвязь.

**Схемный и матричный методы выделения параметров.** Оба метода предусматривают последовательное выделение элементов. Схемы на основе формулы Фойснера [9, 10] и их обобщений для управляемых источников [11–14]. При выделении элемента образуются две производные схемы: первая схема получается в результате замены выделяемого элемента нуллом, на второй схеме выделяемый элемент обнуляется (нейтрализуется). Определитель первой производной схемы является сомножителем при параметре выделяемого элемента, а определитель второй – добавляется к этому произведению.

Процесс выделения элементов и образования менее сложных производных схем в МСО и PDD-методе показывается стрелками: сплошной при переходе к первой производной схеме и прерывистой при переходе ко второй. На PDD-диаграмме вершины соответствуют выделяемым элементам. В эти вершины входит одна дуга, а выходят в общем случае две дуги: одна (сплошная) для первой производной схемы, а другая (прерывистая) для второй.

Одно из основных отличий МСО и PDD-метода заключается в том, что в первом методе после каждого выделения элемента производные схемы упрощаются путем объединения параллельных проводимостей и последовательных сопротивлений [11, 12]. При использовании второго метода обычно не ставится задача формирования оптимальных выражений, поскольку более важным считается отображение на диаграмме как знаменателя, так и числителя схемной функции [13, 14].

Рассмотрим оба метода на примере анализа схемы рис. 1 [14].

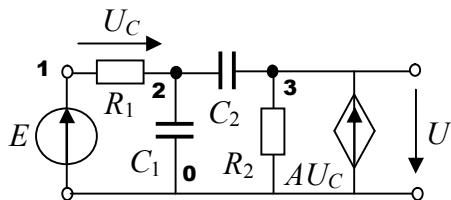


Рис. 1. Схема [14] для сравнения методов

**Пример 1. Использование метода схемных определителей (СДМ-метода) для анализа схемы на рис. 1.** На рис. 2 показаны разложения знаменателя и числителя передаточной функции по напряжению.

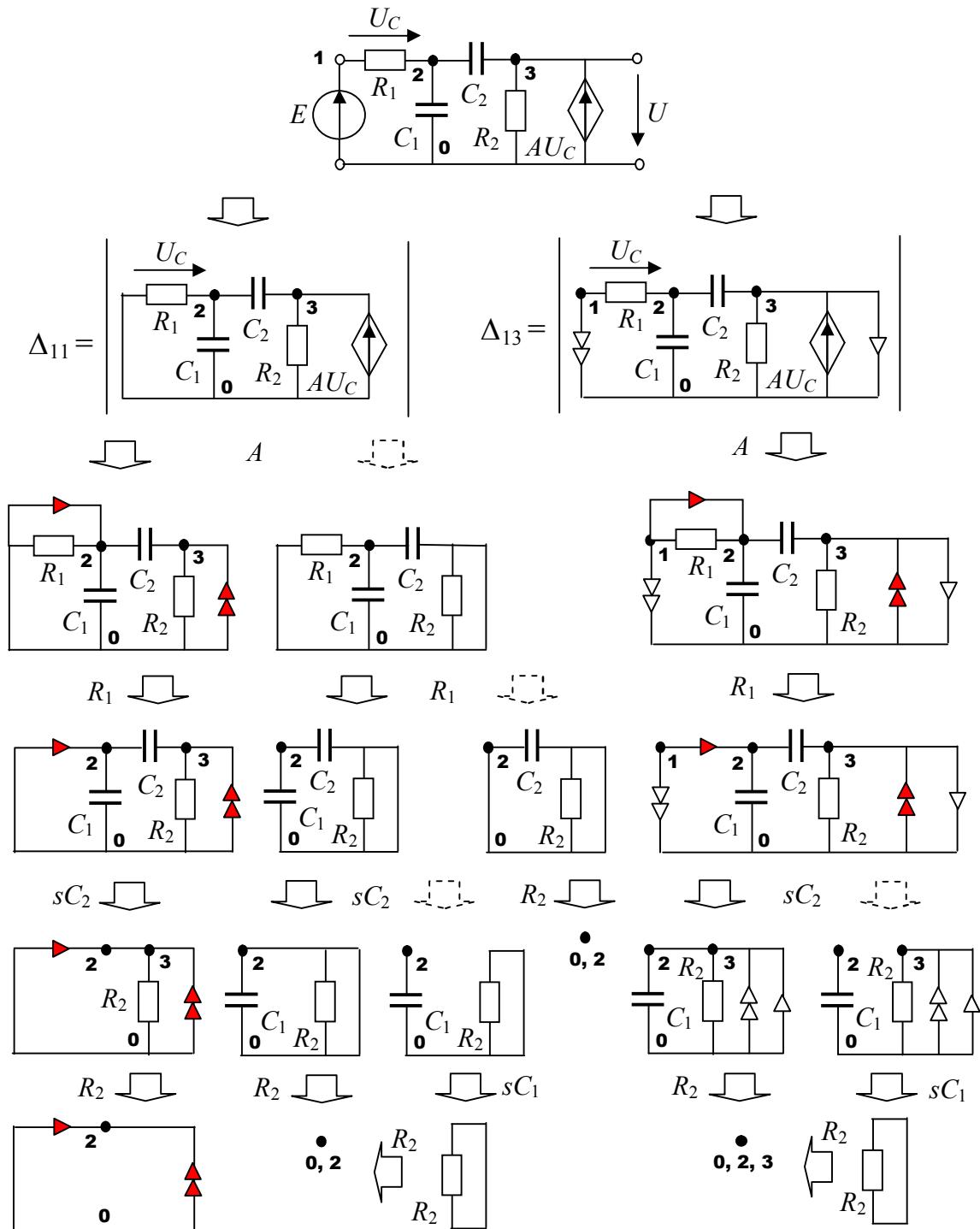


Рис. 2. Использование МСО для разложения знаменателя и числителя схемы рис. 1

Отсюда

$$\Delta_{11} = AR_1sC_2R_2 + [R_1s(C_2+C_1)+1]R_2, \quad \Delta_{13} = AR_1s(C_2+C_1)R_2. \quad (1)$$

Более компактные выражения можно получить при оптимальном порядке выделения элементов, представленном на рис.3.

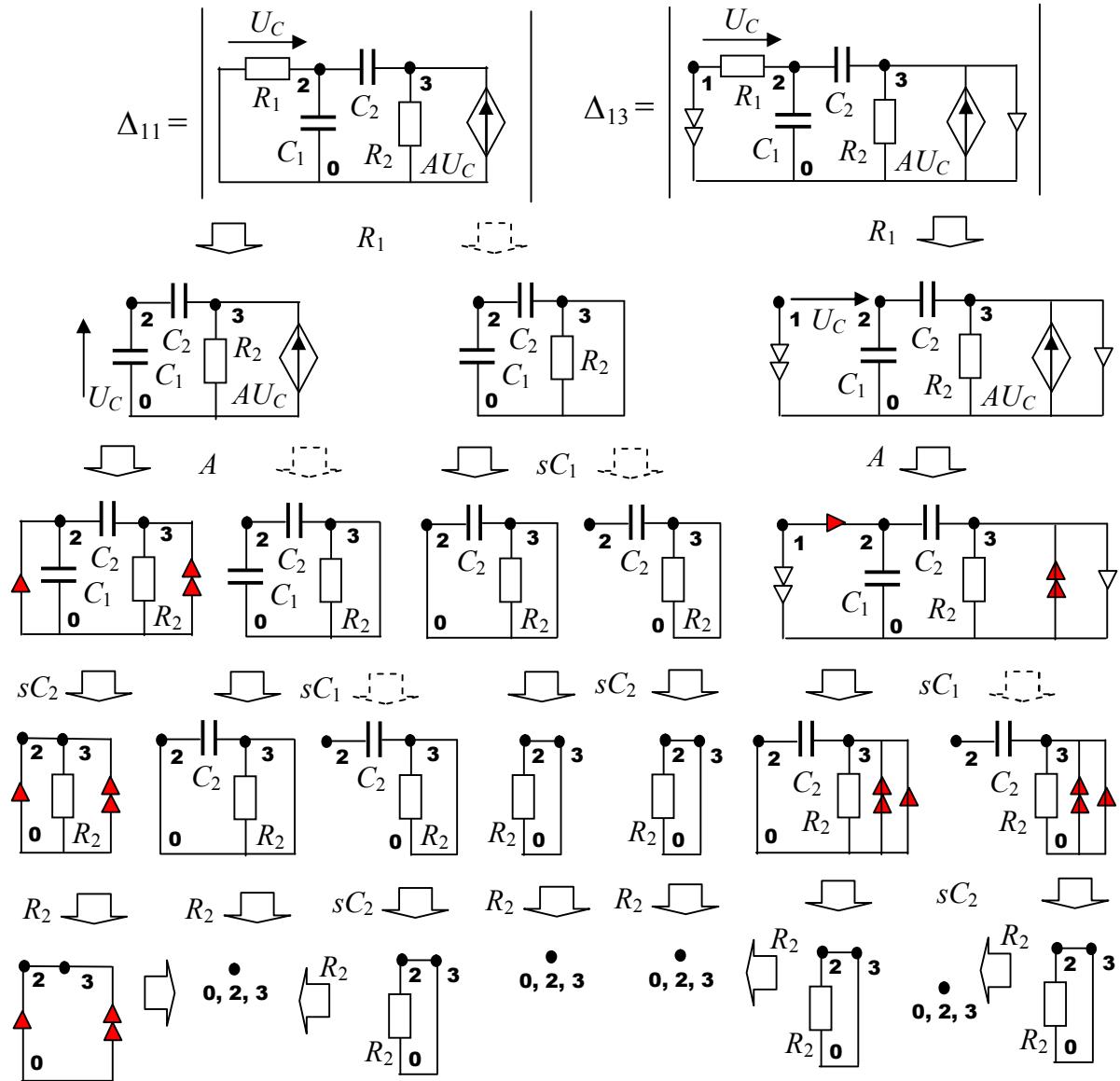


Рис. 3. Оптимальное разложение знаменателя и числителя схемы рис.1

Отсюда

$$\Delta_{11} = \{R_1[AsC_2+s(C_1+C_2)]+1\}R_2, \quad \Delta_{13} = AR_1s(C_1+C_2)R_2. \quad (2)$$

Матричный метод выделения параметров [13–17] предусматривает операции над последовательностями пар индексов строк и столбцов и

нахождение МСАД. Сумма индексов, обозначающая сложение строк, изоморфна подключению к схеме с определителем  $\Delta$  норатора, направленного от узла с номером первой строки к узлу с номером второй строки. Аналогичная сумма для столбцов соответствует подсоединению нуллатора, направленного от узла с номером первого столбца к узлу с номером второго столбца.

**Пример 2. Использование метода диаграмм деления (PDD-метода) для анализа схемы на рис. 1.** Для разложения знаменателя можно воспользоваться изображением исходной схемы на рис. 1, учитывая замыкание ее входа. Последовательно выделяя параметры, получаем

$$\begin{aligned}
 \Delta_{11} &= A\Delta_{11,(0+3)(1+2)} + \Delta_{11,(0+3)(0+3)} = \\
 A\Delta_{11,(0+3)(0+2)} + \Delta_{11,(0+3)(0+3)} &= \\
 A\Delta_{11,32} + \Delta_{11,33} &= \\
 A(R_1\Delta_{11,32} + \Delta_{11,32,(2+1)(2+1)}) + R_1\Delta_{11,33} + \Delta_{11,33,(2+1)(2+1)} &= \\
 A(R_1\Delta_{11,32} + \Delta_{11,32,(2+0)(0+0)}) + R_1\Delta_{11,33} + \Delta_{11,33,(2+0)(2+0)} &= \\
 AR_1\Delta_{11,32} + R_1\Delta_{11,33} + \Delta_{11,22,33} &= \\
 AR_1(sC_2\Delta_{11,32,(3+2)(3+2)} + \Delta_{11,32}) + R_1(sC_2\Delta_{11,33,(3+2)(3+2)} + \Delta_{11,33}) + \Delta_{11,22,33} &= \\
 AR_1(sC_2\Delta_{11,32,(0+2)(3+0)} + \Delta_{11,32}) + R_1(sC_2\Delta_{11,33,(0+2)(0+2)} + \Delta_{11,33}) + \Delta_{11,22,33} &= \\
 AR_1(-sC_2\Delta_{11,32,23} + \Delta_{11,32}) + R_1(sC_2\Delta_{11,33,22} + \Delta_{11,33}) + \Delta_{11,22,33} &= \\
 AR_1(sC_2\Delta_{11,22,33} + \Delta_{11,32}) + R_1(sC_2\Delta_{11,22,33} + \Delta_{11,33}) + \Delta_{11,22,33} &= \\
 (AR_1*sC_2 + R_1*sC_2 + 1)\Delta_{11,22,33} + AR_1\Delta_{11,32} + R_1\Delta_{11,33} &= \\
 (AR_1*sC_2 + R_1*sC_2 + 1)\Delta_{11,22,33} + AR_1(sC_1\Delta_{11,32,22} + \Delta_{11,32}) + \\
 R_1(sC_1\Delta_{11,33,22} + \Delta_{11,33}) &= \\
 (AR_1*sC_2 + R_1*sC_2 + 1)\Delta_{11,22,33} + AR_1(sC_1*0 + \Delta_{11,32}) + \\
 R_1(sC_1\Delta_{11,22,33} + \Delta_{11,33}) &= \\
 (AR_1*sC_2 + R_1*sC_2 + 1)\Delta_{11,22,33} + R_1*sC_1\Delta_{11,22,33} &= \\
 (AR_1*sC_2 + R_1*(sC_2 + sC_1) + 1)\Delta_{11,22,33} &= \\
 (AR_1*sC_2 + R_1*(sC_2 + sC_1) + 1)R_2\Delta_{11,22,33} &= \\
 (AR_1*sC_2 + R_1*(sC_2 + sC_1) + 1)R_2. &
 \end{aligned}$$

Аналогично формируется  $\Delta_{13}$ . Для удобства проведения выкладок на рис. 4 приводится изображение схемы числителя схемной функции.

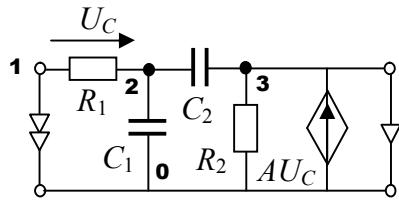


Рис. 4. Схема для нахождения числителя схемной функции

$$\begin{aligned}
 \Delta_{13} &= A\Delta_{13,(0+3)(1+2)} + \Delta_{13,(0+3)(0+3)} = \\
 -A\Delta_{13,3(1+2)} &= \\
 -A(R_1\Delta_{13,3(1+2)} + \Delta_{13,3(1+2),(2+1)(2+1)}) &= \\
 -AR_1\Delta_{13,3(1+2)} &= \\
 -A R_1 (sC_2\Delta_{13,3(1+2),(3+2)(3+2)} + \Delta_{13,3(1+2)}) &= \\
 -A R_1 (sC_2\Delta_{13,3(1+2),(0+2)(0+2)} + \Delta_{13,3(1+2)}) &= \\
 -A R_1 (sC_2\Delta_{13,3(1+0),22} + \Delta_{13,3(1+2)}) &= \\
 -A R_1 (sC_2\Delta_{13,31,22} + \Delta_{13,3(1+2)}) &= \\
 -A R_1 (-sC_2\Delta_{11,22,33} + \Delta_{13,3(1+2)}) &= \\
 -A R_1 (-sC_2\Delta_{11,22,33} + (sC_1\Delta_{13,3(1+2),22} + \Delta_{13,3(1+2)})) &= \\
 -A R_1 (-sC_2\Delta_{11,22,33} + sC_1\Delta_{13,31,22}) &= \\
 -A R_1 (-sC_2\Delta_{11,22,33} - sC_1\Delta_{11,22,33}) &= \\
 A R_1 (sC_2 + sC_1)\Delta_{11,22,33} &= A R_1 (sC_2 + sC_1)R_2\Delta_{11,22,33} = A R_1 (sC_2 + sC_1)R_2
 \end{aligned}$$

Результаты для  $\Delta_{11}$  и  $\Delta_{13}$ , полученные на основе матричного метода выделения параметров, соответствуют формулам (1) и (2), полученным с помощью МСО. Следует отметить, что операции с индексами (матричными определителями) существенно более утомительны и сложны в проверке. Для их выполнения необходимо иметь перед глазами рисунки схемы числителя и знаменателя схемной функции, то есть, по сути, проводить операции МСО. Поэтому PDD-метод предназначен скорее для компьютерной реализации, чем для инженерных расчетов без компьютера.

Достоинством PDD-диаграмм является возможность совместного отображения знаменателя и числителя, как показано на рис. 5. В канонических PDD-диаграммах используется одинаковый порядок выделения элементов для всех миноров, что облегчает компьютерную

обработку. Рис.5, б иллюстрирует возможность отображения на канонической PDD-диаграмме оптимального разложения числителя и знаменателя (2), что позволяет уменьшить как число операций, так и число вершин диаграммы.

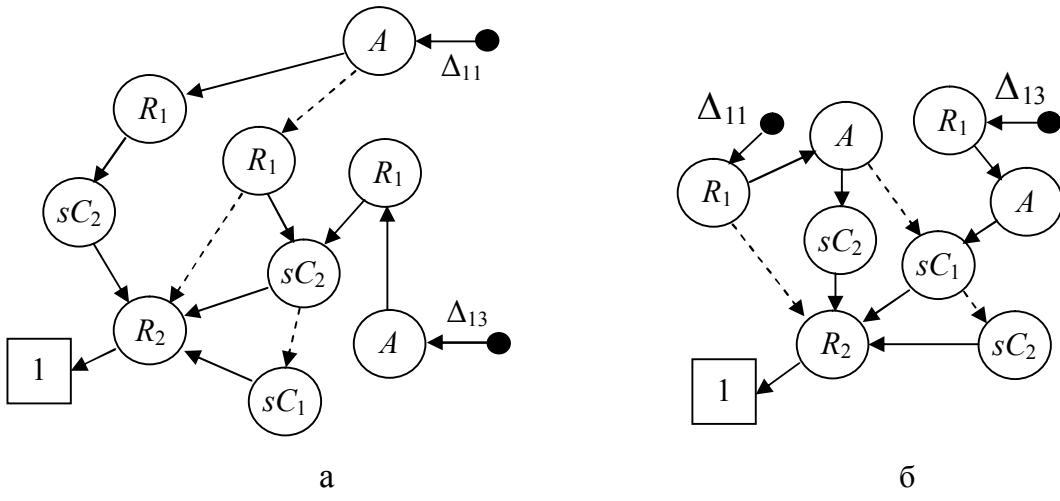


Рис. 5. Канонические PDD-диаграммы для нахождения  $\Delta_{11}$  и  $\Delta_{13}$ ,  
а – PDD-диаграмма [14] без учета максимального показателя участия  $R_1$  в (1)  
(«\*» = 6, «+» = 3, число PDD-вершин = 9);  
б – оптимальная PDD-диаграмма для выражения (2)  
(«\*» = 5, «+» = 3, число PDD-вершин = 8)

Для формирования оптимальных выражений используется МСО в сочетании с правилами первоочередного выделения параметра с максимальным числом участий в слагаемых развернутого выражения определителя. Однако этого недостаточно, поскольку перед выбором очередного параметра требуется также соблюдать правило кратности – объединять кратные параметры, например, параллельные проводимости.

В противном случае сформированное выражение не будет оптимальным, например, получится формула (1) вместо формулы (2). Пренебрежение учетом кратных параметров для сложных схем приводит многократному возрастанию объема результирующего выражения по сравнению с оптимальными выражениями МСО, генерируемыми программой CIRSYM (автор В.В.Филаретов). Формула записывается на диск по мере формирования, а время генерации определяется ее длиной.

Для построения PDD-диаграмм, эффективных при компьютерной обработке следует выполнять ряд требований.

1. Диаграмма должна быть канонической, то есть порядок следования параметров в каждом пути должен быть неизменным. Не допускается повторение вершин с тем же параметром и теми же потомками.

2. Перед выполнением пункта 1 необходимо проверить, получались ли те же самые подсхемы прежде, для другого пути выделения, и появлялся ли полученный результат ранее.

3. Иногда пункта 2 недостаточно, чтобы сохранить уникальность, поэтому, прежде чем создавать каждую вершину, нужно проверить ее существование. Если такая вершина есть, то следует ее использовать. В противном случае нужно создавать новую вершину.

4. Для выполнения пунктов 2 и 3 необходимо реализовать кэш результатов и кэш существующих вершин.

5. Невозможно перечислять кэш каждый раз, когда требуется существующий результат. Для его немедленного получения можно использовать хеш-таблицы, например, называемые в C++ хеш-картами (библиотека STL). Это обеспечивает быстрый доступ к данным. Необходимо создать хеш-ключи, которые отличаются для каждой вершины, промежуточной подсхемы и операнда операции.

**Иерархические безызбыточные методы схемных определителей и диаграмм деления.** Отсутствие промежуточной модели в виде матрицы или графа позволяет представить иерархическое решение наиболее наглядно. При этом для анализа подсхем используется один из алгоритмов: либо схемного, либо матричного выделения параметров, которые применяются для анализа схем без разделения на подсхемы.

**Пример 3. Иерархический анализ RC-фильтра на рис. 6 [14].** Разложение определителей подсхем I и II выполняется аналогично схемно-алгебраическим операциям, используемым в примере 1.

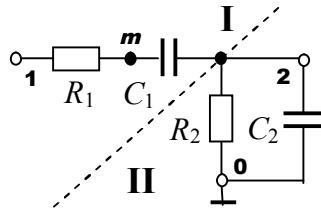


Рис. 6.  $RC$ -фильтр [14]

$$\begin{aligned}
 \Delta_I &= \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right| = R_1 \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ C_1 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ C_1 \end{array} \right| = \\
 &= R_1 \left[ C_1 \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \textcircled{1} & \bullet \\ \textcircled{2} & \textcircled{0} \end{array} \right| \right] + C_1 \left| \begin{array}{cc} \textcircled{1} & \textcircled{2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \textcircled{1} & \bullet \\ \textcircled{2} & \textcircled{0} \end{array} \right| = \\
 &= R_1 C_1 \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \\ \textcircled{2} \end{array} \right| + C_1 \left| \begin{array}{cc} \textcircled{1} & \textcircled{2} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{cc} \textcircled{1} & \bullet \\ \textcircled{2} & \textcircled{0} \end{array} \right| = \\
 &= (R_1 C_1 + 1) \left| \begin{array}{cc} \textcircled{1} & \textcircled{2} \end{array} \right| + C_1 \left| \begin{array}{cc} \textcircled{1} & \textcircled{2} \end{array} \right| = (\Delta_{II} + \Delta_{I2}) + \Delta_{I3}. \quad (3)
 \end{aligned}$$

В конце выражения (3) показано представление  $\Delta_I$  в виде суммы слагаемых, необходимое для построения совмещенной диаграммы числителя и знаменателя. На рис.7 представлена диаграмма деления  $\Delta_I$  для общего случая, когда узел  $m$  на рис.3 является внешним. В этом случае в выражении  $\Delta_I$  было бы 4, а не 2, слагаемых, поскольку потребовался бы учет узла  $m$  в нуллорных деревьях под знаками определителя.

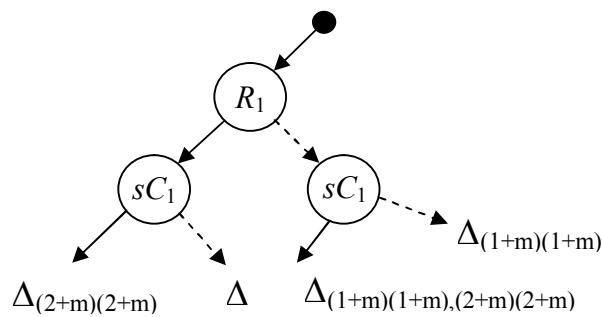


Рис. 7. PDD-диаграмма с внешним узлом  $m$  для подсхемы I

На рис.8 представлена диаграмма деления, соответствующая выражению (3). Объединению двух слагаемых в одном соответствует два пути

из корня диаграммы. Как видно, такой диаграмме не требуются скобки для изменения порядка суммирования, которые необходимы для компактной свертки алгебраических выражений. Знаки умножения в диаграмме также не используются, что является преимуществом по сравнению с бесскобочной «польской» записью.

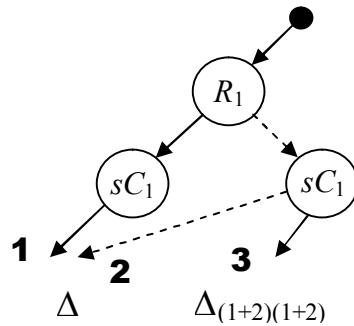


Рис. 8. PDD-диаграмма с внутренним узлом  $m$  для подсхемы I

Для второй подсхемы получаем

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\text{II}} &= \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \boxed{R_2} \\ \hline C_2 \end{array} \right| = R_2 \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \hline C_2 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \hline C_2 \end{array} \right| = \\
 &= R_2 \left[ C_2 \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \hline \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \hline \end{array} \right| \right] + C_2 \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \hline 0 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \hline \end{array} \right| = \\
 &= (R_2 C_2 + 1) \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \hline \end{array} \right| + R_2 \left| \begin{array}{c} \textcircled{2} \\ \hline \end{array} \right| = (\Delta_{\text{III}} + \Delta_{\text{II2}}) + \Delta_{\text{II3}}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

На рис. 9 представлена диаграмма деления, соответствующая выражению (4). На всех PDD-диаграммах стрелки, выходящие от вершины с сопротивлением, обозначают его удаление (сплошная стрелка) или стягивание (прерывистая стрелка). В случае вершины с проводимостью, наоборот, выходящая сплошная стрелка указывает на стягивание, а выходящая прерывистая стрелка обозначает удаление этой проводимости.

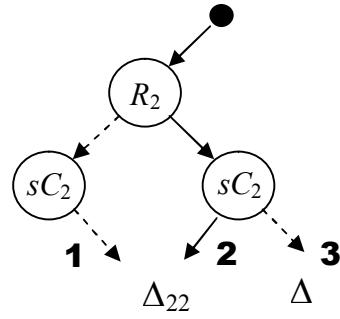


Рис. 9. PDD-диаграмма для подсхемы II

Объединение подсхем I и II выполняется следующим образом

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \Delta_I \circ \Delta_{II} = [(\Delta_{I1} + \Delta_{I2}) + \Delta_{I3}] [(\Delta_{II1} + \Delta_{II2}) + \Delta_{II3}] = \\
 &= \left[ (R_1 C_1 + 1) \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + C_1 \begin{vmatrix} \circ - \circ \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right] \circ \left[ (R_2 C_2 + 1) \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ 2 & \perp \end{vmatrix} + R_2 \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ 2 & \perp \end{vmatrix} \right] = \\
 &= (R_1 C_1 + 1)(R_2 C_2 + 1) \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ 1 & 2 \\ \perp \end{vmatrix} + (R_1 C_1 + 1)R_2 \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ 1 & 2 \\ \perp \end{vmatrix} + \\
 &\quad + C_1(R_2 C_2 + 1) \begin{vmatrix} \circ - \circ \\ 1 & 2 \\ \perp \end{vmatrix} + C_1 R_2 \begin{vmatrix} \circ - \circ \\ 1 & 2 \\ \perp \end{vmatrix}. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Формирование числителя  $\Delta_{12}$  и знаменателя  $\Delta_{11}$  схемной функции выполняется путем добавления к исходной схеме со схемным определителем (5) вспомогательных подсхем. Для нахождения числителя используется нуллор, норатор которого заменяет независимый источник, а нуллатор – приемник напряжения. Вспомогательная схема для нахождения знаменателя – это идеальный проводник (параллельное соединение одинаково направленных норатора и нуллатора), включенный вместо независимого источника напряжения.

Выражение для числителя принимают вид соответственно (6) и (7).

$$\begin{aligned}
 \Delta_{12} &= \Delta \circ \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \nabla & \nabla \\ 1 & 2 \\ \perp \end{vmatrix} = C_1 R_2 \begin{vmatrix} \circ - \circ \\ 1 & 2 \\ \perp \end{vmatrix} \circ \begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \nabla & \nabla \\ 1 & 2 \\ \perp \end{vmatrix} = C_1 R_2 \begin{vmatrix} \circ - \circ \\ 1 & 2 \\ \perp \end{vmatrix} = \\
 &= C_1 R_2 = \Delta_{I3} \Delta_{II3}. \tag{6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{11} &= \Delta \circ \left| \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \bot \end{array} \right| = (R_1 C_1 + 1)(R_2 C_2 + 1) \left| \begin{array}{cc} \circ & 1 \\ 1 & \text{---} \\ \bot & \circ \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \bot \end{array} \right| + \\
&+ C_1 R_2 \left| \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ 1 & 2 \\ \text{---} & \circ \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ \bot \end{array} \right| = [(R_1 C_1 + 1)(R_2 C_2 + 1) + C_1 R_2] \left| \begin{array}{cc} \circ & \circ \\ 1 & 2 \\ \text{---} & \circ \end{array} \right| = \\
&= [(R_1 C_1 + 1)(R_2 C_2 + 1) + C_1 R_2] = (\Delta_{II} + \Delta_{I2})(\Delta_{III} + \Delta_{II2}) + \Delta_{I3} \Delta_{II3}. \quad (7)
\end{aligned}$$

На рис.10 показана диаграмма, соответствующая выражениям (6) и (7), при построении которой учтено вхождение выражения (6) в выражение (7). На диаграммах, отображающих объединение подсхем, используются только сплошные линии, а точками выхода увеличенных по размеру вершин являются номера параметров соответствующих подсхем.

Таким образом, диаграмму нетрудно построить, по крайней мере, для передаточных функций по напряжению и по току, у которых множество слагаемых числителя является подмножеством слагаемых знаменателя.

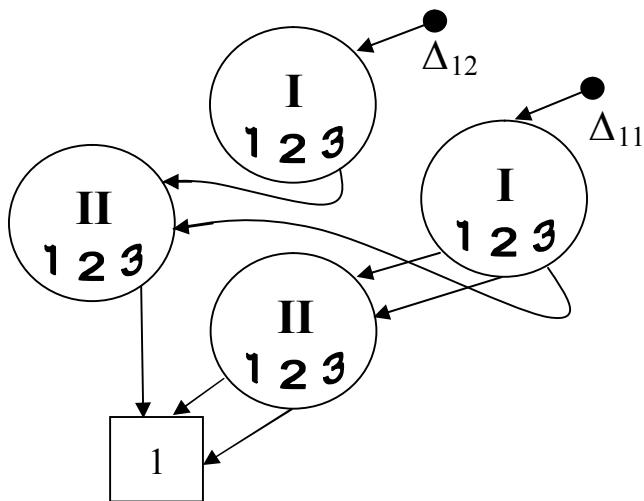


Рис. 10. PDD-диаграмма объединения подсхем I и II

**Пример 4. Иерархический анализ каскадного соединения двух схем вида рис. 1.** При символьном анализе схемы на рис. 11 учтем одинаковую структуру подсхем I и II и взаимное соответствие параметров.

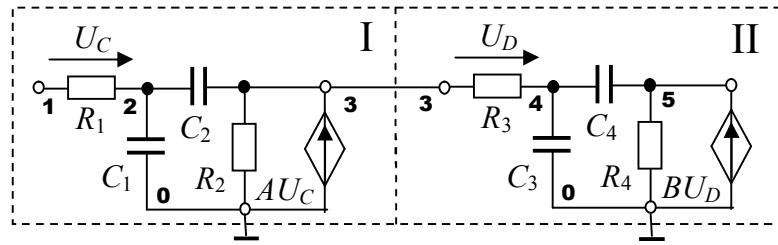


Рис. 11. Каскадное соединение схем рис.1

Ниже приводится разложение определителя подсхемы I.

$$\begin{aligned}
 \Delta_I &= \left| \begin{array}{c} U_C \\ \textcircled{1} \quad R_1 \quad \textcircled{2} \quad C_2 \quad \textcircled{3} \\ C_1 \quad \textcircled{0} \quad R_2 \quad \textcircled{4} \quad AU_C \end{array} \right| = A \left| \begin{array}{c} U_C \\ \textcircled{1} \quad R_1 \quad \textcircled{2} \quad C_2 \quad \textcircled{3} \\ C_1 \quad \textcircled{0} \quad R_2 \quad \textcircled{4} \quad AU_C \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad R_1 \quad \textcircled{2} \quad C_2 \quad \textcircled{3} \\ C_1 \quad \textcircled{0} \quad R_2 \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{5} \end{array} \right| = \\
 &= AR_1R_2 \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad C_2 \quad \textcircled{3} \\ C_1 \quad \textcircled{0} \end{array} \right| + R_2 \left[ R_1 \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad C_2 \quad \textcircled{3} \\ C_1 \quad \textcircled{0} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \\ C_1 \quad \textcircled{0} \end{array} \right| \right] = \\
 &= AR_1R_2 \left[ sC_1 \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad C_2 \quad \textcircled{3} \\ C_1 \quad \textcircled{0} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad C_2 \quad \textcircled{3} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| \right] + \\
 &+ R_2 \left[ R_1s(C_1+C_2) \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| + s(C_1+C_2) \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| \right] = \\
 &= AR_1R_2 \left[ sC_1 \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| + sC_2 \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| \right] + \\
 &+ R_2 \left[ [R_1s(C_1+C_2)+1] \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| + s(C_1+C_2) \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{3} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| \right]. \quad (8)
 \end{aligned}$$

В результате замены на МСАД определителей нуллорных схем в выражении (8) получаем

$$\begin{aligned}\Delta_I = & AR_1R_2(sC_1\Delta_{I(0+3)(1+0)} + sC_2\Delta_{I(0+3)(1+3)}) + \\ & + R_2[R_1s(C_1+C_2)+1]\Delta_{I(33)} + R_2s(C_1+C_2)\Delta_{I(11)(33)}.\end{aligned}\quad (9)$$

Заменой обозначений на обозначения подсхемы II из выражения (8) получается определитель подсхемы II.

$$\begin{aligned}\Delta_{II} = & BR_3R_4 \left[ sC_3 \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{5} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{0} \end{array} \right| + sC_4 \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{5} \\ \textcircled{0} \quad \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| \right] + \\ & + R_4 \left[ [R_3s(C_3+C_4)+1] \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{5} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| + s(C_3+C_4) \left| \begin{array}{c} \textcircled{3} \quad \textcircled{5} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| \right].\end{aligned}\quad (10)$$

При переходе к обозначениям МСАД из выражения (10) получается

$$\begin{aligned}\Delta_{II} = & BR_3R_4(sC_3\Delta_{II(0+5)(3+0)} + sC_4\Delta_{II(0+5)(3+5)}) + \\ & + R_4[R_3s(C_3+C_4)+1]\Delta_{II(55)} + R_4s(C_3+C_4)\Delta_{II(33)(55)}.\end{aligned}\quad (11)$$

В табл.1 на основе выражений (8) и (10) выполнена операция  $\Delta = \Delta_I \circ \Delta_{II}$ . Показано, что из 16 пар параметров, взятых по одному из определителей подсхем I и II, 7 пар бракуются как вырожденные схемы (незакрашенные клетки табл.1), а остальные 9 пар группируются по параметрам объединенной схемы (в соответствие с окраской клеток табл.1), как имеющие одинаковые нуллорные деревья. Отсюда

$$\begin{aligned}\Delta_{I+II} = & \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{5} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \textcircled{0} \end{array} \right| [BR_3R_4sC_3 * AR_1R_2s(C_2+C_1) + AR_1R_2sC_1 * BR_3R_4sC_4] + \\ & + \left| \begin{array}{c} \textcircled{1} \quad \textcircled{5} \\ \textcircled{0} \quad \textcircled{0} \\ \textcircled{0} \end{array} \right| AR_1R_2sC_2 * BR_3R_4sC_4 +\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left| \begin{array}{c} \circ \ 1 \ 5 \\ \circ \end{array} \right| \{ R_2[R_1s(C_1+C_2)+1][BR_3R_4sC_4+R_4(R_3s(C_3+C_4)+1)] + \right. \\
& \left. AR_1R_2sC_2R_4[R_3s(C_3+C_4)+1] \} + \\
& + \left| \begin{array}{c} \circ \ 1 \ 5 \\ \square \end{array} \right| R_2s(C_1+C_2)*[BR_3R_4sC_4+R_4(R_3s(C_3+C_4)+1)]. \quad (12)
\end{aligned}$$

В результате замены на МСАД определителей нуллорных схем в выражении (12) получаем

$$\begin{aligned}
\Delta_{I+II} = & \Delta_{I+II(5+0)(0+1)} [BR_3R_4sC_3*AR_1R_2s(C_2+C_1)+AR_1R_2sC_1*BR_3R_4sC_4] + \\
& + \Delta_{I+II(5+0)(5+1)} AR_1R_2sC_2*BR_3R_4sC_4 + \\
& + \Delta_{I+II(55)} \{ R_2[R_1s(C_1+C_2)+1][BR_3R_4sC_4+R_4(R_3s(C_3+C_4)+1)] \\
& \quad + AR_1R_2sC_2R_4[R_3s(C_3+C_4)+1] \} + \\
& + \Delta_{I+II(11)(55)} R_2s(C_1+C_2)*[BR_3R_4sC_4+R_4(R_3s(C_3+C_4)+1)]. \quad (13)
\end{aligned}$$

На рис. 12 представлена диаграмма, построенная на основе выражений (8), (10), (12) и табл. 1. В числитель  $\Delta_{15}$  входят первый и второй объединенные параметры, поскольку они совместимы с нуллом 0150. В знаменатель  $\Delta_{11}$  входят второй и третий объединенные параметры как совместимые с нуллом 0101.

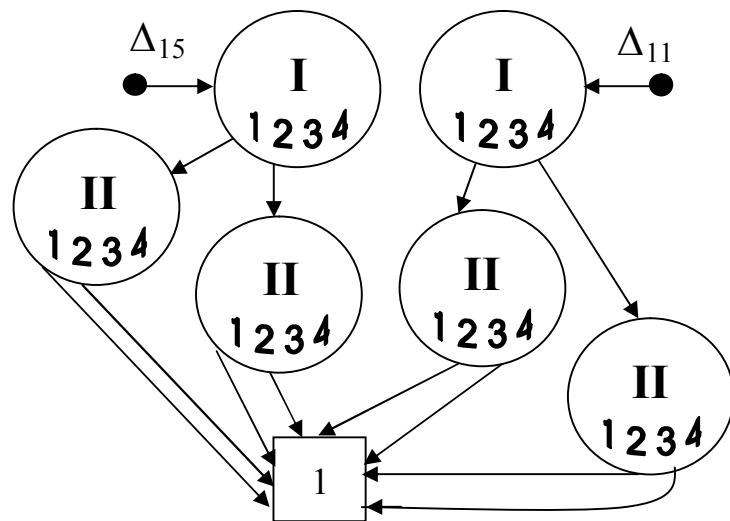
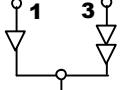
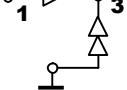
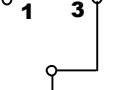
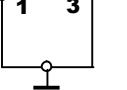
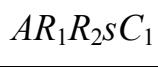
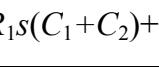
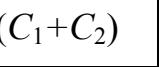
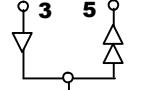
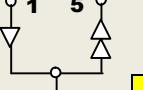
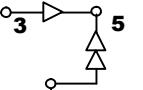
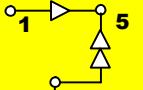
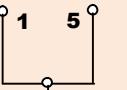
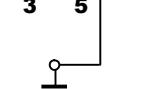
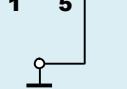
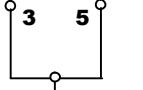


Рис. 12. Диаграмма для нахождения числителя и знаменателя передаточной функции по напряжению схемы на рис. 11

Таблица 1. Объединение подсхем I и II

<i>I</i>				
<i>II</i>				
$BR_3R_4sC_3$				
$BR_3R_4sC_4$				
$R_4[R_3s(C_3+C_4)+1]$				
$R_4s(C_3+C_4)$				

Рассмотренные методики иерархического анализа на основе схемного и матричного выделения параметров реализованы в компьютерных программах [14,20], в том числе предусматривающих построение PDD-диаграмм [14]. Соответствующие выражениям (12) и (13) параметры подсхем I и II ( $X_1$  и  $X_2$ ), а также результат их объединения (подсхема  $X_3$ ) представляются в виде последовательных выражений. Такие выражения, сгенерированные программой CIRTRE [20] (автор В.В.Филаретов), имеют вид:

$$\begin{aligned}
X1\_130\_3001 &= R2^*(y1*(R1*Ka*1)); \quad X1\_100 = R2^*(y1*(R1*1*1)+y2*(R1*1*1)+1); \\
X1\_000 &= R2^*(y1*(1)+y2*(1)); \quad X1\_130\_3031 = R2^*(y2*(R1*Ka*1)); \\
X2\_350\_5003 &= R4^*(y3*(R3*Kb*1)); \quad X2\_300 = R4^*(y3*(R3*1*1)+y4*(R3*1*1)+1); \\
X2\_000 &= R4^*(y3*(1)+y4*(1)); \quad X2\_350\_5053 = R4^*(y4*(R3*Kb*1)); \\
X3\_150\_5001 &= X2\_350\_5003*X1\_130\_3001 + X2\_350\_5003*X1\_130\_3031 \\
&\quad + X2\_350\_5053*X1\_130\_3001; \\
X3\_100 &= X2\_300*X1\_100 + X2\_300*X1\_130\_3031 + X2\_350\_5053*X1\_100; \\
X3\_000 &= X2\_300*X1\_000 + X2\_350\_5053*X1\_000; \\
X3\_150\_5051 &= X2\_350\_5053*X1\_130\_3031; \\
D15 &= X3\_150\_5001 + X3\_150\_5051; \quad D11 = X3\_100 + X3\_150\_5051. \quad (14)
\end{aligned}$$

В выражении (14)  $y1=sC_1$ ,  $y2=sC_2$ ,  $y3=sC_3$ ,  $y4=sC_4$ ;  $D15$  и  $D11$  – числитель и знаменатель передаточной функции по напряжению. В обозначениях программы CIRTRE для параметров подсхем (после символа подчеркивания) первая «тройка» номеров указывает узлы подключения, а вторая «четверка» номеров образована парами узлов подсоединения норатора и нуллатора в соответствующей параметру нуллпорной схеме.

Передаточная функция по напряжению  $\Delta_{15}/\Delta_{11}$  в виде единого выражения может быть получена с помощью программы CIRSYM:

$$\begin{aligned}
U &= \\
(s*s^* &(Kb*R4*R2*R3*(c4+c3)*Ka*R1*(c2+c1))) \\
/ \\
(s*s^* &(R2*R4*(c4*(c1*(R1*R3*(Kb+1))+c2*(R1*(R3*(Ka*(Kb+1)+Kb+1))))+ \\
c2*(R1*(c3*(R3*(Ka+1))))+c1*(R1*(c3*(R3)))))+ \\
s^* &(R2*R4*(c4*(R3*(Kb+1))+c2*(R1*(Ka+1))+c1*(R1*(1))+c3*(R3)))+ \\
1^* &(R2*R4*(1))). \quad (15)
\end{aligned}$$

Выражение (15) приводит к тому же численному результату, что и выражение (14) или выражения (12) и (13) совместно с диаграммой на рис. 12. Для проверки примем в схеме на рис. 11 произвольные значения

параметров:  $R1=1$ ;  $c1=2$ ;  $c2=3$ ;  $R2=4$ ;  $Ka=5$ ;  $R3=6$ ;  $c3=7$ ;  $c4=8$ ;  $R4=9$ ;  $Kb=10$ . На частоте 1000 Гц получаются следующие результаты:

$$D15 = -3.1977518259529522e+13$$

$$D11 = -1.6201942584792291e+13 + 1.3345485592449442e+08j.$$

Эти результаты совпадают во всех разрядах как для формул, полученных вручную, так и для формул, сформированных программами CIR TRE и CIR SYM.

### Выводы

1. Отсутствие избыточности (взаимно уничтожающихся слагаемых) в формируемых выражениях делает методы схемных определителей (МСО) [11,12] и диаграмм деления параметров (PDD) [13,14] предпочтительными по сравнению с другими известными методами. При этом используются операции непосредственно над списком элементов схемы и производных схем, минуя отображение матрицей или графиком.

2. PDD-метод основан на матричном выделении параметров [17], обобщенным на нерегулярные типы элементов по аналогии с МСО. При этом одновременно выделяются не один элемент, а четыре элемента матрицы, соответствующие одному параметру схемы. Это обуславливает взаимно однозначное соответствие обоих рассматриваемых методов и возможность построения как оптимальных по сложности выражений, так и оптимальных PDD-диаграмм.

3. Методы схемных определителей и диаграмм деления параметров в отличие от других методов, используют не обычные (ненаправленные), а ориентированные нуллоры. Это позволяет при анализе электронных цепей находить как модуль, так и знак схемных определителей, что важно, например, в случаях эквивалентных преобразований и исследования устойчивости.

4. Дополнительным преимуществом методов схемных определителей и диаграмм деления параметров перед известными методиками и программами является простое обобщение для иерархического анализа делением схем на части.

## **Список литературы**

1. Lin P.M. Symbolic network analysis.– Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo: Elsevier, 1991.– 319 p.
2. Gielen G.G.E., Wambacq P., Sansen W. Symbolic analysis methods and applications for analog circuits: a tutorial overview // Proc. of the IEEE.– 1994.– Vol. 82, no. 2.– P. 287–303.
3. Yu Q., Sechen C. Approximate symbolic analysis of large analog integrated circuits // IEEE/ACM Int. Conf. on Computer-Aided Design.– 11.1994.– P. 664–671.
4. Hassoun M.M., Lin P.M. A hierarchical network approach to symbolic analysis of large-scale networks // IEEE Trans. on circuits and systems – 1: Fundamental theory and applications.– 1995.– Vol. 42, N 4.– P. 201–211.
5. Wambacq P., Dobrovolný P., Gielen G., Sansen W. Symbolic analysis of large analog circuit using a sensitivity-driven enumeration of common spanning trees // IEEE Trans. on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing.– 1998.– Vol. CAS-45, no. 10.– P. 1342–1350.
6. Pierzchala M., Rodanski B. Generation of sequential symbolic network function fot large-scale network by reduction to two-port // IEEE Trans. on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications.– 2001.– Vol. 48, no. 7.– P. 906–909.
7. Bryant R.E. Graph-based algorithms for boolean function manipulation // IEEE Trans. on Computers.– 1986.– Vol. 35, no. 8.– P. 677–691.
8. Shi C.-J., Tan X. Canonical symbolic analysis of large analog circuit with determinant decigen diagram // IEEE Trans. on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systens.– 2000.– Vol. 19, no. 1.–P. 1–18.
9. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern // Annalen der Physik.– 1902.– Vol. 9, no. 13.– P. 1304–1329.
10. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // Annalen der Physik.– 1904.– Bd 15, no. 12.– S. 385–394.
11. Filaretov V.V. A topological analysis of electronic circuits by a parameter extraction method // Electrical Technology Russia.– 1998.– No. 2.– P. 47–61.
12. Filaretov V.V., Korotkov A.S. Generalized parameter extraction method in network symbolic analysis // Proc. of the European Conf. on

circuit theory and desing (ECCTD–2003).– Kraków, Poland, 2003 (Sept).– Vol. 2.– P. 406–409.

13. Lasota S. Parameter decision diagrams in the analysis and structural synthesis: part I, II, III // 10<sup>th</sup> Int. Workshop on Symbolic and Numerical Methods, Modeling and Application to Circuit Design (SMACD'08.– Erfurt (Germany), 10.2008.– P. 149–157, 172–179, 180–187.
14. Lasota S. Multilevel hierarchical always cancellation-free symbolic analysis method for large electric networks // Elektronika: konstrukcje, technologie, zastosowania (Poland). – 2013.– Vol. 54, no. 2.– P. 51–57.
15. Сигорский В.П. Анализ электронных схем.– Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1960.– 176 с.
16. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем.– Киев: Техніка, 1970.– 396 с.
17. Alderson G.E., Lin P.M. Computer generation symbolic network functions – a new theory and implementation // IEEE Trans. on Circuit Theory.– 1973.– Vol. CT-20, no. 1.– P. 48–56.
18. Shi G., Chen W., Shi C.J.-R. A graph reduction approach to symbolic circuit analysis // Asia and South pacific design automation conference (ASP-DAS'2007).– 01.2007.– P. 197–202.
19. Xu X.H., Shi G., Li X. Hierarchical exact symbolic analysis of large analog integrated circuits by symbolic stamps // 16<sup>th</sup> Asia and South pacific design automation conference (ASP-DAS'2011).– 01.2011.– P. 70–76.
20. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных электрических цепей с автономными подсхемами методом нуллорных схем // Электричество. – 2011. – №12. – С. 42–47.

**Slawomir Lasota** – PhD Eng., Institute of Electronics Silesian University of Technology. Akademicka 16, Gliwice 44-100.  
E-mail: slawomir.lasota@polsl.pl

# **ОСОБЕННОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОКОЛЕБАНИЙ В РЕЛЕЙНЫХ ЦЕПЯХ И СИСТЕМАХ С ИДЕАЛЬНЫМ ИНТЕГРАТОРОМ В КОНТУРЕ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ**

А. Г. Силина, М. В. Соклакова, Э. П. Чернышев

*Оценка устойчивости по Ляпунову автоколебаний нелинейной цепи, содержащей релейный элемент и идеальный интегратор, является сложной и теоретически важной задачей. Приближенные методы анализа не позволяют оценить устойчивость в этом случае. В работе описан аналитический метод оценки устойчивости такой системы с помощью аппарата дискретных цепей.*

*The evaluation of Lyapunov stability of self-oscillations of nonlinear circuit containing relay element and an ideal integrator, is a difficult and theoretically important task. Approximate methods of analysis to assess sustainability. The article describes an analytical method for assessing the sustainability of such a system with the help of discrete circuits.*

**Введение.** Разработанные авторами точные аналитические методы [1] описания автоколебаний (АК) в релейных цепях (РЦ), а также аналитические методы оценки устойчивости АК позволяют проанализировать их характеристики и в тех случаях, когда приближенные классические графо-аналитические методы (например, гармонического баланса) при расчете АК по их первой гармонике [2] не дают ответа.

Одним из таких важных и для теории, и для практики случаев является использование идеального интегратора в линейной части (ЛЧ) РЦ. Даже при анализе устойчивости симметричных АК через  $\tau = T/2$  (т. е. через половину периода  $T$ ) авторы столкнулись с существенными отклонениями от основной методики [3]. Поэтому крайне важно решить

этот вопрос в разрабатываемом новом аналитическом методе [4] оценки устойчивости АК через период  $T$ , поскольку только в этом случае можно будет исследовать несимметричные АК. Особенно остро вопрос развития методики [4] стоит именно в рассматриваемом случае идеального интегратора в ЛЧ (т. е. в контуре обратной связи) РЦ.

*Примечание.* Вариант метода  $Mt$  (для симметричных АК, описанный в [3]) является контрольным для проверки правомерности разрабатываемого в [4] метода, названного  $MT$ .

Постановка задачи. Рассматриваем релейный элемент (РЭ) с нормированной гистерезисной характеристикой

$$y = sign[x - signy(t-)] \quad (1)$$

при единичном пороге срабатывания (половине ширины гистерезисной характеристики) и единичной высоте петли гистерезиса. В формуле (1):  $y(t)$ ,  $x(t)$  – выходная и входная переменные РЭ;  $t$  – время;  $y(t-) = \lim_{\gamma \rightarrow 0} y(t-\gamma)$ .

В контуре обратной связи РЭ находится идеальный интегратор с передаточной функцией (ПФ)

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = -k \frac{1}{s}, \quad (2)$$

где  $X(s) \div x(t)$ ,  $Y(s) \div y(t)$  изображения по Лапласу [5] переменных РЦ;  $s$  – аргумент преобразования Лапласа;  $k = \text{const}$  – статический коэффициент.

Поскольку в разрабатываемом методе  $MT$  (при анализе устойчивости АК через период  $T$ ) непосредственное использование (2), как показано ниже оказалось невозможным, пришлось использовать «обходное» решение задачи, взяв вместо (2) ПФ фильтра нижних частот (ФНЧ) вида

$$H(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = -k \frac{1}{(s + \beta)}, \quad \beta \rightarrow 0. \quad (3)$$

Таким образом, при использовании ПФ (3), где решение удалось найти, бесконечно малый вспомогательный параметр  $\beta$  устремляем к нулю.

Результаты расчета параметров АК и анализа их устойчивости в разрабатываемом методе  $MT$  на каждом этапе будем сравнивать как с

данными разработанного метода  $Mt$ , так и с очевидной физической картиной процессов при использовании идеального интегратора.

Устойчивость АК оценивается, как и в [3] по Ляпунову:

$$|x_\xi(0)| \leq \varepsilon \rightarrow |x_\xi(t)| \leq \alpha(\varepsilon), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4)$$

то есть в (4) при начальном значении вариации  $x_\xi = \tilde{x} - x$ , меньшей бесконечно малой  $\varepsilon$ , конечное значение вариации не должно превышать бесконечно малой  $\alpha$ , зависящей от  $\varepsilon$  (здесь  $\tilde{x}$  – возмущенное значение координаты).

**Расчет параметров АК в РЦ.** Процесс расчета параметров симметричных АК в методе  $Mt$ , где

$$x(t) = -x(t \pm T/2), \quad y(t) = -y(t \pm T/2), \quad (5)$$

фактически описан в [3, 4]. Но при разработке метода  $MT$ , который предполагается использовать и для расчета АК сложной формы, и для несимметричных АК, вместо (5) будем применять более общее условие:

$$x(t) = x(t \pm T), \quad y(t) = y(t \pm T), \quad (6)$$

то есть в (6) предполагается повторяемость переменных через период.

Аналогично [4] записываем изображение условного 1-го периода сигнала на выходе РЭ при  $0 < t < T$  (в общем случае):

$$Y_1(s) = \frac{(1 - 2e^{-s\tau} + e^{-sT})}{s}, \quad (7)$$

где  $\tau$  – момент переключения РЭ внутри периода  $T$ ; в случае симметричных АК  $\tau = T/2$ .

Изображение условного 1-го импульса на выходе РЭ при  $t > 0$

$$Y(s) = \frac{Y_1(s)}{(1 - e^{-sT})}, \quad (8)$$

то есть (8) соответствует сумме убывающей геометрической прогрессии.

Тогда условный сигнал на выходе ЛЧ при использовании вспомогательного варианта (3) будет согласно [5]

$$X(s) = H(s)Y(s) = \frac{-k(1 - 2e^{-s\tau} + e^{-sT})}{(s + \beta)s(1 - e^{-sT})} = \frac{A_1}{s + \beta} + \frac{X_1(s)}{1 - e^{-sT}} = X_{CB}(s) + X_{ВЫН}(s), \quad (9)$$

где  $X_{\text{CB}}(s)$  – изображение свободной составляющей решения, а вынужденная составляющая  $X_{\text{Вын}}$  должна иметь математическую форму воздействия (8); здесь  $X_1(s)$  аналогично (7) – искомое описание АК в интервале условного 1-го периода  $0 < t < T$ .

Коэффициент  $A_1$  согласно [5] будет

$$A_1 = \frac{k(1 - 2e^{\beta\tau} + e^{\beta T})}{[\beta(1 - e^{\beta T})]} \quad (10)$$

С учетом (9), (10) находим искомое описание установившихся периодических АК при  $0 < t < T$ :

$$X_1(s) = H_1(s)(1 - 2e^{-s\tau}) - \left( \frac{A_1}{s + \beta} \right).$$

Здесь переходная характеристика  $h_1(t)$  РЦ согласно [5]

$$H_1(s) = \frac{H(s)}{s} = -\frac{1}{[s(s + \beta)]} \div h_1(t) = \frac{k}{\beta}[-1 + e^{-\beta t}] \delta_1(t), \quad (11)$$

где  $\delta_1(t)$  – единичная ступенчатая функция [5].

Таким образом, описание АК при  $0 < t < T$

$$x_1(t) = \frac{k}{\beta}(-1 + e^{-\beta t}) \delta_1(t) - A_1 e^{-\beta t} \delta_1(t) - \frac{2k}{\beta}(-1 + e^{-\beta(t-\tau)}) \delta_1(t - \tau). \quad (12)$$

Выше «по умолчанию» предполагалось, что при анализе симметричных АК условное исходное переключение РЭ при  $t = 0$  происходит в соответствии с (1) по правой ветви петли гистерезиса при  $x(0) = 1$ , а обратное переключение – при  $x(\tau) = x_1(\tau) = -1$ . Отсюда из (12):

$$x_1(0) = 1 = -A_1, \quad (13)$$

$$x_1(\tau) = -1 = \frac{k}{\beta}(-1 + e^{-\beta\tau}) + 1 \cdot e^{-\beta\tau}. \quad (14)$$

Из (14) фактически определяем момент переключений  $\tau$  внутри интервала 1-го периода:

$$e^{\beta\tau} = \frac{(k + \beta)}{(k - \beta)}; \tau = \frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{(k + \beta)}{(k - \beta)} \right]. \quad (15)$$

На основании (10), (15) и (13) получим уравнение для расчета периода АК:

$$\frac{k(1 - 2e^{\beta\tau} + e^{\beta T})}{\beta(1 - e^{-\beta T})} = -1.$$

Отсюда

$$e^{\beta T} = \left[ \frac{(k + \beta)}{(k - \beta)} \right]^2; T = 2\tau. \quad (16)$$

Поскольку рассматривается симметричная характеристика РЭ (1), то согласно (15), (16) переключение РЭ происходит точно посередине периода, что соответствует физической картине симметричных АК (5).

Дополнительная проверка для случая идеального интегратора (2), соответствующего (3) при  $\beta \rightarrow 0$ , дает при этом:

$$\begin{cases} A_1 = -k \frac{\tau}{2} = -1; \tau = \frac{2}{k}; T = 2\tau; \\ x_1(t) = (1 - kt)\delta_1(t) + 2k(t - \tau)\delta_1(t - \tau); \\ h_1(t) = -kt\delta_1(t), \end{cases} \quad (17)$$

Результат (17) полностью соответствует [3].

**Использование теории дискретных цепей для анализа устойчивости АК в РЦ.** Основные особенности применения теории дискретных цепей (ДЦ) для анализа устойчивости АК методом *МТ* (т. е. через период  $T$ ) описаны в [4] для общего случая (6).

Возмущающим входным сигналом, как рекомендовано в [2], считаем «исчезающее» воздействие

$$f_{\text{вх}}(t) = \varepsilon\delta(t) \quad (18)$$

вида дельта-функции  $\delta(t)$  [5], которое суммируется с сигналом  $x(t)$  на входе РЭ; площадь сигнала (18)  $\varepsilon \rightarrow 0$  (считаем бесконечно малой).

В результате все переменные РЦ получат вариации и будет происходить преждевременное срабатывание РЭ на бесконечно малые интервалы

$$\Delta t_n = \frac{x_\xi(nT)}{\dot{x}_0}, \quad (19)$$

где  $n$  – номер рассматриваемого периода АК;  $\dot{x}_0 = \dot{x}(0-)$  – скорость изменения координаты  $x$  в момент, предшествующий срабатываю РЭ.

Вариация сигнала на выходе РЭ (как разность между возмущенной и исходной координатами)  $y_\xi(nT)$  представляет собой фактически периодическую последовательность бесконечно коротких прямоугольных импульсов, которую приближенно можно описать дельта-функциями [5]:

$$y_\xi(t) = 2\Delta t_n \delta(t - nT), \quad (20)$$

где коэффициент «2» обусловлен переключением РЭ (1) с уровня « $-1$ » на уровень « $+1$ ».

Наличие дискретной последовательности (20) при анализе устойчивости АК и предопределяет переход к использованию теории ДЦ при решении поставленной задачи.

Соотношения (18)–(20) при переходе к ДЦ можно описать уравнениями

$$\begin{cases} y_\xi(nT) = 2\dot{x}_0^{-1} [\varepsilon \delta_0(nT) + x_\xi(nT)], \\ X_\xi(s) = H(s)Y_\xi(s) \end{cases}, \quad (21)$$

где  $\delta_0(nT)$  – дискретная дельта-функция [5], заменившая «исчезающее» воздействие (18), а в 1-ом из уравнений (21) осуществлен переход от вариаций  $x_\xi(t)$ ,  $y_\xi(t)$  к дискретным последовательностям [5].

При использовании  $z$ -преобразования [5] перейдем от уравнений (21) к уравнениям ДЦ вида

$$Y_\xi(z) = 2\dot{x}_0^{-1} [\varepsilon + X_\xi(z)]; \quad X_\xi(z) = H_D(z)Y_\xi(z). \quad (22)$$

Переход к ПФ  $H_D(z)$  ДЦ в (22) будет описан ниже, поскольку, так же как и в [4], является непростым.

ПФ замкнутой системы (22)

$$H_3(z) = \frac{X_\xi(z)}{\varepsilon} = \frac{2H_D(z)}{\dot{x}_0 - 2H_D(z)}, \quad (23)$$

причем знаменатель в (23) – это характеристический полином (ХП)

$$P(z) = \dot{x}_0 - 2H_D(z) = 0, \quad (24)$$

а корни  $z_k$  ХП (24) характеризуют устойчивость АК.

$$\text{В случае } |z_k| \leq 1, \quad (25)$$

и тем более, если корни в (25) по модулю меньше 1, решение уравнения (23) после разложения на простейшие дроби будет [5]:

$$x_\xi(nT) = \sum D_k z_k^n \varepsilon \delta_1(nT) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (26)$$

где  $D_k$  – коэффициенты разложения (23) на простейшие дроби.

Таким образом, при выполнении условия (25) вид (26) соответствует требованию (4) устойчивости по Ляпунову (при этом площадь  $\varepsilon$  «исчезающего» воздействия (18) предполагается бесконечно малой).

С учетом физической картины АК (5), (6), повторяющихся через период, один из корней (25), например,  $z_1$  должен быть  $z_1 = 1$  в методе  $MT$ , тогда как в методе  $Mt$  [3] имели  $z_1 = -1$ .

**Проблемы в реализации прямой оценки устойчивости АК в РЦ с идеальным интегратором.** Выясним, почему при анализе РЦ с идеальным интегратором (2) в данной работе используется «обходной путь» с ФНЧ (3) при  $\beta \rightarrow 0$ .

Как указано в [4], в случае оценки устойчивости АК методом  $MT$  (т. е. через период) при формировании ПФ ДЦ  $H_D(z)$  путем полного соответствия импульсных характеристик (ИХ) ДЦ  $h_D(nT) \div H_D(z)$  характеристикам аналоговой цепи  $h(t) \div H(s)$ , имеет две особенности: 1) необходимо учитывать оба срабатывания РЭ в течение одного периода; 2) в соответствии с [3] из ИХ ДЦ необходимо исключить начальное значение, т. е. должно выполняться условие  $h_D(0) = 0$ .

В результате ИХ ДЦ формируется по формуле:

$$h_D(nT) = h(nT) - h(nT - \tau) - h(0)\delta_0(nT) + h(-\tau)\delta_0(nT), \quad (27)$$

где  $\delta_0(nT)$  – дискретная дельта-функция [5], как указано выше.

В случае использования ПФ идеального интегратора (2), его ИХ

$$h(t) = -k\delta_1(t), \quad (28)$$

то есть описывается константой для любого  $t > 0$ . Подстановка (28) в (27) формально дает нулевую ИХ ДЦ  $h_D(nT) = 0 \div H_D(z) = 0$ . Это не позволяет

проводить анализ устойчивости АК предложенным методом *MT* без его корректировки.

**Использование «перехода от ФНЧ к интегратору» для анализа устойчивости АК.** В случае использования ПФ ФНЧ (3), его ИХ

$$h(t) = -ke^{-\beta t}\delta_1(t). \quad (29)$$

На основании (29) ИХ (27) соответствующей ДЦ будет

$$\begin{aligned} h_{\Delta}(nT) &= -ke^{-\beta nT}\delta_1(nT) + ke^{\beta\tau}e^{-\beta nT}\delta_1(t) + k\delta_0(nT) - ke^{\beta\tau}\delta_0(nT) \div \\ &\div H_{\Delta}(z) = k(1 - e^{\beta\tau}) - \frac{k(1 - e^{\beta\tau})z}{z - e^{-\beta T}} = -\frac{k(1 - e^{\beta\tau})e^{-\beta T}}{z - e^{-\beta T}}, \end{aligned} \quad (30)$$

где  $H_{\Delta}(z)$  – искомая ПФ ДЦ.

Для подстановки (30) в ХП (24) необходимо с учетом (5) найти начальное значение скорости  $\dot{x}_0 = \dot{x}(0-) = -\dot{x}(\tau-)$  из (12):

$$\dot{x}_0 = -\dot{x}_1(\tau-) = (-k + \beta A_1)e^{-\beta\tau},$$

или с учетом (13), (15)

$$\dot{x}_0 = -(k + \beta)e^{-\beta\tau} = -(k - \beta). \quad (31)$$

Таким образом, ХП (24) с учетом (30), (31) будет

$$P(z) = \dot{x}_0 - 2H_{\Delta}(z) = -(k - \beta) + 2\frac{k(1 - e^{\beta\tau})e^{-\beta T}}{z - e^{-\beta T}},$$

что после подстановки (15) и (16)

$$e^{\beta\tau} = \frac{(k + \beta)}{(k - \beta)}, \quad e^{\beta T} = \left[ \frac{(k + \beta)}{(k - \beta)} \right]^2$$

приводит в конечном итоге к  $P(z) = -(k - \beta)(z - 1) = 0$ .

Отсюда следует, что ХП ДЦ имеет единственный корень  $z_1 = 1$ , в том числе, если  $\beta \rightarrow 0$ .

**Выводы.** Анализ устойчивости АК в гистерезисной РЦ при наличии интегратора в контуре обратной связи РЭ (т. е. при наличии нулевого полюса в ПФ ЛЧ) требует особого подхода при использовании метода *MT*. Замена нулевого полюса ненулевым, стремящимся к нулю (т. е. использование ПФ ФНЧ с коэффициентом затухания, стремящимся к

нулю) позволило решить задачу. Это подтверждает возможность использования метода *МТ* и при решении данной специфической задачи, а также делает реальным исследование устойчивости несимметричных АК, чего не позволяют сделать иные методы анализа.

### **Список литературы**

1. Чернышев Э. П., Мясоедов Г. Б., Ружников В. А. Метод точного расчета автоколебаний в электрических цепях, содержащих нелинейные элементы с релейной гистерезисной характеристикой // Известия вузов. Электромеханика.– 1987.– №11.– С. 125–127.
2. Цыпкин Я. З. Релейные автоматические системы. М.: Наука, 1955.
3. Ружников В. А., Силина М. В., Чернышев Э. П. Особенности проектирования устойчивых моделей автоколебательных радиоэлектронных и электротехнических систем // Сб. науч. тр. 5-го международ. симпозиума по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии. СПб: СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2003.–С. 250–253.
4. Силина А. Г., Соклакова М. В., Чернышев Э. П. К разработке аналитических методов оценки устойчивости функционирования релейных автоколебательных электрорадиоэлектронных систем // Сб. науч. докл.: 9-й международ. симпозиум по электромагнитной совместимости и электромагнитной экологии.– СПб; СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2011.
5. Бычков Ю. А., Золотницкий В. М., Чернышев Э. П. Основы теории электрических цепей. СПб.: Издательство «Лань», 2002.

**Силина Алина Геннадьевна** – аспирант кафедры ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет. Адрес: 197376, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5, СПбГЭТУ, кафедра ТОЭ. Тел.: (812) 346-17- 96.

**Соклакова Марина Вячеславовна** – ст. преподаватель кафедры ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет. Тел.: (812) 346-17- 96; mary-v-s@mail.ru.

**Чернышев Эдуард Павлович** – к. т. н., профессор кафедры ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет. Тел.: (812) 346-17-96.

# **ДИАКОПТИКА ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

## **НЕЗАВИСИМЫЕ СХЕМНЫЕ МИНОРЫ ДЛЯ СИМВОЛЬНОГО АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С НЕРАВНОВЕСНЫМИ ПОДСХЕМАМИ**

Е. Р. Бодряков, С. А. Курганов

*Метод независимых схемных миноров обобщен на неравновесные подсхемы, что позволяет применить этот метод для формирования как знаменателя, так и числителя передаточной функции или отклика. Это многократно уменьшает число раскрываемых схемных миноров и снижает время анализа.*

*Method of the independent circuit minors calculation is generalized for the analysis of the non-equilibrium sub-circuits, which allows it's applying for the formation of both the numerator and the denominator of the transfer function. It repeatedly reduces the whole number of circuit minors and therefore decrement the time of the analysis.*

Метод схемных миноров (СМ) позволяет формировать по частям символьные выражения токов и напряжений для сложных электрических цепей [1]. Недостатком метода является многократный рост числа СМ при увеличении числа полюсов подсхемы. Так, подсхема с 3-мя полюсами имеет 6, а подсхема с 8-ю полюсами – уже 3432 схемных миноров [1].

В [2] предложено раскрывать из всей совокупности схемных миноров только часть СМ, которые названы независимыми СМ, а остальные СМ получаются с помощью тождеств Якоби [3]. Так, для подсхемы с 8-ю полюсами достаточно раскрыть 51 независимый СМ, а остальные 3381 СМ можно получить с помощью тождеств. Однако это справедливо

только для равновесных подсхем – содержащих одинаковое число нораторов и нуллаторов. Такие подсхемы характерны для знаменателей искомых откликов и передаточных функций.

В то же время при нахождении числителей откликов чаще используются неравновесные подсхемы, в которых число нораторов (нуллаторов) на единицу меньше, чем нуллаторов (нораторов) [4]. Это связано с тем, что независимый источник воздействия и нагрузка, которые в методе СМ заменяются норатором и нуллатором соответственно, находятся в разных частях схемы, и, следовательно, в разных подсхемах. Поэтому целью настоящей статьи является обобщение метода независимых СМ на неравновесные подсхемы, чтобы сократить число раскрываемых СМ как в знаменателе, так и числитеle искомого отклика.

**Схемно-минорные тождества по теореме Якоби для неравновесных подсхем.** По теореме Якоби «минор  $s$ -го порядка присоединенной матрицы  $\tilde{A}$  равен произведению  $(s-1)$ -й степени определителя  $\Delta$  на  $s$ -кратное алгебраическое дополнение  $\Delta_{i_1 j_1, \dots, i_s j_s}$  данной матрицы  $A$ » [3, с. 170]. Порядок матрицы равен  $n$ . Индексы  $i_1, \dots, i_s$  и  $j_1, \dots, j_s$  – любые перестановки из различных целых чисел  $1 \dots n$ . Присоединенная матрица получается из исходной матрицы заменой элементов  $a_{ij}$  алгебраическими дополнениями элементов  $a_{ji}$ .

Формирование схемно-минорных тождеств по теореме Якоби для равновесных подсхем изложено в работе [2]. При этом независимыми СМ являются миноры 0- и 1-го порядка. Остальные СМ – зависимые и определяются через независимые СМ с помощью указанных тождеств.

Основные правила формирования тождеств сохраняются и для неравновесных подсхем. Для их использования необходимо привести неравновесные подсхемы к равновесным подсхемам путем вынесения «лишнего» норатора или нуллатора за пределы подсхемы. Этот аномальный элемент будет считаться минорообразующим, а полюс, к которому он подключен – внешним полюсом подсхемы.

Для построения тождеств в этом случае нужен неполный комплект независимых СМ, так как в формулах бисекции на основе неравновесных СМ [4] используются схемные миноры, к собственному полюсу (полюсам) которых всегда подключен норатор или нуллатор. Это позволяет исключить нахождение части независимых СМ, необходимых для определения остальных СМ, у которых собственный полюс (полюса) разомкнут или замкнут. При этом отпадает необходимость также и в нахождении СМ при всех замкнутых полюсах, так как данный СМ не используется ни в формуле бисекции для неравновесных подсхем [4], ни в формулах по теореме Якоби [2].

Например, для четырехполюсной подсхемы на рис. 1,а алгебраическому тождеству Якоби

$$\Delta_{32,43} = (\Delta_{32}\Delta_{43} - \Delta_{42}\Delta_{33})/\Delta$$

соответствует схемно-алгебраическое уравнение

$$\Delta(00110110) = \frac{\Delta(00100100)\Delta(00010010) - \Delta(00010100)\Delta(00100010)}{\Delta(00000000)}, \quad (1)$$

где цифрами 1, 2 и 3 обозначаются внешние полюса подсхемы на рис.1,а, цифрой 4 – узел подключения независимого источника  $E$ ;  $\Delta$  – схемный определитель; в скобках представлен двоичный вектор, нумерация позиций которого соответствует полюсам подсхемы 1–4.

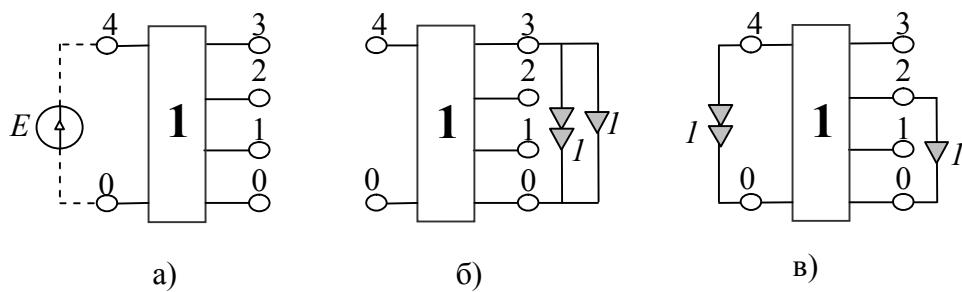


Рис.1. Четырехполюсная подсхема (а) и ее СМ:  $\Delta(00100010)$  (б) и  $\Delta(00010100)$  (в)

Схемный минор  $\Delta(00100010)$  из формулы (1) изображен на рис.1,б, он получается из исходной подсхемы (рис.1,а), подключением к третьему узлу норатора и нуллатора относительно базисного узла, что соответствует позициям нулей и единиц в обеих половинах двоичного

вектора определителя. На рис. 1, в приведен полученный аналогично СМ  $\Delta(00010100)$ . Окончательная схемно-минорная формула, соответствующая (1), приведена в строке 1 табл. 1. Знак слагаемых изменился из-за изменения знака схемного минора второго порядка, поскольку нумерация нораторов и нуллаторов осуществляется в порядке следования единиц в каждой половине двоичного вектора

Число схемно-минорных тождеств определяется числом различных схемных миноров порядка от 2 до  $n$  ( $n$  – число полюсов подсхемы, не считая базисного узла) по формуле [4]:

$$\psi_{n+1} = \sum_{i=2}^n C_n^{i-1} C_n^i, \quad (2)$$

где  $i$  – индекс суммирования – порядок схемного минора;  $C_n^i, C_n^{i-1}$  – число сочетаний из  $n$  элементов по  $i$  и  $(i-1)$  соответственно. Формула (2) получена из формулы для общего числа схемных миноров неравновесного  $(n+1)$ -полюсника [4] путем выбора схемных миноров 2, 3, ...,  $n$ -го порядка. Табл.1 содержит 12 схемно-алгебраических тождеств для  $n+1=4$ .

Таблица 1. Схемно-алгебраические тождества для четырехполюсной подсхемы

№	Тождество					
1						
2						
3						
4						

Продолжение табл.1.

5		-		=	
6		-		=	
7		-		=	
8		-		=	
9		-		=	
10		-		=	
11		-		=	
12		-		=	

### Независимые схемные миноры для неравновесных подсхем.

Число независимых схемных миноров определяется числом СМ первого порядка за вычетом из этого числа ряда СМ этого же порядка, в которых положение единиц в первой и второй половине двоичного вектора совпадают, и числом СМ нулевого порядка.

$$\psi_{n+1}^H = (n+1)^2 + 1 - (n+1) = (n+1)^2 - n.$$

Это число можно найти также через число СМ  $\psi_n^H$  для  $n$ -полюсника с помощью следующего рекуррентного выражения:

$$\psi_{n+1}^H = \psi_n^H + 2n. \quad (3)$$

Результаты подсчета числа независимых миноров сведены в строку 2 в табл. 1. Как видно, число независимых схемных миноров, начиная с числа полюсов  $(n+1)=5$  многократно (в десятки и сотни раз) меньше общего числа неравновесных схемных миноров (строка 3 в табл. 1). Следовательно, при их использовании затраты на формирование определителя сокращаются многократно.

Все выше приведенные замечания справедливы лишь при подключении генератора ЭДС (тока) и приемника напряжения (тока) к базисному узлу исследуемой схемы. В общем же случае, когда источник и приемник подключаются между произвольными узлами, от начальной исследуемой схемы необходимо перейти к эквивалентной схеме. Например, незаземленный генератор ЭДС представляется в виде схемы из двух заземленных источников ЭДС (рис. 2, а). Незаземленный генератор тока моделируется в соответствии с правилом переноса источника тока по контуру двумя заземленными источниками с тем же параметром (рис. 2, б). При наличии сопротивления, включенного параллельно генератору тока, это соединение при необходимости можно преобразовать к последовательному соединению генератора ЭДС и сопротивления.

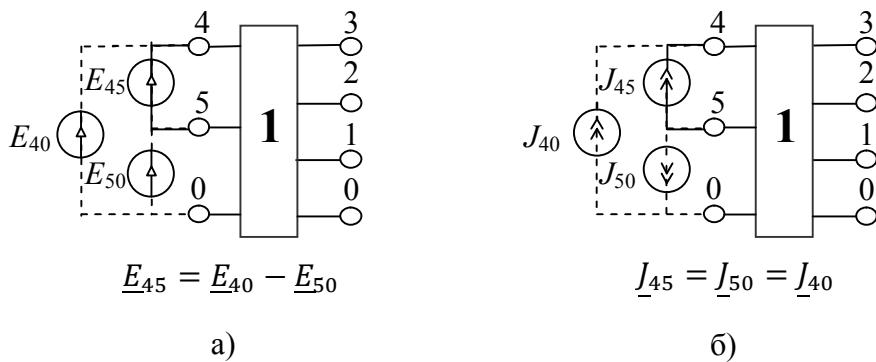


Рис. 2. Замена незаземленного источника эдс и тока парой заземленных источников эдс (а) и тока (б)

Число независимых СМ, необходимых для определения откликов в схемах, когда генератор и приемник тока (напряжения) подключаются к произвольным полюсам (табл. 2, строка 5), в два раза больше числа независимых СМ, находящихся по формуле (2) и (3), так как определение искомого параметра сопряжено с нахождением двух вспомогательных напряжений или токов.

Таблица 2. Число независимых схемных миноров (СМ)  
и число неравновесных СМ ( $n+1$ )-полюсника

<b>Число полюсов <math>n+1^*</math></b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>
Число независимых СМ равновесных подсхем $\psi_{n+1}^h$	5	11	18	27	38	51	66	83
Число равновесных СМ $\psi_{n+1}$	6	20	70	252	924	3432	12870	48620
Число независимых СМ неравновесных схем $\psi_{n+1}^h$ при заземленном источнике	7	13	21	31	43	57	73	91
Число независимых СМ неравновесных подсхем при незаземленных источнике и нагрузке $\psi_{n+1}^h$	14	26	42	62	86	114	146	182
Число неравновесных СМ $\psi_{n+1}$	4	15	56	210	792	3003	11440	43758

\* число полюсов складывается из внешних узлов, принадлежащим обеим подсхемам.

При использовании независимых СМ для формирования символьных схемных функций (ССФ) путем бисекции с использованием неравновесных СМ, как и для метода двоичных векторов [1], изменяется только алгоритм нахождения символьных выражений СМ. Независимые СМ раскрываются, как обычно, методом схемных определителей [1], а для остальных требуемых СМ записываются схемно-алгебраические тождества. Их раскрывать не нужно, и в этом состоит экономия вычислительных затрат.

**Сравнение вычислительных характеристик при нахождении числителя символьных откликов для контурной сети, полученных на основе независимых СМ и метода неравновесных СМ [4].** Откликом

является ток  $I$  в контурной сети на рис. 1 [2]. Схема числителя находится из исходной схемы путем замены независимого источника норатором, а приемника отклика – нуллатором [1].

Для нахождения определителя схемы числителя схема делится по пяти узлам (рис. 1), и используется формула пятиузловой бисекции [4] согласно выражению (4):

$$\Delta N = - \sum_{i=1}^{\psi_{n+1}} \Delta_1^i (x_1 x_2 \dots x_n 1 \perp y_1 y_2 \dots y_n 0) \Delta_2^i (\underline{x}_1 \underline{x}_2 \dots \underline{x}_n 0 \perp \underline{y}_1 \underline{y}_2 \dots \underline{y}_n 1) \quad (4)$$

где  $x_1 x_2 \dots x_n, y_1 y_2 \dots y_n$  – двоичные переменные, принимающие значения 0 или 1 в соответствии с методом двоичных векторов (МДВ);  $\underline{x}_1 \underline{x}_2 \dots \underline{x}_n, \underline{y}_1 \underline{y}_2 \dots \underline{y}_n$  – дополняющие (инверсные) двоичные векторы;  $i$  – порядковый номер слагаемого;  $\psi_{n+1}$  – число слагаемых в декомпозиционной формуле; генераторный и приемный подвекторы разделены знаком  $\perp$ . Координаты позиций ДВ имеют вид 1, 2... $n$ ,  $n+1$ , 1,2,..., $n$ ,  $n+1$ .

Для нахождения определителя схемы числителя схема делится по пяти узлам (рис. 1), и используется формула пятиузловой бисекции:

$$\begin{aligned} \Delta_N = & -[-\Delta_1(0000100010)\Delta_2(1111011101) + \Delta_1(0000100100)\Delta_2(1111011011) - \\ & -\Delta_1(0000101000)\Delta_2(1111010111) + \Delta_1(0000110000)\Delta_2(1111001111) + \\ & +\Delta_1(0001100110)\Delta_2(1110011001) - \Delta_1(0001101010)\Delta_2(1110010101) + \\ & +\Delta_1(0001110010)\Delta_2(1110001101) - \Delta_1(0010100110)\Delta_2(1101011001) + \\ & +\Delta_1(0010101010)\Delta_2(1101010101) - \Delta_1(0010110010)\Delta_2(1101001101) + \\ & +\Delta_1(0100100110)\Delta_2(1011011001) - \Delta_1(0100101010)\Delta_2(1011010101) + \\ & +\Delta_1(0100110010)\Delta_2(1011001101) - \Delta_1(1000100110)\Delta_2(0111011001) + \\ & +\Delta_1(1000101010)\Delta_2(0111010101) - \Delta_1(1000110010)\Delta_2(0111001101) + \\ & +\Delta_1(0001101100)\Delta_2(1110010011) - \Delta_1(0001110100)\Delta_2(1110001011) + \\ & +\Delta_1(0001111000)\Delta_2(1110000111) - \Delta_1(0010101100)\Delta_2(1101010011) + \\ & +\Delta_1(0010110100)\Delta_2(1101001011) - \Delta_1(0010111000)\Delta_2(1101000111) + \\ & +\Delta_1(0100101100)\Delta_2(1011010011) - \Delta_1(0100110100)\Delta_2(1011001011) + \\ & +\Delta_1(0100111000)\Delta_2(1011000111) - \Delta_1(1000101100)\Delta_2(0111010011) + \\ & +\Delta_1(1000110100)\Delta_2(0111001011) - \Delta_1(1000111000)\Delta_2(0111000111) - \\ & -\Delta_1(0011101110)\Delta_2(1100010001) + \Delta_1(0011110110)\Delta_2(1100001001) - \\ & -\Delta_1(0011111010)\Delta_2(1100000101) + \Delta_1(0101101110)\Delta_2(1010010001) - \\ & -\Delta_1(0101110110)\Delta_2(1010001001) + \Delta_1(01001111010)\Delta_2(1010000101) - \\ & -\Delta_1(1001101110)\Delta_2(0110010001) + \Delta_1(1001110110)\Delta_2(0110001001) - \\ & -\Delta_1(1001111010)\Delta_2(0110000101) + \Delta_1(1010101110)\Delta_2(0101010001) - \\ & -\Delta_1(1010110110)\Delta_2(0101001001) + \Delta_1(1010111010)\Delta_2(0101000101) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\Delta_1(1100101110)\Delta_2(0011010001) + \Delta_1(1100110110)\Delta_2(0011001001) - \\
& -\Delta_1(1100111010)\Delta_2(0011000101) - \Delta_1(0110101110)\Delta_2(1001010001) + \\
& +\Delta_1(0110110110)\Delta_2(1001001001) - \Delta_1(0110111010)\Delta_2(1001000101) + \\
& +\Delta_1(0111111110)\Delta_2(1000000001) + \Delta_1(1101111110)\Delta_2(0010000001) - \\
& -\Delta_1(1110111110)\Delta_2(0001000001) - \Delta_1(1011111110)\Delta_2(0100000001) + \\
& +\Delta_1(0011111100)\Delta_2(1100000011) - \Delta_1(0101111100)\Delta_2(1010000011) + \\
& +\Delta_1(1001111100)\Delta_2(0110000011) - \Delta_1(1010111100)\Delta_2(0101000011) + \\
& +\Delta_1(1100111100)\Delta_2(0011000011) + \Delta_1(0110111100)\Delta_2(1001000011) . \quad (5)
\end{aligned}$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – схемные миноры первой и второй подсхем. Тип минора подсхемы определяется двоичным вектором, который приводится в скобках и состоит из двух половин: левой и правой – нораторной и нуллаторной. Нумерация позиций в каждой из двух половин – слева направо цифрами 1, 2, 3, 4 и  $5^i$  в соответствии с нумерацией полюсов на рис. 1. Единица в одной из позиций первой (второй) половины ДВ означает, что к полюсу с номером данной позиции подключен норатор (нуллатор) относительно общего нулевого полюса подсхемы. Ноль свидетельствует о том, что соответствующий полюс разомкнут.

Из 56-ти схемных миноров для каждой подсхемы в бисекционной формуле (5) достаточно найти только 21 независимый минор (строка 2 в табл. 1): определитель схемы (при разомкнутых полюсах) и 20 миноров первого порядка (табл. 3).

Таблица 3. Независимые СМ первой подсхемы для контурной сети на рис. 1

$\text{№} \rightarrow$	1	2	3	4	5
$\Delta_1(0000000000)$	$\Delta_1(0000100010)$	$\Delta_1(0000100100)$	$\Delta_1(0000101000)$	$\Delta_1(0000110000)$	
6	7	8	9	10	
$\Delta_1(0001000010)$	$\Delta_1(0001000100)$	$\Delta_1(0001001000)$	$\Delta_1(0001010000)$	$\Delta_1(0010000010)$	
11	12	13	14	15	
$\Delta_1(0010000100)$	$\Delta_1(0010001000)$	$\Delta_1(0010010000)$	$\Delta_1(0100000010)$	$\Delta_1(0100000100)$	
16	17	18	19	20	
$\Delta_1(0100001000)$	$\Delta_1(0100010000)$	$\Delta_1(1000000010)$	$\Delta_1(1000000100)$	$\Delta_1(1000001000)$	
21					
$\Delta_1(1000010000)$					

Независимые СМ второй подсхемы получаются обратной заменой генераторной и приемной половины ДВ в независимых СМ первой подсхемы, приведенных в табл. 3.

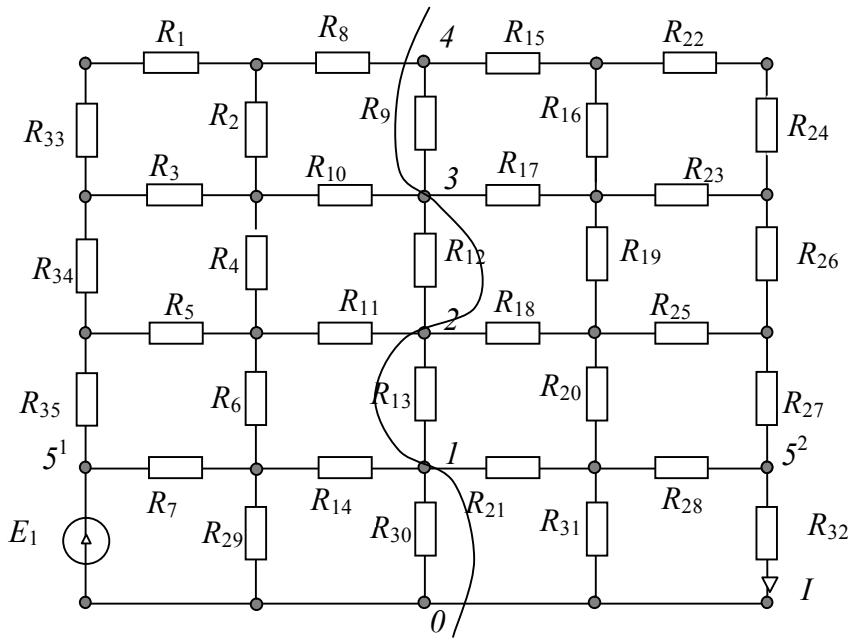


Рис. 3. Контурная сеть для сравнения характеристик символьных выражений тока  $I$

Двадцать четыре зависимых минора второго порядка первой подсхемы находятся через независимые схемные миноры с помощью схемно-минорных тождеств, для записи которых используются ДВ. Аналогично находятся СМ последующих порядков (24 СМ третьего порядка и 4 СМ четвертого порядка для подсхемы 1) через найденные по формулам Якоби СМ на порядок ниже искомого (Приложение).

Выражения для зависимых СМ второй подсхемы аналогичны приведенным в Приложении и получаются заменой индекса 1 у всех СМ на 2, а также перестановкой нораторной и нуллаторной половин ДВ.

Сведения о числе арифметических операций в формулах для числителя искомого тока  $I$  на основе независимых СМ приведены в строке 1 из табл. 4. Для сравнения в строке 2 даны сведения о числе операций в аналогичной последовательности формул при раскрытии всех 56-ти миноров для каждой подсхемы.

Обе последовательные формулы – на основе независимых СМ и полного набора СМ – тождественны. Однако число мультипликативных и аддитивных операций в формуле на основе независимых СМ в 2,9 и 2,6 раз соответственно меньше, чем в формуле, полученной путем раскрытия

всех неравновесных схемных миноров. Следует отметить также большую разницу и в числе раскрываемых СМ для сравниваемых методов, так для метода независимых СМ для обеих подсхем необходимо найти 42 СМ, в то время как по методу неравновесных СМ их общее число равно 112, т.е. в 2,7 раз больше.

Таблица 4. Число арифметических операций в формулах для числителя тока  $I$  из схемы на рис. 3

№	Тип формулы	Тип операций	
		мультипликативные	аддитивные
1	Бисекционная с подформулами на основе поиска независимых схемных миноров	1158	1769
2	Бисекционная с подформулами на основе поиска всех неравновесных схемных миноров	3430	4584
3	Единая формула по программе <i>CIRSYMD</i> [7]	3801	5148

Для сравнения вычислительных возможностей рассматриваемых методов при анализе электрических цепей, приведем в табл. 5 сведения о числе арифметических операций в формуле для определения тока  $I$  в схеме на рис. 3.

Следует заметить, что в данной работе не приводится подробное описание нахождения знаменателя в формуле для тока  $I$  с помощью метода ДВ и независимых СМ, т.к. это изложено в работах [2], [5] и [6].

Таблица 5. Число арифметических операций в формулах для тока  $I$  из схемы на рис. 1

№	Тип формулы	Тип операций	
		мультипликативные	аддитивные
1	Бисекционная с подформулами на основе поиска независимых схемных миноров	2750	3906
2	Бисекционная с подформулами на основе поиска всех схемных миноров	6708	9163
3	Единая формула по программе <i>CIRSYMD</i>	7536	10244

Как и для формулы числителя тока  $I$  обе последовательные формулы – на основе независимых СМ и полного набора СМ – тождественны. Число же мультипликативных и аддитивных операций в формуле на основе независимых СМ в 2,4 и 2,3 раза соответственно меньше, чем в формуле, полученной путем раскрытия всех схемных миноров.

**Приложение. Определение зависимых схемных миноров 2-, 3- и 4-го порядков по тождествам Якоби для примера на рис.1.**

Двадцать четыре СМ второго порядка находятся по следующим формулам:

$$\Delta_1(0001100110) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(0001000100) - \Delta_1(0000100100)\Delta_1(0001000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0001101010) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(0001001000) - \Delta_1(0000101000)\Delta_1(0001000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0001110010) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(0001010000) - \Delta_1(0000110000)\Delta_1(0001000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0010100110) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(0010000100) - \Delta_1(0000100100)\Delta_1(0010000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0010101010) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(0010001000) - \Delta_1(0000101000)\Delta_1(0010000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0010110010) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(0010010000) - \Delta_1(0000110000)\Delta_1(0010000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0100100110) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(0100000100) - \Delta_1(0000100100)\Delta_1(0100000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0100101010) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(0100001000) - \Delta_1(0000101000)\Delta_1(0100000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0100110010) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(0100010000) - \Delta_1(0000110000)\Delta_1(0100000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(1000100110) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(1000000100) - \Delta_1(0000100100)\Delta_1(1000000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(1000101010) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(1000001000) - \Delta_1(0000101000)\Delta_1(1000000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(1000110010) = \frac{\Delta_1(0000100010)\Delta_1(1000010000) - \Delta_1(0000110000)\Delta_1(1000000010)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0001101100) = \frac{\Delta_1(0000100100)\Delta_1(0001001000) - \Delta_1(0000101000)\Delta_1(0001000100)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0001110100) = \frac{\Delta_1(0000100100)\Delta_1(0001010000) - \Delta_1(0000110000)\Delta_1(0001000100)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\Delta_1(0001111000) = \frac{\Delta_1(0000101000)\Delta_1(0001010000) - \Delta_1(0000110000)\Delta_1(0001000100)}{\Delta_1(0000000000)};$$

$$\begin{aligned}\Delta_1(0010101100) &= \frac{\Delta_1(0000100100)\Delta_1(0010001000)-\Delta_1(0000101000)\Delta_1(0010000100)}{\Delta_1(0000000000)}; \\ \Delta_1(0010110100) &= \frac{\Delta_1(0000100100)\Delta_1(0010010000)-\Delta_1(0000110000)\Delta_1(0010000100)}{\Delta_1(0000000000)}; \\ \Delta_1(0010111000) &= \frac{\Delta_1(0000101000)\Delta_1(0010010000)-\Delta_1(0000110000)\Delta_1(0010001000)}{\Delta_1(0000000000)}; \\ \Delta_1(0100101100) &= \frac{\Delta_1(0000100100)\Delta_1(0100001000)-\Delta_1(0000101000)\Delta_1(0100000100)}{\Delta_1(0000000000)}; \\ \Delta_1(0100110100) &= \frac{\Delta_1(0000100100)\Delta_1(0100010000)-\Delta_1(0000110000)\Delta_1(0100000100)}{\Delta_1(0000000000)}; \\ \Delta_1(0100111000) &= \frac{\Delta_1(0000101000)\Delta_1(0100010000)-\Delta_1(0000110000)\Delta_1(0100001000)}{\Delta_1(0000000000)}; \\ \Delta_1(1000101100) &= \frac{\Delta_1(0000100100)\Delta_1(1000001000)-\Delta_1(0000101000)\Delta_1(1000000100)}{\Delta_1(0000000000)}; \\ \Delta_1(1000110100) &= \frac{\Delta_1(0000100100)\Delta_1(1000010000)-\Delta_1(0000110000)\Delta_1(1000000100)}{\Delta_1(0000000000)}; \\ \Delta_1(1000111000) &= \frac{\Delta_1(0000101000)\Delta_1(1000010000)-\Delta_1(0000110000)\Delta_1(1000001000)}{\Delta_1(0000000000)}.\end{aligned}$$

Двадцать четыре СМ третьего порядка имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\Delta_1(0011101110) &= \frac{\Delta_1(0001100110)\Delta_1(0010101010)-\Delta_1(0001101010)\Delta_1(0010100110)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(0011110110) &= \frac{\Delta_1(0001100110)\Delta_1(0010110010)-\Delta_1(0001110010)\Delta_1(0010100110)}{\Delta_1(000100010)}; \\ \Delta_1(0011111010) &= \frac{\Delta_1(0001101010)\Delta_1(0010110010)-\Delta_1(0001110010)\Delta_1(0010101010)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(0101101110) &= \frac{\Delta_1(0001100110)\Delta_1(0100101010)-\Delta_1(0001101010)\Delta_1(0100100110)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(0101110110) &= \frac{\Delta_1(0001100110)\Delta_1(0100110010)-\Delta_1(0001110010)\Delta_1(0100100110)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(0101111010) &= \frac{\Delta_1(0001101010)\Delta_1(0100110010)-\Delta_1(0001110010)\Delta_1(0100101010)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(1001101110) &= \frac{\Delta_1(0001101010)\Delta_1(1000101100)-\Delta_1(0001101100)\Delta_1(1000101010)}{\Delta_1(0000101000)}; \\ \Delta_1(1001110110) &= \frac{\Delta_1(0001100110)\Delta_1(1000110010)-\Delta_1(0001110010)\Delta_1(1000100110)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(1001111010) &= \frac{\Delta_1(0001101010)\Delta_1(1000110010)-\Delta_1(0001110010)\Delta_1(1000101010)}{\Delta_1(0)}; \\ \Delta_1(1010101110) &= \frac{\Delta_1(0010100110)\Delta_1(1000101010)-\Delta_1(0010101010)\Delta_1(1000100110)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(1010110110) &= \frac{\Delta_1(0010100110)\Delta_1(1000110010)-\Delta_1(0010110010)\Delta_1(1000100110)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(1010111010) &= \frac{\Delta_1(0010101010)\Delta_1(1000110010)-\Delta_1(0010110010)\Delta_1(1000101010)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(1100101110) &= \frac{\Delta_1(0100100110)\Delta_1(1000101010)-\Delta_1(0100101010)\Delta_1(1000100110)}{\Delta_1(0000100010)};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_1(1100110110) &= \frac{\Delta_1(0100100110)\Delta_1(1000110010) - \Delta_1(0100110010)\Delta_1(1000100110)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(1100111010) &= \frac{\Delta_1(0100101010)\Delta_1(1000110010) - \Delta_1(0100110010)\Delta_1(1000101010)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(0110101110) &= \frac{\Delta_1(0010100110)\Delta_1(0100101010) - \Delta_1(0010101010)\Delta_1(0100100110)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(0110110110) &= \frac{\Delta_1(0010100110)\Delta_1(0100110010) - \Delta_1(0010110010)\Delta_1(0100100110)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(0110111010) &= \frac{\Delta_1(0010101010)\Delta_1(0100110010) - \Delta_1(0010110010)\Delta_1(0100101010)}{\Delta_1(0000100010)}; \\ \Delta_1(0011111100) &= \frac{\Delta_1(0001101100)\Delta_1(0010110100) - \Delta_1(0001110100)\Delta_1(0010101100)}{\Delta_1(0000100100)}; \\ \Delta_1(0101111100) &= \frac{\Delta_1(0001101100)\Delta_1(0100110100) - \Delta_1(0001110100)\Delta_1(0100101100)}{\Delta_1(0000100100)}; \\ \Delta_1(1001111100) &= \frac{\Delta_1(0001101100)\Delta_1(1000110100) - \Delta_1(0001110100)\Delta_1(1000101100)}{\Delta_1(0000100100)}; \\ \Delta_1(1010111100) &= \frac{\Delta_1(0010101100)\Delta_1(1000110100) - \Delta_1(0010110100)\Delta_1(1000101100)}{\Delta_1(0000100100)}; \\ \Delta_1(1100111100) &= \frac{\Delta_1(0100101100)\Delta_1(1000110100) - \Delta_1(0100110100)\Delta_1(1000101100)}{\Delta_1(0000100100)}; \\ \Delta_1(0110111100) &= \frac{\Delta_1(0010101100)\Delta_1(0100110100) - \Delta_1(0010110100)\Delta_1(0100101100)}{\Delta_1(0000100100)}.\end{aligned}$$

Четыре СМ четвертого порядка имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\Delta_1(0111111110) &= \frac{\Delta_1(0011101110)\Delta_1(0101110110) - \Delta_1(0011110110)\Delta_1(0101101110)}{\Delta_1(0001100110)}; \\ \Delta_1(1101111110) &= \frac{\Delta_1(0101101110)\Delta_1(1001110110) - \Delta_1(0101110110)\Delta_1(1001101110)}{\Delta_1(0001100110)}; \\ \Delta_1(1110111110) &= \frac{\Delta_1(0110101110)\Delta_1(1010110110) - \Delta_1(0110110110)\Delta_1(1010101110)}{\Delta_1(0010100110)}; \\ \Delta_1(1011111110) &= \frac{\Delta_1(0011101110)\Delta_1(1001110110) - \Delta_1(0011110110)\Delta_1(1001101110)}{\Delta_1(0001100110)}.\end{aligned}$$

**Выводы.** Применение независимых схемных миноров и схемно-алгебраических формул на основе теоремы Якоби позволяет значительно сократить число искомых схемных миноров и уменьшить вычислительные затраты при анализе электрических цепей по частям. При этом эффект нарастает при усложнении подсхем – для подсхем с 5–6-ю полюсами число раскрываемых схемных миноров сокращается в 2–6 раза, для подсхем с 7–8-ю полюсами в десятки раз, а для подсхем с 9-ю и более полюсами – в сотни раз.

## Список литературы

1. Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество.– 2001.– № 8.– С. 33–42.
2. Бодряков Е.Р., Курганов С.А. Применение независимых схемных миноров для анализа линейных электрических цепей по частям // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сборник научных трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2011.– Вып. 9.– С.108–118.
3. Сигорский В.П. Анализ электронных схем.– Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР.– 1963.– 176 с.
4. Курганов С.А., Филаретов В.В. Формирование передаточных функций электронных цепей по частям методом неравновесных двоичных векторов // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005.– Ульяновск: УлГТУ, 2005.– Т. 3.– С.106–116.
5. Бодряков Е. Р., Курганов С. А. Сокращение числа схемных миноров при анализе линейных электрических цепей по частям // Электрические аппараты и электротехнические комплексы и системы: Международная научно-практическая конференция (Россия, г.Ульяновск, 22-25 мая 2012 года). В 2 т.Т.1. – Ульяновск: УлГТУ, 2011.– С.190–192.
6. Бодряков Е.Р., Курганов С.А. Символьный анализ линейных электрических цепей на основе независимых схемных миноров и схемно-алгебраической редукции // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей : Международный сборник научных трудов. – Вып. 10. – Ульяновск: УлГТУ, 2012. – 280 с.
7. Вольнов В.Е., Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ сложных электрических цепей и сетей с помощью программы *CIRSYMD* // Схемно-топологические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Тр. межд. конф. КЛИН-2004.– Ульяновск: УлГТУ, 2004.– Т.4.– С.75–80.

# **ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД СХЕМНЫХ МИНОРОВ ДЛЯ СИМВОЛЬНОГО АНАЛИЗА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ ПО ЧАСТИЯМ С УПРАВЛЯЮЩИМИ СВЯЗЯМИ**

С. А. Курганов, В. В. Филаретов

*Метод обобщен на подсхемы с управляемыми связями между ними, что позволяет многократно сократить затраты на формирование символьных схемных функций. При этом исключаются трудоемкий комбинаторный перебор и сортировка пар миноров подсхем, уменьшается размерность схемных миноров. Ключевые слова: символьная схемная функция, подсхема, управляемая связь, диакоптическая формула, nullор, схемный минор.*

*The paper describes generalized method of the symbolic analysis of subnetworks with controlled couplings. It is able to significantly reduce time and memory requirements during symbolic generation of network functions. The method can reduce enumeration and sorting of the pairs of subnetwork minors and also decrease dimensions of circuit minors. Key words: symbolic network functions, subnetwork, controlled coupling, diacoptic formula, nullor, circuit minor.*

Метод схемных миноров [1, 2] дополняет аппарат схемных определителей [3] для символьного анализа сложных электрических цепей по частям. Формирование минимальных по сложности выражений функций и откликов требует выбора подсхем согласно принципу половинного деления [4]. Однако наличие управляемых связей между подсхемами нередко препятствует делению схемы на примерно равные части без увеличения числа общих узлов подсхем, что усложняет анализ.

В традиционных диакоптических методах предусматривается выбор подсхем, связанных только гальванически [5], считается нежелательным

наличие управляющих связей между подсхемами [6] или такие подсхемы упрощаются независимо от управляющих связей между ними [7].

Метод схемных миноров получил развитие в работах [8–10], что позволило выбирать подсхемы с идеальными (нуллорными) связями между ними. Целью настоящей статьи является обобщение метода схемных миноров для анализа произвольных линейных схем, содержащих подсхемы с любыми – конечными и нуллорными – параметрами связи.

**Метод схемных миноров.** Отсутствие взаимно уничтожающихся слагаемых – центральное свойство схемного определителя и минора, которое отличает их от матричного определителя и минора [2]. Схемный определитель, как и определитель матрицы, можно разложить по минорам. Минор матрицы образуется вычеркиванием строк и столбцов, а минор схемы – подключением аномальных элементов (норатора и нуллатора) между соответствующими узлами и базисным узлом [1].

В исходном методе схемных миноров [1, 2] для объединения выбранных подсхем используются *равновесные схемные миноры*, которые образованы одинаковым числом нораторов и нуллаторов. Для разложения определителя схемы рекурсивно используется формула бисекции

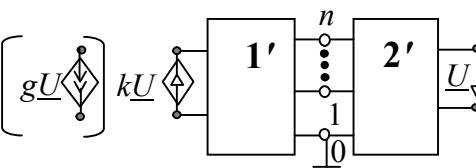
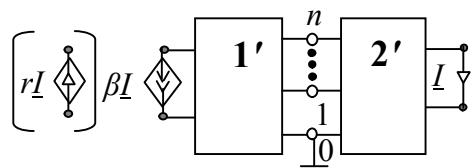
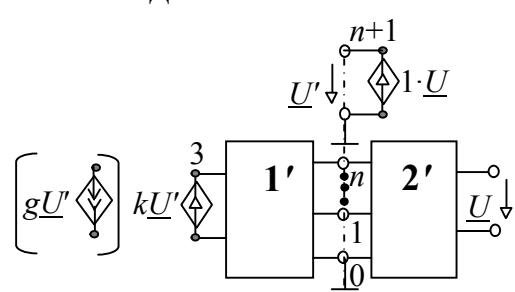
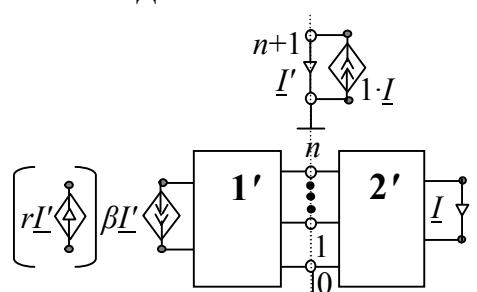
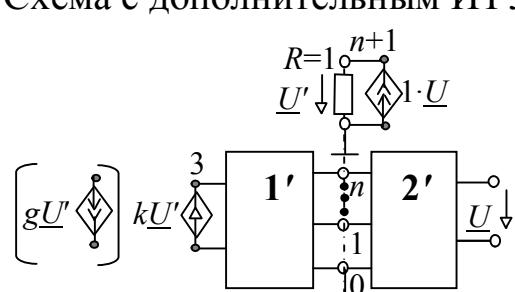
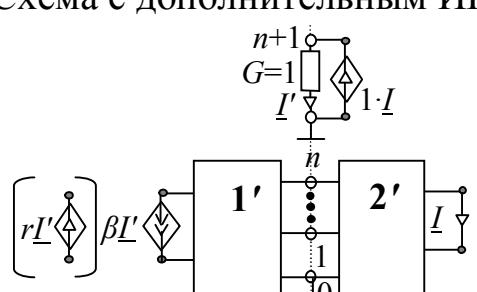
$$\Delta = \sum_{i=1}^{\psi_q} (-1)^{\xi} \Delta_1^i(V_i) \Delta_2^i(\bar{V}_i), \quad (1)$$

где  $\Delta_1^i(V_i)$  и  $\Delta_2^i(\bar{V}_i)$  –  $i$ -й миноры первой и второй подсхемы, соответствующие двоичной переменной  $V_i$  и ее дополнению  $\bar{V}_i$ ;  $V_i = [x_1 \ x_2 \dots \ x_n \ y_1 \ y_2 \dots \ y_n]$ ;  $[x_1 \ x_2 \dots \ x_n]$ ,  $[y_1 \ y_2 \dots \ y_n]$  – нораторная и нуллаторная составляющая  $V_i$  соответственно;  $\xi$  – параметр, равный сумме номеров ненулевых позиций переменных  $V_i$  или  $\bar{V}_i$ ;  $\psi_q$  – число миноров первой и второй подсхем с  $q=n+1$  общими узлами. Разряды двоичных переменных  $x_j=1$  ( $y_j=1$ ), если к  $j$ -му полюсу подключен норатор (нуллатор), или  $x_j=0$  ( $y_j=0$ ), если у  $j$ -го полюса норатор (нуллатор) отсутствует.

**Обобщение метода схемных миноров для подсхем с конечными управляющими связями.** В основе обобщения лежит преобразование управляющих связей в гальванические с помощью дополнительного

управляемого источника (УИ) с единичным параметром (табл.1). Один полюс этого УИ служит дополнительным общим узлом подсхем, а второй – подключается к базисному узлу. Управляющей переменной дополнительного УИ является соответствующая переменная управ器ющей связи подсхемы 2. Напряжение или ток дополнительного УИ задает новую управляющую переменную для подсхемы 1.

Таблица 1. Замещение управляющей связи гальванической

№	1	2
0	Схема с источником напряжения (тока), управляемым напряжением 	Схемы с источником тока (напряжения), управляемым током 
1	Схема с дополнительным ИНУН 	Схема с дополнительным ИТУТ 
2	Схема с дополнительным ИТУН 	Схема с дополнительным ИНУТ 

Исходные схемы показаны в строке с номером 0 табл.1. Дополнительный УИ является: источником напряжения, управляемым напряжением (ИНУН) – ячейка 1-1; источником тока, управляемым напряжением (ИТУН) – ячейка 2-1; источником тока, управляемым током (ИТУТ) – ячейка 1-2; источником напряжения, управляемым током (ИНУТ) – ячейка 2-2. Эквивалентность схем с дополнительными УИ исходным схемам (табл. 1) доказывается с помощью формул выделения УИ [4].

Дополнительные УИ позволяют сохранить состав рассматриваемых подсхем, выбранных их по функциональному признаку или по правилу половинного деления. При этом число дополнительных общих узлов не превышает числа разрываемых управляемых связей.

**Анализ несимметричного синхронного генератора с нагрузкой.** Схема замещения генератора [11] с сопротивлениями линии и нагрузкой показана на рис. 1 [12]. Требуется найти символьное выражение тока  $I_1$ .

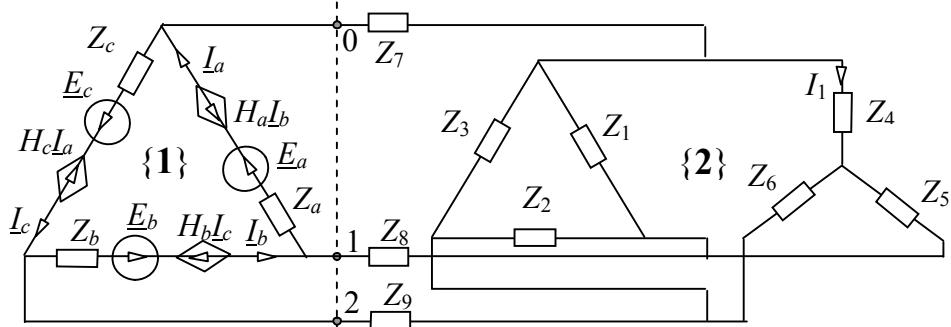
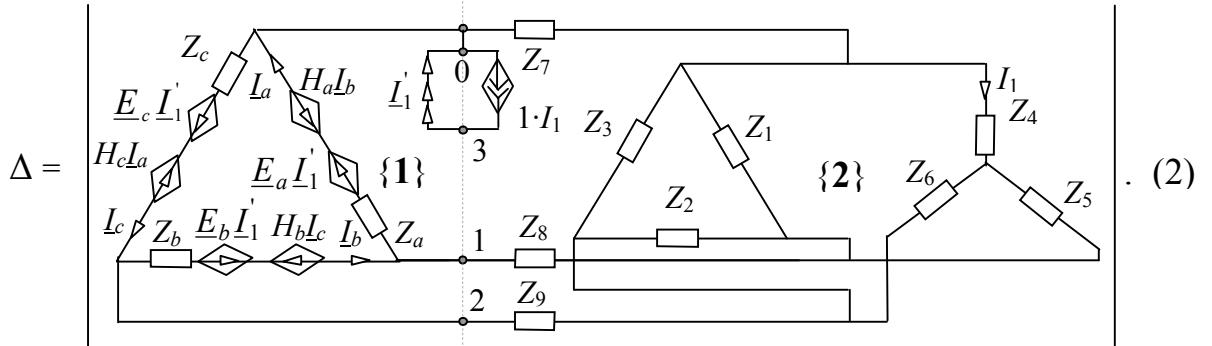


Рис. 1. Схема замещения синхронного генератора с нагрузкой

Исходная схема разделена на две примерно одинаковые по сложности подсхемы 1 и 2 (рис. 1). Задачу нахождения отклика удобно свести к нахождению одного определителя замкнутой схемы [13]. Замкнутая схема получается путем замены независимых источников эдс источниками напряжения, управляемыми искомым откликом.

Для разложения определителя замкнутой схемы по минорам подсхемам 1 и 2 избавимся от трех управляющих связей с помощью предложенного в ячейке 1-2 табл. 1 вспомогательного единичного ИТУТ. Отсюда получаем



Для раскрытия определителя (2) применяется формула (1) при  $q=4$ . Каждая подсхема задается 20-ю схемными минорами: 1) 000000; 2) 001001; 3) 001010; 4) 001100; 5) 010001; 6) 010010; 7) 010100; 8) 011011; 9) 011101; 10) 011110; 11) 100001; 12) 100010; 13) 100100; 14) 101011; 15) 101101; 16) 101110; 17) 110011; 18) 110101; 19) 110110; 20) 111111. Нумерация разрядов (позиций) двоичных переменных имеет вид: 123123.

Ненулевыми будут лишь те миноры подсхемы 1, которые содержат единицу и ноль в третьих позициях нораторной и нуллаторной частей соответственно. Таких схемных миноров всего 4 – с номерами 3, 4, 10 и 16. После выделения параметров элементов по методу схемных определителей [4] эти миноры принимают вид соответственно

$$\begin{aligned}
 V_{11} &= -(E_a + E_b)(Z_c + H_c) + E_c(Z_a + Z_b + H_a + H_b); \\
 V_{12} &= -E_a(Z_b + Z_c + H_b + H_c) + (E_b + E_c)(Z_a + H_a); \\
 V_{13} &= -E_a(H_b H_c - Z_b Z_c) + (E_c H_b - E_b Z_c)(Z_a + H_a); \\
 V_{14} &= -E_a H_c (Z_b + H_b) - E_b (Z_c Z_a + H_a H_c) + E_c Z_a (Z_b + H_b),
 \end{aligned} \tag{3}$$

где первая цифра индекса при обозначении ненулевого минора означает его принадлежность к подсхеме, а вторая – порядковый номер.

При обнулении дополнительного УИ управляющая ветвь преобразуется в идеальный проводник. При этом ненулевыми будут лишь

миноры, которые содержат в третьих позициях нули: 1, 6, 7, 12, 13 и 19. Эти миноры не содержат параметров независимых источников и образуют знаменатель отклика:

$$\begin{aligned} W_{11} &= H_a H_b H_c + Z_a Z_b Z_c; W_{12} = -H_a H_c + Z_a (Z_b + Z_c + H_b); \\ W_{13} &= H_c (H_a + H_b + Z_b) + Z_a Z_c; W_{14} = (H_a + Z_a) (H_b + Z_c); \\ W_{15} &= Z_c (H_a + Z_a + Z_b) - H_c H_b; W_{16} = H_a + H_b + H_c + Z_a + Z_b + Z_c. \end{aligned} \quad (4)$$

Миноры подсхемы 2 взаимно дополняют миноры подсхемы 1 (3) и находятся аналогично:

$$\begin{aligned} V_{21} &= -[Z_1(Z_2((Z_5 + Z_8)Z_3 - Z_6Z_7) + Z_8Z_3(Z_5 + Z_6)) + Z_5Z_2Z_3(Z_7 + Z_8)]; \\ V_{22} &= Z_2(Z_3((Z_6 + Z_9)Z_1 - Z_5Z_7) + Z_1Z_6(Z_7 + Z_9)) + Z_1Z_3Z_9(Z_5 + Z_6); \\ V_{23} &= -Z_1[Z_3(Z_2 + Z_5 + Z_6) + Z_2Z_6]; V_{24} = -Z_3[Z_1(Z_2 + Z_5 + Z_6) + Z_2Z_5]. \end{aligned} \quad (5)$$

Миноры подсхемы 2, соответствующие (6), имеют следующий вид

$$\begin{aligned} W_{21} &= Z_1((Z_3 + Z_4)(Z_2 + Z_5 + Z_6) + Z_6(Z_2 + Z_5)) + (Z_4 + Z_5)(Z_2(Z_3 + Z_6) + Z_3Z_6) + \\ &+ Z_4Z_5(Z_2 + Z_3); W_{22} = (Z_7 + Z_9)W_{21} + Z_3((Z_4 + Z_6)(Z_2(Z_1 + Z_5) + Z_1Z_5) + Z_4Z_6(Z_1 + Z_2)); \\ W_{23} &= Z_7W_{21} + Z_1Z_3(Z_4(Z_2 + Z_5 + Z_6) + Z_5Z_6); W_{24} = W_{23}; \\ W_{25} &= (Z_7 + Z_8)W_{21} + Z_1((Z_2 + Z_3)(Z_6(Z_4 + Z_5) + Z_4Z_5) + Z_2Z_3(Z_4 + Z_5)); \\ W_{26} &= Z_7((Z_8 + Z_9)W_{21} + Z_2((Z_1 + Z_3)(Z_4(Z_5 + Z_6) + Z_5Z_6) + Z_1Z_3(Z_5 + Z_6))) + \\ &+ (Z_3 + Z_9)((Z_1(Z_2 + Z_8) + Z_2Z_8)(Z_4(Z_6 + Z_5) + Z_5Z_6) + Z_1Z_2Z_8(Z_4 + Z_6)) + \\ &+ Z_3Z_9((Z_2 + Z_5 + Z_6)(Z_1(Z_4 + Z_8) + Z_4Z_8) + (Z_2 + Z_6)Z_5(Z_1 + Z_8)). \end{aligned} \quad (6)$$

Выражения (3) и (5) образуют числитель

$$N = -V_{11}V_{21} + V_{12}V_{22} + V_{13}V_{23} - V_{14}V_{24}, \quad (7)$$

а (4) и (6) – знаменатель отклика

$$D = W_{11}W_{21} + W_{12}W_{22} - W_{13}W_{23} - W_{14}W_{24} + W_{15}W_{25} + W_{16}W_{26}. \quad (8)$$

Отсюда

$$\underline{I}_1 = -N / D. \quad (9)$$

При пренебрежении сопротивлениями линии на рис. 1 формула (9) с подвыражениями (3)–(8) тождественна решению, полученному методом нуллорных схем [8]. Как видно, обобщенный метод схемных миноров менее трудоемок, поскольку не требует проверки нуллорных схем на совместимость.

Введение дополнительного УИ с единичным параметром позволило получить решение (7), (8) путем обработки 20-ти схемных миноров для каждой подсхемы вместо 70-ти, если перенести ветвь с искомым откликом в первую подсхему.

**Обобщение метода схемных миноров для подсхем с нуллорными связями.** При наличии нуллорной управляющей связи между подсхемами эти подсхемы становятся вырожденными. Такие подсхемы отображаются неравновесными схемными минорами [8, 9], соответствующими неравному числу вычеркнутых строк и столбцов матрицы схемы.

Для замены нуллорной связи гальванической в схему вводится δ дополнительных узлов и такое же число пар соединенных параллельно нуллаторов и нораторов (они не оказывают влияния). Учет одной нуллорной связи при введении узла  $n+1$  вытекает из табл.1 и показан на рис. 2.

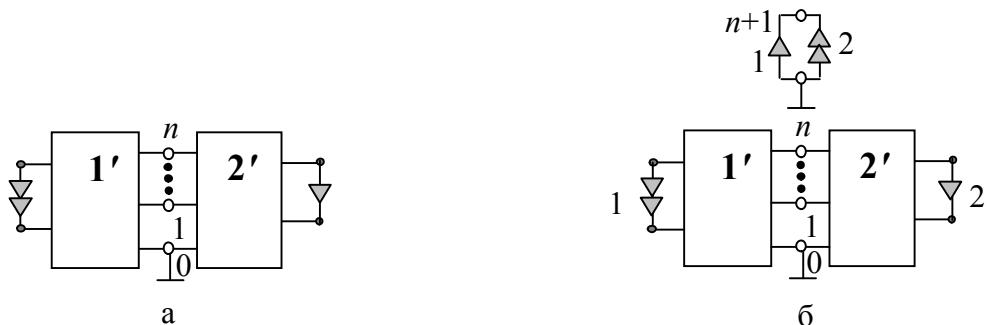


Рис. 2. Объединение подсхем с нуллорной связью (а);  
введение дополнительного общего узла для устранения нуллорной связи (б)

Как видно, нуллатор (норатор) каждой пары относится к подсхеме, в которой имеется недостаток нуллаторов (нораторов). Это приводит к подсхемам с одинаковым числом нораторов и нуллаторов. Последующая перенумерация нуллаторов (нораторов) с учетом изменения знака определителя [10] обеспечивает только гальваническую зависимость подсхем 1 и 2, разделенных по  $(n + 1 + \delta)$  узлам.

При использовании формулы (1) для схемы на рис. 2,б оказывается, что из всей совокупности слагаемых в формуле (1) ненулевыми будут

лишь те, в которых миноры первой (второй) подсхемы образованы подключением нораторов (нуллаторов) к полюсам  $(n + 1), (n + 2), \dots, (n + \delta)$ . В то же время к этим полюсам не подсоединенны нуллаторы (нораторы). Таким образом, из формулы (1) получается обобщенная диакоптическая формула [10]

$$\Delta = \sum_{l=1}^{\psi_q^\delta} (-1)^{\xi_l} \Delta_1(V_l^\delta) \Delta_2(\bar{V}_l^\delta), \quad (10)$$

где  $\Delta_1(V_l^\delta)$  и  $\Delta_2(\bar{V}_l^\delta)$  – миноры подсхем 1 и 2 с  $\delta$  нуллорными связями, содержащих нораторов (нуллаторов) на  $\delta$  меньше, чем нуллаторов (нораторов); соответствующие минорам взаимно дополнительные двоичные переменные  $V_l^\delta = [x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n]$  и  $\bar{V}_l^\delta$ ;  $\psi_q^\delta$  – число миноров подсхем 1 и 2;  $\xi_l = (2n+1+\delta)\delta/2+m$ , где  $m$  – сумма номеров ненулевых позиций в  $V_l^\delta$  или  $\bar{V}_l^\delta$ .

Полезность обобщения (10) заключается в том, что подсхемы не только лишаются  $\delta$  нуллорных связей, но и не связываются гальванически через  $\delta$  дополнительных узлов (как в случае обычных управляющих связей). Число общих полюсов для подсхем с нуллорными связями составляет  $q=n+1$ , то есть столько же, сколько для подсхем, связанных гальванически. Формула (10) отображает обобщенный метод схемных миноров для произвольных подсхем, как с нуллорными связями (при  $\delta \neq 0$ ), так и без них (при  $\delta=0$ ).

Число равновесных ( $\delta=0$ ) и неравновесных ( $\delta > 0$ ) схемных миноров можно найти по формуле [9]

$$\psi_q^\delta = \sum_{i=0}^n C_n^{i-\delta} C_n^i,$$

где  $C_a^b$  – число сочетаний из  $a$  по  $b$ . Эта формула была использована при расчете табл. 2. Количества неравновесных миноров указаны в скобках для  $\delta = 1, 2, \dots, 9$ . Как показывает эта таблица, число неравновесных схемных миноров меньше числа равновесных (строка для  $\delta=0$ ) и значительно уменьшается при возрастании числа нуллорных связей  $\delta$

между подсхемами. Число схемных миноров минимально и равно 1, если число независимых общих узлов подсхем равно числу имеющихся нуллорных связей ( $\delta=n$ ).

Таблица 2. Число ненулевых миноров схемы, разделенной по  $q$  узлам на две подсхемы с  $\delta$  управляющими (нуллорными) связями от первой ко второй подсхеме

$q \rightarrow$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\delta \downarrow$										
0	1	2	6	20	70	252	924	3432	12870	48620
1		3 (1)	10 (4)	35 (15)	126 (56)	462 (210)	1716 (792)	6435 (3003)	24310 (11440)	92378 (43758)
2			7 (1)	26 (6)	98 (28)	372 (120)	1419 (495)	5434 (2002)	20878 (8008)	80444 (31824)
3				21 (1)	78 (8)	297 (45)	1144 (220)	4433 (1001)	17238 (4368)	67184 (18564)
4					71 (1)	362 (10)	990 (66)	3796 (364)	14690 (1820)	57188 (8568)
5						253 (1)	936 (12)	3523 (91)	13430 (560)	51680 (3060)
6							925 (1)	3446 (14)	12990 (120)	49436 (816)
7								3433 (1)	12886 (16)	48773 (153)
8									12871 (1)	48638 (18)
9										48621 (1)

Число схемных миноров для подсхем с управляющими связями, имеющими конечный параметр, находится для заданного  $q$  путем суммирования соответствующего числа равновесных и неравновесных СМ. Полученные числа приведены без скобок в строках с  $\delta = 1, 2, \dots, n$ .

Неравновесные СМ полезны не только для подсхем с нуллорными связями в составе некоторой схемы. Такие миноры образуются при нахождении несимметричных миноров объединенной схемы [13].

**Объединение двух четырехполюсных подсхем при наличии внешних узлов.** Объединенная схема на рис. 3,а в соответствии с табл. 2

(при  $q = 3$  и  $\delta = 0$ ) обладает шестью схемными минорами (с номерами позиций 3434): 1) 0000; 2) 0101; 3) 0110; 4) 1001; 5) 1010; 6) 1111.

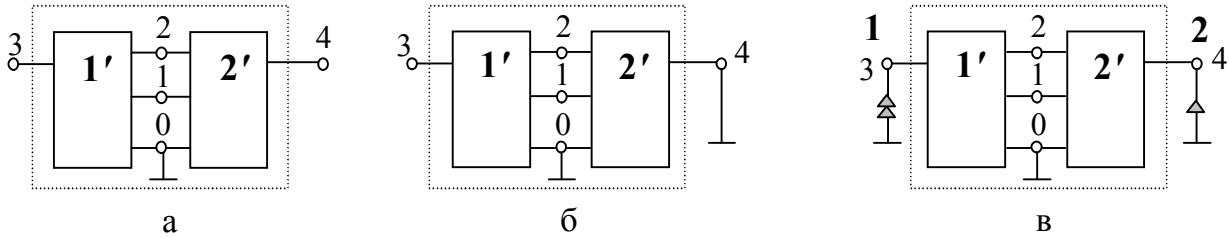


Рис. 3. Объединение двух четырехполюсных подсхем (а):  
схемные миноры объединенной схемы – 0101 (б) и 1001 (в)

При получении формул для указанных миноров достаточно дважды обратиться к формуле (10): один раз для миноров 1, 2, 5 и 6, не образующих нуллорную связь между подсхемами, и второй раз для миноров 3 и 4 с одной нуллорной связью между подсхемами.

Например, применив к минору с номером 2 (рис. 3, б) формулу (10), получим

$$\Delta[0101] = \Delta_1[0000]\Delta_2[1111] + \Delta_1[0101]\Delta_2[1010] - \Delta_1[0110]\Delta_2[1001] - \\ - \Delta_1[1001]\Delta_2[0110] + \Delta_1[1010]\Delta_2[0101] + \Delta_1[1111]\Delta_2[0000], \quad (11)$$

где миноры подсхем имеют позиции 1212, соответствующие их общим узлам. Знак первого слагаемого – положительный, поскольку сумма ненулевых позиций миноров-сомножителей число четное – 0 или 6, остальные знаки найдены аналогично.

Минор объединенной схемы с номером 4 (рис. 3, в) имеет вид

$$\Delta[0110] = -\Delta_1[0001]\Delta_2[1110] + \Delta_1[0010]\Delta_2[1101] + \\ + \Delta_1[0111]\Delta_2[1000] - \Delta_1[1011]\Delta_2[0100], \quad (12)$$

где схемные миноры подсхем являются неравновесными ( $\delta = 1$ ), а знаки слагаемых находятся по правилу к формуле (10), например, отрицательный знак первого слагаемого – по нечетности суммы  $(2 \cdot 2 + 1 + 1)/2 + 2 = 3 + 2$ .

Формула для минора объединенной схемы с номером 3 получается из (12) путем изменения миноров обеих подсхем – отражения их двоичных переменных относительно вертикальной оси симметрии. Это необходимо,

поскольку направления нуллорных связей в минорах 3 и 4 объединенной схемы противоположны.

При использовании формул (11) и (13) для раскрытия миноров 1, 2, 5, 6 и 3, 4 соответственно необходимо учитывать различное состояние полюсов 3 и 4 объединенной схемы. Важно, что формулы (11) и (13) получены, минуя перебор  $20 \cdot 20 = 400$  пар миноров подсхем и сортировку слагаемых, что требуется в обычном методе схемных миноров [1].

### **Выводы**

1. Обобщенный метод схемных миноров позволяет проводить анализ электрических цепей путем деления их на подсхемы с произвольными (обычными и нуллорными) управляющими связями между ними.

2. Введение дополнительного УИ с единичным параметром для замены управляющей связи гальванической позволяет сократить до минимума число схемных миноров, необходимых для нахождения схемного определителя по частям.

3. Достоинством обобщения путем использования неравновесных схемных миноров является уменьшение числа общих узлов подсхем на число связей  $\delta$ , имеющих бесконечно большие параметры. Размерность миноров и их число зависят лишь от количества общих полюсов подсхем, что упрощает нахождение знака слагаемых и уменьшает объем выкладок.

4. Исключается как традиционный перебор пар миноров объединяемых подсхем, так и сортировка слагаемых диакоптических формул, что обеспечивает нахождение только заданных миноров и многократно сокращает число операций.

### **Список литературы**

1. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество.– 2001.– №8.– С.33–42.
2. Филаретов В.В. Теорема Сигорского об определителе суммы матриц и диакоптика // Электроника и связь.– Киев, 2010.– №2.– С. 5–13.
3. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– №5.– С. 43–52.

4. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // Электричество. – 1995. – № 4. – С. 36–43.
5. Пухов Г.Е. Теория метода подсхем // Электричество. – 1952. – № 8. – С. 65–73.
6. Крон Г. Исследование сложных систем по частям – диакоптика.– М.: Наука, 1972. – 544 с.
7. Шакиров М. А. Расчет по частям линейных электрических цепей при отсутствии гальванических соединений между подсхемами // Электромеханика. – 1980. – № 5. – С. 527–533.
8. Курганов С.А., Филаретов В.В. Формирование передаточных функций электронных цепей по частям методом неравновесных двоичных векторов // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: Синтез, анализ, диагностика: Тр. международ. конф. КЛИН–2005.– Ульяновск: УлГТУ, 2005. – Т. 3. – С. 106–116.
9. Курганов С.А., Филаретов В.В. Анализ линейных электрических цепей по частям с управляющими связями между ними // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 139–156.
10. Курганов С.А., Филаретов В.В. Применение неравновесных схемных миноров для построения формул объединения подсхем // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международный сб. науч. тр.– Ульяновск: УлГТУ, 2009. – Вып. 7. – С. 156–162.
11. Шакиров М.А. Теоретические основы электротехники: Новые идеи и принципы: Схемоанализ и диакоптика.– СПб.: Изд. СПбГТУ, 2001.– 212 с.
12. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ линейных электрических цепей с автономными подсхемами методом нуллорных схем // Электричество. – 2011. – №12. – С. 42–47.
13. Чуа Л. О., Лин П. М. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы.– М.: Энергия, 1980.– 640 с.

# **АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ И СИСТЕМ**

## **ФАКТОР НАДЕЖНОСТИ ПРИ ОЦЕНКЕ ПЛАНОВ ПЕРСПЕКТИВНОГО РАЗВИТИЯ ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

В. В. Афанасьев, В. М. Кожевников, И. Г. Романенко, М. И. Данилов

*В работе представлен список вариантов схем планирования развития для Ставропольской электроэнергетической системы. Результаты получены с помощью предложенного алгоритма планирования развития энергетических систем.*

*This paper presents a list of schemes of development planning for the Stavropol power system. The results obtained using the proposed algorithm planning the development of energy systems.*

В настоящее время планирование электроэнергетических систем представляет собой актуальную задачу, при этом необходимым является учет фактора надежности. Также существует необходимость учета надежности всей системы, а не надежности электроснабжения конкретных потребителей в ней [1–3].

Целью настоящей работы является получение, исследование и демонстрация результата планирования электроэнергетической системы на примере Ставропольской ЭЭС с использованием разработанного алгоритма планирования перспективного развития электроэнергетической системы с учетом показателей надежности всей системы.

В настоящей работе представлен список схем планирования перспективного развития Ставропольской ЭЭС, которая исследовалась в составе модели ЭЭС Юга России (690 узлов и 1217 ветвей), составленной в RASTRWIN. При расчетах надежности использовался среднегеометрический коэффициент готовности линий Ставропольской ЭЭС [3]. Анализ статической режимной надежности операционной зоны (Ставропольской ЭЭС, состоящей из 84 узлов и 106 ветвей) проводился для режима наибольшей генерации и потребления, наблюдаемого в системе 21 декабря 2010 г. 18-00. Критериями отказа считались максимально допустимый ток в линиях, длительно допустимые напряжения в узлах ЭЭС [4, 5] и максимально допустимые перетоки активной мощности в сечениях [5]. Результаты расчета режимной надежности для исходной ЭЭС и при равномерном увеличении нагрузки и генерации в системе на 20 % приведены в таблице 1.

В результате работы алгоритма при увеличении нагрузки и генерации в Ставропольской ЭЭС на 20% были получены 10 вариантов схем планирования. Для детального сравнения различных вариантов схем ЭЭС была рассчитана вероятность безотказной работы для некоторых из них (табл.1).

Из табл. 1 видно, что варианты 2, 3, 4 имеют одинаковые вероятности безотказной работы для режимной надежности и одинаковое количество отказов по n-1, n-2. При этом вероятность безотказной работы для данных вариантов оказывается ниже, чем для исходной схемы без увеличения нагрузки и генерации (0.99597 и 0.99747, соответственно). Однако при увеличенной нагрузке и генерации на 20% вероятность безотказной работы исходной схемы составляет 0.99361, что ниже, чем для вариантов 2, 3, 4.

Реализация любого из данных вариантов требует строительства линии 330 кВ длиной порядка 110 км. Вариант 1 обеспечивает уровень вероятности безотказной работы 0.99795, что выше, чем вероятность безотказной работы для исходной схемы 0.99747, однако реализация этого варианта требует строительства линии 330 кВ длиной 186 км, что требует

больше затрат, чем реализация вариантов 2–4, дальнейший выбор вариантов должен осуществляться на основе их технико-экономического сравнения.

Таблица 1. Сравнение вариантов схем планирования ЭЭС по вероятности безотказной работы для режимной надежности

№ варианта	Оценка надежности по $n-1$ (количество отказов)	Оценка надежности по $n-2$ (количество отказов)	Вероятность безотказной работы с использованием среднегеометрического коэффициента готовности линий
Исходная схема	5	584	0.99747
Исходная схема с увеличенной на 20% нагрузкой и генерацией	13	1339	0.99361
1	4	515	0.99795
2	8	886	0.99597
3	8	892	0.99597
4	8	891	0.99597

### Список литературы

- Фокин Ю. А., Осипов Я. Н. Методы расчёта показателей надёжности сложных электроэнергетических систем, основанные на структурно-функциональных характеристиках // Электричество.– 2010.– №5.– С. 7–13.
- Методы и модели исследования надежности электроэнергетических систем / Манов Н.А., Хохлов М.В., Чукреев Ю.Я.

[и др.] / под ред. Н.А. Манова. – Сыктывкар: изд-во Коми научного центра УрО РАН, 2010. – 292 с.

3. Афанасьев В. В., Кожевников В. М., Данилов М.И., Ястребов С.С., Романенко И. Г., Демин М.С. Оценка надежности электроэнергетической системы при перспективном планировании развития системы на основе анализа режимов ее работы // Надёжность.–М., 2012. –№3(42). – С. 46–55.

4. Методические указания по устойчивости энергосистем. Утверждены приказом Минэнерго России от 30 июня 2003г. № 277.– М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2004.

5. Стандарт организации ОАО «СО ЕЭС» СТО 59012820.29.240.007-2008: Правила предотвращения развития и ликвидации нарушений нормального режима электрической части энергосистем.

**Афанасьев Вячеслав Валериевич** – заместитель генерального директора Филиала ОАО «СО ЕЭС» ОДУ Юга.

**Кожевников Владимир Михайлович** – профессор кафедры физики, электротехники и электроники (ФЭЭ) института электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского Федерального Университета.

**Романенко Ирина Геннадьевна** – доцент кафедры АЭСиЭ института электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского Федерального Университета.

**Данилов Максим Иванович** – доцент кафедры физики, электротехники и электроники института электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского Федерального Университета.

Адрес для переписки: 355003, г. Ставрополь, ул. Ленина, д.277б, т.89187635338, maksim\_danilov@ncstu.ru

# КОРРЕКЦИЯ РЕЖИМА ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ ПОДКЛЮЧЕНИИ ПОДСИСТЕМЫ С ВНУТРЕННИМИ УЗЛАМИ

Е. Р. Бодряков, С. А. Курганов

*Рассматривается коррекция режима электроэнергетической системы (ЭЭС) – определение узловых напряжений ЭЭС, полученной при подключении или отключении подсистемы с внутренними узлами. Предлагается алгоритм, сочетающий формулу коррекции Шермана-Моррисона и Y-параметры подсистемы. Алгоритм позволяет существенно сократить трудоемкость определения режима системы.*

*The paper presented correction of the node voltages of electric power system (EPS) which is obtained when either using or removing some subsystem with some internal nodes. An algorithm is proposed, combining correction formula of Sherman-Morrison and Y-parameters of the subsystem. The algorithm allows to significantly reduce the complexity of determining the operation mode of the system.*

Электроэнергетические системы (ЭЭС) являются параметрическими системами – их структура зависит от времени. Для определения режима таких систем наиболее экономичным является метод коррекции узловых комплексных сопротивлений ЭЭС с помощью формулы Шермана-Моррисона [1]. Однако этот метод обладает ограниченными возможностями – позволяет подключать подсистемы, все узлы которых являются узлами исходной ЭЭС, то есть не допускает подсистемы с внутренними узлами.

Предлагается расширить возможности метода [1] для коррекции узловых напряжений при подключении или отключении подсистем, содержащих внутренние узлы. Подключение подсистем осуществляется к узлах некоторой базисной ЭЭС, для которой формируется матрица

узловых сопротивлений. При этом подсистема представляется  $Y$ -параметрами относительно ее внешних узлов, а  $Y$ -параметры учитываются с помощью формулы Шермана-Моррисона [2]:

$$Z^H = Y^{-1} - \frac{Y^{-1} \cdot \omega \cdot v^T \cdot Y^{-1}}{(v^T \cdot Y^{-1} \cdot \omega - 1)} = Z - \frac{Z \cdot \omega \cdot v^T \cdot Z}{(v^T \cdot Z \cdot \omega - 1)} = Z + \Delta Z, \quad (1)$$

где  $Z^H$  – скорректированная матрица узловых комплексных сопротивлений, учитывающая коммутацию ЭЭС;  $Y$  – матрица узловых проводимостей базисной ЭЭС;  $Z=Y^1$  – матрица узловых сопротивлений базисной ЭЭС;  $\Delta Z$  – корректирующая матрица узловых сопротивлений;  $\omega$ ,  $v^T$  – столбцевая и строчная матрицы с элементами;  $\omega_i=1$ ;  $v_i^T=Y_{ij}^t$ ;  $Y_{ij}^t$  – элемент корректирующей матрицы узловых проводимостей  $Y^t$  (определен ниже), другие элементы матриц  $\omega$ ,  $v^T$  нулевые. Индексы  $i$  и  $j$  – номера строки и столбца элемента в матрице  $Y$ .

Для получения корректирующей матрицы  $Y^t$  подключаемой подсистемы необходимо исключить  $s$  внутренних узлов из матрицы узловых проводимостей подсистемы размерностью  $(n+s)$ , где  $n$ ,  $s$  – число внешних и внутренних узлов без учета базисного узла. Наиболее эффективным методом исключения узлов подсхемы является блочный метод [3]. Пусть матрица узловых проводимостей подключаемой подсхемы имеет вид:

$$Y^{t'} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \dots & Y_{1n} & Y_{1(n+1)} & \dots & Y_{1(n+s)} \\ Y_{21} & Y_{22} & \dots & Y_{2n} & Y_{2(n+1)} & \dots & Y_{2(n+s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1} & Y_{n2} & \dots & Y_{nn} & Y_{n(n+1)} & \dots & Y_{n(n+s)} \\ Y_{s1} & Y_{s2} & \dots & Y_{sn} & Y_{s(n+1)} & \dots & Y_{s(n+s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{(n+s)1} & Y_{(n+s)2} & \dots & Y_{(n+s)l} & Y_{(n+s)(n+1)} & \dots & Y_{(n+s)(n+s)} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Формулы для исключения внутренних узлов подсхемы:

$$Y_{mk}^t = Y_{mk}^{t'} + Y'_{mk}; \quad (m, k = 1, 2, 3 \dots n), \quad (3)$$

$$Y'_{mk} = \sum_{c=1}^s Y_{m,n+c}^{t'} \cdot a_{n+c,k}; \quad (4)$$

$$a_{n+c,k} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{p=1}^s \Delta_{n+p,n+c} \cdot Y_{n+p,k}^{t'} \cdot (-1)^{p+c}; (c = 1,2 \dots s) \quad (5)$$

$$b_{n+c} = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{p=1}^s \Delta_{n+p,n+c} \cdot J_{n+p} \cdot (-1)^{p+c}; (c = 1,2 \dots s) \quad (6)$$

Формулы для источников тока:

$$J_{mn} = \sum_{c=1}^s Y_{m,n+c}^{t'} \cdot b_{n+c}; (m = 1,2,3 \dots n) \quad (7)$$

В (5) и (6)  $\Delta$  – определитель подматрицы  $Y'_{n+p,n+c}$  имеющий вид:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_{(n+1)(n+1)} & Y_{(n+1)(n+2)} & \dots & Y_{(n+1)(n+s)} \\ Y_{(n+2)(n+1)} & Y_{(n+2)(n+2)} & \dots & Y_{(n+2)(n+s)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{(n+s)(n+1)} & Y_{(n+s)(n+2)} & \dots & Y_{(n+s)(n+s)} \end{vmatrix}, \quad (8)$$

где  $\Delta_{n+p,n+c}$  – минор элемента, стоящего в  $(n+p)$ -ой строке и  $(n+c)$ -ом столбце определителя  $\Delta$ . Столбцы комплексных значений тока с подключенной подсхемой и после исключения внутренних узлов подсистемы имеют вид соответственно:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_n \\ \dots \\ J_a \end{bmatrix}; \quad \underline{J}_\exists = \begin{bmatrix} J_{m1} \\ J_{m2} \\ \dots \\ J_{ms} \end{bmatrix}. \quad (9) - (10)$$

Матрица узловых проводимостей подключаемой подсхемы относительно внешних  $n$  узлов имеет вид:

$$Y^t = \begin{bmatrix} Y_{11}^t & Y_{12}^t & \dots & Y_{1n}^t \\ Y_{21}^t & Y_{22}^t & \dots & Y_{2n}^t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Y_{n1}^t & Y_{n2}^t & \dots & Y_{nn}^t \end{bmatrix}. \quad (11)$$

Подставляя последовательно элементы матрицы (11) в формулу Шермана-Мориссона (1), получим матрицу узловых сопротивлений схемы с  $n$  узлами, эквивалентную ЭЭС с подключенной подсистемой. Таким образом, матрица (11) формируется с помощью рекурсивного алгоритма коррекции, когда скорректированная при подключении одного элемента матрица корректируется при подключении следующего элемента матрицы  $Y^t$  и так далее, пока не будет подключен последний элемент. В случае подключения подсхемы с большим количеством внутренних узлов возможна одновременная коррекция нескольких элементов матрицы, число которых зависит от величины  $n$ , при этом одновременно корректируются лишь элементы, принадлежащие одной из строк матрицы.

Столбцевая матрица  $\omega_i$  формируется следующим образом:

$$\omega_i = \begin{cases} +1, & \text{для соответствующего } i \text{ строке узла в формуле (11);} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

где  $i$  – изменяется от 1 до  $n$  и формируется отдельно для каждой строки в матрице (11). Столбцевая матрица имеет порядок  $a \times 1$ .

Строчная матрица  $v_i^T$  находится по формуле:

$$v_i^T = \begin{cases} -Y_{ij}^t, & \text{для соответствующего } i \text{ строке и } j \text{ столбцу узла в формуле (11);} \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

где  $i, j$  – изменяются от 1 до  $n$ , и формируется отдельно для каждой строки в матрице (11). Строчная матрица имеет порядок  $1 \times a$ .

**Определение числа вычислительных операций при коррекции узловых напряжений.** Число мультипликативных  $\alpha_{Z^H}$  и аддитивных  $\beta_{Z^H}$  операций при коррекции матрицы узловых сопротивлений (1) состоит из следующих слагаемых:

$$\alpha_{Z^H} = \alpha_{\Delta Z} + \alpha_{Y_{mk}^t} + \alpha_{J_{m,k3}}; \quad (12)$$

$$\beta_{Z^H} = \beta_{\Delta Z} + \beta_{Z+\Delta Z} + \beta_{Y_{mk}^t} + \beta_{J_{m,k3}}, \quad (13)$$

где  $\alpha_{\Delta Z} = n \cdot (n + (n + 1) \cdot a + a^2)$ ;  $\beta_{\Delta Z} = n \cdot (n + 1) + (n - 1) \cdot a^2$  – число мультипликативных и аддитивных операций при вычислении  $\Delta Z$ ;  $\beta_{Z+\Delta Z} = a^2$  – число аддитивных операций вычисления  $Z + \Delta Z$ ;  $\alpha_{Y_{mk}^t} \cong n^2 + 4 \cdot s^2 \cdot n + (n - 1) \cdot (n^3/3)$ ;  $\beta_{Y_{mk}^t} \cong n^2 \cdot (2 \cdot s - 1) + s \cdot (s \cdot n + n) + (n - 1) \cdot (n^3/3)$  – число мультипликативных и аддитивных операций по вычислению элементов матрицы  $Y$ ;  $\alpha_{J_{k3}} = 5 \cdot n \cdot s$ ;  $\beta_{J_{m,k3}} = 2 \cdot n \cdot s$  – число мультипликативных и аддитивных операций по вычислению элементов матрицы  $J$ ;  $a$  – число узлов исходной ЭЭС, не считая базисного узла;  $n$  – число общих узлов у исходной ЭЭС и подключаемой подсхемы без учета базисного узла;  $s$  – число внутренних узлов подключаемой подсхемы также без учета базисного узла.

Формулы для определения суммарного числа мультипликативных и аддитивных операций при коррекции узловых напряжений:

$$\alpha_1 = \alpha_{Z^H} + a^2; \quad (14)$$

$$\beta_1 = \beta_{Z^H} + (a - 1) \cdot a, \quad (15)$$

где  $a^2$ ,  $(a-1) \cdot a$  – число мультипликативных и аддитивных операций при умножении матрицы узловых комплексных сопротивлений  $Z^H$  на вектор узловых комплексных токов  $J$ .

Формула для определения числа мультипликативных и аддитивных операций при нахождении вектора узловых напряжений путем решения системы уравнений по МУН после подключения подсистемы ЭЭС:

$$\begin{aligned} \alpha_2^{(1)} &= (a + s) \cdot \left( \frac{(a + s)^2}{3} + a + s + \frac{2}{3} \right); \\ \beta_2^{(1)} &= (a + s) \cdot \left( \frac{(a+s)^2}{3} + \frac{a+s}{2} - \frac{5}{6} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

если  $(a+s) < (a+s)^2 << (a+s)^3$ , то

$$\alpha_2^{(2)} = (a + s)^3 / 3; \quad \beta_2^{(2)} = (a + s)^3 / 3, \quad (17)$$

где  $\alpha_2^{(1)}, \alpha_2^{(2)}, \beta_{U_2}^{(1)}, \beta_{U_2}^{(2)}$  – число мультипликативных и аддитивных операций метода Гаусса при произвольном (верхний индекс 1) и большом (верхний индекс 2) числе узлов полученной ЭЭС (16) и (17) соответственно.

Для сравнения методов нахождения вектора узловых напряжений поделим выражения (16) и (17) на (14) и (15) соответственно:

$$\frac{\alpha_2^{(1)}}{\alpha_1} = \frac{\frac{1}{3}a^3 + a^2s + as^2 + a^2 + 2as + \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}s^3 + s^2 + \frac{2}{3}s}{2n^2 + an^2 + an + na^2 + 4s^2n + \frac{1}{3}n^4 - \frac{1}{3}n^3 + 5sn + a^2}; \quad (18)$$

$$\frac{\beta_2^{(1)}}{\beta_1} = \frac{\frac{1}{3}a^3 + a^2s + as^2 + \frac{1}{2}a^2 + as - \frac{5}{6}a + \frac{1}{3}s^3 + \frac{1}{2}s^2 - \frac{5}{6}s}{n + na^2 + a^2 + 2n^2s + s^2n + 3sn + \frac{1}{3}n^4 - \frac{1}{3}n^3 - a}; \quad (19)$$

$$\frac{\alpha_2^{(2)}}{\alpha_1} = \frac{a^3 + 3a^2s + 3as^2 + s^3}{3 \cdot (2n^2 + an^2 + an + na^2 + 4s^2n + \frac{1}{3}n^4 - \frac{1}{3}n^3 + 5sn + a^2)}; \quad (20)$$

$$\frac{\beta_2^{(2)}}{\beta_1} = \frac{a^3 + 3a^2s + 3as^2 + s^3}{3 \cdot (n + na^2 + a^2 + 2n^2s + s^2n + 3sn + \frac{1}{3}n^4 - \frac{1}{3}n^3 - a)}. \quad (21)$$

При различном числе узлов выражения (18), (19), (20) и (21) принимают значения, приведенные в табл.1.

Таблица 1. Соотношения числа аддитивных и мультипликативных операций для алгоритма на основе формулы Шермана-Моррисона и метода узловых напряжений

№ п/п	$a/(n+s)$	$n$	$s$	$\alpha_2^{(1)}/\alpha_1$	$\beta_2^{(1)}/\beta_1$
1	5	1	1	4,16	4,18
2	5	3	1	1,86	2,17
3	1	3	50	8,53	1,8
4	50	1	1	17	17,25
5	50	3	1	16,7	16,93
6	50	50	50	3,3	3,65
7	50	10	50	1,43	13,9

В случаях 1 и 2 к ЭЭС подключается подсхема с наименьшим числом внутренних узлов равному одному (двум с учетом базисного узла), при этом в случае 1 (2) число внутренних узлов подсхемы равно (не равно) числу общих узлов ЭЭС с подсхемой –  $a=10$  ( $a>10$ ). Выигрыш в числе мультипликативных операций в 4,16 (1,86) раз, в числе аддитивных – 4,18 (2,17) раз.

В случае 3 к ЭЭС подключается подсхема с числом внутренних узлов 50, при этом число внутренних узлов подсхемы не равно числу общих узлов ЭЭС с подсхемой  $a>100$ . Выигрыш в числе мультипликативных операций в 8,53 раз, в числе аддитивных – 1,8 раз.

В случаях 4 и 5 к ЭЭС подключается подсхема с наименьшим числом внутренних узлов равному одному, при этом в случае 5 (6) число внутренних узлов подсхемы равно (не равно) числу общих узлов ЭЭС с подсхемой, но в отличие от 1 и 2  $a=100$  ( $a>100$ ). Выигрыш в числе мультипликативных операций в 17 (16,7) раз, в числе аддитивных – 17,25 (16,93) раз.

В случаях 6 и 7 к ЭЭС подключается подсхема с числом внутренних узлов равных 100, при этом в случае 7 число внутренних узлов подсхемы равно (неравно) числу общих узлов ЭЭС с подсхемой, но в отличие от 1 и 2 –  $a=5000$  ( $a>5000$ ). Выигрыш в числе мультипликативных операций в 3,3 (1,43) раз, в числе аддитивных – 3,65 (13,9) раз.

Во всех остальных случаях, когда число внутренних узлов, подключаемой подсхемы  $s$  изменяется от 1 до 50, а общее число узлов ЭЭС  $a$  – от 10 до 5000, вне зависимости от числа общих узлов ЭЭС и подключаемой подсхемы  $n$ , соотношение  $\alpha_2^{(i)} / \alpha_1$  и  $\beta_2^{(i)} / \beta_1$  изменяется в пределах случаев 1-7.

Таким образом, наибольший выигрыш в 17 раз мультипликативных и в 17,25 раз аддитивных операций при применении метода коррекции по формуле Шермана-Моррисона для нахождения вектора узловых напряжений, достигается при подключении к ЭЭС с большим числом внешних узлов подсистемы с малым числом внутренних узлов (случай 4).

Выигрыш в 1,86 раз мультипликативных и 2,17 раз аддитивных операций достигается при подключении к ЭЭС с малым числом внешних узлов подсистемы с малым числом внутренних узлов (случай 2).

### Пример коррекции режима электроэнергетической системы.

Задана исходная схема ЭЭС (рис. 1, а) [4] и параметры элементов (проводимости в сименсах, токи в амперах):

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= 0,020533 - j0,033156; & Y_2 &= 0,010065 - j0,031507; & Y_3 &= 0,02388 - j0,039283; \\
 Y_4 &= 0,030179 - j0,056281; & Y_5 &= 0,000747 - j0,027882; & Y_6 &= 0,000267 - j0,021094; \\
 Y_7 &= 0,000514 - j0,019828; & Y_8 &= 0,020126 - j0,028543; & Y_9 &= 0,014750 - j0,025298; \\
 Y_{10} &= 0,1 - j0,2; & Y_{11} &= 0,2 - j0,3; & Y_{12} &= 0,3 - j0,4; \\
 Y_{13} &= 0,4 - j0,5; & Y_{14} &= 0,5 - j0,6; & Y_{15} &= 0,6 - j0,7; \\
 K_{T5} &= 0,49 + j0,004780; & J_2 &= -2 - j3; & K_{T7} &= 0,681948 + j0,0032519; \\
 \dot{K}_{T5} &= 0,49 - j0,004780; & J_3 &= -3 - j4; & \dot{K}_{T7} &= 0,681948 - j0,0032519; \\
 J_1 &= -1 - j2; & J_5 &= -2 - j; & J_6 &= -3 - j2; \\
 J_4 &= -4 - j5; & J_7 &= -4 - j3; & J_8 &= -5 - j4.
 \end{aligned}$$

Схема замещения исходной ЭЭС представлена на рис. 1, б. К узлам 2 и 5 ЭЭС подключается подсхема, изложенная на рис. 2, а. Требуется найти узловые напряжения вновь полученной ЭЭС (рис. 2, б) с помощью предлагаемого алгоритма.

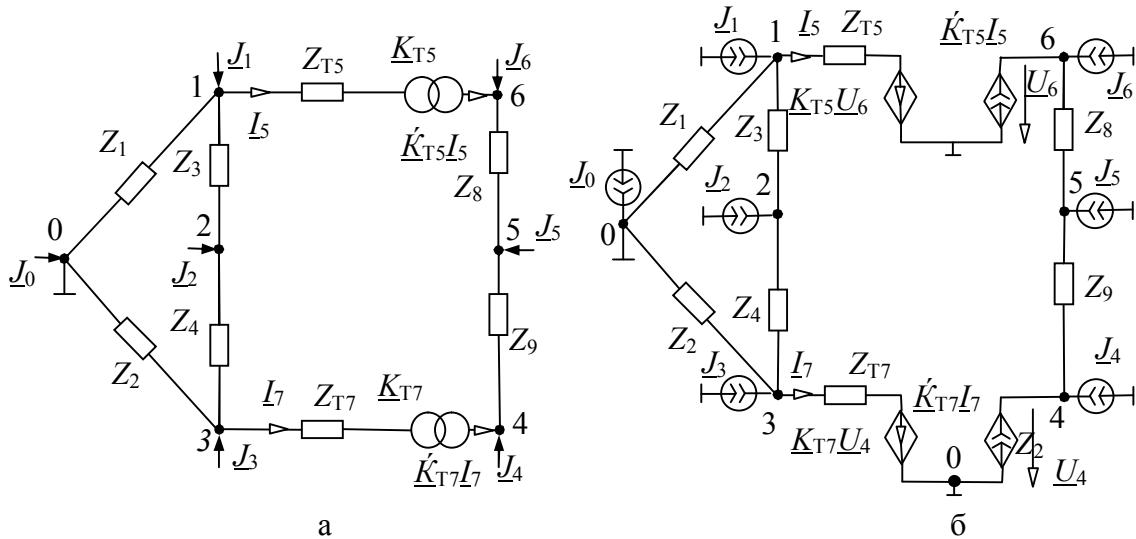


Рис. 1. Схемы ЭЭС: а – принципиальная схема; б – схема замещения

По методу узловых напряжений матрица узловых комплексных проводимостей и вектор узловых комплексных токов имеют вид [1]:

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 + Y_5 & -Y_3 & 0 & 0 & 0 & -Y_5 \dot{K}_{T5} \\ -Y_3 & Y_3 + Y_4 & -Y_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_4 & Y_2 + Y_4 + Y_7 & -Y_7 \underline{K}_{T7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_7 \dot{K}_{T7} & Y_7 K_{T7}^2 + Y_9 & -Y_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -Y_9 & Y_8 + Y_9 & -Y_8 \\ -Y_5 \dot{K}_{T5} & 0 & 0 & 0 & -Y_8 & Y_5 K_{T5}^2 + Y_8 \end{bmatrix};$$

$$J = [J_1 \ J_2 \dots \ J_6]^T, \quad (22)$$

где Т – знак транспонирования.

Численная матрица  $Y$  приведена в Приложении и обозначена (П1) [1]. Причем все формулы из Приложения нумеруются, начиная с буквы П.

После обращения матрицы  $Y$  получаем матрицу узловых комплексных сопротивлений  $Z$  (П2), которая также, как и матрица  $Y$  несимметрична относительно главной диагонали [1]. Умножая матрицу  $Z$  на вектор узловых комплексных токов  $J$ , можно получить вектор узловых комплексных напряжений исходной схемы.

При этом неособенная квадратная матрица узловых комплексных проводимостей и вектор узловых комплексных токов для схемы на рис.2,б имеет вид

$$Y_H = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ Y_1 + Y_3 + Y_5 & -Y_3 & 0 & 0 \\ -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_{10} + Y_{12} & -Y_4 & 0 \\ 0 & -Y_4 & Y_2 + Y_4 + Y_7 & -Y_7 \dot{K}_{T7} \\ 0 & 0 & -Y_7 \hat{K}_{T7} & Y_7 K_{T7}^2 + Y_9 \\ 0 & 0 & 0 & -Y_9 \\ -Y_5 \hat{K}_{T5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Y_{10} & 0 & 0 \\ 0 & -Y_{12} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} \\ 0 & -Y_5 \hat{K}_{T5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Y_{10} & -Y_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -Y_9 & 0 & 0 & 0 \\ Y_8 + Y_9 + Y_{11} + Y_{13} & -Y_8 & -Y_{11} & -Y_{13} \\ -Y_8 & Y_5 K_{T5}^2 + Y_8 & 0 & 0 \\ -Y_{11} & 0 & Y_{15} + Y_{10} + Y_{11} & 0 \\ -Y_{13} & 0 & 0 & Y_{14} + Y_{12} + Y_{13} \end{bmatrix};$$

$$J = [J_1 \ J_2 \dots \ J_8]^T, \quad (22)$$

где цифрами **1-8** обозначены порядковые номера столбцов.

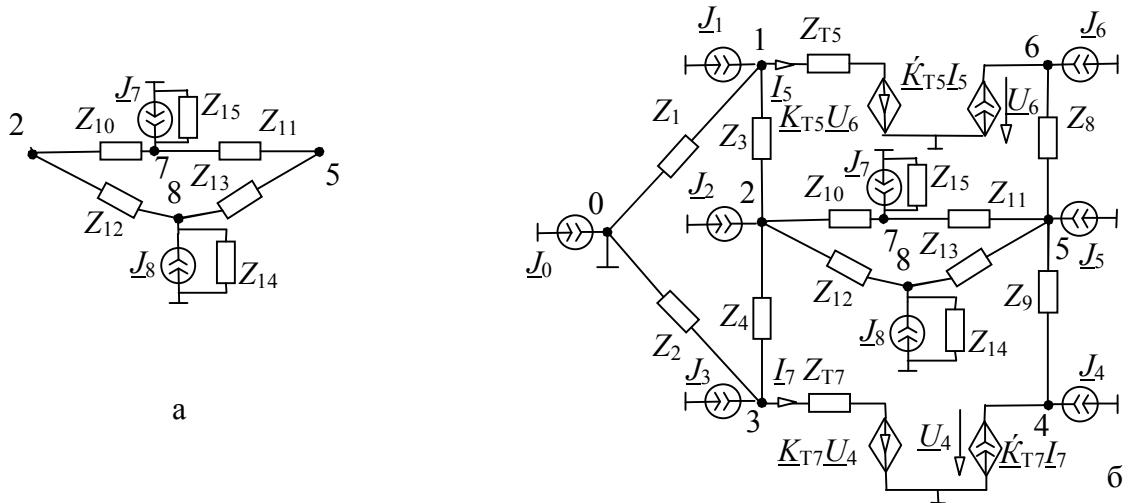


Рис. 2. Подключаемая подсхема (а) и ЭЭС после ее подключения (б)

Скорректируем матрицу узловых сопротивлений с учетом подключения подсхемы между узлами 2 и 5. Согласно (2) составляем матрицу узловых проводимостей и столбец узловых токов подключаемой подсхемы (рис. 2, а):

$$Y^{t'} = \begin{bmatrix} Y_{10} + Y_{12} & 0 & -Y_{10} & -Y_{12} \\ 0 & Y_{11} + Y_{13} & -Y_{11} & -Y_{13} \\ -Y_{10} & -Y_{11} & Y_{10} + Y_{11} + Y_{15} & 0 \\ -Y_{12} & -Y_{13} & 0 & Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} \end{bmatrix}; U = \begin{bmatrix} U_2 \\ U_5 \\ U_7 \\ U_8 \end{bmatrix};$$

$$J = [0 \ 0 \ J_7 \ J_8]^T. \quad (24)$$

Применяя формулы (3)–(5) и (8), исключаем внутренние узлы 7 и 8 подсхемы из матрицы  $Y'$ (24) по формулам:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_{10} + Y_{11} + Y_{15} & 0 \\ 0 & Y_{12} + Y_{13} + Y_{14} \end{vmatrix} = (Y_{10} + Y_{11} + Y_{15}) \cdot (Y_{12} + Y_{13} + Y_{14});$$

$$\Delta' = 1/\Delta; \quad (25)$$

$$a_{31} = -\Delta' \cdot (-(Y_{10} + Y_{11} + Y_{15}) \cdot Y_{10}); \quad a_{32} = -\Delta' \cdot (-(Y_{10} + Y_{11} + Y_{15}) \cdot Y_{11}); \quad (26, 27)$$

$$a_{41} = -\Delta' \cdot (-(Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}) \cdot Y_{12}); \quad a_{42} = -\Delta' \cdot (-(Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}) \cdot Y_{13}); \quad (28, 29)$$

$$Y''_{11} = -Y_{10} \cdot a_{31} - Y_{12} \cdot a_{41}; \quad Y''_{12} = -Y_{11} \cdot a_{31} - Y_{13} \cdot a_{41}; \quad (30, 31)$$

$$Y''_{21} = -Y_{10} \cdot a_{32} - Y_{12} \cdot a_{42}; \quad Y''_{22} = -Y_{11} \cdot a_{32} - Y_{13} \cdot a_{42}; \quad (32, 33)$$

$$Y^t_{11} = (Y_{10} + Y_{12}) + Y''_{11}; \quad Y^t_{12} = Y''_{12}; \quad (34, 35)$$

$$Y^t_{21} = Y''_{21}; \quad Y^t_{22} = (Y_{11} + Y_{13}) + Y''_{22}. \quad (36, 37)$$

Применяя формулы (6)–(7), находим эквивалентные узловые токи для узлов 2 и 5:

$$b_3 = \Delta' \cdot ((Y_{10} + Y_{11} + Y_{15}) \cdot J_7); \quad b_4 = \Delta' \cdot ((Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}) \cdot J_8); \quad (38, 39)$$

$$J_{\vartheta 1} = -Y_{10} \cdot b_3 - Y_{12} \cdot b_4; \quad J_{\vartheta 2} = -Y_{11} \cdot b_3 - Y_{13} \cdot b_4 \quad (40, 41)$$

Столбец эквивалентных узловых токов  $J_{\vartheta}$  для схемы на рис. 2 после подстановки численных значений параметров в формулы (38–41) имеет вид:

$$J_{\vartheta} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_{\vartheta 1} \\ J_3 \\ J_4 \\ J_{\vartheta 2} \\ J_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 - j2 \\ -2,9639634 - j2,6826427 \\ -3 - j4 \\ -4 - j5 \\ -3,5026065 - j1.0254499 \\ -3 - j2 \end{bmatrix}. \quad (42)$$

После подстановки численных значений параметров матрица  $Y^t$  будет иметь вид:

$$Y^t = \begin{bmatrix} Y_{11}^t & Y_{12}^t \\ Y_{21}^t & Y_{22}^t \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 0,2934959 - j0,4414634 & -0,1487805 + j0,2056911 \\ -0,1487805 + j0,2056911 & 0,3901463 - j0,5326504 \end{bmatrix}. \quad (43)$$

Формула для коррекции Z-матрицы узловых сопротивлений для рассматриваемого примера имеет вид:

$$Z^H = Z - \frac{(Z \cdot \omega_1) \cdot (\nu_1^T \cdot Z)}{((\nu_1^T \cdot Z) \cdot \omega_1 - 1)} - \\ - \frac{\left( \left( Z - \frac{(Z \cdot \omega_1) \cdot (\nu_1^T \cdot Z)}{((\nu_1^T \cdot Z) \cdot \omega_1 - 1)} \right) \cdot \omega_2 \right) \cdot \left( \nu_2^T \cdot \left( Z - \frac{(Z \cdot \omega_1) \cdot (\nu_1^T \cdot Z)}{((\nu_1^T \cdot Z) \cdot \omega_1 - 1)} \right) \right)}{\left( \left( \nu_2^T \cdot \left( Z - \frac{(Z \cdot \omega_1) \cdot (\nu_1^T \cdot Z)}{((\nu_1^T \cdot Z) \cdot \omega_1 - 1)} \right) \right) \cdot \omega_2 - 1 \right)}. \quad (44)$$

Процесс формирования формулы (44) описан выше. Матрицы  $\omega$  и  $\nu^T$  имеют вид:

$$\omega_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \nu_1^T = [0 \quad -Y_{11}^t \quad 0 \quad 0 \quad -Y_{12}^t \quad 0]. \omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \nu_2^T = [0 \quad -Y_{21}^t \quad 0 \quad 0 \quad -Y_{22}^t \quad 0].$$

После подстановки численных значений параметров в формулу (44) скорректированная матрица  $Z^H$  комплексных узловых сопротивлений будет иметь вид (П3), где численные значения сопротивлений представлены в омах. После умножения полученной матрицы  $Z^H$  на вектор скорректированных узловых токов  $J_s$  получаем вектор напряжений (здесь и далее напряжения в вольтах) узлов 1...6:

$$\underline{U}^1 = Z^H \cdot J_3 = \begin{pmatrix} 11,641986 - j42,435089 \\ 5,9983641 - j28,876681 \\ 30,189398 - j77,907124 \\ 83,646894 - j202,9677 \\ 3,2110633 - j29,529804 \\ 6,9810139 - j127,66617 \end{pmatrix}. \quad (45)$$

Для расчета напряжений внутренних узлов 7 и 8 подсхемы решим систему из 2-х уравнений, составленную на основе (24) с учетом известных напряжений узлов 2 и 5:

$$\begin{cases} -Y_{10} \cdot \underline{U}_2 - Y_{11} \cdot \underline{U}_5 + (Y_{10} + Y_{11} + Y_{15}) \cdot \underline{U}_7 + 0 \cdot \underline{U}_8 = J_7; \\ -Y_{12} \cdot \underline{U}_2 - Y_{13} \cdot \underline{U}_5 + 0 \cdot \underline{U}_7 + (Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}) \cdot \underline{U}_8 = J_8. \end{cases} \quad (46)$$

После подстановки численных значений в формулу (35) получаем:

$\underline{U}_7 = 0,4866397 - j14,858504$ ;  $\underline{U}_8 = 2,3961347 - j20,738001$ . Такие же результаты получаются при решении системы уравнений (23) методом Гаусса. В тоже время алгоритм коррекции требует в 1,58 и 1,39 раз меньше аддитивных и мультипликативных операций соответственно (табл. 2).

Таблица 2. Количество операций при нахождении узловых напряжений  $U$  в схеме на рис. 2,б после подключения подсхемы с внутренними узлами

Предлагаемый алгоритм, сочетающий формулу коррекции Шермана-Моррисона и алгоритм исключения внутренних узлов										
$\Delta Z$		$Z^H = Z + \Delta Z$		$Y_{i,j}$		$J_{m,k3}$		$\underline{U}^1 = Z^H \cdot J_m$		
+ / -	* / :	+ / -	* / :	+ / -	* / :	+ / -	* / :	+ / -	* / :	
50	112	36	0	6	16	2	8	30	36	
Итого: аддитивные						мультипликативные				
124						172				
При непосредственном решении системы уравнений (23) методом Гаусса										
аддитивных 196						мультипликативных 240				

Число аддитивных и мультипликативных операций предлагаемого алгоритма в табл. 2 складывается из операций: нахождения матрицы узловых сопротивлений  $Z^H$  по формуле (44); исключения внутренних узлов 7 и 8 из матрицы (24) по формулам (25–37); нахождения эквивалентных токов для узлов 2 и 5 по формулам (38–41) – и из операций в формуле (45). При этом подсчет числа операций в формулах (25–41) ведется сверху вниз, и повторно не учитываются операции в множителях, входящих в нижеследующие формулы. Число операций во всех формулах предлагаемого метода посчитано без учета внутренних операций для каждого элемента матриц (22–23). Число аддитивных и мультипликативных операций при решении системы уравнений (22) методом Гаусса находятся по формулам (16) [2].

Для нахождения матрицы узловых сопротивлений схемы, полученной при отключении подсхемы от ЭЭС, используется формула (44) (полученная из формулы (1) с учетом параметров рассматриваемого примера), где  $\Delta Z$  взята с обратным знаком, а в матрице  $Z$  исключены внутренние узлы подсхемы (7 и 8) по формулам (3)–(5), (8) или методом Гаусса. Вектор узловых комплексных напряжений находится как произведение полученной матрицы узловых комплексных сопротивлений на вектор узловых токов, скорректированный по соответствующим формулам (6),(7).

**Выводы.** 1. На базе формулы Шермана-Моррисона и  $Y$ -параметров многополюсника предложен алгоритм коррекции режима ЭЭС, позволяющий определить вектор узловых напряжений при подключении или отключении подсистемы с внутренними узлами. Подсистема может коммутироваться к узлам базисной ЭЭС.

2. Выигрыш алгоритма в числе арифметических операций по сравнению с непосредственным анализом ЭЭС составляет 1,4 ... 8 раз в зависимости от соотношения числа узлов исходной ЭЭС и подключаемой подсистемы. Выигрыш в 10 и более раз наблюдается при наличии внутренних узлов подсистемы, исчисляемых единицами.

## Приложение

	0,04516 $-j0,100321$	- 0,02388 $j0,039283$	0	0	0	-0,000499 $+j0,01365$
	- 0,02388 $+j0,03928$	0,054059 $-j,095564$	- 0,030179 $+j0,056281$	0	0	0
	0	-0,030179 $+j0,056281$	0,040758 - $j0,107616$	-,0004150 $+j0,013520$	0	0
Y=	0	0	-,0002860 $+j0,0135233$	0,0150770 $-j,0345166$	- 0,01475 $+j0,025298$	0
	0	0	0	-0,01475 $+j0,025298$	0,034876 $-j0,053841$	-0,020126 $+j0,02854$
	- 0,0002328 $+j0,0136658$	0	0	0	- 0,020126 $+j0,028543$	0,0204359 $-j0,03523$

(П1)

	7,8738582 $+j15,02679$	5,491167 + $j11,1502$	3,9290825 $+j8,27104$	8,7668 + $+j18,8170$	10,5851 + $j20,24236$	12,207053 $+j21,3016$
	5,5013494 + $j11,1403$	10,41329 $+j20,8485$	6,1669846 $+j14,21786$	9,8679558 $+j21,51534$	10,17509 $+j21,60438$	10,438093 $+j21,6565$
	3,9469685 $+j8,254442$	6,174688 $+j14,2111$	7,5445516 $+j18,57948$	10,554637 $+j23,4977$	9,827436 $+j22,5674$	9,1527454 $+j21,8429$
Z=	9,071864 $+j18,66890$	10,15325 $+j21,3875$	10,824934 $+j23,38379$	23,393328 $+j106,545$	19,00661 $+j96,0275$	14,582086 $+j87,5580$
	10,92568 $+j20,05109$	10,47710 $+j21,4570$	10,100038 $+j22,45022$	19,022876 $+j96,0123$	29,55455 $+j112,940$	23,075557 $+j102,920$
	12,574163 $+j21,07177$	10,75266+ $+j21,4916$	9,427029 + $+j21,7227$	14,610842 $+j87,5289$	23,08804 $+j102,906$	31,280758 $+j115,140$

(П2)

	4,3331056 $+j8,785939$	0,4811894 $+j0,849838$	0,2650314 $+j0,54337$	0,3759848 $+j0,504200$	0,3281276 $+j0,425952$	2,916581+ $+j2,308212$
	0,4822340 $+j0,848491$	1,1187628 $+j1,76053$	0,5930673 $+j1,12027$	0,6342267 $+j0,865375$	0,4515650 $+j0,686979$	0,6101962 $+j0,796311$
	0,2655451 $+j0,542685$	0,5925842 $+j1,120778$	3,7345404 $+j9,00718$	2,669165 $+j2,943372$	0,3479035 $+j0,528877$	0,4212509 $+j0,596988$
Z=	0,3795578 $+j0,499995$	0,6371717 $+j0,861998$	2,694014 $+j2,91889$	12,464574 $+j26,07444$	0,8704093 $+j1,364098$	0,8312301 $+j1,319350$
	0,3304757 $+j0,422616$	0,4518376 $+j0,686579$	0,3491364 $+j0,52741$	0,8693955 $+j1,365232$	1,0560873 $+j1,477515$	0,9544787 $+j1,415114$
	2,9557784 $+j2,253115$	0,6137408 $+j0,791126$	0,4246643 $+j0,592893$	0,8316037 $+j1,318310$	0,9557303 $+j1,413252$	14,258002 $+j22,71848$

(П3)

$U =$	$\begin{array}{l} 11,641986 - j \ 42,435089 \\ 5,9983641 - j 28,876681 \\ 30,189398 - j 77,907124 \\ 83,646894 - j \ 202,9677 \\ 3,2110633 - j \ 29,529804 \\ 6,9810139 - j \ 127,66617 \\ 0,4866397 - j 14,858504 \\ 2,3961347 - j \ 20,738001 \end{array}$	(П4)
-------	--	------

## Список литературы

1. Хачатрян В.С., Бадалян Н.П., Хачатрян К.В. Метод построения и коррекции узловых сопротивлений при учете комплексных коэффициентов трансформации //Электричество. – 2009. – №8. – С. 27–32.
2. Валях Е. Последовательно-параллельные вычисления. Пер. с англ. – М: Мир, 1985. – 456 с.
3. Адонц Г.Т. Многополюсник. – Ереван: АН Арм. ССР. – 1965. – 467 с.
4. Богряшов М.Н., Курганов С.А. Коррекция режима электроэнергетической системы при изменении ее структуры методом схемно-алгебраической редукции// Синтез, анализ, диагностика электронных цепей: Международн. сб. науч. трудов. – Ульяновск: УлГТУ, 2010.– Вып.8.– С.79–87.

**Бодряков Егор Романович** – студент 5-курса Энергетического факультета Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ); e-mail: [egor.bodryakov@yandex.ru](mailto:egor.bodryakov@yandex.ru)

# ПРИМЕНЕНИЕ ЭКСПЕРТНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ДИАГНОСТИРОВАНИЯ МЕХАТРОННЫХ ОБЪЕКТОВ

Т. Н. Круглова, Г. А. Мурадян, В. С. Коваленко

Описан способ диагностирования мехатронных объектов с применением экспертных данных о них. Предложена математическая модель диагностирования, состоящая из подмоделей поиска неисправностей и подмодели оценки работоспособности, реализованных с помощью аппарата нечеткой логики. Модель позволяет по измеренным значениям определяющих параметров, матрице соответствия и весу неисправностей оценить текущее состояние объекта диагностирования и выявить возникшие неисправности. Описан метод диагностирования, основанный на данной модели. Приведены результаты экспериментальных исследований предложенного метода

*The article describes a method for mechatronic objects diagnostic with the use of expert data about them. A mathematical diagnostic model, consisting of fuzzy logic submodels for troubleshooting and health evaluation is presented. Using measured values of the parameters, values of the governing compliance matrix and weight of the faults, the model allows assessing the current state of the diagnostic object and identifying faults. A method for the diagnosis, based on this model, is described in the paper. The results of experimental researches of the proposed method are also presented.*

Промышленная эксплуатация мехатронных объектов требует надежного и согласованного функционирования его элементов. В практике эксплуатации таких объектов имеет место большое количество опытной, неформализуемой информации, которая, при применении стандартных методов математического описания, не может быть учтена. Решить данную проблему можно применением метода экспертных оценок, реализованного с помощью аппарата нечеткой логики. Данная комбинация позволит вести

описание на языке, близком к естественному, используя интуицию и знания экспертов, их умение воспринимать качественную и количественную информацию [1]. Это дает возможность получать правильные результаты при нечеткой или противоречивой информации, что существенно повышает точность и достоверность диагностирования.

Для формализации нечеткой экспертной модели задаются конкретные неисправности  $x_i, i \in [1, n]$  и определяющие параметры  $y_j, j \in [1, m]$ , между которыми существуют нечеткие причинные отношения  $r_{ij} = x_i \rightarrow y_j$ , представленные в виде матрицы соответствия  $R$  с элементами  $r_{ij} \in [0, 1]$ , коэффициенты которой формируются на основе нормализованных экспертных данных об объекте диагностирования.

Конкретные неисправности и определяющие параметры диагностирования можно рассматривать как нечеткие множества  $A = \{x_1, x_2 \dots x_n\}$  и  $B = \{y_1, y_2, \dots y_m\}$  на пространствах  $X, Y$ . Взаимодействие введенных множеств выражается через нечеткую композицию:

$$B = A \circ R = \{y, \mu_{A \circ R}(y)\},$$

где  $\mu_{A \circ R}(y)$  - функция принадлежности, вычисляемая по формуле:

$$\mu_{A \circ R}(y) = \sup_{x \in X} T\{\mu_A(x), \mu_R(x, y)\}, \quad \forall y \in Y.$$

Так как  $T$  является  $t$ -нормой, т. е. операцией минимума, то

$$\mu_{A \circ R}(y) = \min(\mu_A(x), \mu_R(x, y)).$$

Задача диагностирования состоит в том, чтобы по известному определяющему параметру  $y_j$  и коэффициенту соответствия  $r_{ij}$  найти неисправность  $x_i$ . Решить эту задачу можно с помощью импликатора Клина – Дайнеса:

$$A = B \rightarrow R = \max(1 - B, R) = \min(B, R).$$

Представленная модель позволяет по известным диагностическим параметрам и матрице соответствия  $R$  найти возникшую неисправность, но целью технического диагностирования является определение

состояния объекта при наличии одной или нескольких неисправностей. В этом случае объект диагностирования может быть работоспособным или неработоспособным. Необходимо провести распознавание объекта, т. е. отнести его состояние к одному из классов (диагнозов). Эту задачу можно выполнить, применив метод разделения в пространстве признаков [2].

Для удобства нахождения весового коэффициента необходимо перевести значения определяющих параметров в относительные единицы.

$$y_j' = \frac{y_j - y_{\max j}}{y_{\text{ном } j} - y_{\max j}}, \quad (1)$$

где  $y_j$  – текущее значение определяющего параметра;  $y_{\max j}$  – максимальное значение определяющего параметра;  $y_{\text{ном } j}$  - номинальное значение определяющего параметра.

Чем ближе относительное значение определяющего параметра к единице, тем меньше степень развития дефекта, а, следовательно, меньше вес неисправности. Если же значение относительного параметра диагностирования равно нулю, то это свидетельствует об отказе объекта, и, следовательно, вес этой неисправности должен быть максимальным. Поэтому значение веса параметра диагностирования должно быть обратно пропорциональным относительному значению определяющего параметра  $y_j'$ . Вес диагностического параметра определяется по формуле:

$$w_j = 1 - y_j', \quad (2)$$

где  $y_j'$  – относительное значение определяющего параметра.

Если неисправность выявляется изменением нескольких определяющих параметров, то необходимо определить эквивалентный вес неисправности:

$$w_i = w_1 + w_2 + \dots + w_m - (w_1 \cdot w_2) - \dots - (w_1 \cdot w_m) + (w_2 \cdot w_3) + \dots + (w_2 \cdot w_m) - \\ - (w_3 \cdot w_4) - \dots - (w_3 \cdot w_m) + \dots + (w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_m).$$

При наличии нескольких неисправностей определяется эквивалентный вес каждой неисправности, а затем находится эквивалентный вес всех неисправностей

$$w_{\text{экв}} = w_1 + w_2 + \dots + w_n - (w_1 \cdot w_2) - \dots - (w_1 \cdot w_n) + (w_2 \cdot w_3) + \dots + (w_2 \cdot w_n) - (w_3 \cdot w_4) - \dots - (w_3 \cdot w_n) + \dots + (w_1 \cdot w_2 \cdot \dots \cdot w_n),$$

и эквивалентный признак всех неисправностей

$$x_{\text{экв}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n - (x_1 \cdot x_2) - \dots - (x_1 \cdot x_n) + (x_2 \cdot x_3) + \dots + (x_2 \cdot x_n) - (x_3 \cdot x_4) - \dots - (x_3 \cdot x_n) + \dots + (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n).$$

По полученным значениям эквивалентного признака и веса определяется значение разделяющей функции, которая является произведением вектора  $A$  и вектора  $W$ :

$$F(A) = A \cdot W = \min(\mu_A(x_i), \mu_W(w_i)).$$

Так как  $\mu_A(x_i) = \min(\mu_B(y_j), \mu_R(r_{ij}))$ , то

$$F(A) = \min(\mu_B(y_j), \mu_R(r_{ij}), \mu_W(w_i)).$$

Полученная формула позволяет, зная параметры диагностирования, коэффициенты матрицы соответствия и вес неисправности найти значение разделяющей функции, характеризующее текущее состояние объекта.

Идентификация модели технического диагностирования осуществляется с использованием нечеткой логической системы, которая производит однозначное преобразование векторов входных сигналов в вектор выходных с помощью механизма нечеткого логического вывода, основанного на знаниях, заложенных экспертом.

При разработке логической системы для модели технического диагностирования входными являются множество параметров диагностирования  $B$  и матрица соответствия  $R$ , заданная экспертами, выходными - искомое множество неисправностей  $A$ . На множестве  $B$  заданы конкретные параметры диагностирования  $y_1, y_2, \dots, y_m$ , которые задаются в виде функций принадлежности на интервале от 0 до 1. Каждому параметру ставится в соответствие значение ядра нечеткого терм-множества, в котором значение функции принадлежности равно 1 (рис. 1, а).

Матрица соответствия  $R$  содержит элементы  $r_{ij} \in [0,1]$ . Поэтому для задания логико-лингвистических переменных этого множества выбирается Гауссова функция принадлежности, достигающая своего максимального значения в характерной точке (рис. 1, б). Выходное множество  $A$  содержит конкретные неисправности объекта, поэтому его тоже необходимо представить в виде терм-множества. Для этого на интервале от 0 до 1 задаются функции принадлежности, количество которых равно числу неисправностей объекта. Каждой неисправности ставится в соответствие значение ядра нечеткого терм-множества, в котором значение функции принадлежности равно 1 (рис. 1, в).

Для описания взаимосвязей между введенными множествами составляется система нечетких правил, имеющая вид:

если ( $B$  есть  $y_j$ ) и ( $R$  есть  $r_{ij}$ ) то ( $A$  есть  $x_i$ ),

где  $i \in [1, n]$  – строка матрицы соответствия (неисправность);  $j \in [1, m]$  – столбец матрицы соответствия (определяющий параметр).

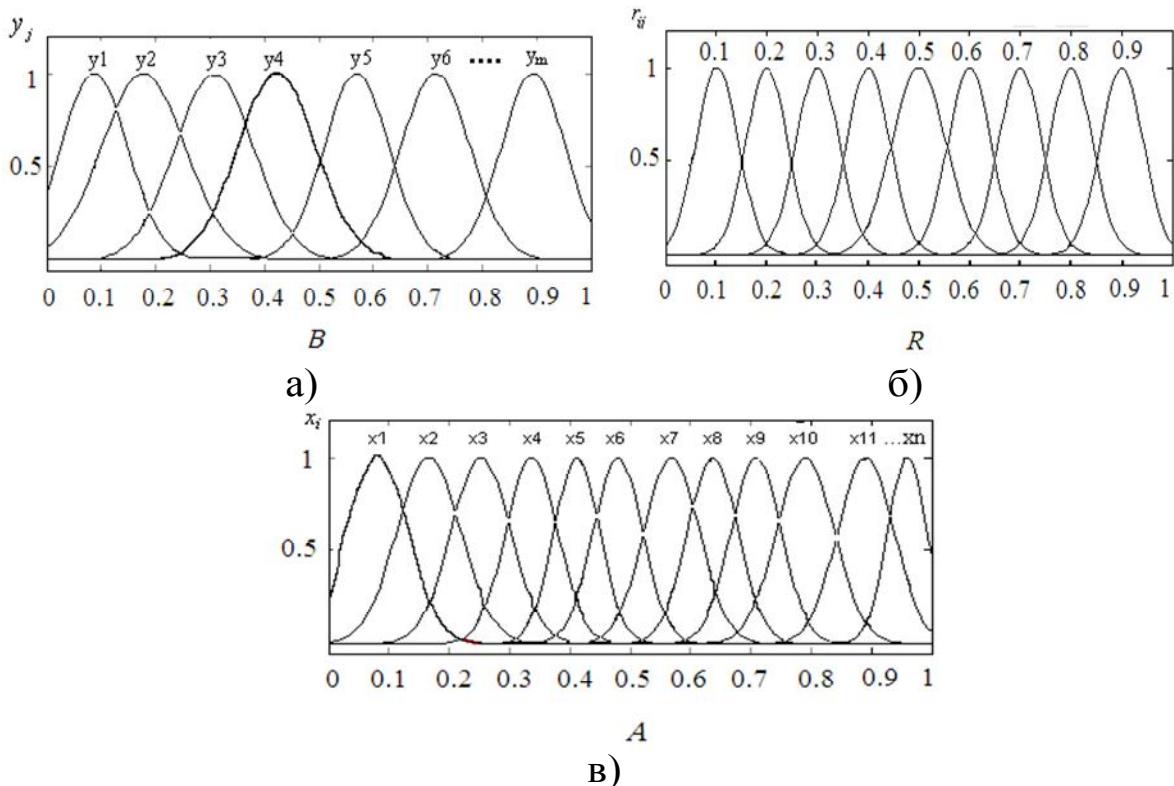


Рис.1. Функции принадлежности входов (а, б), выхода (в) нечеткой экспертной подмодели поиска неисправностей

Процедура получения логического вывода следующая.

1. Предполагается, что входные переменные приняли некоторые конкретные (четкие) значения -  $B_0, R_0$ , по которым находятся степени истинности  $y_j(B_0), r_{ij}(R_0)$  для предпосылок каждого из приведенных правил и уровни «отсекания»  $\alpha_l, l \in [1; k]$  функций принадлежности для предпосылок каждого из правил с использованием операции минимум (« $\wedge$ »):

$$\alpha_1 = y_1(B_0) \wedge r_1(R_0); \dots \alpha_k = y_k(B_0) \wedge r_k(R_0).$$

Затем находятся «усеченные» функции принадлежности  $x'_i(A)$ :

$$x'_1(A) = \alpha_1 \wedge x_1(A); \dots x'_n(A) = \alpha_n \wedge x_n(A).$$

2. Производится объединение функций, усеченных на предыдущем этапе логического вывода с использованием операции  $\max$  (« $\vee$ »), в результате чего получается комбинированное нечеткое подмножество, описываемое функцией принадлежности  $\mu_\Sigma(A)$  и соответствующее логическому выводу для выходной переменной  $A$ :

$$\mu_\Sigma(A) = x(A) = x'_1(A) \vee x'_2(A) \vee \dots \vee x'_n(A).$$

3. Нахождение четкого значения выходной переменной определяется как центр тяжести функции принадлежности  $\mu_\Sigma(A)$ :

$$a = \frac{\int_G A \cdot \mu_\Sigma(A) dA}{\int_G \mu_\Sigma(A) dA}.$$

В результате представленного логического вывода идентифицированы параметры  $B, R$  и  $A$  модели, но эти параметры не позволяют определить текущее состояние модуля. Поэтому необходимо найти значение веса неисправностей  $W$  и разделяющей функции  $F(A)$ . Для этого создается нечеткая логическая система, на входах которой задаются множества неисправностей  $A$  и веса неисправностей. На множестве  $A$  в интервале  $[0; 1]$  задаются все возможные неисправности  $x_i$  (рис. 2, а). На множестве  $W$  в интервале  $[0; 1]$  задается два основных вида диагноза «Работоспособен ( $d_1$ )», «Неработоспособен ( $d_2$ )» (рис. 2, б).

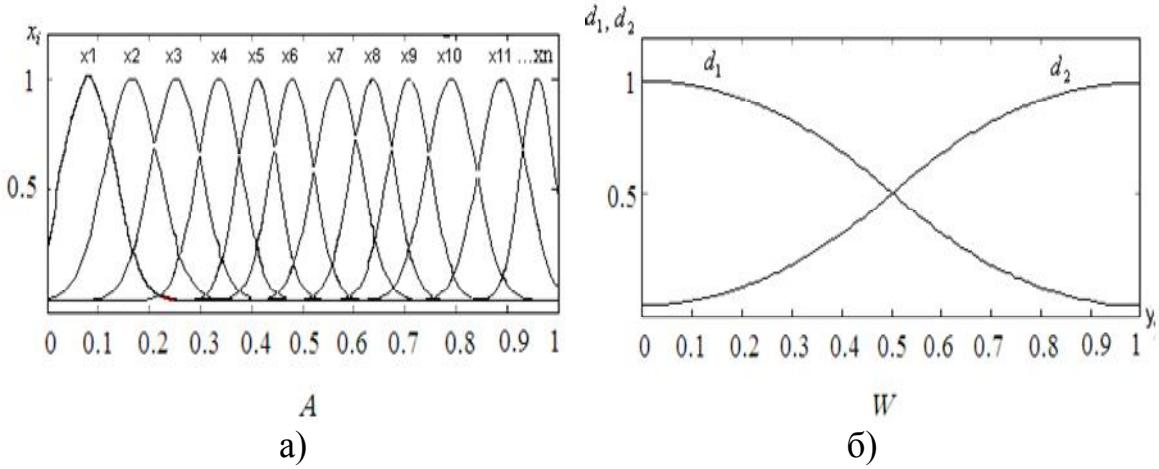


Рис. 2. Графики функций принадлежностей входов нечеткой подмодели оценки работоспособности

На выходе в интервале  $[-1;1]$  – значение разделяющей функции  $F(A)$ .

Взаимосвязь между введенными множествами описывается следующими нечеткими правилами:

если ( $A$  есть  $x_i$ ) и ( $W$  есть  $d_1$ ) то ( $F$  есть  $f_1$ );

если ( $A$  есть  $x_i$ ) и ( $W$  есть  $d_2$ ) то ( $F$  есть  $f_2$ ),

где  $f_1$  – заключение «объект допускается к эксплуатации»;  $f_2$  – заключение «объект не допускается к эксплуатации».

Значение разделяющей функции определяется путем логического вывода. Предполагается, что входные переменные приняли некоторые конкретные (четкие) значения -  $A_0$  и  $W_0$  для которых находится уровень «отсекания»  $\alpha(A_0)$ ,  $\alpha(W_0)$  для предпосылок каждого из приведенных правил:

$$\alpha_1 = x_1(A_0) \wedge w_1(W_0); \dots \alpha_n = x_n(A_0) \wedge w_n(W_0).$$

Для каждого правила вычисляются индивидуальные выходы  $f_i^* = F_i$ .

Определяется четкое значение выходной переменной методом взвешенного среднего:  $F(A) = (\sum_{i=1}^n (\alpha_i \cdot f_i^*)) / \sum_{i=1}^n \alpha_i$ .

Структура реализации нечеткого экспертного метода диагностирования представлена на рис. 3.

Разработанные модель и метод диагностирования позволяют по определяющим параметрам  $B$ , матрице соответствия  $R$  и весу неисправности  $W$  определить текущее значение разделяющей функции  $F(A)$ , характеризующей техническое состояние объекта. Если  $F(A)=1$ , то объект диагностирования исправен и дефекты отсутствуют. Если  $0 < F(A) < 1$ , то объект является работоспособным, но чем ближе значение  $F(A)$  к нулю, тем больше степень развития дефекта и ближе отказ объекта. Если  $F(A) \leq 0$ , то объект неработоспособен.

Выбор следующего определяющего параметра для данной неисправности

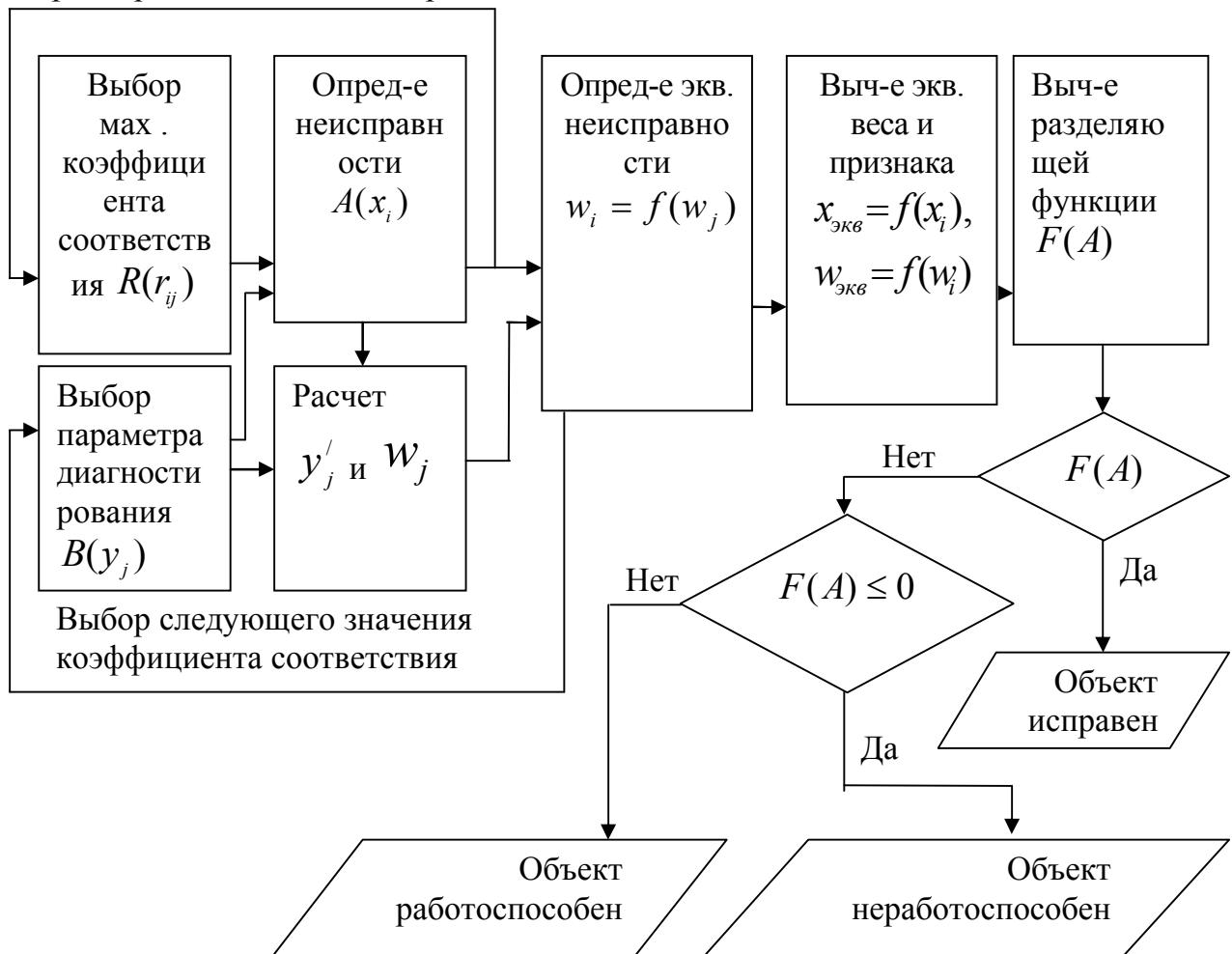


Рис. 3. Структура реализации нечеткого экспертного диагностирования технического состояния мехатронных объектов

В лабораторных условиях произведена диагностика одинаковых мехатронных модулей робота, основанных на двигателе постоянного тока ПЯ 250Ф по температуре корпуса, максимальному уровню шума и среднеквадратическому значению (СКЗ) виброскорости, измеренной в трех ортогональных направлениях. Для практической реализации предложенной нечеткой экспертной модели, необходимо составить матрицу соответствия  $R$  между известными неисправностями и измеряемыми параметрами. Для этого были опрошены десять экспертов, которые простили коэффициенты соответствия между неисправностями двигателя и используемыми диагностическими параметрами, согласно личных знаний об объекте. Полученная информация была усреднена и записана в матричном виде (табл. 1)

Таблица 1. Матрицы соответствия  $R$  между неисправностями и диагностическими параметрами электродвигателя

Неисправности $A = \{x_i\}$	Определяющие параметры $B = \{y_j\}$						Темпера тура	
	Шум			Вибрация				
	верти кальн ый замер	гориз онтал ьный замер	осев ой заме р	вертик альны й замер	горизо нтальн ый замер	осев ой заме р		
Износ или повреждение щеток	0,8	0,7	0,9	0,9	0,5	0,9	0,1	
Обрыв или износ коллекторной обмотки	0,5	0,6	0,8	0,5	0,6	0,8	0,3	
Межвитковые замыкания обмотки якоря	0,3	0,2	0,6	0,2	0,3	0,5	0,8	
Наличие переменной составляющей в напряжении питания, небаланс ротора	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,1	0,1	
Износ подшипников электродвигателя	0,9	0,8	0,7	0,8	0,9	0,7	0,1	

Данные, полученные в результате замера, переводятся, согласно (1) в относительные единицы (табл.2).

Таблица 2. Относительные значения определяющих параметров

Определяющий параметр диагностирования	Двигатель №1			Двигатель №2		
	вертикальный замер	горизонтальный замер	осевой замер	вертикальный замер	горизонтальный замер	осевой замер
СКЗ виброскорости, мм/с	0,97	0,961	0,986	1	0,673	0,255
Максимальный уровень звукового давления, дБ	0,98	0,99	0,97	1	1	1
Температура, $^{\circ}\text{C}$	0,89			0,2		

Согласно (2) определяются веса каждого определяющего параметра. Полученные исходные данные подставляются в нечеткую логическую систему. Результатом моделирования являются поверхности отклика нечетких подмоделей поиска неисправности (рис. 4 а) и оценки работоспособности (рис. 4 б).

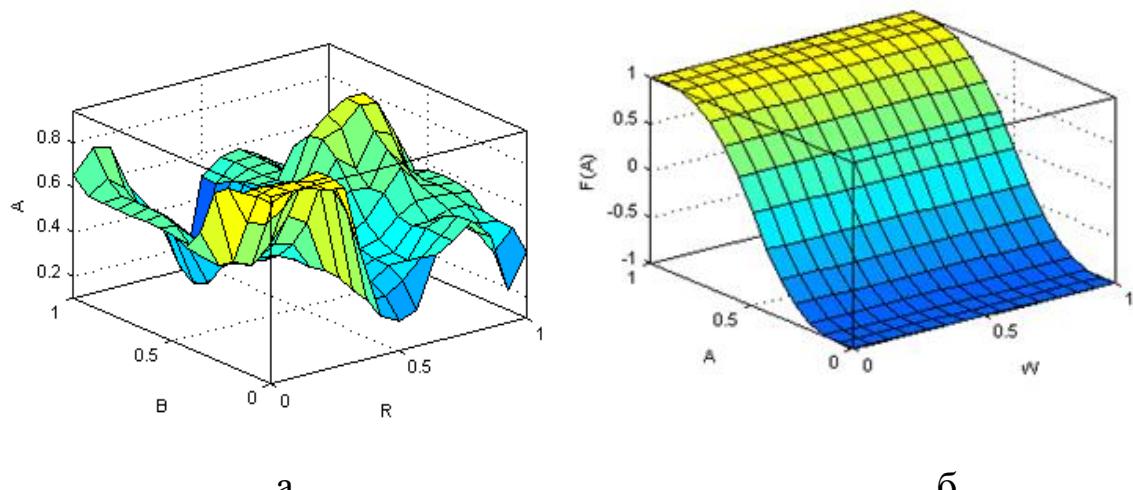


Рис. 4. Поверхности отклика нечеткой подмодели поиска неисправности (а) и оценки работоспособности (б)

Подстановка полученных результатов замеров показала, что двигатель №1 является работоспособным ( $F(A) = 0,237$ ), а двигатель №2 неисправен ( $F(A) = -1$ ) причина неисправности «Износ и повреждение щеток».

Для проверки адекватности полученной модели произведена оценка амплитуды сигнала, определенных по спектрограммам вибрации и шума, которая позволила выявить возникшую неисправность «Износ или повреждение щеток». Выявленная в процессе диагностирования неисправность двигателя 2 была обнаружена в ходе его осмотра, что подтверждает правильность теоретических выкладок.

### **Список литературы**

1. Круглова Т.Н. Глебов Н.А. Диагностирование и прогнозирование технического состояния мехатронных модулей технологического оборудования: монография. – Новочеркасск, 2011. – 119 с.
2. Биргер И. А. Техническая диагностика. – М.: Машиностроение, 1978.– 240 с.

**Круглова Татьяна Николаевна** – к.т.н., доцент ФГБОУ ВПО ЮРГПУ(НПИ), г. Новочеркасск. E-mail: kruglovatanya@rambler.ru

**Мурадян Геворг Ашотович** – студент третьего курса ЭМФ ФГБОУ ВПО ЮРГПУ(НПИ), г. Новочеркасск.

**Коваленко Виталий Сергеевич** – студент второго курса ЭМФ ФГБОУ ВПО ЮРГПУ(НПИ), г. Новочеркасск.

# **АЛГОРИТМ ПЛАНИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА НАДЕЖНОСТИ РЕЖИМОВ ИХ РАБОТЫ**

В. В. Афанасьев, С. С. Ястребов, И. Г. Романенко, М. И. Данилов

*В статье рассмотрен алгоритм планирования перспективного развития электроэнергетической системы на основе анализа ее надежности. Этот алгоритм позволяет формировать список вариантов схем планирования перспективного развития электроэнергетической системы. Установлено, что в этом случае в качестве критериев отказа для оценки надежности необходимо использовать длительно допустимые параметры режима электроэнергетической системы.*

*This article describes an algorithm planning of perspective development of power system on the basis of the analysis of its reliability. This algorithm allows to form the list of choices planning scheme of perspective development of power system. It is established, that in this case as the criteria for refusal to assess the reliability need to use the long-term permissible parameters of the regime of electric power system.*

Повышение надежности электроэнергетических систем (ЭЭС) в настоящее время является необходимым условием дальнейшего повышения уровня жизни людей, в связи с чем, этому вопросу уделяется большое внимание [1-4]. Вместе с тем, особого рассмотрения требует вопрос планирования перспективного развития ЭЭС с учетом экономически оправданного уровня надежности в условиях перспективного увеличения нагрузки в системе.

В настоящей работе предложен алгоритм планирования перспективного развития ЭЭС на основе сравнения показателей надежности и затрат на модернизацию схемы ЭЭС для различных вариантов из создаваемого списка схем планирования развития.

Целью настоящей работы является разработка алгоритма планирования перспективного развития электроэнергетической системы с учетом показателей ее надежности.

Выработка рекомендаций по улучшению надежности ЭЭС должна производиться на основе анализа режима работы и состояний, в которых наблюдается выполнение критериев отказа для режимной надежности. Наиболее важными критериями отказа являются: напряжение в узлах ЭЭС, перетоки активной мощности по сечениям и токи в линиях электропередач. Все указанные параметры рассматриваются в установившемся режиме работы ЭЭС. В переходных режимах такие расчеты весьма трудоемки и, как правило, выполняются в достаточно грубых приближениях.

Критерии отказа при расчётах показателей надежности при перспективном планировании должны основываться на максимальных длительно допустимых значениях параметров режима [5,6]. Аварийные значения параметров режима допустимы только в течение одного часа и могут применяться для расчета надежности существующих ЭЭС.

Рекомендации по перспективному планированию должны быть основаны на устраниении нарушений режима ЭЭС, которые наблюдаются в состояниях отказа системы [7]. При планировании необходимо рассматривать не только текущий режим ЭЭС, по возможности наиболее тяжелый (в котором наблюдается близкое к максимуму значение потребляемой и генерируемой мощности), но и перспективное увеличение нагрузки и генерации ЭЭС. В первом приближении возможно использование равномерного увеличения нагрузки и генерации по планируемой ЭЭС. Основное требование при планировании перспективного развития – выполнение баланса генерируемой и потребляемой мощности в системе, то есть при увеличении нагрузки необходимо на соответствующую величину увеличить и генерацию в системе.

Алгоритм перспективного планирования ЭЭС представлен на рис. 1.

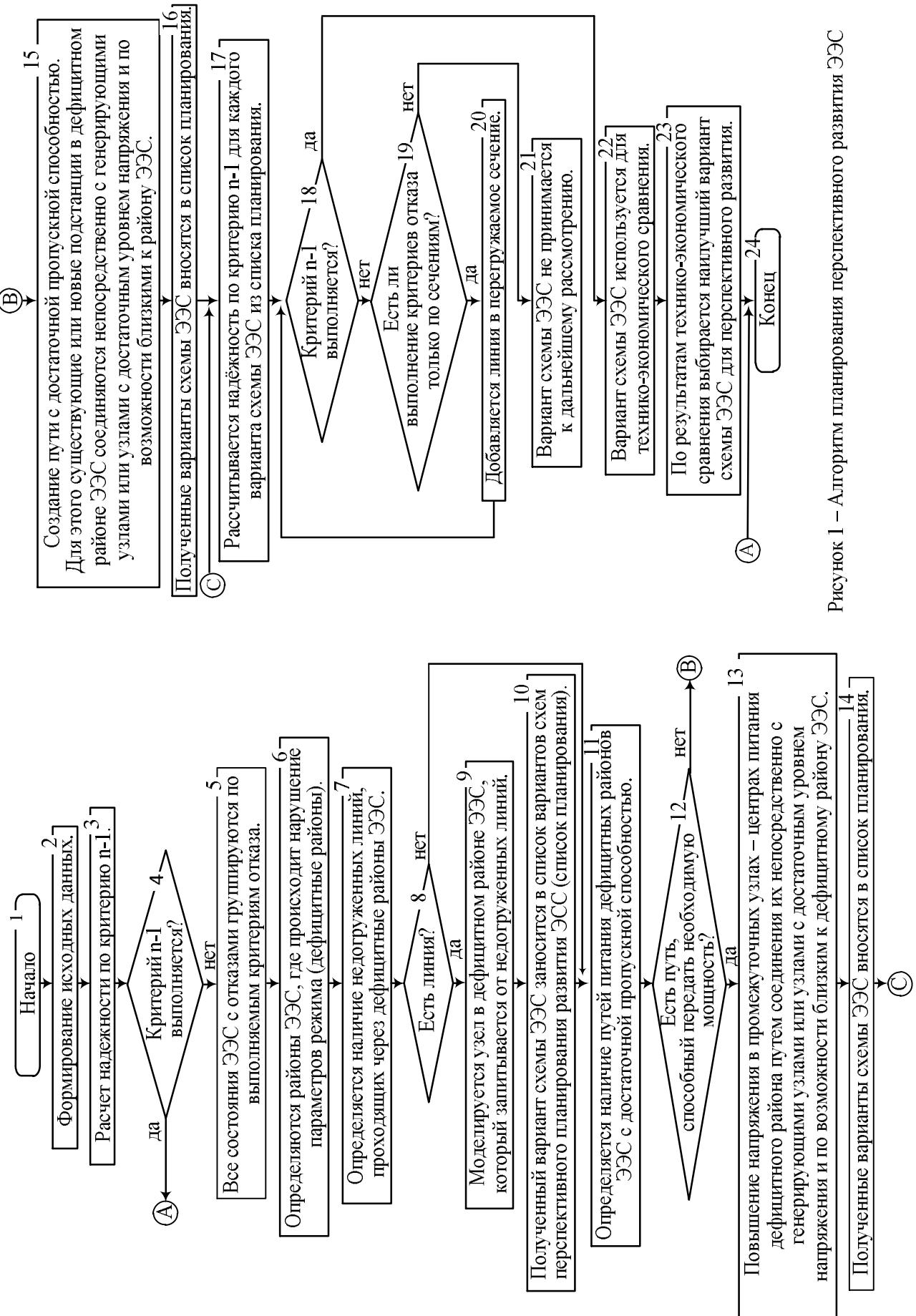


Рисунок 1 – Алгоритм планирования перспективного развития ЭЭС

Для устранения нарушений параметров режима анализируется каждое состояние отказа системы: определяются места и причины выхода параметров режима за допустимые пределы.

Выбор конкретного решения задачи планирования требует анализа различных вариантов схемы сети с позиции экономической целесообразности и обеспечения требуемой надежности всей системы.

Выявлено, что критерии отказа, применяемые при расчете надежности при перспективном планировании, должны учитывать максимальные длительно допустимые параметры режима.

Разработанный алгоритм позволяет выполнять планирование развития электроэнергетической системы, основываясь на заданном уровне ее надежности. В результате работы алгоритма формируется список вариантов схем планирования перспективного развития ЭЭС, каждый из которых обладает определенным уровнем надежности и экономических затрат.

### **Список литературы**

1. Эндрени Дж. Моделирование при расчетах надежности в электроэнергетических системах /пер. с англ./ под ред. Ю.Н. Руденко. – М.: Энергоатомиздат, 1983.– 336 с.
2. Биллинтон Р., Алан Р. Оценка надежности электроэнергетических систем / пер. с англ./ под ред. Ю.А. Фокина. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 288 с.
3. Фокин Ю. А., Осипов Я. Н. Методы расчёта показателей надёжности сложных электроэнергетических систем, основанные на структурно-функциональных характеристиках – Электричество, 2010, №5, с.7-13.
4. Методы и модели исследования надежности электроэнергетических систем / Манов Н.А., Хохлов М.В., Чукреев Ю.Я. [и др.] / под ред. Н.А. Манова. – Сыктывкар: изд-во Коми научного центра УрО РАН, 2010. – 292 с.

5. Методические указания по устойчивости энергосистем. Утверждены приказом Минэнерго России от 30 июня 2003г. № 277 - М.: Изд-во НЦ ЭНАС, 2004.

6. Стандарт организации ОАО «СО ЕЭС» СТО 59012820.29.240.007-2008 Правила предотвращения развития и ликвидации нарушений нормального режима электрической части энергосистем.

7. Афанасьев В. В., Кожевников В. М., Данилов М.И., Ястребов С.С., Романенко И. Г., Демин М.С. Оценка надежности электроэнергетической системы при перспективном планировании развития системы на основе анализа режимов ее работы // Надёжность. М., 2012. – №3 (42). – С. 46–55.

**Афанасьев Вячеслав Валерьевич** – заместитель генерального директора Филиала ОАО «СО ЕЭС» ОДУ Юга.

**Ястребов Сергей Сергеевич** – доцент кафедры АЭСиЭ института электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского Федерального Университета.

**Романенко Ирина Геннадьевна** – доцент кафедры АЭСиЭ института электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского Федерального Университета.

**Данилов Максим Иванович** – доцент кафедры физики, электротехники и электроники института электроэнергетики, электроники и нанотехнологий Северо-Кавказского Федерального Университета.

Адрес для переписки: 355003, г. Ставрополь, ул. Ленина, д.277 б, т.89187635338, maksim\_danilov@ncstu.ru

# **МАТРИЧНЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРИЯ ГРАФОВ**

## **РАЗЛОЖЕНИЕ МНОГОКРАТНЫХ СУММАРНЫХ И РАЗНОСТНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ДОПОЛНЕНИЙ МЕТОДОМ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ**

В. В. Филаретов

*Рассмотрено отображение многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений (МСАД) электронной схемой с нуллорными и зеркальными аномальными элементами. Предложено раскрывать МСАД топологически (без использования нумерации строк и столбцов матрицы) на основе выделения нуллов и зеркальных идеальных элементов.*

*Discusses the schematic display of higher order summative cofactors using the electronic circuits with nullor and mirror pathological elements. Proposed the topological decomposition of higher order summative cofactors (without the use of a numbering of rows and columns of the matrix) by means of extraction for nullor and mirror ideal elements.*

**О противоречии матричной алгебры.** В настоящее время теории матричных и схемных определителей развиваются параллельно, причем классическая матричная алгебра обогащается топологическими понятиями и алгоритмами [1]. Этому способствует довольно прозрачная аналогия между электрической схемой и ее матрицей, решением системы линейных алгебраических уравнений и анализом схемы [2,3], а также разработка эффективного метода символьного анализа электрических цепей – метода схемных определителей [4–13].

Начала теории определителей, истоки которой восходят к работе Готфрида Лейбница 1693 года [14], содержат некоторое методическое противоречие. С одной стороны, определитель матрицы в виде суммы отдельных слагаемых можно найти без использования нумерации строк и столбцов, применив для этого символические обозначения.

С другой стороны, желая получить компактное (вложенное) выражение определителя с помощью разложения Лапласа по строке (столбцу) или нескольким строкам (столбцам), приходится использовать понятие алгебраического дополнения, которое отличается от соответствующего минора матрицы знаком, учитывающим порядковые номера строк и столбцов [15].

Для матриц высокой размерности индуктивное построение определителя оказывается предпочтительным или единственным возможным. Разложение определителя матрицы  $A$  по некоторому элементу  $a_{ij}$  (выделение элемента  $a_{ij}$ ) имеет вид

$$\Delta = (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} + \Delta(a_{ij}=0), \quad (1)$$

где  $\Delta_{ij}$  – минор, то есть определитель матрицы, образованной из матрицы  $A$  путем вычеркивания строки  $i$  и столбца  $j$ ;  $\Delta(a_{ij}=0)$  – определитель матрицы, полученной из матрицы  $A$  в результате удаления элемента  $a_{ij}$ . Формула (1) применяется к определителям  $\Delta_{ij}$  и  $\Delta(a_{ij}=0)$  рекурсивно до получения матриц первого порядка и вырожденных матриц.

Теорема Лапласа в ее общем или специальных случаях довольно широко используется при аналитическом решении систем линейных алгебраических уравнений [16] и формировании символьных схемных функций электрических цепей [17,18]. При этом нахождение знака требует существенной доли в затратах времени на разложение определителей. Это связано не только и не столько с наличием дополнительных операций сложения, а с необходимостью перенумерации строк и столбцов в результате выделения элементов матриц.

Алгебраическое правило нахождения знака (формула (1)), возможно, обладает наглядностью при раскрытии определителей вручную. Однако в

случае матриц высокой размерности, которые имеют, как правило, высокую разреженность, приходится использовать их списочное кодирование, задавая списками-множествами только ненулевые элементы. Соответствующие методики опираются на графовые (топологические) представления и широко применяются в настоящее время при численном решении систем уравнений [15]. Таким образом, современные технологии решения систем уравнений фактически отрицают понятие матрицы как таблицы элементов.

При разложении определителя матрицы в символьном (буквенном) виде также желательно ее представление в виде топологического объекта, в котором номера строк и столбцов служат лишь для указания расположения элементов и не должны непосредственно использоваться для вычисления знаков.

**Топологическое раскрытие матричного определителя.** Пусть матрица задается списком  $P$  ее ненулевых элементов. В каждом элементе списка  $p_k$ , кроме буквенного обозначения или численного значения соответствующего элемента матрицы, содержатся его координаты – номера строки и столбца. Введем функцию совпадения  $sim(i,j)$ , равную 1 при  $i=j$  и  $-1$  при  $i \neq j$ . Тогда определитель матрицы  $A$  раскрывается рекурсивно [1]

$$\Delta = sim(i,j) a_{ij} \Delta_{ij}(i \rightarrow j) + \Delta(a_{ij}=0), \quad (2)$$

где  $\Delta_{ij}(i \rightarrow j)$  – определитель матрицы, которая задана списком, образованным из списка матрицы  $A$  в результате следующих преобразований: 1) вычеркивания элементов с номерами строки  $i$  и (или) столбца  $j$ ; 2) замены номера  $i$  в списке элементов матрицы на номер  $j$ . Если  $i=j$ , то второе преобразование не выполняется.

Выражения определителей, полученные на основе формул (1) и (2), могут различаться только знаками при некоторых подвыражениях и полностью совпадают при раскрытии скобок. Ниже приведен пример разложения определителя матрицы третьего порядка по формуле (2).

### Пример 1.

$$\begin{aligned}
\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ d_{21} & e_{22} & f_{23} \\ g_{31} & h_{32} & i_{33} \end{bmatrix} &= sim(1,1) a \Delta_{11}(1 \rightarrow 1) + sim(1,2) b \Delta_{12}(1 \rightarrow 2) + \\
&\quad + sim(1,3) c \Delta_{13}(1 \rightarrow 3) = \\
&= a \det \begin{bmatrix} e_{22} f_{23} \\ h_{32} i_{33} \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d_{22} f_{23} \\ g_{32} i_{33} \end{bmatrix} - c \det \begin{bmatrix} d_{23} e_{22} \\ g_{33} h_{32} \end{bmatrix} = \\
&= a (sim(2,2) e |i_{33}| + sim(2,3) f |h_{33}|) - \\
&\quad - b (sim(2,2) d |i_{33}| + sim(2,3) f |g_{33}|) - \\
&\quad - c (sim(2,3) d |h_{33}| + sim(2,2) e |g_{33}|) = \\
&= a (e i - f h) - b (d i - f g) - c (-d h + e g).
\end{aligned}$$

Как видно, в формуле (2) операция сложения номеров строки и столбца заменена операцией сравнения, которая применима не только к цифровым, но и к буквенным, знаковым и т.д. объектам. Список элементов в этом примере только для наглядности помещен в матрицу. Затраты на изменение пометок объектов несопоставимо меньше тех, которые требуются при порядковой нумерации строк и столбцов после выделения очередного элемента матрицы по формуле (1).

Для доказательства формулы (2) используется то обстоятельство, что матрица порядка  $n$  может быть отображена электрической схемой с  $n^2$  источниками тока, управляемыми напряжением, которая имеет  $n+1$  узлов [2]. При разложении определителя такой схемы используем метод стягивания и удаления ветвей [6]. Соответствующая формула применительно к рассматриваемому случаю будет иметь вид

$$\Delta = sim(i,j) s_{i0j0} \Delta_s + \Delta(s_{i0j0}=0), \quad (3)$$

где  $s_{i0j0}$  – параметр источника тока, направленного от узла  $i$  к узлу 0, управляемого напряжением, ориентированным от узла  $j$  к узлу 0;  $\Delta_s$  – определитель схемы, полученной из первоначальной схемы в результате

следующих преобразований: 1) стягивание генератора (приемника) выделяемого управляемого источника таким образом, чтобы генераторы тока (приемники напряжения), которые присоединены к узлу  $i$  (узлу  $j$ ) переключились на узел 0; 2) объединение узлов  $i$  и  $j$ ;  $\Delta(s_{i0j0}=0)$  – определитель схемы, образованной из первоначальной схемы путем нейтрализации выделяемого управляемого источника.

Преобразование 1 в формуле (3) соответствует вычеркиванию строки  $i$  и столбца  $j$  в матрице А, а преобразование 2 изоморфно замене номеров  $i \rightarrow j$ , что доказывает формулу (2) и подтверждает эквивалентность вложенных выражений определителей матрицы и отображающей ее схемы, получаемых с помощью формул (2) и (3).

**Суммарные алгебраические дополнения.** Многократные суммарные алгебраические дополнения (МСАД) [20,21] или Higher Order Summative Cofactors (HOSC) [22–25] представляются в виде последовательности пар номеров строк и столбцов, задающей операции над некоторой матрицей. Одиночные элементы пары  $a$  или  $c$  при символе  $\Delta$  ( $\Delta_{ac}$ ) указывают на удаление (вычеркивание) соответствующей строки или столбца, что эквивалентно добавлению этой строки или столбца к отсутствующим в матрице базисным строке или столбцу, имеющим номер 0, то есть  $\Delta_{ac}=\Delta_{(a+0)(c+0)}$ .

Элемент пары, записанный в виде суммы номеров двух строк или двух столбцов  $\Delta_{(a+b)(c+d)}$  означает прибавление строки  $a$  к строке  $b$  и прибавление столбца  $c$  к столбцу  $d$ .

МСАД используются при символьном и символьно-численном анализе электрических цепей узловым методом и его модификациями, предлагаются более совершенные алгоритмы алгебраического разложения [24,25]. Прежде всего, существенно, что, опираясь на матричное выделение параметров [22,23], была преодолена избыточность матрицы узловых проводимостей, в которой каждый незаземленный элемент схемы отображается в четырех клетках. В работах [24,25] также выполнено обобщение матричных формул выделения для сопротивлений и

нерегулярных для узлового базиса управляемых источников. При этом проявилась аналогия со схемно-алгебраическим методом [4–13], предусматривающим нахождение МСАД непосредственно по схеме, минуя ее представление матрицей.

Метод схемных определителей более нагляден, что делает его менее утомительным и упрощает проверку решения, достаточно просто реализуется в компьютерной программе. При этом суммы индексов строк или столбцов соответствуют подсоединению пар нораторов или нуллаторов, а разности индексов строк или столбцов отображаются подсоединением аномальных зеркальных элементов – зеркального элемента тока или зеркального элемента напряжения. Данная статья посвящена рассмотрению различных случаев вычисления МСАД на основе их схемных отображений и метода схемных определителей.

**Найдение МСАД с помощью нуллоров.** МСАД  $\Delta_{(a+b)(c+d)}$  некоторой электрической схемы равно определителю схемы, полученной из исходной схемы в результате присоединения к ней норатора, направленного из узла  $a$  в узел  $b$ , и нуллатора, направленного из узла  $c$  в узел  $d$ .

Исходная схема может быть пустой (не содержать элементов). В этом случае МСАД является само по себе схемой, имеющей определитель, равный 1, -1 или 0.

**Пример 2.** Проверить выражение (1) [24]:

$$\Delta_{(5+0)(2+3),(6+0)(3+1),(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(5+2)(5+2),(6+3)(6+3)} = 1. \quad (1)$$

МСАД в (1) можно представить схемой, изображенной на рис.1,а. После выделения нуллора, соответствующего паре  $(5+0)(2+3)$ , относительно узлов 2 и 5 получается схема на рис.1,в. Промежуточная схема на рис.1,б иллюстрирует первый этап выделения нуллора – стягивание норатора и нуллатора (перед последующим объединением узлов 2 и 5).

Таким образом, можно выделить все нуллоры в том же порядке, в каком следуют пары МСАД. Однако, что желательно, существенно уменьшить объем выкладок. Для этого следует в первую очередь выделять нуллоры, норатор и нуллатор которых образуют параллельное

соединение. Таких пар на схеме рис.1,а четыре. В каждой из этих пар норатор и нуллатор направлены одинаково по отношению к инцидентным узлам, что эквивалентно идеальному проводнику. После выделения последнего, шестого нуллора получается схема-узел, определитель которой равен 1, то есть выражение (1) справедливо.

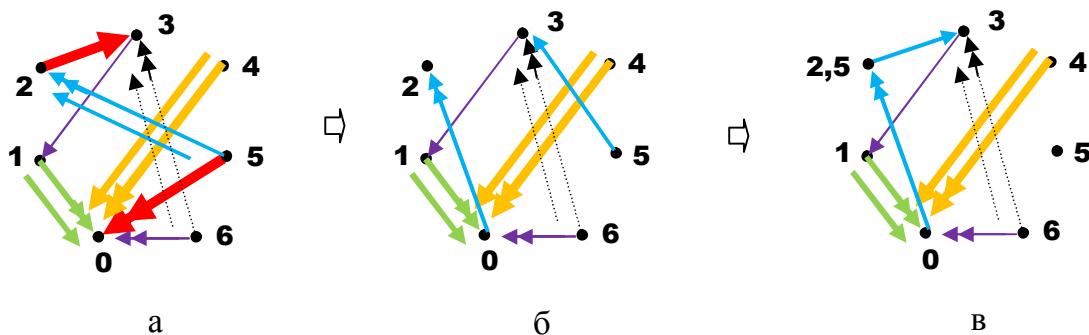


Рис. 1

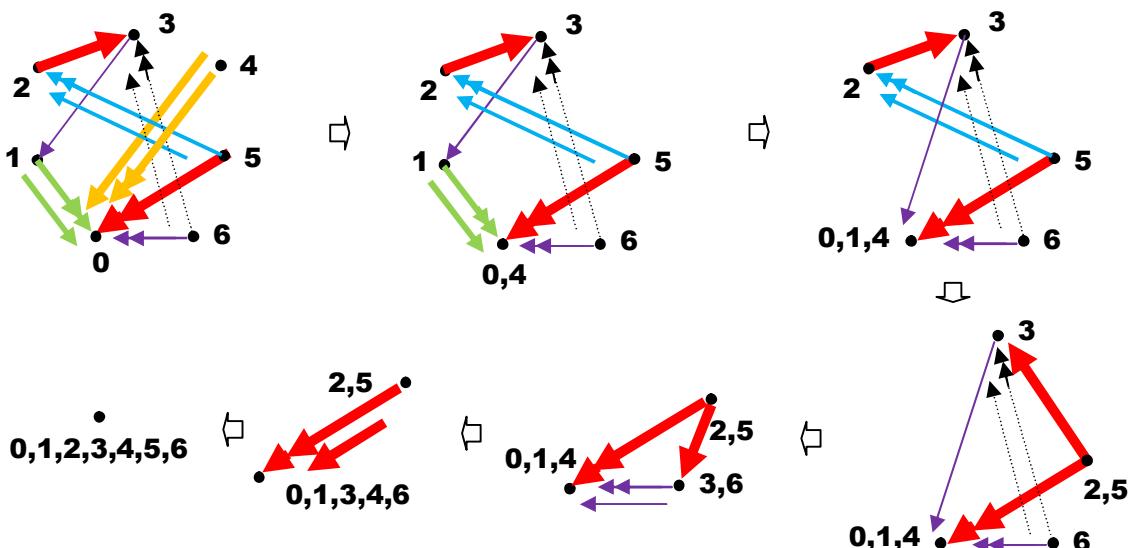


Рис. 2

Предложенными схемными преобразованиями можно сопоставить алгебраические манипуляции с индексами. Ниже приводится два варианта такого алгебраического решения.

$$\begin{aligned}
 & \Delta_{(5+0)(2+3),(6+0)(3+1),(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(5+2)(5+2),(6+3)(6+3)} = \\
 & -\Delta_{(6+0)(3+1),(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(0+2)(2+3),(6+3)(6+3)} = 1 \\
 & -\Delta_{(6+0)(3+1),(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(2+0)(2+3),(6+3)(6+3)} = 1 \\
 & -\Delta_{(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(2+0)(2+1),(0+3)(3+1)} = 1
 \end{aligned}$$

$$-\Delta_{(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(2+0)(2+1),(3+0)(3+1)}=1$$

$$\Delta_{(1+0)(1+0),(2+0)(2+1),(3+0)(3+1)}=1$$

$$\Delta_{(2+0)(2+0),(3+0)(3+0)}=1$$

$$\Delta_{(3+0)(3+0)}=1$$

$$\Delta=(-1)^4=1.$$

$$\Delta_{(5+0)(2+3),(6+0)(3+1),(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(5+2)(5+2),(6+3)(6+3)}=$$

$$-\Delta_{(6+0)(3+1),(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(0+2)(2+3),(6+3)(6+3)}=1$$

$$-\Delta_{(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(0+2)(2+1),(0+3)(3+1)}=1$$

$$\Delta_{(4+0)(4+0),(1+0)(1+0),(2+0)(2+1),(3+0)(3+1)}=1$$

$$\Delta_{(1+0)(1+0),(2+0)(2+1),(3+0)(3+1)}=1$$

$$\Delta_{(2+0)(2+0),(3+0)(3+0)}=1$$

$$\Delta_{(3+0)(3+0)}=1$$

$$\Delta=(-1)^2=1.$$

Как видно, операции с индексами утомительны, алгебраическое решение не является наглядным, и его проверка весьма затруднительна.

**Нахождение МСАД с помощью аномальных зеркальных элементов.** Нораторы и нуллаторы не позволяют отобразить МСАД с разностями номеров строк или столбцов непосредственно. Для этого здесь предлагается использовать недавно предложенные зеркальные элементы тока и напряжения: зеркальный элемент тока (ЗЭТ) и зеркальный элемент напряжения (ЗЭН). Например, для раскрытия МСАД вида  $\Delta_{(a-b)(c-d)}$ , означающего вычитание строки  $a$  из строки  $b$  и вычитание столбца  $c$  из столбца  $d$ , между узлами  $a$  и  $b$  включается ЗЭТ, а между узлами  $c$  и  $d$  подсоединяется ЗЭН.

**Пример 3.** Проверить выражение (2) [24]:

$$\Delta_{(4+0)(3+0),(2-1)(3-1),(3+2)(3+2),(4+1)(4+1)}=-1. \quad (2)$$

МСАД в (2) можно представить схемой, изображенной на рис.3,а. После выделения нуллоров, эквивалентных идеальным проводникам, которые соответствуют парам  $(3+2)(3+2)$  и  $(4+1)(4+1)$ , получаются схемы, показанные на рис.3,б и рис.3,в.

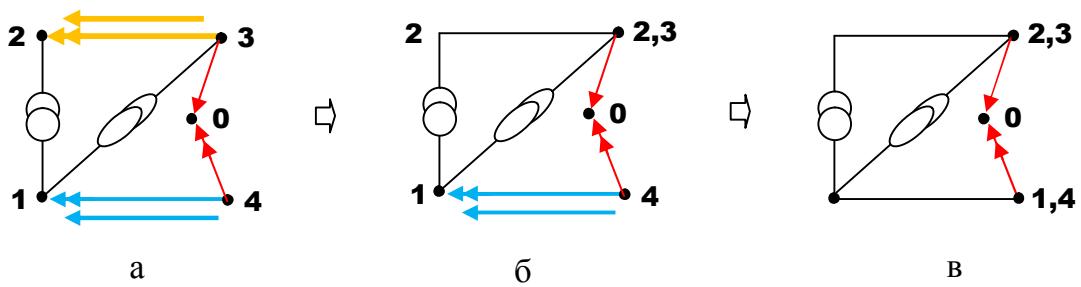


Рис. 3

В процессе выделения оставшегося на рис.3,в (рис.4,а) нуллора относительно узлов 2,3 и 1,4 получается последовательность схем, показанная на рис.4,б – рис.4,г. Рис.4,б и рис.4,в иллюстрируют операции стягивания нуллатора и норатора соответственно. Рис.4,г показывает завершение этого преобразования объединением опорных узлов 2,3 и 1,4. Поскольку опорные узлы норатора и нуллатора выделяемого нуллора различные, определителю схемы на рис.4,г следует присвоить противоположный знак.

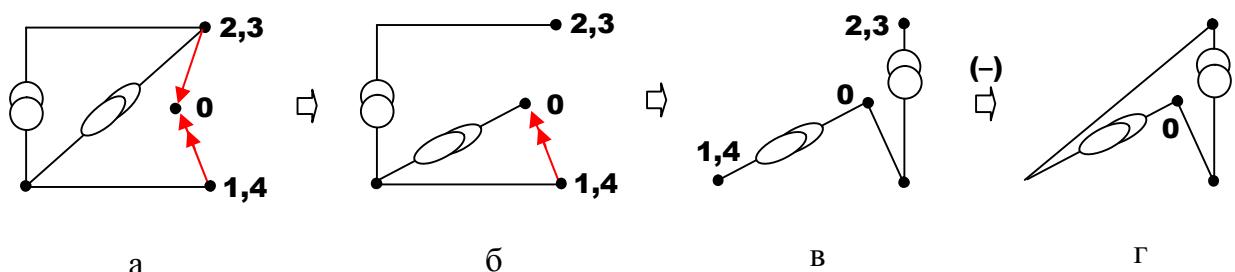


Рис. 4

На рис.5 раскрывается определитель параллельного соединения ЗЭТ и ЗЭН для схемы на рис.4,г. При этом эти аномальные зеркальные элементы замещаются нуллорными моделями.

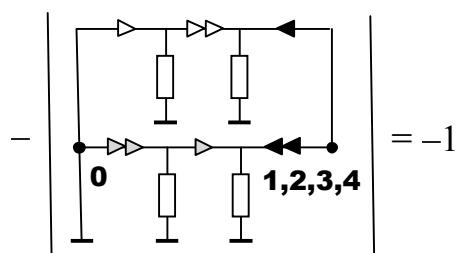


Рис. 5

Таким образом, выражение (3) справедливо. Предложенным схемным преобразованиям можно сопоставить алгебраические манипуляции с индексами. Ниже приводится два варианта такого алгебраического решения.

$$\begin{aligned}\Delta_{(4+0)(3+0),(2-1)(3-1),(3+2)(3+2),(4+1)(4+1)} &= \\ -\Delta_{(2-1)(0-1),(3+2)(0+2),(0+1)(3+1)} &= \\ ---\Delta_{(2-1)(1-0),(3+2)(2+0),(1+0)(3+1)} &= \\ --\Delta_{(3+1)(1+0),(1+0)(3+0)} &= \\ -\Delta_{(1+0)(1+0)} &= \\ \Delta = (-1)^7 &= -1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta_{(4+0)(3+0),(2-1)(3-1),(3+2)(3+2),(4+1)(4+1)} &= \\ -\Delta_{(2-1)(0-1),(3+2)(0+2),(0+1)(3+1)} &= \\ -\Delta_{(2-1)(1-0),(3+2)(0+2),(0+1)(3+1)} &= \\ --\Delta_{(3+1)(0+1),(0+1)(3+0)} &= \\ -\Delta_{(3+1)(1+0),(0+1)(3+0)} &= \\ -\Delta_{(0+1)(1+0)} &= \\ -\Delta_{(1+0)(1+0)} &= \\ \Delta = (-1)^7 &= -1.\end{aligned}$$

### **Схемно-алгебраическое доказательство основных свойств МСАД.**

Ниже перечисляются важнейшие тождества МСАД, используемые в матричном методе выделения параметров, приводятся схемно-алгебраические выражения этих тождеств и выполняются их доказательство на основе выделения нуллов или аномальных зеркальных элементов.

**При взаимной перестановке двух строк (столбцов) изменяется знак определителя.**

$$\Delta_{ab,cd} = -\Delta_{cb,ad} \quad (3)$$

$$\Delta_{ab,cd} = -\Delta_{cd,ab} \quad (4)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (3) представлено на рис.6.

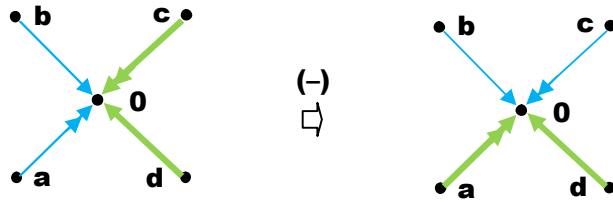


Рис. 6

Определители правой и левой схем на рис.6 различаются по знаку, поскольку взаимно изменяется нумерация (цвет) у двух нуллаторов (одно – нечетное – изменение нумерации). В силу дуальности из этого вытекает справедливость тождества (4). Таким образом, при взаимном изменении номеров у двух нораторов или у двух нуллаторов изменяется знак схемного определителя.

**При изменении порядка сложения двух строк (столбцов) меняется знак определителя.**

$$\Delta_{(a+b)(c+d)} = -\Delta_{(b+a)(c+d)}. \quad (5)$$

$$\Delta_{(a+b)(c+d)} = -\Delta_{(a+b)(d+c)}. \quad (6)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (5) представлено на рис.7.



Рис. 7

Определители правой и левой схем на рис.7 различаются по знаку, поскольку изменяется направление у одного нуллатора (одно – нечетное – изменение ориентации). В силу дуальности из этого вытекает справедливость тождества (6). Таким образом, при изменении ориентации одного норатора или нуллатора изменяется знак схемного определителя.

**При изменении порядка вычитания двух строк (столбцов) не меняется знак определителя.**

$$\Delta_{(a-b)(c+d)} = \Delta_{(b-a)(c+d)} \quad (7)$$

$$\Delta_{(a-b)(c-d)} = \Delta_{(b-a)(d-c)} \quad (8)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (7) представлено на рис.8.

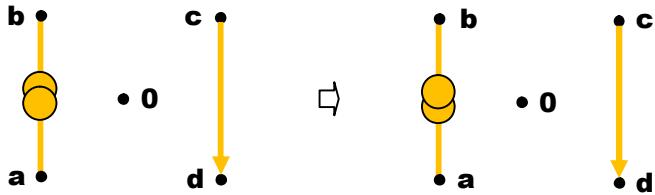


Рис. 8

ЗЭТ, как и ЗЭН, являются ненаправленными схемными элементами, поэтому изменение положения их полюсов не изменяет знака определителя схемы, а тождества (7) и (8) верны.

**При добавлении третьей строки (столбца) к любой другой из двух сложенных строк (столбцов) знак определителя не меняется.**

$$\Delta_{(a+b)(c+d),(e+a)(f+g)} = \Delta_{(a+b)(c+d),(e+b)(f+g)} . \quad (9)$$

$$\Delta_{(a+b)(c+d),(e+g)(f+c)} = \Delta_{(a+b)(c+d),(e+g)(f+d)} . \quad (10)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (9) представлено на рис.9.

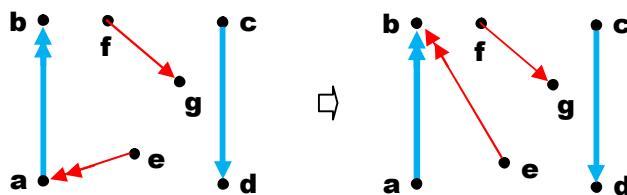


Рис. 9

Определители схем на рис.9 равны, поскольку эти схемы связаны эквивалентным преобразованием двух нораторных деревьев, построенных на узлах  $a$ ,  $b$  и  $e$ . В силу дуальности из справедливости тождества (9) вытекает справедливость тождества (10). Оба тождества можно доказать также с

помощью правила выделения нуллора. После стягивания норатора  $ab$  нораторы  $ea$  и  $eb$  занимают одинаковое положение.

**Добавление строки (столбца) к самой (самому) к себе обнуляет МСАД.**

$$\Delta_{(a+a)(c+d)} = 0. \quad (11)$$

$$\Delta_{(a+b)(c+c)} = 0. \quad (12)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (11) представлено на рис.10.

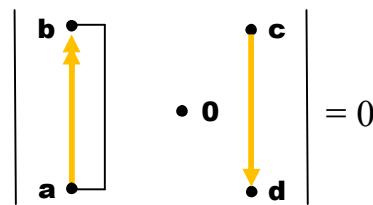


Рис. 10

Замыкание норатора или нуллатора приводит к вырождению схемы (равенству нулю ее определителя). Вырожденными являются все схемы, имеющие хотя бы одну нораторную или нуллаторную петлю.

Вычитание строки (столбца) из самой (самого) себя приводит к удвоению определителя с противоположным знаком.

$$\Delta_{(a-a)(c+d)} = -2\Delta_{a(c+d)}. \quad (13)$$

$$\Delta_{(a+b)(c-c)} = -2\Delta_{(a+b)c}. \quad (14)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (13) представлено на рис.11.

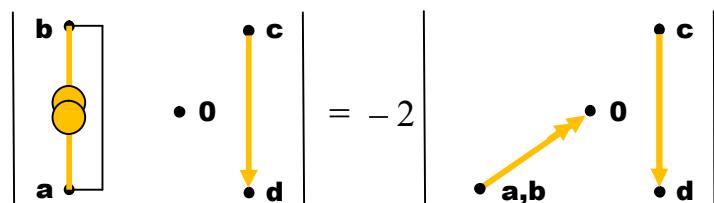


Рис. 11

В результате замещения ЗЭТ нуллорной схемой получается схема, изображенная на рис. 12 сверху. Ниже показано разложение определителя этой схемы до схемного определителя, стоящего в правой части доказываемого тождества (13). Таким образом, определитель схемы с ЗЭТ-петлей отличен по знаку от удвоенного определителя схемы, где ЗЭТ заменен направленным к базисному узлу норатором.

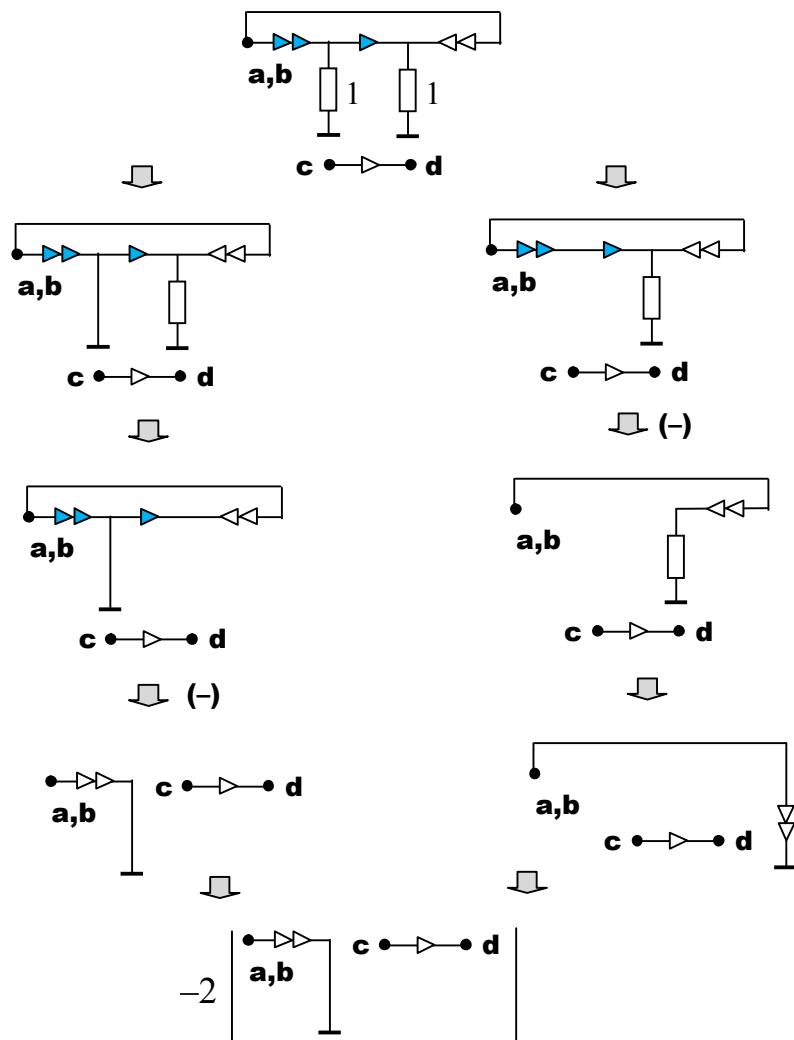


Рис. 12

В работе [25] в правой части тождества (13) отсутствует знак минус. Ниже приводится матрично-алгебраическое доказательство отрицательного знака в тождестве (13), предложенное Г.В.Майко. Перенумеруем узлы  $a$ ,  $c$  и  $d$  так, чтобы они шли по порядку, то есть  $c=a+1$ ,

$d=c+1=a+2$ ). Это всегда возможно, и никак не влияет на расчётные формулы. Найдём знак определителя  $\Delta_{(a-a)(b+c)}$ , используя правило [20,21]:  $(-1)^{\alpha+\beta}$ , где  $\alpha$  – сумма вычеркнутых строк и столбцов, а  $\beta$  – количество беспорядков при вычёркивании строк и столбцов. Очевидно, что при выбранной нумерации узлов  $\beta=0$  всегда. Понятно, что  $\alpha=a+a+b+c = 2a+b+c$ . Нетрудно показать, что любая последовательность двух подряд идущих натуральных чисел всегда нечетна. Поэтому знак определителя всегда отрицателен.

МСАД, полученное последовательным попарным вычёркиванием строк и столбцов матрицы, равно единице.

$$\Delta_{11,22,\dots,nn} = 1 \quad (15)$$

Схемно-алгебраическое выражение тождества (15) представлено на рис.13 и сводится к определителю схемы в виде единственного узла.

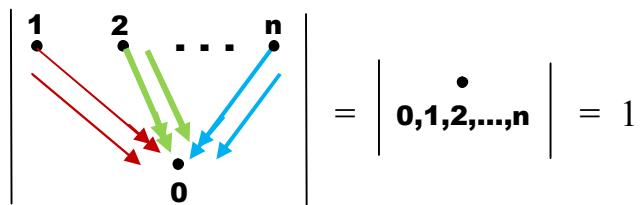


Рис. 13

**Выделение зеркальных идеальных элементов.** Повысить эффективность разложения МСАД позволяет использование формул выделения трех разновидностей зеркальных идеальных элементов: 1) ЗЭТ+ЗЭН; 2) норатор+ЗЭН; 3) ЗЭТ+нуллатор.

#### Пример 4. Выделение элемента ЗЭТ+ЗЭН.

Проверим выражение (16):

$$\Delta_{(2-1)(1-0),(3+2)(0+2),(0+1)(3+1)} = 1. \quad (16)$$

МСАД в (16) можно представить исходной схемой, изображенной на рис.14 слева (схема I). Производные схемы на рис.14 иллюстрируют операции выделения ЗЭТ+ЗЭН. Схема с одним ЗЭН показывает результат стягивания ЗЭТ относительно опорного узла 2. На следующей (по стрелке) схеме показывается стягивание ЗЭН относительного опорного

узла 1 и результат стягивания всего ЗЭТ+ЗЭН. Далее выполняется объединение опорных узлов 1 и 2. Определитель результирующей схемы приобретает знак минус, поскольку опорные узлы различные.

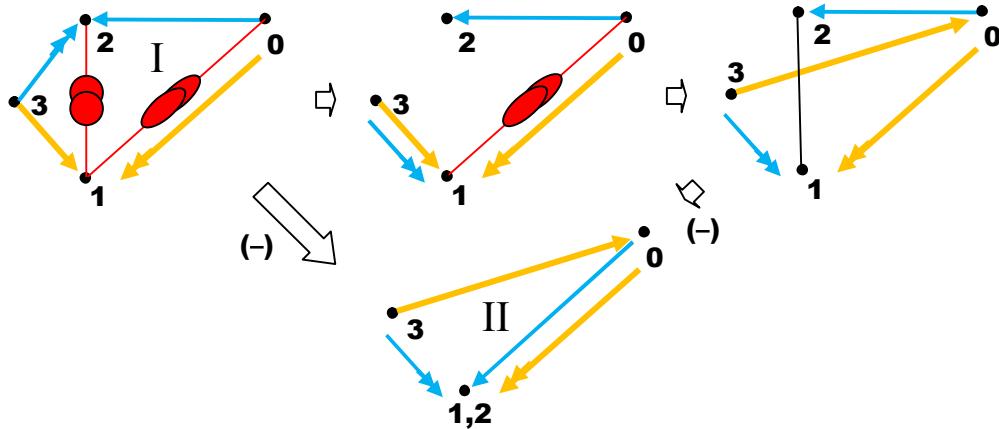


Рис. 14

Нижняя схема на рис.14 за два преобразования параллельного соединения норатора и нуллатора сводится к единственному узлу, но перед этим нужно изменить нумерацию цвет у нораторов или нуллаторов. Определитель приобретает знак минус, и, таким образом, выражение (16) справедливо.

Решение можно проверить с помощью программы CIRSYM. Cir-файл исходной схемы имеет вид: M 2 1 0 1 N 3 2 0 2 N 0 1 3 1. Здесь символы M и N обозначают ЗЭТ+ЗЭН и нуллор соответственно. Первая пара номеров относится к узлам подключения ЗЭТ или норатора, а вторая пара узлов – к узлам подключения ЗЭН или нуллатора. Отсюда  $\Delta=1$ .

Cir-файл результирующей нижней схемы II на рис.14 имеет вид: N 3 1 0 1 N 0 1 3 0. Ее определитель  $\Delta=-1$ . С учетом минуса, полученного при выделении ЗЭН+ЗЭТ, получаем  $\Delta=1$ .

Предложенным схемным преобразованиям можно сопоставить алгебраические манипуляции с индексами. Ниже приводится варианта такого алгебраического решения.

$$\begin{aligned} \Delta_{(2-1)(1-0),(3+2)(0+2),(0+1)(3+1)} &= -\Delta_{(3+1)(0+1),(0+1)(3+0)} = -\Delta_{(3+1)(1+0),(0+1)(3+0)} = \\ &= -\Delta_{(0+1)(1+0)} = -\Delta_{(1+0)(1+0)} = (-1)^4 = 1. \end{aligned}$$

## Пример 5. Выделение элемента норатор+ЗЭН.

Проверим выражение (17):

$$\Delta_{(0+2)(1-3),(1-2)(3+2),(3+1)(0+1)} = -1 \quad (17)$$

МСАД в (17) можно представить исходной схемой, изображенной на рис.15 слева (схема I). Производные схемы на рис.15 иллюстрируют операции выделения элемента норатор+ЗЭН. Схема со стянутым норатором 02 показывает результат стягивания относительно опорного узла 0. На следующей (по стрелке) схеме показывается стягивание ЗЭН относительного опорного узла 1 и результат стягивания всего элемента норатор+ЗЭН. Далее выполняется объединение опорных узлов 0 и 1. Опорные узлы различные, но определитель результирующей схемы не приобретает знака минус, поскольку выделяется смешанный зеркальный элемент.

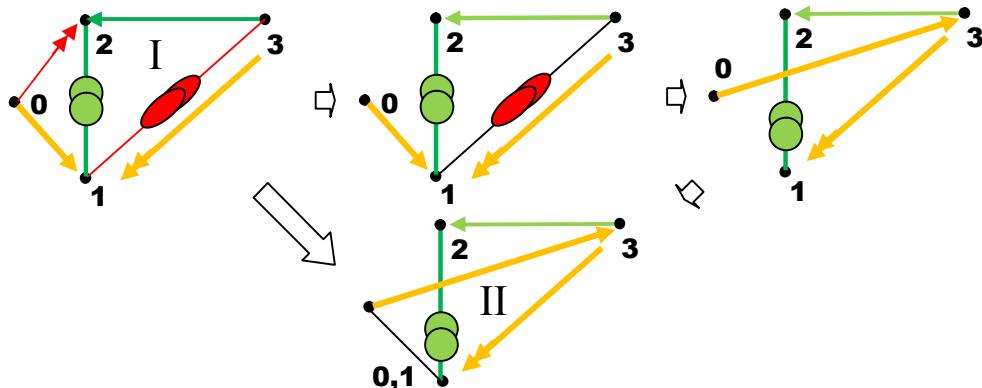


Рис. 15

Это решение можно проверить с помощью программы CIRSYM. Cir-файл исходной схемы имеет вид: Q 0 2 1 3 T 1 2 3 2 N 3 1 0 1. Здесь символы Q и T обозначают норатор+ЗЭН и ЗЭТ+нуллатор соответственно. Первая пара номеров относится к узлам подключения норатора или ЗЭТ, а вторая пара узлов – к узлам подключения ЗЭН или нуллатора. Отсюда  $\Delta = -1$ .

Cir-файл результирующей нижней схемы II на рис.15 имеет вид: T 0 2 3 2 N 3 0 0 3. Ее определитель  $\Delta = -1$ . С учетом плюса, полученного при

выделении элемента норатор+ЗЭН, получаем  $\Delta=1$ , то есть выражение (17) справедливо.

Предложенным схемным преобразованиям можно сопоставить алгебраические манипуляции с индексами. Ниже приводится вариант такого алгебраического решения.

$$\begin{aligned}\Delta_{(0+2)(1-3),(1-2)(3+2),(3+1)(0+1)} &= -\Delta_{(2+0)(1-3),(1-2)(3+2),(3+1)(0+1)} = \\ &= -\Delta_{(1-0)(3+1),(3+1)(0+3)} = \Delta_{(0+1)(3+1),(3+1)(0+3)} = -\Delta_{(3+1)(3+1)} = (-1)^3.\end{aligned}$$

В этом решении следует обратить внимание на то, что заземление ЗЭТ (1–0) требует его замены на норатор, направленный из базисного узла (0+1).

#### Пример 6. Выделение элемента ЗЭТ+нуллатор.

Проверим выражение (18):

$$\Delta_{(2-1)(0+2),(3+2)(0-1),(0+1)(3+1)} = -1. \quad (18)$$

МСАД в (18) можно представить исходной схемой, изображенной на рис.16 слева (схема I). Производные схемы на рис.16 иллюстрируют операции выделения элемента ЗЭТ+нуллатор. Схема со стянутым ЗЭТ показывает результат стягивания относительно узла 2.

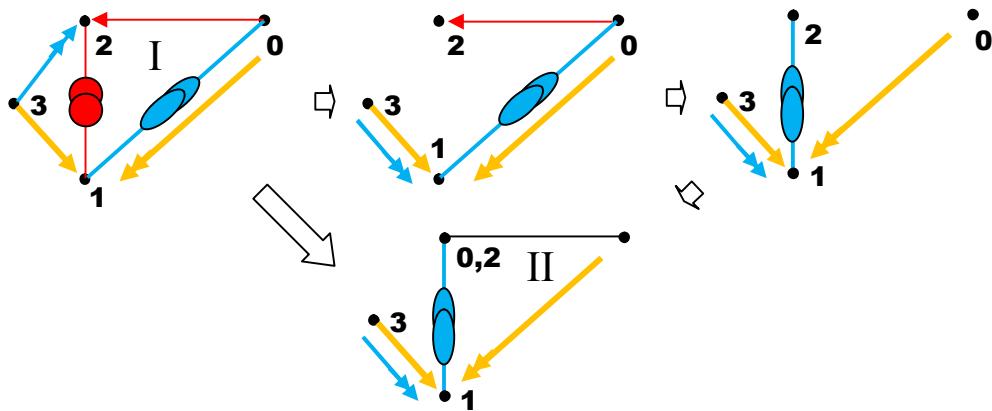


Рис. 16

На следующей (по стрелке) схеме выполнено стягивание нуллатора 02 относительного узла 0 и результат стягивания всего элемента ЗЭТ+нуллатор. Далее выполняется объединение опорных узлов 0 и 2. Опорные узлы различные, но определитель результирующей схемы не

приобретает знака минус, так как выделяется смешанный зеркальный элемент.

Это решение можно проверить с помощью программы CIRSYM. Cir-файл исходной схемы имеет вид: T 2 1 0 2 Q 3 2 0 1 N 0 1 3 1. Cir-файл результирующей нижней схемы II на рис.15 имеет вид: Q 3 1 0 1 N 0 1 3 1. Ее определитель  $\Delta = -1$ . С учетом плюса, полученного при выделении элемента ЗЭТ+нуллатор, получаем  $\Delta = -1$ , то есть выражение (18) справедливо.

Предложенным схемным преобразованиям можно сопоставить алгебраические манипуляции с индексами. Ниже приводится вариант такого алгебраического решения.

$$\begin{aligned}\Delta_{(2-1)(0+2),(3+2)(0-1),(0+1)(3+1)} &= -\Delta_{(2-1)(2+0),(3+2)(0-1),(0+1)(3+1)} = \\ &= \Delta_{(3+1)(0-1),(0+1)(3+1)} = \Delta_{(3+1)(1-0),(0+1)(3+1)} = \\ &= \Delta_{(3+1)1,(0+1)(3+1)} = -\Delta_{(0+1)(1+0)} = -\Delta_{(1+0)(1+0)} = (-1)^3 = -1.\end{aligned}$$

Итак, правило знака для выделения смешанных зеркальных элементов (норатор+ЗЭН и ЗЭТ+нуллатор) инвертируется по сравнению с правилом знака для выделения нуллора и однородного зеркального элемента (ЗЭТ+ЗЭН). Так, если имеется два опорных узла, то результат выделения берется со знаком минус (как в случае примера 4) или плюс (как в случаях примеров 5 и 6).

### Выводы

1. Метод схемных определителей является эффективным схемно-алгебраическим аппаратом для решения задач прикладных и теоретических задач, связанных с многоократными алгебраическими дополнениями. Использование для этого операций над индексами и алгебраических тождеств [24,25] нецелесообразно, поскольку связано с рутинными выкладками, затрудняющими, в частности, визуальную проверку решения.

2. Применение топологического алгоритма, не требующего порядковой нумерации строк и столбцов, по сути, соответствует

неоптимальному варианту схемно-алгебраического решения. Понижению порядка многократного алгебраического дополнения – исключению одной суммарной (разностной) пары индексов – соответствует операция выделения нуллора (зеркального идеального элемента). Взаимно однозначное соответствие операций матрично-топологического и схемно-алгебраического алгоритмов служит строгим доказательством последнего.

3. Открытыые всего десятилетие назад [11–13] зеркальные аномальные элементы – зеркальный элемент тока и зеркальный элемент напряжения – являются соответственно схемными отображениями разностей строк и разностей столбцов многократных алгебраических дополнений. Тем самым зеркальные аномальные элементы заполнили существовавший пробел в схемно-алгебраическом раскрытии разностных алгебраических дополнений и дополнили давно известные (с начала 60-х годов) нуллорные элементы (норатор и нуллатор), применяемые для раскрытия суммарных алгебраических дополнений.

### Список литературы

1. Филаретов В.В. О взаимосвязи схемного и матричного определителей // Системы искусственного интеллекта: алгоритмы обработки и модели: Тр. международ. конф. КЛИН–2002.– Ульяновск: УлГТУ, 2002. – Т. 4. – С. 85–93.
2. Филаретов В.В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. международ. конф.– Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.– С. 13-15.
3. Filaretov V.V., Gorshkov K.S. Transconductance realization of block-diagrams of electronic networks // Proc. of Int. Conf. on signals and electronic systems (ICSES'08).– Krakow, Poland.– 2008 (Sept).– P. 261–264.
4. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.

5. Filaretov V.V. A topological analysis of electronic circuits by a parameter extraction method // Electrical Technology Russia.– 1998.– №. 2.– P. 47–61.
6. Филаретов В.В. Формирование символьных функций для активных электрических цепей методом стягивания и удаления ветвей // Электричество.– 2001.– № 4.– С. 41–53.
7. Филаретов В.В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // Электричество.– 2001.– № 8.– С. 33–42.
8. Филаретов В.В. Анализ электрических цепей методом схемных определителей: Метод. указания.– Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.– 40 с.
9. Филаретов В.В. Топологический анализ электрических цепей на основе схемного подхода: Автореф. дис. ... докт. техн. наук: 05.09.05 (Теорет. электротехника) / Московский энергетический ин-т.– М., 2002.– 280 с.
10. Filaretov V.V., Korotkov A.S. Generalized parameter extraction method in network symbolic analysis // Proc. of the European Conf. on circuit theory and desing (ECCTD–2003).– Kraków, Poland, 2003 (Sept).– Vol. 2.– P. 406–409.
11. Филаретов В.В. Топологический анализ электрических цепей с зеркальными аномальными элементами // Международ. Сборник. Научн. Тр. «Синтез, анализ и диагностика электронных цепей».– Льняновск, 2012.– Вы. 10.– С. 66–92.
12. Filaretov V.V., Gorshkov K.S. Topological analysis of active network containing pathological mirror elements // 33<sup>th</sup> IEEE Int. Conf. on Electronics and Nanotechnology (ELNANO).– 2013.– P. 460–464.
13. Курганов С.А., Филаретов В.В. Символьный анализ электрических цепей с нуллорными и зеркальными аномальными элементами // Электричество.– 2013.– № 10.– С. 60–65.
14. Muir T. The theory of determinants in the historical order of development: Vol. 1.– London, 1906.

15. Боревич З.И. Определители и матрицы.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.– 184 с.
16. Smit J. The efficient calculation of symbolic determinants // Proc. of the ACM symposium on symbolic and algebraic computation. – 1976. – P. 105–113.
17. Pierzchala M., Rodanski B. Obtaining symbolic network functions of large circuits by block decomposition of the node admittance matrix // Proc. of the European conference on circuit theory and design.– 1995.– P. 71–74.
18. Verhaegen W., Gielen G. An efficient evaluation scheme for linear transfer functions using the determinant decision diagram representation of the system determinant // Proc. of the fifth international workshop on symbolic methods and applications in circuit design.– 1998.– P. 125–129.
19. Писсанецки С. Технология разреженных матриц.– Москва: Мир, 1988.– 410 с.
20. Сигорский В.П. Анализ электронных схем.– Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1963.– 199 с.
21. Сигорский В.П., Петренко А.И. Алгоритмы анализа электронных схем.– Киев: Техніка, 1970.– 396 с.
22. Чуа Л.О., Лин П.М. Машинальный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы.– М.: Энергия, 1980.– 640 с.
23. Lin P.M. Symbolic network analysis.– Amsterdam-Oxford-New York-Tokyo: Elsevier, 1991.– 319 p.
24. Lasota S. Parameter decision diagrams in the analysis and structural synthesis: part I, II, III // 10<sup>th</sup> Int. Workshop on Symbolic and Numerical Methods, Modeling and Application to Circuit Design (SMMACD'08.– Erfurt (Germany), 10.2008.– P. 149–157, 172–179, 180–187.
25. Lasota S. Multilevel hierarchical always cancellation-free symbolic analysis method for large electric networks // Elektronika: konstrukcje, technologie, zastosowania (Poland). – 2013.– Vol. 54, no. 2.– P. 51–57.

# АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ И КВАЗИМИНИМАЛЬНЫХ РАЗРЕЗОВ ГРАФА

А. А. Гришкевич

*A new method of representation of sets 1, 2 and 3 element cuts in graph in the form of sum of the subsets which possess structure of a distributive lattice is developed. The new effective algorithm for finding 1, 2 and 3 element cuts in graph is based on search of undecomposable elements of distributive lattices in graph and synthesis of each distributive lattice on a subset of the undecomposable elements is offered.*

Множество минимальных реберных разрезов, разделяющих две заданные вершины ориентированного графа, с введенными на нем операциями имеет структуру дистрибутивной решетки. Представлена алгоритмическая процедура нахождения множества 1-, 2- и 3-элементных разрезов графа, основанная на рассмотрении дистрибутивной решетки множества минимальных разрезов. Процедура включает: 1) алгоритм перечисления множества неразложимых минимальных разрезов; 2) алгоритм синтеза множества минимальных разрезов по подмножеству неприводимых минимальных разрезов; 3) алгоритм описания множества квази-минимальных (близких к минимальным, следующих за минимальными) разрезов в форме минимальных разрезов исходного графа со специально подобранной функцией веса.

**Дистрибутивная решетка минимальных разрезов графа.** Пусть  $G = (V, U)$  – ориентированный граф, где  $V = \{v\}$  – множество вершин графа,  $U = \{ u = (i, j) : i, j \in V \}$  – множество ориентированных дуг графа.

В графе  $G$  выделим две вершины – источник  $s$  и сток  $t$  ( $s, t \in V$ ,  $s \neq t$ ). Пусть  $A, B$  ( $A \cap B = \emptyset$ ) некоторые подмножества множества

вершин. Обозначим  $(A, B) = \{ (i, j) : (i, j) \in U, i \in A, j \in B \}$  множество ориентированных дуг, ведущих из  $i \in A$  в  $j \in B$ . Дополнительно предположим, что, во-первых, между любыми двумя вершинами  $i, j \in V$  имеется не более одной ориентированной дуги  $(i, j) \in U$  и одной ориентированной дуги  $(j, i) \in U$ , и, во-вторых, отсутствуют петли (т.е. дуги вида  $(i, i) \notin U$ ).

Разрезом [1], разделяющим вершины  $s, t$  графа  $G$ , называется множество дуг  $r = (R, \bar{R}) \subseteq U$ , где  $R \cap \bar{R} = \emptyset$ ,  $R \cup \bar{R} = V$ ,  $s \in R$ ,  $t \in \bar{R}$ . Множество всех таких разрезов обозначим посредством  $R$ .

Каждому ребру  $u \in U$  графа  $G$  поставим в соответствие неотрицательное число  $c(u) \geq 0$ , которое назовём весом (пропускной способностью) ребра. Пропускную способность (вес) разреза  $r \in R$  определим при помощи

$$c(r) = c(R, \bar{R}) = \sum_{u \in (R, \bar{R})} c(u).$$

В множестве разрезов  $R$  графа  $G$  относительно функции веса  $c$  может быть выделено подмножество минимальных разрезов (разрезов минимального веса)

$$M_{\min, c} = \{ m : m = \arg \min_{r \in R} c(r) \}.$$

На множестве  $M_{\min, c}$  определяются бинарные операции  $\vee, \wedge$ . Для любых  $m_i = (M_i, \bar{M}_i) \in M_{\min, c}$ ,  $i = 1, 2$ , положим

$$\begin{aligned} m_1 \vee m_2 &= (M_1 \cup M_2, \overline{M_1 \cup M_2}), \\ m_1 \wedge m_2 &= (M_1 \cap M_2, \overline{M_1 \cap M_2}). \end{aligned}$$

Множество минимальных разрезов  $M_{\min, c}$  с ведёнными на нём операциями  $\vee, \wedge$  является дистрибутивной решёткой  $\langle M_{\min, c}; \vee, \wedge \rangle$  [2].

Минимальный разрез  $p \in M_{\min, c}$  дистрибутивной решётки называется неприводимым ( $\vee$ -неприводимым) [2], если для любых  $m_1, m_2 \in M_{\min, c}$  из

соотношения  $p = m_1 \vee m_2$  вытекает  $p = m_1$  или  $p = m_2$ . Обозначим через  $P_c$  множество неприводимых разрезов решетки  $\langle M_{\min,c}; \vee, \wedge \rangle$ .

Очевидно, что  $P_c$  является частично упорядоченным множеством как подмножество частично упорядоченного множества  $M_{\min,c}$ .

В дистрибутивной решетке множество минимальных разрезов графа может быть аналитически описано [2]

$$M_{\min,c} = \bigcup_{A \in A(P_c)} \bigvee_{a \in A} a,$$

где  $A(P_c)$  – множество антицепей  $A$  частично упорядоченного  $P_c$ .

Указанное представление служит основой нового декомпозиционного подхода к перечислению минимальных разрезов графа, состоящего, во-первых, из поиска только неприводимых минимальных разрезов в графе, и, во-вторых, из синтеза всего множества минимальных разрезов по частично упорядоченному подмножеству неприводимых разрезов в дистрибутивной решетке минимальных разрезов. Предлагаемый подход позволяет сократить число проверок графа на связность за счет выделения только подмножества неприводимых минимальных разрезов.

**Алгоритм поиска минимальных разрезов графа веса  $k$ .** Пусть  $S \subseteq U$  есть подмножество дуг графа. Построим функцию веса  $c_S(u) : U \rightarrow R^+$

$$c_S(u) = \begin{cases} \infty, & \text{если } u \in S, \\ 1, & \text{если } u \in U \setminus S. \end{cases}$$

Множество минимальных разрезов относительно функции  $c_S(u)$  обозначим  $M_{\min,c_S}$ . Для заданного целого  $k$  множество  $M_k$  определим

$$M_k = \begin{cases} M_{\min,c_S}, & \text{если } c_S(m) = k \quad \forall m \in M_{\min,c_S}, \\ \emptyset, & \text{если } c_S(m) \neq k \quad \forall m \in M_{\min,c_S}. \end{cases}$$

Таким образом, множество  $M_k$  содержит разрезы веса  $k$  ( $k$ -элементные разрезы) графа  $G$  между вершинами  $s$  и  $t$ , минимальные относительно функции веса  $c_S(u)$ . Если таких разрезов нет, то  $M_k = \emptyset$ .

Рассмотрим алгоритм

$$\text{KCUT} (G; s, t; S; k; M_k)$$

перечисления множества  $k$ -элементных ( $k=1,2,3$ ) реберных разрезов  $M_k$ , разделяющих вершины  $s$  и  $t$  ( $s, t \in V, s \neq t$ ) ориентированного графа  $G$  и минимальных относительно функции веса  $c_S(u)$ .

Вспомогательные множества  $R_1^k, R_2^k, \dots, R_k^k \subseteq U$  определим как  $\forall i \neq j R_i^k \cap R_j^k = \emptyset, \forall m \in M_k R_i^k \cap m \neq \emptyset, i, j = 1, 2, \dots, k$  [2].

Детальное описание работы алгоритма KCUT при поиске минимальных разрезов приводится в [2].

**Перечисление квазиминимальных разрезов графа.** Под одно- ( $M_1$ ), двух- ( $M_2$ ) и трехэлементными ( $M_3$ ) разрезами графа  $G$  будем понимать соответственно разрезы веса один, два и три в случае, когда  $c(u)=1$  для всех  $u \in U$ . Такое название оправдано тем, что одноэлементные (двухэлементные, трехэлементные) разрезы состоят из одного (двух, трех) элементов (дуг графа). При этом, например, двухэлементные (трехэлементные) разрезы при наличии одноэлементных (и/или двухэлементных) разрезов минимальными не являются. Но являются близкими к минимальным (следующими за минимальными, квазиминимальными разрезами). Задача заключается в перечислении всех элементов указанных множеств (перечислении минимальных и квазиминимальных разрезов).

Перечисление квазиминимальных относительно функции веса  $c(u)=1 \forall u \in U$  двух- и трехэлементных разрезов может быть сведено к последовательности задач перечисления минимальных двух- и трехэлементных разрезов относительно функции веса  $c_S(u)$  для некоторой совокупности множеств  $\{S\} \equiv S^*$ .

**Перечисление двухэлементных (трехэлементных) разрезов при существовании одноэлементных разрезов (и отсутствии двухэлементных).** Двухэлементные (трехэлементные) разрезы в данном

случае минимальными не являются. Множество дуг графа  $G$ , образующих одноэлементные разрезы, есть  $R_1^1$ . Очевидно, что любое такое ребро не может входить в двухэлементный (трехэлементный) разрез. Придавая указанным ребрам разрезов достаточно большие веса (запрещая вхождение соответствующих ребер графа в минимальные разрезы), можно добиться того, что двухэлементные (трехэлементные) разрезы будут минимальными. Нахождение двухэлементных (трехэлементных) разрезов может быть осуществлено на основе

$$\begin{aligned} \text{KCUT}(G; s, t; R_1^1; 2; M_2) \\ (\text{KCUT}(G; s, t; R_1^1; 3; M_3^1)). \end{aligned}$$

**Перечисление трехэлементных разрезов при существовании двухэлементных и отсутствии одноэлементных разрезов.** Основы представленного алгоритма разработаны в [3-5].

Трехэлементные разрезы в данном случае минимальными не являются. Трехэлементный разрез может: 1) не содержать дуг двухэлементных разрезов, 2) содержать одну дугу двухэлементного разреза, 3) содержать по одной дуге двух различных двухэлементных разрезов, а именно: 3а) элементы двухэлементных разрезов лежат в разных множествах  $R_1^2, R_2^2$ ; 3б) элементы двухэлементных разрезов лежат или в множестве  $R_1^2$ , или в множестве  $R_2^2$ .

**Случай 1.** Множество дуг графа  $G$ , образующих двухэлементные разрезы, есть  $R_1^2 \cup R_2^2$ . Очевидно, что любое такое ребро не может входить в требуемый трехэлементный разрез. И нахождение трехэлементных разрезов может быть осуществлено на основе

$$\text{KCUT}(G; s, t; R_1^2 \cup R_2^2; 3; M_3^2).$$

**Случай 2.** Для любого двухэлементного разреза  $m \in M_2$  справедливо  $m \cap R_1^2 \neq \emptyset$ ,  $m \cap R_2^2 \neq \emptyset$ , причем  $R_1^2 \cap R_2^2 = \emptyset$ . Соответственно, множество трехэлементных разрезов, которые содержат дугу

двуухэлементного разреза из множества  $R_2^2$  ( $R_1^2$ ), может быть найдено при помощи

$$\begin{aligned} & \text{KCUT}(G; s, t; R_1^2; 3; M_3^3) \\ & (\text{KCUT}(G; s, t; R_2^2; 3; M_3^4)). \end{aligned}$$

Действительно, придание бесконечных весов дугам  $R_1^2$  ( $R_2^2$ ) запрещает все двухэлементные разрезы, поскольку для любого  $m \in M_2$  справедливо  $m \cap R_1^2 \neq \emptyset$  ( $m \cap R_2^2 \neq \emptyset$ ), однако использование дуг  $R_2^2$  ( $R_1^2$ ) при конструировании трехэлементных разрезов возможно.

Случай 3а. Будем последовательно перебирать все дуги  $u \in R_1^2$ . Для конструирования трехэлементных разрезов, которые содержат дугу  $u \in R_1^2$  и какую-то из дуг  $R_2^2$  нужно: 1) запретить вхождение дуг  $R_1^2 \setminus u$  (они не могут входить в трехэлементный разрез одновременно с дугой  $u$ ); 2) запретить двухэлементные разрезы, одной из дуг которых является дуга  $u$ , при этом разрешив вхождение дуги  $u$ , что достигается путем выделения множества дуг

$$R_2^{2u} = \{y : y \in R_2^2, (u, y) \in M_2\}.$$

Таким образом, запрещение множества  $S_u = (R_1^2 \setminus u) \cup R_2^{2u}$  позволяет найти все требуемые двухэлементные разрезы с дугой  $u$ . Т.е.

$$S^* = \{S_u = (R_1^2 \setminus u) \cup R_2^{2u} : u \in R_1^2\},$$

$$M_3^5 = \bigcup_{S_u \in S^*} M_{\min, c_{S_u}},$$

где  $M_{\min, c_{S_u}}$  находится на основе

$$\text{KCUT}(G; s, t; S_u; 3; M_{\min, c_{S_u}}).$$

Случай 3б. Множество трехэлементных разрезов, которые содержат два элемента из множества  $R_2^2$  ( $R_1^2$ ), может быть найдено при помощи

$$\begin{aligned} & \text{KCUT}(G; s, t; R_1^2; 3; M_3^6 = M_3^3) \\ & (\text{KCUT}(G; s, t; R_2^2; 3; M_3^7 = M_3^4)), \end{aligned}$$

что соответствует случаю 2.

**Перечисление трехэлементных разрезов при существовании одно- и двухэлементных разрезов.** В этом случае для любого множества  $S_1$ , используемого при определении трехэлементных разрезов при существовании двухэлементных, требуется додать множество  $R_1^1$ .

**Перечисление одно-, двух- и трехэлементных разрезов.**

Окончательно алгоритм перечисления одно-, двух- и трехэлементных разрезов можно представить следующим образом.

Шаг 1. Выделить множество одноэлементных разрезов  $M_1$  графа

$$KCUT(G; s, t; \emptyset; 1; M_1).$$

Шаг 2. Выделить множество двухэлементных разрезов  $M_2$  графа

$$KCUT(G; s, t; R_1^1; 2; M_2).$$

Шаг 3. Выделить множество разрезов  $M_3^3, M_3^4$

$$KCUT(G; s, t; R_1^1 \cup R_1^2; 3; M_3^3),$$

$$KCUT(G; s, t; R_1^1 \cup R_2^2; 3; M_3^4),$$

$$M_3 := M_3 \cup M_3^3 \cup M_3^4.$$

Шаг 4. Для всех  $u \in R_1^2$  выполнить

$$\{ R_2^{2u} = \{ y : y \in R_2^2, (u, y) \in M_2 \},$$

$$KCUT(G; s, t; R_1^1 \cup ((R_1^2 \setminus u) \cup R_2^{2u}); 3; M_{\min, c_{S_u}}),$$

$$M_3 := M_3 \cup M_{\min, c_{S_u}}.$$

Шаг 5.  $M := M_1 \cup M_2 \cup M_3$ .

**Пример.** Для иллюстрации алгоритма выбран график  $\{s = \text{источник}$  (номер начальной вершины),  $t = \text{сток}$  (номер конечной вершины); ориентированные дуги: начальная\_вершина\_дуги конечная\_вершина\_дуги номер\_дуги, ...} = { $s=0, t=12$ ; ориентированные дуги: 0 1 20; 0 2 21; 1 3 22; 2 4 23; 4 3 24; 3 5 25; 4 7 26; 6 5 27; 7 6 28; 5 10 29; 5 9 30; 7 8 31; 8 11 32; 10 12 33; 11 12 34; 9 12 35; 9 8 36}.

В представленном графе одноэлементных разрезов нет ( $M_1 = \emptyset$ ), двухэлементные разрезы являются минимальными, а трехэлементные разрезы – квазиминимальными.

Множество минимальных (двухэлементных) разрезов:

$$R_1^2 = \{20, 22, 25\} \text{ (путь } \{s, 20, 22, 25, 29, 33, t\}),$$

$$R_2^2 = \{21, 23, 26\} \text{ (путь } \{s, 21, 23, 26, 31, 32, 34, t\}),$$

$$P_{M_2} = \{20 21; 22 21; 25 21;; 20 23; 25 26\},$$

$$M_2 = P_{M_2} \cup \{22 23; 25 23\},$$

$$|P_{M_2}| = 5 < |M_2| = 7.$$

Множество квазиминимальных (трехэлементных) разрезов:

(путь  $\{s, 20, 22, 25, 30, 35, t\}$ )

$$P_{M_3^3} = \{29 21 30; 33 21 30;; 29 23 30; 29 26 30; 29 31 30; 29 32 30; 29 34 30;; 29 32 35\},$$

$$M_3^3 = P_{M_3^3} \cup \{33 23 30; 33 26 30; 33 31 30; 33 32 30; 33 34 30; 33 32 35;; 33 34 35; 29 34 35\},$$

(путь  $\{s, 21, 23, 26, 28, 27, 30, 35, t\}$ )

$$P_{M_3^4} = \{25 31 28, \cancel{29 31 30}, \cancel{33 31 30};; 25 32 28, 25 34 28;; 25 31 27, \cancel{29 32 35}\},$$

$$M_3^4 = P_{M_3^4} \cup \{\cancel{29 32 30}, \cancel{33 32 30}, \cancel{29 34 30}, \cancel{33 34 30};; 25 32 27, 25 34 27;; \cancel{33 32 35}, \cancel{29 34 35}, \cancel{33 34 35}\}$$

(зачеркнуты разрезы, полученные повторно),

$$|P_{M_3}| = 14 < |M_3| = 24.$$

Трехэлементные разрезы, содержащие дуги различных двухэлементных разрезов:

$$S_{20} = \{22, 25, 21, 23\}; M_3^5 = M_3^5 \cup \{20 26 24\};$$

$$S_{22} = \{20, 25, 21, 23\}; M_3^5 = M_3^5 \cup \{22 26 24\};$$

$$S_{25} = \{20, 22, 21, 23, 26\}, M_3^5 = M_3^5 \cup \emptyset;$$

### Список литературы

1. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966. – 276 с.
2. Гришкевич А.А. Комбинаторные методы исследования экстремальных структур математических моделей электрических цепей и систем: Монография. – Челябинск, Издательство ЮУрГУ, 2004. – 258с.
3. Гришкевич А.А. Алгоритм выделения двух- и трехэлементных разрезов графа // Информационный бюллетень Ассоциации математического программирования. Вып. 4. Тез. докл. конференции "Математическое программирование и приложения". – Екатеринбург: УрО РАН, 1993. – С. 41.
4. Гришкевич А.А., Ахтямов Э.Р. Использование свойств дистрибутивных решеток при перечислении разрезов, не являющихся минимальными // Алгебра, логика и кибернетика: Материалы конференции. – Иркутск, Изд-во ГОУ ВПО «Иркутский государственный педагогический университет», 2004. – С. 136–137.
5. Гришкевич А.А., Ларицкая Е.А. Алгоритм перечисления квазиминимальных разрезов графа // Схемно-алгебраические модели активных электрических цепей: синтез, анализ, диагностика: Труды международной конференции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке и технике – КЛИН–2006» (г. Ульяновск, 16–18 мая 2006 г.) / Под общей ред. Л.И.Волгина. – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Том 3. – С. 70–72.

**Гришкевич Андрей Александрович** – д.т.н., чл.-корр. АЭН, профессор Ченстоховского политехнического института; Polska, 42-200, Czestochowa, al. Armii Krajowej, 17, Politechnika Czestochowska (Czestochowa university of technology)); e-mail: a.grischkevich@el.pcz.czest.pl; grishkev\_ramb@rambler.ru

# **ЦИФРОВАЯ ЭЛЕКТРОНИКА**

## **СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ФИЛЬТРАЦИИ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ В РЕЧЕВЫХ СИГНАЛАХ**

Е. Б. Соловьева, А. В. Зубарев

*Модель нерекурсивного нелинейного фильтра импульсных помех построена спектральным методом расщепления на классе речевых сигналов. Выполнен сравнительный анализ результатов фильтрации методом расщепления, медианным фильтром и фильтром Вольтерры.*

*The nonlinear nonrecursive model of impulse noise filter is constructed by a split method in the frequency domain at speech signals. The comparative analysis of the filtration results of the split method, median and Volterra filters is presented.*

В электро- и радиотехнических устройствах появление импульсных помех (ИП) приводит к искажению управляющих и информационных сигналов и, как следствие, к трудностям их обработки. Простым методом подавления импульсных помех является медианная фильтрация [1]–[3]. Однако медианные фильтры (МФ) обладают существенным недостатком: они часто искажают участки сигналов, не пораженные импульсной помехой. МФ – не оптимальны, поскольку не используют информацию о статистических свойствах сигналов и помех.

В статье предлагается синтезировать полиномиальные фильтры импульсных помех в частотной области на основе метода расщепления сигналов [2], [3].

Согласно теории расщепления нелинейный оператор представляется композицией двух операторов [2], [3]:  $F_p$  – оператора-расщепителя, преобразующего при определенных условиях [2], [3] входной сигнал  $x(n, \vec{a})$  в векторный  $\vec{x}_p(n, \vec{a})$ , где  $\vec{a}$  – вектор параметров сигнала,  $n$  – нормированное дискретное время, и  $F_N$  – нелинейного безынерционного преобразователя, часто представляемого в виде многомерного полинома и преобразующего векторный расщепленный сигнал  $\vec{x}_p(n, \vec{a})$  в скалярный выходной сигнал  $y(n, \vec{a})$  фильтра.

При переходе в частотную область входными и выходными сигналами синтезируемого фильтра являются дискретные преобразования Фурье (ДПФ) фрагментов реализаций входных и выходных сигналов. Выбор длины (числа отсчетов) фрагментов связан с их расщеплением. Если фрагменты различны (расщеплены), то их векторы-спектры также различны и, следовательно, расщеплены.

Модель нелинейного фильтра строится на основе теоремы об аппроксимации нелинейных операторов в комплексной области [2]. Согласно указанной теореме аппроксимирующий многочлен включает комплексные и комплексно-сопряженные элементы векторов-спектров входных сигналов. Так если сигнал состоит из  $N=2M$  отсчетов (именно этот случай для определенности будем рассматривать), то вектор-спектр расщепленных сигналов

$$\vec{X}_p(\vec{a}) = \{X[-(M-1), \vec{a}], X[-(M-2), \vec{a}], \dots, X[M, \vec{a}]\}, \vec{a} \in G_a,$$

где  $G_a$  – множество параметров  $\vec{a}$ , включает спектральные составляющие – элементы вектора  $\vec{X}_p(\vec{a})$ , а аппроксимирующий многочлен имеет вид

$$P_k[\vec{X}_p(\vec{a})] = Y(k, \vec{a}) = \sum_{j_1}^{J_1} \sum_{j_2}^{J_2} \dots \sum_{j_m}^{J_m} C_{j_1, j_2, \dots, j_m}^{(k)} \{X[-(M-1), \vec{a}]\}^{j_1} \times \\ \times \{X[-(M-2), \vec{a}]\}^{j_2} \times \dots \times \{X[M, \vec{a}]\}^{j_m}, \quad (1)$$

где  $k \in [-(M-1), M]$ .

Согласно теории расщепления [3], [5] для  $k \in [-(M-1), M]$ ,  $\vec{a} \in G_a$  существует полином степени  $p = J_1 + J_2 + \dots + J_m$ , такой, что  $\|Y_0(k, \vec{a}) - Y(k, \vec{a})\| \leq \varepsilon$ , где  $Y_0(k, \vec{a})$  –  $k$ -я составляющая дискретного спектра желаемого выходного сигнала  $y_0(n, \vec{a})$  фильтра,  $\varepsilon$  – погрешность аппроксимации.

Представим полином (1) в удобном для формирования степенных составляющих многомерного многочлена виде

$$Y(k, \vec{a}) = \sum_{l=1}^p \sum_{i_1=-M-1}^M \sum_{i_2=i_1}^M \dots \sum_{i_l=i_{l-1}}^M B_{i_1, i_2, \dots, i_l}^{(k)} \prod_{r=1}^l X(i_r), \quad (2)$$

где коэффициенты  $B_{i_1, i_2, \dots, i_l}^{(k)} = C_{\sum_{\alpha=1}^l \delta\{q - [i_\alpha + (M-1)]\}}^{(k)}$ ,  $\delta\{\cdot\}$  – цифровой

единичный импульс;  $q \in [0, m-1]$ . Нижний индекс коэффициента  $C^{(k)}$  формируется последовательностью целых чисел при сложении единичных функций вида  $\delta\{q - [i_\alpha + (M-1)]\}$ . Такая последовательность состоит из  $m$  отсчетов, каждый из которых равен 1 в точке  $q - [i_\alpha + (M-1)] = 0$ , а в остальных  $m-1$  точках отсчеты равны 0.

На основе свойства нелинейного преобразования, согласно которому спектральная составляющая  $Y(k, \vec{a})$  на частоте  $k$  выходного сигнала формируется на базе слагаемых, содержащих  $k$ -ю спектральную составляющую воздействия и произведения спектральных составляющих входного сигнала на частотах, удовлетворяющих условию  $k = i_1 + i_2 + \dots + i_l$  [6], свойства симметрии  $Y(-k, \vec{a}) = Y^*(k, \vec{a})$ ,  $0 < k \leq (M-1)$ , где \* – знак комплексного сопряжения, а также учета наложения спектров, при котором в многомерную сумму (2) вводятся дополнительные члены [5], модель (2) преобразуется к виду

$$Y(k, \vec{a}) = \sum_{l=1}^p \sum_{i_1=-M-1}^M \sum_{i_2=i_1}^M \dots \sum_{i_l=i_{l-1}}^M B_{i_1, i_2, \dots, i_l}^{(k)} \prod_{r=1}^l X(i_r) + \\ i_1 + i_2 + \dots + i_l = k$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\gamma=1}^{\lfloor l/2 \rfloor} \sum_{i_1=-(M-1)}^M \sum_{i_2=i_1}^M \dots \sum_{i_l=i_{l-1}}^M B_{i_1, i_2, \dots, i_l}^{(k)} \prod_{r=1}^l X^*(i_r) + \\
& \quad i_1+i_2+\dots+i_l=\gamma N-k \\
& + \left( \sum_{\gamma=1}^{\lfloor (l-1)/2 \rfloor} \sum_{i_1=-(M-1)}^M \sum_{i_2=i_1}^M \dots \sum_{i_l=i_{l-1}}^M B_{i_1, i_2, \dots, i_l}^{(k)} \prod_{r=1}^l X(i_r) \right) \delta_1(l-3), \quad (3) \\
& \quad i_1+i_2+\dots+i_l=\gamma N+k
\end{aligned}$$

где  $[s]$  – наибольшее целое, такое что  $[s] \leq s$ ;  $k \in [0, M]$ ;  $\delta_1(\cdot)$  – цифровой единичный скачок.

Функциональная схема частотного нелинейного нерекурсивного цифрового фильтра (ЧННЦФ), описанного моделью (3), изображена рис. 1, где ДПФ( $N$ ) – блок ДПФ фрагментов входного сигнала длиной  $N$ ;  $P_0, P_1, \dots, P_{M-1}, P_M$  – блоки нелинейного безынерционного преобразования, формирующие отдельные спектральные составляющие выходного сигнала; БКС – блок комплексного сопряжения; ОДПФ( $N$ ) – блок обратного ДПФ.

ЧННЦФ синтезирован на смеси речевого сигнала с импульсными помехами.

Речевой сигнал, использованный для „обучения“ ННЦФ, имел длительность 35 секунд (280 000 отсчетов) и частоту дискретизации 8 кГц. Он состоял из разных фраз четырех дикторов (двух мужчин и двух женщин). Фразы отличались уровнями громкости, задаваемыми как 1, 0.75, 0.5, 0.25 (пропорционально указанным значениям нормировались мгновенные значения каждой дикторской речи, причем уровню 1 соответствовал диапазон речевого сигнала  $[-0.5; 0.5]$ ).

Значения импульсных помех формировались как случайные числа, распределенные равномерно в диапазоне  $[-0.5; 0.5]$ . Моменты появления помех выбирались согласно правилу, описанному в [1], [5]. Действовало также дополнительное ограничение: расстояние между соседними помехами – не менее 5 отсчетов речевого сигнала.

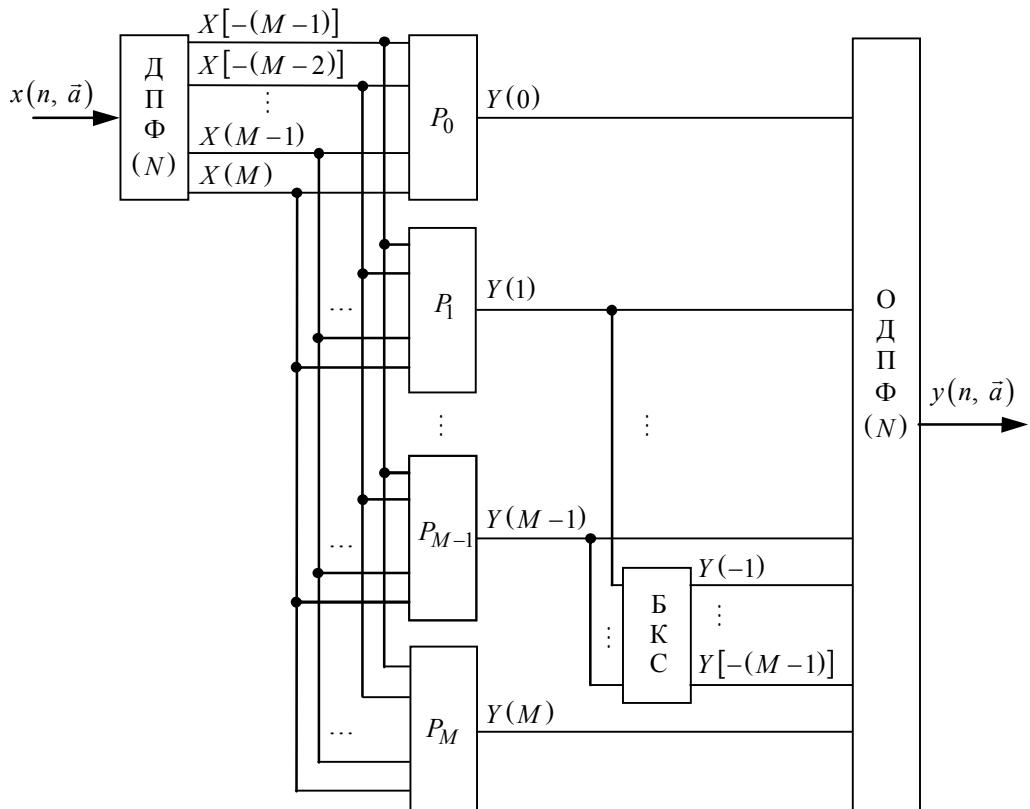


Рис. 1

В синтезированном фильтре применялся последовательный способ формирования отсчетов выходного сигнала, когда из  $N$  отсчетов, полученных ОДПФ, в выходном сигнале фильтра оставался лишь один отсчет в момент времени  $n$ . Входное окно фильтра на каждом шаге анализа смешалось вдоль входного сигнала с шагом в один отсчет.

Согласно методу расщепления временная и частотная модели нелинейного фильтра взаимосвязаны, поэтому ЧННЦФ синтезирован с учетом полученных в процессе исследований свойств соответствующей временной модели ННЦФ [1, 7]: 1) длина вектора расщепленных сигналов равна пяти (для упрощения ДПФ [4] синтез ЧННЦФ произведен на расщепленных фрагментах с четным числом отсчетов ( $N=6$ )); 2) расщепленные сигналы выбраны с одинаковым числом предыдущих и последующих отсчетов по отношению к текущему моменту времени  $n$ .

Для исследования свойств синтезированного фильтра применен речевой сигнал длительностью 20 секунд (160 000 отсчетов),

отличающийся от “обучаемого” и содержащий разные фразы мужской и женской дикторской речи с уровнями 0.8 и 0.4 соответственно.

На рис. 2 представлены зависимости среднеквадратичной погрешности  $\varepsilon$  от степени  $p$  полиномиальной модели:

$$\varepsilon = \frac{1}{Q-3} \sqrt{\sum_{n=4}^Q [y_0(n, \vec{a}) - y(n, \vec{a})]^2},$$

где  $y_0(n, \vec{a})$  – желаемый речевой сигнал,  $y(n, \vec{a})$  – выходной сигнал модели фильтра,  $Q = 160000$ .

На рис. 2 кривая 1 получена МФ с апертурой длиной 3 отсчета (наиболее точным вариантом МФ), кривая 2 – фильтром Вольтерры, кривая 3 – ЧННЦФ.

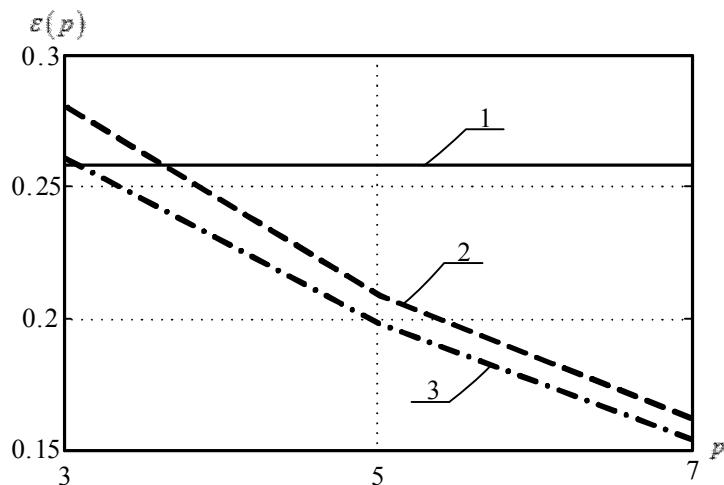


Рис. 2

Наглядное представление результатов фильтрации дает рис. 3. На рис. 3, *a* изображены огибающие фрагментов речевого сигнала с импульсными помехами. На рис. 3, *б* показаны неискаженный сигнал (кривая 1) и результаты его обработки МФ длиной 3 (кривая 2), фильтром Вольтерры 5-й степени (кривая 3), ЧННЦФ 5-й степени (кривая 4).

Из рис. 2, 3 следует, что ЧННЦФ обеспечивает более высокую точность фильтрации по сравнению с его аналогами.

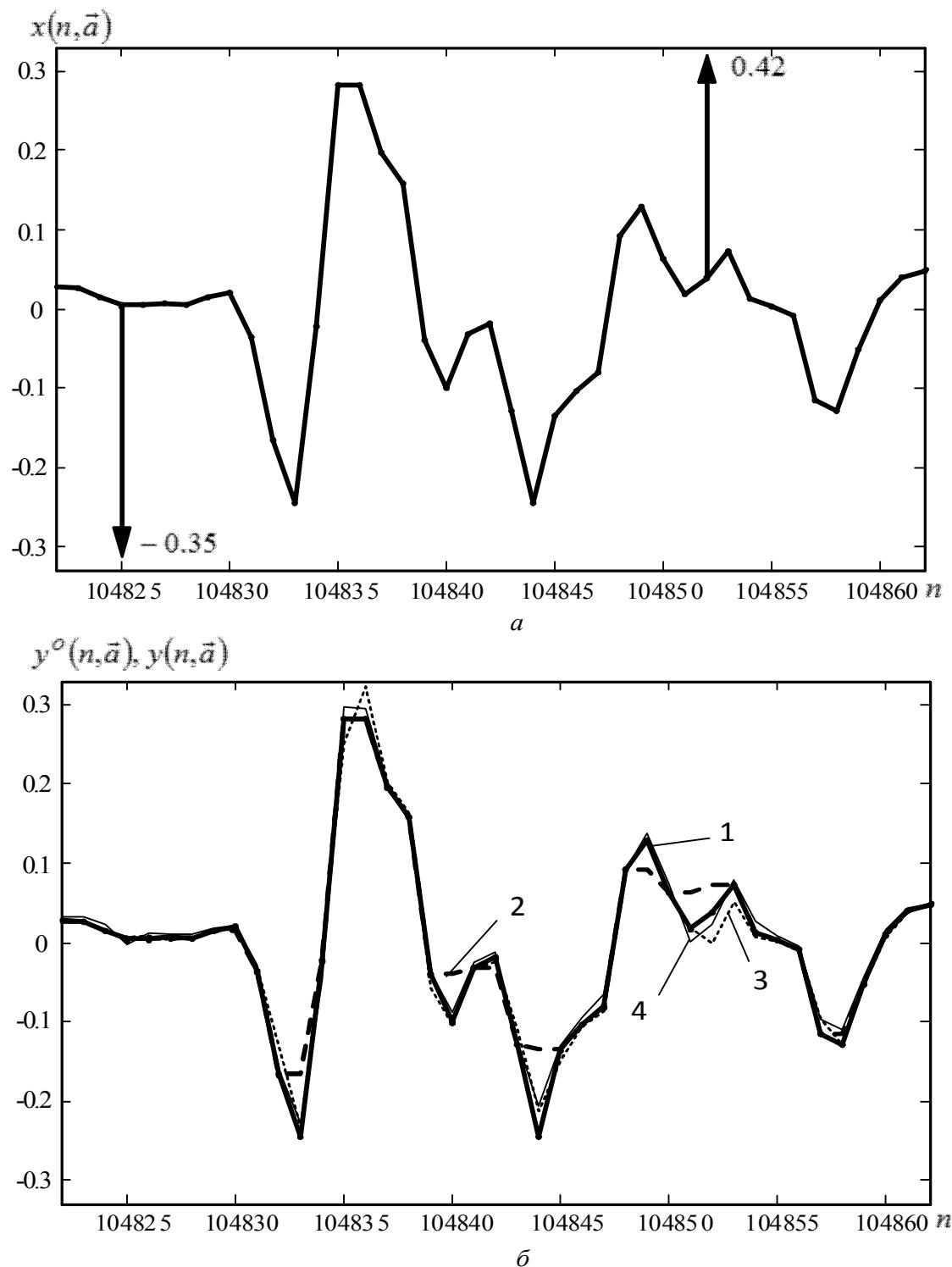


Рис. 3

В заключение отметим, что при синтезе ЧННЦФ импульсных помех в речевых сигналах установлено: 1) спектральный метод расщепления практически снимает проблему плохой обусловленности решения задачи аппроксимации оператора нелинейного фильтра путем декомпозиции задачи аппроксимации высокой размерности на несколько

аппроксимационных задач малой размерности; 2) параметры нелинейного фильтра находятся как глобально оптимальные в равномерной и среднеквадратичной метриках; 3) статистические свойства сигналов и помех учитываются автоматически при синтезе ЧННЦФ; 4) ЧННЦФ обеспечивает более высокую точность компенсации импульсного шума по сравнению с МФ и фильтром Вольтерры.

### **Список литературы**

1. Быстрые алгоритмы в цифровой обработке изображений / Т. С. Хуанг, Дж. О. Эклунд, Г. Дж. Нуссбаумер и др.; под ред. Т. С. Хуанга. М.: Радио и связь, 1984. 224 с.
2. Ланнэ А. А. Нелинейные динамические системы: синтез, оптимизация и идентификация. Л.: ВАС, 1985. 240 с.
3. Ланнэ А. А. Нелинейные полиномиальные цифровые фильтры // Цифровая обработка сигналов. 1999. №.1. С. 18–26.
4. Основы цифровой обработки сигналов: курс лекций / А. И. Солонина, Д. А. Улахович, С. М. Арбузов, Е. Б. Соловьева. 2-е изд. СПб.: БХВ-Петербург, 2005. 768 с.
5. Ланнэ А. А., Соловьева Е. Б. Нелинейная фильтрация импульсных помех методом расщепления // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1999. Т. 42, № 7. С.3–17.
6. Mathews V. J., Sicuranza G. L. Polynomial signal processing. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2000. 452 p.
7. Соловьева Е. Б., Зубарев А. В. Нерекурсивный фильтр для борьбы с импульсным шумом в речевых сигналах // Международный сборник научных трудов. – Вып. 10 / под ред. В. В. Филаретова. – Ульяновск: УлГТУ, 2012. С. 146–151.

**Соловьева Елена Борисовна** – д.т.н., профессор, зав. кафедрой ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет. Тел.: (812) 346-17- 96, selenab@hotbox.ru

**Зубарев Александр Владимирович** – аспирант кафедры ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет. Тел.: (812) 346-17- 96, sawa1987@list.ru

# **ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ**

## **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФЕРРОМАГНИТНОЙ ДИСПЕРСНОЙ ФАЗЫ В ДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЕ ВО ВНЕШНEM МАГНИТНОM ПОЛЕ**

Е. Н. Меньшов

Представленная математическая модель выражает существенную анизотропию магнитных сил взаимодействия ферромагнитных частиц в дисперсной среде во внешнем магнитном поле. Одной из главных причин коагуляции ферромагнитных частиц вдоль магнитных линий являются отталкивающие силы между ними в поперечном направлении к магнитным линиям.

This mathematical model expresses the essential anisotropy of magnetic forces of interaction of ferromagnetic particles in the dispersion medium in an external magnetic field. One of the main reasons coagulation of ferromagnetic particles along the magnetic lines are repulsive force between them transversely to the direction of magnetic lines.

Обзор литературы показывает, что при рассмотрении процессов магнитной коагуляции отсутствуют приемлемые математические модели сил взаимодействия между намагниченными во внешнем поле феррочастицами, так как существующие модели правомерны только для расположения феррочастиц друг относительно друга на расстояниях значительно превышающих их размеры. На наш взгляд это обусловлено использованием упрощенных моделей сил, основанных или на

умозрительных принципах взаимодействия эффективных «магнитных зарядах» по аналогии кулоновского взаимодействия дискретных электрических зарядов по методике [1], или на основе принципов взаимодействия дискретных постоянных магнитов, которые замещаются эквивалентной системой токов [2]. Поэтому для задач магнитной коагуляции необходимы более строгие математические модели.

Будем полагать, что твердые частицы примеси в суспензии имеют сферическую форму. В работе [3] приводятся выражения результирующего поля для сферического тела, полученные на основе строгого решения уравнений Максвелла

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_i, \quad (1)$$

$$\mathbf{H}_i = H_0 \left( \frac{\mu_\phi - \mu_{cp}}{\mu_\phi + 2\mu_{cp}} \right) [\mathbf{e}_r 2 \cos \theta + \mathbf{e}_\theta \sin \theta] \frac{R_\phi^3}{r^3}, \quad (2)$$

$$\mathbf{H}_0 = H_0 [\mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta] = H_0 \mathbf{k}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{H}_0$  – напряженность внешнего магнитного поля;  $\mathbf{H}_1$  – напряженность результирующего магнитного поля сферического тела вне тела;  $\mu_\phi$  – относительная магнитная проницаемость материала шара;  $\mu_{cp}$  – относительная магнитная проницаемость среды, в которую погружено сферическое тело; единичные направляющие вектора  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  – для сферической и  $\mathbf{k}$  – для декартовой систем координат соответственно (рис. 1);  $R_\phi$  – радиус сферической феррочастицы;  $R_\phi \leq r$  – расстояние до центра феррочастицы.

Формулы (1)–(3) правомерны для одиночной частицы. В случае многих частиц, взвешенных в суспензии, на каждую частицу будет действовать внешнее дифрагированное магнитное поле  $\mathbf{H}_1$ . При этом для каждой индивидуальной частицы суспензия исполняет роль внешней среды. В [4] показано, что относительная магнитная проницаемость в слабозагрязненных водных потоках близка к единице ( $\mu_{cp} \approx 1$ ).

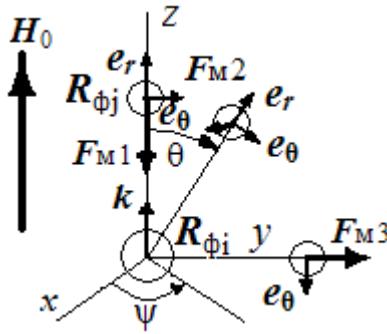


Рис. 1. Магнитные силы взаимодействия между двумя частицами:

$\mathbf{F}_{M1}$  при  $\theta = 0^\circ$ ;  $\mathbf{F}_{M2}$  при  $\theta = 40^\circ$ ;  $\mathbf{F}_{M3}$  при  $\theta = 90^\circ$

Принимая во внимание сказанное, пондеромоторная сила, приложенная к  $j$ -частице и обусловленная дифрагированным полем  $\mathbf{H}_1$   $i$ -частицы в соответствии с формулами (1)- (2) и в однородном внешнем поле  $\mathbf{H}_0$  в сферической системе координат ( $\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$ ), согласно рис. 1, принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{Mji} &= \frac{1}{2} \mu_0 V_{\phi j} \chi_{\phi j} \nabla (\mathbf{H}_{1i} \mathbf{H}_{1i}) = \\ &= -3\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left\{ \mathbf{e}_r \left[ \left( 3 + 4\chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) (\cos \theta)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} (\sin \theta)^2 - 1 \right] + \mathbf{e}_\theta \left( 1 + \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{2r^3} \right) \sin 2\theta \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\chi_{\phi i} = \chi_{\phi i}/(\chi_{\phi i} + 3)$ . Здесь  $\chi_{\phi}$  – магнитная восприимчивость феррочастиц примеси (в интересующем практику диапазоне изменения крупности) есть функция от напряженности внешнего поля  $H_0$  и от её размера – эффективного диаметра  $d_\phi$  и аппроксимируется системой формул [4].

При  $\theta = 0^\circ$ ,  $\mathbf{e}_r = \mathbf{k}$ , тогда сила  $\mathbf{F}_{Mji}$  будет равна

$$\mathbf{F}_{Mji} = -6\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left( 1 + 2\chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) \mathbf{k} \quad (5)$$

и направлена к  $i$ -частице – данная сила притягивает  $j$ -частицу к  $i$ -частице (рис. 1).

При  $\theta = 90^\circ$ ,  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta = 90^\circ)$  сила (4) будет

$$\mathbf{F}_{mji} = 3\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j \chi_{\phi i}} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} \left(1 - \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3}\right) \mathbf{e}_r$$

и при  $R_{\phi i}^3/r^3 < 1$  направлена в противоположную сторону от  $i$ -частице – данная сила отталкивает  $j$ -частицу от  $i$ -частицы (рис. 1).

При  $\theta = 45^\circ$  сила (4.38) будет

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{mji} = & -3\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^4} * \\ & * \left\{ 0.5 \mathbf{e}_r \left( 1 + 5\chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) + \mathbf{e}_\theta \left( 1 + 0.5\chi_{\phi i} \frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \right) \right\} \end{aligned}$$

и при  $\frac{R_{\phi i}^3}{r^3} < 1$  сила направлена под углом  $-118^\circ$  к линии, проходящей через центры 0 и 0' взаимодействующих частиц (рис. 1) – частицы расходятся друг от друга.

Таким образом, в поперечном направлении к магнитным линиям ферромагнитные частицы будут взаимно отталкиваться; взаимно притягиваться будут такие частицы, которые располагаются вдоль магнитных линий внешнего однородного поля  $\mathbf{H}_0$ .

Оценим отношение  $H_i/H_0$  на минимальном расстоянии  $r_{\min} \geq R_{\phi i} + R_{\phi j}$  относительно центра  $i$ -частицы (источника вторичного поля) до центра смежной  $j$ -частицы с радиусами  $R_{\phi i}, R_{\phi j}$  соответственно

$$\frac{H_i(r_{\min})}{H_0} < \frac{2\chi_{\phi i}}{(\chi_{\phi i}+3)} \frac{R_{\phi i}^3}{(R_{\phi i}+R_{\phi j})^3} < 1.$$

Из приведенного неравенства следует вывод, что даже на минимальном расстоянии между частицами в теле каждой частицы преобладает внешнее поле  $H_0$  над индуцированным полем  $H_i$ . В используемых суспензиях водно-технологических жидкостей (в слабозагрязненных ферромагнитными примесями сточных вод) среднестатистическое расстояние между частицами  $l_0 \gg r_{\min}$ , поэтому неравенства  $\frac{R_{\phi i}^3}{r^3} \ll 1$  и  $H_i(r)/H_0 \ll 1$  будут выполняться практически на всех участках сближения двух частиц и намагниченность диполей будет определяться только интенсивностью внешнего поля  $H_0$ .

Итак, значение силы (5), обуславливающей магнитную коагуляцию двух частиц, обозначим

$$F_{mji} = -\frac{c_{ji}}{r^4}, \quad (6)$$

где  $c_{ji} = 6\mu_0 V_{\phi j} H_0^2 \chi_{\phi j} \chi_{\phi i} R_{\phi i}^3 = 8\pi 6\mu_0 \chi_{\phi j} \chi_{\phi i} H_0^2 R_{\phi j}^3 R_{\phi i}^3$ .

В теории поля результирующая сила взаимодействия двух агрегатов находится по методу наложения, она равна сумме сил взаимодействия каждой частицы одного агрегата с каждой частицей другого агрегата. В случае одинаковых агрегатов, составленных из  $n$  одинаковых мономеров и соединенных в цепочки, результирующая сила (6) умножается на  $n^2$ .

**Вывод.** Построена физическая математическая модель сил взаимодействия феррочастиц, намагниченных внешним полем в слабо загрязненной водной суспензии, которая выявила существенную анизотропию магнитных сил взаимодействия феррочастиц в дисперсной системе. Она объясняет известное теоретическое и экспериментальное положение магнитной коагуляции, что феррочастицы объединяются в цепочки вдоль магнитных линий. Одной из главных причин коагуляции феррочастиц вдоль магнитных линий являются отталкивающие силы между ними в поперечном направлении к магнитным линиям.

### Список литературы

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976.– 616 с.
2. Постоянные магниты: Справочник/ Альтман А.Б., Герберг А.Н., Гладышев П.А. и др.; Под ред. Ю.М. Пятиной.– М.: Энергия, 1980.– 488 с.
3. Кугущев А.М., Голубева Н.С. Основы радиоэлектроники (Линейные электромагнитные процессы).– М.: Энергия, 1969.– 880 с.
4. Алейников Н.А., Усачев П.А., Зеленов П.И. Структурирование ферромагнитных суспензий: – Л.: Наука, 1974. – 120 с.

**Меньшов Евгений Николаевич** – к.т.н., доцент УлГТУ, г. Ульяновск, E-mail: men@ulstu.ru.

# **БИОМЕДИЦИНСКАЯ ЭЛЕКТРОНИКА**

## **МОБИЛЬНЫЙ КАРДИОГРАФ НА БАЗЕ МИКРОКОНТРОЛЛЕРА ПОД УПРАВЛЕНИЕМ СИСТЕМЫ ANDROID**

К. С. Горшков, А. А. Михеенко, В. М. Самарин

*Работа посвящена вопросам разработки устройства для снятия электрокардиограммы, в виде приставки к мобильному телефону. Приводятся результаты теоретического исследования и реализации схемотехнического этапа проектирования. При синтезе схемы используется метод схемных определителей.*

*Ключевые слова:* схемотехника, медицинская техника, электрокардиограмма, синтез электрических цепей, анализ электрических цепей.

*In this paper the design principles of mobile electrocardiogram device are discussed. The results of theoretical research and circuit synthesis are presented. The circuit design was done by means of generalized parameter extraction method.*

*Key words:* circuit design, medical electronic device, electrocardiogram, circuit synthesis, circuit analysis.

**Введение.** Ежегодно в стране регистрируется от 15 до 17 млн. больных сердечнососудистыми заболеваниями. На долю болезней системы кровообращения приходится более половины всех случаев смертности, 43,3% случаев инвалидности, 9,0% – временной нетрудоспособности [1]. Это обуславливает важность ранней диагностики,

рациональной терапии, профилактики осложнений заболеваний сердечнососудистой системы.

Одним из наиболее информативных и распространенных методов обследования больных с заболеваниями сердца является электрокардиография – запись электрических сигналов, генерируемых при работе сердца. Сигнал ЭКГ снимается с кожных покровов при помощи электродов, размещаемых в определенных точках. Данное исследование не требует специальной подготовки больного, не имеет противопоказаний, безопасно (прибор всего лишь принимает импульсы, исходящие из электрической сети сердца). Практически во всех случаях ЭКГ можно удачно зарегистрировать, исключением являются состояния с повышенным мышечным тонусом, судороги. Больным с заболеваниями сердца рекомендуется периодически снимать ЭКГ для оценки успешности лечения, прогрессирования болезни [2, 3].

Кривая ЭКГ имеет характерную форму, пики и интервалы между пиками обозначаются латинскими буквами P, Q, R, S, T и U (рис. 1). Следует отметить, что амплитуды различных пиков могут существенно меняться в зависимости от того, с каких отведений (вариантов расположений электродов на теле) снимает сигнал кардиограммы.

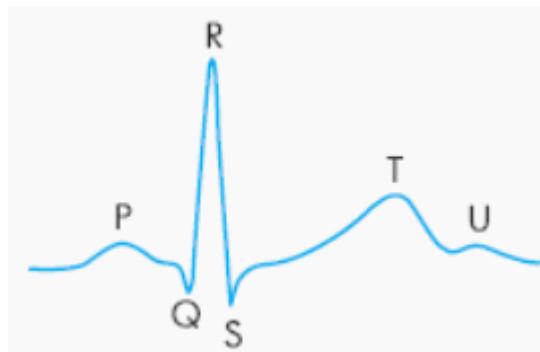


Рис. 1. Форма сигнала ЭКГ

С развитием информационных технологий аппарат ЭКГ стал более мобильным, приобрел множество функций, таких как возможность сохранения в памяти результатов исследований, автономное питание, возможность передачи сигнала по телефонной линии, GSM-связи, Bluetooth, автоматический анализ основных показателей, связь с

компьютером. В связи с этим появилась возможность широко использовать ЭКГ вне лечебного учреждения (на дому у больного, в полевых условиях), что значительно приближает кардиологическую помощь к больному.

В настоящее время на рынке представлен широкий выбор портативных кардиографов, обеспечивающих один или несколько видов регистрации ЭКГ. Все они отличаются высокой ценой, которая в большинстве случаев объясняется использованием встроенных микросхем, предназначенных для цифрового преобразования электрического сигнала, а также инструментов визуализации полученных результатов (например, ЖК-дисплеев). Себестоимость можно существенно снизить, если снимаемый с тела человека электрический сигнал передать с помощью модуля Bluetooth или Wi-Fi на мобильный телефон, смартфон или планшетный компьютер, где кардиограмма может быть обработана программно с использованием вычислительных мощностей процессоров современных портативных компьютерных устройств.

Целью данной работы является разработка одноканального мобильного кардиографа, в виде приставки к любому устройству семейства Android оснащенному системой беспроводной передачи данных Bluetooth. Целевой аудиторией проекта являются: больные хроническими сердечнососудистыми заболеваниями, нуждающиеся в постоянном динамическом наблюдении; здоровые люди старше 40 лет (преимущественно мужчины), желающие контролировать состояние своего здоровья; люди, имеющие факторы риска развития сердечно-сосудистых заболеваний, для ранней диагностики патологии; жители сельской местности, не имеющие возможности наблюдать у врача-кардиолога, для дистанционного контроля состояния с использованием технологий телемедицины.

**Основные принципы электрокардиографии.** В электрокардиографии сердце рассматривается как электрический генератор тока [6]. При этом предполагается, что в каждый момент

времени электрическая активность сердца может быть представлена эквивалентным токовым диполем, расположенным в точке, называемой электрическим центром сердца. Считается, что этот центр лежит внутри анатомических границ сердца. Определение параметров эквивалентного электрического генератора  $J$  сердца по разности потенциалов, измеряемых в двух произвольных точках А и В объемного проводника (тела человека), является основной задачей электрокардиографии. Рассмотрим модель, представленную на рис. 2. Здесь  $R_{ab}$  – сопротивление между точками  $a$  и  $b$ , а  $R_{m1}$  и  $R_{m2}$  – сосредоточенные сопротивления, моделирующие грудную клетку. Биполярная скалярная ЭКГ  $U_{ab}$  является разностью потенциалов  $\varphi_a$  и  $\varphi_b$ . Оба потенциала измерены относительно условной земли.

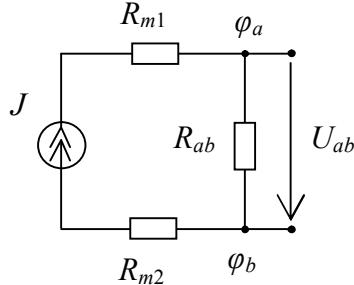


Рис. 2. Электрическая модель сердца

Известны различные методы снятия и интерпретации сигнала ЭКГ. Самым простым является использование трех выводов устройства: «плюса», «минуса» и «земли». Именно этот способ и рассматривается в данной работе.

**Электромагнитные помехи.** На сигналы ЭКГ могут накладываться различного рода шумы и помехи. В стенах, под полом и по потолку проложена проводка. Все эти провода могут быть источниками помех. Различают два типа сетевых помех, действующих по отдельности или одновременно: электрическая или магнитная наводка [3].

Электрическая наводка передается через электрическое поле, окружающее проводку и подключенные к ней потребители. Даже если какой-то прибор выключен, его сетевая часть является источником наводки, потому что для создания электростатического поля не требуется

протекания заряженных частиц. Помехи передаются на пациента, провода и сам кардиограф через эквивалентные емкости [6].

Магнитная наводка сетевой частоты вызвана явлением электромагнитной индукции: магнитный поток через контур, образованный пациентом, проводами и кардиографом, создает ЭДС, пропорциональную индукции поля и площади контура.

Кроме наводок сетевой частоты, работу кардиографа могут нарушать и другие помехи. Электромагнитное излучение от радио- и телепередатчиков, мобильных телефонов и другого оборудования, создает высокочастотные наводки на входах кардиографа. При этом тело пациента и соединительные провода выступают в качестве антенны.

Еще один источник помех находится непосредственно в организме пациента, – это мышцы, которые при сокращении генерируют электрический сигнал, который также воспринимается электродами кардиографа и является причиной возникновения миографических артефактов, из-за которых при просмотре записи ЭКГ бывает трудно отличить кардиограмму от электромагнитных наводок.

Для точной и достоверной регистрации ЭКГ необходимо принять все меры для устранения перечисленных шумов.

**Схемотехническая реализация.** Входные цепи аппарата ЭКГ должны усиливать довольно слабый сигнал – в диапазоне напряжений 0,5–5 мВ в сочетании с постоянной составляющей величиной до  $\pm 300$  мВ, которая возникает при контакте электрода с кожей, плюс синфазная составляющая величиной до 1,5 В между электродами и общим (земляным) проводом [6, 7]. Поэтому входной биологический сигнал перед цифровой обработкой необходимо значительно усилить. Во избежание возникновения токов утечки, еще более уменьшающих принимаемый сигнал, входной усилительный каскад выполняется на операционных усилителях (ОУ), для повышения входного сопротивления устройства.

Для подавления синфазных помех (прежде всего 50 Гц от осветительной сети) используется «активная земля» [8]: на теле

закрепляется электрод, на который в противофазе подаётся синфазная составляющая входного сигнала. Её выделение выполняет простой сумматор, а усиление и инверсию – ОУ. В результате отрицательной обратной связи синфазное напряжение уменьшается, так как электродное сопротивление «активной земли» оказывается внутри контура обратной связи.

В целях эффективного подавления синфазной помехи и предварительного усиления слабого сигнала биопотенциалов на входе усиленческого каскада используется инструментальный ОУ, представляющий собой двухкаскадный усилитель [6]. Для повышения входного сопротивления входной каскад строят на двух отдельных (невзаимосвязанных) неинвертирующих усилителях. Второй каскад – дифференциальный инвертирующий усилитель. Буферные взаимосвязанные неинвертирующие усилители увеличивают входное сопротивление (импеданс) низкоимпедансного дифференциального ОУ.

Полоса частот, подлежащая обработке и анализу, составляет, в зависимости от вида исследования, от 0,5 Гц до 50 Гц (в устройствах мониторинга при интенсивной терапии), и до 1 кГц при исследовании водителей сердечного ритма. Стандартный клинический аппарат ЭКГ работает с полосой частот 0,05–150 Гц [6, 7].

Фильтрацию сигнала в заданном частотном диапазоне можно аппроксимировать следующей аналитической функцией [9]:

$$S(p) = \frac{a_2 p^2 + a_1 p}{b_2 p^2 + b_1 p + b_0} . \quad (1)$$

Задаемся численными значениями полиномиальных коэффициентов  $a_2=b_2=25$ ,  $a_1 = 5e+5$ ,  $b_1 = 1.5e+4$ ,  $b_0=5000$ , для ограничения частотного диапазона в пределах от 0,05 до 150 Гц.

Для автоматизированного синтеза полосового фильтра второго порядка используем программу InterSyn-2, основанную на методе Горшкова-Филаретова [10–12], предназначенного для синтеза линейных электрических цепей с помощью аппарата схемных определителей.

Программа обеспечивает генерацию полного множества схемных реализаций функции (1), и предоставляет возможность выбора оптимального варианта. Результат структурного синтеза представлен на рис. 3.

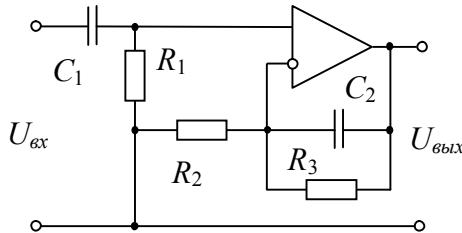


Рис. 3. Полосовой фильтр, синтезированный программой InterSyn-2

Коэффициент передачи по напряжению полученной схемной реализации в полиномиальном символьном виде приведен ниже:

$$S(p) = \frac{p^2(C_1 C_2 R_1 R_3 R_2) + p(C_1 R_1 (R_3 + R_2))}{p^2(C_1 C_2 R_1 R_3 R_2) + p(C_1 R_1 R_2 + C_1 R_3 R_2) + R_2}. \quad (2)$$

С помощью программы MatLab 2010 [13] выполняем параметрический синтез полосового фильтра. Используем функцию solve для решения системы уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 C_2 R_1 R_2 R_3 &= 25; \\ C_1 R_1 (R_2 + R_3) &= 5e+5; \\ (C_1 R_1 R_2 + C_1 R_2 R_3) &= 1.5e+4; \\ R_2 &= 5000; \end{aligned}$$

В процессе синтеза и последующей оптимизации учитывалась необходимость получения значений емкостей не более 1 микрофарада (для использования малогабаритных элементов) и приведения параметров компонентов к стандартным номиналам. В результате были получены величины:  $C_1=1 \text{ мкФ}$ ,  $C_2=0.01 \text{ мкФ}$ ,  $R_1=3.3 \text{ МОм}$ ,  $R_2=4.7 \text{ кОм}$ ,  $R_3=150 \text{ кОм}$ . Используя полученные численные значения параметров, рассчитаем корни характеристического полинома. Приравняем знаменатель функции к нулю

$$p^2(C_1C_2R_1R_3R_4) + p(C_1R_1R_4 + C_1R_3R_4) + R_4 = 0$$

Рассчитываем корни:

$$p_1 := \frac{-[C_1 \cdot (R_1 \cdot R_4) + C_2 \cdot R_3 \cdot R_4] - \sqrt{[C_1 \cdot (R_1 \cdot R_4) + C_2 \cdot R_3 \cdot R_4]^2 - 4 \cdot (C_1 \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot R_4) \cdot R_4}}{2 \cdot (C_1 \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot R_4)} = -444$$

$$p_2 := \frac{-[C_1 \cdot (R_1 \cdot R_4) + C_2 \cdot R_3 \cdot R_4] + \sqrt{[C_1 \cdot (R_1 \cdot R_4) + C_2 \cdot R_3 \cdot R_4]^2 - 4 \cdot (C_1 \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot R_4) \cdot R_4}}{2 \cdot (C_1 \cdot R_1 \cdot C_2 \cdot R_3 \cdot R_4)} = -0.3$$

Определяем постоянные времени:

$$\tau_1 = \frac{1}{|p_1|} = 2.25 \cdot 10^{-3}; \quad \tau_2 = \frac{1}{|p_2|} = 3.3.$$

Построим графики АЧХ и ФЧХ для нижней и верхней границ полосы пропускания:

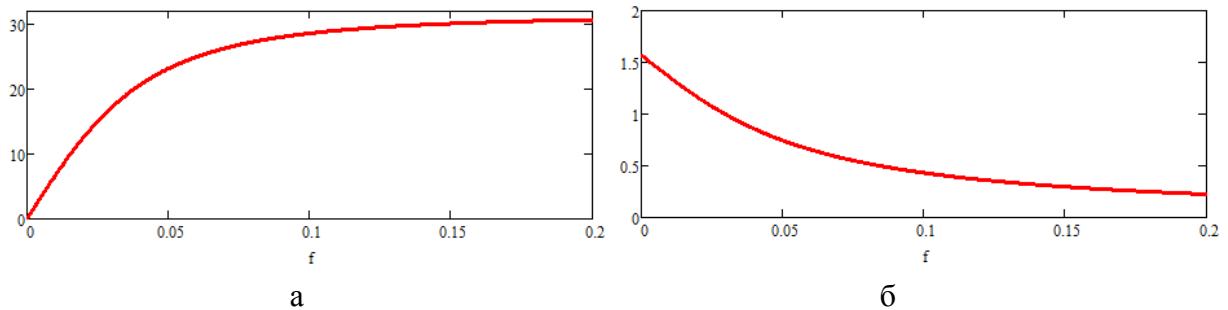


Рис. 4. АЧХ (а) и ФЧХ (б) полосового фильтра вблизи нижней границы пропускания

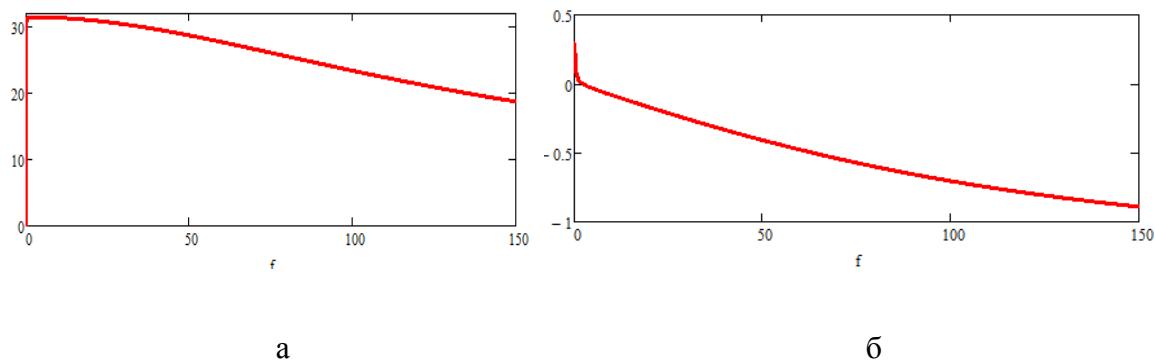


Рис. 5. АЧХ (а) и ФЧХ (б) полосового фильтра вблизи верхней границы пропускания

Как видно из графиков, частотные характеристики схемной реализации соответствуют техническим требованиям, предъявляемым к устройствам для снятия ЭКГ. Теперь, объединяя фильтр с

инструментальным усилителем в единую структуру, получаем схему, представленную на рис. 6.

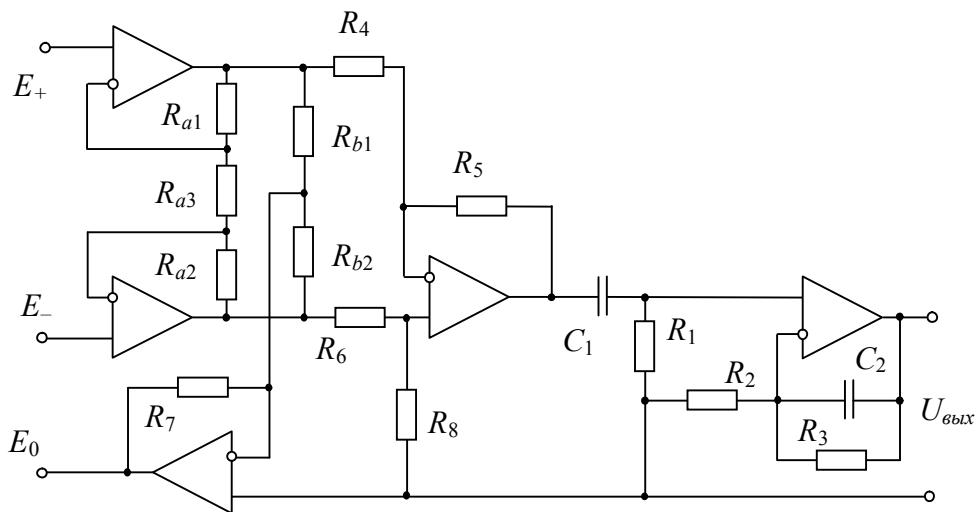


Рис. 6. Аналоговая часть кардиографа

В качестве инструментального усилителя используется микросхема AD620. Для реализации фильтра и канала подавления синфазного сигнала применяется операционный усилитель LM538.

**Цифровая обработка и постпроцессинг.** После того, как аналоговый сигнал, полученный с отведений, прошел через усиление и фильтрацию, его с помощью микроконтроллера нужно преобразовать в цифровой для последующей передачи обработчику, в качестве которого может быть использован любой смартфон или планшет на базе Android. Частота дискретизации на основании теоремы Котельникова – Шеннона должна быть более чем в два раза верхней полосы пропускания. То есть, в нашем случае порядка 500 Гц.

Для тестирования схемной реализации удобно использовать многофункциональный микроконтроллер Arduino Nano из семейства Arduino [14]. Данный микроконтроллер обладает разрядностью 10-бит, 8 аналоговыми и 12 цифровыми портами, легко подключается к передатчику типа ArduinoBlueTooth. Преобразуемый сигнал поступает с выхода полосового фильтра на аналоговый вывод A0. Для корректной работы и задания частоты дискретизации (поле delay(x), где x – значение в

мкс) был написан простой код на языке программирования Processing/Wiring:

```
#include <SoftwareSerial.h>
#define rxPin 2
#define txPin 1
const int buttonPin = 2; // the number of the pushbutton pin
const int ledPin = 13; // the number of the LED pin
SoftwareSerial blueToothSerial = SoftwareSerial(rxPin, txPin);
void setup() {
pinMode(rxPin, INPUT);
pinMode(txPin, OUTPUT);
Serial.begin(9600);
// initialize the LED pin as an output:
pinMode(ledPin, OUTPUT);
// initialize the pushbutton pin as an input:
pinMode(buttonPin, INPUT);
blueToothSerial.begin(38400); //Set BluetoothBee BaudRate to default baud rate 38400}
void loop(){
int sensorValue = analogRead(A0);
// print out the value you read:
Serial.println(sensorValue);
delay(2); }
```

Микроконтроллер Arduino Nano соединен на плате с модулем передатчика BlueTooth, который выполняет отправку оцифрованной кардиограммы по беспроводной связи для дальнейшей обработки. Сигнал может принять любое устройство оснащенное модулем BlueTooth на платформе Android, на котором установлено программа Cardiomobile, разработанная Михеенко А.А. Программа предназначена для визуализации сигнала ЭКГ и простейшего анализа (определение частоты пульса, выявление ярко выраженной тахикардии).

**Техническое исполнение и тестирование.** Разработанная схемная реализация (рис. 6) была выполнена Самариным В.В. в виде печатной

платы, фотографии которой представлены на рис. 7. Для питания устройства используется батарейка 9 В. Стабилизация напряжения на уровне 5 В реализуется с помощью классической микросхемы TL431. Для снятия биопотенциалов с тела человека используются одноразовые электроды 3М™ Red Dot™ 2271.

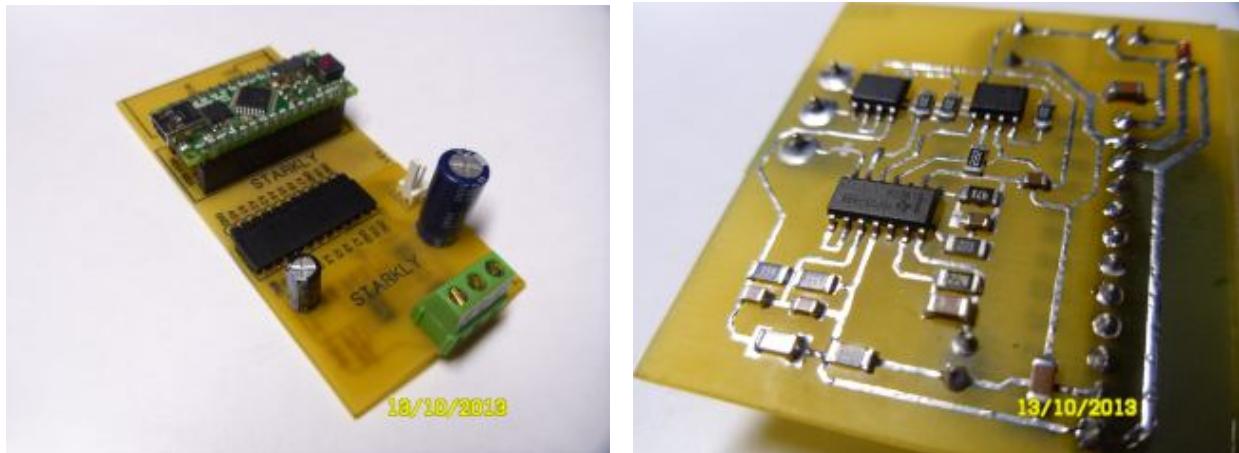


Рис. 7. Печатная плата одноканального кардиографа

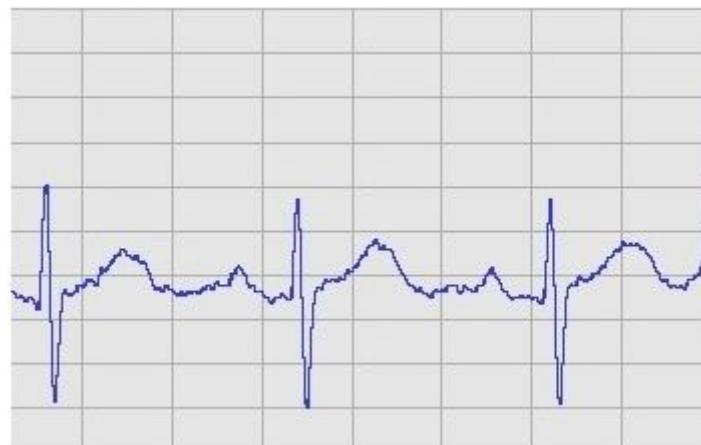


Рис. 8. График ЭКГ, полученный с помощью разработанного устройства

С помощью разработанного устройства может быть получен график электрокардиограммы, пример которой приведен на рис. 8. На нем отчетливо видны все пики и интервалы необходимые для определения состояния и выявления нарушений сердечной деятельности.

Результаты тестирования показали, что предложенная схемная реализация может быть использована для построения одноканального кардиографа, и положена в основу разработки структуры 12-ти канального устройства, предназначенного для снятия сигнала ЭКГ в любых отведениях.

**Вывод.** Разработан одноканальный кардиограф в виде приставки к смартфону или планшетному компьютеру на базе Android. Предложена электрическая схема, предназначенная для выделения и усиления биосигнала с поверхности человеческого тела, также для подавления помех, которая была выполнена в виде печатной платы. Разработаны программы для микроконтроллера Android и ОС Android, обеспечивающие визуализацию и простейший анализ полученного сигнала ЭКГ.

### **Список литературы**

1. Медик В.А., Юрьев В.К. Курс лекций по общественному здоровью. Учебное пособие. – М.: Медицина, 2003. – 455 с.
2. Сизенцева Г.П. – Методическое пособие по электрокардиографии (в помощь медицинской сестре). – М.: Издательство НЦССХ им. Бакулева РАМН, 1998. – 68 с.
3. Барановский А.Л. Аппаратура непрерывного контроля ЭКГ. – М.: Радио и связь, 1993. – 248 с.
4. Зудбинов Ю.И. Азбука ЭКГ. – Издание 3. – Ростов-на-Дону: «Феникс», 2003. – 160 с.
5. Бондаренко А.А. Проблемы современной электрокардиографии // Медицинская техника, №6, 2003.– С. 36–39.
6. Медицинские приборы. Разработка и применение. Под ред. Ревенко С.В. – М. –Медицинская книга, 2004. – 720 с.
7. Биш Э., Хартманн Э. Электрокардиограф на базе микроконвертора // Компоненты и технологии. №6, 2004.– С. 104–108.

8. Гордейчук А.П. Система "активной земли" в электрокардиографах // Петербургский журнал электроники, 2005. – №2. – С. 37.
9. Хьюлсман Л.П. Активные фильтры. – М.: Мир.– 1972.– 520 с.
10. Горшков К.С., Филаретов В.В. Алгоритм оптимального синтеза линейных электронных цепей на основе полиномиальных схемных функций // Электроника и связь: Тематический выпуск «Электроника и нанотехнологии». – Киев, 2010.– №4. – С. 45–50.
11. Filaretov V.V., Gorshkov K.S. A circuit synthesis technique based on network determinant expansion // Proc. of International Conference on Synthesis, Modeling, Analysis and Simulation Methods and Applications to Circuit Design (SMACD`12).– 2012.– P. 293–296.
12. Горшков К. С., Филаретов В. В. Синтез электрических цепей на основе схемного подхода. – LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG, 2011. – 242 с.
13. Поршнев С.В. MATLAB 7. Основы работы и программирования. Учебник. ISBN: 5-9518-0137-0. Издательство "Бином. Лаборатория знаний" 2006г. 320 стр.
14. Соммер У. Программирование микроконтроллерных плат Arduino/Freeduino. – БХВ-Петербург, 2012. – 256 с.

**Горшков Константин Сергеевич** – к.т.н., доцент кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ); домашний адрес: г. Ульяновск, ул. Тельмана, д. 14, кв. 9; тел: 8 (908) 470-31-59; e-mail: [K.Gorshkov@ulstu.ru](mailto:K.Gorshkov@ulstu.ru)

**Михеенко Алла Александровна** – студентка Ульяновского Государственного Университета; e-mail: [lluvia@bk.ru](mailto:lluvia@bk.ru)

**Самарин Владислав Михайлович** – студент группы Рд-11 Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ); <http://vk.com/id139602069>

## **В ПОРЯДКЕ ОБСУЖДЕНИЯ**

### **МНОГООТВОДНЫЕ ПОТЕНЦИОМЕТРЫ В РЕГУЛИРУЕМЫХ ЭЛЕКТРОННЫХ СХЕМАХ**

Н. П. Кузьмин

**О регулировании электронных схем.** Схемы с потенциометрами, то есть переменными резисторами (рис.1), широко применяются в электронной аппаратуре, как в процессе ее изготовления и наладки, так и в ходе эксплуатации [1]. В частности, они выполняют функции регулировок усиления, обратной связи, настройки в мостовых измерительных цепях. Трудно представить себе более наглядную для визуального восприятия регулировку, чем поворот движка потенциометра. Не случайно во многих системах автоматизированного моделирования предусмотрены стилизованные панели с такими регуляторами.

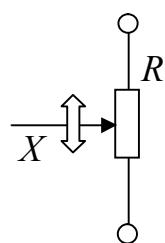


Рис. 1

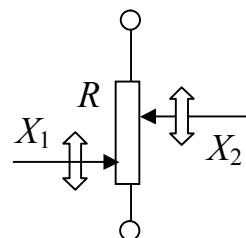


Рис. 2

Режим и характеристики схемы зависят от положения органа регулировки переменного сопротивления. Это угол поворота или

линейное перемещение подвижного контакта –  $X$ , условно принимающее значение от 0 до 1 (или от 0 до 100%) от номинального сопротивления  $R$ .

Реже используются в схемотехнике переменные сопротивления с двумя и более отводами (подвижными контактами) (рис.2). Например, как в схеме восстановления формы аналогового сигнала (рис.3).

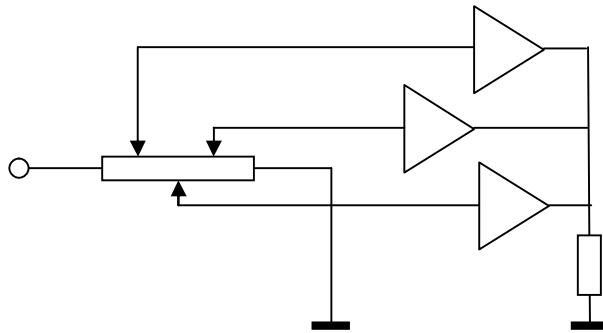


Рис. 3

В более общем виде потенциометром с несколькими отводами можно считать автотрансформатор с несколькими регулируемыми отводами, или переменный конденсатор с регулируемым отводом, известный, как дифференциальный конденсатор (рис.4).

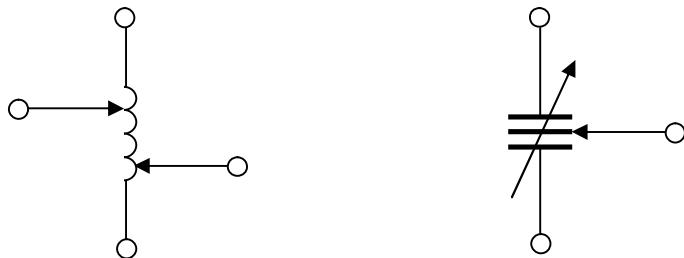


Рис. 4

**Анализ схем с переменными сопротивлениями.** При анализе схем с переменными сопротивлениями последние заменяются двумя последовательно включенными постоянными сопротивлениями, значение каждого из которых соответственно равно сопротивлению между подвижным контактом и крайним выводом. Так, коэффициент передачи переменного сопротивления соответствует коэффициенту передачи делителя напряжения. Формула коэффициента передачи для переменного сопротивления с двумя отводами (рис.5,а), легко получается методом

схемных определителей [1] на основе схем замещения рис.5,б или рис.5,в:  
 $U/E = R_2/(R_1 + R_2 + R_3)$  или  $U/E = -R_2/(R_1 + R_2 + R_3)$ .

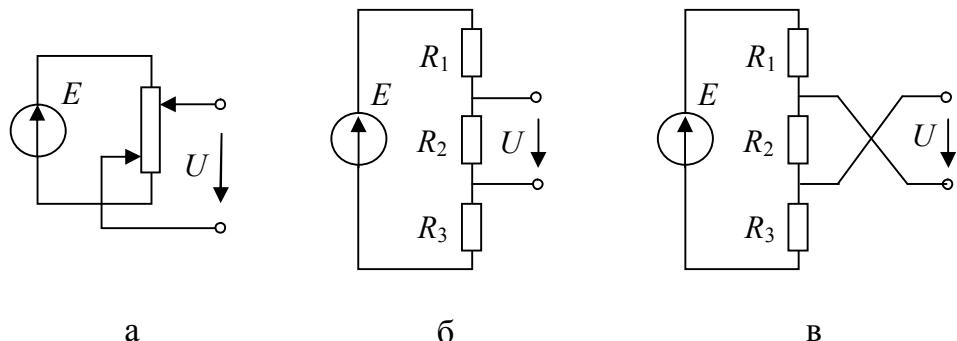


Рис. 5

Рассмотрим некоторую схему с двумя переменными сопротивлениями с двумя отводами каждый (рис.6,а). Для вычисления, например, коэффициента передачи, каждое переменное сопротивление заменяется тремя, последовательно-соединенными, как показано на рис.6,б. За счет крайних положений движков потенциометра можно получить несколько различных вариантов схем, например схемы на рис.6,в и рис.6,г.

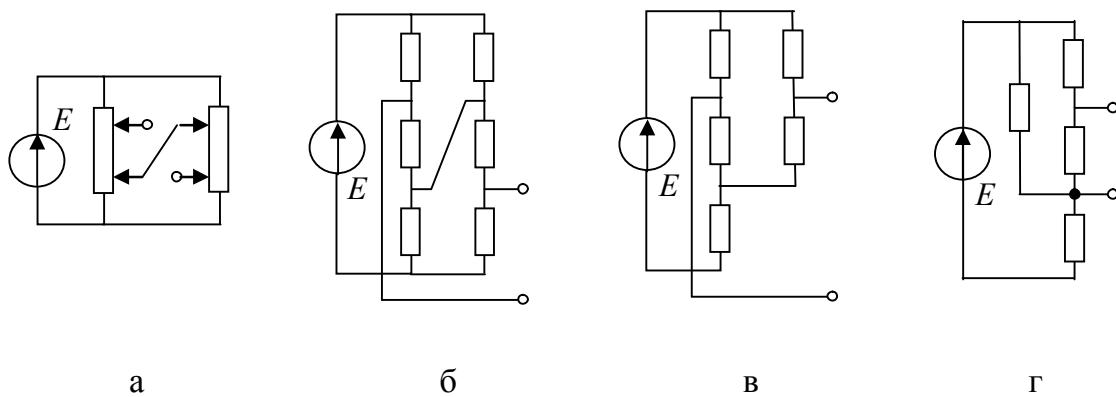


Рис. 6

Таким образом, регулировкой потенциометра с несколькими отводами, можно изменить структуру электрической схемы. Очевидно, что передаточные функции модифицированных схем получаются как частные случаи передаточной функции схемы на рис.6,б при замене идеальными проводниками некоторых сопротивлений. Учет этого

обстоятельства может упростить анализ схем с многоотводными потенциометрами.

Представляется, что несколько усложнив аппарат анализа (например, метод схемных определителей [1]) введением параметра  $X$  (положение движка или угол поворота потенциометра), можно избежать избыточности, когда, по сути, для одной и той же схемы получается несколько выражений схемных функций.

Символьное выражение схемы с потенциометрами, содержащее параметры  $X$ , будет иметь дополнительные слагаемые с  $X$  и с различными знаками перед  $X$ .

Введение параметров  $X$  в символьное выражение схемы позволит:

1. При анализе схем отказаться от общей замены потенциометра делителем напряжения (со всеми сопротивлениями). При анализе такой общей схемы теряются специальные варианты работы схемы при частных (крайних) положениях потенциометра.

2. При разработке, также как при регулировке или при эксплуатации схем, бывает нагляднее использовать положение потенциометра  $X$  или взаимные положения движков потенциометров  $X_1, X_2, \dots$ , чем многократно проводить анализ более сложных схем с фиксированными элементами.

### **Многоотводный резистор как элемент электронной схемы.**

Продолжим рассмотрение примеров. Пусть имеется схема фильтра на рис.7. Заменив цепочку сопротивлений  $R_1, R_2, R_3$  на потенциометр с двумя отводами  $X_1$  и  $X_2$ , получим ту же схему в несколько ином виде (рис.8).

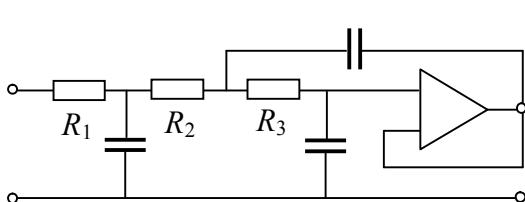


Рис. 7

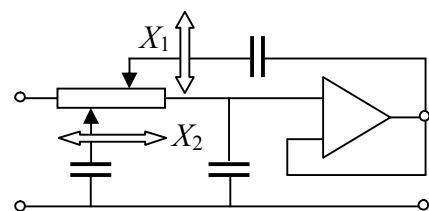


Рис. 8

Допустим у нас есть аппарат анализа, позволяющий получить формулу коэффициента передачи по напряжению, которая содержит слагаемые с  $X_1$  и  $X_2$ . Изменяя только эти два параметра вместо параметров трех резисторов, можно преобразовать схему из усилителя в фильтр, из фильтра в интегратор.

Рассмотрим другой пример. Операционный усилитель двумя входами и выходом подключен к трем отводам потенциометра  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ . Крайние выводы потенциометра соединены с источником (рис.9).

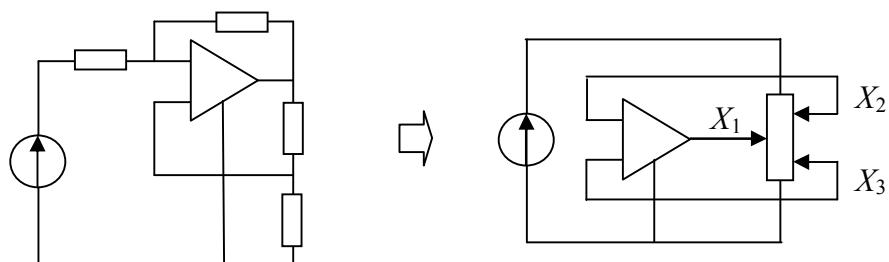


Рис. 9

Схема обладает двумя контурами обратной связи – отрицательной и положительной. Условия устойчивости предписывают, чтобы коэффициент положительной обратной связи не превышал коэффициента отрицательной. Коэффициенты положительной и отрицательной обратной связи в данном случае определяются параметрами  $X$ . Кроме этого, введя в потенциометр еще один отвод –  $X_4$  для съема сигнала, получим схему – конвертор сопротивления. Тип конвертора (отрицательный, положительный, по току, по напряжению) определяют параметры  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$  и  $X_4$  только одного схемного элемента – четырехотводного резистора.

Представляет интерес потенциометр с регулируемыми отводами, у которых крайние выводы соединены друг с другом, то есть потенциометр, свернутый в кольцо (рис.10).

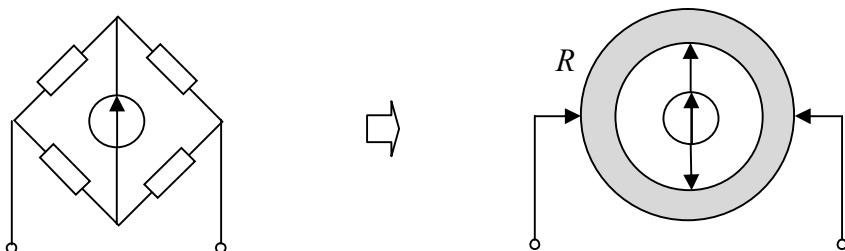


Рис. 10

Подключим операционный усилитель, источник сигнала и нагрузку к регулируемым отводам потенциометра-кольца, как показано на рис.11. Получим формулу, содержащую параметры  $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ . Изменяя только эти параметры, получаем варианты схемы с различными свойствами.

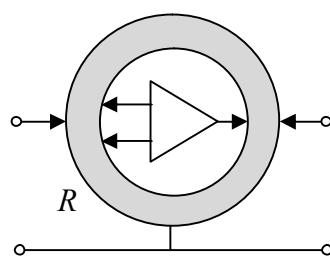


Рис. 11

**Вывод.** Имея аппарат анализа схем, предусматривающий формирование символьных схемных функций с параметрами потенциометров, проектировщик получает возможность исследовать все структурные особенности схемы. Поэтому соответствующая модификация метода схемных определителей [2] представляется актуальной.

### Список литературы

1. Шкритек П. Справочное руководство по звуковой схемотехнике: Методы расчета, способы измерений, разработка схем, цифровая обработка звуковых сигналов.— М.: Мир, 1991.— 446 с.
2. Филаретов В.В. Анализ электрических цепей методом схемных определителей: Метод. указания.— Ульяновск: Ульян. гос. техн. ун-т, 2001.— 40 с.

**Кузьмин Николай Павлович** – директор Общества с ограниченной ответственностью ООО «Спецмонтажсервис». Домашний адрес: 432010, г. Ульяновск, проезд Сиреневый д.14, кв.11; тел: (8927)270-13-62; e-mail: niko\_rus@mail.ru.

## **ДИСКУССИИ**

### **Обсуждение статьи С. П.Халютина и А. А.Титова:**

Халютин С.П., Титов А.А. Обобщенная симметричная формула метода эквивалентного генератора на основе разложения переменной (напряжения, тока) по слагаемым определителя // Электричество.– 2011.– № 6.– С. 62–70.

### **ОБОБЩЕННАЯ СИММЕТРИЧНАЯ ФОРМУЛА И МЕТОД НАЛОЖЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ**

В. В. Филаретов

*Обобщенная симметричная формула (ОСФ) для отклика электрической цепи распространена на произвольное число параметров, включая параметры управляемых источников. Для доказательства использован метод схемных определителей и замещение всех независимых источников многомерным эквивалентным генератором напряжения или тока, управляемым нуллатором. Показано, что ОСФ представляет собой форму записи обобщенного метода наложения, альтернативную форме записи с использованием коэффициентов вклада двухполюсных элементов.*

*Generalized symmetric formula (GSF) for the response of the electric circuit extended to an arbitrary number of parameters, including the parameters controlled sources. For the proof of the method used circuit*

*determinants and the replacement of all independent sources of multidimensional equivalent generator voltage or current, controlled by nullator. It is shown that the GSF is a form of generalized method of superposition, the alternative form of a record using the ratios of the contribution of bipolar elements.*

**Введение.** Публикация статьи [1] и последовавшее за этим обсуждение [2–4] обнажило большинство тонкостей предложенных нововведений – как скрытых за стилем изложения, так и обусловленных определенной глубиной поднимаемых вопросов. В приложении помещены комментарии к ответу авторов обсуждаемой статьи на замечания [3]. Настало время подвести итоги, чтобы прояснить и уточнить уже сказанное.

Традиционный принцип наложения заключается в том, что некоторый отклик можно найти как сумму двух частичных откликов, действующих в схеме при наличии и отсутствии независимого источника. В силу обобщенного принципа наложения частичные отклики могут быть получены также при замыкании и размыкании сопротивления (проводимости) или при замене нуллором и нейтрализации управляемого источника [2]. Предмет дискуссии – обобщенная симметричная формула [1] – является наиболее простой формой представления обобщенного метода наложения.

**Доказательство обобщенной симметричной формулы.** Представим произвольную схему как неавтономный многополюсник, к которому подключены источник эдс  $E$ , сопротивление  $Z$  и ветвь отклика тока  $I$  (рис. 1, а).

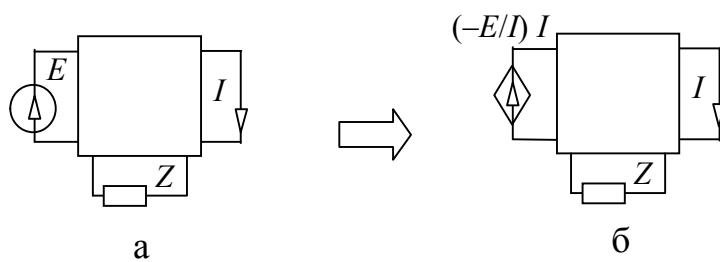


Рис. 1. Исходная схема (а),  
эквивалентная схема с замещением независимого источника (б).

Определитель схемы на рис.1,б можно раскрыть по формулам выделения управляемого источника [5] и сопротивления [6]. В результате получается схемно-алгебраическое выражение

$$\begin{aligned}
 & \left| \begin{array}{c} (-E/I) I \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| = (1/I) \left[ Z \left| \begin{array}{c} E \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} E \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| \right] + \\
 & + Z \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right|. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Здесь одиночной и удвоенной укрупненными стрелками показаны приемник и генератор неудаляемого управляемого источника (взвешенного ориентированного нуллора) с параметром  $E$  [5].

Очевидно, что первые две схемы в правой части схемно-алгебраического выражения (1) являются числителями отклика  $I$  при разомкнутом (отклик  $I^Z$ ) и замкнутом (отклик  $I_Z$ ) сопротивлении  $Z$  соответственно. Следовательно, определители указанных схем можно заменить произведениями  $\Delta^Z I^Z$  и  $\Delta_Z I_Z$  соответственно. Под размыканием понимается удаление элемента из схемы, а замыканием – замена его идеальным проводником.

Если учесть, что определитель схемы на рис.1,б – левая часть выражения (1) – равен нулю, поскольку она не содержит независимых источников, то в результате получается выражение

$$Z\Delta^Z I^Z + \Delta_Z I_Z = Z\Delta^Z + \Delta_Z, \quad (2)$$

которое было названо обобщенной симметричной формулой метода эквивалентного генератора [1]. Симметрия проявляется в том, что и в левой, и в правой частях выражение (2) присутствуют слагаемые формулы

Фойснера для сопротивлений. Выражение, дуальное (2), основано на формуле Фойснера для выделения проводимости [7], о чём авторы [1] умалчивают.

Формула (2) записана в [1] также в общем виде – относительно  $n$  сопротивлений схемы  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ :

$$\begin{aligned} & Z_1Z_2\dots Z_n\Delta^{12\dots n}\underline{I}^{12\dots n} + \dots + Z_1Z_2\Delta^{12}\underline{I}^{12} + Z_1Z_3\Delta^{13}\underline{I}^{13} + \dots + Z_1Z_n\Delta^{1n}\underline{I}^{1n} + \\ & + Z_1\Delta^1\underline{I}^1 + Z_2\Delta^2\underline{I}^2 + \dots + Z_n\Delta^n\underline{I}^n + \Delta\underline{I} = \\ = & Z_1Z_2\dots Z_n\Delta^{12\dots n} + \dots + Z_1Z_2\Delta^{12} + Z_1Z_3\Delta^{13} + \dots + Z_1Z_n\Delta^{1n} + \\ & + Z_1\Delta^1 + Z_2\Delta^2 + \dots + Z_n\Delta^n + \Delta \end{aligned} \quad (3)$$

где индексы, отсутствующие при символах  $\Delta$  и  $I$  указывают на замыкание (замену идеальным проводником) соответствующих сопротивлений, определители схем обозначены парой вертикальных линий. Общее выражение (3) будем называть просто обобщенной симметричной формулой (ОСФ).

Однако доказательства формулы (3) даже применительно к схемам, содержащим только двухполюсные элементы, в [1] не представлено. В то же время методика вывода выражения (2), рассмотренная выше и являющаяся упрощением методики [2], лишена ряда ограничений, установленных в [1]: 1) на число и состав выделяемых линейных элементов (допускаются управляемые источники всех четырех типов); 2) на число и состав независимых источников (допускаются одновременно источники эдс и тока); 3) на вид определителя схемы (она может содержать одновременно и сопротивления, и проводимости).

Для вывода ОСФ при произвольном числе независимых источников, подключенных к многополюснику на рис.1,а, выполняется их замена единственным многомерным источником напряжения и тока, управляемым нуллатором [8, 9]. После этого выполняется выделение двухполюсных элементов и управляемых источников [5]. Интересной особенностью выражения (3) является возможность находить напряжения и токи, являющиеся частичными откликами, экспериментально [2].

Метод предельных состояний является следствием ОСФ в предельном случае – при выделении всех элементов схемы по формулам

Фойснера, когда схема действительно сводится к  $E$ - или  $J$ -соединениям [1]. В этих схемах существует единственный контур или единственное сечение (что авторы [1] категорически отказываются признавать [4]). Но именно это позволяет расчет или экспериментальное получение частичных («гипотетических») напряжений или токов в выражении вида (3) заменить применением первого или второго закона Кирхгофа для одного контура или сечения. Поэтому попытка представлять ОСФ как форму реализации метода предельных состояний при произвольном числе выделяемых параметров [1, 4] не состоятельна.

Как показано в [3], методика предельных состояний целиком основана на всех трех топологических правилах Кирхгофа [10, 11], хотя авторы [1] отрицают это «родство». Называть эту методику «методом» не следовало, чтобы не вводить читателей в заблуждение.

Использование для символьного анализа выражений вида (3), как и метода предельных состояний, затруднительно и приводит к выражениям, не оптимальным по вычислительной сложности [12, 13]. Существенно более эффективным оказывается применение оптимальной реализации топологических правил Кирхгофа в сочетании с формулами Фойснера, которая выполнена в методе наложения активных контуров и сечений [14].

**Анализ тестовой схемы методом активных контуров.** Для сравнительного анализа возьмем схему на рис.2,а, элементами которой (проводниками и источниками эдс) являются ребра куба, а узлами – точки их пересечения [1, с. 68].

В схеме на рис.2,а имеется четыре активных контура ( $n=4$ ), проходящих через источники эдс и ветви с искомым напряжением, для которых можно записать четыре уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$U_{J1} = -R_1 J_1 - R_2 J_1 + R_2 J_2 - E_{10}, \quad (4)$$

$$U_{J1} = -E_9, \quad (5)$$

$$U_{J1} = -E_9 - E_8 - R_2 J_1 + R_2 J_2 - E_{10}, \quad (6)$$

$$U_{J1} = -E_9 + E_{11} - R_4 J_2 - E_{10}. \quad (7)$$

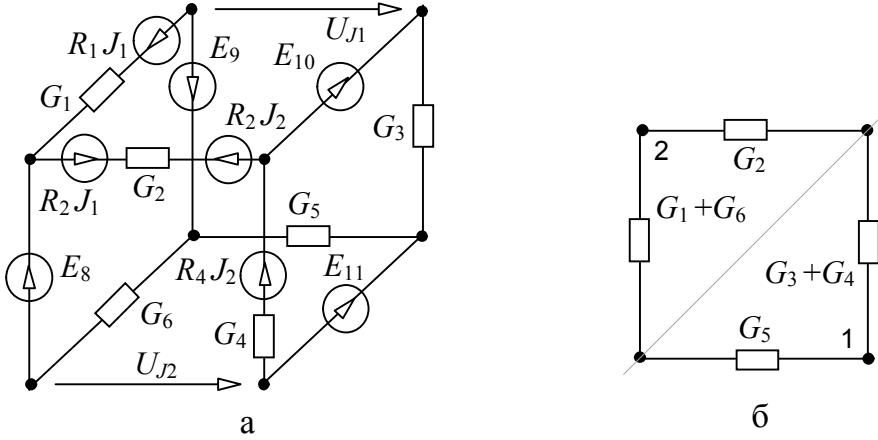


Рис. 2

Проводимости, входящие в активный контур, не учитываются в уравнениях (4)–(7). Контур, к двум узлам которого подключается не входящий в него источник эдс, не считается активным и не принимается во внимание. Активные контуры не могут проходить через разомкнутые ветви – приемники напряжения.

Для нахождения отклика  $X=U_{J1}$  применяется следующая формула [14]:

$$X = \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k a_k}{\Delta} A_k, \quad (8)$$

где  $X$  – искомый отклик напряжения или тока,  $\Delta$  – определитель схемы,  $A_k$  – вес  $k$ -го активного контура (сумма его эдс);  $a_k$  – вес элементов, требующих исключения для образования  $k$ -го активного контура (произведение проводимостей, входящих в контур);  $\Delta_k$  – определитель схемы, полученной в результате замыкания ветвей контура.

В соответствии с (8) правые части уравнений (4)–(7) образуют сомножители  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$  соответственно. Сомножители  $a_1, a_2, a_3$  и  $a_4$  образуются из тех проводимостей каждого контура, которыми

пренебрегли при записи уравнений (4)–(7), то есть  $a_1=G_1G_2$ ;  $a_2=G_3G_5$ ;  $a_3=G_2G_6$  и  $a_4=G_4G_5$ .

Определители  $\Delta_k$  раскрываются как определители схем, образованных в результате замыкания всех ветвей контура, включая ветви проводимостей, ранее не учитываемых в уравнениях (4)–(7). Все источники эдс, не вошедшие в активный контур нейтрализуются. Так, для первого и третьего активных контуров получаются схемы в виде параллельного соединения проводимостей  $G_3+G_4+G_5$  (отбрасываются петли с проводимостями  $G_6$  и  $G_1$  соответственно). Для второго и четвертого активных контуров получаются аналогичные схемы с определителем  $G_1+G_2+G_6$  (отбрасывается петли  $G_4$  и  $G_3$  соответственно). Отсюда  $\delta_1=G_3+G_4+G_5$ ,  $\delta_2=G_1+G_2+G_6$ ,  $\delta_3=G_3+G_4+G_5$  и  $\delta_4=G_1+G_2+G_6$ .

Знаменатель  $\Delta$  искомого отклика получается как определитель схемы, образованной из исходной схемы в результате нейтрализации всех источников эдс и приемников напряжения. Схема знаменателя показана на рис.2,б. Эту схему можно разделить на две подсхемы по узлам 1 и 2, как показано тонкой линией на рис.2,б, и записать определитель по формуле Фойснера

$$\Delta=G_2(G_1+G_6)(G_3+G_4+G_5)+G_5(G_3+G_4)(G_1+G_6+G_2). \quad (9)$$

В результате подстановки найденных выражений в (8) получаем искомый отклик

$$U_{J1} = \frac{(G_3+G_4+G_5) G_1 G_2 (-R_1 J_1 - R_2 J_1 + R_2 J_2 - E_{10}) + (G_1+G_2+G_6) G_3 G_5 E_9 + (G_3+G_4+G_5) G_2 G_6 (-E_9 - E_8 - R_2 J_1 + R_2 J_2 - E_{10}) + (G_1+G_2+G_6) G_4 G_5 (-E_9 + E_{11} - R_4 J_2 - E_{10})}{G_2 (G_1+G_6) (G_3+G_4+G_5)+G_5 (G_3+G_4)(G_1+G_6+G_2)}. \quad (10)$$

Выражение (10) совпадает с аналогичным выражением [1, с. 69], полученным после эквивалентной свертки развернутого выражения,

найденного методом предельных состояний. Метод активных контуров не требует какого-либо последующего редактирования формул.

**Анализ тестовой схемы методом схемных определителей.** В случае схем с управляемыми источниками все модификации топологического метода Кирхгофа оказываются неэффективными [15]. В тоже время метод схемных определителей не уступает частным методикам также в классе пассивных электрических цепей. Решим предыдущий пример этим методом. Для нахождения числителя отклика  $U_L$  используем схему на рис.3,а, в которой по сравнению со схемой на рис.2,а: 1) приемник  $U_L$  заменен нуллатором противоположного направления, который управляет источниками напряжения, замещающими независимые источники эдс; 2) удален приемник  $U_{J2}$ ; 3) объединены источники  $R_4 J_2$  и  $E_{11}$ ; 4) выделена подсхема с проводимостями  $G_3, G_4$  и  $G_5$ .

Раскладывая определитель по узлу 1, получаем

$$N = (G_3 + G_4 + G_5)N_3 + G_3G_5N_{35} + G_4G_5N_{45},$$

где нижние индексы при символе  $N$  указывают на замыкание соответствующих проводимостей. Не указанные в индексах проводимости считаются разомкнутыми.

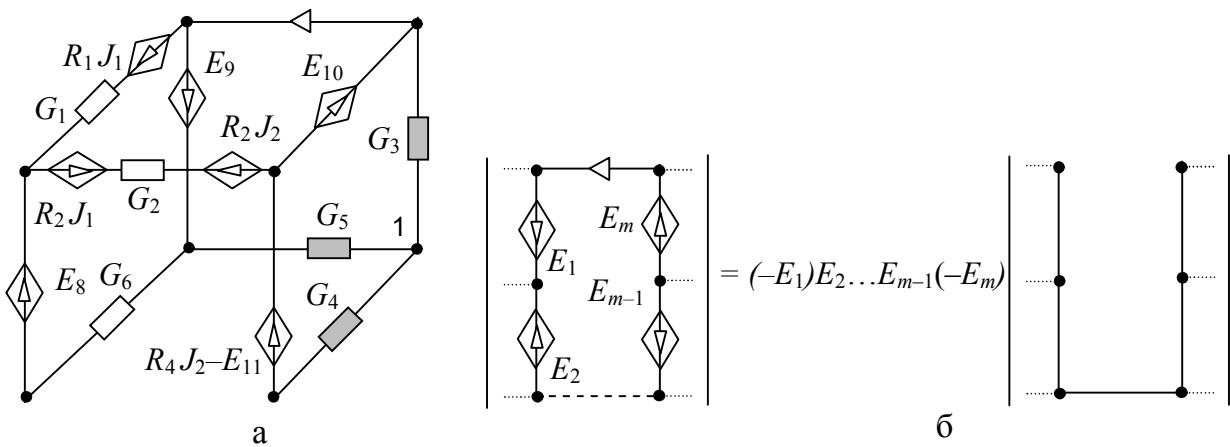


Рис. 3

Слагаемых, соответствующих  $G_3G_4$  и  $G_3G_4G_5$  не будет, поскольку замыкание соответствующих проводимостей приводит к образованию

контуров, содержащих только источники напряжения, и полученные схемы вырождаются (имеют определитель, равный нулю). Схемы, имеющие определители  $N_3$ ,  $N_{35}$ ,  $N_{45}$ , показаны на рис.4,а,б,в соответственно.

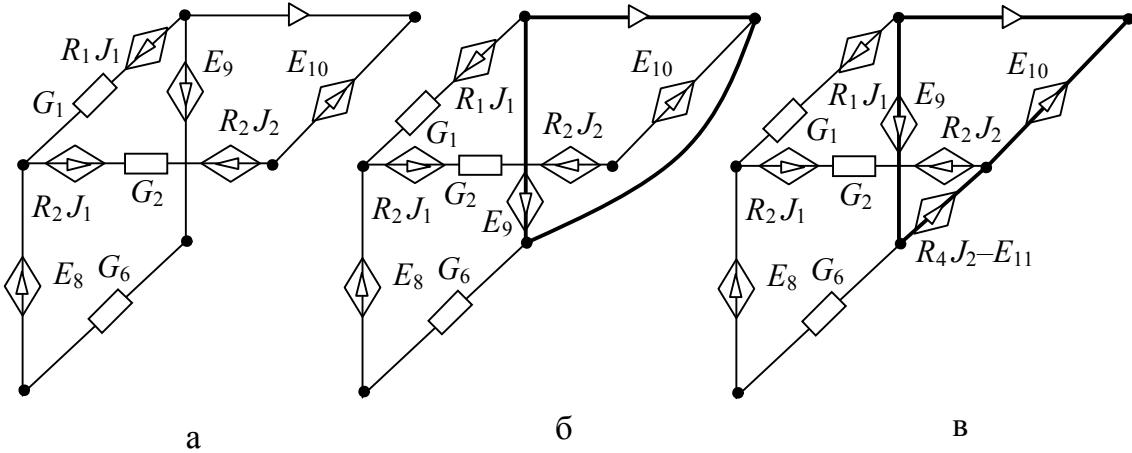


Рис. 4

В схеме на рис.4,а проводимость  $G_2$  замыкается, поскольку ее размыкание приводит к размыканию нуллатора. При этом параметр  $G_2$  выделяется как сомножитель. Проводимости  $G_1$  и  $G_6$  не могут одновременно замыкаться и размыкаться, что приводит к вырождениям в виде контура из источников напряжения или размыкания нуллатора. При замыкании, как  $G_1$ , так и  $G_6$ , образуется контур из источников напряжения и нуллатора, что эквивалентно алгебраической сумме эдс. На рис.2,б видно, что отрицательный знак ставится при встречной ориентации эдс по отношению к направлению нуллатора. Отсюда

$$N_3 = G_2[G_1(-R_1J_1 - R_2J_1 + R_2J_2 - E_{10}) + G_6(-E_9 - E_8 - R_2J_1 + R_2J_2 - E_{10})].$$

В схемах на рис.4,б и рис.4,в имеется по одному контуру из нуллатора и источников эдс. В результате преобразования рис. 2,б из этих схем получаются схемы в виде параллельного соединения проводимостей  $G_1 + G_2 + G_6$ , что приводит к выражениям

$$N_{35} = (G_1 + G_2 + G_6)(-E_9) \text{ и } N_{45} = (G_1 + G_2 + G_6)(-E_9 + E_{11} - R_4J_2 - E_{10}).$$

Таким образом, с учетом (9) получается выражение

$$U_{J1} = \frac{(G_3 + G_4 + G_5) G_2 [G_1 (-R_1J_1 - R_2J_1 + R_2J_2 - E_{10}) + G_6 (-E_9 - E_8 - R_2J_1 + R_2J_2 - E_{10})] + G_3 G_5 (G_1 + G_2 + G_6)(-E_9) + G_4 G_5 (G_1 + G_2 + G_6)(-E_9 + E_{11} - R_4J_2 - E_{10})}{G_2 (G_1 + G_6) (G_3 + G_4 + G_5) + G_5 (G_3 + G_4) (G_1 + G_6 + G_2)} , \quad (11)$$

которое эквивалентно выражению (10), но существенно более компактно.

Эквивалентное скобочное выражение, получено в [1] не методом предельных состояний, а путем последующей свертки развернутого выражения для 12  $E$ -соединений. В [1] приведены только два таких соединения, и они занимают треть журнальной страницы. Для изображения оставшихся 10 соединений для одного отклика потребуется еще 5 третей (всего 2 журнальных страницы!). Если бы авторы привели полное решение хотя бы для одного напряжения (а они пишут о двух откликах), то встал бы вопрос об экономии бумаги. Следует подчеркнуть, что без изображения  $E$ -соединений применять рутинную методику [1] невозможно в отличие от методов активных контуров и схемных определителей. Эти методы требуют минимума вспомогательных схем, а при некотором навыке позволяют записывать компактное решение непосредственно по виду исходной схемы.

### **Выводы**

1. ОСФ для случая одного параметра (сопротивления или проводимости) получена в [1] на основе метода эквивалентного генератора. ОСФ для произвольного числа параметров, включая параметры управляемых источников, получается на основе метода схемных определителей путем замещения всех независимых источников многомерным эквивалентным генератором напряжения и тока, управляемым нуллатором, с последующим применением формул выделения параметров. ОСФ представляет собой форму записи обобщенного метода наложения, альтернативную форме записи с использованием коэффициентов вклада двухполюсных элементов [2].

2. Следует разграничивать ОСФ и так называемый «метод предельных состояний». Попытки связать эти в целом правильные результаты приводят к неверным интерпретациям и вводят в заблуждение читателей журнала. «Метод предельных состояний» представляет собой авторскую методику, разработанную на основе всех трех топологических

правил Кирхгофа. При этом слагаемые числителя выбираются из ранее найденных слагаемых знаменателя, и сужается класс анализируемых схем: находятся токи в схемах с источниками тока и напряжения в схемах с источниками эдс.

3. Нельзя отрицать прямое происхождение обсуждаемой методики из топологического правила Кирхгофа для нахождения тока по эдс источников в схеме, составленной из сопротивлений. Нахождение числителя по знаменателю имеет лишь формальное сходство с ОСФ, левая и правая части которой симметричны. Напряжения или токи, используемые в левых частях формул вида (2) и (3) являются «гипотетическими» в том смысле, что не могут быть найдены по первому или второму законам Кирхгофа соответственно. Эти напряжения и токи можно найти методом схемных определителей или путем эксперимента [2]. Применение «метода предельных состояний», как чрезвычайно неэффективного, в этом случае практически невозможно.

4. Авторы настаивают на том, что «метод предельных состояний» является их основным результатом. Однако для владеющего топологическими правилами Кирхгофа эта методика представляется загроможденной избыточными понятиями, хотя само понятие «предельное состояние» может иметь методическую ценность. Обсуждаемый метод не отражает современного состояния теории цепей, и не может считаться развитием топологического метода Кирхгофа по эффективности обучения и применения. В необходимости изображения предельных состояний схем проявляется регресс по сравнению с результатами по топологическому анализу, которые включены почти сорок лет назад в известный учебник [16] ведущей кафедры ТОЭ страны. Обсуждаемая методика многократно уступает по трудоемкости не только универсальному методу схемных определителей [5], но и методу активных контуров и сечений [14], который представляет собой оптимальную реализацию топологических правил Кирхгофа.

5. Публикации [17–21] лишний раз подтверждают то, что нельзя совершить переворота в науке, не освоив опыта предшествующих

поколений ученых. А с момента опубликования Кирхгофом топологических правил прошло 165 (!) лет... Конечно, к научным достижениям можно прийти, начиная с чистого листа. Но для этого нужно быть Кирхгофом, статья которого [10] до сих пор для многих специалистов остается тайной за семью печатями. Представляется, что более интересным результатом из [2] является ОСФ (2). Именно эта формула инициировала доказательство более общих формул и разработку обобщенного принципа наложения [2]. Поэтому проведенное на страницах журнала обсуждение следует считать плодотворным.

6. Метод предельных состояний является следствием ОСФ в предельном случае, когда выделяются по формулам Фойснера все элементы, и схема сводится к  $E$ - или  $J$ -соединениям. В этих схемах существует единственный контур или единственное сечение, что позволяет расчет или экспериментальное получение частичных откликов в выражении вида (3) заменить применением первого или второго закона Кирхгофа для этого контура или сечения. Поэтому попытка представлять ОСФ как форму реализации (алгоритм) метода предельных состояний при произвольном числе выделяемых параметров [1, 4] несостоятельна.

7. Упорство, с которым авторы доказывают свою неправоту, не столь безобидно. За годы разработки метода предельных состояний [17–21], по существу являющегося архаичной методикой, его подача «под соусом» ОСФ проникла в учебное пособие [19] и монографию [20], которая используется, например, при проектировании систем авиационного электроснабжения [22]. Это несет косвенную угрозу нашей безопасности.

## **Приложение.**

### **Комментарии к ответу авторов [4] обсуждаемой статьи на замечания [3].**

Ниже перед каждым абзацем (в кавычках и жирным курсивом) перечислены основные фразы в порядке их следования в тексте [4]. Рядом приводятся комментарии.

*«Большая часть ответа [3] на статью [1] посвящена популяризации правила Кирхгофа с расчленением его на три правила: I, II и III».* Это необходимо для обоснования того, что метод предельных состояний вобрал в себя целиком правило I и сочетание правил II и III. При этом числитель отклика находится по его знаменателю (правило III), а сомножитель, в виде алгебраической суммы эдс для каждого слагаемого, получается по второму закону Кирхгофа (правило II).

*«Был взят пример из [1] и решен по правилу Кирхгофа, не приводя рисунков».* Для анализа простейшей мостовой схемы с помощью топологических правил Кирхгофа рисунки не нужны – решение выполняется в уме. Этого нельзя сказать о методике [1], которая сводит анализ к  $E$ -соединениям, требуя дополнительных изображений.

*«Участник дискуссии не искушает судьбу: потому как на рисунках надо оставлять контур, «из которого по второму закону Кирхгофа выражается слагаемое для отклика»».* Точнее, не «слагаемое», а сомножитель в виде алгебраической суммы эдс для слагаемого отклика. «Не искушает судьбу» вернулось из [3], но невпопад – на выявлении таких контуров основан не только топологический метод Кирхгофа, но и методика под названием «метод предельных состояний» [1]. Достоинством метода Кирхгофа является возможность записывать искомые выражения для откликов непосредственно по виду схемы. Авторы [1] усложняют задачу, предусматривая изображение  $E$ -соединений для каждого слагаемого определителя и их исследование на предмет наличия контура с приемником напряжения (стрелкой отклика напряжения).

*«У Кирхгофа нет математического выражения для правила. Это затрудняет его применение. Наверное, поэтому его правило не нашло отражения в учебниках по электротехнике».* Это тот самый случай, когда словесная формулировка оказывается компактнее и точнее

математической записи. А попытка авторов [1] облечь метод предельных состояний в математическую форму – обобщенную симметричную формулу – не состоятельна [3]. Авторы игнорируют факт, что топологическим правилам Кирхгофа 165 лет, а в начале прошлого века Вильгельм Фойснер (физик из Марбургского университета, ученик Кирхгофа) дал современный облик топологическому анализу электрических цепей без управляемых источников [6, 7]. Формулы Фойснера рассматриваются в учебнике [16], по которому учился, по крайней мере, один из авторов [1]. Поэтому оригинальные правила Кирхгофа представляют скорее исторический, чем практический, интерес. Интерес к классику похвален, но соревноваться с ним и выбирать его результаты в качестве объекта сравнения все равно, что бить рекорды прошлых лет.

*«Меньшая часть статьи дискуссии [3] является попыткой на словах доказать, что метод, описанный в статье [1] есть не что иное как интерпретация правила Кирхгофа».* Именно так обстоит на самом деле, но авторы [1], несмотря на детальное разъяснение [3], не различают между собой топологические правила Кирхгофа, называя их одним «правилом». Между тем, для «метода предельных состояний» целиком заимствуется правило I для нахождения знаменателя отклика. Следует подчеркнуть, что это правило – прямой перебор сочетаний сопротивлений или проводимостей – является самым простым и не эффективным для схем, содержащих более 7–10 элементов.

При нахождении числителя используется сочетание правил II и III. Авторская «новация» заключается только во введении понятий  $E$ -соединения и  $J$ -соединения (для дуального случая). Как неоднократно отмечалось в рецензиях, использование этих понятий только усложняет процедуру символьного анализа [3]. Кирхгоф находил ток в схеме с источниками эдс и сопротивлениями. Методика [1] предусматривает нахождение напряжений в схеме с источниками эдс, содержащей только сопротивления или только проводимости. Это ли результат для

центрального журнала, когда электроника настолько ушла вперед, что аналоговая схемотехника оказалась на обочине прогресса?

Следующий абзац ответа [4] звучит очень неуверенно: один раз встречается «видимо» и два раза – «наверное». Но за этим абзацем следует парадоксальный вывод:

*«Тем самым участником дискуссии [3] проф. Филаретовым В.В. было убедительно показано, что 1) не было еще формул и метода расчета электрических цепей с помощью соединений, не содержащих ни одного контура; 2) не было еще в электротехнике математических выражений, формул единых как для расчета напряжений, так и для расчета токов».* Первый вывод сразу отметаем, как несоответствующий действительности: подобный контур образуется приемником искомого напряжения и  $E$ -соединением на рис.3,а и рис.3,б, а также выделен (самими авторами!) на рис.5,а и рис.5,б [1]. Точно такой же контур образуется приемником напряжения с сопротивлениями, оставшимися в схеме по правилу II Кирхгофа. В том, что  $E$ -соединения соответствуют деревьям схемы (для узлового определителя) или их дополнениям (для контурного определителя), не нужно никого убеждать, тем более ставить себе в заслугу.

Второй категорический вывод был бы больше к лицу тем исследователям, которые цитируют еще кого-то, кроме себя и вузовских учебников. Универсальной формулой для отклика является запись  $X=N/D$ , где  $N$  – определитель схемы числителя, полученной из исходной схемы в результате замещения независимых источников многомерным источником напряжения и тока, управляемым нуллатором, помещенным вместо приемника отклика;  $D$  – определитель схемы знаменателя, полученной из исходной схемы нейтрализацией (приравниванием к нулю) параметров независимых источников и приемника отклика. Схемные определители  $N$  и  $D$  раскрываются рекурсивно по одним и тем же формулам выделения параметров двухполюсных элементов и управляемых источников [5].

*«Непонимание участником дискуссии [3] проф. Филаретовым В.В. формул, приведенных в статье [1] – еще одно убедительное*

*доказательство различия публикуемого метода от правила Кирхгофа*. Эта реплика авторов [2] не требует комментариев.

В заключение остановимся на выводах к ответу авторов [4].

*1. Обобщенная симметрическая формула метода эквивалентного генератора строго доказана.* С этим никто не спорит. Но напряжения или токи, используемые в этой формуле, можно найти по  $E$ - или  $J$ - соединениям с помощью второго или первого закона Кирхгофа соответственно, только в предельном случае, когда выделены все параметры и обобщенная симметрическая формула превращается в сумму отдельных слагаемых. Только в этом тривиальном случае с каждым слагаемым можно связать частичное напряжение или ток, соответствующий некоторому  $E$ - или  $J$ -соединению.

Второй вывод повторяет первый и не обсуждается.

*«3. Принципиальное отличие метода предельных состояний от правила Кирхгофа состоит в использовании предельного состояния всей электрической цепи, в которой не содержится ни одного контура».* Если нет ни одного контура, то по определению нет и самой цепи – она не может передать напряжение.  $E$ -соединение представляет собой цепь, если между выбранной парой узлов существует напряжение, не равное нулю.

*«Г.Кирхгоф для записи числителя оставляет один контур. Читаем [3]: «...после исключения проводников  $k_1, k_2..., k_{\mu-1}$  остается один контур» (правило II для числителя). «Именно эти сочетания обладают тем свойством, что после размыкания проводников  $k_1, k_2..., k_{\mu-1}$  остается один контур...» (правило III для числителя). «При размыкании  $R_1R_3$  и  $R_3R_4$  образуются контуры  $E_5R_4E_6R_2$  и  $E_5R_1R_2 ...»$*  (пример применения правила Кирхгофа в [3]). Авторы сами сформулировали отличие метода предельных состояний от своего прототипа!

В методе предельных состояний для схем с источниками эдс учитывается контур, образованный в том или ином  $E$ -соединении при подключении приемника искомого напряжения. В топологическом методе

Кирхгофа единственный контур соответствует каждому слагаемому знаменателя, поскольку ищется ток и приемник этого тока включается последовательно с сопротивлением. Методика Кирхгофа [10, 11] предполагает наличие конечных сопротивлений во всех элементах-проводниках и позволяет исключить из рассмотрения те слагаемые знаменателя, которые заведомо не могут войти в числитель [3]. Эти слагаемые не содержат сомножителя с сопротивлением, через которое проходит искомый ток.

Авторы [1] сетуют на то, что «по правилу Кирхгофа этот пример решается на целой странице журнала [3, с. 68–69]». Тогда возникает вопрос, с какой же степенью детализации нужно объяснять топологические правила Кирхгофа, чтобы было понятно? При использовании «метода предельных состояний» требуется проверять на вхождение в числитель каждое слагаемое знаменателя. Так в чем же «的独特性» методики [1], которая уступает по трудоемкости методу Кирхгофа?

### Список литературы

1. Халютин С.П., Титов А.А. Обобщенная симметричная формула метода эквивалентного генератора на основе разложения переменной (напряжения, тока) по слагаемым определителя // Электричество.– 2011.– № 6.– С. 62–70.
2. Курганов С.А., Филаретов В.В. Обобщенный принцип наложения для линейных электрических цепей//Электричество.–2012.–№ 7.–С. 57–63.
3. Филаретов В.В. Три топологических правила Кирхгофа (по поводу статьи С.П.Халютина и А.А.Титова) // Электричество.– 2012.– № 8.– С. 65–70.
4. Халютин С.П., Титов А.А. Обобщенная симметричная формула метода эквивалентного генератора – начальная формула метода предельных состояний // Электричество.– 2012 (настоящий номер).
5. Филаретов В.В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // Электричество.– 1998.– № 5.– С. 43–52.

6. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzförmigen Leitern // Annalen der Physik. – 1902. – Bd 9, N 13. – S. 1304–1329.
7. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstärke in netzförmigen Leitern // Annalen der Physik. – 1904. – Bd 15, N 12. – S. 385–394.
8. Filaretov V.V., Korotkov A.S. Generalized parameter extraction method in case of multiple excitation // Proceedings of the 8-th international workshop on Symbolic Methods and Applications in Circuit Design.–Wroclaw (September 23–24).–2004.– P. 8–11.
9. Горшков К.С., Филаретов В.В. Схемно-символьный анализ электрических цепей с многомерными управляемыми источниками // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2008. – Вып. 6. – С. 72–78.
10. Kirchhoff G. R. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird // Annalen der Physik.– 1847.– Bd. 72.– S. 498–508.
11. Кирхгоф Г.Р. Избранные труды.– М.: Наука, 1988.– 428 с.
12. Филаретов В.В. Оптимизация формул схемных функций электрических цепей // Электричество.– 1993.– № 9.– С. 64–68.
13. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // Электричество. – 1995. – № 4. – С. 36–43.
14. Филаретов В.В. Наложение воздействий активных контуров и сечений в электрических цепях // Синтез, анализ и диагностика электронных цепей: Международ. сб. науч. тр. – Ульяновск: УлГТУ, 2010. – Вып. 8. – С. 64–78.
15. Королев Ф.А., Филаретов В.В. Сравнение методов получения схемных функций для электрических цепей с управляемыми источниками // Электричество.– 2008.– №5.– С. 42–53.
16. Теоретические основы электротехники. Т. 1 / П. А. Ионкин, А.И. Даревский, Е.С. Кухаркин, В.Г. Миронов, Н.А.Мельников. – М.: Высшая школа, 1976.– 544 с.

17. Халютин С.П., Титов А.А. Метод предельных состояний для нахождения напряжения и тока в линейной электрической цепи // Тр. Военно-воздушной инженерной академии (ВВИА) им. Н.Е.Жуковского.– 2008.– Т. 80.– № 3.
18. Халютин С.П., Титов А.А. Метод предельных состояний для нахождения напряжения и тока в линейной электрической цепи // Информационно-измерительные и управляющие системы.– 2008.– №11.
19. Халютин С.П., Титов А.А. Метод предельных состояний: Символьный анализ электрических цепей: Учебное пособие под ред. С.П.Халютина.– М.: Военно-воздушная инженерная академии (ВВИА) им. Н.Е.Жуковского.– 2009.
20. Халютин С.П., Титов А.А. О некоторых разделах теоретической электротехники: Монография.– Изд. ВУНС ВВС «ВВА им. проф. Н.Е.Жуковского и Ю.А.Гагарина».– 2010.
21. Халютин С.П., Титов А.А. Третья теорема Кирхгофа и ее новая форма // Инновации на основе информационных и коммуникационных технологий: Материалы международ. науч.-практической. конф.– М.: Моск. гос. ин-т электроники и математики, 2010.– С. 278–280.
22. Жмурев Б.В., Матюшина А.В., Соколов П.А. Моделирование режимов работы центров силового питания электроприводов полностью электрифицированных самолетов / представлена членом редколлегии, д.т.н., проф. С.П.Халютиным // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации.– 2012.– №175 (11).– С. 97–103.

# ИЗ ИСТОРИИ ОТКРЫТИЙ

## ПОДРОБНЫЙ АНАЛИЗ ПЕРВОЙ РАБОТЫ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

И. В. Ерохов

*Проведен подробный анализ каждого раздела статьи [3] Кирхгофа (1847 г.). В этой статье введены элементы теории графов для описания и расчета электрической цепи. Рассматривается также построение уравнений электрических цепей и их топологическое решение. Предложено считать именно эту работу первой работой по теории электрических цепей.*

*A detailed analysis of each section of the article [3] Kirchhoff (1847). In this article introduced elements of graph theory for the description and calculation of electric circuit. Also considers the construction of the equations of electrical circuits and their topological solution. It has been suggested that this be the work of the first work on the theory of electrical circuits.*

**Предисловие.** У любой теории история формирования распределена во времени, поэтому начальный этап развития, когда закладываются основные понятия, выстраиваются модели знаковых объектов, всегда «размыт». Конечно, книгу Г. Ома [1] («Гальваническая цепь, описанная математически»), изданную в 1827 году, можно было бы считать первым камнем теории электрических цепей, однако в этой работе исследовалась только элементарная электрическая цепь – единичный замкнутый контур.

Другая пионерская работа [2], написанная Г. Кирхгофом в 1845 году («О прохождении электрического тока через плоскую пластину, например,

круглой формы»), также могла бы претендовать на роль начала отсчета, потому что в примечании к этой статье были сформулированы и доказаны основные законы электрических цепей, которые и сегодня носят имя автора.

Однако мы предлагаем отдать эту роль работе Г. Кирхгофа [3] 1847 года («О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов»), так как в ней исследуется процесс решения математической модели электрической цепи произвольного размера. Молодой автор, окончивший университет только год назад, смело поставил перед собой задачу, решение которой ни теория, ни практика тогда не требовали.

Переводы работ [2], [3] опубликованы в сборнике статей Г. Кирхгофа [4] («Избранные труды»). Сборник вышел в 1988 году тиражом 1750 экз. и его можно получить почти в каждой большой научной библиотеке. Кроме того, свои услуги предлагают библиотеки электронных книг и книжные магазины Интернета. Наконец, книгу можно «скачать» из сети по адресу:  ["Klassiki nauki"/ "Klassiki nauki" A-E .html#71 .](http://publ.lib.ru/ARCHIVES/K/)

Мы считаем, что эта работа является доступной для широкого круга студентов и специалистов, поэтому нет необходимости часто приводить большие цитаты оригинальной статьи. Отметим, что статья разделена на пять разделов, отмеченных цифрами. Имеются также введение и примечания, которые не имеют заголовка. Анализ статьи [3] проводится в соответствие с разделами, установленными Г. Кирхгофом.

**Введение.** Здесь, прежде всего, приводятся формулировки законов Кирхгофа, опубликованные в работе [2]. Имеет смысл привести обширную цитату, так как автор использует термины, которые сегодня не применяются или считаются устаревшими. Мы не хотим, чтобы это обстоятельство мешало пониманию текста, поэтому будем и в дальнейшем обращать внимание на терминологию оригинальной работы.

«Дана система из  $n$  проводников: 1, 2, ...  $n$ , которые соединены между собой произвольным образом, и в каждом из них есть

некоторая электродвижущая сила. Следует определить силу токов  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , которые будут протекать по проводникам; необходимое число линейных уравнений получаем, используя обе из ниже следующих теорем:

1. Если проводники  $k_1, k_2, \dots$  образуют **замкнутую фигуру** и  $w_k$  обозначает сопротивление проводника  $k$ ,  $E_k$  – электродвижущая сила, которая содержится в нем и имеет то же самое направление, что и  $I_k$ , то, в случае, если  $I_{k1}, I_{k2}, \dots$  считаются положительными в соответствие с *одним* направлением, запишем

$$w_{k1}I_{k1} + w_{k2}I_{k2} + \dots = E_{k1} + E_{k2} + \dots$$

Если проводники  $l_1, l_2, \dots$  соединены в **одной точке** и  $I_{l1}, I_{l2}, \dots$  по отношению к этой точке все обозначены как положительные, то

$$I_{l1} + I_{l2} + \dots = 0.$$

Итак, понятие **проводник** соответствует современному понятию элемента электрической цепи, в данном случае – резистора. Вместо привычных современных электро-радио элементов ученые использовали тогда любые предметы, материал которых способен был проводить электрический ток. Второй, выделенный нами, термин – **замкнутая фигура** соответствует современному понятию электрический контур. Очевидно, что термин **одна точка** соответствует современному понятию электрический узел.

Любое открытие, важное теоретическое положение имеет не только автора, но и предшественников. Они были даже у Г. Ома, и он сам рассказал о достижениях своих коллег в статье [5], вышедшей раньше книги [1]. Это были: 1) Дэви (Davy), который в 1821 году установил, что проводимость проволоки зависит от температуры и свойств материала, а также от площади поперечного сечения; 2) Беккерель (Becquerel), который в 1825 году подтвердил результаты Дэви.

Однако, не владея русским языком, ученый не мог знать, что почти на 25 лет его опередил российский академик В.В. Петров. В 1803 году он завершил эксперименты по изучению проводимости разных материалов и

опубликовал книгу «Известие о Гальвани-Вольтовых опытах». Петров самостоятельно пришел к выводу, что действие «гальвани-вольтовской жидкости» зависит от сечения проводника и ввел понятие сопротивления. Попутно ученый открыл явление электрической дуги, использовав самодельный источник постоянного тока напряжением более 3000 вольт.

История отдала предпочтение Георгу Ому, так как он привел наиболее исчерпывающую формулировку закона своего имени. Кроме того, для своих физических исследований Ом настойчиво использовал математику, что тогда не было общепринятым.

По аналогии с формулой Фурье для теплового потока  $\Gamma$ . Ом находит формулу для электрического тока [1]:

$$S = \frac{A}{L}, \text{ или в дифференциальной форме: } S = \chi \cdot \omega \frac{du}{dx}, \quad (1)$$

где  $S$  – сила тока, [А];  $A$  – суммарное напряжение (напряжение участка цепи), [В];  $L$  – «приведенная длина» проводников (сопротивление участка цепи), [Ом];  $\chi$  – удельная проводимость, [ $\text{Ом}^{-1}\text{м}^{-1}$ ];  $\omega$  – поперечное сечение проводника, [ $\text{м}^2$ ];  $x$  – малый участок длины, [м].

В своих экспериментах Ом подключал к источнику как один, так и несколько последовательно соединенных проводников из разных металлов [6]. Это позволило утверждать о том, что сумма напряжений в контуре равна нулю (второй закон Кирхгофа).

Русский коллега Г. Ома, академик В. Петров был склонен к построению более сложных электрических цепей, в которых есть разветвления. Он первый высказал утверждение, предвосхитившее первый закон Кирхгофа. Для проверки этого утверждения Петров создал оригинальный (химический) прибор для измерения величины электрического тока. И у Густава Кирхгофа были предшественники...

Следует отметить, что второй закон Кирхгоф доказал с помощью закона Ома для ветви [2]. В завершение этого фрагмента комментария отметим, что в работе [2] нумерация законов соответствует современной, а в статье [3] – она изменена. Вероятно, автор посчитал, что уравнение

равновесия контура составляется, прежде всего, для элементарной цепи, тогда как узлы есть атрибут цепи сложной.

Введение к своей статье Г. Кирхгоф завершает рассуждением о том, что решить систему уравнений, составленную по приведенным выше «теоремам», можно только с помощью метода Крамера, так как он не имеет ограничений на ранг матрицы коэффициентов. Но даже применение метода Крамера не решало проблему, так как раскрыть определитель большого размера весьма непростая задача.

Таким образом, трудности вычислений ограничивают сложность поставленной задачи. Осознав это, Кирхгоф решил, что слагаемые определителей можно составить комбинаторно, если знать их структуру. И тут автор статьи делает шаг, который даст новый импульс развитию теории электрических цепей – Кирхгоф предлагает использовать некоторые понятия теории графов.

Для выпускника Кёнигсбергского университета – центра развития начал теории графов – изображение электрической цепи графом было естественным. В статье [2] мост постоянного тока еще достаточно сильно напоминает планшет, который использовал Уинстон в своих экспериментах с этой схемой [7], рис.1,а.

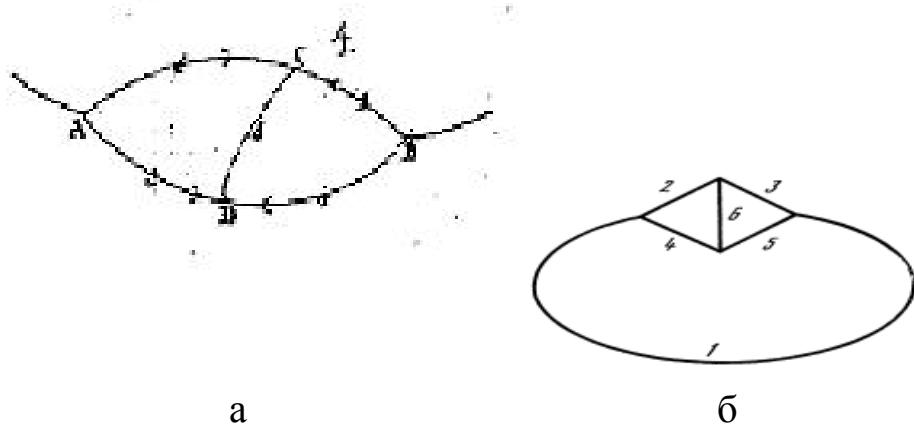


Рис.1. Первые изображения электрической цепи.

Для большего сходства с планшетом следует заменить стрелки и обозначения узлов клеммами. Однако уже в статье [3] та же цепь представляется обычным ненаправленным графом, рис.1,б.

Российский академик Л.Эйлер приезжал в Кёнигсберг знакомиться с достижениями университетских ученых в теории графов. Будучи в гостях у ученых университета, гуляя по центру города Эйлер сформулировал классическую задачу теории графов «О Кёнигсбергских мостах». Именно, с формулы российского академика Кирхгоф начинает вводить язык теории графов в теорию электрических цепей:

$$\mu = n - m + 1, \quad (2)$$

где  $\mu$  – число независимых контуров графа,  $n$  – число его ветвей,  $m$  – количество узлов графа.

Далее высказывается предположение о структуре слагаемых определителей, находящихся в знаменателе и числителе формулы Крамера. Правда, когда Кирхгоф говорит о структурах слагаемых определителя, его рассуждения, в большей мере, связаны с графиком схемы, а не с системой уравнений, полученной по законам электрических цепей.

В числителе после раскрытия определителя формулы Крамера предполагается получить слагаемые, в каждом из которых будет один контур (из графа удаляем на одну связь меньше). Слагаемые умножаются на соответствующие значения ЭДС. Здесь в переводе допущена грубая ошибка (**ни одной замкнутой фигуры**), поэтому приводим цитату из оригинальной работы [3]:

und es ist der Zähler von  $I_\lambda$  die Summe derjenigen Combinationen von  $w_1, w_2 \dots w_n$  zu je  $\mu - 1$  Elementen,  $w_{k_1} \cdot w_{k_2} \dots w_{k_{\mu-1}}$ , welche die Eigenschaft haben, dass nach Fortnahme von  $k_1, k_2, \dots k_{\mu-1}$ , eine geschlossene Figur übrig bleibt, und dass in dieser  $\lambda$  vorkommt; eine jede Combination multiplicirt mit der Summe der elektromotorischen Kräfte, welche sich auf der zugehörigen geschlossenen Figur befinden. Die elektromotorischen

то есть «числитель  $I_\lambda$  есть сумма некоторых комбинаций из  $w_1, w_2, \dots w_n$  по  $\mu - 1$  элементов в каждой  $w_{k_1}, w_{k_2}, \dots w_{k_{(\mu-1)}}$ , которые обладают свойством, что после удаления проводников  $k_1, k_2, \dots k_{\mu-1}$  **остается одна** замкнутая

фигура, и в нее входит ветвь  $\lambda$ ; каждая комбинация умножается на сумму электродвижущих сил, находящихся в замкнутой фигуре».

**Раздел 1.** Число, найденное по формуле (2), можно трактовать не только как количество независимых контуров. Оно равно минимальному количеству ветвей, после удаления которых в графе не остается ни одной «замкнутой фигуры». Так вводится понятие дерева схемы. Структуру слагаемых определителя числителя автор предлагает находить, вычеркивая в списке ветвей-связей одну из них:

$$\begin{array}{cccc} 2, & 3, & \dots & \mu \\ 1, & & 3, & \dots \mu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & 2, & \dots & \mu-1 \end{array} \quad (3)$$

В каждой строчке выражения (3) находятся ветви-связи, после удаления которых в графе остается только один контур.

Для графа рис.1 б выражение (3) будет иметь вид:

$$\begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{array} \quad (4)$$

Соответственно после удаления пар ветвей 2,3; 1,3 и 1,2 в графе останутся контуры {1,4,5}, {2,4,6} и {3,5,6}. Отсюда

$$-I_1R_1 + I_4R_4 - I_5R_5 = -E_1. \quad (5)$$

$$I_2R_2 - I_4R_4 + I_6R_6 = -E_2 + E_6. \quad (6)$$

$$I_3R_3 + I_5R_5 - I_6R_6 = -E_3 - E_6. \quad (7)$$

Действительно, с помощью сложения или вычитания уравнений (5)–(7) можно получить описание остальных контуров графа. Например, складывая уравнения (5) и (6), получаем:

$$-I_1R_1 + I_2R_2 - I_5R_5 + I_6R_6 = -E_1 - E_2 + E_6 \quad (8)$$

По изображению электрической цепи рис.2 можно убедиться, что уравнение (8) соответствует контуру {1,2,5,6}.

Разумеется, Кирхгоф указывает только принцип получения множеств ветвей-связей. Приведенное выше выражение (4) содержит

ветви-связи соответствующие дереву  $\{4,5,6\}$ . Для каждого дерева нужно составлять свое перечисление ветвей-связей (4).

**Раздел 2.** В этом разделе Кирхгоф утверждает, что теоремы, приведенные во введении, могут дать такое количество уравнений, которого достаточно для нахождения всех неизвестных. Уместно привести прямую цитату из статьи [3]:

«Так как теоремы 1 и 2 позволяют получить необходимое число уравнений для определения токов  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , то применим их, после чего, как было показано выше, они будут выглядеть следующим образом:

$$\alpha_1^1 w_1 I_1 + \alpha_2^1 w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^1 w_n I_n = \alpha_1^1 E_1 + \alpha_2^1 E_2 + \dots + \alpha_n^1 E_n$$

$$\alpha_1^2 w_1 I_1 + \alpha_2^2 w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^2 w_n I_n = \alpha_1^2 E_1 + \alpha_2^2 E_2 + \dots + \alpha_n^2 E_n$$

.....

$$\alpha_1^\mu w_1 I_1 + \alpha_2^\mu w_2 I_2 + \dots + \alpha_n^\mu w_n I_n = \alpha_1^\mu E_1 + \alpha_2^\mu E_2 + \dots + \alpha_n^\mu E_n$$

$$\alpha_1^{\mu+1} I_1 + \alpha_2^{\mu+1} I_2 + \dots + \alpha_n^{\mu+1} I_n = 0$$

$$\alpha_1^{\mu+2} I_1 + \alpha_2^{\mu+2} I_2 + \dots + \alpha_n^{\mu+2} I_n = 0$$

.....

$$\alpha_1^n I_1 + \alpha_2^n I_2 + \dots + \alpha_n^n I_n = 0 \quad (9)$$

где величины  $\alpha$  принимают значения +1, -1 или 0, а  $\mu$  имеет то же самое значение, что и раньше».

Составим систему уравнений (9) для примера электрической цепи рис.2.

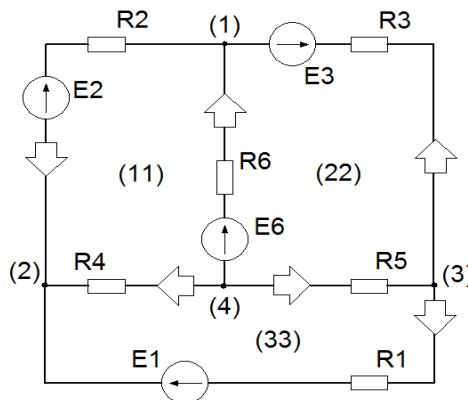


Рис. 2. Электрическая цепь, соответствующая графу из работы [3]

$$\begin{bmatrix} 0 & R_2 & 0 & -R_4 & 0 & R_6 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & R_5 & -R_6 \\ -R_1 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_2 + E_6 \\ -E_3 - E_6 \\ -E_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Ток первой ветви по методу Крамера находится по формуле:

$$I_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad (11)$$

где  $\Delta$  – определитель знаменателя системы уравнений,  $\Delta_1$  – определитель матрицы системы уравнений, в которой на первом месте стоит вектор правых частей.

Систему уравнений (10) можно легко решить с помощью программы Excel, если известны параметры резисторов и источников ЭДС:

$$\begin{aligned} R_1 &= 10\Omega; R_2 = 15\Omega; R_3 = 20\Omega; E_1 = 10V; E_2 = 15V; \\ R_4 &= 25\Omega; R_5 = 30\Omega; R_6 = 35\Omega. E_3 = 20V; E_6 = 25V. \end{aligned}$$

Получаются следующие значения определителей и тока первой ветви:

$$\Delta_1 = 160375, \Delta = 161625, I_1 = 0,992266 \text{ A.}$$

Для проверки результата решения системы уравнений (10) составим систему уравнений, в которой вектор неизвестных будет содержать, так называемые контурные токи:

$$\begin{bmatrix} (R_2 + R_4 + R_6) & -R_6 & -R_4 \\ -R_6 & (R_3 + R_5 + R_6) & -R_5 \\ -R_4 & -R_5 & (R_1 + R_4 + R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -E_2 + E_6 \\ -E_3 - E_6 \\ -E_1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

После подстановки параметров резисторов и источников ЭДС получаем:  $\Delta_3 = -160375, \Delta = 161625, I_1 = -0,99227 \text{ A.}$

Интересно, что системы уравнений (10) и (12) дают одинаковые значения определителей формулы (11), хотя их определители отличаются как размерами, так и значениями элементов.

**Раздел 3.** В этом разделе автор указывает на то, что комбинация элементов (слагаемое определяя знаменателя), кроме параметров резисторов, содержит коэффициенты  $\alpha$ , т.е. общее количество символов слагаемого должно быть равно числу ветвей  $n$ . Так как предполагается, что электрическая цепь может быть очень большого размера, то Кирхгоф главным методом исследования выбирает анализ различных ситуаций, которые могут возникнуть при решении уравнений. Рассматриваются особые значения параметров, например,  $w=\infty$ . Такое значение интерпретируется как разрыв соответствующей ветви.

Приведем цитату из этого раздела статьи, так как она важна для понимания общего подхода к решению большой системы уравнений:

«Разделим числитель и знаменатель переменной  $I$  на  $w_1, w_2, \dots, w_{\mu-1}$  и придадим величинам значение, равное бесконечности  $w_1=\infty, w_2=\infty, \dots, w_{\mu-1}=\infty$ . В результате  $I_\lambda$  перейдет в  $(I_\lambda)$ . Обозначим функцию от  $E$  как  $A_{x1,x2,\dots,x\mu-1}^\lambda$ , которая в числителе  $I_\lambda$  умножается на  $w_1, w_2, \dots, w_{\mu-1}$  и коэффициенты при  $w_{x1}, w_{x2}, \dots, w_{x\mu}$  в знаменателе как  $\alpha_{x1,x2,\dots,x\mu}$  тогда:

$$(I_\lambda) = \frac{A_{x1,x2,\dots,x\mu-1}^\lambda}{\alpha_{1,2,\dots,\mu-1,\mu} \cdot w_\mu + \alpha_{1,2,\dots,\mu-1,\mu+1} \cdot w_{\mu+1} + \dots + \alpha_{1,2,\dots,\mu-1,n} \cdot w_n}$$

В силу предпосланного замечания, если проводник  $\lambda$  содержится в ряду  $1, 2, \dots, \mu-1$ , то

$$(I_\lambda) = 0,$$

а если проводник  $\lambda$  не содержится в ряду  $1, 2, \dots, \mu-1$ , то

$$(I_\lambda) = I'_\lambda,$$

где  $I'_\lambda$  – сила тока, протекающего по проводнику  $\lambda$ , когда проводники  $1, 2, \dots, \mu-1$  удалены».

В результате деления останутся только те слагаемые, в состав которых входят все ветви делителя. Так как предложенный делитель имеет на один элемент меньше, чем слагаемое числителя и знаменателя,

то в числителе остаются некоторые ЭДС, а в знаменателе – некоторые сопротивления. Остальные слагаемые определителей превращаются в нуль после приятия делителю значения бесконечность.

Итак, в результате применения описанных выше операций точное решение для тока  $I_\lambda$  по методу Крамера становится приближенным, так как оно следует из уравнения для единственного, оставшегося после удаления почти всех ветвей-связей, контура. Это уравнение легко записать, если просто по графу выбрать контур, содержащий ветвь  $\lambda$ . Как видим, эти действия доказывают, что Кирхгоф искал пути создания топологического метода решения, изучал структуру слагаемых определителей формулы (11), рассматривал различные случаи.

Найдем структуру слагаемых определителя знаменателя формулы (11) с помощью декартова произведения «контурных множеств» графа электрической цепи рис.2 [8]:  $\{2,4,6\} \times \{3,5,6\} \times \{1,4,5\}$ .

Результат запишем в виде структурного числа [9]:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 6 & 5 & 6 & 6 & 4 & 5 & 5 & 6 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

Каждый столбец структурного числа (13) содержит номера ветвей графа схемы рис.1, которые входят в слагаемые определителя знаменателя, большая часть элементов числа (13) являются деревьями графа. Отметим, что столбцы структурного числа, стоящие на позициях: 1, 6, 12, 16, представляют контура схемы рис.2. По выражению (13) легко вычисляется определитель знаменателя системы, для этого следует заменить символы ветвей параметрами элементов и совершить алгебраические операции:  $\Delta A = 161625$ .

Как видим, полученный результат совпадает с определителем системы уравнений (10).

Запишем другое структурное число, которое содержит номера ветвей-связей (дополнений) каждого элемента числа (13):

$$A_d = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 5 & 4 & 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

Допустим, что мы ищем ток первой ветви, которая входит в единственный оставшийся контур, а значит, эта ветвь не может быть ветвью-связью. Поэтому возьмем алгебраическую производную от числа (14) по ветви 1 [10]:

$$\frac{dA_d}{d1} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 6 & 5 & 4 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

(15)

В соответствие с правилом алгебраического дифференцирования совершаются следующие операции: 1) из структурного числа (14) изымаются столбцы, содержащие ветвь 1 (аргумент дифференцирования); 2) из выбранных столбцов удаляется ветвь 1. Легко убедиться, что после удаления ветвей, содержащихся в каждом столбце числа (15), в графе схемы рис.2 остается только один контур, включающий ветвь 1. Другими словами, существует восемь контуров, содержащих ветвь 1.

Кирхгоф не замечает того, что его рассуждения относительно структуры слагаемых определителя знаменателя (11) не справедливы для системы уравнений (9), или примера (10). В действительности, граф электрической цепи, рис.1,б является для него исходным объектом и он уверен, что система уравнений (9) полностью соответствует выводам проведенного анализа. Да, структурно это так, но параметры должны иметь другую размерность. Контрую соответствует сопротивление, а узлу – проводимость.

Найдем структуру слагаемых определителя знаменателя формулы (11) с помощью декартова произведения «узловых множеств» графа электрической цепи рис.2 [8]:  $\{2,3,6\} \times \{1,2,4\} \times \{1,3,5\}$ .

Результат умножения запишем в виде структурного числа [10]:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 6 & 6 & 4 & 5 & 6 & 5 & 6 & 5 & 6 & 6 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

Каждый столбец структурного числа (16) содержит номера ветвей графа схемы рис.1б, которые являются деревьями графа. Число деревьев определяется по теореме Кэли:  $D=m^{m-2}=4^2=16$ .

**Раздел 4.** В этом разделе Кирхгоф возвращается к выражению тока, который течет в контуре, оставшемся после удаления  $\mu-1$  ветвей-связей:

$$I'_\lambda = \frac{E_{\lambda 1} + E_{\lambda 2} + \dots + E_{\lambda \nu}}{w_{\lambda 1} + w_{\lambda 2} + \dots + w_{\lambda \nu}}. \quad (17)$$

Ток контура определяется как частное от деления «суммы ЭДС контура» на «собственное сопротивление» контура. Далее следует обширное доказательство этого. Однако, как прийти к полному значению тока осталось неизвестным.

В статье [11] приведено одно из возможных продолжений решения задачи. Допустим, что мы ищем значение тока ветви 1. Существует восемь контуров, содержащих эту ветвь. Множество контуров, в которых содержится ветвь 1, получаем с помощью процедуры поочередного удаления ветвей-связей из числа (15). Номера ветвей контура записываем в числитеље условной дроби, в знаменатель заносим номера ветвей-связей.

Так как ветви-связи ранее были удалены, они возвращаются в выражение для тока и в числитељ, и в знаменатель. Умножение знаменателя и числитеља на одно и то же число не изменяет результат деления. Найденные токи нужно интерпретировать как контурные. Даже в обычном методе контурных токов контура накладываются один на другой, при этом общие ветви объединяются. Отсюда следует, что повторяющиеся комбинации резисторов будут объединяться.

$$\frac{\{1, 2, 5, 6\}}{\{3, 4\}} \quad I'_1 = \frac{-E_1 - E_2 + E_6}{1 + 2 + 5 + 6} \quad I''_1 = \frac{-E_1 R_3 R_4 - E_2 R_3 R_4 + E_6 R_3 R_4}{R_1 R_3 R_4 + R_2 R_3 R_4 + R_5 R_3 R_4 + R_6 R_3 R_4}$$

$$\frac{\{1, 4, 5\}}{\{2, 3\}} \quad I'_1 = \frac{-E_1}{1 + 4 + 5} \quad I''_1 = \frac{-E_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3 + R_4 R_2 R_3 + R_5 R_2 R_3}$$

$$\frac{\{1, 4, 5\}}{\{2, 6\}} \quad I'_1 = \frac{-E_1}{1 + 4 + 5} \quad I''_1 = \frac{-E_1 R_2 R_6}{R_1 R_2 R_6 + R_4 R_2 R_6 + R_5 R_2 R_6}$$

$$\frac{\{1, 4, 5\}}{\{3, 6\}} \quad I'_1 = \frac{-E_1}{1 + 4 + 5} \quad I''_1 = \frac{-E_1 R_3 R_6}{R_1 R_3 R_6 + R_4 R_3 R_6 + R_5 R_3 R_6}$$

$$\begin{array}{lll}
\frac{\{1, 3, 4, 6\}}{\{2, 5\}} & I'_1 = \frac{-E_1 - E_3 - E_6}{1 + 3 + 4 + 6} & I''_1 = \frac{-E_1 R_2 R_5 - E_3 R_2 R_5 - E_6 R_2 R_5}{R_1 R_2 R_5 + R_3 R_2 R_5 + R_4 R_2 R_5 + R_6 R_2 R_5} \\
\frac{\{1, 2, 3\}}{\{4, 5\}} & I'_1 = \frac{-E_1 - E_2 - E_3}{1 + 2 + 3} & I''_1 = \frac{-E_1 R_4 R_5 - E_2 R_4 R_5 - E_3 R_4 R_5}{R_1 R_4 R_5 + R_2 R_4 R_5 + R_3 R_4 R_5} \\
\frac{\{1, 2, 3\}}{\{4, 6\}} & I'_1 = \frac{-E_1 - E_2 - E_3}{1 + 2 + 3} & I''_1 = \frac{-E_1 R_4 R_6 - E_2 R_4 R_6 - E_3 R_4 R_6}{R_1 R_4 R_6 + R_2 R_4 R_6 + R_3 R_4 R_6} \\
\frac{\{1, 2, 3\}}{\{5, 6\}} & I'_1 = \frac{-E_1 - E_2 - E_3}{1 + 2 + 3} & I''_1 = \frac{-E_1 R_5 R_6 - E_2 R_5 R_6 - E_3 R_5 R_6}{R_1 R_5 R_6 + R_2 R_5 R_6 + R_3 R_5 R_6}
\end{array}$$

Числитель и знаменатель выражения для полного тока запишем раздельно. Числитель:

$$\begin{aligned}
& -E_1(R_2 R_3 + R_2 R_6 + R_3 R_6 + R_3 R_4 + R_4 R_5 + R_4 R_6 + R_5 R_6 + R_2 R_5) - \\
& -E_2(R_3 R_4 + R_4 R_5 + R_4 R_6 + R_5 R_6) - \\
& -E_3(R_2 R_5 + R_4 R_5 + R_4 R_6 + R_5 R_6) - \\
& +E_6(R_3 R_4 - R_2 R_5).
\end{aligned}$$

После подстановки значений ЭДС и резисторов получаем число - 160375. Можно убедиться по результату объединения комбинаций элементов в знаменателе восьми выражений, что полученный таким образом знаменатель состоит из тех же комбинаций параметров цепи, которые следуют из структурного числа (13), поэтому значение детерминанта будет 161625. Ток первой ветви  $I_1 = 0,992266$  А.

**Раздел 5.** Посвящен доказательству того факта, что формула Эйлера (2) справедлива только для графа, который не распадается на несколько совершенно отдельных частей. Кирхгоф заканчивает статью объяснением особенностей формулы (2) потому, что с нее он и начинал вводить элементы теории графов в работу [3].

**Заключение.** В завершение статьи Кирхгоф формулирует принцип взаимности и рассуждает на тему запрещенных комбинаций элементов в знаменателе. Предлагается теоретико-графовый алгоритм, с помощью которого эти комбинации можно находить. Приведем последнюю цитату из статьи [3]:

«Например, если проводники 1,2,3 сходятся в одной точке, а проводники 3,4,5 – в другой точке и проводники 5,6,7 – в третьей точке, то в знаменателе отсутствуют все сочетания, содержащие

$$w_1 w_2 w_3; w_3 w_4 w_5; w_5 w_6 w_7; w_1 w_2 w_4 w_5;$$

$$w_3 w_4 w_6 w_7; w_1 w_2 w_4 w_6 w_7 \quad ».$$

Изображение рис.3 из оригинальной статьи приводится как иллюстрация к возможному топологическому алгоритму, по которому автор рекомендует находить запрещенные комбинации.

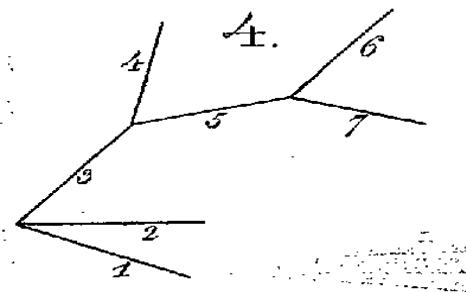


Рис. 3. Иллюстрация к топологическому правилу  
нахождения запрещенных комбинаций

Действительно, такие комбинации из последней цитаты можно отследить по графу на рис.3, который отсутствует в переводе статьи [4]. Вместе с тем приведенный пример не связан с графиком на рис.1,б.

Однако, кроме приведенных выше запрещенных комбинаций, Кирхгоф приводит комбинации, запрещенные для знаменателя решения электрической цепи, рис.1б.

$$w_1 w_2 w_4; w_1 w_3 w_5; w_2 w_3 w_6; w_4 w_5 w_6.$$

Каждая из этих комбинаций является деревом графа рис.1,б и они отсутствуют в структурном числе (13), которое получено декартовым умножением «контурных множеств» графа электрической цепи рис.2.

Оригинальная работа [3] может быть получена всего в нескольких библиотеках СНГ. Нам известно, что журнал с этой статьей хранится в фондах библиотек Ленинграда, Москвы, Одессы и Львова, поэтому она не

может считаться доступной для широкого круга специалистов. Именно этот рисунок натолкнул автора данной статьи на мысль о построении графа разомкнутых путей схемы [12]. Еще раз убеждаешься, что нет мелочей в пионерских работах основателей теории электрических цепей.

**Выводы:** В результате анализа статьи Кирхгофа [3], которую мы предлагаем считать первой работой теории электрических цепей, были разобраны как достижения ученого, так и его мимолетные заблуждения, из которых он выходил самостоятельно. Можно только удивляться тому, что в работе фактически сформулировано понятие матрицы инциденций тогда, когда понятие произвольной матрицы только входило в математику. Понятие дерева дало жизнь топологическим методам расчета электрических цепей и получило развитие в качестве метода  $k$ -деревьев [8]. Одним словом, очень интересно следить за извивами мысли Г. Кирхгофа, который и сегодня звучит вполне современно.

### Список литературы

1. Ohm G.S. Die galvanische Kette, mathematisch bearbeitet. –Berlin, T.H. Riemann, 1827. – 245 s.
2. Kirchhoff G. Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch kreisförmige // Annalen der Physik und Chemie.– 1845.– Bd. 64.– S. 497–514.
3. Kirchhoff G. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird // Annalen der Physik und Chemie, 1847.– Bd. 72.– S. 497–508.
4. Кирхгоф Г. О решении уравнений, к которым приводит изучение линейного распределения гальванических токов. – Кирхгоф Г. Избранные труды. – М.: Наука, 1988. – С. 170–178.
5. Ohm G.S. Versuch einer Theorie der durch galvanische Kräfte hervorgebrachten elektroskopischen Erscheinungen // Annalen der Physik und Chemie.– 1826.– Bd. 6.– S. 459–469.

6. Шнейберг Я. Как впервые была измерена сила электрического тока (К 180-летию открытия закона Ома) // Мир измерений.– 2007.– №11 ([http://io.nios.ru/old/docs/shneiberg\\_11\\_2007.pdf](http://io.nios.ru/old/docs/shneiberg_11_2007.pdf)).
7. Wheatstone Ch. Beschreibung Verschiedener neuen Instrumente und Methoden zur Bestimmung der Constanten einer Voltaschen Kette // Annalen der Physik und Chemie.– 1844.– Bd. 62.– S. 499–543.
8. Максимович Н.Г. Теория графов и электрические цепи. – Львов: Изд. Львов. Университета, 1987. – 216 с.
9. Трохименко Я.К. Метод обобщенных чисел и анализ линейных цепей. – М.: «Сов. Радио», 1972. – 314 с.
10. Bellert S., Woźniacki H. Analiza i synteza układów elektrycznych metodą liczb strukturalnych. – Warszawa, Wyd. Naukowo-techn., 1968. – 306 s.
11. Ерохов И.В. Реконструкция первого топологического метода расчета, созданного Г. Кирхгофом // Тр. международной конференции «Континуальные алгебраические логики, исчисления и нейроинформатика в науке, технике и экономике – КЛИН – 2006». – Ульяновск: УлГТУ, 2006. – Т. 3. – С. 76–83.
12. Ерохов И.В. Граф множества разомкнутых путей одна из форм схемы соединений // Синтез, анализ и диагностика электрических цепей: Международный сборник научных трудов / Под ред. В.В.Филаретова.– Ульяновск: УлГТУ, 2012. – Вып. 10. – С. 196 –204.

**Ерохов Игорь Васильевич** – профессор Запорожского Классического Приватного Университета (Украина), кандидат технических наук.  
E-mail: [yerokhov@bigmir.net](mailto:yerokhov@bigmir.net).

## **КЛАССИКИ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ**

**ЛЕВ ВЛАДИМИРОВИЧ ДАНИЛОВ**  
**(25.05.1937 – 09.10.1988)**



Лев Владимирович родился 25 мая 1937г. в Ленинграде в семье интеллигентов (мать была врачом, отец работал в Мариинском театре). Окончив ЛЭТИ в 1960г., он через 4 года защитил кандидатскую диссертацию по специальности теоретическая электротехника. Работа получила высокую оценку специалистов. В ней Лев Владимирович доказал ряд новых теорем и установил неизвестные ранее свойства цепей с вентилями, заложил идеи эквивалентных преобразований нелинейных цепей, получивших в дальнейшем широкое развитие в цикле исследований Л.В.Данилова и его учеников.

В 1968г. в возрасте 31 года Лев Владимирович Данилов стал доктором технических наук – самым молодым в то время доктором наук ЛЭТИ. В его докторской диссертации получили существенное развитие численные методы ускоренного определения периодических режимов на основе аппроксимации нелинейных операторов. Особо следует отметить полученные в работе результаты по качественному исследованию периодических процессов в нелинейных цепях, в результате чего была обнаружена неединственность периодического режима в цепях с вентилями.

Создается научная школа – школа профессора Л. В. Данилова. Он получает приглашения для чтения лекций из-за рубежа и многих городов страны, открывает аспирантуру, пишет первую монографию. Лев Владимирович был прекрасным лектором. К его лекциям проявляли интерес не только студенты, но и коллеги по кафедре, аспиранты, стажеры. Интеллигентный, коммуникабельный, находчивый, склонный к шутке, он привлекал к себе людей, охотно делился своими мыслями и планами. В сущности, он был генератором идей в созданной им научной школе. Более тридцати молодых ученых, кандидатов и докторов наук выросли под его руководством.

Широк круг математических интересов Льва Владимировича: диофантовы уравнения, теория трансцендентных чисел, нелинейные дифференциальные уравнения. Его работы по математике отличались оригинальностью идей. Метод преобразования Лапласа для получения

тонких оценок в проблеме рациональной аппроксимации трансцендентных чисел, предложенный Л. В. Даниловым, дает подходы к ранее нерешенным проблемам. Аппарат цепных дробей он применял в теории чисел и в прикладных задачах теории цепей.

В последние годы Л. В. Данилов развивал новые взгляды на применение полиномов Вольтерры в моделировании, идентификации и синтезе. Ему удалось дать простую интерпретацию этого аппарата и упростить нахождение ядер и многомерных частотных характеристик.

Лев Владимирович был человеком разносторонних интересов с прекрасным гуманитарным вкусом. Он хорошо знал и любил литературу, живопись, историю, театр, поэзию. Сам писал стихи, увлекался спортом. Его можно было увидеть за шахматной доской, на футбольном поле, за упражнениями со штангой.

Талантливый ученый и педагог, он состоял в нескольких специализированных советах, где весьма высоко ценили его мнение о работах соискателей. Он автор 6 монографий и многочисленных научных статей.

Всю жизнь Лев Владимирович Данилов был на пути к новому и, конечно, успел бы сделать еще очень много. Его жизнь оборвалась в расцвете творческих сил.

Память о замечательном человеке, ученом, педагоге навсегда останется в сердцах тех, кому посчастливилось знать Льва Владимировича, учиться у него и работать с ним.

### **Список литературы**

1. Данилов Л.В. Электрические цепи с нелинейными R-элементами.– М.: Связь, 1974.
2. Данилов Л.В. Ряды Вольтерра – Пикара в теории нелинейных электрических цепей.– М.: Радио и связь, 1987.
3. Теория нелинейных электрических цепей // Л.В. Данилов, П.Н. Матханов, Е.С. Филиппов.– Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1990.

4. Данилов Л.В. О синтезе нелинейных электронных схем // Электронное моделирование.– 1981.– № 3.– С.29–31.
5. Данилов Л.В., Конник С.И., Шеслер А.А. Ряды Вольтера – Пикара и их применение для анализа, синтеза и идентификации нелинейных цепей // Электронное моделирование.– 1984.– № 4.– С.26–32.
6. Данилов Л.В., Конник С.И., Кригер Л.Л. О синтезе нелинейных преобразователей с линейным входом // Теоретическая электротехника.– 1985.– № 39.– С.47–52.
7. Данилов Л.В., Клименко И.И. Оценка работоспособности нелинейных электронных схем // Изв. вузов. Радиоэлектроника.– 1989.– № 3.– С.23–31.
8. Данилов Л.В., Романюк С.Ф. О синтезе электрических цепей, компенсирующих нелинейные искажения // Электронное моделирование.– 1988.– № 2.– С.7–13.
9. Данилов Л.В., Соловьева Е.Б. Построение макромоделей нелинейных электрических цепей на основе функциональных полиномов // Сб. науч. тр. по теории электротехники.– ГДР: Ильменау, 1989.– С.21–30.
10. Данилов Л.В., Соловьева Е.Б. Макромоделирование существенно нелинейных электрических цепей на основе функциональных полиномов // Изв. вузов. Радиоэлектроника.– 1990.– Т.33, №6.– С.3–7.

**Золотницкий Владимир Михайлович** – к.т.н., профессор кафедры ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет.

Адрес: 197376, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5, СПбГЭТУ, кафедра ТОЭ. Тел.: (812) 346-17- 96,

**Соловьева Елена Борисовна** – д.т.н., профессор, зав. кафедрой ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет.

Тел.: (812) 346-17- 96, selenab@hotbox.ru

**Чернышев Эдуард Павлович** – к.т.н., профессор кафедры ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет.

## ВОСПОМИНАНИЯ О КОЛЛЕГЕ

Лев Владимирович Данилов (как и автор этой краткой статьи – прим. редактора) был одним из двух докторантов в области теоретической электротехники, вырошенных талантливым ученым доктором технических наук профессором Матхановым П.Н. – не считая при этом представителей многочисленной плеяды кандидатов технических наук. «Школа Матханова П.Н.» была ранее и остается в настоящее время наиболее прогрессивной в области теоретической электротехники, электроники, теории цепей и систем.



Платон Николаевич Матханов

Необходимо напомнить в связи с этим несколько новых положений. Изучение активных, нелинейных, параметрических и других типов многополюсных и многомерных общего вида цепей и систем излагалась студентам ЛЭТИ им В.И.Ульянова (Ленина) с единых методических позиций, при этом предпочтение вначале отдавалось анализу процессов во временной области, при чем в частотные области также был продемонстрирован ряд смелых предложений наряду с классическими и операторными методами.

Краткий экскурс в историю изучения и преподавания основ теории цепей и полевых проблем, новизна и универсальность предложенных

подходов к анализу, синтезу и диагностике схем вызвали как горячее одобрение, так и (чего греха таить!) серьезную полемику в мире электриков и системщиков. Но изданные учебные пособия, учебники и монографии в конечном итоге по праву завоевали передовые позиции.

Лев Владимирович, несомненно был одним из первых соратников П.Н.Матханова, освоивших его научные и методические принципы, при этом существенный вклад был внесен в их дальнейшее укрепление и развитие. Однако прогрессивный подход и новые методы анализа и синтеза не сразу были оценены по их достоинству научной общественностью.

Достаточно сказать, что защита докторской диссертации Л.В.Данилова прошла в городе Киеве с большим трудом. Как он меня сам проинформировал – перевес был буквально в один голос. Но оптимизм и воля ученого взяли вверх – в скором времени многие математические приемы, применявшиеся П.Н.Матхановым и Львом Владимировичем, нашли широкое конкретное распространение.

На основе идей, заложенных в основе докторской диссертации Л.В.Данилова, появились дальнейшие работы его учеников: быстро защитили свои кандидатские диссертации аспиранты, соискатели (в том числе его брат Г.В.Данилов, Липкань, ряд аспирантов Таганрогского политехнического института и многих других).

Были установлены тесные творческие контакты с зарубежными профессорами Филипповым (г.Ильменау, Высшая школа, ГДР), профессором Неновым (МЭИ «Ленин», София, Болгария) и многими другими авторитетными учеными и преподавателями высшей школы.

Серьезные педагогические нагрузки и научные исследования не воспрепятствовали публикации монографии по анализу нелинейных R-цепей и учебных пособий (совместных с П.Н.Матхановым и Е.С. Филипповым), сборника задач по ТОЭ (в соавторстве), научных статей, различного рода рецензий и т.п.

Лев Владимирович – и это нельзя не отметить – был искренним и доброжелательным коллегой, который всегда с готовностью откликался

на просьбы о помощи в научном и учебном планах. А при невозможности оказания таковой честно объяснял причины отказа, не стеснялся открыто сказать, что что-то здесь не понял сам и ему надо дать некоторое время на размышление и для возможного ответа.

Судьба не всегда «гладит по головке» даже талантливых людей. Одним из примеров тому может послужить история защиты диссертации последнего ученика Л.В.Данилова – заведующего кафедрой Одесского политехнического института Парасочкина Владимира Александровича.

В.А.Парасочкин трижды и безуспешно докладывал материалы своей докторской работы на кафедре ТОЭ Ленинградского политехнического института им. М.И.Калинина. Напомню, что в основе этой докторской диссертации лежала методика Л.В.Данилова для анализа временных процессов в нелинейных цепях с помощью метода «подставка плюс ступенька». Только благодаря убежденности в правоте самого докторанта и непосредственного участия научного консультанта – Л.В.Данилова, диссертационная работа В.А.Парасочкина была защищена (уже после смерти Льва Владимировича).

К сожалению, тяжелая онкологическая болезнь вырвала из наших рядов педагога и человека, ученого и воспитателя молодежи, находящегося в пике творческой формы (в 51 год). Лев Владимирович мужественно переносил многолетний недуг, был жизнерадостным и оптимистом. Таким он и остался в памяти всех, знавших его близких людей.

**Бондаренко Анатолий Васильевич** – д.т.н., профессор, действительный член Академии Электротехнических Наук РФ, профессор кафедры электроэнергетики и электротехники Санкт-Петербургского государственного архитектурно-строительного университета. E-mail: avb38@mail.ru

## **О ЛЬВЕ ВЛАДИМИРОВИЧЕ ДАНИЛОВЕ – МОЕМ ТАЛАНТЛИВОМ СОКУРСНИКЕ**

Учился Лёва (будущий профессор, доктор технических наук Лев Владимирович Данилов) в параллельной 443 группе факультета электротехники и автоматики ЛЭТИ по кафедре электронных и ионных преобразователей высокого напряжения. Группа была из шумных непосед – так казалось моей 442 группе (тихой и усидчивой). В ЛЭТИ мы поступили в 1954 г., закончили вуз в 1960 г. Поближе познакомились только на 2-м курсе на общих занятиях по Военной морской кафедре. Вот, пожалуй, и все первые воспоминания.

Второй раз (и по-серьезному) мы познакомились в 1965 г., когда я пришел работать ассистентом на кафедру теоретических основ электротехники (ТОЭ) ЛЭТИ. Одновременно в 1964 г. мы защитили кандидатские диссертации. Однако Лёвушка, не останавливаясь, почти тут же (в 1968 г.) защитил докторскую диссертацию под руководством Платона Николаевича Матханова (заведующего кафедрой ТОЭ – самобытного и гениального ученого), который явно ему покровительствовал, как и всем одаренным и талантливым.

Лев Владимирович быстро выдвинулся в число ведущих профессоров кафедры ТОЭ. Он увлеченно занимался наукой в области теории электрических цепей (ТЭЦ), активно и успешно участвовал во всесоюзных и международных конференциях по ТОЭ, вошел в элиту ведущих профессоров страны в области теоретической электротехники, с успехом представляя современные электротехнические тенденции развития научных школ вузов Ленинграда (и в частности, школу ЛЭТИ).

Лев Владимирович является автором нескольких монографий, многих научных статей по ТЭЦ, соавтором учебников и учебных пособий, т.е. был активным ученым и педагогом. Его работы отличались глубокими обобщениями и изяществом формы, а сам он был человеком живого и острого ума, широких знаний. Ему было свойственно умение преподнести существо любого, даже очень сложного вопроса в нескольких словах и

непременно после ясного изложения «голой идеи», как шутливо говоривал он сам.

Особенностью таланта Льва Владимировича, как большого ученого и выдающегося педагога, был выпуск на кафедре многочисленных аспирантов. Защиты кандидатских диссертаций под его руководством шли одна за другой.

Лев Владимирович был блестящим лектором с превосходными теоретическими знаниями и важными, заманчивыми приложениями. Его лекции слушали не только студенты, но и преподаватели с опытом работы. Лев Владимирович умел увлечь студентов до полного почитания, восхищения и, по-видимому, фанатизма. После его лекций хотелось работать.

Лев Владимирович был наделен удивительным обаянием. В общении с людьми отличался открытостью и доброжелательностью. Интеллектуальный, коммуникабельный, находчивый, склонный к шутке – он привлекал к себе, к нему тянулись. Будучи видным ученым, он в повседневной жизни оставался молодым, жизнерадостным непоседой.

Жизнь Льва Владимировича оборвалась совсем неожиданно для меня. До последних дней он продолжал работать: заканчивал свою часть монографии, намеченной к изданию в СССР и ГДР, регулярно встречался с аспирантами.

И последнее. В 80-х годах ко мне подошла моя отличница и попросилась на работу по науке. У меня была закрытая тематика, и я направил ее к Льву Владимировичу. Теперь это мой «суворый» заведующий кафедрой.

**Чернышев Эдуард Павлович** – к.т.н., профессор кафедры ТОЭ, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет.

Адрес: 197376, Россия, г. Санкт-Петербург, ул. Проф. Попова, д. 5, СПбГЭТУ, кафедра ТОЭ. Тел.: (812) 346-17- 96.

## **НАУЧНЫЕ ШКОЛЫ**

### **КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКИХ ОСНОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ СПбГЭТУ «ЛЭТИ» ОТ 19-ГО ДО 21-ГО СТОЛЕТИЯ**

Кафедра теоретических основ электротехники (ТОЭ) – одна из старейших кафедр Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета «ЛЭТИ» (СПбГЭТУ), создана в 1891г. Ее первым заведующим был будущий первый выборный ректор Петербургского университета, почетный инженер-электрик, профессор Иван Иванович Боргман.

В 1898г. одно из направлений кафедры – «Теория электричества и магнетизма», возглавил сам Боргман И.И., а вторым направлением – «Теория переменных токов», руководил профессор кафедры Павел Дмитриевич Войнаровский (с 1906 по 1912 гг. – ректор института). После П.Д. Войнаровского до 1942г. кафедрой «Теория переменных токов» руководил профессор П.А. Щуркевич, создавший учебную лабораторию и написавший учебник по теории переменных токов. В период 1914–1921гг. кафедрой «Теория электричества и магнетизма» руководил ученик и сподвижник А.С. Попова – профессор А. А. Петровский, учебник которого по курсу издан в 1917г. В период 1921–1939гг. кафедру «Теория электричества и магнетизма» возглавлял профессор С.И. Покровский.

В 1944г. руководство обеими кафедрами («Теория электричества и магнетизма» и «Теория переменных токов») поручено профессору Л.Н. Нейману. С 1947 года заведующим кафедрой «Теория электричества, магнетизма и строения материи» становится профессор К.И. Крылов, при нем кафедра переименована в кафедру «Теория электромагнитного поля». После войны кафедру «Теория переменных токов» возглавил доцент, к.т.н. Алексей Викторович Берендеев, окончивший электротехнический

институт в 1928г., при нем кафедра переименована в кафедру «Теория электрических цепей».

В 1955г. оба направления объединяются, образуя кафедру «Теоретические основы электротехники» (ТОЭ), заведующим которой назначается профессор С.И. Куренев. В 1959–1984 гг. кафедрой заведовал профессор Платон Николаевич Матханов, который полностью переработал курс теории электрических цепей с учетом достижений в электро-, радио- и вычислительной технике, в теории управления и фактически создал современную электротехническую школу в СПбГЭТУ.

С 1984 по 2008гг. кафедру ТОЭ возглавлял профессор Юрий Александрович Бычков, при котором методически завершилось новое прочтение курса теории цепей, сочетающее физичность, доступность и высокий математический уровень; произошло четкое деление дисциплины на вводный и фундаментальные разделы, на классические и современные приложения.

С 2008г. кафедрой руководит профессор Елена Борисовна Соловьева.

В настоящее время на кафедре развиваются следующие научные направления:

- аналитически-численные методы анализа и синтеза нелинейных динамических систем (руководитель – профессор Ю.А. Бычков);
- методы нелинейных функционалов в теории динамических систем (руководитель – профессор Е.Б. Соловьева);
- разработка единой теории поля, излучающих и приёмных устройств поперечных гравитационных волн, теории однопроводной линии (руководитель – профессор В.В. Федоров);
- аналитические методы расчета автоколебаний в релейных цепях и системах управления (руководитель – профессор Э.П. Чернышев);
- методы расчета электрических и магнитных полей, технические и технологические приложения (руководитель – профессор В.Д. Гончаров).

Кафедра обеспечивает базовую подготовку по дисциплине «Теоретическая электротехника» студентов 2-го и частично 3-го курсов

дневной, вечерней и заочной форм обучения по всем техническим направлениям и специальностям.

На кафедре ТОЭ создан многопрофильный учебно-лабораторный комплекс, включающий: 1) классическую лабораторию с реальными приборами и электрическими цепями; 2) стендовую лабораторию с цифровой обработкой информации; 3) центр компьютерных технологий в теоретической электротехнике (ЦКТЭ); 4) лабораторию на базе комплекса ELVICE; 5) лабораторию по теории электромагнитного поля.

На кафедре разработан комплекс лабораторных работ для изучения свойств электрических цепей как преобразователей сигналов во временной и частотной областях, а также поставлен лабораторный практикум по теории электромагнитного поля.

Лаборатория электромагнитного поля кафедры оснащена приборами, позволяющими студентам и магистрам проводить измерения напряженности реальных физических моделей в широком диапазоне частот от 0.1 Гц до 10 ГГц.

Лабораторные работы в компьютерном исполнении (в режиме моделирования эксперимента) проводятся в ЦКТЭ с применением программных средств Multisim v.10 и Labview v.8.2 корпорации National Instrument. В ЦКТЭ на базе пакетов Mathcad и Multisim выполняются курсовые работы по анализу и моделированию электрических цепей.

Кафедра долгие годы организует и проводит университетскую олимпиаду по ТОЭ среди студентов ЛЭТИ и региональную олимпиаду среди команд ведущих технических вузов Санкт-Петербурга (СПбГПУ, СПбГГТУ «Военмех», СПбГУИТМО, СПбГГУ (ТУ), СПбГУПС, СПбГУАП, СПбГУТ, СПбВКА). С 2012г. команда СПбГЭТУ «ЛЭТИ» участвует в открытой Московской олимпиаде по ТОЭ, организуемой МЭИ. Последними достижениями студенческой команды «ЛЭТИ» были первые места в 2012г. (в Московской олимпиаде) и 2013г. (в региональной олимпиаде по ТОЭ).

## КОНФЕРЕНЦИИ

### МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ ЭЛЕКТРОНИКА И НАНОТЕХНОЛОГИИ (EL&NANO'2013)



16–19 апреля в Национальном Техническом Университете Украины «Киевском Политехническом Институте» состоялась очередная ежегодная международная научно-техническая конференция «Электроника и нанотехнологии». На протяжении последних трех десятилетий ведущий технический ВУЗ Украины в середине апреля собирает ученых со всех концов бывшего Советского Союза, ближнего и дальнего зарубежья для обсуждения новейших достижений в области создания нанотехнологий, разработки электронной аппаратуры, преобразования радиосигналов и т.д.

Однако не только своим славным прошлым знаменательна прошедшая конференция. На этот раз её международный статус был подкреплен участием крупнейшего сообщества специалистов, работающих в области электротехники «Institute of Electrical and Electronic Engineers» (IEEE).

Институт инженеров по электротехнике и электронике (IEEE – I triple E – «Ай трипл и») – международная некоммерческая ассоциация специалистов в области техники, мировой лидер в области разработки стандартов по радиоэлектронике и электротехнике. Эта общественная некоммерческая ассоциация профессионалов появилась в 1963 году, в результате слияния Института радиотехников (Institute of Radio Engineers,

IRE) созданном в 1912 году и Американского института инженеров-электриков (American Institute of Electrical Engineers, AIEE) созданном в 1884 году.

IEEE объединяет более 400000 индивидуальных членов из 170 стран, в том числе более 100000 студентов, издаёт третью часть мировой технической литературы, касающейся применения радиоэлектроники, компьютеров, систем управления, электротехники, в том числе (на январь 2011) 122 реферируемых научных журнала и 36 отраслевых журналов для специалистов, проводит в год более 300 крупных конференций, принимала участие в разработке около 900 действующих стандартов. Все издания IEEE индексируются в главных мировых реферативных базах научных публикаций Web of Science и Scopus.

Переход на новый уровень в организации конференции «Электроника и нанотехнологии» привел к значительному росту числа участников из европейских стран (Нидерландов, Англии, Германии, Чехии, Польши, Бельгии, Эстонии, Македонии, Франции). В то же время существенно сократилось число участников из России – сказалось и увеличение размера организационного взноса, и утверждение английского языка в качестве официального. Печальное свидетельство падения общего качественного уровня российской науки, ставшее следствием хронического недофинансирования.

В этом году программа конференции предполагала параллельную работу четырех больших секций «Нано- и микроэлектроника», «Биомедицинская электроника и обработка сигналов», «Силовая электроника и интеллектуальные электроэнергетические системы» и «Электронные системы», в рамках которых было заявлено 110 докладов.

Примечательно, что в конференции «Электроника и нанотехнологии» приняли участие постоянные авторы тематических сборников САД (КЛИН) – *O.A. Витязь, К.С. Горшков, В.В. Филаретов*.

В работе *O.A. Витязя* [1] предложена новая методика анализа электрических схем с обратной связью, творчески развивающая

классические идеи Боде и Миддлброка, и связанная с использованием символьно-топологического подхода (метод сигнальных графов).

Доклад *K.C. Горшкова и В.В. Филаретова* [2] посвящен вопросам применения метода схемных определителей для анализа моделей активных электрических цепей на основе зеркальных аномальных элементов, которые подробно обсуждаются и на страницах текущего сборника.

По итогам Международной конференции «Электроника и нанотехнологии» был издан сборник трудов, материалы которого доступны через электронную библиотеку IEEE (<http://ieeexplore.ieee.org/xpl/mostRecentIssue.jsp?punumber=6547265>).

### **Список литературы**

1. Vityaz O. Distributed feedback analysis // Proceedings of 2013 IEEE XXXIII International Scientific Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). – Kiev, 16-19 April, 2013. – C. 431–435.
2. Filaretov V., Gorshkov K. Topological analysis of active networks containing pathological mirror elements // Proceedings of 2013 IEEE XXXIII International Scientific Conference on Electronics and Nanotechnology (ELNANO). – Kiev, 16-19 April, 2013.– P. 460–464.

**Горшков Константин Сергеевич** – к.т.н., доцент кафедры «Электроснабжение» Ульяновского государственного технического университета (УлГТУ); домашний адрес: г. Ульяновск, ул. Тельмана, д. 14, кв. 9; тел: 8 (908) 470-31-59; e-mail: [K.Gorshkov@ulstu.ru](mailto:K.Gorshkov@ulstu.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

<b><i>Синтез и эквивалентные преобразования электронных цепей</i></b>		
Иншаков Ю.М., Белов А.В.	Перестраиваемый активный режекторный RC-фильтр	3
Майко Г.В., Филаретов В.В.	Преобразование активных деревьев в схемах с нуллорными и зеркальными аномальными элементами	17
Майко Г.В., Филаретов В.В.	Перечисление нуллаторных и нораторных деревьев одного знака для порождения эквивалентных схем	39
<b><i>Анализ и оптимизация электронных цепей</i></b>		
Ерохов И.В.	О системе уравнений Кирхгофа для электрической цепи	69
Бондаренко А.В., Курганов С.А., Филаретов В.В.	О символьном анализе чувствительности линейных электрических цепей	79
Ласота С., Филаретов В.В.	Безызбыточный символьный анализ электрических цепей на основе схемных определителей и диаграмм деления параметров	97
Силина А.Г., Соклакова М.В., Чернышев Э.П.	Особенности аналитических методов оценки устойчивости автоколебаний в релейных цепях и системах с идеальным интегратором в контуре обратной связи	119
<b><i>Диакоптика электронных цепей</i></b>		
Бодряков Е.Р., Курганов С.А.	Независимые схемные миноры для символьного анализа линейных электрических цепей с неравновесными подсхемами	128
Курганов С.А., Филаретов В.В.	Обобщенный метод схемных миноров для символьного анализа электрических цепей по частям с управляющими связями	143

<b><i>Анализ и диагностика электроэнергетических цепей и систем</i></b>		
Афанасьев В.В., Кожевников В.М., Романенко И.Г., Данилов М.И.	Фактор надежности при оценке планов перспективного развития электроэнергетических систем	155
Бодряков Е.Р., Курганов С.А.	Коррекция режима электроэнергетической системы при подключении подсистемы с внутренними узлами	159
Круглова Т.Н., Мурадян Г.А., Коваленко В.С.	Применение экспертных данных для диагностирования мехатронных объектов	175
Афанасьев В.В., Ястребов С.С., Романенко И.Г., Данилов М.И.	Алгоритм планирования развития энергетических систем на основе анализа надежности режимов их работы	186
<b><i>Матричный анализ и теория графов</i></b>		
Филаретов В.В.	Разложение многократных суммарных и разностных алгебраических дополнений методом схемных определителей	191
Гришкевич А.А.	Алгоритм нахождения минимальных и квазиминимальных разрезов графа	213
<b><i>Цифровая электроника</i></b>		
Соловьева Е.Б., Зубарев А.В.	Спектральный метод расщепления для фильтрации импульсных помех в речевых сигналах	222
<b><i>Теория электромагнитного поля</i></b>		
Меньшов Е.Н.	Математическая модель взаимодействия ферромагнитной дисперсной фазы в дисперсной системе во внешнем магнитном поле	230

<b>Биомедицинская электроника</b>		
Горшков К.С., Михеенко А. А., Самарин В.В.	Мобильный кардиограф	235
<b>В порядке обсуждения</b>		
Кузьмин Н.П.	Многоотводные потенциометры в регулируемых электронных схемах	248
<b>Дискуссии</b>		
<i>Статья С. П. Халютина и А. А. Титова</i>		
Филаретов В.В.	Обобщенная симметрическая формула и метод наложения для линейных электрических цепей	254
<b>Из истории открытий</b>		
Ерохов И.В.	Подробный анализ первой работы по теории электрических цепей	273
<b>Классики теории цепей</b>		
Золотницкий В.М., Соловьева Е.Б., Чернышев Э.П.	Лев Владимирович Данилов	290
Бондаренко А.В.	Воспоминания о коллеге	294
Чернышев Э.П.	О Льве Владимировиче Данилове – моем талантливом сокурснике	297
<b>Научные школы</b>		
Соловьева Е.Б.	Кафедра теоретических основ электротехники СПбГЭТУ «ЛЭТИ» от 19-го до 21-го столетия	299
<b>Конференции</b>		
Горшков К.С.	Международная научно-техническая конференция IEEE «Электроника и нанотехнологии»	302

## TABLE OF CONTENTS

<b><i>Synthesis of electronic networks</i></b>		
Inshakov Ju.M., Belov A.V.	Tunable active notch RC filter	3
Mayko G.V., Filaretov V.V.	Equivalent transformations of trees with nullor and mirror anomalous elements in linear networks	17
Mayko G.V., Filaretov V.V.	Enumeration of nullator and norator trees of the same sign for a generation of equivalent circuits	39
<b><i>Analysis and optimization of electronic networks</i></b>		
Erochov I.V.	On the system of equations of Kirchhoff for electric circuit	69
Bondarenko A.V., Kurganov S.A., Filaretov V.V.	About symbolic sensitivity analysis of linear networks	79
Lasota S., Filaretov V.V.	Cancellation-free symbolic analysis of large electronic networks by means of circuit determinants and parameters division diagram	97
Silina A.G., Soklakova M.V., Chernyshev E.P.	Features of analytical methods for stability testing of self-oscillations in relay circuits and systems with an ideal integrator in feedback loop	119
<b><i>Diacoptic of electronic networks</i></b>		
Bodryakov E.R., Kurganov S.A.,	Independent circuit minors for a symbolic analysis of linear networks with nonequilibrium subcircuits	128
Kurganov S.A., Filaretov V.V.	General method of circuit minors for hierarchical symbolic analysis of electrical networks with dependent parts	143

<b><i>Analysis and diagnosis of electric power circuits and systems</i></b>		
Afanasiev V.V., Kojgevnikov V.M., Romanenko I.G., Danilov M.I.	Reliability factor in the assessment of plans of the perspective development of electric power systems	155
Bodryakov E.R., Kurganov S.A.,	Mode correction of a power system when connecting of subsystem with internal nodes	159
Kruglova T.N., Muradyan G.A., Kovalenko V.S.	Application of expert data for the diagnosis of mechatronic objects	175
Afanasiev V.V., Yastrebov S.S., Romanenko I..G., Danilov M.I.	A development scheduling algorithm of energy systems based on the analysis of reliability their mode of operation	186
<b><i>Matrix analysis and graph theory</i></b>		
Filaretov V.V.	Symbolic calculation of higher order summative and differential cofactors by means of circuit determinant method	191
Grischkevich A.A.	A algorithm for finding the minimal and almost minimal graph cuts	213
<b><i>Digital electronics</i></b>		
Solovyeva E.B., Zubarev A.V.	Spectral method of splitting for filtration of impulse noise	222
<b><i>Electromagnetic field theory</i></b>		
Menshov E.N.	Mathematical model of interaction between the ferromagnetic dispersed phase in disperse system in an external magnetic field	230
<b><i>Biomedical electronics</i></b>		
Gorshkov K.S., Miheenko A.A., Samarin V.V.	Mobile cardiograph	235

<b><i>In order to discuss</i></b>		
Kuzmin N.P.	Multiport variable resistances in regulated electronic circuits	248
<b><i>Polemics</i></b>		
<i>The paper of S. P. Chalyutin and A. A. Titov</i>		
Filaretov V.V.	Generalized symmetric formula and superposition method for linear networks	254
<b><i>From the history of discovery</i></b>		
Erochov I.V.	A detailed analysis of the first work on the theory of electrical circuits	273
<b><i>Classics of the circuit theory</i></b>		
Zolotnitski V.M., Solovyeva E.B., Chernyshev E.P.	Lev Vladimirovich Danilov	290
Bondarenko A.V.	Memories of a colleague	294
Chernyshev E.P.	About Lev Vladimirovich Danilov – my talented classmate	297
<b><i>Scientific schools</i></b>		
Solovyeva E.B.	Department of theoretical bases of electrical engineering of the electrotechnical University «LETI» from the 19th to the 21st century	299
<b><i>Conferences</i></b>		
Gorshkov K.S.	2013 IEEE XXXIII International Scientific Conference on Electronics and Nanotechnology (EL&NANO'2013)	302

**Synthesis, analysis and diagnosis of electronic networks** : The international collection of the scientific works.– Volume 11 / under edition V.V. Filaretov. – Ulyanovsk: Ulyanovsk state technical university, 2013. – 312 c.

This collection continues a series of specialized collections published in Ulyanovsk State Technical University during international conferences: «Continual algebraic logic calculus and neuralmathematics in science and technics», «Conference on logic, computer science, sociology of science» and «Volgin' Reading».

In this volume discusses the theoretical questions and practical application of the modern theory of electrical and electronic networks. Including: structural synthesis, synthesis of analog and digital filters, topological analysis, decomposition and transformation of electronic circuits presented nullor and mirror phatological elements. Is the study of electricity and mechatronic systems with the positions of the matrix analysis, graph theory and fuzzy logic. In this volume, opened a new section – «Biomedical electronics».

Recommended for specialists in the field of electronic circuitry analog and mixed discrete electronic circuits, undergraduates and graduate students of corresponding specialties.

Научное издание

**СИНТЕЗ, АНАЛИЗ И ДИАГНОСТИКА  
ЭЛЕКТРОННЫХ ЦЕПЕЙ**

Международный сборник научных трудов  
Выпуск 11

Под редакцией В. В. Филаретова

Компьютерная верстка В. В. Филаретов

Технический редактор М. В. Теленкова

ЛР № 020640 от 22.10.97.

Подписано в печать 20.12.2013. Формат 60×84/16.  
Усл. печ. л. 16,51. Тираж 100 экз. Заказ 00.

Ульяновский государственный технический университет  
432027, Ульяновск, Северный Венец, 32

Типография УлГТУ. 432027, Ульяновск, Северный Венец, 32